



# **МАТЕМАТИКА**

---

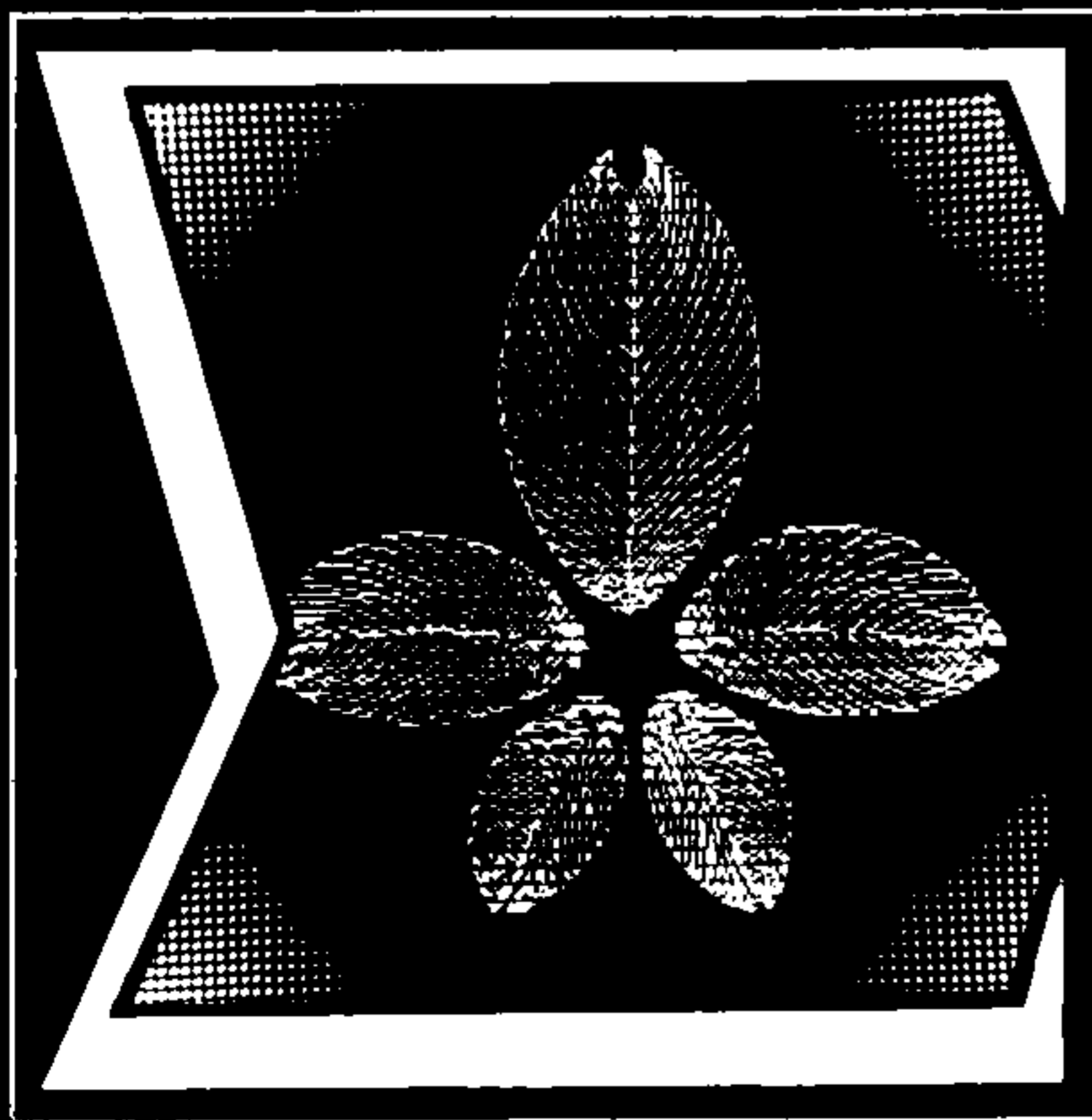
# **КИБЕРНЕТИКА**

**Новое  
в жизни,  
науке,  
технике**

**Подписная  
научно-  
популярная  
серия**

**Издается  
ежемесячно  
с 1967 г.**

**С. В. Петухов**  
**Геометрии  
живой природы  
и алгоритмы  
самоорганизации**



**1988/6**

Новое  
в жизни,  
науке,  
технике

# МАТЕМАТИКА

---

# КИБЕРНЕТИКА

Подписная  
научно-  
популярная  
серия

6/1988

Издается  
ежемесячно  
с 1967 г.

С. В. Петухов

## ГЕОМЕТРИИ ЖИВОЙ ПРИРОДЫ И АЛГОРИТМЫ САМООРГАНИЗАЦИИ

---

### СОДЕРЖАНИЕ

- Предисловие 3  
I. Эрлангенская программа и проблема геометризации в биологии 4  
II. К истории изучения симметрий и алгоритмов в морфологической самоорганизации биологических объектов 7  
III. Неевклидовы геометрии и итеративные алгоритмы в органических формах 11  
IV. Евклидовы и неевклидовы итеративные алгоритмы в кинематике биологических движений и физиологически нормальных позах. 17  
V. Концепция репликационного морфогенеза 22  
VI. Кинематика объемного роста биотел с нецикломерным взаиморасположением частей 26  
VII. Автономные автоматы и инвариантно-групповые свойства живых организмов 32  
VIII. Аперiodические итеративные биоритмы 34  
IX. О првсистеме биологической регуляции и проблемах психофизики 36  
Заключение 43  
Приложение. Математические формализмы 44  
Литература 47



Издательство  
«Знание»  
Москва  
1988

ПЕТУХОВ Сергей Валентинович, кандидат биологических наук, лауреат Государственной премии СССР, по образованию — физик, работает в отделе биомеханики Института машиноведения им. А. А. Благонравова АН СССР, где провел цикл фундаментальных исследований по теоретико-групповым свойствам биологической самоорганизации. По результатам этих исследований защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Автор монографии «Биомеханика, бионика и симметрия» (М.: Наука, 1981), а также свыше 60 других научных трудов. Награжден Золотой медалью ВДНХ и рядом других научных наград.

Рецензент: Молчанов А. М. — доктор физико-математических наук.

### Петухов С. В.

П29 Геометрии живой природы и алгоритмы самоорганизации. — М.: Знание, 1988. — 48 с. — (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика»; № 6).

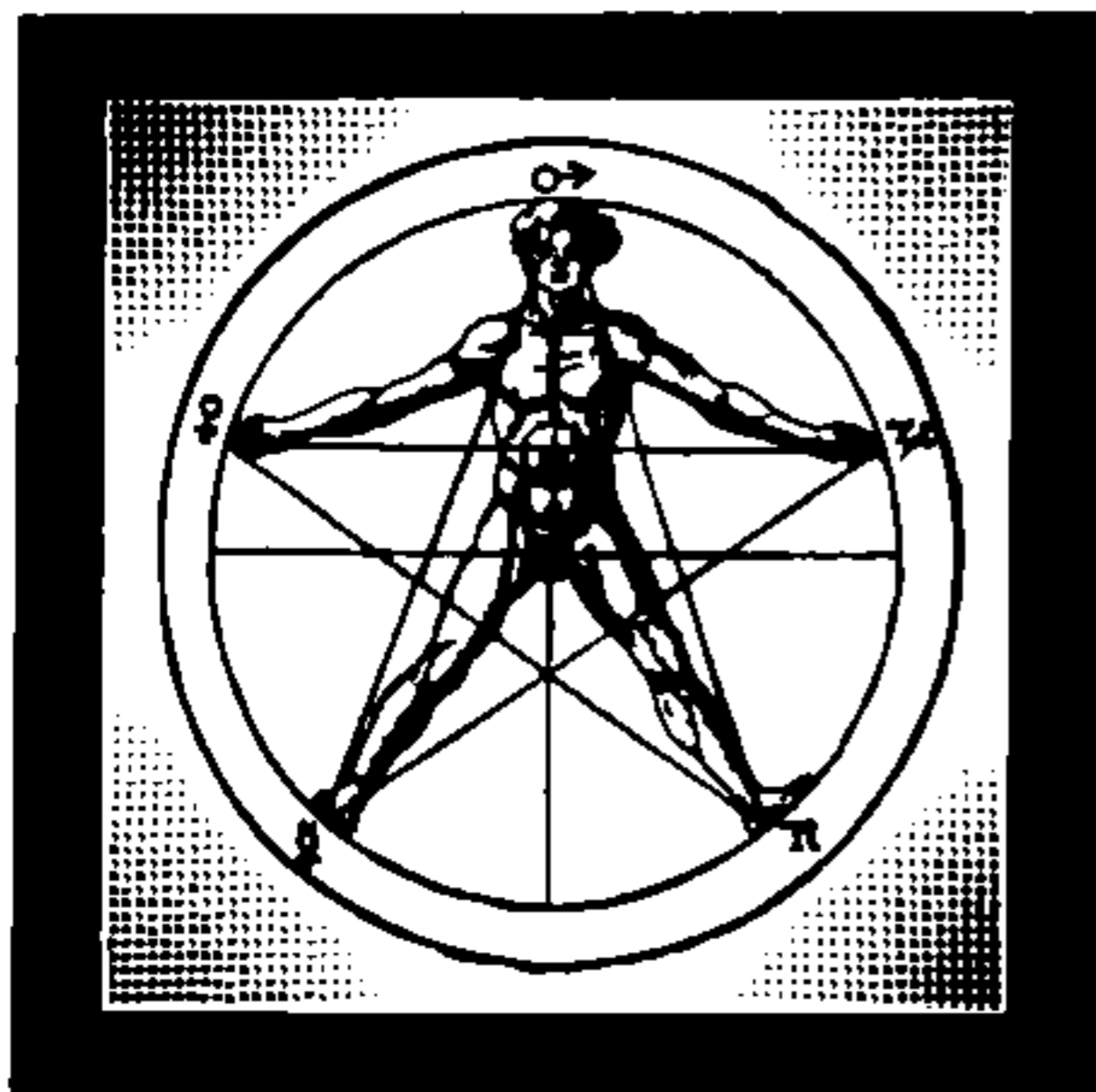
П к.

Понятие симметрии выступает в наше время как один из важнейших методологических принципов построения научной теории. Физика, химия, механика добились на этом пути многих впечатляющих успехов. Тем интереснее изучение с аналогичных позиций живой материи с ее удивительными свойствами.

В этой брошюре рассказывается о применении инвариантно-группового подхода с использованием высших, или неевклидовых, симметрий к исследованию строения и функционирования живых организмов, об интересных результатах, полученных в отделе биомеханики Института машиноведения им. А. А. Благонравова АН СССР, касающихся фундаментальной проблемы самоорганизации и эволюции живой материи.

1402080000

ББК 28.91



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сегодня трудно найти образованного человека, который не знал бы — с большими или меньшими подробностями — о роли симметрии в современном естествознании. Понятие симметрии в XX столетии выступает как один из важнейших и глубоко разработанных методологических принципов построения научной теории. Многие впечатляющие успехи механики, физики, химии явились следствием осмысливания природных явлений с позиций инвариантно-группового анализа. Тем интереснее изучение с аналогичных позиций живой материи с ее удивительными свойствами самоорганизации, адаптации, наследования информации и пр.

В предлагаемой вниманию читателя книге отражены результаты исследования нетривиальных инвариантно-групповых свойств строения и функционирования живых организмов, которое ведется в отделе биомеханики Института машиноведения им. А. А. Благонравова АН СССР уже пятнадцать лет. Это исследование нацелено на решение целого ряда фундаментальных и прикладных вопросов, в том числе таких, как:

имеются ли общебиологические свойства формообразования и кинематики движения у живых тел, свидетельствующие о единстве живой природы, подобно генетическому коду, механизмам биоэнергетики и т. п.?

исчерпываются ли инвариантно-групповые свойства живых тел теми свойствами, которые связаны с группой преобразований подобия, характерной для евклидовой геометрии, или они сопряжены с более широкими группами преобразований и в общем случае можно говорить о неевклидовой геометрии в живой природе?

имеет ли значение внутренняя среда организмов для их морфологии или последняя полностью определена адаптацией организмов к условиям внешней среды?

в какой мере биологические объекты могут служить инженерам образцом для подражания при конструировании тех или иных видов техники?

как использовать морфогенетические свойства живых организмов, прежде всего, тела человека, в эргономических, медицинских и других прикладных целях?

Проведение такого биологического исследования в Институте машиноведения далеко не случайно. Достаточно вспомнить, что целый класс современных перспективных машин и механизмов — антропоморфных и зооморфных — имеет своим прототипом живые организмы. Кроме того, резко возросло значение эргономических проблем, связанных с углубленным изучением биологических свойств человека-оператора как звена управления в системах человек—машина. Большое число биомеханических задач ставят перед машиноведами медицина, биотехнология, спорт: создание протезов, включая искусственное сердце, стимуляторов биологических процессов, тренажеров и пр. Все это требует глубокого знания известных свойств живых организмов, а нередко и их специального исследования. На сегодня проведение исследований живой материи, прежде всего организма человека, входит в число факторов, способствующих дальнейшему прогрессу в машиностроении.

Симметрические преобразования — евклидовы и неевклидовы — давно применяются в технических науках, например в теории машин и механизмов. Так, известный инверсор инженера Понселе, заложившего в прошлом веке основы проективной геометрии, базируется на тех самых мебиусовых преобразованиях,

о биологическом значении которых рассказывается в представляемой книге. Однако методы геометрии никоим образом не исчерпали себя при решении конструкторских задач, которые в большом числе выдвигает перед инженерами жизнь. Излагаемое в книге исследование новых — неевклидово-геометрических — свойств живых организмов будет способствовать появлению новых конструкторских решений в робототехнике, бионике и в других областях техники. Ряд оригинальных разработок с учетом названных свойств уже ведется в нашей стране.

Тема симметрии в связи с эстетическими запросами человека традиционно разрабатывается в искусстве и архитектуре. При этом еще художники древности и Возрождения особое внимание обращали на «законы красоты», по которым построено тело человека и другие биологические объекты. Результаты освещаемого в книге исследования по биосимметриям имеют прямое отношение к вопросам эстетического предпочтения определенных пропорций и конфигураций и уточняют биологические корни такого предпочтения; эти результаты полезны для решения вопросов гармонизации в системах человек — машина — среда.

Хочется отметить также обнаруженные в ходе биогеометрического исследования новые содержательные связи между морфологической самоорганизацией живых тел и теорией самоорганизующихся растущих автоматов и их ансамблей. Выявление этих связей позволяет сделать более адекватными и эффективными кибернетические подходы к формальному моделированию кооперативных форм поведения биологических подсистем в едином организме, описанию композиций и декомпозиций этих подсистем в ходе жизнедеятельности. Выдвигаемая автором концепция репликационного морфогенеза открывает возможности расшифровки важных механизмов морфологической самоорганизации.

Математическое исследование и моделирование свойств биологической самоорганизации, выполненное С. В. Петуховым, позволили выявить новый важный класс таких свойств, связанный с неевклидовыми группами преобразований и итеративными алгоритмами. Эта работа вносит существенный вклад в основы

нового перспективного направления в естествознании и имеет ценность для многих прикладных наук. В исследованиях автора, о которых рассказывается в этой брошюре, развиты и обобщены на основе теории групп неевклидовых преобразований результаты работ многих замечательных отечественных и зарубежных ученых, интересовавшихся геометрическими закономерностями биологических объектов. Данные исследования закрепляют приоритет советской науки в этой области.

Думается, что читатель, познакомившийся с книгой, согласится со словами Владимира Ивановича Вернадского: «Симметрия живого вещества не изучена достаточно, и ее изучение есть одна из основных задач... Это область будущего огромного плодотворного искания».

Академик К. В. ФРОЛОВ

## 1. ЭРЛАНГЕНСКАЯ ПРОГРАММА И ПРОБЛЕМА ГЕОМЕТРИЗАЦИИ В БИОЛОГИИ

*Идеал, к которому мы стремимся, заключается в объединении всех наших сведений о физическом мире в единую науку, положения которой могут быть выражены в терминах геометрических или квазигеометрических концепций.*

А. ЭДДИНГТОН

Более ста лет назад, в 1872 г., 23-летний Ф. Клейн опубликовал свою знаменитую работу «Сравнительное рассмотрение новых геометрических исследований», широко известную под названием Эрлангенской программы, утвердившей принципиально новый, инвариантно-групповой взгляд на геометрию: геометрия стала пониматься как наука об инвариантах групп преобразований. С этих позиций евклидова геометрия предстала как всего лишь одна из многих возможных геометрий, каждая из которых базируется на своей собственной группе преобразований: евклидова геометрия — на группе преобразований подобия, аффинная — на группе аффинных преобразований, конформная — на группе мебиусовых, или круговых, преобразований, проективная — на группе проективных преобразований и т. д.

(Подробно об этом можно прочитать в [11, 16, 21 и др.] )

На основе такого подхода удалось в значительной мере восстановить единство геометрической науки, утраченное к середине XIX в. из-за развития новых ее областей, прояснить взаимосвязь отдельных геометрий и получить возможность строить новые.

Революционные идеи, провозглашенные Эрлангенской программой в геометрии, распространились затем на область физики и философских проблем пространства. Были изменены сами основы представлений человека о пространстве, которые с той поры связываются с понятием математической группы преобразований. А. Пуанкаре формулировал эту связь просто: пространство есть группа. Создание специальной теории относительности привело к рождению термина «геометризация физики», отразившего тот факт, что с формальной точки зрения указанная теория представляется не чем иным, как теорией инвариантов некоторой группы преобразований (группы Пуанкаре—Лоренца), т. е. некоторой геометрией. Идеи геометризации физики, построения и изложения ее теорий на языке инвариантов групп преобразований получили развитие и распространение на квантовую механику, теорию законов сохранения, теорию элементарных частиц и на другие области физики. Инвариантно-групповой подход, концепция симметрии заняли место одной из основ современного теоретико-физического мышления (см. книгу В. П. Визгина [11]).

При этом произошел переворот в методологических основаниях физики, выразившийся в изменении представления о том, что следует считать исходными законами физики. Если ранее — со времен Ньютона — законы природы формулировались в виде дифференциальных уравнений, то сейчас ситуация существенно изменилась. Для фундаментальной физики основными исходными законами являются законы симметрии. По поводу указанного переворота в науке советские теоретики Ю. Б. Румер и А. И. Фет пишут: «Развитие физики в последние годы обратило в известном смысле соотношение между уравнениями движения и группами симметрии. Теперь

группа симметрии физической системы выступает на первый план, представления этой группы и ее подгрупп несут самую фундаментальную информацию о ней. Таким образом, группы оказываются первичным, наиболее глубоким элементом физического описания природы». Добавим, что, по словам Г. Вейля, метод симметрии является руководящим принципом современной математики и ее приложений. Это, видимо, должно касаться и математической биологии.

«Нет более плодотворного занятия, чем познание самого себя», — указывал Р. Декарт в труде «Описание человеческого тела. Трактат об образовании живого». Но что значит познавать? Познавать фундаментальные биологические явления с позиций математического естествознания означает стремиться к интерпретации этих явлений и их закономерностей на языке наиболее глубоких понятий и концепций, характерных именно для математического естествознания. Одним из магистральных путей сближения биологии с точными науками представляется внедрение в область биологии инвариантно-групповых концепций и методов на базе изучения биологических симметрий. И в связи с общим стремлением включить науку о живом организме в область развитого математического естествознания публикации по математической и теоретической биологии все чаще выходят под характерными названиями: «Концепция группы и теория восприятия», «Биологическое подобие и теория групп», «Исследования по неевклидовой биомеханике» и т. п. Другими словами, делаются все новые и новые смелые попытки построения теоретических моделей отдельных биологических явлений в области морфогенеза, психофизики и пр. как формальных теорий инвариантов определенных групп преобразований. Таким образом, процесс «геометризации физики» в наши дни идет параллельно с процессом попыток «геометризации биологии». И автор глубоко верит в то, что теоретическая биология будущего будет во многом инвариантно-групповой биологией. При этом естествознание сделает очередной шаг к тому идеалу, который указывают слова А. Эддингтона в эпиграфе данного параграфа.

В качестве примера работ такого на-

правления в настоящей брошюре рассказывается о проводимых автором исследованиях высших симметрий и алгоритмов в самоорганизации (самоструктуризации) живых тел. Исходной предметной основой для этих исследований явилась реализация одних и тех же видов симметрических (евклидовых и неевклидовых) алгоритмов строения надмолекулярных органических форм на различных линиях и уровнях эволюции биологических объектов: раковин моллюсков и фораминифер, тел кольчатых червей и многоножек, плавников рыб, перьев птиц, цветков, листьев и побегов растений и т. п. В свете Эрлангенской программы, говоря о геометрии живых тел, мы будем иметь в виду прежде всего те геометрические группы преобразований, в соответствии со свойствами которых у надмолекулярных биологических структур строится типовое взаимосопряжение составных частей в единое целое.

Уточним также, что когда говорят о симметрии двух фигур, то имеют в виду возможность их совмещения в результате некоторой операции преобразования. И сама идея симметрии, по существу, представляет собой сумму двух идей: 1) возможность совмещения фигур; 2) наличие определенной операции, производящей это совмещение. Основная наглядность понятия симметрии заключена в первой идее, однако наиболее глубокое геометрическое содержание связано со второй. Дело в том, что с инвариантно-групповой, т. е. геометрической, точки зрения далеко не всякая операция, ведущая к совмещению некоторых фигур, является допустимой, допустимы лишь операции, относящиеся к той или иной «группе преобразований» (это строгое математическое понятие).

Изучение законов и алгоритмов органического формообразования — одно из важных направлений биологии развития, в которой многие ожидают в ближайшем будущем наиболее крупных фундаментальных открытий и практических приложений. Морфология всегда имела для биологии первостепенное значение, но современный этап развития науки отличается особым интересом специалистов различного профиля к проблеме морфологической самоорганизации, свойствам

биологических структур и их эволюционных трансформаций. Однако математическая биология в отличие, например, от кристаллографии пока не располагает общепризнанной формальной теорией морфогенеза, хотя попыток создания такой теории на основе различных начальных моделей — кибернетических, реакционно-диффузионных и др. — известно большое число. Сложность построения такой теории обусловлена во многом недостаточным знанием общебиологических свойств морфогенеза, поддающихся формализации и подлежащих теоретическому истолкованию. Как справедливо утверждает известный французский исследователь Р. Том, «...именно геометрическая атака проблемы морфогенеза не только оправдана, но и просто необходима». Уровень математической теории биологического развития таков, что ей, видимо, еще предстоит пройти тот общий путь — от накопления знаний о ключевых морфологических свойствах и адекватных геометрических классификациях до построения искомой теории, — какой уже прошли кристаллография и многие другие естественные науки, занимающиеся по сравнению с биологией несравненно более простыми объектами.

Само понятие симметрии возникло из наблюдений древних над формой живых тел. Не окажемся ли мы свидетелями того, что это понятие — после сложной эволюции при развитии современной науки о симметрии, — обернувшись в наши дни к своим первоисточникам — живым телам, откроет нам глубокие общие законы живого вещества? Это тем более вероятно, что, говоря словами Г. Вейля, симметрия — в широком или узком смысле — является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство.

## II. К ИСТОРИИ ИЗУЧЕНИЯ СИММЕТРИЙ И АЛГОРИТМОВ В МОРФОЛОГИЧЕСКОЙ САМООРГАНИЗАЦИИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

*Биологические структуры лишь в частных случаях определяются выполняемыми функциями, а в более общем случае подчиняются некоторым математическим законам гармонии. В многообразии форм есть своя, независимая от функции упорядоченность, своя закономерная система, обнаруживаемая, например, в процессе выявления симметрий на основе строгого математического описания.*

С. В. МЕЙЕН, Б. С. СОКОЛОВ,  
Ю. А. ШРЕЙДЕР

Симметрия в формах биологических тел издавна вызывала пристальный интерес естествоиспытателей как одно из наиболее замечательных и загадочных явлений природы\*. Этому посвящены труды многих современных ученых (в прилагаемом в конце книги списке литературы приведена лишь малая часть работ, имеющих богатые тематические обзоры). Проблемы биологических симметрий на макромолекулярном уровне рассматривались в 1968 г. на специальном Нобелевском симпозиуме [35], обсудившем доклады представителей 13 стран. Во вступительном слове организаторов симпозиума подчеркивалось, что, несмотря на чрезвычайную сложность, характерную для живых систем, в результате исследований начинают выкристаллизовываться принципы и правила, которые, как представляется, имеют общебиологическую значимость; при этом одной из главных оказывается концепция биологической симметрии.

Уже школьные программы по биологии включают рассмотрение многочисленных примеров вращательных, трансляционных и зеркальных симметрий, а также симметрий масштабного подобия в биологических телах: опорно-двигательном аппарате животных, цветках и побегах растений и пр. (Еще раз отметим, что группа преобразований подобия

\* Символом давнего интереса исследователей к законам гармонии живых тел может служить известная фигура «человека Агриппы Неттесгеймского», изображенная на с. 3 брошюры.

лежит в основе евклидовой геометрии, а потому указанные симметрии, базирующиеся на этих преобразованиях, можно называть евклидовыми в отличие от неевклидовых, строящихся на преобразованиях из неевклидовых групп.) Углубление биологических знаний сопровождается открытием все новых и новых фактов подчиненности очень разных биологических тел, отличающихся масштабом и уровнем организации, принципом симметрии (и алгоритмичности, которая заслуживает особого внимания).

С вопросом о биологических симметриях в той или иной степени связаны многие биологические учения и концепции, утвердившиеся в науке или вызывающие подчас острые дискуссии: закон гомологических рядов Н. И. Вавилова, теория морфогенетического поля А. Г. Гурвича, гипотеза В. И. Вернадского о неевклидовой геометрии живого вещества, биологическая значимость реакционно-диффузионной модели морфогенеза А. М. Тьюринга и самоорганизующихся растущих автоматов, теория которых разрабатывается последовательно Дж. фон Неймана, морфогенетическая обусловленность многих психофизических феноменов, включая эстетическое предпочтение морфогенетически значимой пропорции золотого сечения, связанной с числами Фибоначчи, и др.

Нельзя не отметить, что с геометрической (т. е. инвариантно-групповой) точки зрения вся классическая биоморфология, по существу, базируется на группе преобразований подобия. Примерами могут служить морфологические исследования и учения о зеркальной симметрии и асимметрии биотел, многоблочных биоформах с симметриями подобия, по А. В. Шубникову [30], масштабном объемном биоросте, карликах и великанах в организмах одного вида и др. Вместе с тем не известно веских причин считать, что геометрические основы морфологии сводятся к группе подобия, и давно существует требующая проверки гипотеза В. И. Вернадского о важном биоморфологическом значении неевклидовой геометрии. К конкретным материалам по неевклидовой биоморфологии мы обратимся в следующей главе.

Уточнение геометрических основ морфологии важно потому, что от них зави-



сят геометрическая специфика морфологического исследования и добываемые в ходе его факты, обобщения, закономерности. Изменение геометрических основ влечет за собой сдвиги на всех вышележащих уровнях данной научной области и определяет новые требования и подходы к построению формальных теорий, адекватность которых должна проверяться их соответствием этим основам. Биоморфология связана со многими областями биологии: биомеханикой поз, биомеханикой ростовых и моторных движений, психофизикой восприятия и др. Уточнение ее геометрических основ способно дать новые исследовательские подходы и стимулировать открытие новых свойств биологической самоорганизации в этих областях. В дальнейшем у читателя данной брошюры предполагается некоторое знакомство с понятиями теории групп преобразований в рамках, например, книг Г. Вейля «Симметрия» [10], А. В. Шубникова и В. А. Копчика «Симметрия в науке и искусстве» [31].

В существующем многообразии геометрически закономерных органических форм нас будут интересовать структуры, составные части которых взаимосопряжены в единое целое на основе определенных правил или алгоритмов, повторяющихся на самых разных линиях и уровнях биологической эволюции. Данные структуры, которые можно назвать алгоритмическими, представляют особый интерес для теоретической морфологии и связанных с ней наук: биомеханики, биотехнологии, бионики, синергетики и др. Подчеркнем, что наряду с регулярными по форме биообъектами существуют биообъекты с менее регулярным — вплоть до полного отсутствия — взаимосопряжением составных частей. В нашей книге рассматриваются именно алгоритмические надмолекулярные биоструктуры, имеющие вид цепей, или многообразий ( $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \dots \cup S_n \dots$ ), с разбиением на соизмеримые и закономерно расположенные элементы (или мотивные единицы)  $S_n$ . На рис. 1 представлены примеры таких многообразий, рассматриваемые в обширной литературе по биологическим симметриям. Общее правило представленных многообразий с разбиениями заключается в том, что предыдущая мотивная единица переводится в по-

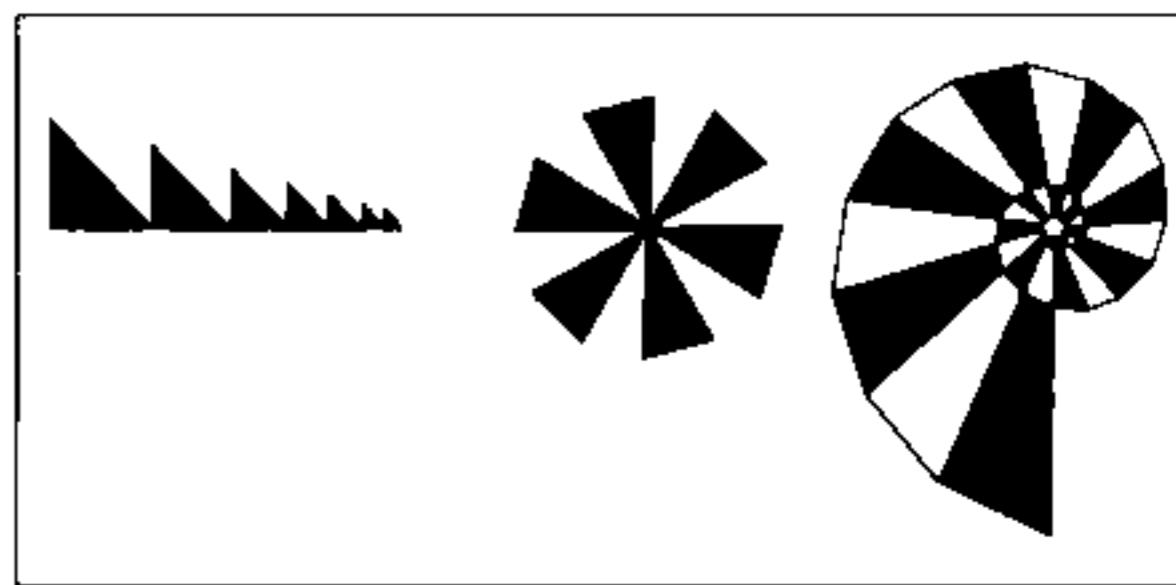


Рис. 1. Геометрические примеры цикломерий подобия или многоблочных конфигураций с циклическими группами автоморфизмов подобия (по А. В. Шубникову, 1960)

следующую некоторым фиксированным преобразованием подобия  $g$ , т. е. соседние мотивные единицы  $S_k$  взаимосопряжены на основе итеративного алгоритма

$$S_{k+1} = g \cdot S_k. \quad (1)$$

Соответственно, повторно применяя порождающее преобразование  $g$   $m$  раз к мотивной единице  $S_k$ , получаем блок  $S_{k+m}$ , говоря языком математики, на множестве  $S_k$  действует циклическая группа (или полугруппа) преобразований  $G$ , содержащая элементы  $g^0, g^1, g^2, \dots, g^m, \dots$  (конечное число мотивных единиц в биообъекте при необходимости здесь не учитывается). Другими словами, так организованные члененые многообразия имеют циклическую группу автоморфизмов, и их мотивные единицы выстраиваются вдоль орбиты соответствующей циклической группы. Будем для краткости называть такие конфигурации известным в биологии термином «цикломерий» независимо от евклидовости или неевклидовости порождающего преобразования  $g$  в (1). (Для учения о цикломериях подобия важное значение имели исследования академика А. В. Шубникова [30], в связи с чем конфигурации типа представленных на рис. 1 в литературе нередко называют конфигурациями с симметриями подобия Шубникова.) В следующей главе будет показано важное биологическое значение неевклидовых (или высших) цикломерий, прежде не исследовавшихся применительно к биотелам. Используемые названия «высшие» и «неевклидовы» для симметрий и цикломерий обусловлены тем, что на неевклидовых группах преобразований основываются, согласно Эрлангенской программе Ф. Клейна и обще-

принятой терминологии, высшие или неевклидовы геометрии.

Преобразования подобия в биоморфологии известны также в связи с масштабным видом объемного роста; последний нередко наблюдается у животных и растений на длительных отрезках индивидуального развития и сопровождается таким взаимосогласованным ростовым поведением множества распределенных по объему тела малых зон, которое геометрически описывается преобразованием масштабирования. При этом, зная трансформацию всего трех точек растущей конфигурации, можно судить о трансформации континуума ее точек. Заметим, что связанная с объемным ростом способность живых организмов самых разных видов существовать в разномасштабных морфологически идентичных модификациях — едва ли не древнейшее из отмеченных человеком универсальных морфологических свойств живого. Она вызывала интерес во все времена и широко представлена в научной, мифологической и художественной литературе в связи с проблемой карликов и великанов.

Исчерпывают ли симметрии подобия А. В. Шубникова и масштабный вид объемного роста все геометрически закономерные виды взаимосопряжения частей в строении и ростовых трансформациях у живых тел или они выступают в биоморфологии весьма частным случаем таких видов, которые базируются на неевклидовых группах преобразований, содержащих подгруппу подобия? Результаты проведенного автором исследования дали положительный ответ на этот вопрос. В этом исследовании учтено, что, как указано еще классиком математики Софусом Ли, имеются два основных пути обобщения группы преобразований подобия — до группы мебиусовых (конформногеометрических) преобразований и до группы проективных преобразований (см. Приложение, в которое вынесены для справки сведения о математических формализмах). Поскольку эти две группы лежат в основе двух замечательных и часто встречающихся в приложениях геометрий — проективной и конформной, — напомним некоторые исторические сведения о них.

Многие основные положения проективной геометрии отражены в приемах

линейной перспективы, используемых в живописи. Эти приемы, открытые художниками Возрождения, явились результатом изучения хода световых лучей от окружающих предметов к глазу человека и имеют целью воспроизведение всех следов этих лучей на рисовальном холсте. В результате таких приемов на холсте появляется характерное изображение предметов, в котором, вообще говоря, изменены и расстояния, и углы, и отношения между метрическими величинами. Но изменяется не все: геометрические характеристики из особого класса так называемых проективных инвариантов сохраняются неизменными. К их числу относятся прежде всего сложные отношения, или вурфы, четырех точек прямой, которые будут специально рассматриваться в следующих параграфах. Проективная геометрия как раз представляет собой науку о таких проективных инвариантах, т. е. о структурах, сохраняющихся при отображениях такого характера. Эта математическая наука претерпела исключительное развитие и, далеко уйдя от скромной теории перспективы в живописи, заняла высокое положение во всей геометрии.

Признание проективной геометрии как самостоятельной научной дисциплины явилось результатом трудов замечательных геометров Понселе, Жергонна, Бриансона, Монжа, Мебиуса, Штейнера, Шаля и др. Работами нашего великого соотечественника Н. И. Лобачевского, впервые построившего геометрию, логически столь же безупречную, как и геометрия Евклида, но существенно отличную от нее, была разрушена наивная вера в евклидову геометрию как единственно возможную, независимую от действительного мира и его опытного познания, априорную геометрическую систему. После открытия Лобачевским неевклидовой геометрии на повестку дня встало изучение и других возможных геометрических систем (абстрактных геометрических «пространств») и соответствующих им свойств или явлений действительного мира.

Первоначально проективная геометрия возникла как один из разделов евклидовой геометрии. В частности, характерное для проективной геометрии сложное отношение (или вурф) вычислялось

только через длины соответствующих отрезков, т. е. основывалось на евклидовом понятии длины отрезка. Однако с общим развитием геометрии все острее стало проявляться стремление к построению проективной геометрии как совершенно независимой от евклидовой, т. е. свободной от метрических понятий в ее основных принципах и положениях. Реализация такого построения была осуществлена во многом Х. Штаудтом. Успехи в утверждении независимости проективной геометрии от евклидовой привели к замечательной мысли интерпретировать евклидову геометрию как частный случай проективной. Полное решение этой задачи было дано Кэли и Клейном, которыми было построено так называемое проективное мероопределение. Суть его заключается в том, что метрические свойства фигур можно рассматривать как проективные отношения их к особым метрическим образам, называемым абсолютами. Эта новая концепция оказалась настолько общей, что охватила, кроме евклидовой, и целый ряд неевклидовых геометрических систем.

Конформной геометрией, по определению, называется геометрия евклидова пространства, дополненного одной бесконечно удаленной точкой, с фундаментальной группой точечных преобразований, переводящих сферы в сферы или плоскости (группа мёбиусовых преобразований, см. приложение). Права на самостоятельность конформная геометрия обрела в 1872 г., когда Клейн в своей Эрлангенской программе ввел понятия «конформного пространства», «группы обратных радиусов» (т. е. мёбиусовой группы), разработал проективную интерпретацию конформной геометрии, развил представление о конформной геометрии. Целая совокупность метрических геометрий, в том числе Евклида и Лобачевского, может быть интерпретирована как частный случай конформной геометрии на основе принципов конформной метризации, развитых Пуанкаре.

Конформные симметрии имеют давнюю историю приложений в физике. Еще в середине прошлого века В. Томпсон (лорд Кельвин) разработал метод решения электростатического уравнения Лапласа с помощью мёбиусовых преобразований инверсии относительно сфе-

ры. Этот метод известен как метод «электрических», или «зеркальных», изображений и широко используется в математической физике. В 1909 г. было открыто, что уравнения электродинамики Максвелла инвариантны относительно группы мёбиусовых преобразований, содержащей группу Лоренца в качестве своего частного случая. Данный факт обратил на себя особое внимание физиков, поскольку за четыре года до этого из математического факта инвариантности уравнений электродинамики Максвелла относительно группы преобразований Лоренца родилась специальная теория относительности Эйнштейна. Каково физическое содержание этой загадочной конформной симметрии уравнений электродинамики, какая характерная особенность нашего мира стоит за этим, неясно и до настоящего времени, хотя физиками неоднократно предпринимались попытки осмысления этого и предлагались различные варианты конформной теории относительности. При этом, в частности, привлекался вывод на основе теорем Нётер законов сохранения, которые следуют из инвариантности электродинамического действия, приводящего к уравнениям Максвелла, относительно 15-параметрической мёбиусовой группы. Здесь должно быть пять дополнительных законов сохранения, помимо десяти известных, связанных с группой Пуанкаре. Эта задача была решена Бессель Хагеном в 1921 г. Вывод конформных законов сохранения имел принципиальное значение, поскольку он связал загадочную симметрию с физически интерпретируемыми величинами и тем самым указал путь, на котором могла быть вскрыта физическая сущность конформной симметрии. Впоследствии едва ли не любая попытка использования конформной симметрии в физике оказывалась связанной с введением конформных законов сохранения. Заметный вклад в разработку проблемы конформной симметрии в физике внесли работы Г. Вейля по единой теории гравитации и электромагнетизма и К. Каратеодори по обоснованию специальной теории относительности на основе лишь процедур со световыми сигналами без измерения длин и без предварительного введения понятия скорости. Развитие физики за прошедшие десятилетия

выявило и другие факты особой значимости конформной симметрии в устройстве физического мира. Так, математический аппарат квантовой механики оказался тесно связанным с конформными симметриями, в связи с чем квантовая механика может быть представлена как теория нарушенной конформной симметрии (Каструп). К настоящему времени развито также несколько вариантов конформной теории поля (Ингрехэм, Весс, Каструп и др.), создана кинематическая космология, опирающаяся на конформную симметрию (Шредингер, Инфельд, Шильд и др.) и т. д.

Теперь после этого краткого экскурса в область обширных и неожиданных приложений неевклидовых симметрий перейдем к новым их приложениям — феноменологии взаимосопряжения отдельных частей биологических тел.

### III. НЕЕКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ И ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ В ОРГАНИЧЕСКИХ ФОРМАХ

*Если нам не удастся найти решение математической проблемы, то часто причина этого заключается в том, что мы еще не овладели достаточно общей точкой зрения, с которой рассматриваемая проблема представляется лишь отдельным звеном в цепи родственных проблем. Отыскав эту точку зрения, мы часто не только делаем доступной для исследования данную проблему, но и овладеваем методом, применимым к родственным проблемам.*

Д. ГИЛЬБЕРТ

Итак, известно биологическое значение цикломерий подобия (см. рис. 1). А какие конфигурации образуются, если в качестве порождающего преобразования  $g$  из (1) выступает мебиусово или, например, аффинное преобразование? И имеют ли так возникающие неевклидовы цикломерии биологические аналоги? Анализ показывает, что многообразие конфигурации цикломерий в этом случае заметно расширяется и включает, помимо характерных для цикломерий подобия цилиндрических, конических, спиральных форм, также более сложные конфигурации: лирообразные, серповидные, бутоновидные и пр. (рис. 2). В этих конфигурациях мотивные единицы уже мо-

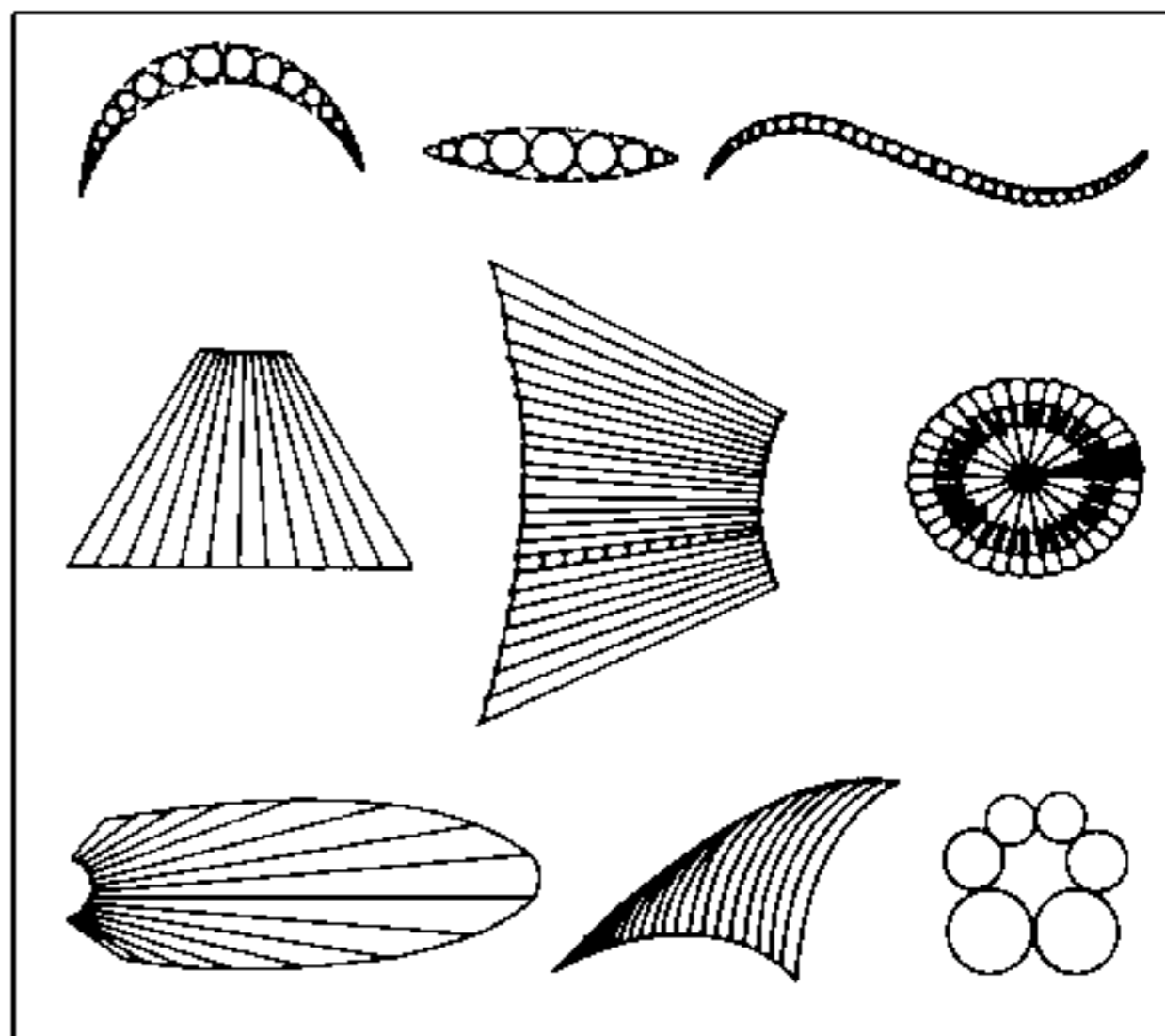


Рис. 2. Примеры мебиусовых, аффинных и проективных цикломерий

гут своей формой отличаться друг от друга, и изменение этих единиц вдоль цикломерии может носить существенно немонотонный характер. Важно, что неевклидовы цикломерии столь же широко и наглядно реализуются в биотелах на самых разных линиях и уровнях эволюции, как и классические цикломерии подобия, но в науке о бносимметриях прежде не изучались. При этом неевклидовы и евклидовы цикломерии наблюдаются в аналогичных многоблочных биотелах, реализуются параллельно. Проиллюстрируем это конкретными примерами.

Как известно, рога многих животных имеют спиральную или прямолинейную коническую форму, описываемую цикломерией подобия. Вместе с тем, у других животных рога имеют существенно иные конфигурации неевклидовой цикломерии. Так, на рис. 3 показана форма рогов у оронго, описываемая цикломерией с мебиусовым порождающим преобразованием (так называемого локсодромического типа).

Используем этот частный пример для пояснения общей морфологической методики излагаемого исследования, воспроизводящей классическую методику анализа цикломерий подобия. Эта методика предполагает прежде всего построение, например, средствами машинной графики многообразия основных геометрических конфигураций, которые могут быть

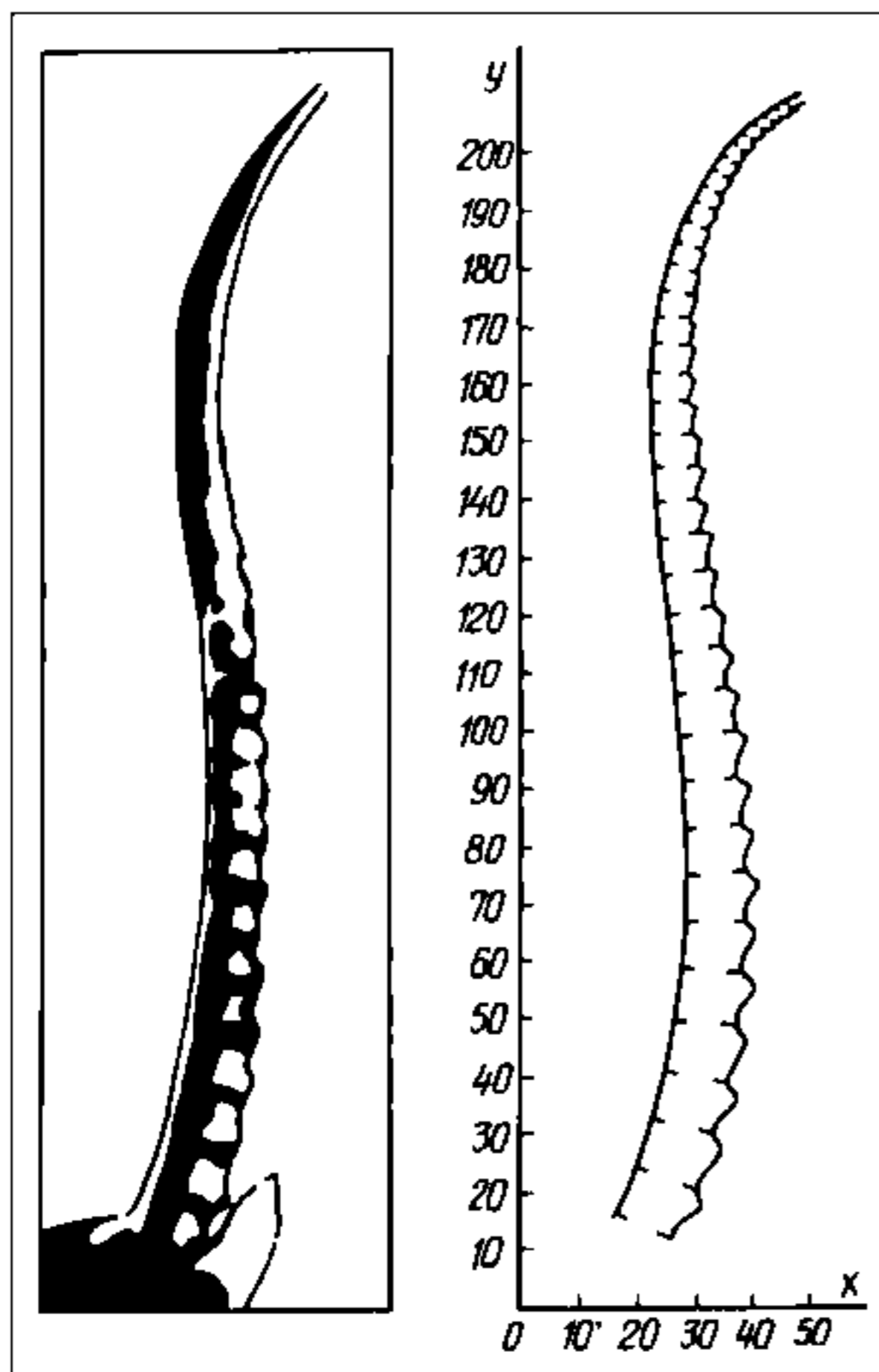


Рис. 3. Сегментированный рог оронго *Pantholops hodgsoni* (по А. Г. Банникову с соавторами, 1971) и его модель в виде цикломерии с мебиусовым порождающим преобразованием

получены применением к некоторой мотивной единице (в частности, точке) итеративного алгоритма (1) с порождающим преобразованием  $g$  из рассматриваемой группы  $G$ , например, мебиусовых или проективных преобразований. Затем проводится сравнительный анализ этих абстрактных конфигураций и реальных биологических структур. При установлении визуального сходства выписывается общий аналитический вид преобразования  $g$  из группы  $G$  (см. Приложение) и вычисляются его коэффициенты с помощью подстановки в это общее уравнение координат тех соответствующих точек мотивных биоединиц, которые трансформируются друг в друга этим преобразованием. Применяя затем уточненное порождающее преобразование  $g$  к заданной мотивной единице требуется число раз, получают искомую цикломерию, моделирующую биоструктуру в целом.

Продолжая перечень примеров, назовем антенны насекомых, в которых, как и в рогах животных, наблюдаются не только евклидовы, но и высшие цикломерии (рис. 4). Это же имеет непосредственное отношение и к телу человека: на рис. 5 показано, как последовательность позвоночных дисков туловищного отдела позвоночника человека воспроизводится мебиусовой цикломерией (локсодромического типа) в отличие от конфигураций позвоночника многих животных, например ящериц, описываемых классической цикломерией подобия. Заметим, что, модифицируя порождающее преобразование и искривляя тем самым «нормальную» конфигурацию цикломерии позвоночника, можно получить модели морфогенетических аномалий позвоночника. Это согласуется с другими нашими данными о реализации у человека, животных и растений евклидовых и неевклидовых цикломерий не только при нормальном, но и патологическом формообразовании. Это же соответствует известному в морфологии растений положению о том, что уродство есть вариант нормы и что, как указывал видный советский исследователь С. В. Мей-

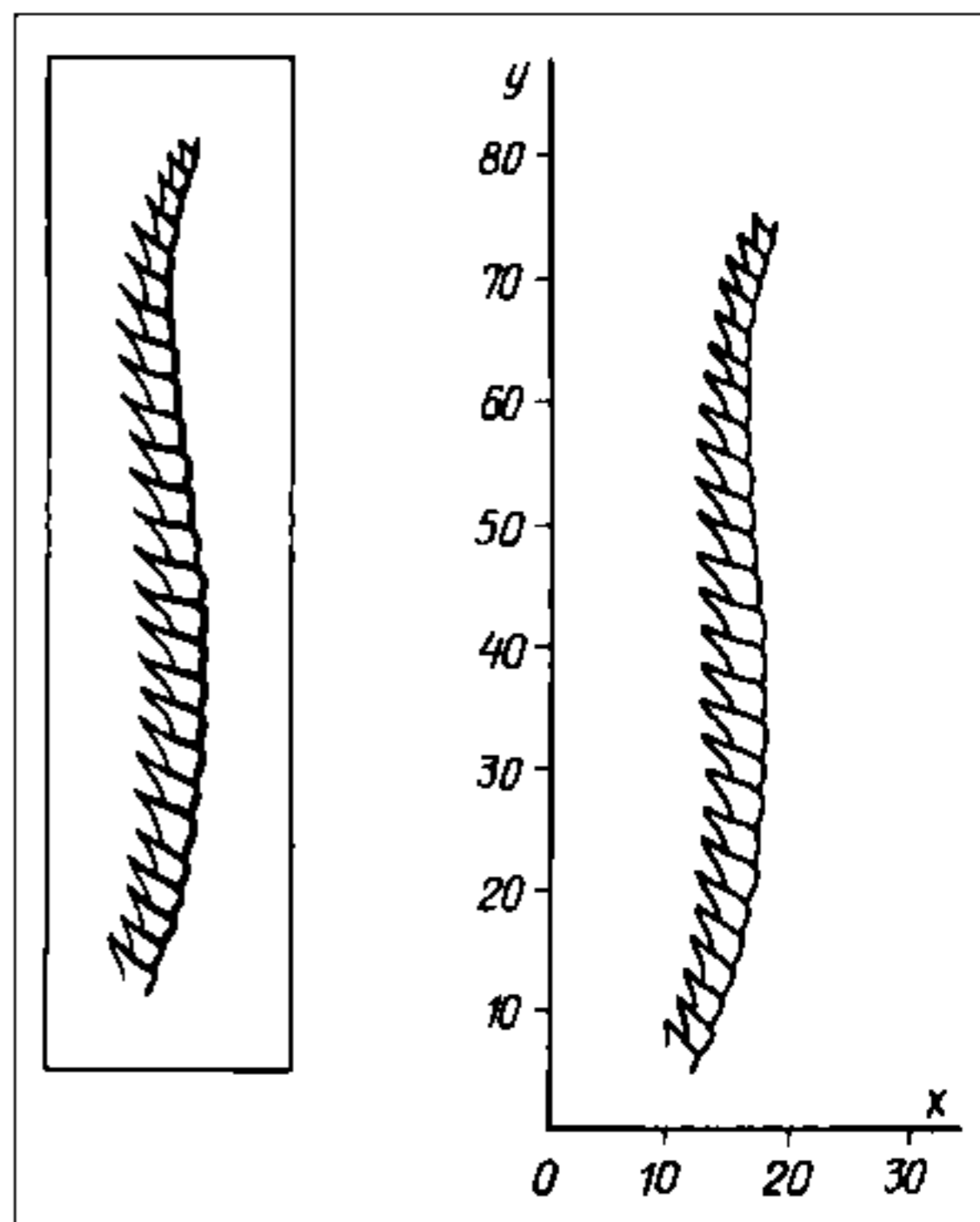


Рис. 4. Гребенчатая антенна насекомого (по Кенингсмену) и ее модель в виде мебиусовой цикломерии

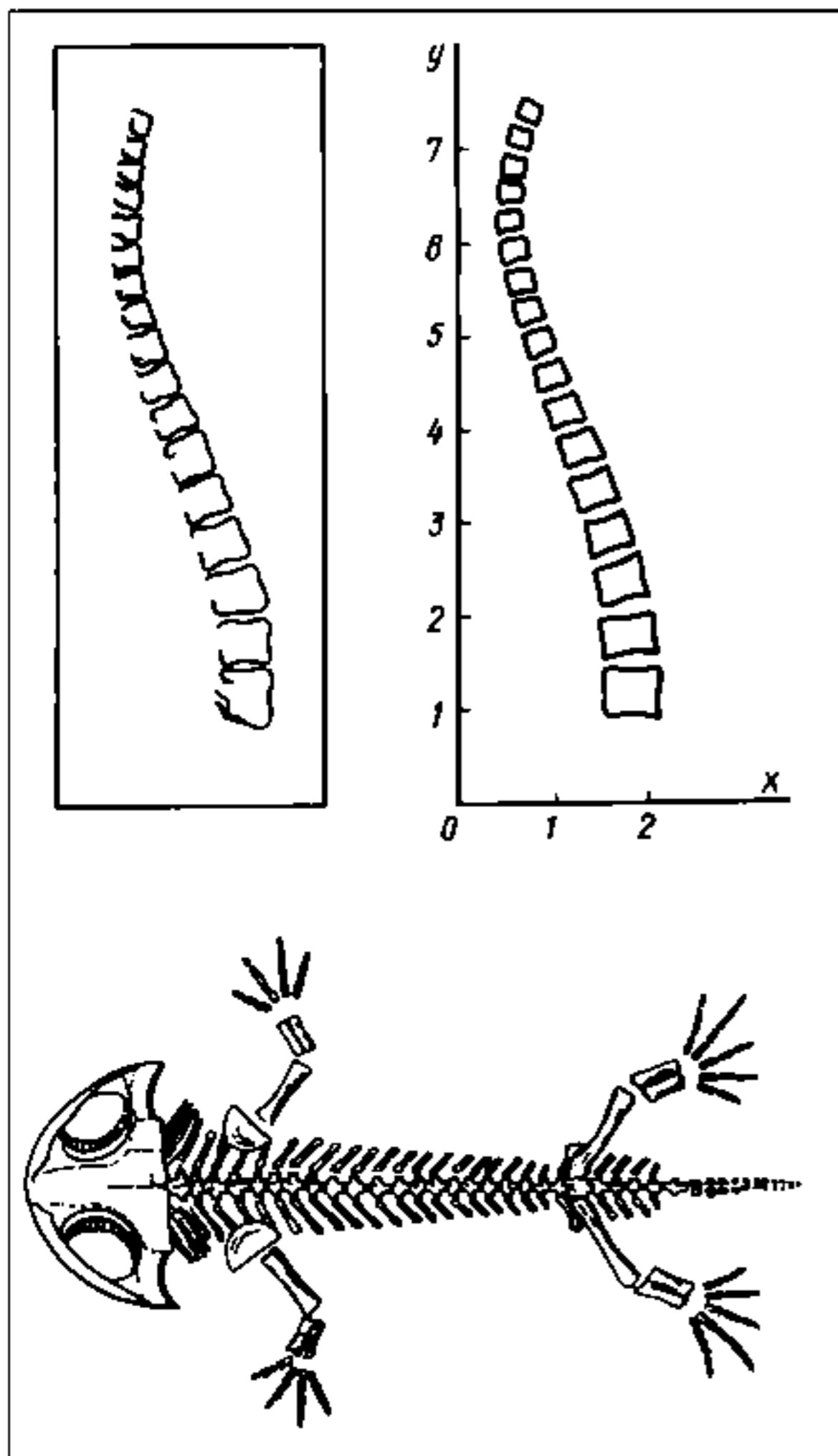


Рис. 5. Строй тел позвонков туловищного отдела позвоночника человека (по Э. Геккелю) и его модель в виде мебиусовой цикломерии. Для сравнения показан также пример цикломерии подобия в строении туловищного отдела позвоночника (скелет дан по Э. Геккелю)

ен (1973 г.), «наверное, нельзя назвать хотя бы один тип отклонений, который у какого-либо таксона не становился нормой».

Мебиусовы цикломерии наряду с евклидовыми реализуются в конфигурациях перьев птиц. Так, помимо перьев прямой или спиральной формы, имеются перья лирообразного очертания, например, у лирохвостов, получивших свое название из-за характерной формы хвостовых перьев, или в хвосте у кавказского тетерева. Мебиусовы цикломерии лирообразного (или локсодромического) типа наблюдаются также в структурах на панцирях морских ежей, в образующих линиях у спиральных раковин некоторых

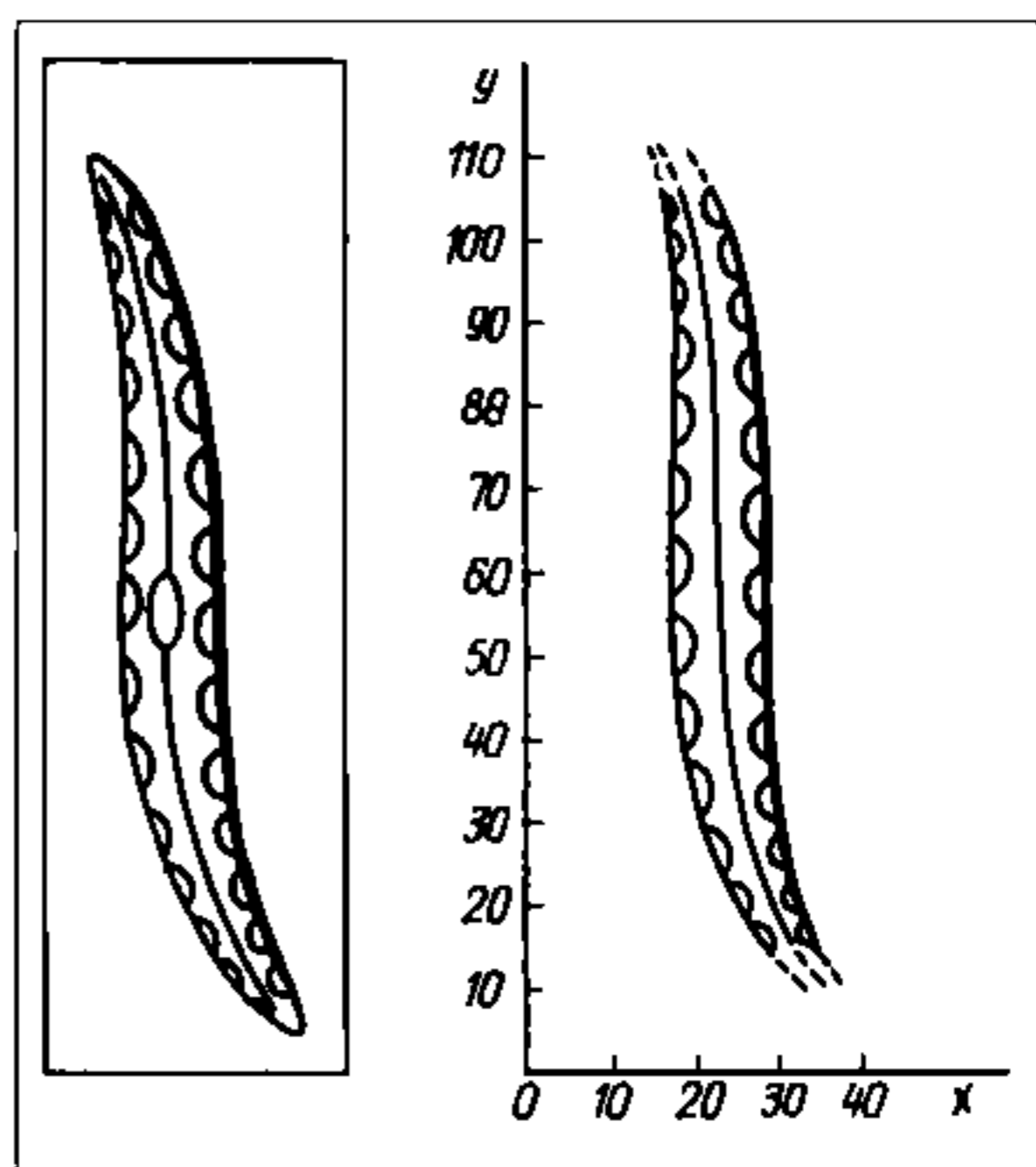


Рис. 6. Раковинка камерника (по Э. Геккелю) и ее модель в виде мебиусовой цикломерии

моллюсков, на длинном рогообразном наросте на клюве птицы колокольчика, скульптурных линиях на теле морского конька и др. Классическим объектом демонстрации цикломерий подобия служат раковинки организмов, но в формах этих раковинок реализуются также и неевклидовы цикломерии (рис. 6).

Евклидовы и неевклидовы цикломерии наблюдаются также в строении и функционировании вестибулярного, слухового и глазодвигательного аппаратов, нервной системы, костной ткани, сосудов, мышц, расположении биологически активных точек на теле человека, цикломерных постройках, инстинктивно совершаемых простейшими организмами и общественными насекомыми, траекториях движения животных и человека в нормальных и экстраординарных условиях, формировании психофизических иллюзий, эстетике пропорций и форм в архитектуре и искусстве и т. д. Они проявляются не только в многоклеточных, но и одноклеточных организмах; тем самым в общем случае клетка не является единицей морфогенеза.

На рис. 7—13 представлены дополнительные примеры разнообразных ви-

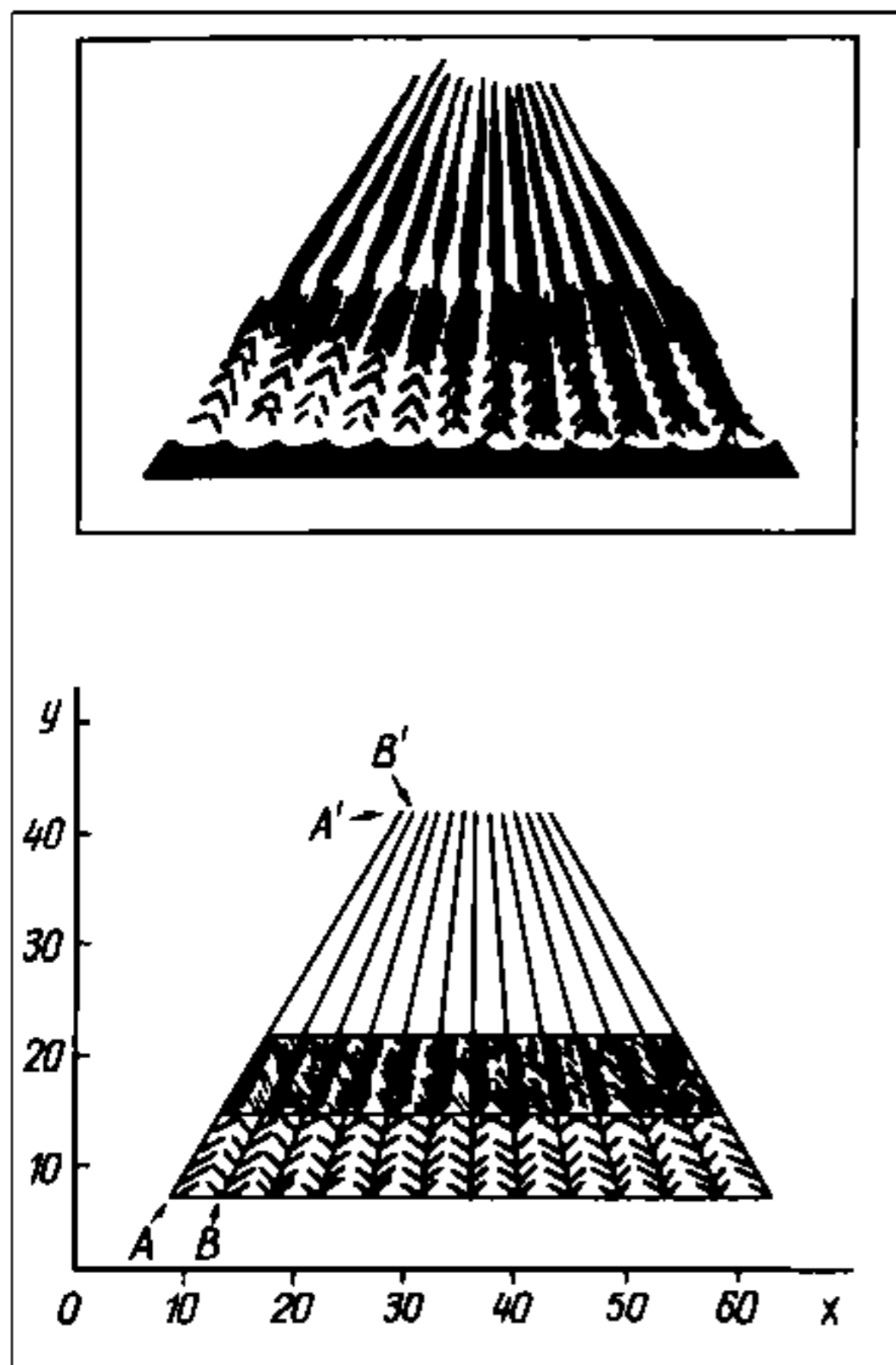


Рис. 7. Многоблочная структура чешуи костистой рыбы (по Э. Геккелю) и ее модель в виде цикломерии с аффинным порождающим преобразованием  $x_{k+1} = x_k - 0,099y_k + 5,24$ ;  $y_{k+1} = y_k$ .  $ABB'A'$  — отдельный цикломер

дов неевклидовых цикломерий в биотелах\*.

Надо, однако, отметить, что циклические группы мебиусовых и проективных автоморфизмов не исчерпывают всех биологически значимых групп автоморфизмов; в этой части дальнейшая разработка учения о биосимметриях связывается автором с циклическими группами тех отображений, частными случаями ко-

\* Биологические структуры зачастую представляют не одиночной цикломерией, а иерархией цикломерий. На обложке брошюры помещен пример неравного пятилистника, моделируемого в виде такой иерархии: каждая прожилка отдельного листка представлена мебиусовой цикломерией локсодромического типа, последовательность прожилок каждого листка — мебиусовой цикломерией гиперболического типа, последовательность всех пяти неравных листьев — мебиусовой цикломерией эллиптического типа.

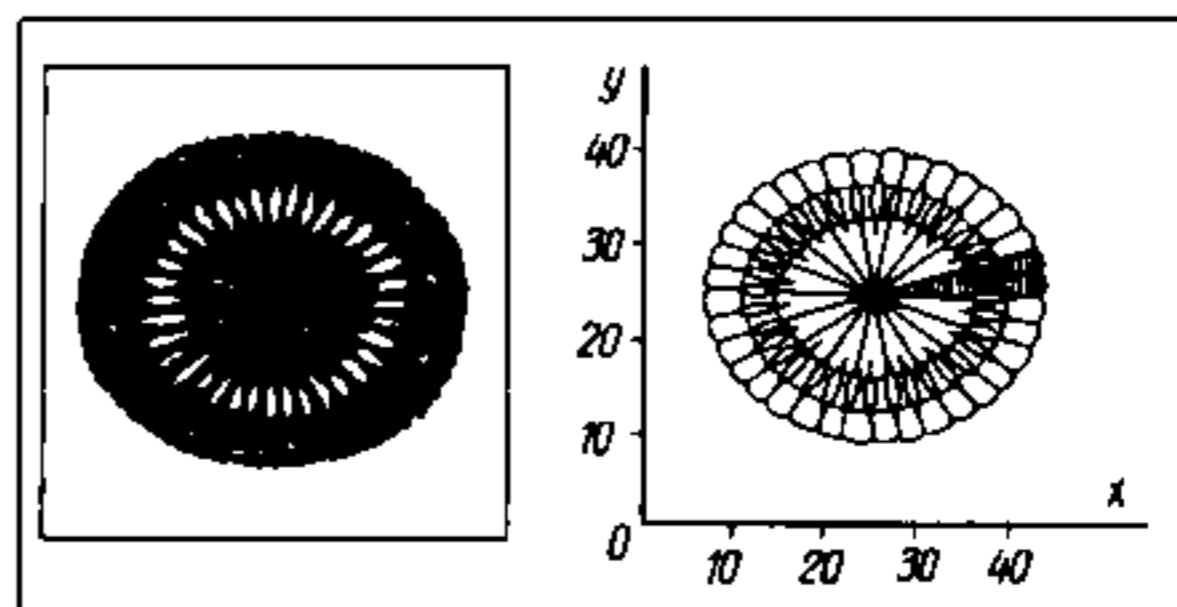


Рис. 8. Многоблочный фрагмент четырехлучевого коралла *Tetracoralla* (по Э. Геккелю) и его геометрическая модель в виде цикломерии с порождающим аффинным преобразованием:  $x_{k+1} \approx 0,94x_k - 0,4y_k + 11,48$ ;  $y_{k+1} \approx 0,29x_k + 0,94y_k - 5,82$ , которое переводит каждый из радиальных сегментов (один из них для наглядности заштрихован) в соседний с ним

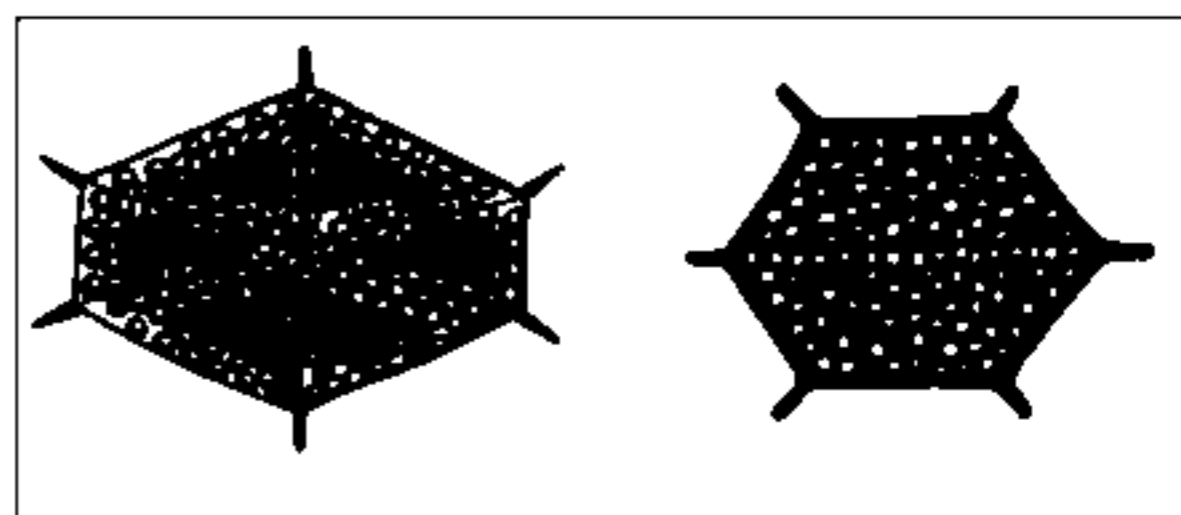


Рис. 9. Костные пластинки панциря кузювиков *Ostracantes* (по Э. Геккелю) с конфигурацией аффинной цикломерии

торых являются мебиусовы и проективные преобразования. Речь идет прежде всего о касательных неточечных конечно-параметрических преобразованиях (типа дилатаций и подэрных преобразований), некоторые применения которых при моделировании биоструктур представлены на рис. 14.

Биологические цикломерии в зависимости от характера порождающего преобразования могут быть явно дискретными или практически непрерывными. Использование итеративных алгоритмов при формировании многоблочных биоструктур функционально оправдано в связи с очевидной сверткой информации, необходимой для генетического кодирования и морфогенетической реализации таких биоструктур. В живом организме обычно присутствует целый ансамбль цикломерий наряду с морфологическими

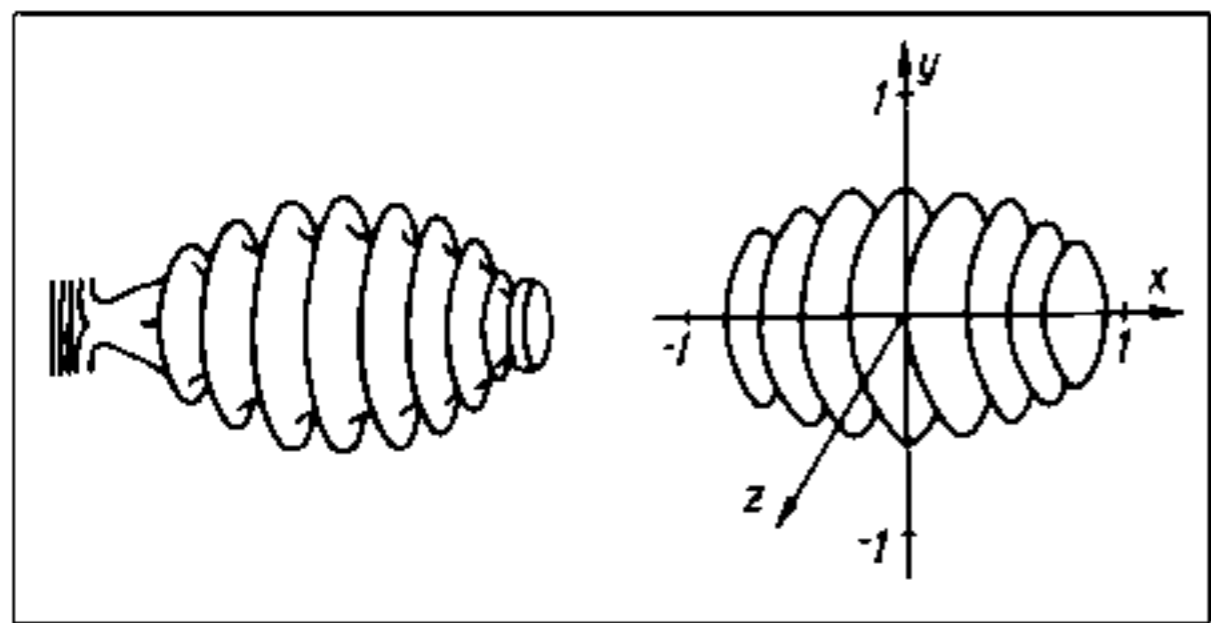


Рис. 10. Отдельная половая капсула *Euserularia exserta* из класса гидроидных полипов *Hydroidea* (по Э. Геккелю) и ее модель в виде цикломерии с проективным порождающим преобразованием:  $x_{k+1} = (x_k + 0,258) : (0,258x_k + 1)$ ;  $y_{k+1} = 0,966y_k : (0,258x_k + 1)$ ;  $z_{k+1} = 0,966z_k : (0,258x_k + 1)$

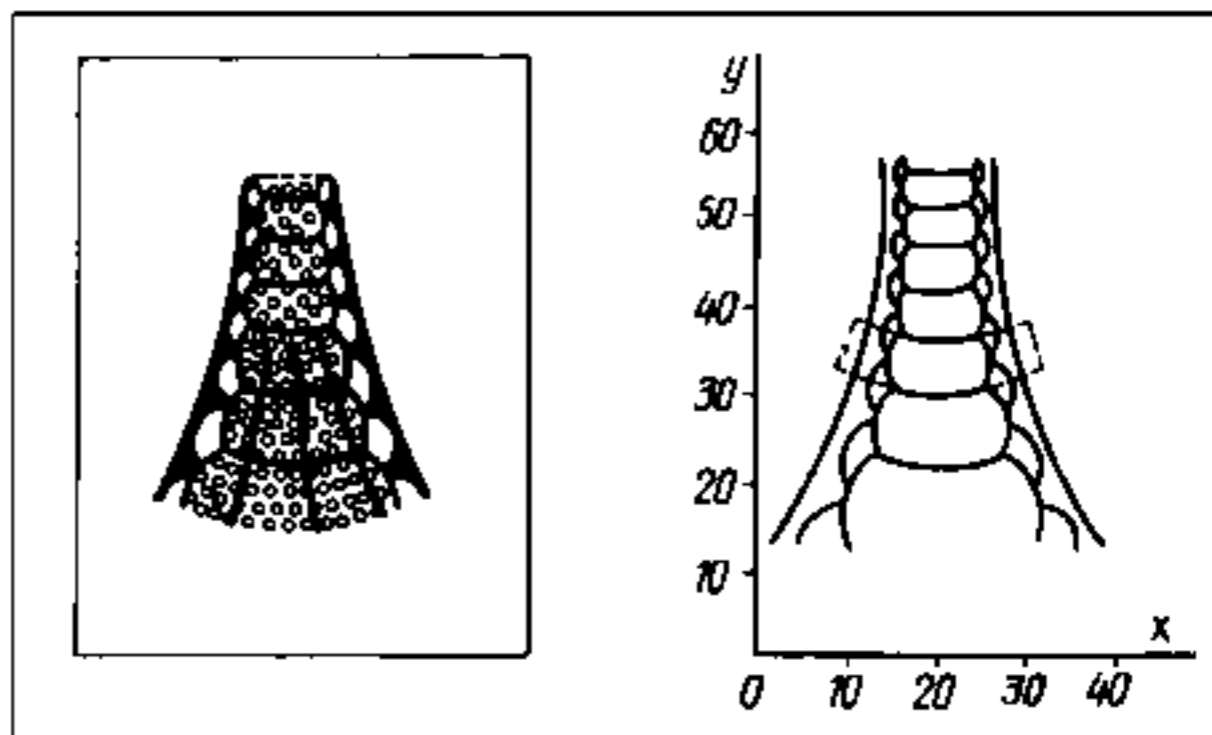


Рис. 13. Многоблочная структура в скелете радиолярии *Stichocapsinae* (по М. Г. Петрушевской) и ее геометрическая модель в виде цикломерии с мебиусовым порождающим преобразованием эллиптического типа (штриховой рамкой выделен вариант цикломера)

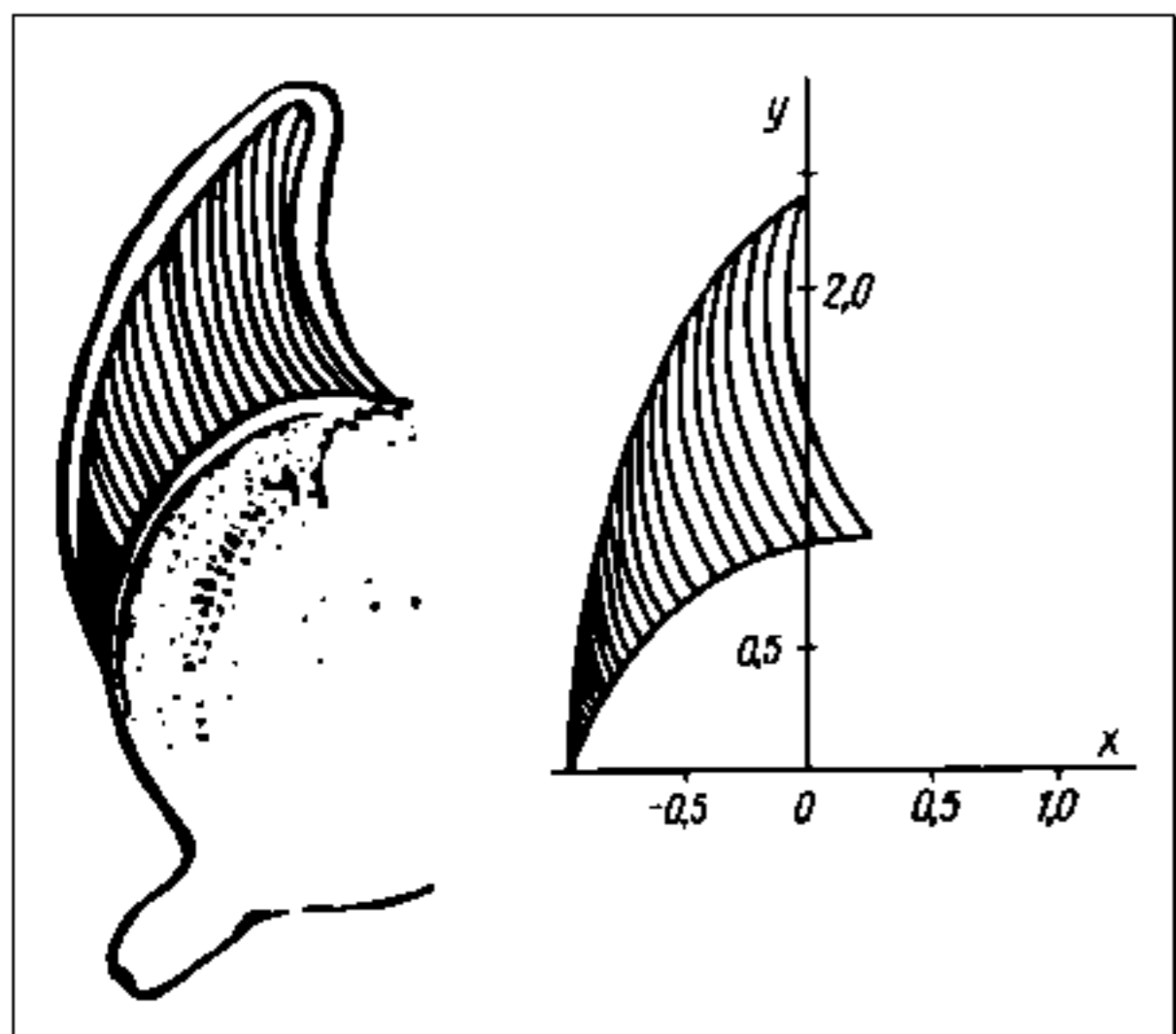


Рис. 11. Многоблочная структура у плода растения *Phylloxera scouleri* (по А. Л. Тахтаджяну с соавторами, 1982) и ее модель в виде циклометрии с порождающим проективным преобразованием  $x_{k+1} = (x_k + 0,08) : (0,08x_k + 1)$ ;  $y_{k+1} = 0,997y_k : (0,08x_k + 1)$

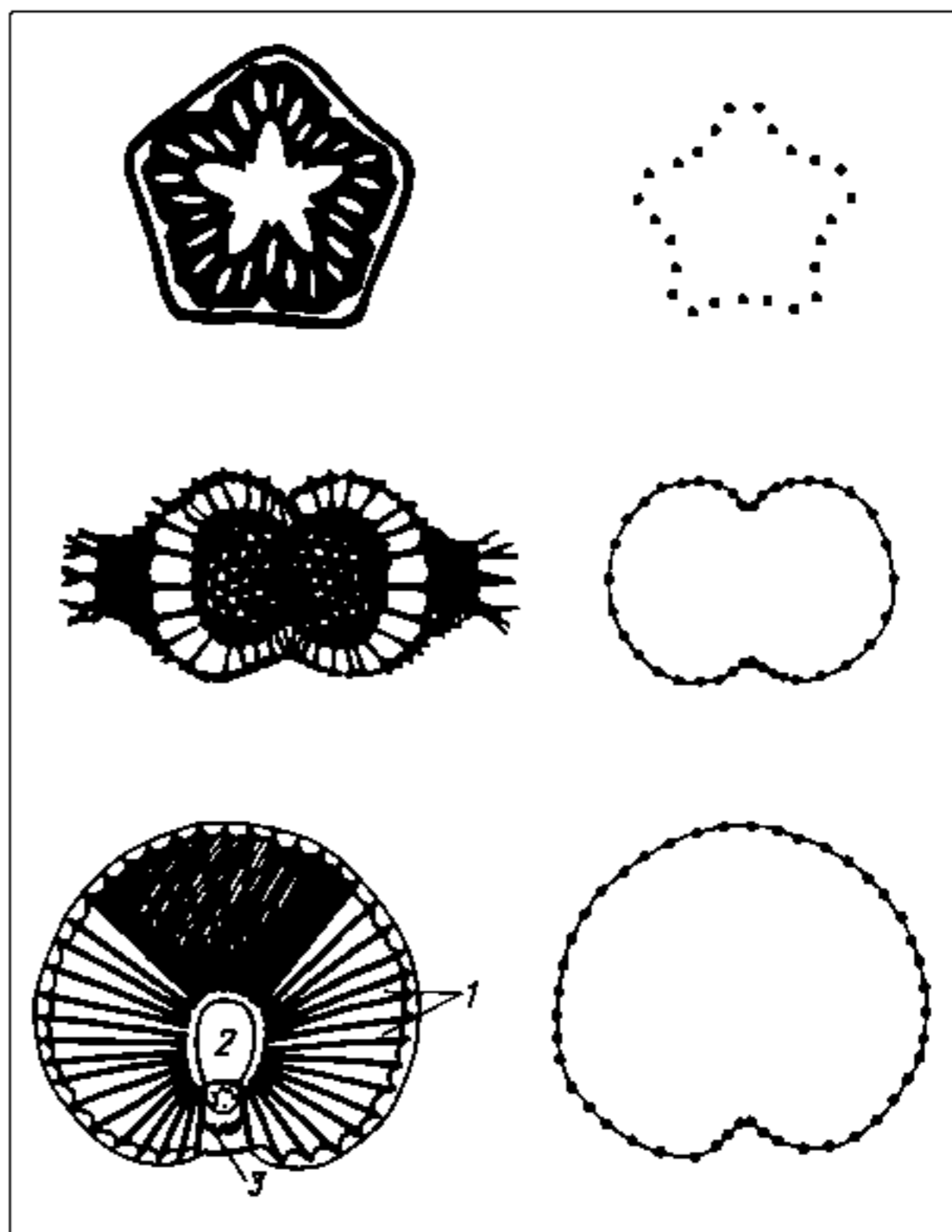


Рис. 14. Многоблочные биоструктуры, расположенные вдоль циклоидальных кривых, и геометрические модели (справа) этих дискретных конфигураций в виде цикломерии с касательным порождающим преобразованием

Сверху вниз: поперечный разрез плода лодвиги многолетней *L. perennis* (по А. Л. Тахтаджяну с соавторами) и касательная цикломерия, расположенная на гипоциклоиде с модулем  $-1/5$ ; представитель суммелярий (по Э. Геккелю) и касательная цикломерия, расположенная на нефроиде — эпициклоиде с модулем  $1/2$ ; схема жаберного глаза *Branchiostoma* (по Р. Гессе) с отдельными глазками (1), осью жабры (2) и эпителиальными клетками (3) и касательная цикломерия, расположенная на кардиоиде — эпициклоиде с модулем 1

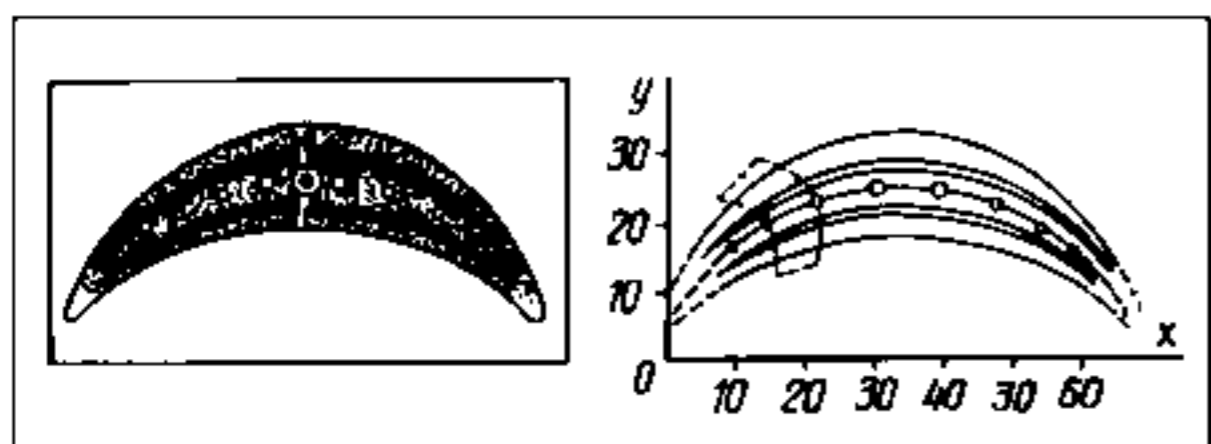


Рис. 12. Десмидиевая водоросль *Glosterium leibleinii* (по М. М. Голлербаху с соавторами) и ее геометрическая модель в виде цикломерии с мебиусовым порождающим преобразованием гиперболического типа (штриховой рамкой выделен вариант цикломера)



структурами менее регулярного характера. Добавим, что цикломерные принципы структуризации проявляются не только в рядах телесных блоков, но и в рядах цветовой раскраски, весовых параметров и многих других характеристик биообъектов.

Нелинейность порождающих мебиусовых и проективных преобразований приводит к тому, что, например, величины отдельных цикломеров и их простые отношения изменяются по ходу одного и того же цикломерного ряда; геометрическими инвариантами на протяжении всего ряда являются лишь характеристики, инвариантные относительно проективных (или соответственно мебиусовых) преобразований, например величины двойных отношений, или вурфов\*. Поскольку группы мебиусовых и проективных преобразований лежат в основе конформной и проективной геометрий, то положения этих абстрактных неевклидовых геометрий оказываются реализованными в биологических структурах.

Нельзя не отметить, что до последнего времени вопрос о целесообразности и адекватности применения в морфологии живых тел неевклидовых групп преобразований оставался открытым, более того, многими полагалось, что евклидовой группы преобразований вполне достаточно для биоморфологии. Например, известный английский исследователь Дж. Бернал вместе с соавтором С. Карлайлом взял именно евклидову группу движений за основу в своей концепции обобщенной кристаллографии, призванной охватить также симметрии живых тел [6]. Незавершенность, сложность и важность вопросов геометрии живых тел выражены в усиленной эмоциональной форме в следующих словах советского исследователя биосимметрий Ю. А. Урманцева (1971 г.): «Не будет преувеличением, если мы скажем, что тот геометр, который сумеет развить геометрию не живой природы в целом, а «всего лишь» цветка растения, будет достоин сразу

двух наград — за смелость и за гениальность!»

Стремление перейти к использованию в биологии обобщенных понятий симметрии ярко проявилось еще в работах Д' Арси Томпсона (1917), Д. В. Наливкина (1925, 1961, 1965), В. И. Вернадского (начиная с 30-х годов). Д' Арси Томпсон пытался найти преобразования, трансформирующие друг в друга телесные формы организмов различных видов, например щуки и окуня. При этом он получал порой чрезвычайно сложные криволинейные преобразования, отражающие, в частности, относительную автономию морфологического развития отдельных органов тела. Эрлангенская программа в качестве базиса при таком сравнительном анализе им не использовалась. Д. В. Наливкин вводил криволинейные симметрии без связи с Эрлангенской программой; предложенные им специфические правила построения «симметрических» преобразований дают преобразования, которые вообще не относятся к группам точечных преобразований, поскольку нарушают групповой принцип взаимно-однозначного соответствия точек, и которые не традиционны для других областей естествознания. В. И. Вернадский [8, 9] мало конкретизировал свои взгляды на неевклидову геометрию живого вещества и также не связывал их с Эрлангенской программой. Ни в одной из этих работ не рассматривались специально неевклидовы итеративные алгоритмы и возникающие на их основе конфигурации с циклическими группами неевклидовых автоморфизмов. В отличие от них настоящая брошюра освещает прежде всего правила взаимосопряжения естественных составных частей в индивидуальном биологическом теле; этот анализ осуществлен именно с позиций важной для математического естествознания Эрлангенской программы на основе конкретных неевклидовых групп преобразований, включающих подгруппу подобия; первостепенное внимание уделено итеративным алгоритмам, порождающим члененые конфигурации с циклической группой (или полугруппой) неевклидовых автоморфизмов.

Дополнительно коснемся интересующего многих современных исследователей направления работ по выявлению

\* Термин «вурф», заменяющий термин «двойное, или сложное, отношение», был введен Х. Штаудтом при создании проективного исчисления без метрических оснований и обозначает в переводе с немецкого языка «бросок».

скрытых закономерностей в процессах хаотического типа. Речь идет о значении масштабной симметрии для узоров, нередко возникающих в результате таких процессов и носящих название фрактальных объектов Б. Мандельброта. (В абстрактной форме эти объекты, называемые кратко фракталами, обсуждались еще задолго до Мандельброта другими математиками, рассматривавшими их как некие «чудовища» и проявлявшими к ним чисто академический интерес.) Фрактальным называется объект с «расползающейся», разреженной структурой, имеющей свойство масштабной инвариантности составляющих его узоров. При наблюдении таких объектов с возрастающим увеличением можно видеть, что они проявляют повторяющийся на разных уровнях рисунок. Фрактальный объект может, например, выглядеть совершенно одинаково независимо от того, наблюдаем ли мы его в метровом, миллиметровом или микронном масштабе. Появляется все больше свидетельств того, что природа «очень любит» фрактальные формы. Фрактальными свойствами обладают, по-видимому, сажа, коллоиды и некоторые полимеры. Фракталы также образуются при прохождении пузырьков воздуха через нефть, при росте некоторых кристаллов, а также при электрических разрядах, напоминающих молнию. Хаотичная форма облаков и береговой линии также нередко трактуется как фрактальная. Исследователи этого направления в качестве одного из биологических примеров фрактального объекта указывают на легкие человека, в которых каждый бронх разветвляется на более мелкие бронхи, а те, в свою очередь, на еще более мелкие, причем каждое разветвление идентично по конфигурации, но отличается от других размером. (Конечно, нельзя исключить, что в отличие от многих небологических фракталов в наследственно программируемых и весьма специфических биологических структурах фрактальность может быть результатом вовсе не законов хаоса, но в любом случае анализ биологических феноменов структуризации с точки зрения закономерностей хаоса представляется интересным и необходимым). Полученные автором биологические данные, частично изложенные в

настоящей брошюре, обращают внимание на возможное естественнонаучное значение неклассических, или обобщенных, фракталов, в которых отношения симметрии носят не масштабный, а более широкий, неевклидов характер, например мебиусов.

#### IV. ЕВКЛИДОВЫ И НЕЕВКЛИДОВЫ ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ В КИНЕМАТИКЕ БИОЛОГИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ И ФИЗИОЛОГИЧЕСКИ НОРМАЛЬНЫХ ПОЗАХ

*Мысль о том, что движение во многих отношениях подобно органу... представляется чрезвычайно плодотворной, особенно когда речь идет о таком стойком и всеобщем виде движения, как локомоция.*

Н. А. БЕРНШТЕЙН

До сих пор мы говорили о строении статичных органических форм. Но цикломерии имеют также прямое отношение к кинематике широкого класса биологических движений, которая зачастую может интерпретироваться как процесс взаимозамены цикломерий.

Тривиальный пример биологической трансформации такого типа дают ростовые преобразования многих биотел метамерного строения (личинок насекомых, тел сороконожек, кольчатых червей и др.), которые сопровождаются возрастной повторяющейся сменой метамерии с одним метамерным шагом на метамерию с другим шагом.

Менее тривиальный пример представляют собой случаи, при которых происходит взаимозамена цикломерий подобия разного вида, например, трансляционная цикломерия заменяется на цикломерию вращения. Рис. 15 иллюстрирует один из таких случаев, представляя стадии развития колоний у фитомонадид (по О. М. Ивановой-Казас, 1975), среди которых наряду с различными цикломериями вращения фигурирует трансляционная цикломерия (кроме этого, с развитием меняется число мотивных единиц).

Учет неевклидовых биоцикломерий позволяет существенно расширить представление о связи развития организмов или их частей со способностью

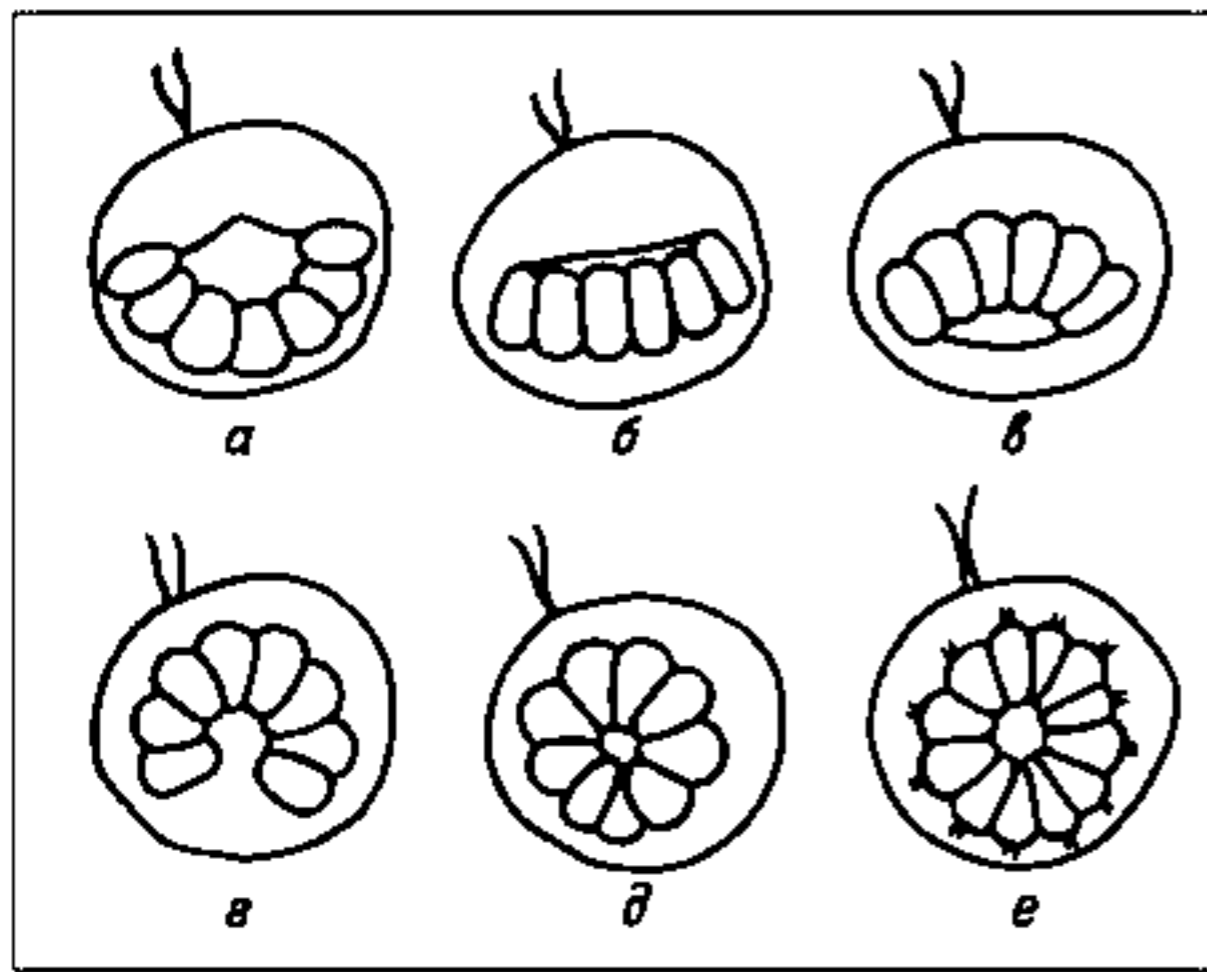


Рис. 15. Развитие колонии у фитомонадид *Eudorina illinoensis* (по О. М. Ивановой-Казас, 1975). — А — Е — стадии экскурсации

живого вещества пребывать в различных цикломерных состояниях. На рис. 16 представлен один из примеров с взаимозамещением евклидовых и неевклидовых цикломерий: при развитии зародыша саламандры последовательность сомитов, описываемая на ранней стадии цикломерией подобий в виде логарифмической спирали, переходит в лирообразную по форме мебиусову цикломерию.

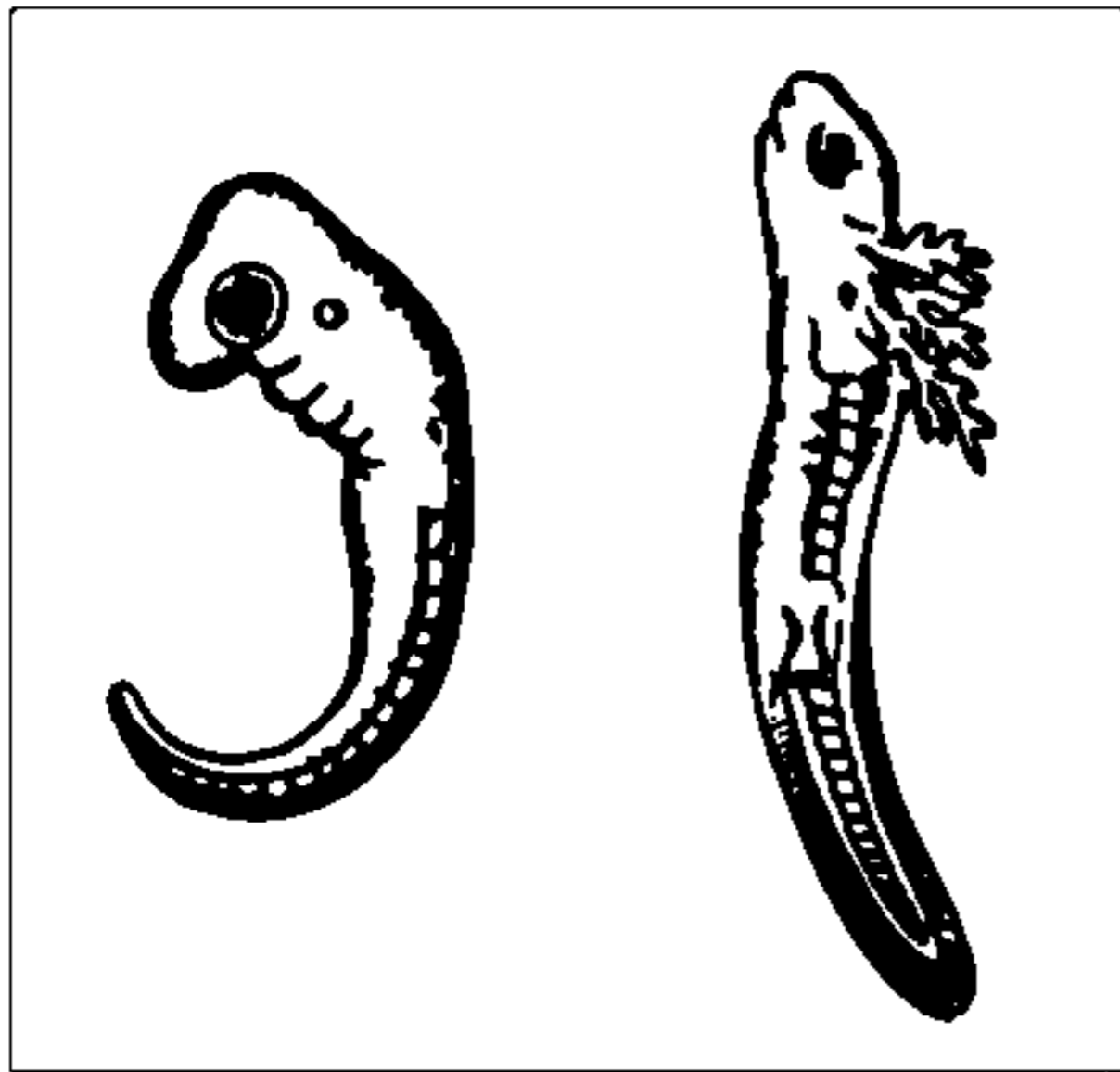


Рис. 16. Две стадии развития эмбриона саламандры (по О. Додсону, 1960). Переход от стадии к стадии характеризуется перестройкой последовательности сомитов от классической цикломерии подобия спирального типа к мебиусовой цикломерии локсодромического типа

При исследовании биологических цикломерий полезна следующая теорема о сохранении принципа цикломерности при трансформациях цикломерии: если цикломерия с порождающим преобразованием  $g$  (например, подобия) трансформируется преобразованием  $S$  (например, мебиусовым или проективным), то образующее многообразие с разбиением вновь является цикломерией с порождающим преобразованием

$$p = s \cdot g \cdot s^{-1}. \quad (2)$$

Докажем это почти очевидное утверждение. Обозначим через  $a_1$  и  $a_2$  произвольную пару соседних мотивных единиц исходной цикломерии, связанных по условию соотношением

$$a_2 = g \cdot a_1. \quad (3)$$

Через  $b_1$  и  $b_2$  обозначим блоки образованной в результате преобразования  $s$  многоблочной структуры, полученные из блоков  $a_1$  и  $a_2$  соответственно:

$$b_1 = s \cdot a_1, \quad (4)$$

$$b_2 = s \cdot a_2. \quad (5)$$

Теорема утверждает, что

$$b_2 = s \cdot g \cdot s^{-1} \cdot b_1. \quad (6)$$

Допустим, что это неверно, т. е.  $b_2 \neq s \cdot g \cdot s^{-1} \cdot b_1$ . Тогда, пользуясь (4), получаем,  $b_2 \neq s \cdot g \cdot s^{-1} \cdot s \cdot a_1$ , т. е.  $b_2 \neq s \cdot g \cdot a_1$ , или, применяя (3),  $b_2 \neq s \cdot a_2$ , что противоречит (5). Следовательно, наше допущение неверно, и соотношение (6) выполняется. Добавим, что если  $g$  — преобразование подобия, а  $s$  — мебиусово, то преобразование  $p = s \cdot g \cdot s^{-1}$  также будет мебиусовым, поскольку представляет собой произведение мебиусовых трансформаций. По этой теореме можно, зная порождающее преобразование цикломерного прообраза, определить порождающее преобразование цикломерного образа, полученного в результате произвольного преобразования  $s$ . Естественно, что форма мотивной единицы преобразованной цикломерии представляет собой трансформированную преобразованием  $s$  форму соответствующей единицы прообраза.

По аналогии с полиморфизмом кристаллов, решетки которых в определенных условиях могут перестраиваться с изменением их групп симметрии, способность живых тел перестраивать свои евклидовы и неевклидовы цикломерии можно называть цикломерным полиморфизмом. Положение о цикломерном полиморфизме дополнительно обращает внимание на то, что в индивидуальном развитии многоблочных биоструктур цикломерного типа переход от одной цикломерии к другой нередко видимым образом эстафетно распространяется вдоль ряда мотивных единиц (например, поочередное раскрытие при созревании чешуек у шишек хвойных деревьев, цветков в сложноцветных корзинках ромашек и пр.), и его можно назвать волной смены цикломерии. Естественные морфогенетические движения у многих полиблочных биотел (например, так называемая экскурвация при развитии колонии простейших организмов *Volvox*) могут моделироваться на основе одновременного прохождения вдоль ряда с некоторым интервалом двух и более волн смены цикломерии.

В аппарате моторных движений у многих животных организмов также присутствуют евклидовы и неевклидовы цикломерии. Конкретным примером могут служить многоигльчатые плавники рыб. На рис. 17 представлены классические цикломерии подобия, а на рис. 18 — примеры аффинной и проективной цикломерий.

Важно отметить, что, согласно изложенному, многие особенности строения плавников рыб как структур из взаимосогласованных составных частей можно описать и объяснить на основе принципов симметрических алгоритмов морфогенеза, вовсе не прибегая к соображениям о моторной функции этих органов. Здесь имеется заметное расхождение с поверхностной, но довольно распространенной точкой зрения, что плавники рыб предназначены для плавания и в результате длительной эволюции их строение стало оптимальным для выполнения этой функции, а потому особенности такого строения можно и должно выводить из положений гидродинамики. Другими словами, знания уравнений гидродинамики достаточно

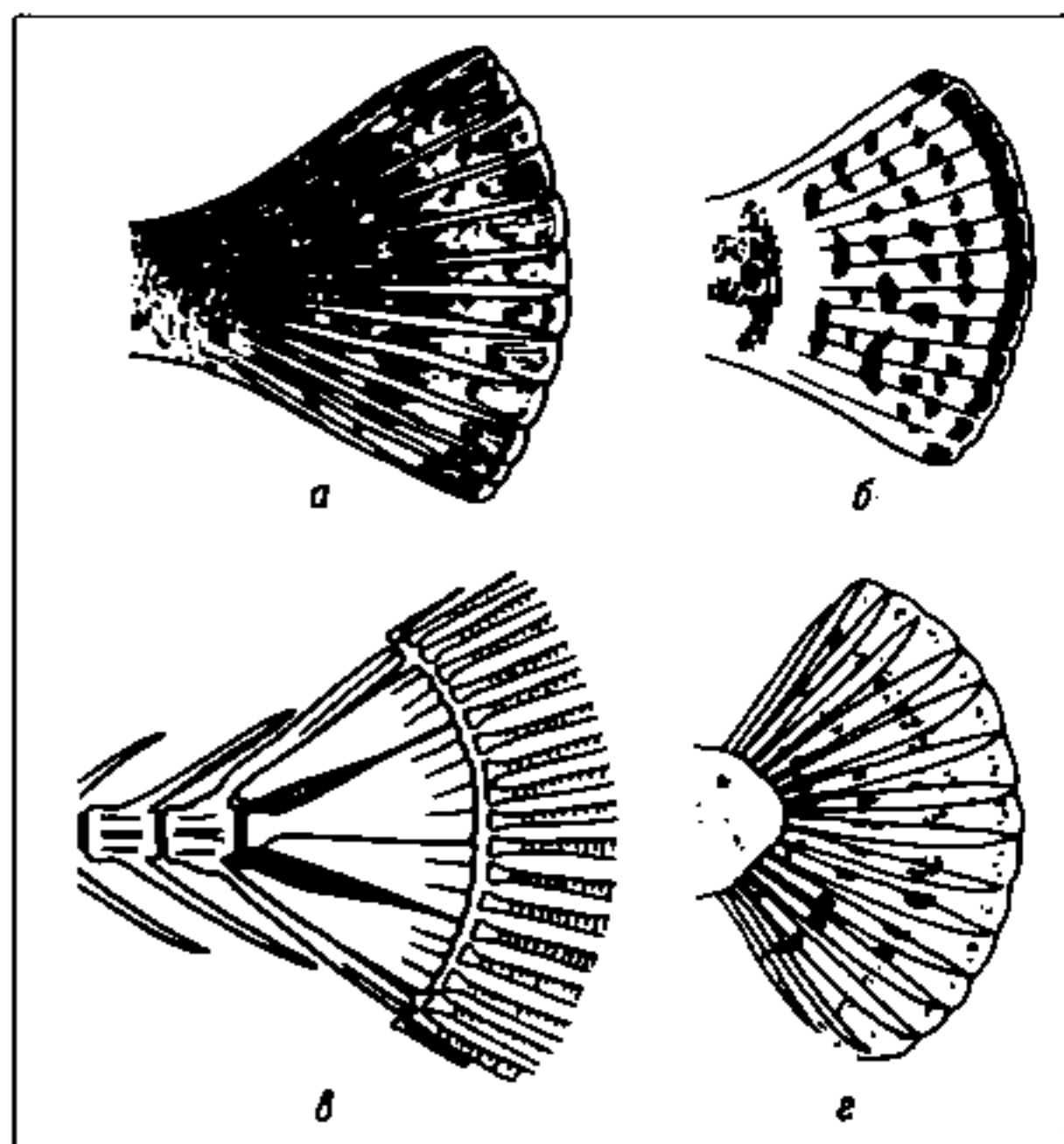


Рис. 17. Хвостовые плавники рыб *Scorpaena porcus* Linne (а), *Siniperca chuatsi* (б), *Platycephalus platessa* (в), *Rhombus tauricus* (г) (по Л. С. Бергу) как примеры цикломерий подобия

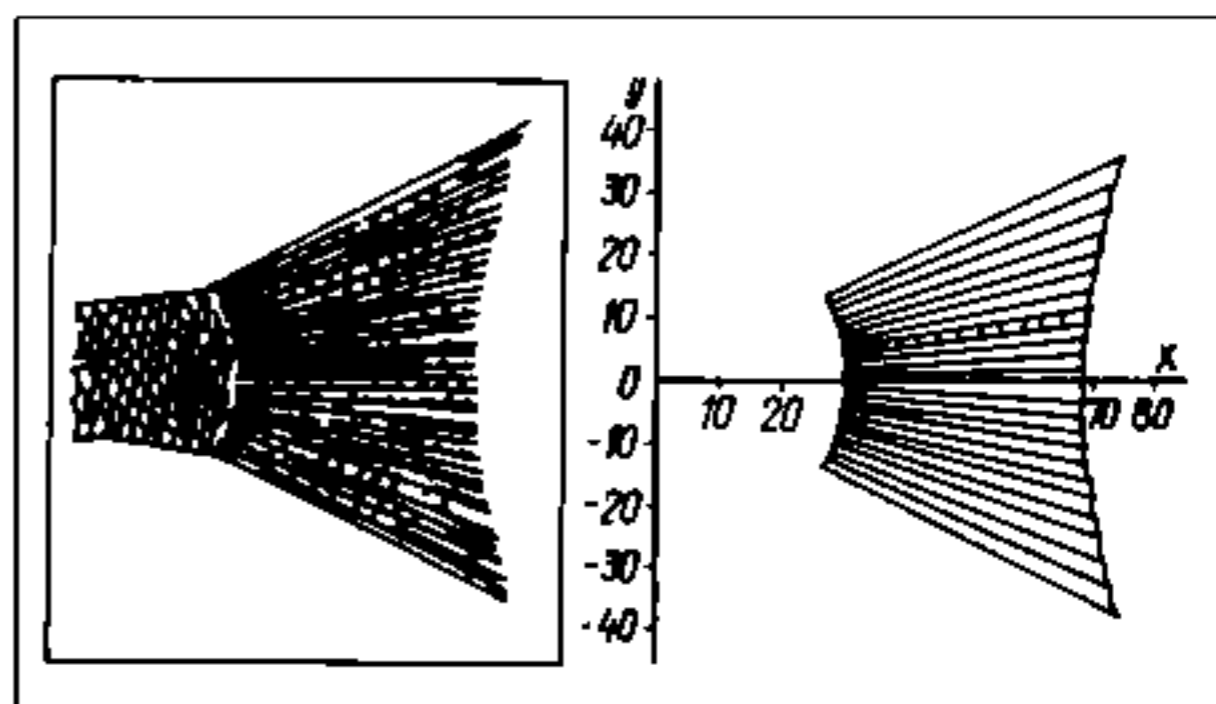


Рис. 18, а. Многоблочная структура, хвостового плавника рыбы *Acanthurus* sp. (по П. Грассе) и ее модель в виде цикломерии с проективным порождающим преобразованием (один из цикломеров для наглядности заштрихован)

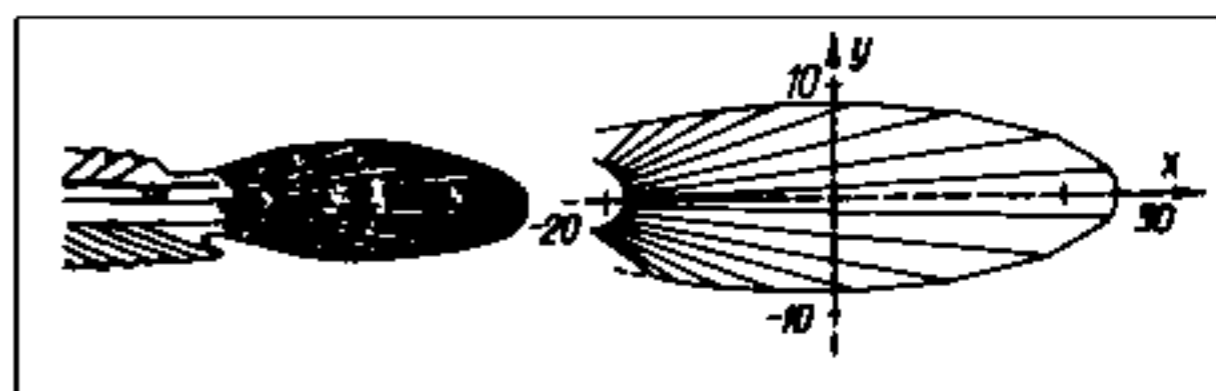


Рис. 18, б. Хвостовой плавник рыбы *Lampetra formis* (по Л. С. Бергу) и его модель в виде цикломерии с порождающим проективным преобразованием

$$x_{k+1} = \frac{0,83x_k + 1,27y_k - 2,26}{-0,05y_k + 1}; y_{k+1} = \frac{-0,14x_k + 0,91y_k - 3,26}{-0,05y_k + 1}$$

для понимания особенностей плавников рыб. Однако результаты инвариантно-группового анализа говорят против этого и обращают внимание на полифункциональность плавников, несущих наряду с двигательной функцией еще и важную общебиологическую функцию участия в морфогенетических процессах наследования телесной формы с алгоритмическим взаимосопряжением ее отдельных элементов.

Сделанное замечание может быть обобщено и приложено к вопросу о том, насколько строение живого организма и выполнение им той или иной функциональной задачи по отношению к внешней среде могут априори приниматься конструктором машин за образец для подражания с учетом того, что живые организмы имели миллионы лет эволюции в условиях действия естественного отбора. Изучение закономерностей симметрии в биотелах вскрывает тот факт, что далеко не все в строении биологических органов определено критерием оптимальной приспособленности к выполнению непосредственных функций во внешней среде, что важное значение имеют законы биологического морфогенеза. В связи с этим очевидно, что конструктор машин находится в лучшем положении по сравнению с живой природой, поскольку он может исходить целиком из критерия оптимальности функционирования во внешней среде и не быть связанным необходимостью соблюдать дополнительные условия, проистекающие из требований внутренней среды организма и закономерностей чисто биологического характера (объемный рост в ходе индивидуального развития, наследование биологических свойств и пр.). Конечно, понимая эти преимущества положения конструктора, не надо вовсе обесценивать — применительно к машиноведению — достижения живой природы в тех или иных функциональных задачах. Как-никак живая природа первой решила многие задачи функционирования во внешней среде, которые сегодня только встают перед конструкторами техники. И пускай эти решения сплошь и рядом не оптимальны в обычном смысле, но они имеют огромную ценность как привлекающие внимание к суще-

ствованию интереснейших проблем и демонстрирующие возможность их решения, как стимулятор фантазии человека и средство борьбы с инерцией его мышления, как апробированный всей историей человечества катализатор технического прогресса.

Обратимся теперь к известному в биологии понятию физиологически нормальной позы. Речь идет о том, что среди множества поз всего тела или вариантов расположения звеньев отдельных частей тела у животного некоторые варианты носят унаследованный стереотипный характер. Они инстинктивно реализуются типовым образом при испуге, утомлении, покое и т. д. К их числу относятся, например, поза покоя морской звезды с симметричным расположением лучей, описываемым цикломерией вращения, взаиморасположение элементов неработающего плавника рыбы, поза отдыхающей гусеницы метамерного типа и пр.

Изучение таких врожденно стереотипных поз и взаиморасположений отдельных группировок подвижных элементов («сегментарных» поз) опорно-двигательного аппарата очень важно потому, что они, по всей видимости, представляют собой исходные системы отсчета для построения моторных движений и относительно них формируется сложная система мышечных приводов с генетически заданными характеристиками, нарабатываются двигательные рефлекссы, взаимосогласовывается деятельность анализаторов и т. д. В прикладном аспекте изучение этих поз в их связи с функционированием различных систем организма — нервно-мышечной, вестибулярной и пр. — способно содействовать решению многих задач, связанных, например, с оптимизацией поз и движений у человека: снижению мышечной утомляемости при работе человека-оператора, уменьшению эффектов влияния на аппарат движения различных неблагоприятных факторов, например вибраций и перегрузок, повышению вестибулярной устойчивости, выбору оптимальных для мышечной системы поз при длительной обездвиженности человека, например в период лечения переломов конечностей, прогнозированию и объяснению сенсомоторных реакций человека в непривыч-

ных условиях, например в условиях измененной гравитации в космосе, и т. д.

Проведенные в отделе биомеханики Института машиноведения им. А. А. Благонравова АН СССР исследования выявили, что в число врожденно стереотипных входят не только (сегментарные) позы, характеризуемые цикломериями подобия, но и позы, характеризуемые неевклидовыми цикломериями, что резко расширяет данные о связи таких поз с симметричными алгоритмами морфогенеза. Кроме того, отмечено, что кинематика естественных моторных движений (по аналогии с ранее рассмотренными морфогенетическими движениями) зачастую представляет собой перестройку от цикломерии одного типа к цикломерии другого, т. е. сопряжена с цикломерным полиморфизмом.

Например, клубовидка *Glomeris Rotana*, сегментированное тело которой обычно прямолинейно вытянуто и имеет вид метамерной конфигурации, в случае опасности сворачивается в сегментированное кольцо; это движение описывается как переход от одной цикломерии подобия к другой.

Евклидовы и неевклидовы цикломерии описывают, например, стереотипные позы хобота слона, при которых сегментированный хобот распрямлен, свернут в логарифмическую спираль или имеет лирообразную форму у трубящего слона (рис. 19). Лирообразная форма мебиусовой цикломерии характерна для позы стойки кобры, готовящейся к нападению (тело кобры имеет явно сегментированную поверхность), а также конфигурации хвоста испуганной крысы (рис. 20). Сходная цикломерная форма наблюдается в стереотипных позах многопозвонковых шей некоторых птиц, например лебедей и фламинго. Хоботок многих видов бабочек, свернутый в покое в логарифмическую спираль, при работе распрямляется, и это движение естественным образом описывается как процесс перехода от одного цикломерного состояния к другому. Аналогичные симметрично-алгоритмические особенности движений наблюдаются и у тех растений, которые по своим способностям к движению занимают промежуточное положение между животными и неподвижными растениями. Например, веточка мимозы

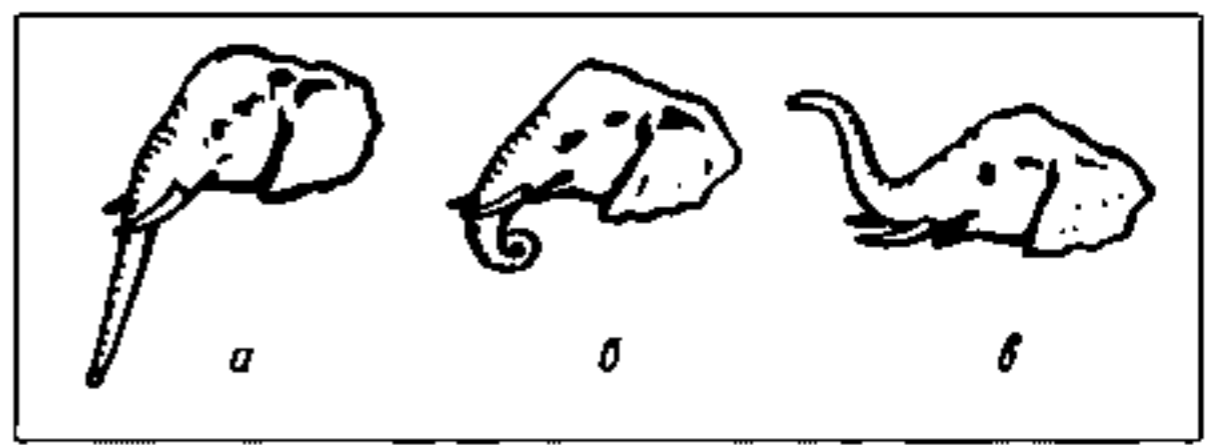


Рис. 19. Физиологически нормальные позы хобота слона (по Р. Хайнду), имеющие конфигурацию цикломерии подобия (а, б) и мебиусовой цикломерии локсодромического типа (в)

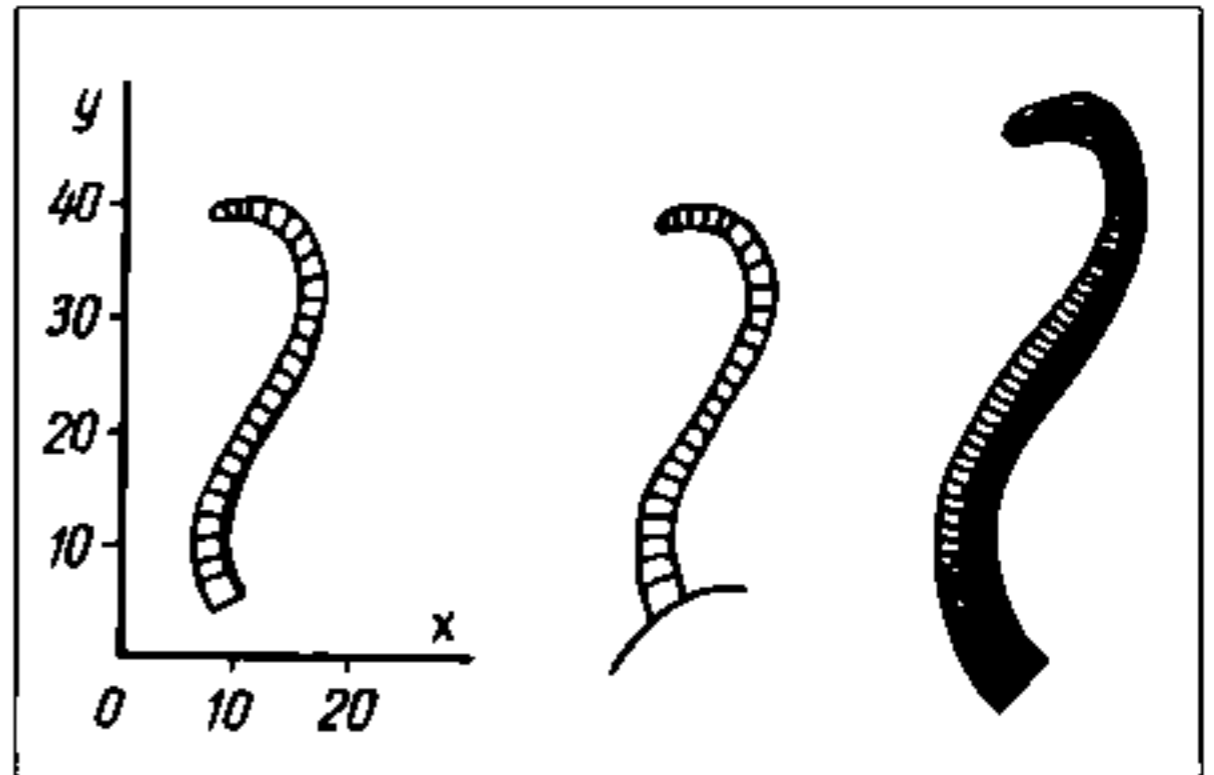


Рис. 20. Мебиусовы цикломерии в физиологически нормальных позах у животных. Слева: цикломерия с мебиусовым порождающим преобразованием. В центре: поза хвоста испуганной крысы (по П. Линдсею и Д. Норману). Справа: поза кобры перед атакой (фото С. И. Борткевича)

зы стыдливой с цикломерным расположением листочков в ответ на внешнее раздражение способна выраженной двигательной реакцией листочков и черешков изменить свою исходную форму, сложив листочки вдоль веточки, однако эта новая конфигурация последовательности листочков снова носит цикломерный характер. Кинематика различных способов передвижений у многих живых организмов — многоножек, гусениц, кольчатых червей и др. — также может моделироваться на основе представления о переходе от цикломерии к цикломерии, о волнах смены цикломерии, пробегающих вдоль многоблочного тела.

Сходство ростовых и моторных движений и их связь с формообразованием на основе циклических групп автоморфизмов подтверждают, что организацию биологической кинематики, вообще говоря, нельзя рассматривать в отрыве от принципов морфогенеза (от-

ражающих условия внутренней среды организма и способность этой среды к самоструктуризации) и выводить ее единственно из законов классической механики и функционального назначения движения, как это иногда пытаются делать.

## V. КОНЦЕПЦИЯ РЕПЛИКАЦИОННОГО МОРФОГЕНЕЗА

Остановимся на вопросе о возможных механизмах образования цикломерий евклидова, мебиусова, проективного типов в ходе самосборки биотел. Разработка этого вопроса автором вылилась в «концепцию репликационного морфогенеза», изложение которой начнем с описания относительно простой модели «криволинейных сэндвичей». Эта модель хорошо согласуется со многими биологическими особенностями образования цикломерий, например, у раковин и рогов животных, когда «рост живой и рост омертвевшей массы взаимосвязаны» [13, с. 257]. Как известно (см., например, [13, с. 257, 258]), при таком росте имеется зона, где клетки размножаются, и зона ороговения клеток, причем наблюдается постоянный переход ансамблей клеток из первой зоны во вторую, а соотношения между размерами зон остаются постоянными. Скорости роста в разных участках первой зоны могут различаться.

В излагаемой ниже модели активно используются следующие известные положения. Основная роль в морфогенетических процессах принадлежит движениям органических пластов (это положение подчеркивается во многих биологических публикациях). Надмолекулярные органические тела отличаются от кристаллов дополнительно тем, что имеют криволинейные поверхности, и их взаимосопряжение в упорядоченные ансамбли происходит в общем случае не по кристаллографическому правилу плотнейшей упаковки. В биологической самосборке отдельных биотел существенную роль играют различные реакционноспособные химические группировки, неоднородным образом распределенные по поверхности этих тел и обуславливающие наличие поверхностной энер-

гии. Биологическая самосборка не противоречит известному принципу об устойчивости системы в состоянии с минимальной энергией: в ходе самосборки соответствующие химические группировки на сопряженных поверхностях реагируют с выделением энергии, и общая поверхностная энергия системы становится меньше суммы поверхностных энергий отдельных органических поверхностей.

Важно также то, что, судя по всему, особую роль во взаимосопряжении криволинейных органических поверхностей при самосборке играют поверхностные линии с экстремальными геометрическими и морфогенетическими свойствами; вдоль этих линий размещены биохимические группировки, обеспечивающие стыковку смежных поверхностей. Другими словами, в биоморфологии в отличие от классической кристаллографии речь может и должна идти об укладках по принципам сопряжения смежных криволинейных поверхностей по специальным линиям и зонам, отражающим, например, свойства кривизны поверхности.

Как подчеркивается Л. В. Белоусовым [4] и другими авторами, свойства кривизны поверхности особо важны в морфогенетическом отношении. Но с этими свойствами непосредственно связаны линии кривизны, изогоналы к ним и асимптотические линии на этой поверхности. В дифференциальной геометрии известно, что для поверхности  $\tilde{r}(u, v)$  с коэффициентами первой и второй квадратичных форм  $E, F, G$  и  $L, M, N$  линии кривизны поверхности (они по определению в каждой точке поверхности имеют направления, в которых нормальная кривизна поверхности в данной точке достигает экстремального значения) выражаются уравнением

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

а изогоналы к данным линиям, т. е. траектории, пересекающие их под постоянным углом  $\alpha$ , имеют в координатах линий кривизны следующий вид:

$$v = \pm \operatorname{tg} \alpha \cdot \int_{u_0}^u \sqrt{\frac{E}{G}} du, \quad 0 < \alpha = \operatorname{const} < \frac{\pi}{2}.$$

Линии кривизны образуют на поверхности сеть ортогональных и сопряженных линий.

Асимптотические линии по определению в каждой точке регулярной поверхности совпадают с направлением, в котором нормальная кривизна поверхности равна нулю, и аналитически выражаются следующим образом:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0.$$

Названные типы линий играют, в частности, немаловажную роль в теории оболочек, где в определенных ситуациях оказываются выделенными экстремальными механическими свойствами.

Подчеркнем, что (это известный факт дифференциальной геометрии) группой автоморфизмов линий кривизны поверхностей (и изогоналей к ним) является группа мебиусовых преобразований, а группой автоморфизмов асимптотических линий — группа проективных преобразований. Для множества, составленного из асимптотических линий и линий кривизны поверхности, группой автоморфизмов служит группа преобразований подобия, находящаяся на пересечении мебиусовой и проективной групп.

После этих предварительных данных рассмотрим непосредственно модель «криволинейных сэндвичей», объясняющую возникновение евклидовых и неевклидовых цикломерий за счет сопряжения органических пластов по группоинвариантным линиям поверхностей.

Обратимся к примерам формирования рогов (или раковин). Пусть имеются модельные аналоги зоны ороговения и ростовой зоны, характеризуемые тем, что в первой содержатся отвердевающие и отвердевшие криволинейные органические пласты, а во второй формируются и растут новые органические пласты. Для простоты будем считать, что эти пласты имеют нулевую толщину, хотя можно обойтись и без этого упрощения. Рассмотрим сначала только случай формирования мебиусовой цикломерии.

Пусть на первом этапе  $[t_0, t_1]$  процесса формирования модельного «рога» в зоне ороговения уже имеется один криволинейный пласт в виде затравки. С этого пласта, как с матрицы, в ро-

стовой зоне реплицируется (дублируется) его евклидова копия — второй криволинейный пласт, причем на обоих пластах химические группировки, обеспечивающие их сопряжение, расположены вдоль линий кривизны или изогоналей к этим линиям. В данном «сэндвиче» из двух неравномошных соседних пластов и сшивок между ними верхний пласт, расположенный в зоне ороговения, утрачивает способность ростового изменения, тогда как второй пласт, находящийся в ростовой зоне, после своего возникновения продолжает расти.

При этом он сохраняет изначальное расположение химических группировок сопряжения именно вдоль названных мебиусово-инвариантных линий своей поверхности (в общем случае изменяющейся по форме в ходе роста, поскольку в разных участках ростовой зоны рост частей пласта происходит с разной скоростью). В ходе такого преимущественного и неоднородного по площади роста второго пласта евклидова эквивалентность формы пластов в общем случае утрачивается и переходит в мебиусову эквивалентность, поскольку линиям кривизны одного пласта соответствуют линии кривизны второго, что является условием мебиусовой трансформации поверхностей. В результате в конце первого этапа рассматриваемого процесса мы имеем «мебиусов сэндвич».

На втором этапе  $[t_1, t_2]$  процесса этот первый «сэндвич» полностью вытесняется из ростовой зоны, в которой накапливаются материалы для формирования третьего пласта. При этом второй пласт оказывается в зоне ороговения, и уже весь «сэндвич» подвергается ороговению, твердея и теряя способность к росту. Далее полностью повторяется схема развития отношений между первым и вторым пластами, но уже применительно к отношениям второго и третьего пластов. Распределение локальных скоростей роста в ростовой зоне предполагается неизменным, как и время на образование нового — второго «сэндвича» до его вытеснения из этой зоны. Очевидно, что этот второй «мебиусов сэндвич» будет мебиусово эквивалентен первому «мебиусову сэндвичу».

На следующих этапах  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k=2, 3, \dots, N$  процесса описанные морфо-



генетические акты повторяются, число мебиусово эквивалентных «сандвичей» возрастает до  $N$  и образуется мебиусова цикломерия из  $N$  цикломеров. Пульсирующее во времени действие системы минерализации в зоне ороговения может периодически влиять на края отдельных пластов, в результате чего в окончательном варианте указанная цикломерная последовательность пластов может визуальнo восприниматься как цикломерия гофрированного вида (аналогично представленной на рис. 3), в которой каждый цикломер объединяет  $n < N$  пластов.

Небольшой модификацией изложенной модели (устранением зоны ороговения и условия затвердевания пластов и связей между ними) можно получить модель перестройки одной сформировавшейся мебиусовой цикломерии в другую. Действительно, в рамках так измененной модели, если один из пластов, например, первый в уже сформировавшейся цикломерной цепи под влиянием каких-то объективных причин (биохимических, механических и пр.) принимает и удерживает новую, мебиусово-трансформированную форму, то перестройка сети его линий кривизны приведет через устойчивые связи по линиям кривизны к соответствующей модификации сети линий кривизны второго пласта и вследствие этого его мебиусовой трансформации. Далее эта перестройка эстафетно передается третьему и последующим пластам, что приведет к замене одной мебиусовой цикломерии на другую.

Заметим, что если сопряжение соседних пластов осуществляется по асимптотическим линиям, имеющим группой автоморфизмов проективную группу, то описанная модель автоматически дает случай проективных цикломерий. Если же сопряжение пластов осуществляется сразу по мебиусово-инвариантным и проективно-инвариантным линиям поверхностей, то модель соответствует случаю цикломерий подобия.

Что вообще известно о способности надмолекулярных слоевых структур к репликации? Важные данные по этому вопросу получены ученым из ФРГ А. Вейссом [38]. На основании проведенных исследований, касающихся проблемы происхождения жизни, он при-

шел к утверждению, что принцип репликации и самоумножения не ограничивается системами нуклеиновых кислот и белков и характерен для более широких классов макромолекулярных систем; химическая эволюция не прямо породила репликационные системы генетического кодирования живых организмов, но сначала образовались более простые реплицирующие системы, и уже их эволюция привела в конце концов к системе репликации, заложенной в генетическом кодировании. Отметим, что при этом Вейсс, сосредоточившись на задаче происхождения жизни, совершенно не затрагивает обсуждаемых нами проблем морфогенеза живых организмов. Однако, по мнению автора, результаты Вейсса имеют отношение к биологическому морфогенезу. Осветим их подробнее.

Говорят, что система обладает способностью к репликации, если она может быть подвержена спонтанному процессу самоумножения, при котором информация, необходимая для такого процесса, передается от материнского к дочернему образованию. Химия этих систем должна позволять отделение материнского и дочернего образований, обеспечивая дочерней копии возможность выступить на следующем этапе уже в материнской роли и породить потомка, эквивалентного исходному предку. Последнему положению не удовлетворяют все простые явления кристаллического роста. Действительно, для кристаллов характерно наличие в них структурных дефектов, которые могут рассматриваться как носители информации; при росте кристаллов эти информационные дефекты могут вписываться в прирастающую поверхность кристалла. Однако отделить старую и новую части кристалла нельзя никаким простым процессом. Если же ударить по кристаллу и разбить его на случайные кусочки, которые могут выступить зародышами роста новых кристаллов, то распределение дислокаций в новых кристаллах будет иметь существенно различный характер.

Спонтанное разделение материнского и дочернего информационно значимых образований требует специальных механизмов. Вейсс обратился к исследованию слоистых по структуре глин, для которых

известно распадение слоистых образований на более мелкие и даже на отдельные слои. Между слоями глинистой частицы могут скапливаться посторонние включения: ансамбли молекул воды и ионов металлов и пр. Когда воды много, в некоторых глинах частицы набухают, расслаиваются и распадаются на отдельные слоистые образования. Если в окружающей среде имеются необходимые ингредиенты, то каждый отдельный пласт или слой может начать выстраивать из них себе другой пласт, «себеэквивалентный». В другом варианте слоистое образование не распадается, а утолщается; его разбухание происходит уже за счет того, что в межслоевом пространстве начинает синтезироваться новый пласт, который раздвигает соседние слои в стороны. При этом все слоистое образование в целом растет, слои в нем умножаются до тех пор, пока сохраняются условия роста или оно не распадается на составные слоистые блоки из-за ослабления связей между пластинами при изменении внешних условий, например при попадании глины в воду.

Перечисленные случаи размножения глинистых частиц отдаленно уже напоминают репликацию нуклеиновых кислот в живом. В последующих экспериментах Вейсса было обнаружено, что исходный пласт может служить своеобразной информационной матрицей, ибо дочерний пласт, оказываясь, является информационной копией и повторяет почти все химические аномалии, имеющиеся на поверхности исходного пласта. Каждый дочерний пласт становится обладателем тех же (почти) особенностей на своей поверхности. В принципе оказалось возможным изготовление миллионов и миллионов таких копий. Вейсс проверил этот матричный синтез глинистых копий на протяжении двадцати поколений, и во всех случаях получил передачу этой «генетической» информации от исходного пласта-предка. Некоторые ошибки или «мутации» при такой репликации могли в принципе ускорять или замедлять синтез пластов-потомков, давая возможность естественного отбора «мутантов». По словам Вейсса, описанные механизмы репликации глинистых пластов могут рассматриваться как примитивные двух-

мерные аналоги репликации в двойной спирали ДНК [38, с. 853].

Эти данные тем более интересны, что в настоящее время многими исследователями по ряду дополнительных причин допускается возможность зарождения жизни в глинах или других минералах. Возвращаясь к биологическому морфогенезу, отметим очевидную ценность этих данных в связи с изложенной выше моделью «криволинейных сэндвичей». Последняя использует возможность репликации надмолекулярных пластов (или сборки эквивалентных друг другу пластов) и акцентирует внимание на характерных для биологии криволинейных пластах, а также в возможности их группо-инвариантного сопряжения (конечно, репликация органических пластов, видимо, значительно более сложный процесс, чем репликация у глин). Представление о репликационном характере биологического морфогенеза согласуется со многими известными феноменологическими данными. Например, рост многих биообъектов сопровождается загадочными ритмическими пульсациями объема зон роста. С точки зрения изложенных материалов о репликации слоев, по Вейссу, это естественно и связано с периодическим набуханием тканей как условием интенсивного репликационного роста: межслоевые расстояния и образование новых пластов зависят от количества воды или сходной жидкости в окружающей среде [38, с. 853], и соразмерные пульсации количества воды могут резко интенсифицировать репликационный рост (ср. со словами Вейсса: «каждый цикл оттепели или дождей и засухи может обеспечить необходимые условия для одного цикла репликации рассматриваемых систем» [38, с. 860]).

Эти представления имеют не только теоретическую, но и практическую ценность. Например, они позволяют оптимизировать с учетом фаз и ритмов внутреннего гидростатического давления у биотканей режимы физических воздействий (механических, электрических и др.), применяемых в задачах управления ростом и морфогенезом этих тканей. Выдвигаемая концепция репликационного морфогенеза устанавливает — за счет расширения на морфогенез биологиче-

ского значения принципа репликации — определенную гармонию между специфической генетической кодировкой, свойствами биологического морфогенеза и гипотезами о репликационном зарождении жизни на минеральных матрицах. При этом репликационные свойства генетического кода предстают не биологически одиозными, а интегрированными в общую схему репликационного происхождения и эволюционирования биологических структур; принцип наследования информации оказывается согласованным и родственным с принципом продуцирования биотканей, что, видимо, выгодно с эволюционной точки зрения; многообразие живых организмов выступает как многообразие реализаций принципа репликации.

## VI. КИНЕМАТИКА ОБЪЕМНОГО РОСТА БИОТЕЛ С НЕЦИКЛОМЕРНЫМ ВЗАИМОРАСПОЛОЖЕНИЕМ ЧАСТЕЙ

*Мудрость рождается из пристального  
наблюдения за тем, как растут люди.*

КОНФУЦИИ

*А люди разве не цветы?  
О, милая, почувствуй ты,  
Здесь не пустынные слова.  
Как стебель тулово качая,  
А эта разве голова  
Тебе не роза золотая?  
Цветы людей и в соль и в стыть  
Умеют ползать и ходить.*

С. ЕСЕНИН («Цветы»)

До сих пор мы рассматривали кинематику объемного биологического роста на примере цикломерных биотел, когда рост описывается как процесс взаимосмены цикломерий (изменение числа мотивных единиц пока опустим). Однако многие биотела характеризуются неупорядоченным или усложненным взаиморасположением частей и в лучшем случае могут трактоваться как ансамбль из многих цикломерий, но никак не одиночная цикломерия. Тем не менее эти биотела наделены способностью к интегральному объемному росту геометрически закономерных видов.

Объемный рост живых тел — один из самых интересных и загадочных,

но очень слабо исследованных примеров закономерного кооперативного поведения множества составных частей биотел. Этот рост принципиально отличается от поверхностного роста кристаллов, который происходит за счет прибавления вещества на поверхности кристалла и не затрагивает их внутренние области. Объемный рост живых тел сопровождается изменением размеров, а зачастую и формы их внутренних областей. Кооперативность процесса объемного роста проявляется в том, что, зная трансформацию нескольких точек телесной фигуры, охваченной таким ростовым преобразованием, можно определить трансформацию всего множества точек этой фигуры.

Примером может служить известный масштабный вид объемного роста, наблюдаемый у растений и животных (рост листьев и цветков некоторых растений, личинок насекомых, половозрелых рыб и пр.) и выражающийся в пропорциональном увеличении всех участков тела (рис. 21, 22); по трансформации расположения трех точек тела, подверженного масштабному преобразованию, можно определить трансформацию всего множества точек этого тела.

Но наряду с масштабным видом, как оказывается, существуют неевклидовы виды объемного роста, прежде всего мебиусов и аффинный. Остановимся подробнее на мебиусовом виде роста.

Если объемный рост моделировать с помощью представления о некоторой активной среде, растущей за счет согласованного роста каждой точечной зоны своего объема, то масштабный объемный рост на такой модели реализуется, очевидно, при выполнении двух условий: 1) масштабирование каждой локальной зоны тела, т. е. рост каждой точечной зоны одинаково интенсивен во всех направлениях (локально-изотропный рост), 2) равенство масштабов изменения всех локальных зон масштабируемого тела. Эти условия локального типа могут рассматриваться как постулаты, из которых формальным образом выводятся особенности масштабного видоизменения тел в «целом».

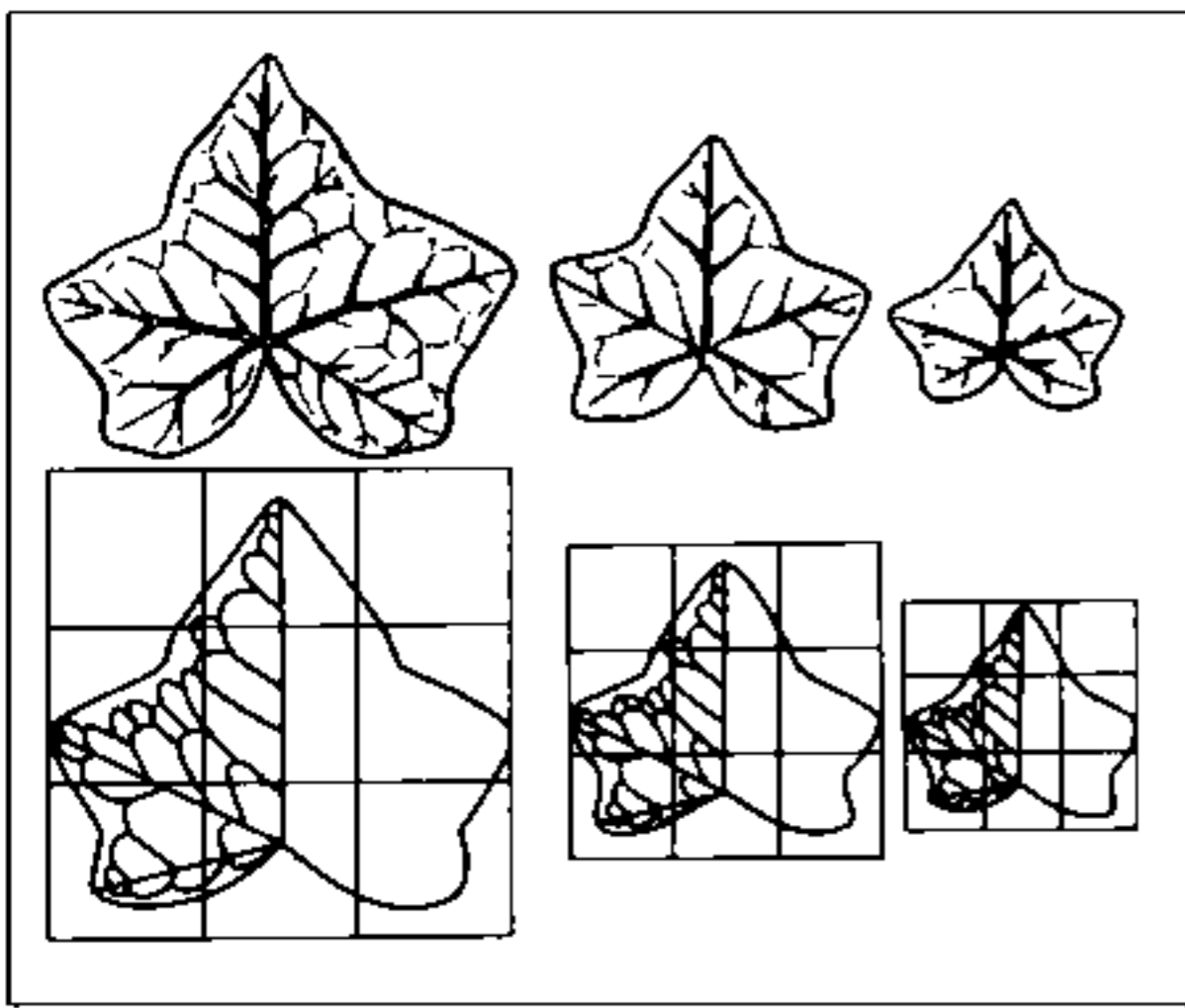


Рис. 21. Масштабная трансформация растущих биотел на примере листьев растений

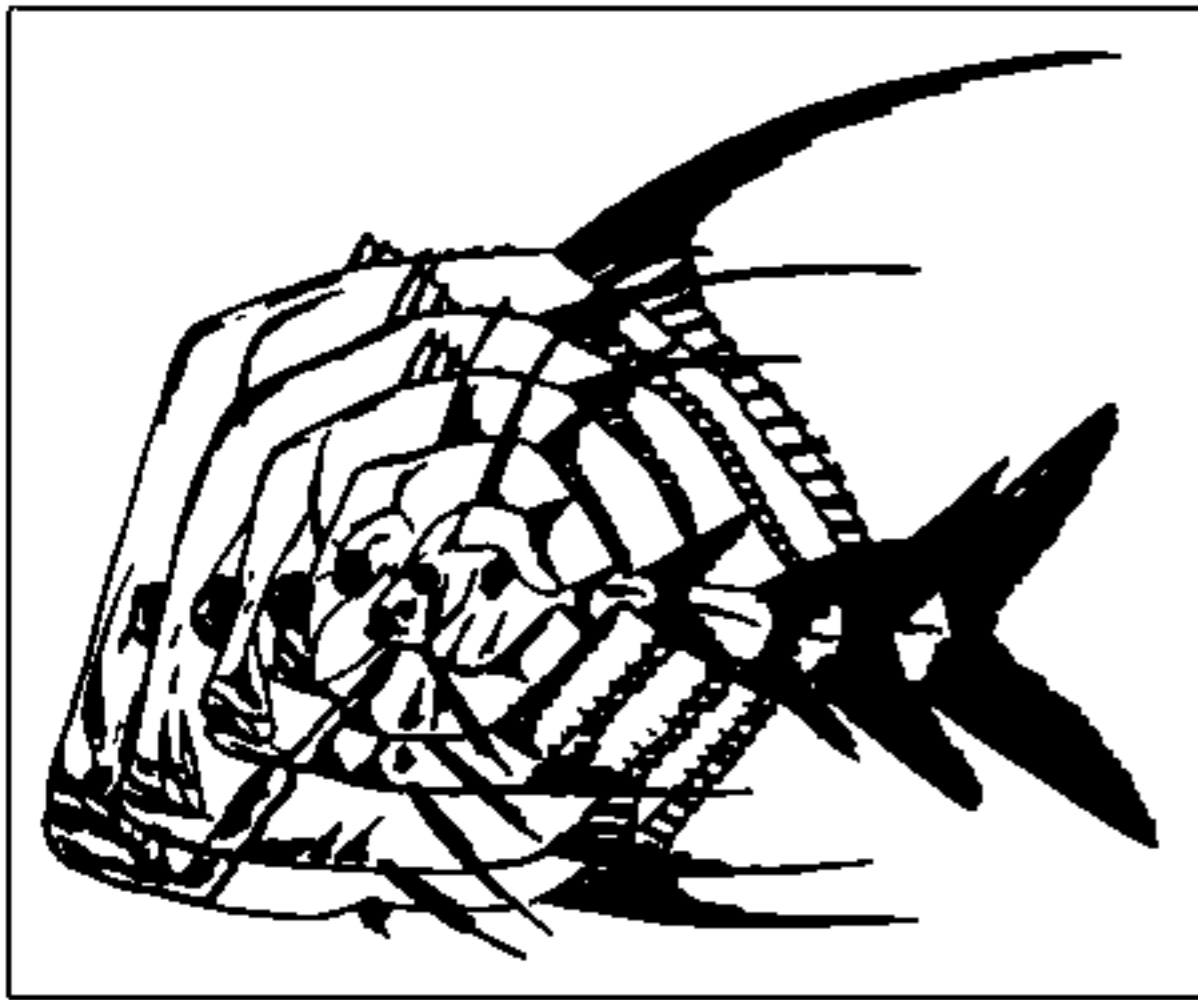


Рис. 22. Масштабный рост тела у рыб *Selene vomer* (по Люткену). Заметим, что рост многих плавников происходит относительно автономно от тела по иным геометрическим правилам

Не реализуются ли в живой природе типы ростовых видоизменений, удовлетворяющие еще более простому списку условий, например списку, в котором отброшено второе из двух названных условий и сохранено только первое? Рассмотрим следствия из сохраненного условия локальной изотропности роста, очень естественного в физическом отношении, и одного из простейших с точки зрения локальных правил. Как известно из геометрии, при таком типе локальных изменений, сопровождающихся, очевидно, преобра-

зованием подобия каждой локальной зоны, форма тела в «целом» может с обычной точки зрения резко измениться, поскольку подобие в «малом» не сопровождается подобием в «целом» в том общем случае (как раз рассматриваемом нами), когда трансформации подобия не одинаковы в различных локальных зонах. Преобразования, при которых каждая локальная зона тела претерпевает преобразование подобия, носят название конформных (именно с позиций локального подобия подходил к конформным преобразованиям К. Гаусс, создавший учение о них). Для случая трехмерного пространства, которым мы здесь ограничимся, все конформные преобразования исчерпываются, как известно, группой мебиусовых преобразований.

Приведем конкретные примеры адекватного моделирования объемного роста биотел на основе мебиусовых преобразований. При этом подчеркнем, что, как и в случае цикломерий, евклидовы и неевклидовы симметрические преобразования реализуются в аналогичных биотелах. Так, шляпки плодовых тел многих видов шляпочных грибов в ходе индивидуального развития масштабируются. Вместе с тем имеются виды грибов, у которых ростовая трансформация шляпки плодовых тел на длительном отрезке жизни описывается мебиусовым преобразованием. На рис. 23 в качестве такого примера представлена кинематика объемного роста шляпки мухомора, меняющая форму шляпки. Сходные мебиусовы изменения формы характерны и для шляпок плодовых тел шампиньонов.

Мебиусовы трансформации применимы как к случаям нормального, так и патологического объемного роста, приводящего к уродствам формы. На рис. 24 представлена уродливая шляпка плодового тела мухомора, форма которой является мебиусово-трансформированной формой нормальной шляпки. Это служит частным подтверждением того общего положения, что в нормальном и патологическом самоформировании биологических тел участвуют родственные механизмы и правила симметрии.

Масштабный и мебиусов виды объем-

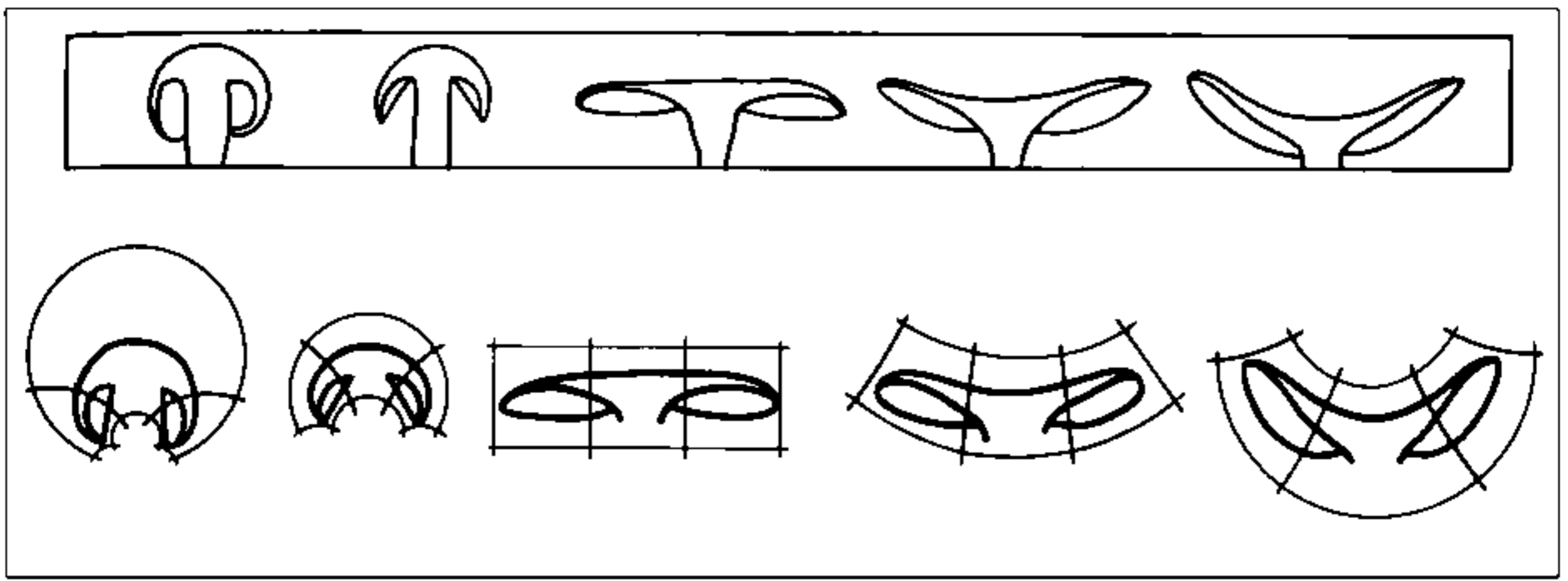


Рис. 23. Ростовые трансформации шляпки мухомора *Amanita* и их моделирование с помощью мебиусовых преобразований

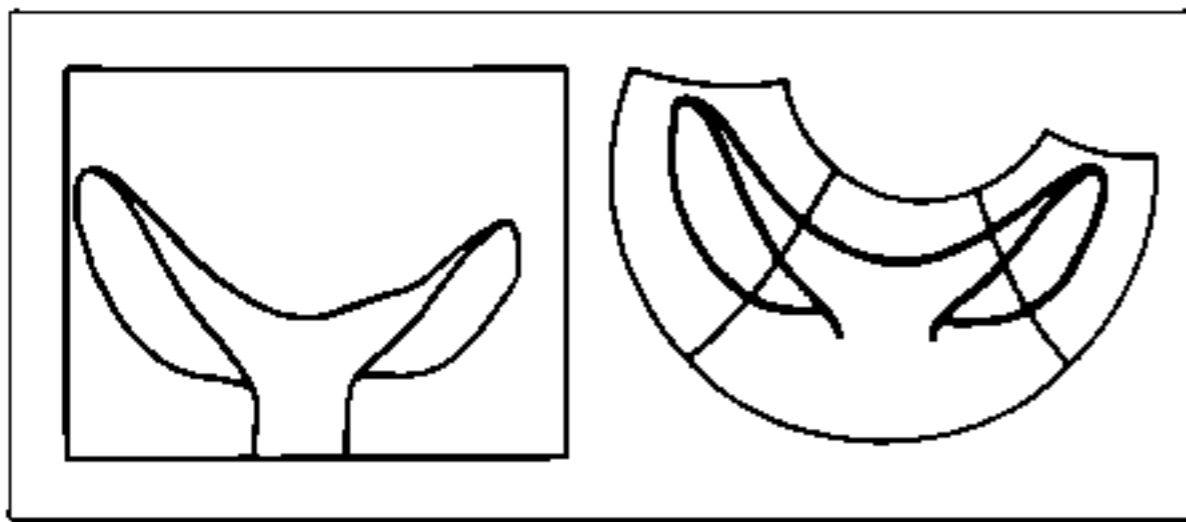


Рис. 24. Конформно-геометрический характер ростового уродства шляпки мухомора

ного роста наблюдаются также при индивидуальном развитии корзинок сложноцветных, плодов растений и др. Учитывая, что масштабный объемный рост реализуется и у животных, нами была предпринята попытка описать возрастные нелинейные трансформации (рис. 25) черепа человека как мебиусовы. Рис. 25 демонстрирует результат этой попытки и свидетельствует о возможности такого описания в первом приближении.

К объемному росту биотел с нецикломерным взаиморасположением частей зачастую также могут быть привлечены представления о цикломерном полиморфизме и интерпретация биодвижения как взаимосмены цикломерий. Это иллюстрирует рис. 26, представляющий объемный рост при нейруляции у саламандры, при котором нанесенная на поверхность тела декартова координатная сеть из прямых линий трансформируется в некоторую криволинейную сеть из прямых и эллипсоидаль-

ных линий (по Бернсайд, 1973). Последняя не может быть получена единой трансформацией из декартовой сети ни проективным преобразованием (оно никогда не переводит прямые линии в кривые), ни мебиусовым (оно никогда не переводит прямые линии в эллипсоидальные). Однако можно отметить, что полученная криволинейная сеть описывается цикломерией с аффинным порождающим преобразованием:

$$x_{k+1} = 0,98x_k + 0,1y_k + 0,25,$$

$$y_{k+1} = -0,42x_k + 0,98y_k + 24,75$$

(мотивные единицы этой цикломерии на рис. 26 — сектора между двумя соседними прямыми криволинейной сети). Другими словами, объемный рост в этом случае предстает как переход от цикломерии трансляции декартовой сети к аффинной цикломерии данной криволинейной сети. Указанные выше случаи мебиусова объемного роста, очевидно, также могут быть описаны на основе перехода от цикломерии трансляции декартовой сети (если нанести эту сеть на растущие фигуры) к мебиусовой цикломерии соответственно трансформированной сети в согласии с условием (2). [Заметим, что основоположник современной проективной геометрии французский архитектор и инженер Ж. Дезарг (1593—1662) при введении ее понятий широко пользовался биологической терминологией, возможно, предполагая аналогию между исследуемыми им проективными структурами и биологическими структурами. Эта терминология, кстати, сильно затрудняла восприятие современниками математических идей Дезарга. Так,

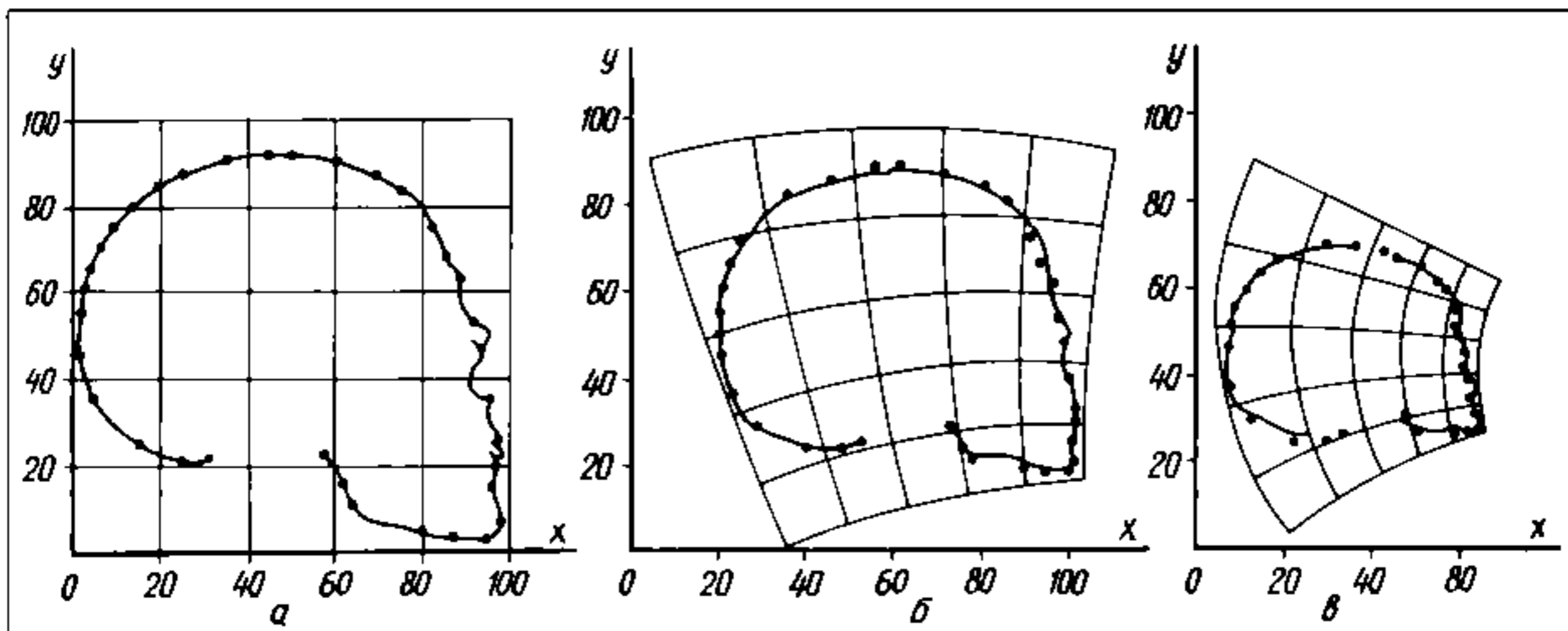


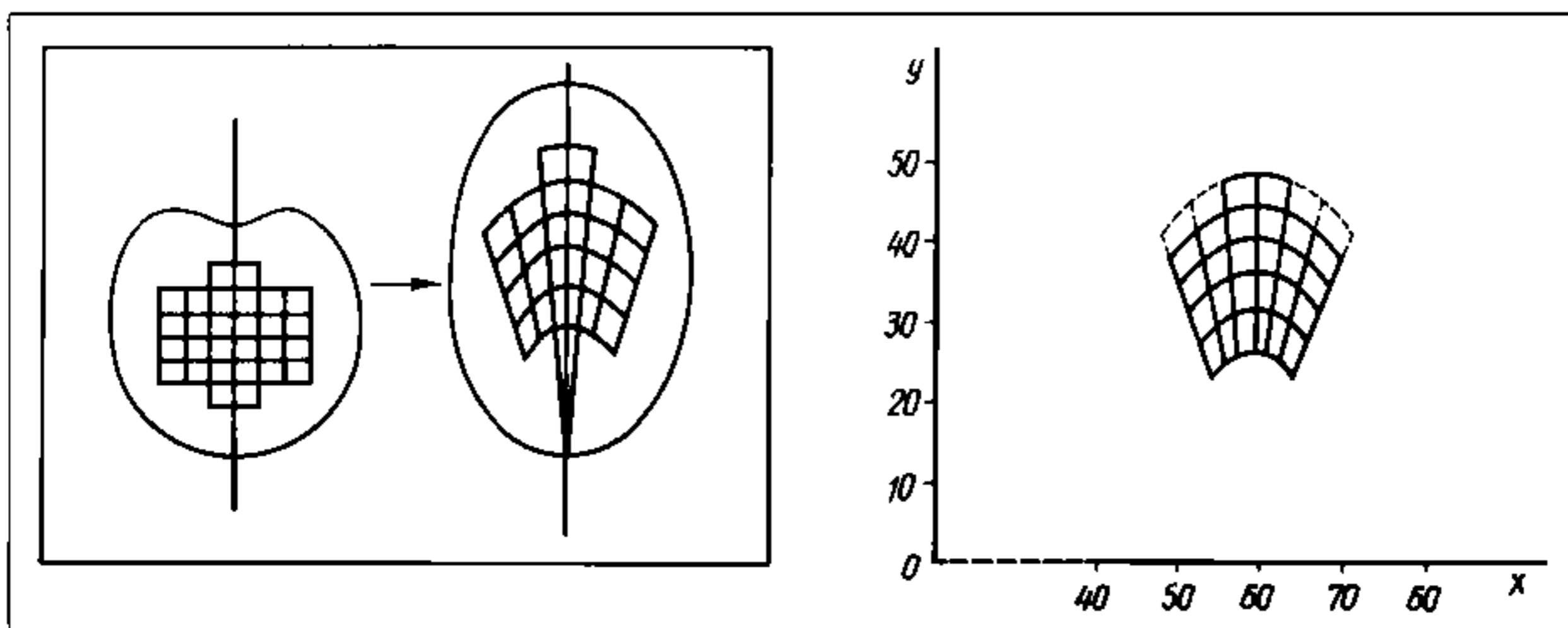
Рис. 25. Мебиусовы преобразования при моделировании онтогенетических трансформаций черепа человека. Профили черепов взрослого (а), пятилетнего (б) и новорожденного (в) взяты из работы Б. М. Пэттена (1959)

введенный им один из основных терминов — «инволюция» — взят из ботанического словаря и означает скрученное состояние молодых листьев. Кроме того, Дезарг использует в своей геометрии термины «дерево», «пень», «нарост», «ветви», «стебли» и т. д. К сожалению, о творчестве и мировоззрении Дезарга осталось весьма немного свидетельств, и нет возможности оценить отношение Дезарга к биологии и его представления о живой природе).

Изложенные результаты инвариантно-группового анализа оправдывают привлечение к исследованию биоструктур новых средств морфометрического анализа — инвариантов конформной и проективной геометрий, например,

названных выше вурфов. Некоторые из этих средств можно использовать в связи с построением геометрических моделей многих органических тел по принципу многоступенчатости симметричных блоков: тело складывается из взаимосимметричных (например, в смысле мебиусовой симметрии) блоков первой ступени, объединяемых в блоки второй ступени, и т. д. В частности, этот принцип проявляется в кинематической схеме тела человека, в которой наряду с зеркальной симметрией двух половин тела, выступающих в роли блоков второй ступени, имеется при-

Рис. 26. Криволинейная деформация координатной сетки при нейруляции у саламандры (по Бернсайд) по типу перестройки от цикломерии трансляции к аффинной цикломерии. На графике справа дана модельная цикломерия с аффинным порождающим преобразованием  $x_{k+1} = 0,98x_k + 0,1y_k + 0,25$ ;  $y_{k+1} = -0,42x_k + 0,98y_k + 24,75$ , переводящим каждый изображенный радиальный сектор в соседний с ним



ближенная мебиусова\* симметрия между длинными пропорциями трехчленных кинематических блоков, из которых состоит эта схема: трехфаланговых пальцев, трехчленных конечностей (плечо — предплечье — кисть и бедро — голень — стопа), трехчленного тела (в антропологии тело подразделяют на верхний, туловищный и нижний отрезки). Такое заключение получено в результате вычисления нами по антропометрическим данным В. В. Бунака (1957 г.) и Д. Г. Рохлина (1936) величин вурфов\*\* этих трехчленных блоков:

$$W = \frac{(C-A) \cdot (D-B)}{(C-B) \cdot (D-A)}, \quad (7)$$

где в скобках даны длины отрезков между концевыми расчленяющими точками  $A, B, C, D$  трех звеньев каждого блока. Величины этих вурфов у всех рассматриваемых блоков на протяжении по крайней мере всего индивидуального развития после рождения группируются вокруг эталонной величины  $P=1,31$  (табл. 1, 2). Это тем более интересно, что рост тела человека носит существенно нелинейный характер (рис. 27): например, на протяжении жизни от рождения у человека верхний отрезок тела вырастает в 2,4 раза, туловище — в 2,8 раза, а нижний отрезок — в 3,8 раза.

Анализ строения и роста с неевклидовой точки зрения выявляет, что все названные трехчленные блоки кинематической схемы тела человека в распрямленном состоянии по своим про-

\* В одномерном случае группы мебиусовых и проективных преобразований совпадают, поэтому в рассматриваемом примере с равным правом можно говорить о мебиусовой или проективной симметрии и использовать понятие вурфа, или двойного отношения, являющегося инвариантом проективных преобразований.

\*\* Величина вурфа четырех точек  $A, B, C, D$  прямой, вычисляемая по формуле (7), является основным инвариантом проективной группы не только в одномерном, но и в многомерном случае. Поскольку двумерная конформная геометрия пополненной евклидовой плоскости в точности совпадает с проективной геометрией комплексной прямой, то вурф четырех точек прямой или окружности, записанный в комплексных координатах точек гауссовой плоскости, служит также инвариантом мебиусовой группы в двумерном случае.

Значения вурфов  $W$  среднего пальца у человека в разном возрасте.

Размеры фаланг (в см) взяты из работы Д. Г. Рохлина (1936).

$AB$  — основная фаланга,  $BC$  — средняя,  $CD$  — концевая фаланга

Возраст в годах	$AB$	$BC$	$CD$	$W$
4	2,42	1,43	0,86	1,31
6	2,64	1,65	1,02	1,31
8	3,00	1,88	1,19	1,31
10	3,10	1,96	1,25	1,31
12	3,34	2,13	1,37	1,31
14	3,56	2,27	1,46	1,31
16	4,08	2,57	1,64	1,31
18	4,19	2,65	1,69	1,31
21	4,41	2,78	1,76	1,31

порциям практически мебиусово-эквивалентны и мебиусово-неизменны на протяжении жизни. Это во многом оказывается справедливым не только для нормально развитых людей, но и для карликов и великанов. Это также справедливо и для широкой совокупности высокоорганизованных животных. Подробнее см. в книге [21]. В ней же, а также частично ниже в Приложении показано, что названная эталонная ве-

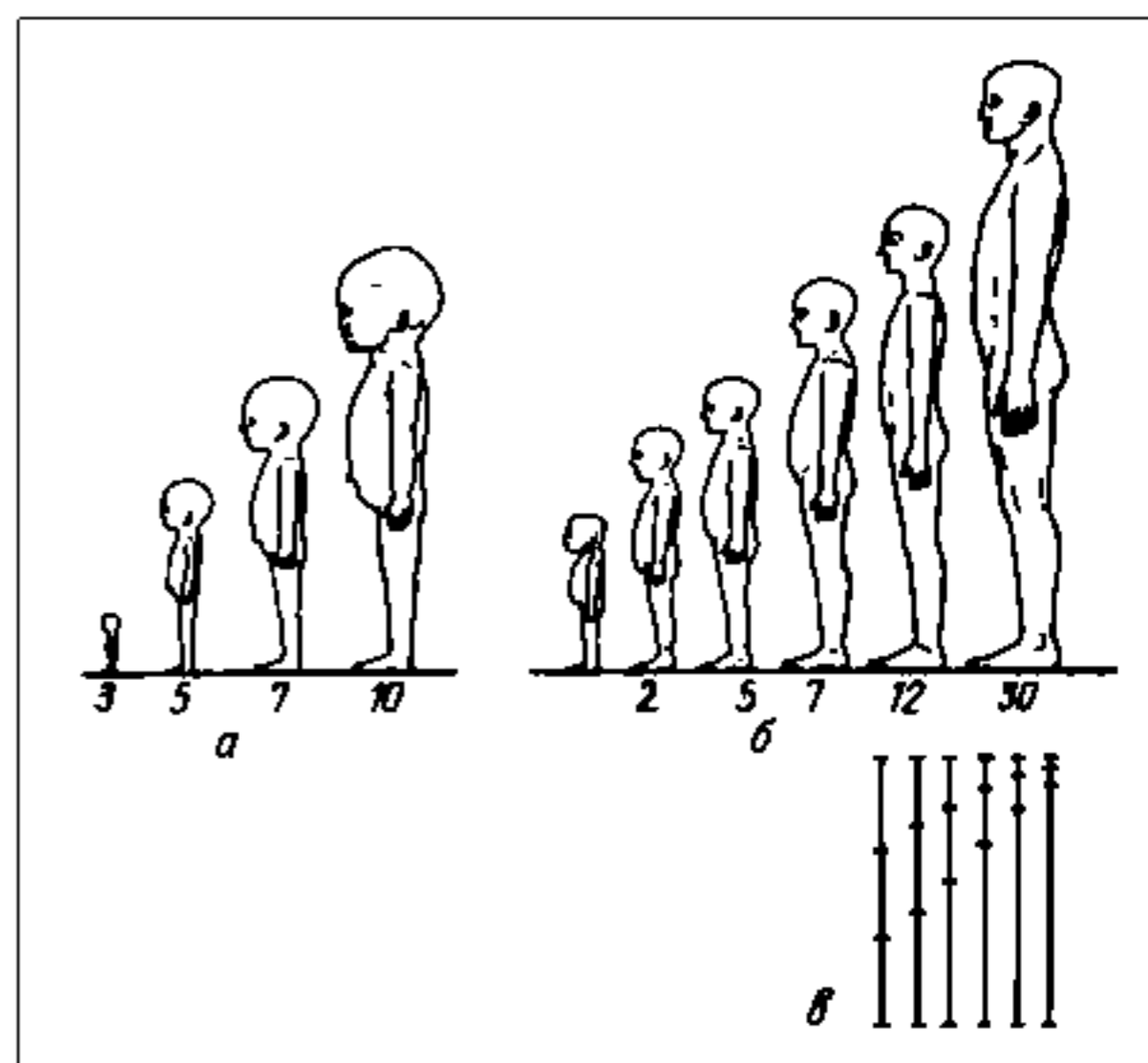


Рис. 27. Возрастные изменения человеческого тела (из работы Б. М. Пэттена):  $a, б$  — антенатальные и постнатальные стадии;  $a$  — в лунных месяцах;  $б$  — в годах, первый слева — новорожденный;  $в$  — трехотрезочные членения, величина вурфов которых равна 1,3

Таблица 2

Значения вурфов  $\Psi$  конечностей и тела человека в разном возрасте.  
Размеры (в см) взяты из работы В. В. Бунака (1957)

Возраст человека	Плечо $A_1B_1$	Пред- плечье $B_1C_1$	Кисть $C_1D_1$	$\Psi$	Бедро $A_2B_2$	Голень $B_2C_2$	Стопа $C_2D_2$	$\Psi$	Верхний отрезок $A_3B_3$	Туловище $B_3C_3$	Нижний отрезок $C_3D_3$	$\Psi$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Возраст эмбриона в лунных месяцах												
4	2,37	1,90	1,55	1,33	2,76	2,66	1,84	1,26				
6	4,40	3,65	3,23	1,34	5,45	5,45	4,30	1,27				
8	6,17	5,05	4,53	1,35	7,40	7,60	5,80	1,27				
9	6,95	5,70	5,14	1,35	8,40	8,60	6,61	1,27				
Новорожденный	8,80	7,40	6,30	1,33	10,90	9,90	7,80	1,30	10,6	18,3	28,6	1,29
Возраст в годах												
1	12,5	10,4	8,7	1,33	15,8	14,4	11,5	1,30	15,6	25,0	41,7	1,32
4	16,7	13,7	11,2	1,33	22,4	20,2	15,8	1,30	18,9	31,4	58,4	1,32
7	20,7	16,5	13,1	1,33	28,0	24,8	18,9	1,30	21,0	35,3	71,7	1,33
10	23,2	18,4	14,4	1,32	32,1	27,8	20,7	1,30	22,5	38,0	80,6	1,34
13	26,3	20,7	16,0	1,32	37,7	32,2	23,6	1,30	24,5	42,2	93,5	1,34
17	30,5	23,9	18,3	1,32	44,4	37,3	26,9	1,29	26,9	47,8	108,6	1,33
20	32,3	24,5	18,8	1,33	45,4	37,5	27,0	1,30	25,3	51,8	109,9	1,29
Среднее арифметическое и пределы октогенетических флуктуаций $\Psi$ , %; $P=1,309...$ — золотой вурф				$1,33 \pm$ $\pm 1,5\% =$ $= 1,01P \pm$ $\pm 1,5\%$				$1,29 \pm$ $\pm 2\% =$ $= 0,98P \pm$ $\pm 2\%$				$1,32 \pm$ $\pm 2\% =$ $= 1,01P \pm$ $\pm 2\%$



личина вурфов 1,31 рассмотренных телесных блоков связана с известными в биологии филлотаксисными законами формообразования: она совпадает с так называемым золотым вурфом

$$P = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{\Phi^2}{2} = 1,309\dots,$$

сопряженным с числами Фибоначчи и золотым сечением

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$$

## VII. АВТОНОМНЫЕ АВТОМАТЫ И ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ЖИВЫХ ОРГАНИЗМОВ

*Основной чертой каждой возникшей в науке новой идеи является то, что она связывает определенным образом два различных ряда фактов.*

М. ПЛАНК

Одним из перспективных путей моделирования явлений биологического формообразования является применение теории растущих автоматов к моделированию морфогенеза (см. [1] и др.). Такое кибернетическое моделирование обосновано тем, что в биологическом формообразовании действует распределенная по развивающемуся телу сложная система управления с обратными связями. Широко известно применение в этих целях клеточных автоматов, или однородных структур, фон Неймана [20] и его последователей, а также идей развивающихся параллельных грамматик Линденмайера [34].

В свете изложенных в предыдущих параграфах данных о важном морфологическом значении итеративных алгоритмов возможна разработка усовершенствованного модельного подхода на основе понятия об автономном растущем автомате (или сетях таких автоматов).

Напомним, что конечным автоматом называют динамическую систему, поведение которой в заданные моменты времени (такты) 1, 2, ...,  $p$  определяется уравнением

$$x(p) = f[x(p-1), u(p-1)], \quad (8)$$

где  $x(p)$  и  $u(p)$  — переменные, принимающие значения из заданных конечных

алфавитов. Здесь  $x(p)$  соответствует внутреннему состоянию автомата на такте  $p$ , а  $u(p-1)$  — состоянию входа автомата на предыдущем такте, отражающему влияние «внешней среды» на автомат. Особый случай представляет автомат, поведение которого не зависит от внешней среды вообще. Такой автомат именуют автономным, и для него смена состояний, очевидно, определяется (аналогично алгоритмам биологических цикломерий) итеративным алгоритмом

$$x(p) = f[x(p-1)]. \quad (9)$$

Но биологические цикломерии наблюдаются именно в относительно автономных подсистемах тела: рогах животных, плавниках рыб и т. п. Кроме того, понятие автономии вообще коренным образом связано с генетическим наследованием характерных для биологического вида форм, осуществляемым относительно независимо от случайностей внешней среды. Относительная автономия подсистем организма является известным условием его эффективного функционирования. Все это подтверждает правомерность развиваемого нами подхода, заключающегося в интерпретации биологических цикломерий и их ансамблей на основе представления об автономных растущих автоматах (9). (Другими авторами растущие автоматы применялись в предположении потактового внешнего управления состоянием автомата; морфогенетическая значимость и возможности автономных автоматов упускались из виду.) Следует дополнительно отметить известную помехоустойчивость итеративных алгоритмов, которая может вносить свой вклад в биологическую целесообразность использования этих алгоритмов в живых организмах.

Идею такого моделирования можно реализовывать, например, с помощью клеточного, или ячеистого, автомата, под которым обычно понимается однородная схема многих идентичных клеток, или ячеек, причем каждая клетка имеет несколько возможных состояний и взаимодействует лишь с несколькими соседними клетками. Представление об автомате с клеточной структурой имеет почти такой же возраст, как и мысль об электронно-вычислительных машинах.

Первые исследования были проведены в начале 60-х годов Дж. фон Нейманом. Наиболее известный в настоящее время клеточный автомат — игра «Жизнь», придуманная в 1970 г. Дж. Конвеем и имеющая возможности моделирования ряда аспектов биологического развития. Многие задачи клеточных автоматов входят в область так называемой информационной механики. Необходимо отметить, что клеточные автоматы фон Неймана имеют клетки, расположенные в ячейках декартовой сети координат, и этот волевым образом введенный вариант «евклидова» взаиморазмещения клеток по традиции обычно только и рассматривается в позднейших работах. В отличие от этой традиции нами — на основе данных о биологическом значении неевклидовых цикломерий — утверждается целесообразность использования при биологическом моделировании клеточных автоматов, базирующихся также на сетях с циклическими группами неевклидовых автоморфизмов. В таком «неевклидовом» клеточном автомате трудно определить потактовую смену состояния автономного автомата как присоединение очередной мотивной единицы неевклидовой цикломерии.

В результате проведенного исследования выявились следующие новые перспективные направления развития теории растущих автоматов в приложении к биологическому морфогенезу. Во-первых, особенности биологического морфогенеза дают основания для развития теории автономных автоматов, иерархически вложенных друг в друга и функционирующих на каждом уровне вложения с разными по длительности тактами, кратными или некратными длительности тактов автоматов смежного уровня. Случай некратных тактов хорошо соответствует биологической ситуации образования, например, листоорганов на цикломерном стебле растения, т. е. структур, развивающихся в дальнейшем относительно автономно по своим алгоритмам формообразования.

Во-вторых, полезным для интерпретации ряда биологических данных о зависимости вида цикломерных структур от особенностей внешней среды обитания организма оказывается представление о смене у растущих автоматов режимов

автономии  $f$  в (9). Речь идет о том, что в целом ряде случаев изменение ареала обитания организмов данного вида сопровождается изменением цикломерий у них: прежние цикломерии переходят в иные по внешнему виду цикломерии, что хорошо интерпретируется на языке смены режима автономии. Этот же подход применим и к другим явлениям цикломерного полиморфизма.

В-третьих, наряду с автономными автоматами для охвата широкого морфологического материала оказывается полезным понятие квазиавтономного автомата, под которым понимается автомат, описываемый (8), где  $u(p)$  мало по влиянию или приводит только к изменению коэффициентов порождающего преобразования  $f$ , но не к изменению вида последнего. Кроме того, изменение  $u(p)$  с тактами может носить не только детерминированный, но в ряде ситуаций и стохастический характер. На этом пути очевиден переход к описанию биоструктур со случайной и нерегулярной взаимосвязью составных частей. Полученные данные по биологическому значению итеративных алгоритмов вынуждают автора встать на ту точку зрения, что для математического моделирования широкого класса биологических феноменов развития более адекватными являются формализмы именно дискретной (или конечной) математики.

Добавим, что представление о функционировании многих подсистем организма человека в норме и патологии по принципам автономных автоматов и их ансамблей имеет, по нашему убеждению, важное значение для многих медико-биологических проблем, включая разработку методов лечения заболеваний, методик профотбора и тренировок, средств оптимизации условий труда операторов сложных машин и пр.

Законы взаимодействия частей в биоструктурах можно связывать с понятием биологического пространства. С формальной точки зрения, если пользоваться физической терминологией, мир биологического тела является многообразием событий. В этом многообразии событий существует система отношений воздействия одних событий на другие, которые определяют его пространственную структуру. К миру биологического тела вполне

применимо сложившееся в физике понимание пространства и пространства-времени, сформулированное академиком А. Д. Александровым (1965) так: «Пространство-время есть множество всяких событий в мире, взятое в отвлечении от всех его свойств, кроме тех, которые определяются структурой системы отношений воздействия одних событий на другие». По нашему мнению, проблема общих законов взаимодействия в биологическом пространстве должна рассматриваться и решаться во многом как проблема законов взаимодействия в пространствах самоорганизующих ансамблей, составленных из самоорганизующихся растущих автоматов. И разработка проблемы геометризации в биологии, видимо, связана прежде всего с проблемно-ориентированным развитием теории таких кибернетических пространств, включая анализ геометрии и законов сохранения в них. Законы сохранения ранее исследовались для физических пространств, но их анализ возможен и необходим также для случая кибернетических (!) пространств, где он может принести исключительную пользу для биологии и всего естествознания. В частности, к ряду биологических явлений и биокибернетических пространств, как автор полагает, имеют прямое отношение конформные законы сохранения типа тех, которые формально вывел Бессель-Хаген в 1921 г. в связи с конформной инвариантностью уравнений электродинамики Максвелла.

В качестве рабочей гипотезы в свете изложенных в книге данных можно сформулировать следующее утверждение: «Биологическое пространство есть пространство самоорганизующихся иерархических ансамблей самоорганизующихся растущих разнотемповых аперiodических (в общем случае) автоматов». (Для краткости такой ансамбль можно называть гиперавтоматом.)

В этой формулировке есть термин «аперiodический», имеющий отношение к ритмически разворачивающимся во времени биологическим процессам, временная структуризация которых, как оказывается, также иногда связана с нетривиальными итеративными алгоритмами. Этому посвящен следующий параграф.

## VIII. АПЕРИОДИЧЕСКИЕ ИТЕРАТИВНЫЕ БИОРИТМЫ

*Всякий раз, когда вам приходится иметь дело с некоторым объектом, наделенным структурой, попытайтесь определить его группу автоморфизмов... Вы можете рассчитывать на то, что на этом пути вам удастся глубоко проникнуть во внутреннее строение объекта.*

Г. ВЕЙЛЬ

Изучение временных биоритмов уже давно проводится исследователями из разных стран, и это направление исследований имеет свои традиции, сложившуюся терминологию и интересные результаты. Нельзя, однако, не отметить, что практически все внимание в ней обращено на периодическую ритмизацию физиологических процессов типа равномерных дыхания и ходьбы, повторяющихся процессов, приуроченных к периодическим суточным и сезонным изменениям, и т. п. Учитателя литературы по биоритмам зачастую создается впечатление о периодических биоритмах, как едва ли не единственно значимых и вообще возможных. На самом деле класс биологически значимых ритмов шире и содержит периодические ритмы своим частным, хотя и важным, случаем.

Очевидно, что периодическую ритмизацию того или иного процесса можно интерпретировать как структуризацию на основе трансляционного итеративного алгоритма (I), имеющего в качестве порождающего преобразования параллельный сдвиг по временной оси на величину периода.

Не реализуются ли в биопроцессах менее тривиальные итеративные алгоритмы их временной структуризации, базирующиеся на более сложных порождающих преобразованиях? Это весьма важный и положительно решаемый вопрос, который обращает внимание на специфические биоритмы и закономерности временной структуризации, обычно упускаемые из виду, но заслуживающие, на наш взгляд, самого серьезного внимания и способные существенно обогатить биоритмологию.

Яркий пример аперiodического итеративного алгоритма с порождающим преобразованием масштабного подобия дает известный процесс линьки рако-

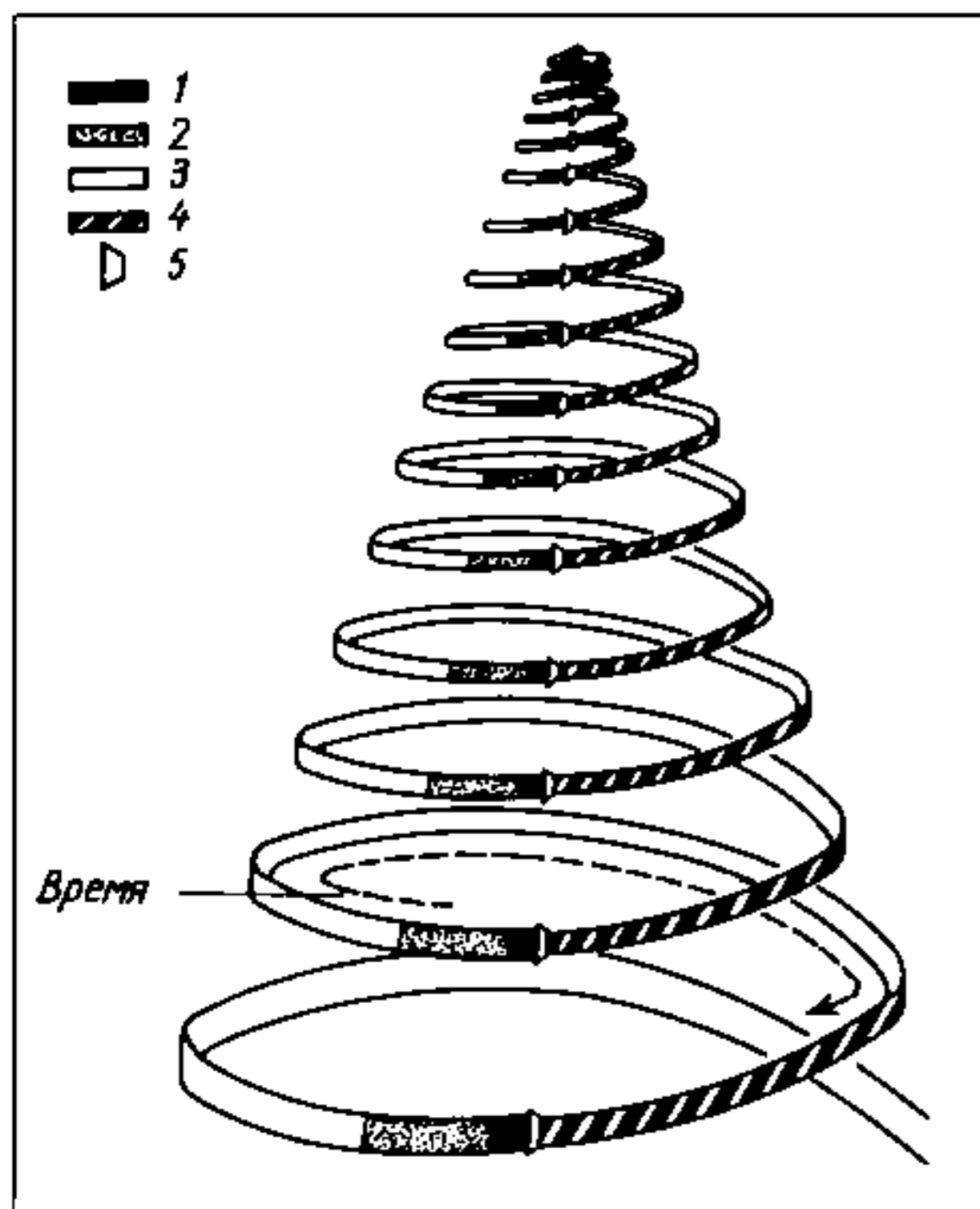


Рис. 28. Циклометрия подобия в многостадийных процессах линьки у ракообразных (по Л. М. Пассано). Длина витка спирали соответствует времени между двумя последовательными линьками, а толщина линии пропорциональна увеличивающимся размерам организма, 1—5 — стадии процесса.

образных, иллюстрируемый рис. 28 из работы О. Л. Пассано (1960). На этом рисунке длина витка спирали соответствует времени между двумя последовательными линьками. Видно, что это время монотонно возрастает с постоянным масштабным коэффициентом на протяжении всей жизни с линьками, что отражается в коническом характере спирали. При этом масштабируется не только суммарное время между соседними линьками, но с тем же коэффициентом увеличивается время каждой стадии многостадийного процесса подготовки к очередной линьке. Кроме того, после каждой линьки пропорционально увеличиваются размеры и масса организма. Другими словами, в этом примере биологической трансформации имеет место удивительная пространственно-временная организация сложнейших биологических процессов, демонстрирующая цикломерные свойства и дополнительно оправдывающая поиск во временных

биоритмах тех же симметрических алгоритмов структуризации, что и в пространственных биорядях.

Апериодические итеративные биоритмы с мебиусовым (или проективным, что в одномерном случае одно и то же) порождающим преобразованием

$$t_{i+1} = \frac{1,292t_i + 0,593}{-0,020t_i + 1} \quad (10)$$

демонстрируют, например, пескожилы в некоторых своих ритмически организованных (рис. 29) биопроцессах, как это установлено нами при анализе экспериментальных данных из статьи П. Еванс (1980). Названные червеобразные организмы в лабораторных условиях имеют автоматизированный периодический ритм этих биопроцессов с интервалом около 40 мин. Однако в естественных условиях обитания они придерживаются совершенно иной ритмики, в которой интервалы между процессами нелинейно возрастают и которая подчиняется алгоритму (10). Этим естественным условиям соответствуют условия прибрежных зон моря, в которых они обитают. Наблюдение за пескожилами велось в часы отлива на освобожденной от воды полосе берега, когда они хорошо видны, и прекращалось, когда очередной прилив накрывал их (этот момент соответствует вертикальной стрелке на рис. 29).

Нетривиальные евклидовы и неевклидовы итеративные алгоритмы проявляются при описании также других ритмизированных биопроцессов: залпового хлопанья крыльями возбужденного тетерева, некоторых видов сердечных аритмий и др. Несомненно, анализ неевклидовых симметрий в биопроцессах — сложноструктурированных сигналах общения между

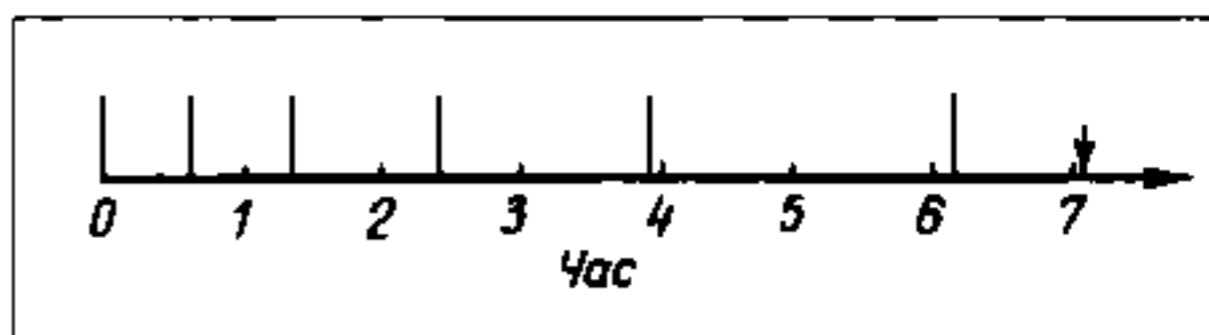


Рис. 29. Биоритм пескожила *Arenicola marina* (по П. Евансу), описываемый временной циклометрией с мебиусовым порождающим преобразованием  $t_{k+1} = (1,292t_k + 0,593) : (-0,020 \cdot t_k + 1)$ . Стрелкой указан момент морского прилива, прекращающего наблюдение

живыми организмами, ритмическом изменении параметров состояния организмов в норме и патологии и пр. — должен быть продолжен и поставлен на систематическую основу. Особенно важен и интересен в общебиологическом отношении поиск этих симметрий в морфогенетических процессах типа линьки. К моделированию этих процессов приложима теория аperiodических автоматов.

## IX. О ПРАСИСТЕМЕ БИОЛОГИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯЦИИ И ПРОБЛЕМАХ ПСИХОФИЗИКИ

*Овладеть пространством — таково первое побуждение всего живого.*

ЛЕ КОРБЮЗЬЕ

*Гляжу осязающим взором,  
Зрящей рукой осязаю.*

И. ГЕТЕ

Выявление неевклидовых симметрий в алгоритмическом взаимосопряжении частей органических форм резко расширило класс биообъектов, пространственное поведение множества отдельных частей которых можно со всей определенностью и строгостью описывать как геометрически закономерное и взаимосогласованное. Реализация в самых разных биологических телах одних и тех же геометрических типов кооперативных строения и поведения предстает как важная особенность биологической эволюции и привлекает внимание к вопросу о существовании и общебиологическом значении морфогенетической системы регуляции, ответственной за такое согласованное поведение отдельных частей тела в ходе роста и развития организмов.

Эта морфогенетическая система интегрирующей регуляции, видимо, существует наряду с нервной и гуморальной системами регуляции, также выполняющими определенные функции объединения частей организма в единое целое. Она является для них, судя по всему, прасистемой прежде всего в смысле своего более раннего эволюционного возникновения (ведь способность к росту — древнейшее свойство живого вещества; морфогенез и рост геометрически правильных и нетривиальных форм наблюдаются у простейших, в том числе

одноклеточных, организмов, лишенных нервной системы). Другие системы регуляции не только погружены в нее своими структурными образованиями, но и возникают в фило- и онтогенезе на ее фоне.

Даже у высокоразвитых организмов можно проследить на отдельных фактах вторичность включения нервной системы в регуляцию поведения органов и тканей в ходе индивидуального развития; еще до появления необходимых элементов нервной системы отдельные части организма демонстрируют согласованное активное поведение, подобное морфогенетическим движениям. В качестве примеров приведем два известных биологических факта. Так, первое, что приходит в движение у четырехмиллиметрового трехнедельного плода человека, — это сердце. Начало сердечной деятельности обусловлено внутренними причинами, так как в это время у сердца еще нет нервных связей, оно начинает сокращаться, когда еще нет крови, которую надо перекачивать.

Другой пример касается личинок рыб *Tantogolabrus*, которые в первый день своего свободного плавания в водоеме еще не реагируют на внешние раздражения, т. е. передвигаются без какой-либо эффективной рецепторной системы. Сенсорная система развивается у них постепенно и лишь позже овладевает первичной системой движения для биологически целесообразного согласования ее врожденной активности с характером внешних раздражений.

Заметим также, что объемный рост, тесно связанный с цикломерными (или циклогенетическими) свойствами живого вещества, объединяет многочисленные части тела в единый растущий ансамбль, функционирующий у человека и животных по необходимости с учетом этого роста, иначе возрастные трансформации тела обесценят все сенсомоторные навыки, приобретенные на предыдущих этапах онтогенеза при другом теле. В этой связи геометрические свойства объемного роста и биохимические среды, реализующие этот объемный рост, имеют, по нашему мнению, прямое отношение к формированию у человека врожденного представления о схеме своего тела, которая уже давно считается важным элементом

пространственного восприятия и координации движений. Речь идет о том, что морфогенетическая система регуляции (во многом базирующаяся на механизмах циклогенеза) осуществляет, помимо прочего, функцию согласованной настройки многочисленных мышечных, суставных и других рецепторов, с участием которой строится представление о схеме своего тела у человека. Морфогенетическая система регуляции, обеспечивающая объемный рост, выступает для разрозненных проприоцепторов и мышц как бы распределенным по всему телу кооперирующим началом, камертоном настройки. Другими словами, разрозненные звенья сенсомоторной системы звучат в лад не только в силу своей прямой взаимосвязи, но и потому, что они погружены в единую закономерно растущую среду, которая влияет на их работу и помогает мозгу в составлении обобщающих адекватных образов из бесчисленных частных информаций от множества рецепторов. Без изучения морфогенетической системы регуляции и ее общебиологического значения нельзя в полной мере понять позднейшие системы регуляции организма, в том числе нервную.

Теоретическая и практическая ценность решения проблемы биологического морфогенеза в настоящее время быстро нарастает. Одним из свидетельств этому является разработка в Японии в рамках национальной программы ЕРАТО проекта «Морфогенез». Согласно этому проекту проводятся исследования основных процессов морфогенеза, общих для большинства живых организмов. Полученные результаты планируется использовать при создании новых видов живых организмов, способных стать моделями для изучения механизмов генетических заболеваний, способов повышения урожайности и плодovitости сельскохозяйственных растений и животных, нахождения лечебных средств для борьбы с раком и другими заболеваниями и пр.

Скажем несколько дополнительных слов о геометрической морфологии. Общеизвестно, что за последние сто лет, исходя из учения Ч. Дарвина, широкое развитие получила экологическая и функциональная морфология, разрабатывающая вопросы естественного отбора

тех органических форм, которые сравнительно лучше приспособлены к условиям окружающей среды и выполнению определенных функций обслуживания типа добывания пищи, защиты и пр. Естественно, что речь идет лишь об отборе из многообразия конструкций, вообще реализуемых механизмами биороста в широком смысле. Названные разделы эволюционной морфологии не исчерпывают всех проблем морфологической эволюции, и в современной биологии неоднократно ставился вопрос о построении морфологического учения, отвлекающегося от экологической и функциональной привязки органических форм и базирующегося на геометрических принципах в известной аналогии с геометрической кристаллографией. Данный вопрос тем более правомерен, что формы живых тел обычно трудно или невозможно интерпретировать как оптимально удовлетворяющие экологическим и функциональным условиям; природа любит «грубую» в этих отношениях эволюцию и в отдельных организмах обычно удовлетворяется не самыми совершенными в функциональном отношении конструкциями органов, лишь бы они были достаточно работоспособны. Именно отставание в разработке геометрической теории морфогенеза представляется существенным препятствием для включения морфологии в область развитого математического естествознания и решения многих вопросов эволюционной морфологии, в том числе связанных с огромным числом морфогенетических параллелизмов, не выводимых из положений экологической и функциональной морфологии или соображений происхождения организмов от близкого общего предка. Это же отставание тормозит развитие морфогенетической биомеханики, в которой имеется много нерешенных или даже несформулированных задач, например, по интерпретации закономерностей строения костной ткани и других биоконструктивных структур в связи с критерием оптимальной защиты наследуемых локальных ростовых трансформаций в них от внешних деформирующих воздействий.

Обратимся теперь к неевклидовым симметриям в явлениях психофизики. Мысль о тесной взаимосвязи между

особенностями пространственного восприятия и принципами морфогенеза имеет давние корни. Так, уже со времен И. Кеплера особая эстетичность пропорции золотого сечения связывается в научной литературе с ее морфогенетической реализацией в биотелах. Современная психология имеет значительный опыт использования высшей геометрии для моделирования наблюдаемых психологических явлений.

Еще в 1868 г. Г. Гельмгольц в работе «О фактах, лежащих в основании геометрии» предпринял попытку применить определенные математические концепции, касающиеся понятия группы преобразований, к психологическим проблемам восприятия. Стремление осмыслить психологические явления восприятия с позиций фундаментального понятия группы привело А. Пуанкаре к разработке интересной концепции о генезисе пространственных представлений у индивидуума, о взаимоотношениях между физическими, логическими и физиологическими основаниями геометрии. Эту концепцию Пуанкаре развивал и утверждал вплоть до конца своей жизни. Он полагал, что понятие группы должно быть принято в качестве ключевого для научного познания генезиса пространственных представлений у индивидуума. При этом он считал, что у каждого индивидуума общее понятие группы существует, по крайней мере потенциально, с самого рождения, еще до приобретения какого-либо индивидуального жизненного опыта.

С течением времени математическое понятие группы завоевывало себе все новые позиции в области психологических исследований, прежде всего исследований так называемых феноменов константности восприятия. В содержательной работе Э. Кассирера «Концепция группы и теория восприятия» [32] указывается, что аналогия между психологией восприятия и геометрией заключается прежде всего в следующем: для воспринимаемых образов (форм) характерно сохранение специфических свойств при изменении тех элементов, на которых они основываются. Так, мелодия существенно не изменяется, когда все ее ноты подвергаются одному относительному смещению. То же можно сказать и в

отношении феноменов константности зрительного восприятия по габаритам, форме, цвету и т. д. «Чем еще является эта «тождественность» воспринимаемой формы, как не тем, что, как мы нашли, со значительно более высокой степенью точности существует в области геометрических понятий? — отмечает Кассирер. — То, что мы находим в обоих случаях, представляет собой инварианты по отношению к изменениям, претерпеваемым простыми элементами, из которых создается форма. Своеобразный тип «тождественности», приписываемый явно совершенно различным по составу фигурам из-за их способности преобразовываться одна в другую с помощью некоторых операций, определяющих группу, существует, как видно, таким образом, и в области восприятия».

В Эрлангенской программе Ф. Клейна, по существу, утверждается, что не всякое понимание и описание пространственного объекта является его геометрической характеристикой. Если мы берем объект, принимая во внимание только его индивидуальность, то он не проявит своего геометрического характера и значения. Э. Кассирер [32] подчеркивает, что, описывая пространственную форму как таковую в ее особенности и конкретности, мы в лучшем случае получаем ее географическую или «топографическую», но не «геометрическую» характеристику. Чтобы получить последнюю, требуется совершенно другое направление мышления, указанное Клейном: геометрические свойства любых фигур должны быть описаны с помощью формул, которые сохраняются при изменении системы координат; наоборот, любая формула, которая в данном смысле инвариантна относительно группы имеющихся преобразований координат, представляет геометрическое свойство. В соответствии с этой концепцией свойства, которые характеризуют объект, не должны определяться применительно к элементам, образующим его. Это должно делаться исключительно в рамках группы, с которой связан объект. Как только мы заменим одну группу другой, сразу возникают совершенно иные соотношения. То, что выступало в качестве выражения «того же» геометрического понятия, может получить самостоятель-

ное значение. То же, что представлялось как что-то сугубо отличное, может оказаться идентичным с точки зрения новой геометрии. Так, с позиций метрической евклидовой геометрии различные конические сечения (окружность, эллипс, парабола, гипербола) выступают как самостоятельно существующие и независимые геометрические образы, имеющие конкретные и хорошо определенные свойства. Это различие исчезает при переходе к рассмотрению тех же конических сечений с позиции проективной геометрии, поскольку проективные преобразования могут переводить все названные выше виды конических сечений друг в друга и соответственно лишают эти виды независимого существования. Из этого видно, что понятия современной геометрии обретают присущую им точность и становятся действительно универсальными лишь в связи с тем, что подсказываемые интуицией специфические фигуры рассматриваются не как предопределенные и жесткие, а скорее как сырой материал, еще подлежащий обработке для придания ему геометрического статуса. Реальная основа математической определенности покоится уже не на элементах, которые математики берут за исходные, а на правиле, посредством которого эти элементы связываются между собой. После Эрлангенской программы больше не ставится вопрос, одинаковы ли два четырехугольника или равна ли длина у двух отрезков без отсылки к определенной группе преобразований, в рамках которой должен решаться данный вопрос. Другими словами, определенность фигуры зависит от контекста, в который она интегрирована и который она представляет как специальный случай.

Разрабатывая проблему геометризацию психологии, Б. Рассел писал: «Надлежит строить мост (между психологией и геометрической физикой.— С. П.), начиная сразу с двух концов: приближать физические гипотезы к психологическим данным и манипулировать психологическими данными так, чтобы строить логические конструкции, максимально соответствующие аксиомам геометрической физики».

Не используются ли симметричные принципы биоморфогенеза в области психофизики пространственного восприя-

тия? Не имеет ли организм тенденции воспринимать окружающий мир в образах тех самых групп преобразований, в соответствии с принципами которых он сам сформирован? Не родственны ли принципы структуризации, реализуемые в морфогенетических феноменах и психологических явлениях пространственного восприятия?

Эти вопросы тем более естественны, что еще Г. Гельмгольцем, И. М. Сеченовым, А. Пуанкаре разрабатывалась идея о ведущей роли кинематической организации тела (как мы теперь знаем, структурированной во многом по формогенетическим принципам, реализующим мебиусовы и другие виды неевклидовых симметрий) в генезисе пространственных представлений у индивидуума. В частности, данная идея была положена А. Пуанкаре в фундамент его учения о физиологических основаниях геометрии и о происхождении у индивидуума пространственных представлений.

Согласно Пуанкаре, само понятие пространства и геометрии возникает у индивидуума на основе деятельности кинематической организации тела, включающей внутреннюю рецепторную для характеристики положения и движения частей тела друг относительно друга, т. е. в кинематической организации тела есть нечто, предшествующее понятию пространства. При этом особенности всего аппарата кинематической деятельности организма приведены эволюционным развитием жизни в соответствие с реалиями окружающего физического мира. Благодаря этому каждый новорожденный организм овладевает адекватными пространственными представлениями не только за счет персонального контакта в ходе онтогенеза с предметами окружающего мира, но и за счет благоприобретений предыдущих поколений, закрепленных в ходе филогенеза в аппарате движений тела.

По мнению Пуанкаре, движения нашего тела играют первенствующую роль в генезисе понятия пространства. Для существа вполне неподвижного не было бы ни пространства, ни геометрии. Если бы у нас не было орудия для измерения, подчеркивал Пуанкаре, мы совершенно не могли бы построить пространство, но орудие у нас есть, и к нему мы



относим все и пользуемся им инстинктивно — это наше собственное тело. «Система координатных осей, к которым мы естественно относим все внешние предметы, — это система осей, неизменно связанная с нашим телом, которую мы и носим всюду с собой».

Однако Пуанкаре, как и другие авторы, практически не затрагивал важного вопроса: евклидовы или неевклидовы группы преобразований и связанные с ними координатные системы характерны для организации движений и пространственного восприятия у человека и животных? Новейшие данные позволяют полагать, что в генезисе пространственных представлений у индивидуума участвуют группы неевклидовых преобразований и принципы цикломерной структуризации. Приведем дополнительные соображения в пользу этого.

Обращаясь к представлениям Пуанкаре о связанной с телом человека отсчетной системе координат, можно отметить, что все звенья нашего тела изменяют свои евклидовы длины с ростом, причем интенсивнее всего именно в младенчестве, когда происходит основное знакомство организма с окружающим миром и когда особенно важно для метрической схемы иметь устойчивые эталоны длины. Но, будучи лишено эталона евклидовой меры, тело оказывается обеспечено неизменными в его жизни и в жизни всего рода эталонами неевклидовых вурфов (см. параграф V), которые являются вполне пригодным инструментом геометрического сравнения и построения координат.

Говоря о мебиусовых биосимметриях кинематических блоков тела человека и учении Пуанкаре, следует также привести современные данные физиологии о механизмах кинестезии, которые оказываются тесно связанными с теми самыми расчленяющими точками тела, в блочном размещении которых нами обнаруживаются мебиусовы закономерности. Механизмы кинестезии обеспечивают организм знанием о положении и движении звеньев тела. Пуанкаре полагал, что эти представления покоятся на «мышечном чувстве». А вот что утверждает современный справочник по физиологии: «В отношении кинестезических ощущений в последние годы был достигнут

значительный прогресс. Прежде всего теперь очевидно, что чувство позиции и движений суставов зависит только от соответствующих рецепторов в самих суставах. Нет никакой необходимости призывать таинственное «мышечное» чувство для объяснения кинестезических ощущений» (Дж. Роуз, В. Маунткастл, 1959).

Другое дополнение современная физиология вносит в учение Пуанкаре о врожденной взаимосвязи тела и пространственных представлений, утверждая априорность представлений индивидуума о своей телесной оболочке. Это утверждение связано с изучением так называемых фантомных ощущений у инвалидов: специфического чувства присутствия утраченной части тела. Сравнительно недавно установлено, что фантомные ощущения имеют место не только у людей с ампутированными конечностями, но и у людей с врожденным отсутствием конечностей. Значит, представления индивидуума о схеме своего тела вовсе не обусловлены его жизненным опытом пользования телом, а носят врожденный характер. В этом можно видеть дополнительный аргумент в пользу участия морфогенетических механизмов в формировании пространственных представлений у индивидуума.

Свидетельства значимости морфогенетических структур для пространственного восприятия и принципов активного упорядочения организмом окружающего пространства дают строительные сооружения насекомых и некоторых других живых организмов. Возведение этих сооружений, осуществляемое обычно инстинктивно без какого-либо научения со стороны и с весьма строгим соблюдением определенного стандарта формы, представляет собой загадку природы и научную проблему. Интересно, что в целом ряде случаев данные сооружения, возводимые как индивидуальным организмом, так и на основе коллективных усилий многих индивидуумов, оказываются воспроизведением тех или иных евклидовых и неевклидовых цикломерий. Добавим, что, как известно, в зоопсихологии форма постройки способна выступать активным началом организации инстинктивных строительных работ и сама собой регулирует работу.

Интересно, что художники и зодчие еще с древних времен, опираясь на свое обостренное эстетическое чувство, использовали в произведениях искусства не только евклидовы цикломерии, примерами которых насыщена литература по анализу орнаментов и принципов симметрии в искусстве, но также неевклидовы цикломерии, что, вероятно, навеяно образами и алгоритмами живой природы. Так, мебиусовы цикломерии локсодромического типа представлены в формах завитков грифов и эфов скрипичных инструментов, элементов интерьера, выполненных Микеланджело для библиотеки Лауренциана во Флоренции, подножия древней скульптуры Аполлона на Вилле Джулия в Риме, мотивных единиц некоторых древнеегипетских орнаментов и др.

Черты нетривиальных морфогенетических симметрий и алгоритмов несет на себе морфофункциональная организация сенсорных систем организма. Так, улитка уха человека состоит из трех завитков, длины которых соотносятся по золотому сечению ( $1:\Phi:\Phi^2$ ) и дают пропорцию золотого вурфа 1,31 (рис. 30), уже знакомую нам (см. раздел V) совсем по другим творениям морфогенеза, никак не связанным с восприятием звука. Форма улитки уха обычно схематически изображается в виде логарифмической спирали (воспроизводящей классическую цикломерию подобия), внутри которой рас-

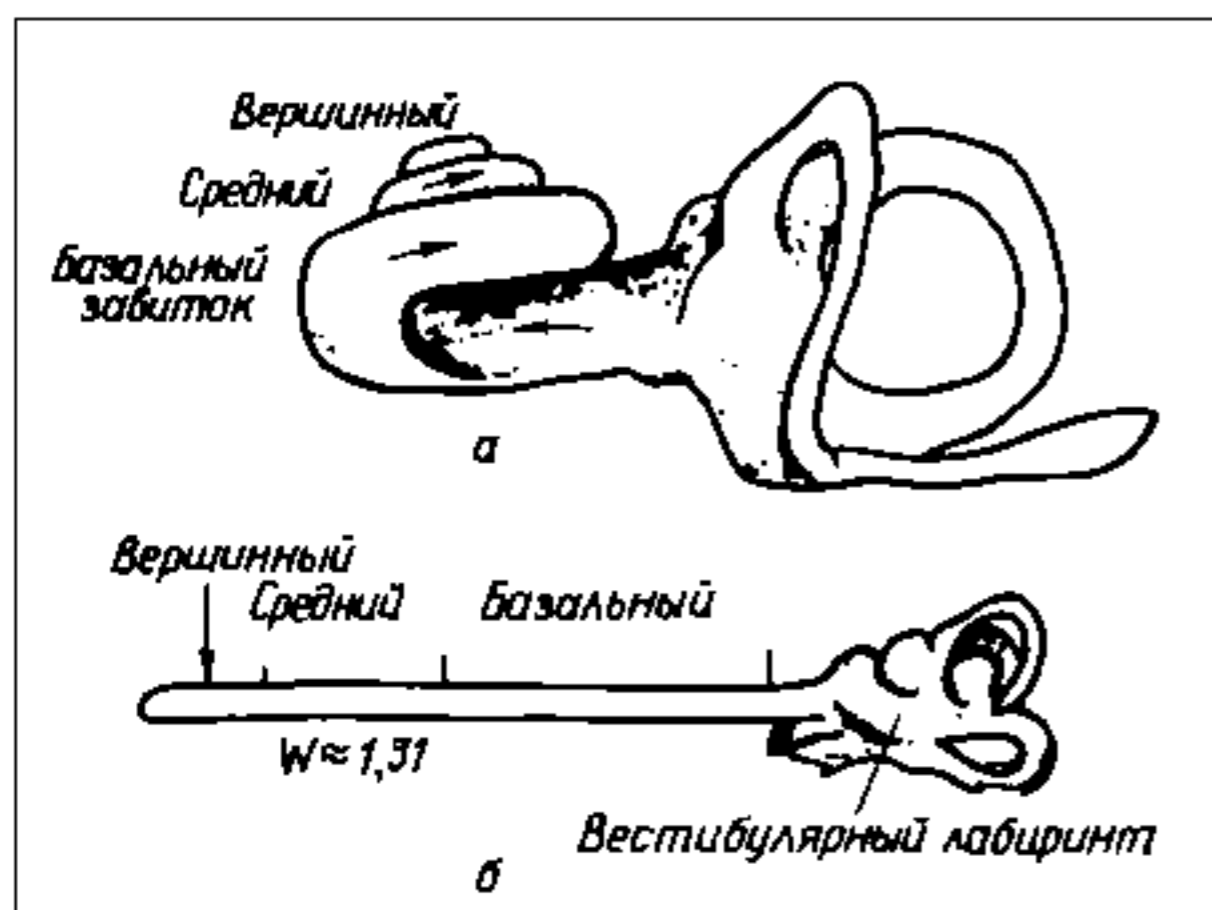


Рис. 30. Спиральное строение улитки человеческого уха и реализация пропорции золотого вурфа в нем (по Т. А. Куку): а — улитка, свернутая в спираль; б — развертка улитки в прямую линию

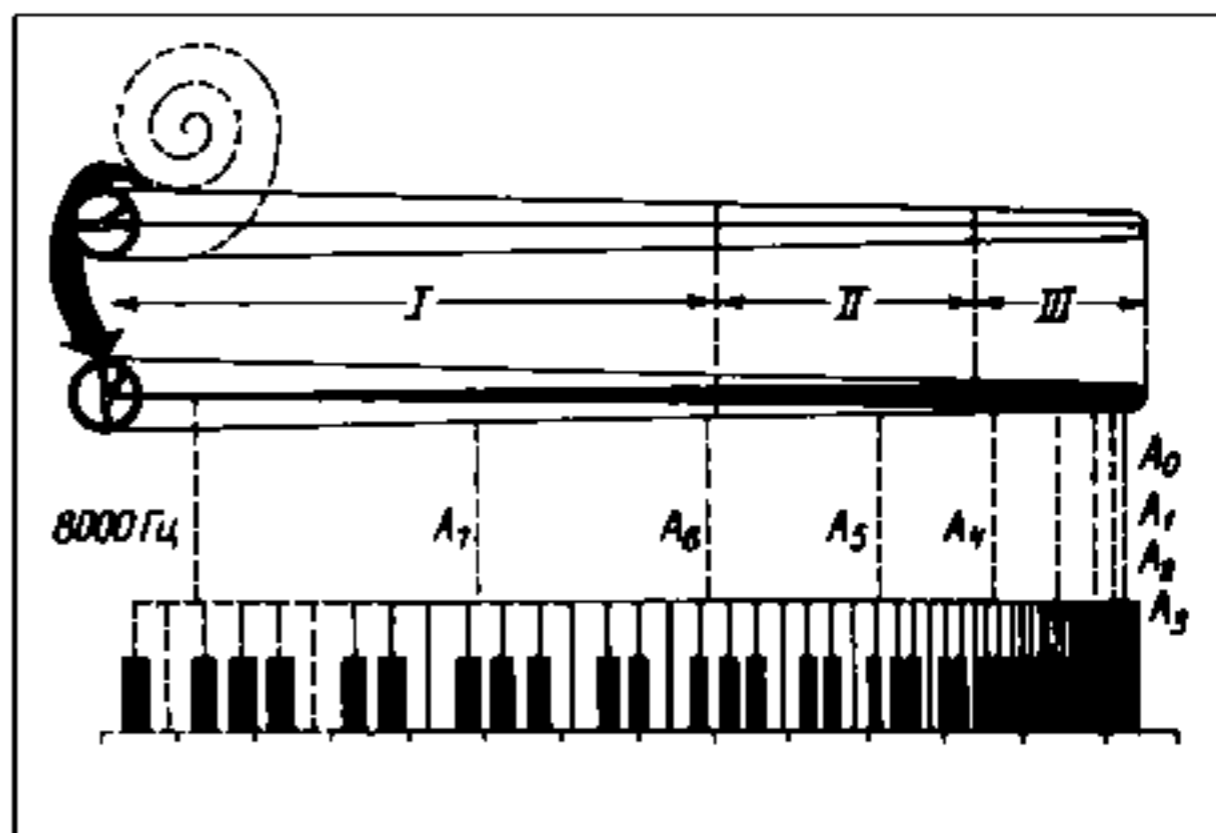


Рис. 31. Распределение зон чувствительности к частотам вдоль слуховой мембраны у человека, иллюстрируемое соответствием с условной клавиатурой рояля (по П. Линдсею, Д. Норману). Последовательность белых клавиш имеет вид цикломерии с мебиусовым (или проективным, что в одномерном случае эквивалентно) порождающим преобразованием  $x_{n+1} = (1,0275x_n + 0,4520) : (0,0046x_n + 1)$ . Обозначения:  $A_0$  — 27,5 Гц,  $A_1$  — 55 Гц,  $A_2$  — 110 Гц,  $A_3$  — 220 Гц,  $A_4$  — 440 Гц,  $A_5$  — 880 Гц,  $A_6$  — 1760 Гц,  $A_7$  — 3520 Гц

положен кортиев орган сходной формы. Однако, по крайней мере у некоторых животных, например у кошек, кортиев орган имеет форму, которая на широком конце улитки существенно отличается от формы логарифмической спирали, демонстрируя тенденцию лирообразной закрутки в обратную сторону, и в целом описывается конфигурацией мебиусовой цикломерии локсодромического типа.

Обратимся к распределению зон чувствительности по частотам вдоль слуховой мембраны у человека (рис. 31), которое, как известно, имеет своеобразный характер и иллюстрируется соответствием с условной клавиатурой рояля (по П. Линдсею, Д. Норману, 1974). Проведенный нами анализ показал, что последовательность белых клавиш, улучшенным образом моделирующая распределение зон чувствительности, имеет вид мебиусовой цикломерии с порождающим преобразованием  $x_{n+1} = (1,0275x_n + 0,4520) : (0,00457x_n + 1)$ .

Можно привести также данные о применении неевклидовой геометрии к описанию особенностей зрительного восприятия. Такое моделирование было стимулировано работами Р. Луненбурга, опубликованными в 1947—1950 гг. и свидетельствующими о том, что простран-

ство зрительного восприятия характеризуется геометрией Лобачевского. Эти исследования нашли широкий отклик и вызвали десятки публикаций ученых из разных стран, развивающих и уточняющих идеи неевклидовости пространства зрительного восприятия. Из работ советских авторов, опирающихся на исследования Лунебурга, отметим монографии Б. В. Раушенбаха. Особо обстоятельную экспериментальную проверку концепции Лунебурга осуществил Г. Кинл [33], пришедший при этом к принципиальным выводам о важном значении мебиусовой симметрии в структуризации пространства зрительного восприятия.

Основная серия экспериментов Кинла включила данные от примерно двухсот наблюдателей, содержащие около 1300 зрительных образов разного типа. Кроме того, было сделано одиннадцать дополнительных серий опытов, в которых осуществлено свыше 2000 измерений. Наблюдатели в специальных условиях эксперимента судили о характере кривых, равенстве углов, расстояний, сегментов, площадей, параллельности прямых, существовании общего центра у семейства окружностей и пр. В результате Кинл получил подтверждение того, что пространство зрительного восприятия характеризуется геометрией Лобачевского (другое ее название — гиперболическая геометрия). Он пришел к мысли, что адекватной моделью этой геометрии в случае зрительного восприятия является известная конформная (или мебиусова) модель Пуанкаре. Кинл заканчивает свою работу словами: «Модель Пуанкаре гиперболического пространства, впервые примененная к структуризации зрительного пространства, показывает убедительное совпадение с экспериментальными результатами».

Итак, мебиусовы преобразования, точнее определенная их подгруппа соответствующая геометрии Лобачевского, оказываются основой структуризации пространства зрительного восприятия. Остается открытым вопрос: почему именно эта подгруппа является определяющей для зрения? Представляется вполне возможным, что для других видов пространственного восприятия, а также и для зрительного восприятия в услови-

ях, отличающихся от использованных Лунебургом и Кинлом, важное значение имеют другие неевклидовы геометрии. Эти вопросы еще ждут своих исследователей.

В свете изложенного особенно интересно, что с мебиусовыми симметриями и итеративными алгоритмами мы встречаемся и в микродвижениях глазного яблока, без которых, как известно, невозможно нормальное зрительное восприятие. На рис. 32 (слева), заимствованном из работы Р. Притчарда (1974), представлена траектория смещения по сетчатке глаза изображения точечного объекта, обусловленная соответствующим микротремором глазного яблока относительно рецепторов сетчатки. Диаметр изображенного участка центральной ямки сетчатки составляет всего лишь 0,05 мм. Частота тремора — до 150 циклов в секунду, амплитуда равна примерно половине диаметра отдельной колбочки сетчатки. Обращает на себя внимание закономерный характер высокочастотного тремора изображения, проявляющийся в следующем. На всех пяти изображенных волнообразных линиях дрейфа сетчаточного изображения с тремором число пилообразных периодов равно 27 или 42. Каждый зубец пилообразной траектории соразмерен с соседними выступами и примерно ортогонален к криволинейной траектории дрейфа, т. е. имеется система взаимосогласования пилообразных периодов, интегрирующая их в единый регулярный процесс. Наши исследования структуры этих криволинейных траекторий с высокочастотным тремором показали, что они успешно описываются в виде мебиусовых цикломерий (рис. 32, справа). Итеративно-алгоритмический характер микротремора может быть интерпретирован как обусловленный работой в глазодвигательном аппарате некоторого автономного автомата, ответственного за организацию микротремора глаза.

Нельзя не отметить в связи с неевклидовыми биосимметриями и итеративными биоалгоритмами, что многое в сенсорном восприятии, подобно рассмотренным выше случаям биологической кинематики, оказывается структурно родственным морфогенезу и может трактоваться как структурное продолжение

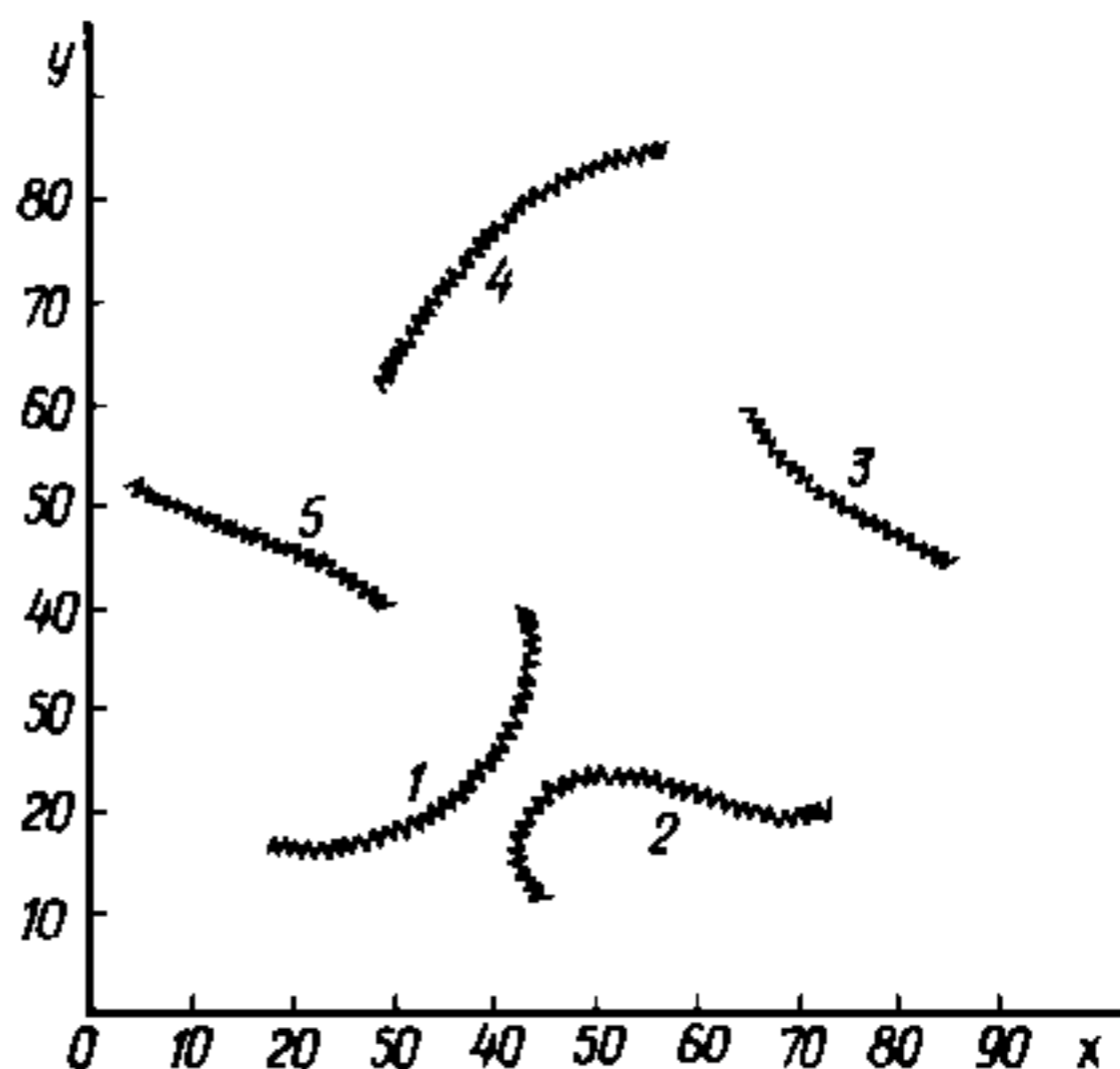
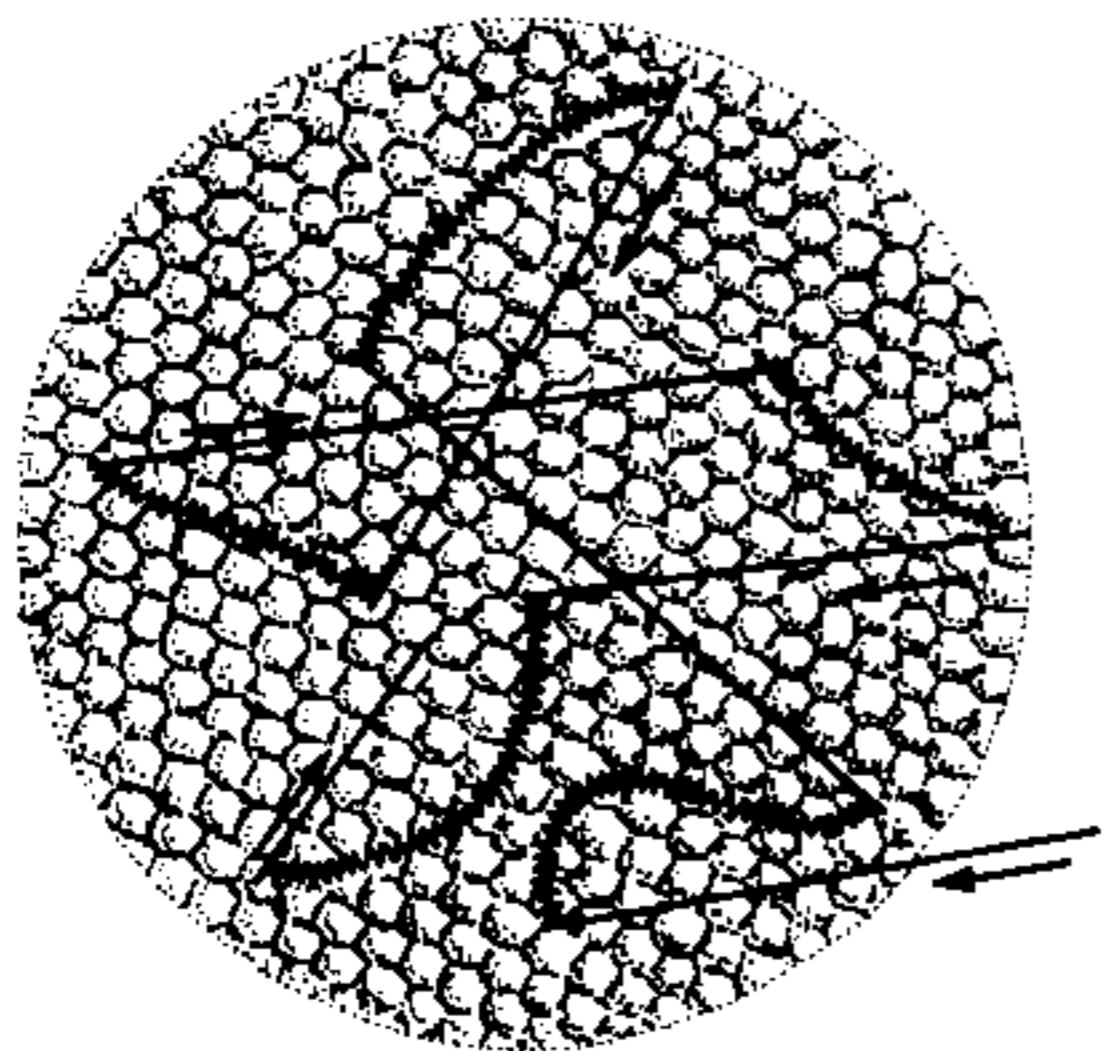


Рис. 32. Цикломерии в процессах зрения. Слева: микродвижения глазного яблока, сопровождаемые аналогичным смещением изображения объекта на сетчатке (по Р. Притчарду); представлен уча-

сток центральной ямки с диаметром 0,05 мм. Справа: моделирование микродвижений с высокочастотным тремором в виде мебиусовых цикломерий.

морфогенеза, а не как нечто совершенно новое, изобретенное живой природой неясным образом на определенном этапе эволюции. Можно думать, что в процессах «овладения пространством» (по выражению Ле Корбюзье) организм во многом использует одни и те же принципы и алгоритмы структуризации, будь то морфогенетическое, кинематическое или психофизическое овладение пространством. Такое единство принципов и алгоритмов структуризации для разных систем и уровней организации, подлежащих взаимосогласованию и в совокупности составляющих «овладевающий пространством» организм, способно обеспечить организмам жизненно важные преимущества. Автор убежден в том, что биологическое значение итеративных алгоритмов и неевклидовых симметрий будет с течением времени обнаруживаться все более в различных областях биологии, в том числе на материалах кодирования биологической информации (включая кодирование в нервной системе).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для общего прогресса биологии и математического моделирования биологических феноменов необходимо углубленное изучение симметричных и алгоритмических свойств органического формообразования. В этой брошюре освещены неизвестные ранее фундаментальные свойства морфологической самоорганизации живой материи, наблюдающиеся у широкого множества надмолекулярных органических тел различных эволюционных классов. Эти свойства проявляются в том, что строение и поведение множества отдельных составных частей алгоритмично организованных биологических структур взаимосогласованы на основе конечнопараметрических групп (и полугрупп) неевклидовых преобразований (прежде всего мебиусовых и аффинных).

В книге А. В. Шубникова и В. А. Копцика [31, с. 261] симметрия определяется как максимально широкая группа автоморфизмов объекта. Результаты проведенного нами исследования выявляют, что без учета неевклидовых автоморфизмов биология не замечает симметрии и самого факта симметрично-ал-

ритмического строения большинства симметрично устроенных биообъектов. В свете этого для адекватного применения и развития инвариантно-групповых средств математического моделирования в биологической морфологии целесообразно резко расширить ее геометрические основы, используя неевклидовы группы преобразований вместо традиционной группы преобразований подобия.

Выявление неевклидовых биосимметрий дает ценный материал для развития формальной теории морфогенеза, причем способность объяснить существование этих биосимметрий выступает важным критерием адекватности такой теории. Найден надежный путь реализации идеи В. И. Вернадского [8, 9] о возможности адекватного использования неевклидовой геометрии в биоморфологии, причем эта реализация оказывается связанной с Эрлангенской программой и развивает возможности построения биологических теорий в духе фундаментальных концепций «геометризации физики».

В недавней публикации [15], посвященной изучению американскими специалистами задач небологического применения итеративных алгоритмов (не связанных с группами евклидовых, мёбиусовых или проективных преобразований), описан ряд конфигураций, напоминающих биоструктуры, и отмечено: «очевидно, эти любопытные конфигурации показывают нам, что правила, по которым строятся сложнейшие ткани живых организмов, могут быть до абсурда простыми» [15, с. 95]. Изложенное в нашей книге исследование по биологическому значению итеративных алгоритмов значительно опережает эти результаты американских исследователей в аспектах связи с классической биоморфологией, неевклидовыми геометриями, теорией автоматов, кинематикой биологических движений и др.

Изучение биосимметрий способствует постижению единства живой природы, которое раскрывается все более явно обнаружением современной наукой универсальных биологических закономерностей и механизмов: генетического кода, механизмов биоэнергетики и пр. Полученные результаты акцентируют морфо-

логическое значение внутренней среды организма и открывают новые подходы для понимания связей морфогенеза с механизмами генетического кодирования и биохимическими циклами. Материалы исследования свидетельствуют в пользу того, что биология не только является благодатной областью для широкого внедрения многих симметричных подходов, методов и средств теоретико-группового анализа, но и что развитие теоретической биологии и биомеханики на современном этапе существенно зависит от интенсификации использования теоретико-групповых методов с включением неевклидовых симметрий.

О важности и актуальности этих вопросов говорит и то, что они включены в программу Международного симпозиума «Симметрия структуры», проводимого в Будапеште (ВНР) 13—19 августа 1989 г. рядом международных организаций и национальных академий наук. (Почетным президентом этого представительного симпозиума от СССР является вице-президент АН СССР академик К. В. Фролов, организатор и руководитель отдела биомеханики Института машиноведения АН СССР.) Предполагается, что в дальнейшем этот симпозиум станет периодическим и будет проводиться в интересах всех исследователей симметрий и алгоритмов самоорганизации в биологических и небологических структурах.

## ПРИЛОЖЕНИЕ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМАЛИЗМЫ

Напомним сведения об основных группах преобразований, рассматриваемых в брошюре, а также о числах Фибоначчи и итеративных алгоритмах в различных областях прикладной математики.

Для случая трехмерного пространства справедлива следующая схема взаимоотношений конечных групп точечных преобразований, указанная еще в 1893 г. Софусом Ли:

$$D \subset P \subset \begin{cases} M \\ LN \subset A \subset Pr. \end{cases}$$

где через  $D$  обозначена 6-параметриче-

ская группа евклидовых движений,  $\Pi$  — 7-параметрическая группа подобия,  $M$  — 10-параметрическая группа мебиусовых преобразований,  $ЛН$  — 11-параметрическая специальная линейная неоднородная группа,  $A$  — 12-параметрическая группа аффинных преобразований,  $Пр$  — 15-параметрическая общая проективная группа. (В случае двумерного пространства имеет место сходная схема.) Эти группы лежат в основе соответствующих геометрий:  $\Pi$  — в основе евклидовой,  $M$  — конформной,  $Пр$  — проективной геометрии (рис. 33). Из этой схемы следует, что имеются два возможных пути поиска обобщений биосимметрий подобия: конформно-геометрический ( $M$ ) и проективно-геометрический ( $ЛН \subset A \subset Пр$ ). Оба эти пути представлены в книге.

Группа преобразований подобия, сохраняющих форму трансформируемых фигур, включает в себя преобразования параллельного сдвига, вращения, зеркального отражения и масштабного подобия. В трехмерном пространстве общее аналитическое выражение преобразования подобия имеет вид:

$$(x')^i = k \cdot \alpha_j^i x^j + b^i \quad (1)$$

(с ортогональной матрицей  $\alpha_j^i$ ,  $k$  — произвольное число,  $i, j=1, 2, 3$ ).

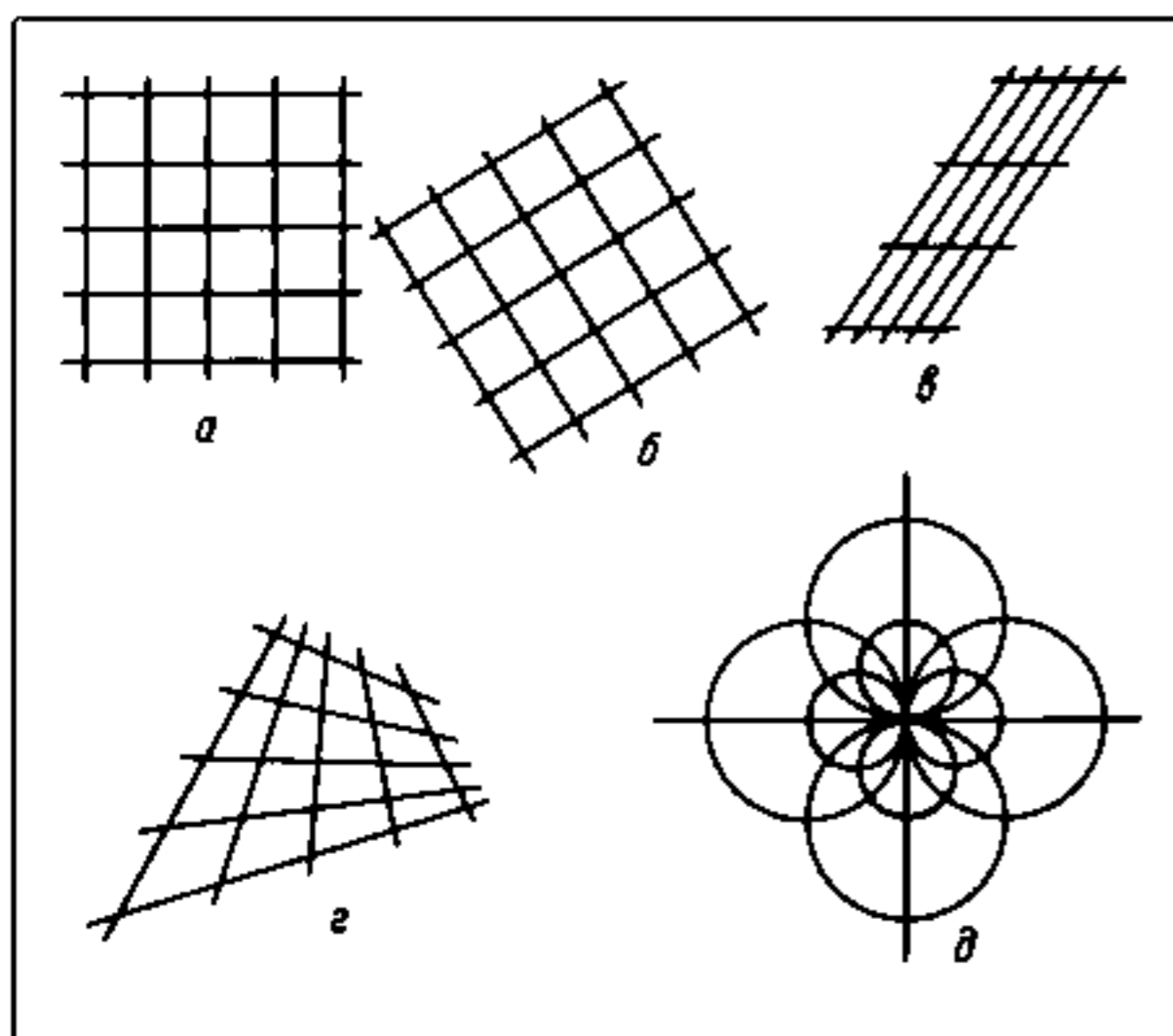


Рис. 33. Характерные трансформации декартовой решетки (а) различными групповыми преобразованиями: евклидовыми (б), аффинными (в), проективными (г), мебиусовыми (д)

Группа проективных преобразований состоит из преобразований, которые в декартовых координатах имеют вид:

$$x_i' = \frac{c_{ij}x_j + b_i}{a_jx_j + 1} \quad (2)$$

где  $c_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $a_j$  — вещественные коэффициенты, удовлетворяющие условию неравенства нулю детерминанта системы (2),  $i, j=1, 2, 3$ .

Эти преобразования всегда переводят линейные образы только в линейные же с сохранением отношений принадлежности между ними.

Мебиусова группа давно используется в математике и физике под разными названиями: конформной, круговой, аналагматической, обратных радиусов, Мебиуса, Лиувилля, Кельвина (эти ученые внесли существенный вклад в исследование ее математических свойств и разработку ее физических приложений). По определению, группа мебиусовых преобразований — это группа точечных преобразований, сохраняющая величины углов и переводящая сферы в сферы. Мебиусовы преобразования являются локально-подобными преобразованиями (рис. 34), т. е. сохраняющими формы «в малом» (по теореме Лиувилля в случае трехмерного пространства их группа совпадает с группой конформных преобразований; в двумерном случае группа конформных преобразований шире мебиусовой группы). Это значит, что если малая окрестность каждой точки трехмерного тела испытывает

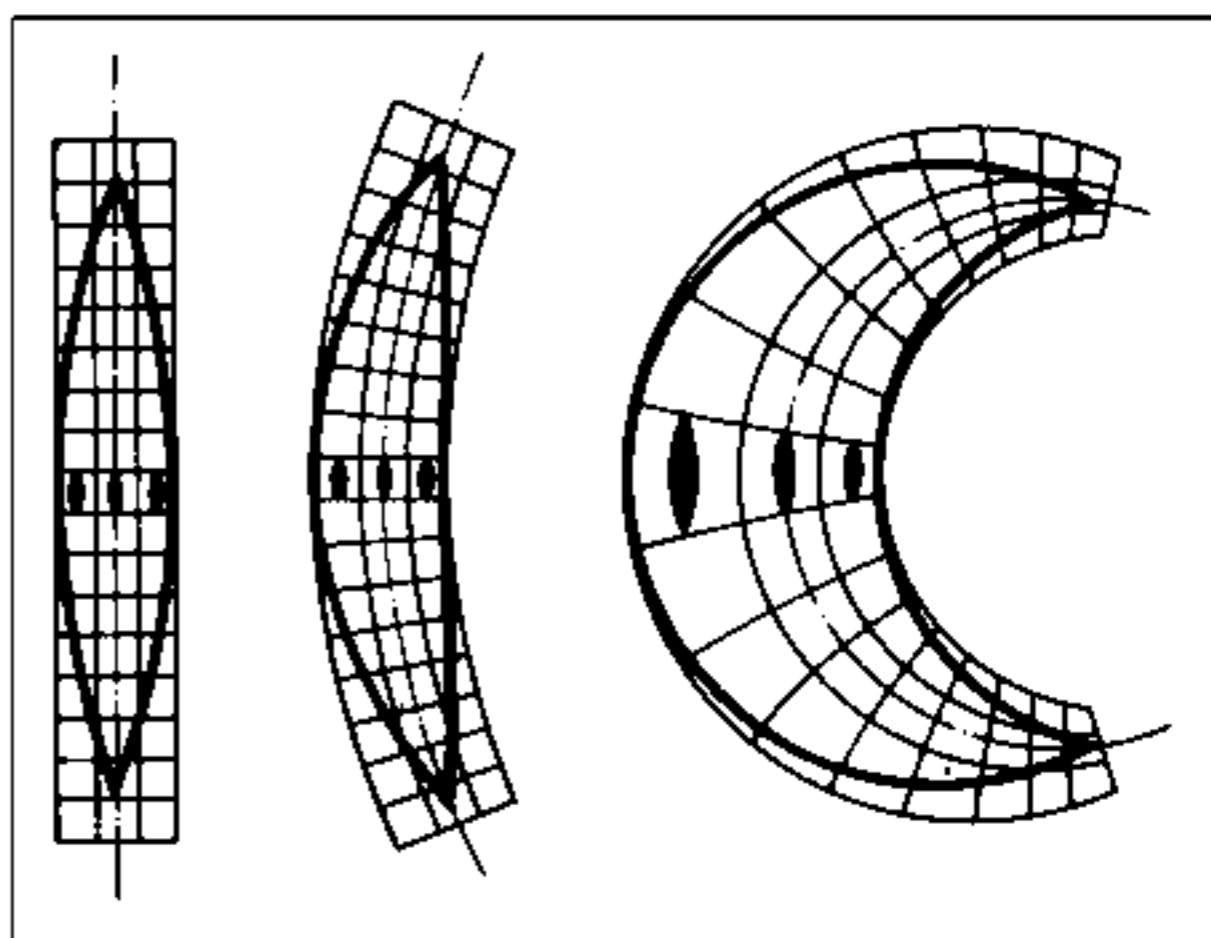


Рис. 34. Варианты мебиусовой трансформации фигур, сохраняющей локальное подобие

масштабное преобразование, не обязательно одинаковое в окрестностях различных точек, то все тело претерпит строго мебиусову трансформацию (если окрестности всех точек масштабируются одинаково, то все тело испытывает преобразование подобия, частный случай мебиусова). Этими локальными свойствами мебиусовы или конформные преобразования выделяются среди других групп преобразований трехмерного пространства. Изучение локальных свойств конформно-геометрических объектов составляет важный раздел дифференциальной геометрии. Мебиусовы преобразования трехмерных образов имеют свой характерный набор инвариантов: линии кривизны поверхностей и изогоналы к ним, омбилические точки и пр. Группа этих преобразований разбивает все множество фигур на замкнутые классы мебиусово-эквивалентных фигур, несколько более широкие (за счет дополнительных трех параметров группы), чем привычные всем классы эквивалентных фигур группы подобия. Совокупность всех мебиусовых преобразований трехмерного пространства образует 10-параметрическую группу, аналитическое выражение которой в канонических пентасферических координатах совпадает с группой лоренцовых преобразований пяти переменных. Любое мебиусово преобразование в  $n$ -мерном пространстве может быть представлено суперпозицией одного преобразования подобия (1) и одного преобразования инверсии относительно сферы единичного радиуса

$$x'_i = R^2 \cdot \frac{x_i - x_{0i}}{\sum (x_j - x_{0j})^2} + x_{0i}, \quad (3)$$

где  $R$  — радиус инверсии (в данном контексте единичный),  $x_{0i}$  — координаты центра инверсии,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Любое мебиусово преобразование в  $n$ -мерном пространстве может быть также представлено произведением не более « $n+2$ » общих преобразований инверсии относительно сферы. При бесконечном радиусе инверсии преобразование инверсии относительно сферы переходит в преобразование зеркального отражения относительно плоскости.

В инфинитезимальном виде мебиусовы преобразования имеют вид:

$$\xi^i = a^i + \omega^i x^i + a x^i + \alpha^i x^i x^i - \frac{1}{2} \alpha^i x^i x^i$$

$$\lambda(x) = 2(a + \alpha^i x^i),$$

где параметры  $a^i$  определяют бесконечно малые преобразования сдвига,  $\omega^i$  — поворота,  $a$  — гомотетии,  $\alpha^i$  — собственно мебиусовы. Исходя из этого бесконечно малого преобразования  $\xi^i$ , конечное мебиусово преобразование получается с помощью уравнений Ли для определения конечных преобразований группы Ли по известным бесконечно малым преобразованиям:

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i(x),$$

где  $t$  — групповой параметр,  $i = 1, 2, 3$ . Решение этих уравнений в рассматриваемом случае представляет собой композицию преобразований сдвига  $(x^i)' = x^i + A^i$ , поворота  $(x^i)' = O^i x^i$ ,  $O^i O^i = \delta^i$ , гомотетии  $(x^i)' = A x^i$  и собственно мебиусовых преобразований инверсии (3).

Обратимся теперь к ряду чисел Фибоначчи, представляющему собой рекуррентную последовательность (при  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ):

$$\{F_{n+2} = F_n + F_{n+1}\}: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \quad (4)$$

Эти числа фигурируют в давно известных в биологии законах филлотаксиса (или листорасположения). Согласно этим законам при многих случаях симметричного формообразования биологических объектов в числовых характеристиках их конфигураций реализуются сразу пары фибоначчиевых чисел из последовательностей двух типов (парастихной и ортостихной):

$$\left\{ Q'_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \right\}: \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots \rightarrow \rightarrow \Phi \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618... \quad (5)$$

$$\left\{ Q''_n = \frac{F_{n+2}}{F_n} \right\}: \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{13}{5}, \dots \rightarrow \rightarrow \Phi^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,618... \quad (6)$$

Подобные закономерности отмечены разными последователями в симметриях у многих растительных и животных объектов (обзор приведен в нашей работе [21, с. 8—19]). Законом филлотаксиса посвящено много современных ра-

бот (Л. В. Белоусов, 1976; Ю. А. Урманцев, 1968, 1974; И. И. Шафрановский, 1968; W. D'Arcy Thompson, 1917; W. McCulloch, 1965; H. Weyl, 1952, и др.). Родоначальником этого направления является И. Кеплер, который в XVII в. впервые связал закономерности симметрического морфогенеза с рядом чисел Фибоначчи и знаменитым еще с древних времен золотым сечением  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (см. последовательность (5)), играющим важную роль в эстетике пропорций.

В отличие от (5) и (6) нами в работе [21] была исследована последовательность величин не простых, а двойных отношений (вурфов (7)) соседних чисел ряда Фибоначчи. Три соседних числа  $F_n, F_{n+1}, F_{n+2}$  ряда Фибоначчи могут быть интерпретированы как длины трех последовательных отрезков, заключенных, согласно рекуррентному свойству ряда Фибоначчи (4), между четырьмя точками  $F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}, F_{n+4}$ . Величина вурфа (см. (7) из раздела VI) таких трех отрезков равна:

$$W_n = \frac{(F_n + F_{n+1}) \cdot (F_{n+1} + F_{n+2})}{F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1} + F_{n+2})} \quad (7)$$

Соответственно вурфовая последовательность имеет вид:

$$\begin{aligned} (W_n): 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{8}{6}, \frac{13}{10}, \dots, \frac{F_{n+2}}{2F_n}, \dots \rightarrow P = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{2F_n} = \frac{\Phi^2}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = 1,309\dots \quad (8) \end{aligned}$$

Подобно тому как предел последовательности простых отношений (5) из чисел Фибоначчи называется золотым сечением, полученная нами предельная величина  $P$  вурфовой последовательности (8) была названа золотым вурфом. Имеется ряд веских аргументов [21] в пользу того, что именно золотой вурф  $P \simeq 1,31$  является той эталонной величиной, вокруг которой группируются онтогенетически инвариантные величины вурфов трехчленных кинематических блоков тела человека, рассмотренных выше в разделе VI.

В заключение Приложения отметим, что итеративные алгоритмы в более или менее явном виде широко применяются во многих областях прикладной математики: теории автоматов, теории итераций, теории оптимальных

алгоритмов (Дж. Трауб, Х. Вожьяковский, 1983), многошаговых процессах без «последствий» теории динамических систем, теории динамического программирования Р. Беллмана, эргодической теории, теории ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности и др. Каждая из них дает свои возможности для интерпретации происхождения и биологического значения цикломерных биоструктур, а также для математизации биологии на этом пути.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аптер М. Кибернетика и развитие.— М.: Мир, 1970.— 215 с.
2. Астаховский А. Г. и др. Аперiodические автоматы.— М.: Мир, 1976.— 423 с.
3. Беклемишев В. Н. Основы сравнительной анатомии беспозвоночных.— М.: Сов. Наука, 1952.— 699 с.
4. Белоусов Л. В. Биологический морфогенез.— М.: МГУ, 1987.— 238 с.
5. Бернштейн Н. А. Очерки по физиологии движений и физиологии активности.— М.: Медицина, 1966.— 349 с.
6. Бернал Дж., Карлайл С. Поля охвата обобщенной кристаллографии // Кристаллография.— 1968.— Т. 13.— Вып. 5.— С. 927—951.
7. Ванштейн Б. К. Современная кристаллография: Симметрия кристаллов, методы структурной кристаллографии.— М.: Наука, 1979.— Т. 1.— 440 с.
8. Вернадский В. И. Химическое строение биосферы и ее окружения.— М.: Наука, 1965.— 205 с.
9. Вернадский В. И. Размышления натуралиста: Пространство и время в неживой и живой природе.— М.: Наука, 1975.— 220 с.
10. Вейль Г. Симметрия.— М.: Наука, 1968.— 191 с.
11. Визгин В. П. Эрлангенская программа и физика.— М.: Наука, 1975.— 110 с.
12. Волькенштейн М. В. Перекрестки науки.— М.: Наука, 1972.— 336 с.
13. Газарян К. Г., Белоусов Л. В. Биология индивидуального развития животных.— М.: Высшая школа, 1983.— 287 с.
14. Дубров А. П. Симметрия биоритмов и реактивности.— М.: Медицина, 1987.— 175 с.
15. Дьюдни А. К. Программы, генерирующие узоры для обоев. // В мире науки.— 1986.— № 11.— С. 92—99.
16. Ефимов Н. В. Высшая геометрия.— М.: Наука, 1971.— 576 с.
17. Касинов В. Б. О симметрии в биологии.— М.: Наука, 1971.— 46 с.
18. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.— В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики.— М.: Наука, 1982.— С. 217—243.



19. Мейен С. В., Соколов Б. С., Шрейдер Ю. А. Классическая и неклассическая биология: феномен Любищева // Вестн. АН СССР. — 1977. — № 10. — С. 112—124.

20. Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. — М.: Мир, 1971. — 349 с.

21. Петухов С. В. Биомеханика, бионика и симметрия. — М.: Наука, 1981. — 239 с.

22. Петухов С. В. Циклические группы нелинейных преобразований в морфологии и концепция циклогенеза // Архив анатомии, гистологии и эмбриологии. — 1986. — № 12. — С. 5—10.

23. Петухов С. В. Высшие симметрии в биомеханике формообразования. Автореф. дис. докт. физ.-мат. наук. — М.: Ин-т кристаллографии им. А. В. Шубникова АН СССР, 1987. — 39 с.

24. Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983. — 560 с.

25. Раушенбах Б. В. Пространственные построения в древнерусской живописи. — М.: Наука, 1975. — 184 с.

25. Регирер С. А., Штейн А. А. Механические аспекты процессов роста, развития и перестройки биологических тканей // Итоги науки и техники. Серия «Комплексные и специальные разделы механики». — М.: ВИНТИ, 1985. — С. 3—142.

27. Романовский Ю. М., Стевацова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984. — 304 с.

28. Урманцев Ю. А. Симметрия природы и природа симметрии. — М.: Мысль, 1974. — 229 с.

29. Шноль С. Э. Физико-химические факторы биологической эволюции. — М.: Наука, 1979. — 261 с.

30. Шубников А. В. Симметрия подобия // Кристаллография. — 1960. — Т. 5. — Выд. 4. — С. 489—496.

31. Шубников А. В., Копчик В. А. Симметрия в науке и искусстве. — М.: Наука, 1972. — 339 с.

32. Cassirer E. The concept of group and the theory of perception // Phil. and Phenomenol. Res. — 1944. — № 5. — № 1. — P. 1—36.

33. Kieule G. Experiments concerning the non-euclidean structure of the visual space. — In: Bioastronautics. — N. V.; L. — 1964. — P. 386—400.

34. Lindenmayer A. Algorithms for plant morphogenesis. — In: Theoretical plant morphology / Ed. R. Sattler. The Hague: Leiden Univ. Press. — 1978. — P. 38—81.

35. Symmetry and function of biological systems at the macromolecular level. — In: Proc. Eleventh Nobel Symp. 1968. Stockholm: 1969.

36. Thom R. Structural stability. Mass., Benjamin Inc., 1975. — 348 p.

37. Thompson D'Arcy W. On growth and form. — Cambridge Univ. Press., 1942. — 1116 p.

38. Weiss A. Replication and evolution in inorganic systems // Angewandte Chemie. — 1981. — № 10. — S. 850—860.

Изложенные в книге материалы отражены также в учебном фильме для вузов «Циклические группы преобразований в биомеханике», выпущенном студией «Союзвизфильм» в 1986 г. по сценарию автора.

---

Научно-популярное издание

---

Сергей Валентинович ПЕТУХОВ

**ГЕОМЕТРИИ ЖИВОЙ ПРИРОДЫ  
И АЛГОРИТМЫ САМООРГАНИЗАЦИИ**

Главный отраслевой редактор Л. А. Ерлыкин

Редактор Г. Г. Карвовский

Мл. редактор Н. А. Сергеева

Художник Л. П. Ромасенко

Худож. редактор М. А. Бабицева

Техн. редактор И. Е. Белкина

Корректор В. В. Каночкина

ИБ № 9572

Сдано в набор 21.04.88. Подписано к печати 27.05.88. Т—08308. Форма, бумаги 70X100<sup>1/16</sup>. Бумага тип. № 2. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,90. Усл. кр.-отт. 8,12. Уч.-изд. л. 4,64. Тираж 31156 экз. Заказ 1022. Цена 11 коп. Издательство «Знание», 101835, ГСП, Москва, Центр, проезд Серова, д. 4. Индекс заказа 884306.

Орден Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

142300, г. Чехов Московской области.

Адрес подписчика:

Издательство «Знание» — крупнейшее в стране издательство по выпуску научно-популярной литературы.

Издательство выпускает  
38 серий подписных  
научно-популярных брошюр

Подписная  
научно-  
популярная  
серия



Издательство  
*Знание.*

**МАТЕМАТИКА**  
**КИБЕРНЕТИКА**

Дорогой читатель!

Брошюры этой серии в розничную продажу не поступают, поэтому своевременно оформляйте подписку.

Подписка на брошюры издательства «Знание» ежеквартальная, принимается в любом отделении «Союзпечати».

Напоминаем Вам, что сведения о подписке Вы можете найти в «Каталоге советских газет и журналов» в разделе «Центральные журналы», рубрика «Брошюры издательства «Знание»

Цена подписки на год 1 р. 32 к.

Наш адрес:  
СССР,  
Москва,  
Центр,  
проезд Серова, 4