Издательство «Знание»

МАТЕМАТИКА КИБЕРНЕТИКА

Новое
в жизни,
науке,
технике

Подписная
научно-
популярная
серия

Издается
ежемесячно
с 1967 г.

Ю. А. Данилов

Джон фон Нейман

12 '90

Новое
в жизни,
науке,
технике

МАТЕМАТИКА
КИБЕРНЕТИКА

Подписная
научно-
популярная
серия

12/1990

Ю. А. Данилов

ДЖОН ФОН НЕЙМАН

Издается
ежемесячно
с 1967 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Издательство
«Знание»
Москва
1990

ББК 22.1
Д17

ДАНИЛОВ Юлий Александрович — математик, работает в области математической и теоретической физики. Автор многих переводов и научно-популярных статей.

Данилов Ю. А.
Д17 Джон фон Нейман.— М.: Знание, 1990.— 64 с.— 2-е изд., доп.— (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика»; № 12).
15BN 5-07-001585-0

20 к.

Брошюра посвящена жизни и научной деятельности выдающегося математика современности Джона фон Неймана (1903—1957), внесшего фундаментальный вклад в создание и развитие многих областей современной математики (функциональный анализ, эргодическая теория, теория автоматов, обоснование квантовой механики, теория игр и т. д.) и ее приложений.
Брошюра рассчитана на научных работников, инженеров, студентов и всех, кто интересуется математикой, ее приложениями и историей.

1702020000 **ББК 22.1**
51

ISBN 5-07-001585-0

© Данилов Ю.А., 1990 г.

ОТ РЕДАКЦИИ

Читатели в своих письмах — особенно в последнее время — выражают недоумение (а точнее, недовольство) по поводу того, что мы перестали публиковать персоналии.

Упрек справедливый — и мы исправляем положение. Напомним, что эта брошюра уже издавалась в 1981 г. и пользовалась заслуженным успехом. Мы решили переиздать ее, поскольку в ряде писем содержалась именно такая просьба. Мы также решили сохранить предисловие безвременно скончавшегося И. М. Яглома, который весьма высоко оценивал эту брошюру.

ОТ АВТОРА

Второе издание брошюры о Джоне фон Неймане омрачено безвременной кончиной рецензента и автора предисловия проф. Исаака Моисеевича Яглома.

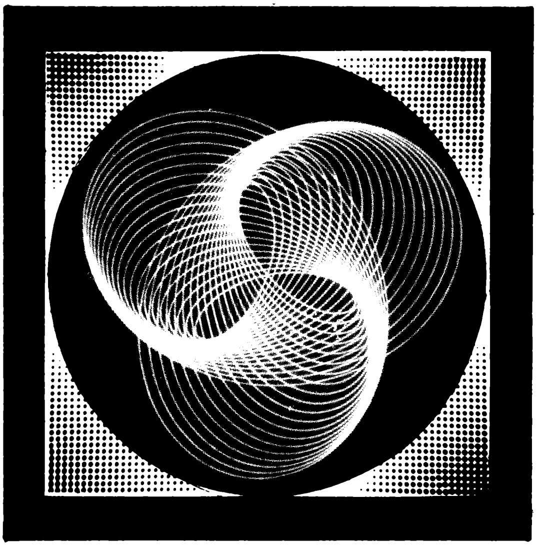
Автор брошюры принадлежит к тому поколению, которое училось и постигало красоту математики по книгам и задачникам из серии «Библиотека математического кружка» И. М. Яглома, сохранившего вместе с другими сверстниками-энтузиастами и донесшего до послевоенной молодежи замечательные традиции и самый дух школьного математического кружка при МГУ, основанного Д. О. Шклярским. Человек глубочайшей культуры и энциклопедических познаний, тонкий знаток и ценитель литературы и искусства, И. М. Яглом был образцовым редактором, на протяжении десятилетий исполнявшим добровольно взятый на себя долг перед широкой читательской аудиторией, блестящим автором, подарившим всем нам не одну нужную и яркую книгу. Встречу с И. М. Ягломом и последовавшее за ней многолетнее сотрудничество автор считает одной из величайших удач своей жизни.

Биография — жанр портретный, допускающий множество форм. В настоящей брошюре избрана форма наброска к большому портрету, требующему иного формата и иных живописных средств. Эскизность изложения предопределена масштабами гигантской фигуры фон Неймана, одного из немногих универсалов в науке, свободно владевшего всем арсеналом идей и методов современной математики, не понаслышке знавшего современное ему состояние всего точного естествознания и глубоко разбиравшегося в технике и технологии. Фигура такого масштаба заранее обрекает на неполноту любую попытку создания ее биографии, тем более трудную, что многие материалы в нашей стране просто отсутствуют. «Толстая» биография фон Неймана, сравнимая по своим достоинствам, например, с книгой Райса об Эйнштейне, с анализом его творчества и подробными сведениями о внешней биографической канве его жизни, не появилась пока ни в Венгрии, где фон Нейман родился, ни в США, где он прожил последние годы своей жизни.

Интересны и поучительны противопоставления стиля мышления фон Неймана и его коллег Ферми, Фейнмана, Вейля и Винера. Автору известна лишь одна попытка «группового» портрета фон Нейман — Винер, предпринятая Хеймсом. Все остальные еще ждут своей разработки. Некоторые другие неизбежные или даже умышленные пробелы отмечены в предисловии И. М. Яглома. Оно по просьбе автора полностью сохранено. В примечаниях отмечены те издания, которые содержат дополнительные сведения по тем или иным вопросам, но вышли после первой публикации брошюры.

Второе издание дополнено в качестве приложения статьей Джона фон Неймана «Роль математики в науках и обществе».

Ю. Данилов



ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика, как и мир, в котором мы живем, поражает нас сегодня своими разительными контрастами и противоречиями. Для нее одинаково характерны как создание колоссальной «математической индустрии», воплощенной в гигантских ЭВМ и комплексах ЭВМ, так и углубленный интерес к философии математики, как крайняя специализация, доходящая до того, что создаются большие международные журналы, посвященные уже не просто геометрии, а именно дифференциальной геометрии (The Journal of Differential Geometry, существует с 1965 г.), не статистике, а многомерному статистическому анализу (The Journal of Multivariate Analysis, существует с 1971 г.), не теории множеств, а теории размытых множеств (International Journal of Fuzzy Sets and Systems, существует с 1979 г.), так и появление ряда универсальных гениев, внесших вклад чуть ли не во все без исключения разделы невероятно разросшейся математической науки.

Вся математика нашего века проникнута влиянием нескольких титанов, каждый из которых в отдельности (не говоря уж об их совокупных заслугах) охватил своим творчеством чуть ли не весь массив математической науки: для того чтобы продемонстрировать это, достаточно назвать имена Анри Пуанкаре (1854—1912) и Давида Гильберта (1862—1943), Германа Вейля (1885—1955) и Джона фон Неймана (1903—1957) (я упоминаю только тех, кого ныне уже нет в живых)*. Интересы этих ученых простирались от вопросов психологии математического творчества (Пуанкаре), философии математики и самых основ нашей древней науки (основания теории множеств у Неймана; логицистская программа Гильберта и интуиционистская программа Вейля) до глубоких тем прикладного характера, связывающих математику с физикой, техникой и широко понимаемым естествознанием (участие Неймана в разработке первых ЭВМ; исследования Пуанкаре, Вейля и Гильберта по теории относительности; Вейля, Неймана и Гильберта по квантовой механике; неймановская теория игр, тесно связанная с задачами математической экономики, и его теория автоматов). Без информации о жизни и творчестве этих замечательных ученых наше представление о современной математике неизбежно окажется крайне обедненным.

Между тем русский читатель имеет совершенно неодинаковые возможности знакомства с названными гигантами научной мысли XX столетия. Больше всего повезло у нас Пуанкаре, помимо того, что мы имеем на русском языке трехтомное собрание его сочинений (Пуанкаре А. Избранные труды / Под ред. Н. Н. Боголюбова.— М.: Наука, 1971—1974)**, сопровождаемое переводами обстоятельных статей замечательных ученых Г. Жюлиа, Ж. Адамара, А. Вейля, Г. Фрейденталя, Л. Шварца и Л. де Бройля, посвященных отдельным сторонам научной деятельности Пуанкаре, этот ученый — кажется, единственный из математиков! — удостоился отдельного тома в популярной серии «Жизнь замечательных людей» (Тяпкин А., Шибанов А. Пуанкаре.— М.: Молодая гвардия, 1979). Гильберту посвящена превосходная переводная научно-биографическая книга Констанс Рид, пользующаяся во всем мире заслуженной извест-

* Ныне этому грустному критерию удовлетворяет и Андрей Николаевич Колмогоров (1903—1987).— *Ю. Д.*

** Следует упомянуть и о выдержавшем два издания сборнике статей: Пуанкаре А. О науке / Под ред. Л. С. Понтрягина.— М.: Наука, 1990.— *Ю. Д.*

ностью (Рид К. Гильберт.— М.: Наука, 1977). Вейлю, к сожалению, в нашей стране посвящена лишь краткая брошюра, вышедшая в той же серии издательства «Знание», к которой относится и настоящая книжка (Яглом И. М. Герман Вейль.— М.: Знание, 1967)*. Наконец, о Неймане в нашей литературе до сих пор не было сказано практически ничего.

Автором предлагаемой брошюры является известный переводчик и популяризатор математики Юлий Александрович Данилов. Математик по образованию и физик по научной специальности, Ю. А. Данилов перевел первую статью фон Неймана, появившуюся на русском языке (в кн.: Тьюринг А. Может ли машина мыслить? — М.: Наука, 1960); он принимал также участие в работе над названным выше собранием сочинений Пуанкаре, а среди многих десятков других переведенных им книг числится, в частности, и замечательная «Симметрия» Вейля, которую последний сам назвал своей «лебединой песнью». Разумеется, настоящая брошюра дает только «первый эскиз» творческого портрета Неймана (подобно тому как не может удовлетворить наше любопытство к громадной фигуре Вейля названный выше весьма краткий очерк его жизни и деятельности), но «лучше мало, чем ничего».

Ясно, что Ю. А. Данилов имел возможность остановиться лишь на немногих из достижений Неймана: в частности, почти полностью обойдена здесь роль Неймана в становлении математической экономики и лишь весьма бегло сказано об истории создания первых ЭВМ. Здесь хоть и ясно, но все же по необходимости довольно бегло охарактеризованы и общие взгляды Неймана на математику, ее уникальность и необходимость, тесную связь со всеми другими науками и ее коренное отличие от них. В этой связи хотелось бы выразить надежду на скорую публикацию на русском языке цитируемого автором программного эссе Неймана «Математик» (The Mathematician; написано для выпущенного издательством Чикагского университета сборника «Умственная работа» — The Works of the Mind; перепечатано в четырехтомном «Мире математики» Дж. Р. Ньюмена — I. R. Newman. The World of Mathematics.— New York: Simon and Schuster). Пока же это эссе остается малодоступным, возможно, уместно обратить внимание читателей настоящей брошюры на достаточно характерную для общенаучных взглядов Неймана вводную главу обширной монографии «Теория игр и экономическое поведение», написанной Нейманом совместно с экономистом О. Моргенштерном и переведенной также на русский язык.

Совсем не затронул Ю. А. Данилов и такое специфическое явление, как колоссальный взлет в XX в. венгерской физико-математической мысли, несравнимый по масштабам с достижениями многих куда бóльших по численности населения и культурным традициям стран и народов: чтобы пояснить это, достаточно упомянуть здесь, скажем, имена Дж. фон Неймана, Р. фон Мизеса и Т. фон Кармана; братьев Ф. и М. Риссов; Л. Фейера и Б. Секефальви-Надя; Дж. Пойа и Г. Сеге; П. Эрдеша и Т. Радо; П. Лакса, П. Халмоша и И. Лакатоша; А. Реньи и Л. Фейеша Тота; Л. Силарда; Е. Вигнера и Э. Теллера (кстати, двое последних в школе учились у того же учителя математики, что и Дж. фон Нейман!). К сожалению, в результате тех исторических катаклизмов, которые пережила наша планета в XX в., большинство этих ученых проделали ставший чуть ли не стандартным для венгерских математиков путь: Венгрия — Германия — США. Заслуживало бы внимания указание на связь успехов венгерской науки с долголетней (исторически — первой в мире!) практикой серьезных школьных математических олимпиад*. Хотелось бы больше услышать о нескольких уникальных высших учебных заведениях, сыгравших ту или иную роль в жизни Неймана,— не только о Принстонском институте высших исследова-

* Назовем также следующие издания Вейль Г. Избранные труды / Отв. ред. В. И. Арнольд.— М.: Наука, 1984; Вейль Г. Математическое мышление / Под ред. Б. В. Бирюкова и А. Н. Паршина — М.: Наука, 1990.— *Ю. Д.*

* Венгерская традиция проведения математических олимпиад достаточно полно представлена в кн.: Кюршак И., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. Венгерские математические олимпиады / Под ред. В. М. Алексеева — М.: Мир, 1977.— *Ю. Д.*

ний, но и Цюрихской высшей технической школе, с которой связаны имена Минковского и Эйнштейна, Вейля и Неймана, и о Гамбургском и Геттингенском университетах*. Было бы интересно сопоставить двух «знатных принстонцев» — Дж. фон Неймана и Г. Вейля: если с теплотой охарактеризованный автором дом Неймана в Принстоне отличался типично американской «распахнутостью» и простотой, то не менее популярный дом Вейля, напротив, во всем — даже в некоторой чопорности хозяина дома — хранил устоявшиеся традиции немецкой культуры со столь привычными для немецкой профессуры вечерним музицированием и обсуждением философских проблем. Однако мне кажется бесспорным, что и в настоящем своем виде брошюра Ю. А. Данилова (которую, кстати, очень украшают обширные цитаты из высказываний ее героя и воспоминаний людей, хорошо его знавших) будет очень интересна весьма многочисленным читателям.

Профессор, доктор
физико-математических наук
И. М. Яглом

* См. ст. «Университеты и наука в Германии» в сб.: Вейль Г. Математическое мышление.— М.: Наука, 1989.— *Ю. Д.*

Многие из математиков устраиваются в каком-нибудь закоулке математической науки, откуда они и не стремятся выйти, и не только почти полностью игнорируют все то, что не касается предмета их исследований, но не в силах даже понять язык и терминологию своих собратьев, специальность которых далека от них. Нет такого математика даже среди обладающих самой обширной эрудицией, который бы не чувствовал себя чужеземцем в некоторых областях огромного математического мира; что же касается тех, кто подобно Пуанкаре или Гильберту оставляет почти во всех его областях печать своего гения, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение.

Н. БУРБАКИ. Архитектура математики

НЕ БОЛЕЕ ОДНОЙ ЧЕТВЕРТОЙ ...

Еще при жизни Джон фон Нейман стал легендой. Одни восхищались безупречной логикой его рассуждений и сравнивали его с идеальной логической машиной с тщательно подогнанными шестеренками. Другим импонировали присущие мышлению фон Неймана блеск и изящество. «Слушая фон Неймана, начинаешь понимать, как должен работать человеческий мозг»,— говорили наиболее восторженные поклонники его таланта. Третьих восхищали умение производить в уме сложнейшие вычисления и инженерная хватка, несколько неожиданная у математика, мышление которого, даже по мнению его искушенных коллег, отличалось особой абстрактностью.

Джон фон Нейман принадлежал к редкому в наши дни типу математика-универсала, презирающего искусственные перегородки между отдельными областями своей древней, но вечно юной науки, воспринимающего ее как единый живой организм и свободно переходящего в своем творчестве от одного ее раздела к другому, на первый взгляд весьма далекому от первого, но в действительности связанного с ним нерасторжимыми узами внутреннего единства.

Размышляя в одной из своих статей над характерными особенностями интеллектуальной деятельности математика, фон Нейман заметил: «Хороший физиктеоретик и в наши дни может активно владеть не более чем половиной своего предмета. Сомневаюсь, чтобы кто-нибудь из живущих ныне математиков был тесно связан хотя бы с четвертой частью математики». Сам фон Нейман принадлежал к числу тех редчайших исключений из распространенного типа узкого специалиста, для которых эта оценка неверна. Если оставить в стороне топологию и теорию чисел, то в остальной части современной математики вряд ли найдется область, которая бы в той или иной степени не испытала на себе влияние идей фон Неймана. Более того, среди многочисленных разделов современной математики немало таких, которые возникли и в значительной мере обрели лицо в трудах фон Неймана.

Вильгельм Оствальд различал среди деятелей науки два типа: классиков и романтиков. Первых можно уподобить мельнице, тщательно перемалывающей логическими жерновами исходные идеи — «засыпку», чтобы извлечь из нее как можно более далекие следствия и довести теорию до пределов возможной полноты и совершенства. Вторых скорее следует сравнивать с генераторами новых идей. Высказав идею, они быстро утрачивают к ней интерес, сколь бы блестящей она ни была, и не принимают участия в ее дальнейшей разработке.

Гигантская фигура фон Неймана не укладывается в прокрустово ложе оствальдовской (как, впрочем, и любой другой) классификации. Несомненный классик, фон Нейман обладал пылкой фантазией и не менее пылким темпераментом романтика и подарил математическому миру так много великолепнейших идей, что его можно назвать классиком в смысле Оствальда лишь при весьма существенных оговорках. Вместе с тем фон Нейман был слишком классиком, чтобы с безразличием относиться к судьбе намеченной им теории и предоставить другим развивать высказанные им идеи.

Джон фон Нейман был и остается классиком и в ином, более высоком значении этого слова. Шесть томов посмертного издания его трудов, содержащие далеко не все работы выдающегося математика современности, не стали надгробным памятником его идей. Работы фон Неймана имеют непреходящее значение.

Отвечая в 1954 г. на анкету Национальной академии наук США, фон Нейман назвал три своих наивысших научных достижения: математическое обоснование квантовой механики, теорию неограниченных операторов и эргодическую теорию. В этой оценке не только проявление личных вкусов фон Неймана, но и щедрость гения — многое из того, что фон Нейман не включил в список своих лучших достижений, вошло в золотой фонд математической науки и могло бы по праву обессмертить имя своего создателя. Достаточно сказать, что среди «отвергнутых» работ оказались и частичное решение (для локально-компактных групп) знаменитой пятой проблемы Гильберта, и теория игр, и основополагающие работы по теории автоматов.

Широкий спектр математических интересов и научных достижений фон Неймана представлял собой настолько разительный контраст с унылой картиной всеобщей узкой (а иногда и чрезмерно узкой) специализации, что не только историки науки, но и многие активно работающие математики пытались найти объяснение этому уникальному явлению. Вот что, например, говорит по этому поводу известный математик С. Улам, лично знавший Джона фон Неймана и проработавший с ним многие годы: «Странствия фон Неймана по многочисленным разделам математической науки не были следствием снедавшего его внутреннего беспокойства. Они не были вызваны ни стремлением к новизне, ни желанием применить небольшой набор общих методов к множеству различных частных случаев. Математика в отличие от теоретической физики не сводится к решению нескольких центральных проблем. Стремление к единству, если оно зиждется на чисто формальной основе, фон Нейман считал обреченным на заведомую неудачу. Причина его неуемной любознательности крылась в некоторых математических мотивах и в значительной мере была обусловлена миром физических явлений, который, насколько можно судить, еще долго не будет поддаваться формализации.

...Своими неустанными поисками новых областей применения и общим математическим инстинктом, одинаково безошибочно действующим во всех точных науках, фон Нейман напоминает Эйлера, Пуанкаре или, если обратиться к более поздней эпохе, Германа Вейля. Не следует, однако, упускать из виду, что разнообразие и сложность современных проблем во много раз превосходят то, с чем сталкивались Эйлер и Пуанкаре».

Мир физических явлений был для фон Неймана тем компасом, по которому он выверял свой курс в безбрежном океане современной математики, тонкая интуиция позволяла ему предугадывать, в каком направлении надлежит искать неизвестные земли, а высокий научный потенциал и виртуозное владение техникой — преодолевать трудности, которые в изобилии встречаются на пути каждого открывателя нового.

Единого определения математики не существует. Сколь ни богат выбор различных типов определений в логике, ни один из них не позволяет полностью охарактеризовать неуловимую сущность математики. Например, широко известное определение математики через ближайший род и видовое отличие «Математика — дедуктивная наука, занимающаяся изучением...» неполно хотя бы потому, что дедуктивный характер присущ традиционной форме изложения математических результатов, т. е. математике «готовой». В процессе поиска доказательства теоремы математик следует примеру естествоиспытателя и широко использует индуктивные рассуждения, аналогию и т. п. Перечень того, чем занимается наука, именуемая математикой, предусмотрительно замененный многоточием, обречен на неполноту, сколь бы длинным он ни был. Неполно и остенсивное определение математики: мы не можем указать перстом на нечто и сказать, что это и есть математика (работы одного математика, по фон Нейману, имеют отношение не более чем к одной четвертой всей математики, работы различных математиков с необходимостью пересекаются и не образуют «полного покрытия» математики). Неполны и все другие определения математики: через отношение, противоположность, абстракцию, генетическое определение, семантическое и т. д.

Не будет преувеличением сказать, что у каждого крупного математика складывается своя собственная концепция математики, не часто формулируемая в явном виде, но дающая ключ к пониманию его творчества.

Выступая в июне 1933 г. в Оксфорде со спенсеровской лекцией «О методе теоретической физики», Альберт Эйнштейн высказал следующий совет: «Если вы хотите узнать у физиков-теоретиков что-нибудь о методах, которыми они пользуются, я советую вам твердо придерживаться следующего принципа: не слушайте, что они говорят, а лучше изучайте их работы. Тому, кто в этой области что-то открывает, плоды его воображения кажутся столь необходимыми и естественными, что он считает их не мысленными образами, а заданной реальностью. И ему хотелось бы, чтобы и другие считали их таковыми».

Математики в своей работе имеют дело с абстракцией еще более высокого порядка, чем физики-теоретики, предмет их рассмотрений удален от реальности на еще большее «расстояние», и поэтому могло бы показаться, что математики в еще большей степени, чем физики-теоретики, склонны считать реальностью порождения своего разума.

Однако обратившись к трудам фон Неймана, мы увидим иную картину.

Испытав в молодые годы сильное влияние гильбертовской аксиоматической школы, Джон фон Нейман, как правило, начинал свою работу, к какой бы области она ни относилась, с составления перечня аксиом. Наглядные представления о предмете рассмотрения заменялись при этом схематическим описанием наиболее существенных его свойств, и только эти свойства использовались в последующих рассуждениях и доказательствах.

Джон фон Нейман свободно парил в разреженной атмосфере абстракций, не прибегая в отличие от многих других математиков к наглядным образам. Абстракция была его стихией. Отмечая эту особенность творческого почерка фон Неймана, С. Улам писал: «Небезынтересно заметить, что во многих математических разговорах на темы, связанные с теорией множеств и родственными ей областями математики, явственно ощущалось формальное мышление фон Неймана. Большинство математиков, обсуждая подобные проблемы, исходят из интуитивных представлений, основанных на геометрических или почти осязаемых картинах абстрактных множеств, преобразований и т. д. Слушая фон Неймана, вы живо ощущали, как последовательно он оперирует с чисто формальными умозаключениями. Этим я хочу сказать, что основа его интуиции, позволявшей ему формулировать новые теоремы и отыскивать доказательства (как, впрочем, и основа его «наивной» интуиции), принадлежала к типу, который встречается гораздо реже. Если бы мы, следуя Пуанкаре, разделили математиков на два типа — на обладающих зрительной и слуховой интуицией, то Джонни, по всей видимости, принадлежал бы ко второму типу. Однако его «внутренний слух» был весьма абстрактным. Речь шла скорее о некоей дополнительности между формальными наборами символов и игрой с ними, с одной стороны, и интерпретацией их смысла — с другой. Различие между тем и другим в какой-то мере напоминает мысленное представление реальной шахматной доски и мысленное представление последовательности ходов, записанных в шахматной нотации».

В полной мере владея обширным арсеналом современной математики, являясь творцом многих ее разделов, фон Нейман был глубоко убежден в плодотворности, более того — в необходимости связи математики с естествознанием, в проверке «качества» вводимых математиками понятий.

Свое понимание существа математики, ее проблем, методов, генезиса и места в кругу других наук и ее взаимосвязи с науками о природе, свое кредо фон Нейман изложил в статье «Математик». Это не просто декларация. Наиболее существенные положения статьи весомо подкрепляются всем математическим творчеством фон Неймана. В ней, в частности, говорится следующее:

«Самая жизненно важная отличительная особенность математики состоит, по-моему, в ее совершенно особой связи с естественными науками или, если рассматривать все в более общем плане, с любой наукой, интерпретирующей опыт на более высоком уровне, нежели чисто описательный.

Большинство людей, математиков и нематематиков, согласятся с тем, что математика не является эмпирической наукой или что она по крайней мере по образу действий отличается в некоторых весьма важных отношениях от методов эмпирических наук. Тем не менее развитие математики весьма тесно связано с естественными науками. Один из ее основных разделов — геометрия — зародился как естественная, эмпирическая наука. Некоторые из наиболее ярких идей современной математики (я убежден, что это — ее лучшие идеи) отчетливо прослеживаются до своих истоков в естественных науках. Математические методы пронизывают «теоретические» разделы естественных наук и доминируют в них. Главный критерий успеха в современных эмпирических науках все в большей мере усматривают в том, насколько эти науки оказываются в сфере действия математического метода или почти математических методов физики. Неразрывная цепь последовательных псевдоморфоз, пронизывающая естественные науки, сближающая их с математикой и почти отождествляемая с идеей научного прогресса, становится все более очевидной. В биологию во всевозрастающей степени проникают химия и физика, в химию — экспериментальная и теоретическая физика, в физику — наиболее изощренные по своей математической форме методы теоретической физики.

Природа математики обладает весьма замечательной двойственностью. Эту двойственность необходимо осознать, воспринять и включить ее в круг представлений, неотъемлемых от предмета. Эта двуликость присуща лицу математики, и я не верю, что можно прийти к какому-нибудь упрощенному единому взгляду на математику, не пожертвовав при этом существом дела.

...Я считаю, что довольно хорошее приближение к истине (которая слишком сложна, чтобы допускать что-нибудь, кроме аппроксимации) состоит в следующем. Математические идеи берут свое начало в эмпирике, но генеалогия их подчас длинна и неясна. Но коль скоро идеи эти возникли, они обретают независимое, самостоятельное существование. Их лучше сравнивать с художественными произведениями, подчиняющимися чисто эстетическим оценкам, чем с чем-либо другим и, в частности, с эмпирическими науками. Однако здесь имеется одно обстоятельство, на которое, по моему убеждению, необходимо обратить особое внимание. Когда математическая дисциплина отходит достаточно далеко от своего эмпирического источника, а тем более когда она принадлежит ко второму или третьему поколению и лишь косвенно вдохновляется идеями, восходящими к «реальности», над ней нависает весьма серьезная опасность. Она все более и более превращается в бесцельное упражнение по эстетике, в искусство ради искусства. Это не обязательно плохо, если вокруг данной дисциплины имеются другие родственные разделы математики, имеющие более тесные связи с эмпирическими науками, или если данная дисциплина находится под влиянием людей с исключительно хорошо развитым вкусом. Но существует серьезная опасность, состоящая в том, что математическая дисциплина начнет развиваться по линии наименьшего сопротивления, что поток вдали от источника разделится на множество мелких рукавов и что соответствующий раздел математики обратится в беспорядочное нагромождение деталей и всякого рода сложностей. Иначе говоря, на большом расстоянии от эмпирического источника или в результате чересчур абстрактного «инбридинга»* математической дисциплине грозит вырождение. При появлении того или иного раздела математики стиль обычно бывает классическим. Когда же он обретает признаки перерождения в барокко, это следует расценить как сигнал опасности.

...При наступлении этого этапа единственный способ исцеления, на мой взгляд, состоит в том, чтобы возвратиться к источнику и впрыснуть более или менее прямо эмпирические идеи. Я убежден, что это всегда было необходимо для того, чтобы сохранить свежесть и жизненность математической теории, и что это положение остается в силе и в будущем».

* Инбридинг — скрещивание близкородственных форм. Фон Нейман имеет в виду отрицательные последствия инбридинга: пониженную жизнеспособность потомства, повышенную заболеваемость наследственными болезнями, врожденные уродства и высокую смертность в детском возрасте.

НАЧАЛО ПУТИ

Старший из трех сыновей банкира Макса фон Неймана Янош (которого в Цюрихе, Гамбурге и Берлине называли Иоганном, а после переезда в США стали называть Джоном, а еще чаще — дружески — Джонни) родился 28 декабря 1903 г. в Будапеште, втором по величине и значению после Вены культурном центре бывшей Австро-Венгерской империи. В юные годы Янош занимался дома со специально приглашенными педагогами, а в возрасте 10 лет поступил в одно из лучших учебных заведений того времени — лютеранскую гимназию.

Это было необычное учебное заведение. Руководство школы уделяло развитию личности учащихся не меньше внимания, чем прохождению обязательной программы. Преподаватели занимались, хотя и в скромных масштабах, научной работой, придерживались прогрессивных педагогических принципов, и многие выпускники школы, став взрослыми, не раз с признательностью вспоминали своих наставников.

Яркая математическая одаренность фон Неймана проявилась еще на школьной скамье. По свидетельству однокашников, он в школьные годы мог часами с увлечением говорить на математические темы. В проделках класса, вспоминает один из соучеников фон Неймана по гимназии Е. Вигнер, удостоенный впоследствии Нобелевской премии по физике, он принимал участие, «если можно так выразиться, не от всей души, а лишь для того, чтобы не выделяться. У него было несколько друзей, и он пользовался всеобщим уважением».

Математика — наука молодых. Многие выдающиеся математики получили свои наиболее выдающиеся результаты, едва переступив порог второго десятилетия. Сам фон Нейман, вспоминает С. Улам, считал, что первичные («богом данные») математические способности достигают наивысшего развития к 26 годам, уступая затем место более прозаической профессиональной изощренности, достигаемой многократными упражнениями. Возрастающая с годами квалификация как бы подслащивает пилюлю, компенсируя математика за постепенную утрату подлинного дара. Став взрослее, замечает Улам, фон Нейман медленно поднимал свою оценку «критического возраста» математика.) Именно поэтому для математика и физика-теоретика как представителя наиболее математизированной области естествознания чрезвычайно важна высокая «начальная скорость» — раннее развитие природных способностей.

Так же, как и великому физику современности Энрико Ферми, фон Нейману необычайно повезло. Обоим в юности посчастливилось встретить человека, сумевшего распознать в любознательном мальчишке гения и сделавшего все, чтобы развить яркое дарование. У Энрико Ферми это был инженер Амидей, у Яноша фон Неймана — преподаватель математики Ласло Ратц.

Мыслящий широко и нешаблонно, этот педагог умел прививать ученикам вкус к своему предмету. (Выступая с ответной речью после вручения Нобелевской премии, Вигнер с благодарностью упомянул имя своего учителя.) Осознав степень одаренности фон Неймана, Ласло Ратц справедливо рассудил, что столь необычный ученик требует и необычных методов обучения, и ввел Яноша в небольшой, но блестящий кружок будапештских математиков того времени, который возглавлял духовный отец венгерских математиков Липот Фейер. Огранка молодого таланта была поручена ассистенту Будапештского университета М. Фекете, а общее руководство взял на себя выдающийся педагог, профессор Йожеф Кюршак.

Творческая атмосфера университета, беседы и сотрудничество с активно работающими («настоящими») математиками, благожелательное внимание со стороны Фейера («Величайший Янчи* нашей страны» — таков был его поистине пророческий отзыв о фон Неймане) сыграли в формировании фон Неймана-математика не меньшую роль, чем штудирование университетских курсов. К моменту получения аттестата зрелости Янош фон Нейман пользовался в математических кругах установившейся репутацией молодого дарования редкостной силы. Его первая печатная работа (написанная совместно с М. Фекете) «О расположении нулей некоторых минимальных полиномов» вышла в свет, когда ее автору едва минуло 18 лет.

По окончании гимназии перед фон Нейманом, так же как и перед его сверстниками, встал важный вопрос: «Кем быть?» Однако для Яноша фон Неймана этот вопрос имел несколько иное значение, чем для других выпускников гимназий. Для юноши со столь незаурядными способностями и рано определившимися интересами речь шла не о выборе призвания, ибо этот выбор был предрешен заранее. Речь шла о выборе профессии, способной удовлетворить не столько чаяниям сына, сколько критериям отца: профессию математика Макс фон Нейман не считал достаточно «надежной», способной обеспечить будущее своего первенца, и настоял, чтобы тот приобрел более «земную» профессию инженера-химика. Разумеется, Янош, вкусивший первые радости математического творчества, принявший посвящение (хотя и неформальное) в математики, не мог представить себе жизнь без занятия любимой наукой. На семейном совете было решено, что Янош поступит в Федеральную высшую техническую школу в Цюрихе, где будет изучать химию, и одновременно на математический факультет Будапештского университета.

Необычный это был студент! Академические свободы и, в частности, вольное посещение лекций он трактовал весьма своеобразным способом: появлялся в Будапеште лишь в конце семестра, чтобы сдать очередные экзамены, и уезжал в Цюрих или в Берлин, но отнюдь не для того, чтобы углубленно изучать химию, призванную по замыслу отца снискать ему хлеб насущный. Основная часть времени уходила на подготовку к печати своих работ, беседы с коллегами-математиками (отсутствие диплома у талантливого юноши, разумеется, не мешало им называть его своим коллегой), посещение семинаров.

У фон Неймана-студента не было учителя в высоком значении этого слова. Фон Нейман не вышел из школы кого-

* Уменьшительное от Яноша.

нибудь из великих математического мира. Он был автодидактом, черпая необходимое из специальной литературы и в живом общении с другими математиками. Вспоминая впоследствии цюрихский период своей жизни, фон Нейман считал, что особенно много почерпнул у двух математиков: Эрхарда Шмидта и Германа Вейля. Подобно многим выдающимся математикам, фон Нейман незаметно для постороннего глаза, «скрытно» преодолел период ученичества и превратился в зрелого мэтра, владеющего всеми тайнами своей профессии. Общение молодого фон Неймана даже с математиком такого ранга, как Герман Вейль, происходило скорее «по горизонтали», чем «по вертикали», и было полезно для обеих сторон. Известно, что когда Вейлю понадобилось среди семестра срочно отлучиться, то чтение курса вместо него продолжил фон Нейман.

Гений — это не только исключительная одаренность, но и исключительная работоспособность. Фон Нейман был наделен и тем и другим. Много лет спустя Клара фон Нейман-Эккарт сказала о своем муже: «Когда его что-нибудь интересовало, работоспособность его становилась практически безграничной». Хотя в годы цюрихско-будапештского периода внешний «выход» был сравнительно невелик, проделанная работа была поистине титанической, и результаты ее не замедлили сказаться. Именно в эти ученические годы фон Нейман приобщился к тому, что составляет подлинную математическую культуру, без чего невозможна творческая работа в математике (химия никогда по-настоящему не занимала его помыслов). Именно тогда в нем осуществился тот синтез накопленных знаний, который впоследствии позволил ему сформировать свой собственный взгляд на математику и выработать своеобразие, отличавшее творческий почерк фон Неймана в зрелые годы.

Требования, которые предъявлял к себе фон Нейман, были неизмеримо выше официальных требований к студентам и соискателям ученых степеней. В 1925 г. он без видимого напряжения получает диплом инженера-химика в Цюрихе и успешно защищает диссертацию «Аксиоматическое построение теории множеств» на звание доктора философии в Будапештском университете (по словам Е. Вигнера, «диссертация и экзамены не потребовали от него (фон Неймана) сколько-нибудь значительных усилий»). Воля отца выполнена, и отныне математика безраздельно завладевает всеми его мыслями.

Не обремененный академическими обязанностями, молодой доктор отправляется совершенствовать свои знания в Мекку математиков и физиков того времени — Геттингенский университет. В стенах Георгия Аугусты* в Геттингене в то время читали лекции люди, чьи имена стали гордостью науки: Ф. Клейн, К. Рунге, Э. Ландау, Д. Гильберт, Э. Цермело, Г. Вейль, Г. Минковский, М. Борн, Ф. Франк... Такого созвездия знаменитостей не было ни в одном другом университете мира. Стараниями Феликса Клейна при университете была собрана великолепная математическая библиотека. Получить приглашение в Геттинген для чтения лекций считалось высокой честью, и в списке приглашенных лекторов мы встречаем блестящие имена: Г. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Зоммерфельд, Н. Бор, М. Планк, П. Эренфест...

Особенно благоприятной для формирования научной молодежи была атмосфера семинаров, далекая от чопорности и академизма, пронизанная одним стремлением — постичь истину.

Для фон Неймана исключительное значение имело общение с одним из крупнейших математиков современности Давидом Гильбертом. Интерес фон Неймана к проблемам аксиоматики теории множеств, проявившийся в выборе темы докторской диссертации, позволил ему легко найти общий язык с главой Геттингенского математического института. Из общения с Гильбертом и, в частности, из работы в знаменитом гильбертовском «Семинаре о материи» фон Нейман вынес весьма важное для себя заключение: математика не должна ограничиваться ролью поставщика решений различных задач, возникающих в естественных науках; наоборот, естествознание должно стать неисчерпаемым источником постановок новых чисто математических проблем.

* Георгия Аугуста — актовый зал Геттингенского университета.

Именно в Геттингене фон Нейман познакомился с идеями зарождавшейся тогда квантовой механики. Проблемы математического обоснования нового раздела физики захватили фон Неймана. Вслед за статьей «Об основаниях квантовой механики», написанной совместно с Д. Гильбертом и Л. Нордгеймом, в знаменитых геттингенских Nachrichten появляется серия работ фон Неймана «Математическое обоснование квантовой механики», «Теоретико-вероятностное построение квантовой механики» и «Термодинамика квантовомеханических систем».

В 1927 г. фон Нейман становится приват-доцентом Берлинского, а с 1929 г.— Гамбургского университета.

ПО КОГТЯМ УЗНАЮТ ЛЬВА

Период с 1927 по 1929 г. в жизни фон Неймана знаменателен не только «продвижением по службе». Именно в эти годы фон Нейман выполнил основополагающие работы трех больших циклов: по теории множеств, теории игр и математическому обоснованию квантовой механики.

«Крайне простые в своей сущности, не требующие никаких предварительных познаний идеи и выводы великого основоположника теории множеств Георга Кантора являют собой образец подлинно математического стиля. Настоящая математика заключается не в нагромождении искусственных вычислительных приемов, а в умении получить нетривиальные результаты путем размышления при минимуме применяемого аппарата» — так охарактеризовали теорию множеств авторы известной популярной книги «Числа и фигуры» Г. Радемахер и О. Теплиц. Современники Г. Кантора встретили его работы гораздо более сдержанно.

«Наивная» теория множеств Г. Кантора вводила в математику не только новые фундаментальные понятия, но и новый тип рассуждений, при помощи которых создатель теории доказывал ее основные теоремы. Необычность этих рассуждений состояла в том, что Г. Кантор, оперируя с бесконечными множествами, систематически применял логические приемы и принципы, которыми до него математики имели обыкновение пользоваться лишь при рассмотрении конечных множеств. Недоверие, с которым определенная часть математиков восприняла результаты Г. Кантора, было отчасти обусловлено именно этим обстоятельством (хотя ни один из противников создателя теории множеств не мог указать ошибку в его рассуждениях).

Кроме того, вскоре выяснилось, что рассуждения, весьма близкие к тем, которые использовал в своих работах Г. Кантор, приводят к парадоксам, или антиномиям. Так, в 1897 г. (основные работы Г. Кантора по теории множеств вышли в 1872—1884 гг.) был открыт парадокс наибольшего ординального числа (парадокс Бурали — Форти), а в 1903 г. Б. Расселл поразил математический мир своим «парадоксом брадобрея».

Обсуждение парадоксов не только породило долгие споры и разделило математиков на несколько «враждующих» лагерей, но и способствовало второму рождению теории множеств — на сей раз не «наивной», а строгой, формализованной. Сколь бы крайних взглядов на судьбы теории множеств и причины возникающих в ней парадоксов ни придерживались представители различных направлений в основаниях математики, всем было ясно, что основные предпосылки теории подлежат уточнению, рассуждения, приводящие к парадоксальным заключениям, требуют особого внимания, и потому их следует отделить от «безопасных» рассуждений, не порождающих антиномий, и что наилучшим средством для достижения ясности в спорных вопросах обоснования теории множеств может служить аксиоматический метод. Успехи, достигнутые Д. Пеано в аксиоматизации арифметики и Д. Гильбертом в аксиоматизации евклидовой геометрии, позволяли надеяться, что аксиоматическое построение теории множеств окажется не менее полезным.

Аксиоматика теории множеств в двух независимых вариантах была создана в 1908 г. Б. Расселлом и Э. Цермело, однако понадобилось еще одно десятилетие, прежде чем теоретико-множественные представления проникли в сознание большинства математиков и стали его неотъемлемой частью. Для нового поколения математиков, вступивших на научное поприще в начале 20-х годов нашего столетия, теоретико-множественное мышление было не только естественным, но и характерным. Именно к этому поколению математиков и принадлежал фон Нейман.

Первая работа фон Неймана по аксиоматической теории множеств вышла в свет в 1923 г. Она называлась «К введению трансфинитных ординальных чисел» и была опубликована в трудах Сегедского университета.

Критический ум фон Неймана не мог довольствоваться принятием существующих систем аксиом теории множеств. Фон Нейман разработал свою систему аксиом и изложил ее в докторской диссертации и двух статьях. О том, как была воспринята работа фон Неймана, убедительно свидетельствует письмо одного из ведущих специалистов по теории множеств и основаниям математики А. Френкеля к С. Уламу: «Году в 1922—23 в бытность мою профессором Марбургского университета я получил от профессора Эрхарда Шмидта из Берлина (обратившегося ко мне по поручению редакции журнала Mathematische Zeitschrift) рукопись неизвестного мне автора Иоганна фон Неймана под названием «Аксиоматическое построение теории множеств». Эта работа оказалась его докторской диссертацией и была опубликована лишь в 1928 г. (в 27-м томе журнала). Меня просили ознакомиться с работой и отрецензировать ее, так как членам редколлегии она показалась непонятной. Не стану утверждать, будто я полностью разобрался в присланной мне работе, но и того, что я понял, было достаточно, чтобы воздать должное ее выдающимся достоинствам и «по когтям узнать льва». Дав положительный отзыв, я пригласил молодого ученого навестить меня (в Марбурге). Мы подробно обсудили работу, и я настоятельно порекомендовал ему подготовить почву для понимания его весьма специальной работы изданием менее строгого очерка, в котором излагались бы новый подход к проблеме и основные следствия, извлекаемые из него. Фон Нейман написал такую «разъяснительную» работу под названием «К вопросу об аксиоматическом построении теории множеств», и я опубликовал ее в 1925 г. в Journal für Mathematik (т. 154), где в ту пору занимал пост заместителя главного редактора».

Поставив перед собой цель «дать логически безупречное аксиоматическое изложение теории «множеств», фон Нейман построил замечательную систему аксиом, не уступающую по простоте и «прозрачности» знаменитой гильбертовой системе аксиом евклидовой геометрии. Полный перечень аксиом системы фон Неймана занимает немногим более одной страницы печатного текста! Вводимые объекты подразделяются на два типа: один соответствует множествам, другой — свойствам множеств в «наивной» теории множеств.

Система аксиом фон Неймана принадлежит к числу высших достижений современной теории множеств. Ее исследованию, усовершенствованию и применениям посвящены многочисленные работы.

В «популярной» работе фон Неймана «К вопросу об аксиоматическом построении теории множеств», предваряющей публикацию его докторской диссертации, подобно сюите на тему крупномасштабного музыкального произведения, помимо подробностей, представляющих интерес для специалистов, содержится данная фон Нейманом характеристика различных направлений в основаниях математики, проливающая дополнительный свет на его концепцию математики. По свидетельству С. Улама, «фон Нейман проводит грань между двумя принципиально различными направлениями, избранными математиками, чтобы избежать антиномий Бурали — Форти, Ришара и Расселла. Одна группа (в нее входят Б. Расселл, Р. Кениг, Л. Брауэр и Г. Вейль) придерживается более радикальной точки зрения, согласно которой появление парадоксов указанного типа можно предотвратить, сузив логические основы всех точных наук. По мнению фон Неймана, деятельность представителей этой группы производит впечатление не созидающей, а опустошающей. Фон Нейман возражает и против предложенной Расселлом идеи построения всей системы математики на весьма проблематичной аксиоме сводимости и протестует против предложения Вейля и Брауэра отказаться от того, что, по его мнению, составляет значительную часть математики и теории множеств.

Гораздо более сочувственное отношение встречает у фон Неймана деятельность другой, менее радикальной группы (в нее, в частности, входят Э. Цермело, Л. Френкель и А. Шенфлис). Работу этих математиков, так же как и свою собственную, фон Нейман считает далекой от завершения, поскольку выбор аксиом в известной мере произволен. Он признает, что избранный представителями менее радикального представления подход не позволяет доказать невозможность возникновения антиномий, но поскольку «наивную» теорию множеств нельзя принимать слишком всерьез, то по крайней мере ее большую часть удается «реабилитировать», представив ее в виде формальной системы, причем смысл термина «формальный» можно определить вполне точно.

Вклад фон Неймана в аксиоматическую теорию множеств далеко не исчерпывается его докторской диссертацией и двумя уже названными статьями.

В работе «Об определении через трансфинитную индукцию и родственных вопросах общей теории множеств» (1928) фон Нейман вновь возвращается к проблеме введения ординальных чисел, рассмотренной им ранее в работе 1923 г., возвращается, чтобы на этот раз дать строгое аксиоматическое изложение теории.

В работе «Об одной проблеме непротиворечивости аксиоматической теории множеств» фон Нейман показал, что одна из «нетрадиционных» аксиом в предложенной им системе выводима из некоторых аксиом, лежащих в основе других систем. Поскольку ранее было показано, что эти аксиомы, в свою очередь, выводимы из аксиомы фон Неймана, то полученный результат означал, что «необычная» аксиома эквивалентна обычным (в других системах).

Большая статья фон Неймана «К гильбертовой теории доказательства» (1927) посвящена важной проблеме непротиворечивости математики. Это глубокое исследование проникнуто духом гильбертовой программы построения всей математики финитными методами (иначе говоря, к рассмотрению должны допускаться лишь объекты, которые могут быть построены за конечное число шагов). Отметив неудовлетворительность решений проблемы непротиворечивости математики, предложенных другими авторами, фон Нейман, по словам С. Улама, «почти достиг предела того, что можно достичь, опираясь на гильбертову программу, т. е. строго финитными методами. Более того, фон Нейман высказал предположение о том, что аналогичным методом можно доказать непротиворечивость всего анализа. В настоящее время трудно отделаться от впечатления, что идеи, рожденные в трудах Гильберта и его школы, развитые со столь высокой степенью совершенства и затем революционизированные Геделем, еще не исчерпали себя. Быть может, мы находимся в середине другого великого процесса эволюции: «наивный» подход к теории множеств и формальные математические попытки охватить наши интуитивные представления о бесконечности в будущем, как мне кажется, сольются в «сверхтеории множеств». В истории математики неоднократно бывало, что интуиция, или, лучше сказать, смутные предчувствия ведущих математиков относительно проблем современной им науки, впоследствии входили в качестве составных частей в формальную «сверхсистему», предметом рассмотрения которой служило самое существо проблем исходной системы».

Интерес фон Неймана к теории множеств не угасал и в последующие годы. Многие работы фон Неймана по теории функций действительного переменного, общей теории меры, абстрактной теории автоматов зиждятся на отточенной теоретико-множественной интуиции их автора и могут рассматриваться как далеко идущие обобщения результатов, известных ранее лишь для евклидовых пространств, на другие топологические и алгебраические структуры.

Весьма важным для дальнейшего развития математики оказался и второй «цикл», состоящий из одной-единственной работы «К теории стратегических игр», опубликованой в 1928 г. Давно уже ставшая классической и породившая огромное количество литературы, эта работа содержала доказательство знаменитой теоремы о минимаксе, ставшей краеугольным камнем возникшей гораздо позже теории игр.

Что утверждает теорема фон Неймана?

Предположим, что двое играют в некую игру, по правилам которой выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (игра с нулевой суммой), и каждый из игроков волен выбирать из конечного, хотя, быть может, и очень большого, числа стратегий (конечная игра). Выбирая стратегию, игроки при оценке своих шансов на выигрыш (проигрыш) исходят из лестного для противника предположения о том, что тот всегда отвечает наивыгоднейшим для себя ходом. Следовательно, какой бы стратегии ни придерживался игрок, он всегда может рассчитывать лишь на ту ответную стратегию, при которой его выигрыш минимален (проигрыш максимален). Не желая рисковать, игрок должен остановить свой выбор на такой стратегии, при которой минимальный выигрыш максимален (соответственно максимальный проигрыш минимален).

Доказанная фон Нейманом теорема утверждает, что для любой конечной игры (двух игроков) с нулевой суммой существует «устойчивая» пара стратегий, для которых минимальный проигрыш одного игрока совпадает с максимальным выигрышем другого. Устойчивость стратегий означает, что каждый из игроков, отклоняясь от оптимальной стратегии, лишь ухудшает свои шансы и, внемля голосу рассудка, предпочитает вернуться к оптимальной стратегии.

В момент выхода в свет работы фон Неймана неожиданным было не только доказательство теоремы о минимаксе (в котором фон Нейман использовал теорему о неподвижной точке), но и утверждение теоремы. Лишь четверть века спустя математический мир по достоинству оценил небольшую работу фон Неймана. О том, сколь высоко ценил теорему о минимаксе сам фон Нейман, свидетельствует следующий факт.

Фон Нейман редко высказывал критические замечания о работах других математиков в категорической форме, предпочитая обычно отшучиваться фразой: «Пусть судят Радамант и Минос*», и считал безусловным табу высказывание каких-либо оценок своих работ. (Как показывает опыт французского издания трудов А. Пуанкаре, прокомментированных раздел за разделом самим А. Пуанкаре, разбор собственных трудов может быть вполне объективным.) Лишь однажды этот запрет был нарушен в связи с приоритетным спором, возникшим между фон Нейманом и французским математиком М. Фреше, который назвал Э. Бореля создателем теории игр.

Небольшая заметка фон Неймана «Замечания по поводу работ Э. Бореля» не только разъясняет точку зрения автора теоремы о минимаксе на предмет спора, но и служит убедительным свидетельством тех высоких критериев, которых придерживался в оценке своих работ фон Нейман. В ней, в частности, говорится следующее:

«Я считаю в принципе нежелательным, чтобы любой автор вступал на страницах печати в спор, отстаивая свой «дом родной», поскольку его оценка работы, в которую он внес вклад, с необходимостью субъективна. В данном случае я надеюсь, что мою предвзятость несколько компенсируют чувства дружбы и уважения, которые я питаю к проф. М. Фреше. С высказанной им оценкой развития теории игр я решительно не согласен по следующим причинам.

1. Э. Борель был первым, кто разработал понятие стратегии, как чистой, так и смешанной, хотя в своих рассмотрениях он не вышел за пределы случая симметричной игры двух лиц.

2. Важность этого понятия в его руках была существенно преуменьшена вследствие того, что Э. Борелю не удалось доказать имеющую решающее значение «теорему о минимаксе». Он даже подозревал, что эта теорема неверна. Насколько я могу судить, без теоремы о минимаксе на основе одного лишь определения стратегии теория игр не могла бы существовать. Подозревая, что теорема о минимаксе неверна, Бо-

* Сыновья Европы и Зевса, которым греческая мифология приписывает создание первых законов для жителей Крита. Справедливейшие из людей, Радамант и Минос после смерти стали судьями в подземном царстве.

рель в действительности подозревал, что теория игр в том виде, в каком она известна нам в настоящее время, невозможна.

3. В силу этих обстоятельств Борель вряд ли мог стать «основоположником» теории. Я развил свои соображения по поводу теоремы о минимаксе до того, как прочитал статью Э. Бореля, чьи отрицательные заключения по главному пункту (относительно теоремы о минимаксе, ибо лишь она делает, безусловно, полезными введенные Борелем понятия) могли бы лишь разочаровать меня. Я несколько удивлен тем, что проф. Фреше считает одно лишь желание математизировать понятия, относящиеся к стратегиям, и прямое формальное определение чистой стратегии главным аргументом при установлении «основоположника» теории игр. В течение всего периода, о котором идет речь (фон Нейман имеет в виду 1921—1928 гг.), меня не покидало ощущение, что до того, как доказана теорема о минимаксе, все остальное не заслуживает опубликования.

4. Мне представляется безосновательным высказанное проф. Фреше мнение о том, что фундаментальная теорема о существовании хороших стратегий (ныне общеизвестная под названием теоремы о минимаксе) была широко известна и, следовательно, несущественна. Действительно, сейчас нам известно несколько простых и прямых доказательств этой теоремы с помощью различных, более или менее классических, теорем о выпуклых множествах. Эта взаимосвязь может показаться очевидной тому, кто впервые познакомился с теорией игр после того, как она обрела свою современную форму (О. Моргенштерн и я в своей книге, написанной в 1943 г., руководствуясь дидактическими соображениями, всячески пытались подчеркнуть эту взаимосвязь). Однако в 1921—1938 гг. все обстояло иначе. О том, что теорема о минимаксе и ее связь с теорией выпуклых множеств были тогда далеко не очевидны, свидетельствуют следующие факты:

а) в 1921 г. и позднее Борель подозревал, что теорема о минимаксе или неверна, или может быть неверна;

б) в 1928 г. я доказал эту теорему, обратив внимание на ее связь с теорией неподвижных точек, а не с теорией выпуклых множеств;

в) в 1935 г. я обобщил теорему о минимаксе (имея в виду ее приложения в теории цен и производства), воспользовавшись в еще более явном виде методом неподвижной точки;

г) понадобилось десять лет после опубликования моего первоначального доказательства, прежде чем Ж. Вилль в 1938 г. открыл связь теоремы о минимаксе с выпуклыми множествами;

д) даже сейчас эта связь, как показано после 1945 г. в работах Какутани, Нэша, Брауна и моих, рассказывает о теореме далеко не все или далеко не в простейшем виде.

Широко распространенное и весьма соблазнительное заблуждение состоит в том, что более поздние этапы развития математической теории считаются постфактум более очевидными и убедительными, чем они были до создания теории.

Вряд ли необходимо подчеркивать, что я испытываю лишь чувство восхищения достижениями Э. Бореля и его гением, и для любого математика иметь непосредственное отношение к его работам и трудиться на территории, по которой некогда проходил Борель,— высокая честь. Однако в силу изложенных выше причин мне представляется необоснованным приписывать Э. Борелю, как это намеревается сделать проф. Фреше, создание теории игр (двух лиц)».

Фон Нейман обладал не только виртуозной математической техникой, позволявшей ему без видимых усилий преодолевать трудности и добиваться успеха там, где отступали другие, но и редкой среди математиков способностью воспринимать новые физические идеи. Особенно ярко сочетание этих необычных свойств проявилось в третьем цикле работ, выполненных фон Нейманом все в тот же сказочный по широте тематики и продуктивности период с 1927 по 1929 г.— в математическом обосновании квантовой механики. Героический период становления новой отрасли физики совпал с расцветом творческой активности одного из выдающихся математиков современности лишь по счастливой случайности, но то, что новая теория, едва возникнув, привлекла внимание фон Неймана, было вполне закономерно. Фон Нейман, чьи взгляды на необходимость и плодотворность союза математики и естествознания ныне широко известны, фон Нейман, который, по свидетельству С. Улама, и в зрелые годы неоднократно выражал озабоченность тем, что математика держится в стороне от экспоненциального роста проблем и идей в физических науках, фон Нейман, жаждавший восстановить престиж и ведущую роль математики в формировании мышления современного физика-теоретика, не мог предоставить другим выполнить то, к чему он был призван всеми особенностями своего таланта.

Исаак Ньютон, возводя в своих «Математических началах натуральной философии» здание классической механики, был вынужден прибегнуть к новому математическому аппарату: дифференциальному и интегральному исчислению. Понадобилось почти столетие и труд нескольких поколений ученых, прежде чем этот аппарат был строго обоснован. История квантовой механики не знает разрыва между периодом «штурма» и более спокойным периодом «обживания» завоеванных территорий. То, на что в случае классической механики у блестящей плеяды ученых ушло несколько десятилетий, фон Нейман выполнил в одиночку за два года! И это несмотря на возросшую сложность используемого аппарата и неизмеримо более высокие требования к строгости! Более того, избрав предметом своих рассмотрений едва зародившуюся квантовую механику, математик фон Нейман оказался прозорливее многих физиков, которым «классическая» интуиция и «классическое» мышление мешало воспринимать необычные выводы новой теории.

«Флагманом» цикла работ по математическому обоснованию квантовой механики стала статья «Об основаниях квантовой механики» (1927 г.), написанная фон Нейманом совместно с Д. Гильбертом и Л. Нордгеймом. В основу ее была положена лекция об успехах квантовой теории, прочитанная в зимний семестр 1926—1927 гг. Д. Гильбертом. Как отмечалось в Введении, наиболее существенная часть математических формулировок и доказательств, приведенных в статье, принадлежала фон Нейману.

Первоначально квантовая механика существовала в двух внешне различных математических «ипостасях»: в виде «волновой механики» Э. Шредингера и «матричной механики» В. Гейзенберга, М. Борна и П. Иордана. Эквивалентность их была доказана Шредингером. Иордану и Дираку удалось развить новый подход к математическому описанию квантовой теории в рамках так называемой теории преобразований. «Волновая механика» и «матричная механика» при новом подходе возникали как две частные реализации одной математической структуры. Новый подход, отличавшийся необычайной общностью, и был избран авторами статьи «Об основаниях квантовой механики» в качестве исходного пункта предпринятой ими (исторически первой) попытки строгого изложения квантовой механики.

Статья Гильберта, Нордгейма и фон Неймана стала прологом к циклу из семи работ по математическому обоснованию квантовой механики, выполненных фон Нейманом в 1927—1929 гг. В обобщенном варианте они были изложены в его монографии «Математические основы квантовой механики», вышедшей в 1932 г. в знаменитой «желтой серии» издательства Шпрингера.

Оценивая через много лет значение книги фон Неймана для всего круга проблем, связанных с математическим обоснованием квантовой механики, С. Улам писал: «Помимо огромной дидактической ценности этого труда, излагавшего идеи новой квантовой теории в форме, отвечающей умонастроению математиков и способной пробудить их профессиональный интерес, он представляет собой вклад в науку, имеющий бесспорно первостепенное значение, если рассматривать его как рациональное изложение физической теории, основанной, как первоначально считали физики, на отнюдь не тривиальных и далеко не очевидных соображениях. Хотя утверждать, что в книге фон Неймана вводятся принципиально новые физические идеи, было бы неверно (и квантовая теория, созданная в те годы Шредингером, Гейзенбергом, Дираком и другими, образует не более чем фрагментарный теоретический скелет для еще более поразительных физических явлений, открытых с тех пор), изложение фон Неймана приводит по крайней мере к одной логически и математически прозрачной основе для строгого обсуждения проблем».

Работы фон Неймана — не схоластические упражнения ригориста. Именно в них квантовая механика обрела свой естественный язык — язык операторов, действующих в гильбертовом пространстве состояний. Именно в них была подведена прочная математическая основа под статистическую интерпретацию квантовой механики, введено новое важное понятие матрицы плотности, позволившее развить термодинамику квантовых систем, доказан квантовый аналог H-теоремы Больцмана и эргодической теоремы. Именно в них берет начало другой, не менее известный и значительный цикл работ фон Неймана по теории операторов, далеко выходящий за рамки непосредственных нужд квантовой механики и снискавший фон Нейману заслуженную славу одного из основателей современного функционального анализа.

В статье Гильберта, Нордгейма и фон Неймана квантовая механика излагалась по Дираку — в духе так называемой теории преобразований. Прозрачный и изящный метод Дирака получил широкое распространение, хотя, как это часто бывает с физическими теориями в пору их становления, он не отвечал требованиям математической строгости, «даже если их понизить естественным и разумным образом до обычного в теоретической физике уровня» (фон Нейман).

Дирак исходил из предположения, что любой самосопряженный оператор можно привести к диагональному виду. Поскольку в классе обычных функций операция приведения к диагональному виду осуществима не для каждого оператора, то Дирак пополнил запас обычных функций некоторыми идеальными элементами («фикциями», по меткому выражению фон Неймана) с весьма необычными свойствами. Несобственные функции Дирака (за которыми в отечественной физико-математической литературе закрепилось название «обобщенные функции», или «дельта-функции Дирака», а за рубежом — «распределений») равны нулю всюду, кроме одной точки, и обладают отличным от нуля интегралом Римана от минус до плюс бесконечности. С введением такого рода «монстров» можно было бы временно мириться, если бы они были органически связаны с новой теорией, как мирились некогда современники и ближайшие потомки Ньютона с флюксиями и флюэнтами, на языке которых излагалась новая тогда классическая механика. Но после выхода в свет работы фон Неймана «Математическое обоснование квантовой механики» (1927) стало ясно, что построение новой физической теории отнюдь не обязательно связывать с созданием теории обобщенных функций, отвечающей всем современным требованиям математической строгости*.

Фон Нейман показал, что квантовая механика, по Дираку, допускает весьма естественное обоснование в терминах аксиоматической теории гильбертова пространства и спектральной теории операторов. Выдержав суровую проверку временем, эти идеи фон Неймана вошли в золотой фонд современной теоретической физики.

По фон Нейману, состояния физических систем описываются векторами в гильбертовом пространстве, а измеримые физические величины (положение, импульс, энергия и т. д.) — действующими на эти векторы неограниченными эрмитовыми операторами. Чтобы вдохнуть жизнь в свою схему кванто-

* Обобщенные функции Дирака позволили существенно расширить сферу применимости анализа и стали в руках физиков удобным инструментом решения различного рода задач задолго до того, как обрели «права гражданства» и были включены в арсенал проверенных математических средств. В математике одним из первых ввел обобщенные функции С. Л. Соболев (1935). В работах других математиков (например, С. Бохнера, Дж. Темпла, Я. Микусинского) обобщенные функции рассматривались как пределы последовательностей непрерывных функций или как производные от непрерывных функций. Синтез различных направлений в обосновании обобщенных функций осуществил Лоран Шварц в своем фундаментальном труде «Теория распределений» (1950—1951). Важным этапом в развитии теории обобщенных функций стала знаменитая пятитомная серия монографий И. М. Гельфанда, Н. Я. Виленкина, М. И. Граева.

вой механики, фон Нейману предстояло обобщить результаты своих предшественников (и прежде всего Д. Гильберта, Э. Шмидта и Ф. Рисса) на случай неограниченных операторов. Это далеко не тривиальная задача была блестяще решена фон Нейманом в работе «Общая спектральная теория эрмитовых операторов» (1929), в которой впервые появилось весьма важное понятие гипермаксимального симметрического оператора (наиболее общего эрмитова оператора со спектральным разложением). Независимо от фон Неймана аналогичные результаты были получены М. Стоуном.

Операторная формулировка квантовой механики позволила фон Нейману подвести прочную основу под статистическую интерпретацию квантовомеханических утверждений. Исход измерения физической величины, производимого над системой, которая находится в определенном квантовом состоянии, по фон Нейману, описывается распределением вероятностей, зависящим от вектора этого состояния и спектрального разложения оператора измеряемой величины.

Формула для распределения вероятностей результатов измерения — математический парафраз статистической интерпретации квантовой механики, предложенной в 1926 г. Максом Борном. Именно эта формула послужила для фон Неймана толчком к построению всей квантовой механики на теоретико-вероятностной основе, осуществленному в работе, которая так и называлась: «Теоретико-вероятностное построение квантовой механики» (1927). Именно в этой статье фон Нейман ввел матрицу плотности, ставшую одним из ключевых понятий квантовой статистики. (В современных работах матрицу плотности принято обозначать ϱ. В работе фон Неймана она обозначена U.)

Матрица плотности позволила фон Нейману получить квантовый аналог классической формулы для энтропии и тем самым заложить основы квантовой термодинамики, а позднее сформулировать и доказать для квантовых систем H-теорему и эргодическую теорему.

Значимость вклада, внесенного фон Нейманом в математическое обоснование квантовой механики, тем более велика, что в «героический период» ее становления статистическая интерпретация квантовомеханических утверждений вызывала у многих физиков ностальгию по утраченному детерминизму. Они не верили в «бога, играющего в кости» (А. Эйнштейн). «Классически» мыслящие физики надеялись, что и квантовая механика станет детерминистской теорией, если будут учтены «скрытые параметры», описывающие состояние наблюдателя (не случайно М. Борн был удостоен Нобелевской премии за статистическую интерпретацию квантовой механики много позднее других создателей новой теории).

Фон Нейман, проявив глубокое понимание истинных причин статистического характера квантовомеханических утверждений и недюжинную физическую интуицию, показал, что неопределенность в теоретическом предсказании исхода измерения остается и при переходе к более широкой системе, включающей в себя как объект измерения, так и самого наблюдателя. Статистическая природа квантовомеханических утверждений, по фон Нейману, следует из первых принципов теории и, в частности, из представления квантовомеханических величин операторами в гильбертовом пространстве состояний.

Выходом в свет «Математических основ квантовой механики» (1932), по существу, завершается наиболее напряженный и плодотворный период деятельности фон Неймана по математическому обоснованию квантовой механики. Период прямого обращения к математическим проблемам новой теории сменяется «латентным» периодом изучения ее логической структуры и поисков возможных обобщений алгебраических основ. Лишь дважды фон Нейман публикует работы, отражающие его неугасающий интерес к квантовой механике и современной физике: в 1934 г. выходит в свет статья «Об алгебраическом обобщении квантовомеханического формализма» (написанная в соавторстве с П. Иорданом и Е. Вигнером); в 1936 г. появляется статья «Логика квантовой механики» (написанная совместно с Дж. Биркгофом). В первой работе речь идет об алгебраических структурах на множестве состояний, отличных от традиционной структуры. Во второй работе излагается своеобразное логическое исчисление со значениями истинности, непрерывно распределенными от нуля до единицы.

Во всех остальных публикациях интерес к проблемам квантовой механики, никогда не угасавший окончательно, как бы тлевший под слоем новых интересов и обязанностей, проявляется лишь косвенно. Следы неоднократно предпринимавшихся попыток сформулировать квантовую механику на языке общей теории булевых алгебр или теории структур Биркгофа сохранились лишь в виде разрозненных заметок в архиве фон Неймана. Его работы по проективным геометриям пространств непрерывной размерности, геометриям без точек, так же как и исследования по теории операторов, были инициированы размышлениями над проблемами квантовой механики, неустанными поисками наиболее естественного языка для нее.

В 1929 г. фон Нейман получает приглашение прочитать в течение одного семестра цикл лекций в Принстонском университете.

ДЖОННИ

По другую сторону Атлантики фон Нейман впервые оказался в 1930 г. и, по свидетельству близко знавшего его еще со школьной скамьи Е. Вигнера, сразу «почувствовал себя в общественной и научной атмосфере Принстона, как рыба в воде». Живому и общительному фон Нейману импонировал чуждый условности стиль общения и работы, принятый в одном из лучших университетов Америки и столь разительно контрастировавший с официальностью (чтобы не сказать казенщиной), чопорностью и чинопочитанием, которые царили в высших учебных заведениях Германии того времени.

Вскоре после своего приезда приват-доцент Гамбургского университета Иоганн фон Нейман для многих коллег становится просто Джонни. В этом ласковом уменьшительном от английской транскрипции имени фон Неймана не только отзвук тех теплых чувств, которые питали к фон Нейману его новые сотрудники, но свидетельство его стремления влиться в новую среду. На слух неофита «Джонни» звучит так по-американски.

Приглашение было продлено, а в 1931 г. фон Нейман окончательно расстается с Гамбургским университетом, с тем чтобы принять профессуру в Принстоне. К решению обосноваться в США фон Нейман пришел по зрелом размышлении в прозорливом предвидении ухудшения политической обстановки в Германии, которая не могла не сказаться отрицательно на научной жизни, и после трезвого подсчета шансов на получение профессуры в Германии (по оценке фон Неймана, в обозримом будущем могло открыться не более трех вакансий, в то время как претендентов набиралось более трех дюжин).

Незадолго до своего первого визита в Принстон фон Нейман женился на Мариэтте Кевеши. В 1935 г. у них родилась дочь Марина. Радушие и гостеприимство фон Нейманов, у которых «на огонек» часто собирались и приезжие из Европы, и постоянные обитатели Принстона, надолго запомнились тем, кто имел счастье побывать в доме фон Нейманов. Память об этих вечерах, ставших своеобразной достопримечательностью Принстона, сохранилась и после того, как в 1937 г. брак фон Неймана с Мариэттой Кевеши распался. Из очередной поездки на летние каникулы в Будапешт в 1938 г. фон Нейман вернулся со второй женой — урожденной Кларой Дан. Позднее, в годы второй мировой войны, Клара фон Нейман стала программисткой. Ей принадлежат первые программы для электронных вычислительных машин, в разработку и создание которых ее муж внес неоценимый вклад.

Прибытие фон Неймана в Принстон совпало с важным событием в научной жизни Америки — основанием в Принстоне Института высших исследований (решение о создании института было принято 20 мая 1930 г., но функционировать он начал лишь через два с половиной года — в 1933 г.). По замыслу основателей института А. Флекснера. О. Веблена, их друзей Луи Бамберджера и его сестры миссис Феликс Фулд, взявших на себя финансирование предприятия, он призван «поощрять, поддерживать и опекать изучение науки в старом, широком и недифференцированном смысле этого слова» (Р. Оппенгеймер).

Институт высших исследований, который существует и сейчас,— учреждение весьма необычное. Он сочетает в себе особенности высшего учебного заведения и научно-исследовательского института, отличаясь в то же время от того и другого. От учебного заведения институт отличается отсутствием обязательной учебной программы, свойственного многим университетам стремления охватить как можно больше отраслей современной науки и т. д. От научно-исследовательского института обычного типа Принстонский институт высших исследований отличается отсутствием узкой специализации. Но пожалуй, главное отличие Института высших исследований от учебного заведения и научно-исследовательского института состоит в том, что каждый член института является одновременно и студентом, и преподавателем. Основная цель института заключается в том, чтобы предоставить своим членам возможность заниматься самостоятельной научной работой. Учитывая ограниченные финансовые средства института и сложность создания современных лабораторий, оснащенных по последнему слову техники, основатели института сочли необходимым ограничить его деятельность теоретическими (или, лучше сказать, неэкспериментальными) областями науки. Первоначально тематика института ограничивалась физико-математическими дисциплинами. Впоследствии к Математической школе, объединяющей физиков и математиков, прибавилась Школа исторических исследований, объединяющая гуманитариев.

Во главе Института высших исследований стоит совет попечителей, насчитывающий 15 членов, и избираемый советом директор, несущий всю полноту ответственности за научную деятельность. Пост директора на протяжении многих лет занимал Роберт Оппенгеймер.

Первоначально предполагалось учредить при институте аспирантуру, с тем чтобы предоставить молодым ученым возможность совершенствоваться в избранной области науки и защищать диссертации на соискание ученой степени. По замыслу основателей института, для этого требовалось создать специальный факультет, обслуживаемый небольшим числом профессоров. Не обремененные чтением обязательных курсов для студентов, профессора могли бы все свое время уделять научной работе и руководить аспирантами.

Однако с самого начала деятельность института приняла иное направление. За всю историю своего существования Институт высших исследований не присудил ни одной ученой степени.

Стать временным членом института по неписаному, но неуклонно соблюдаемому правилу может лишь обладатель высшей научной степени.

Первыми профессорами Института высших исследований стали Освальд Веблен (1932) и Альберт Эйнштейн (1933). В 1933 г. этой высокой чести был удостоен и тридцатилетний Джон фон Нейман. Профессором института он оставался до конца жизни, несмотря на обременявшие его многочисленные обязанности. Самый молодой из постоянных членов института, он умер в 1957 г., так и не успев достигнуть предельного возраста и выйти в отставку.

ЭСКИЗЫ К ПОРТРЕТУ

Каким был Джон фон Нейман в жизни? Интересовало ли его что-нибудь, помимо математики? Сознавал ли он свою исключительную одаренность и проявлялось ли это каким-либо образом в его манере общения с людьми? Ответы на эти и многие другие вопросы мы находим в воспоминаниях тех, кто хорошо знал фон Неймана, и в первую очередь в воспоминаниях Е. Вигнера и С. Улама. Сопоставляя и сравнивая то, что запечатлела память этих двух людей, мы отчетливо выделяем непустое пересечение характерных черт и черточек, выражающих наиболее существенные особенности его личности и внешнего облика (симметрическая разность воспоминаний, по-видимому, выражает менее существенные черты и, быть может, отчасти связана с особенностями личного восприятия Вигнера и Улама).

«Безупречная логика была наиболее характерной чертой его мышления.— пишет Е. Вигнер.— Еще более поразительным был свойственный ему блеск мышления... Третьей отличительной чертой его ума была замечательная память, позволявшая ему, помимо научной работы, иметь десятки увлечений. Он был историком-любителем, осведомленность которого в событиях огромных периодов истории не уступала осведомленности профессионала, свободно говорил на пяти языках и умел читать по-латыни и по-гречески. Он прочитал и помнил содержание многих книг, как художественных, так и научно-популярных по другим областям науки. Из всех тем, на которые автору этих строк доводилось когда-либо беседовать с фон Нейманом, лишь описательные естественные науки не вызывали у него интереса. Фон Нейман всегда был готов помочь любому, кто обращался к нему за советом, и искренне радовался любой трудной проблеме...

Глубокое чувство юмора и незаурядный дар рассказчика различных историй и анекдотов вызывали симпатию к фон Нейману даже у случайных знакомых. Если нужно, он мог быть резким, но никогда не был напыщенным и чванным. Фон Нейман с его безукоризненной логикой понимал и соглашался со многим из того, что большинство из нас не хотело принимать и даже понимать. Это ощущалось во многих высказываниях фон Неймана на темы морали: «Сетовать на эгоизм и вероломство людей так же глупо, как сетовать на то, что магнитное поле не может возрастать, если ротор электрического поля равен нулю: то и другое — законы природы». Лишь научная, интеллектуальная нечестность и присвоение чужих результатов вызывали его гнев и негодование независимо от того, кто был пострадавшим — он сам или кто-либо другой».

«Друзья Джонни,— читаем мы у С. Улама,— помнят его в характерных позах — стоящим у доски или обсуждающим проблемы у себя дома. Каким-то образом его жест, улыбка и выражение глаз всегда отражали характер обдумываемой идеи или суть обсуждавшейся проблемы. Он был среднего роста. Очень худой в юности, фон Нейман с годами располнел. Передвигался он мелкими шажками со случайным ускорением, но никогда не развивал большой скорости. Лицо его озарялось улыбкой, если задача обнаруживала черты логического или математического парадокса. Несмотря на любовь к абстрактным шуткам, Джонни высоко ценил и более земной тип комедии и юмора (можно сказать, жаждал его).

Разуму фон Неймана было присуще несколько особенностей, если и не исключающих друг друга, то во всяком случае имеющих между собой мало общего и требующих поэтому памяти и умения сосредоточиться, которыми редко бывает наделен один интеллект. К числу этих особенностей относятся: склонность к математическому мышлению на теоретико-множественной и формально алгебраической основе, знание и глубокое понимание существа классической математики в анализе и геометрии и способность тонко чувствовать потенциальные возможности современных математических методов для формулировки проблем теоретической физики, которые существуют ныне и возникнут в будущем. Все эти отличительные особенности мышления фон Неймана наиболее отчетливо проявились в его блестящих и глубоко оригинальных работах, охватывающих широкий спектр современной научной мысли.

Беседы Джонни с друзьями на научные темы могли длиться часами. В выборе тем недостатка не было, даже если речь шла о вопросах, далеких от математики.

Джонни питал живой интерес к людям, сплетни необычайно забавляли его. Казалось, он накапливает в своей памяти коллекцию человеческих причуд, слабостей и т. п., как бы собирая материал для статистического исследования.

...Джонни обладал исключительными способностями и ясно сознавал это. Тем не менее он был лишен самоуверенности и восхищался математиками и физиками, обладавшими качествами, которыми, по его мнению, он сам не был наделен в должной мере. Такими качествами были интуитивное постижение новых истин и способность иррационально угадывать доказательства или формулировки новых теорем.

...Друзьям Джонни нравилось присущее ему тонкое чувство юмора. В обществе ученых коллег он иногда комментировал, обычно иронически, исторические события, придавая своим замечаниям форму математических утверждений. Соль шутки, как правило, заключалась в высказывании, справедливом только для пустого множества. Его шутки иногда могли по достоинству оценить только математики.

...Если не считать точных наук, Джонни больше всего привлекало изучение истории. Древнюю историю он знал до мельчайших подробностей. Например, он держал в памяти весь анекдотический материал из «Заката и падения Римской империи» Гиббона и после обеда охотно пускался в разговор на исторические темы. Однажды, когда мы направлялись на заседание Американского математического общества в университете Дьюка, нам довелось проезжать вблизи мест, где разыгрывались сражения гражданской войны, и он поразил нас знанием мельчайших подробностей минувших сражений. Энциклопедические познания в области истории питали его взгляды на развитие грядущих событий. Его предсказания как бы носили характер аналитического продолжения.

...Помимо других дарований, Джонни был превосходным лингвистом. Он хорошо помнил школьную латынь и греческий. Кроме английского, он бегло говорил по-немецки и по-французски. Его лекции в США славились своими высокими литературными достоинствами (Джонни допускал характерные ошибки в произношении, например, вместо «интеджерс» — целые числа — произносил «интегерс»), которые его друзья всегда ждали с радостным оживлением. Во время визитов в Лос-Аламос и Санта-Фе он обнаружил знание испанского, правда, далекое от совершенства, а во время поездки в Мексику пытался объясняться на «неокастильском» — языке своего собственного изобретения (к английским словам присоединялась приставка «эль» и соответствующее испанское окончание)».

Если отвлечься от второстепенных деталей, то оба эскиза к портрету фон Неймана в основном совпадают. Запечатленный в них образ живого, увлеченного человека менее всего походит на гротескную фигуру профессора из традиционных анекдотов о математиках. Оба эскиза выполнены с натуры, по личным воспоминаниям, и сходство между ними позволяет надеяться, что в них ухвачены и верно переданы наиболее существенные и характерные черты Джона фон Неймана, человека и математика.

«НЕОЖИДАННАЯ ПОМОЩЬ»

Было бы неверно утверждать, что математическое творчество фон Неймана питалось только идеями, индуцированными запросами теоретической физики, сколь бы рафинированными и изысканными те ни были. Необычайно широкий математический кругозор фон Неймана, его поразительная осведомленность о состоянии дел в самых различных областях математики и виртуозное владение всем арсеналом средств современной математики позволяли ему обнаруживать «неожиданную помощь»*, которую один из разделов математики может оказать другому, а аксиоматический метод и склонность к абстрактному мышлению, необычная даже для математиков его ранга,— доискиваться до первопричин каждого такого открытия. Так, топологическая теорема Брауэра о неподвижной точке позволила фон Нейману доказать теорему о минимаксе, работа Купмана «Гамильтоновы системы и преобразования в гильбертовом пространстве» — получить первый математически строго доказанный результат в статистической механике (доказательство так называемой статистической эргодической теоремы), работа Хаара «Понятие меры в теории непрерывных групп» — частично решить (для компактных групп) пятую проблему Гильберта.

Занимаясь в 1929—1932 гг. теорией операторов в связи с математическим обоснованием квантовой механики, фон

* Выражение из книги Л. Брюншвига «Этапы математической философии», приведенное в статье Н. Бурбаки «Архитектура математики».

Нейман осознал, что многие свойства операторов проявляются лишь при рассмотрении алгебраической структуры семейств операторов (алгебр полиномов от операторов и их замыканий в различных операторных топологиях) и действия этих семейств в гильбертовом пространстве. Предвосхищая одно из основных направлений в последующем развитии функционального анализа и понимая важность теории семейств операторов, наделенных определенной алгебраической структурой, для теории представлений групп, эргодической теории и квантовой механики, фон Нейман в работе «Об алгебре функциональных операторов и теории нормальных операторов» (1929) приступил к изучению важного типа семейств операторов в гильбертовом пространстве — так называемых колец операторов, или W^*-алгебр. Впоследствии за ними с легкой руки Дж. Диксмье закрепилось название алгебр фон Неймана.

Гильбертово пространство, впервые возникшее как объект математической теории в работах Гильберта по интегральным уравнениям и ставшее после основополагающих работ фон Неймана основной ареной, на которой разыгрываются события в квантовой механике,— это не что иное, как полное бесконечномерное евклидово пространство, т. е. бесконечномерное линейное пространство со скалярным произведением, полное в смысле метрики, введенной скалярным произведением.

На заре квантовой механики В. Гейзенберг при построении «матричной механики» использовал гильбертово пространство l_2 последовательностей со сходящейся суммой квадратов членов, а Э. Шредингер при построении «волновой механики» — гильбертово пространство L_2 функций, интегрируемых с квадратом. Оба этих гильбертовых пространства изоморфны (физическая эквивалентность обоих подходов была установлена Шредингером).

Метрика в гильбертовом пространстве позволяет ввести понятие сходимости (или топологию) в множество операторов, действующих на гильбертовом пространстве. Если последовательностью операторов подействовать на произвольный вектор гильбертова пространства, то он перейдет в последовательность векторов-образов, по свойствам которой можно судить о сходимости последовательности операторов. В зависимости от того, в каком смысле понимается сходимость последовательности образов исходного вектора в гильбертовом пространстве, различают несколько операторных топологий. «Множество различных операторных топологий,— замечает известный специалист по функциональному анализу Р. В. Кадисон,— предназначено отнюдь не для того, чтобы умножать число доказываемых теорем. Операторные топологии возникают в важных ситуациях, как правило, не оставляя исследователю свободы выбора. Они как бы пришиты к определенному месту в доказательстве. Фон Нейман первым осознал важность введения нужной операторной топологии в нужном месте, развил этот прием и широко использовал его».

Мы говорим, что последовательность операторов A_k сходится к оператору A в сильной операторной топологии, если нормы разностей $A_kf—Af$ сходятся к нулю при любом векторе f из гильбертова пространства. Мы говорим, что последовательность операторов A_k сходится к оператору A в слабой операторной топологии, если скалярные произведения $(A_kf—Af, g)$ сходятся к нулю при любых векторах f и g из гильбертова пространства.

Если операторы, принадлежащие некоторому семейству, образуют последовательность, сходящуюся в той или иной операторной топологии, то предел последовательности может не принадлежать самому семейству. Присоединив к семейству пределы всевозможных последовательностей, образованных его операторами, мы получим замыкание семейства в соответствующей операторной топологии.

Семейства операторов могут быть наделены структурой, например быть алгебрами, группами, полугруппами и т. д.

Математическая структура — это множество, между элементами которого аксиоматически заданы те или иные отношения.

Установление абстрактной структуры, скрывающейся за индивидуальными особенностями конкретного множества с заданными на нем операциями,— вопрос далеко не праздный, и математики занимаются им отнюдь не из любви к терминологическим новшествам. Принадлежность множества с теми или иными операциями или отношениями между элементами к определенной разновидности структур как бы высвечивает его внутреннюю сущность. Свойства, «унаследованные» множеством от абстрактной структуры, как правило, глубже и фундаментальнее его индивидуальных свойств, которые варьируются от множества к множеству и носят преходящий характер. По словам Н. Бурбаки, «структуры являются орудиями математика; каждый раз, когда он замечает, что между элементами, изучаемыми им, имеют место отношения, удовлетворяющие аксиомам структуры определенного типа, он сразу может воспользоваться всем арсеналом общих теорем, относящихся к структурам этого типа, тогда как раньше он был бы должен мучительно трудиться, выковывая сам средства, необходимые для того, чтобы штурмовать рассматриваемую проблему, причем их мощность зависела бы от его личного таланта и они были бы отягчены часто излишне стеснительными предположениями, обусловленными особенностями изучаемой проблемы».

Алгебра — это множество, на котором заданы две операции, аксиомы которых воспроизводят все свойства сложения и почти все свойства умножения. В большинстве случаев умножение операторов не удовлетворяет переместительному, или коммутативному, закону: $AB \neq BA$. Если $AB = BA$, то говорят, что операторы A и B коммутируют. Нарушение коммутативности Г. Вейль прокомментировал следующим образом: «С этим правилом — хотя, быть может, и не с его математическим выражением — вы все знакомы. Когда вы одеваетесь, то отнюдь не безразлично, в каком порядке вы производите операции. Если при одевании вы начинаете с рубашки и заканчиваете пальто, то при раздевании порядок оказывается обратным: сначала вы снимаете пальто, рубашку же — в самом конце».

Оператор B называется сопряженным оператору A, если $(Af, g) = (f, Bg)$ для любых векторов, f, g гильбертова пространства. Семейство операторов называется самосопряженным, если вместе с каждым своим оператором оно содержит и сопряженный оператор. Алгебра фон Неймана — это самосопряженная алгебра, замкнутая в слабой операторной топологии.

Первая же работа фон Неймана по теории алгебр, носящих ныне его имя, содержала важный результат, ставший впоследствии удобным инструментом исследования этих алгебр — так называемую теорему о двойном коммутанте. Но планомерный штурм теории слабо замкнутых самосопряженных операторных алгебр был осуществлен в серии из четырех работ «О кольцах операторов», из которых первая и заключительная были написаны фон Нейманом в соавторстве с Ф. Дж. Мюрреем (первая работа вышла в 1936 г.).

Фон Нейман и Мюррей начали с рассмотрения важного частного случая алгебр фон Неймана — так называемых факторов, иначе говоря, алгебр фон Неймана, центр которых (множество операторов, коммутирующих со всеми операторами алгебры) состоит из скалярных, кратных единичному, операторов алгебры, т. е. операторов, отличающихся от единичного числовым множителем.

Фон Нейман и Мюррей построили исчерпывающую классификацию факторов — такого разбиения множества всех факторов на классы, при котором каждый фактор принадлежит одному и только одному классу.

Предпринятые впоследствии попытки других математиков обобщить результаты фон Неймана — Мюррея на произвольные алгебры фон Неймана увенчались лишь частичным успехом. Для факторов новая классификация совпадает с классификацией фон Неймана — Мюррея, но в общем случае не охватывает всех алгебр фон Неймана.

Фон Нейман и Мюррей показали, что существует функция (так называемая относительная размерность операторов проектирования), область значения которой может быть лишь пяти типов, причем каждый тип соответствует одному и только одному классу факторов. Эта функция определена с точностью до постоянного множителя. Варьируя его выбор, можно в известных пределах изменять область определения относительной размерности. Фон Нейман и Мюррей показали, что если область определения введенной ими функции при определенном выборе постоянного множителя совпадает либо с $\{0, 1, ..., n\}$, либо с $\{0, 1, ..., \infty\}$, то фактор принадлежит к типу I (соответственно к подтипам I_n и I_∞). Если область значений совпадает с отрезком $[0, 1]$, то фактор принадлежит к типу II_1, а если область значений совпадает с положительной полуосью $\{0, +\infty\}$, то к типу II_∞. Наконец, если область значений содержит только две точки 0 и $+\infty$, то фактор принадлежит к типу III. В зависимости от свойств области определения относительной размерности фон Нейман и Мюррей подразделяли факторы на дискретные и непрерывные, конечные и бесконечные, полуконечные и чисто бесконечные.

Открытие факторов типа II и III было довольно неожиданным. До появления работ фон Неймана и Мюррея о существовании таких факторов никто даже не подозревал. И снова — «неожиданная помощь»: используя соображения эргодической теории и абстрактной теории меры, что само по себе было новшеством, так как обе теории в ту пору еще не получили должного развития, фон Нейман и Мюррей построили целый класс примеров факторов типа II_1 и II_∞.

В классификации фон Неймана и Мюррея отчетливо проглядывалась алгебраическая основа: факторы каждого из пяти типов обладали различными алгебраическими свойствами, или, говоря техническим языком, были алгебраически неизоморфны. Важный вопрос, к решению которого фон Нейман и Мюррей неоднократно возвращались на протяжении многолетней работы над «Кольцами операторов», состоял в том, различимы ли по своим алгебраическим свойствам факторы одного типа, т. е. полна ли алгебраическая классификация факторов или в нее необходимо вводить более тонкие градации. Ответ, свидетельствующий скорее о трудности проблемы, чем о ее решении, был получен в заключительной, четвертой части цикла (1943 г.). Исходя из совершенно иных идей и используя совершенно иную технику, т. е. прибегая к «неожиданной помощи» совершенно с другой стороны, фон Нейман и Мюррей построили еще один класс факторов II_1, по крайней мере внешне отличный от того, который они построили на основе соображений эргодической теории. К сожалению, до сих пор не доказано, что факторы этих двух классов алгебраически неизоморфны. Не доказано также, что факторами этих двух классов, если они неизоморфны, исчерпывается алгебраическая классификация факторов типа II_1, т. е. каждый фактор этого типа изоморфен факторам одного из двух «предъявленных» фон Нейманом и Мюрреем классов.

Цикл «О кольцах операторов» оставил заметный след в математике. Фон Нейман и Мюррей не только получали, но и щедро оказывали «неожиданную помощь». Так, построение факторов типа III потребовало от фон Неймана разработки основ довольно необычной и экзотической «теории некоммутативного интегрирования». И, как всегда, возникшая проблема была решена с блеском и остроумием в объеме, намного превышающем нужды породившей ее теории.

Другой не менее существенный вклад фон Нейман и Мюррей внесли в развитие теории неограниченных операторов. Оценивая его, Кадисон писал: «С момента своего зарождения теория неограниченных операторов в гильбертовом пространстве была неодолимым искушением для математиков, которым доводилось соприкасаться с ней. Элементарные, чисто формальные манипуляции самого разумного рода приносили столь высокие дивиденды, как решение пятой проблемы Гильберта или трудно добываемые результаты чисто аналитического характера. Многие из расчетов в квантовой теории в той или иной форме также связаны с неограниченными операторами. К сожалению, большая часть этих формальных манипуляций не допускает обоснования, и именно фон Нейман указал опасности, которыми отпугивает эта область математики. Тем не менее когда формально столь привлекательные маневры с такой легкостью приводят к долгожданным результатам, то невольно начинаешь мечтать о «мире», в котором эти маневры обоснованы. Фон Нейман не был исключением. Открыв факторы типа II_1, Мюррей и фон Нейман сотворили именно такой «мир».

...Решающая трудность в формальных манипуляциях с неограниченными операторами заключается в том, что область определения и область значений одного неограниченного оператора не связаны с областью определения и областью значения другого. Когда же мы твердо знаем, что эти множества содержат много общих векторов, то значительная часть трудностей испаряется». Именно так и обстоит дело в случае факторов типа II_1.

К циклу «О кольцах операторов» непосредственно примыкают две большие работы фон Неймана: «О бесконечных прямых произведениях» (1938) и «О кольцах операторов. Теория разложения» (1949). В первой работе фон Нейман рассматривает бесконечные прямые произведения гильбертовых пространств и алгебры ограниченных операторов на них, во второй — прямой интеграл гильбертовых пространств и алгебры фон Неймана на них, но главный результат второй работы, как бы подводящей итог всему циклу «О кольцах операторов» и объясняющей, почему фон Нейман и Мюррей уделили столь большое внимание факторам,— теорема о разложении произвольной алгебры фон Неймана в прямой интеграл факторов. В этой же работе фон Нейман доказывает еще одно замечательное утверждение — так называемую полную спектральную теорему, которая, как показали математики Л. Гординг и А. Уайтман, играет основополагающую роль в математическом аппарате квантовой теории поля, поскольку именно на ней основаны все теоремы о разложениях по собственным функциям.

Последним документально засвидетельствованным обращением фон Неймана к теории операторов был его доклад о проблемах функционального анализа на Международном математическом конгрессе в Амстердаме (1954). Текст доклада не сохранился. Поездка в Амстердам стала последним визитом фон Неймана в Европу.

Сколь интенсивной и целенаправленной ни была работа по теории операторов, универсальный ум фон Неймана был занят не только проблемами функционального анализа. Фон Нейман выступает с многочисленными докладами перед различными учеными обществами. Одна за другой выходят в свет работы по математической статистике, теории почти периодических функций на группах, статистике гравитационного поля, создаваемого случайным распределением звезд, численному обращению матриц высокого порядка, фундаментальный труд «Теория игр и экономического поведения» (1944), написанный в соавторстве с О. Моргенштерном. Даже этого далеко не полного перечня достаточно, чтобы представить себе гигантский размах научной деятельности фон Неймана, его живой интерес к любимой науке, его колоссальный научный потенциал.

В огромном здании современной математики для фон Неймана не было закрытых дверей. Когда во время работы над третьей частью «Колец операторов» фон Нейману понадобилось обратиться к теории меры, он, по свидетельству известного специалиста по теории меры и эргодической теории П. Р. Халмоша, «с радостью оторвался от работы, чтобы написать учебник по теории меры». Мимеографированные экземпляры двух оригинальных курсов лекций по теории меры, прочитанных фон Нейманом в Институте высших исследований в 1934 и 1940 гг., находились в библиотеке института. Не один американский математик изучал теорию меры по фон Нейману.

ДЖОНИАК

В конце 30-х годов внимание фон Неймана привлекла гидродинамика — наука, включающая в себя «физику двух из трех самых общих состояний материи — жидкого и газообразного» (Г. Биркгоф). Сложная система нелинейных уравнений, описывающая гидродинамические явления в традиционном варианте теории, допускает точное аналитическое решение лишь в исключительных случаях и обладает многими свойствами (например, допускает разрывы или неединственность решений), противоречащими всему опыту, накопленному классическим линейным анализом. В те годы эти свойства казались загадочными и непонятными. Неконтролируемые физические и математические допущения, вводимые для упрощения задачи, нередко противоречили основным предположениям теории и обесценивали получаемые приближенные результаты. Такое положение дел не могло удовлетворить фон Неймана, и он одним из первых понял несбыточность надежд на будущее развитие теории, которое позволило бы найти точные решения. В докладе на симпозиуме по движению масс газа космических размеров (1949) он писал: «Вопрос о том, реализуется ли в природе решение, найденное математическим путем, и можно ли исключить заранее существование нескольких решений с теми или иными хорошими или плохими свойствами, очень труден и неоднозначен. Этот вопрос обсуждался как в классической, так и более современной литературе на самых различных уровнях строгости и ее прямой противоположности. Резюмируя, можно сказать, что в указанной области трудно прийти к какому-нибудь определенному выводу. Если воспользоваться математической терминологией, то положение, в котором мы сейчас находимся, можно назвать состоянием непрерывной неопределенности, поскольку обычные теоремы существования и единственности решения, которыми нам очень хотелось бы располагать, никогда и никем не были доказаны и, по всей видимости, неверны в своей традиционной форме.

...Таким образом, гидродинамика оставляет огромный диапазон математических возможностей относительно допущения разрывов, требования разумного термодинамического поведения и т. д. Весьма вероятно, что существует некий набор условий, при котором каждая разумно поставленная задача допускает одно и только одно решение. Однако нам остается лишь догадываться, какие условия могут входить в него, и в поиске его мы можем полагаться почти исключительно на физическую интуицию. Следовательно, мы ни в чем не можем быть твердо уверены. О любом решении, с какой бы точностью оно ни было получено, мы не можем утверждать, что оно непременно должно существовать в природе».

Фон Нейман, накопивший за годы войны уникальный опыт численных расчетов на быстродействующих машинах первого поколения (в создании которых он принимал непосредственное участие), усматривал выход из затруднений в особом подходе к использованию вычислительных машин, получившем название эвристического подхода.

Накопление сведений об изучаемом явлении на нестрогом эвристическом уровне на основе численного эксперимента, создание интуитивной схемы явления, проверка ее на следующем этапе численного эксперимента и, наконец, построение строгой теории — таковы основные этапы эвристического подхода к исследованию нелинейной задачи, по фон Нейману.

Одно из крупнейших событий в современной математической физике, заставившее специалистов отрешиться от «линейного наследия», подтвердившее правильность пророческих слов Л. И. Мандельштама о необходимости выработки «нелинейного» мышления,— открытие солитона — произошло в русле идей именно эвристического подхода.

В 1949 г. С. Улам, Дж. Паста и Э. Ферми решили проверить при помощи численного эксперимента, выполняется ли одна из основных гипотез статистической механики — гипотеза о равнораспределении энергии по степеням свободы для системы нелинейных осцилляторов (системы грузиков с пружинками, возвращающая сила которых пропорциональна кубу смещения грузиков из положения равновесия). Выяснилось, что никакой тенденции к равнораспределению не наблюдается: энергия локализуется то в одной, то в другой группе мод (колебаний с определенной частотой), не «расплываясь». Возникший парадокс был разрешен лишь в начале 60-х годов Н. Забуским и М. Д. Крускалом, которые показали, что Ферми, Паста и Улам в своем численном эксперименте наблюдали уединенную волну, за которой в 1838 г. скакал верхом на коне Дж. Скотт-Расселл и которая является решением нелинейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка Кортевега — де Фриза (1895). Сохраняя форму, уединенная волна не позволяла энергии распределиться по степеням свободы. В проведенном ими численном эксперименте, многократно повторенном впоследствии целой армией исследователей, Забуский и Крускал обнаружили, что при столкновении уединенные волны уравнения Кортевега — де Фриза ведут себя, как упругие частицы, и назвали их солитонами (от англ. Solitary wave — уединенная волна, «он» — окончание названий для частиц: фотон, протон, нейтрон, мюон и т. д.). Открытие солитона привлекло внимание исследователей к сказочному миру нелинейных явлений и послужило стимулом к разработке мощных аналитических методов решения отдельных классов нелинейных уравнений (в частности, к созданию знаменитого метода обратной задачи теории рассеяния).

Без эвристической прикидки в наше время не обходится ни одно серьезное исследование нелинейной проблемы.

Помимо обычных компонент успеха, эвристический подход фон Неймана предполагает использование быстродействующих вычислительных машин и наличие соответствующего математического обеспечения. Чтобы диалог между человеком и машиной протекал как можно более непринужденно, фон Нейман разделил процесс программирования на два этапа. На первом этапе вычислитель составляет блок-схему программы, «язык» которой достаточно близок и понятен программисту. На втором этапе блок-схема по строго установленным правилам записывается в кодах машины. Таким образом процесс составления программы уподобляется переводу с человеческого языка на язык машины. Та же идея воплощена и в работе современных трансляторов, осуществляющих автоматический перевод с «входного» языка программирования (формализованного человеческого языка с упрощенными лексикой и синтаксисом, приспособленными к описанию определенного класса алгоритмов) на выходной язык (в машинных кодах).

Численный анализ также многим обязан фон Нейману. Известный специалист по численному анализу А. С. Хаусхолдер даже считает, что численный анализ как общепризнанная научная дисциплина, можно сказать, появился в 1947 г. В этом году произошли два совершенно независимых события, которые возымели действие на последующее развитие численного анализа. Первое событие произошло в июле. Именно в этом месяце Национальное бюро стандартов США открыло Национальную лабораторию прикладной математики, одно из отделений которой называлось Институт численного анализа. Вторым событием, происшедшим в ноябре, стал выход в свет ныне классической статьи Голдстайна и фон Неймана «Численное обращение матриц высокого порядка». В ней были рассмотрены важные для решения многих прикладных задач вопросы решения больших систем линейных уравнений.

Фон Нейман рассмотрел также и многие другие вопросы численного анализа: разностные схемы для решения уравнений с частными производными, округление и накопление ошибок, устойчивость алгоритмов и др. Вместе с Д. Р. Рихтмайером он предложил получивший широкое распространение метод фиктивной вязкости. Введение в уравнения газовой динамики фиктивного вязкого члена приводило к размыванию разрывов. Разрывные решения превращались в непрерывные, а сам разрыв — в область быстрого изменения соответствующих величин, сосредоточенную в окрестности бывшего разрыва. «Хитрость» состояла в том, что отпадала необходимость в задании краевых условий на разрыве, положение которого требовалось находить в процессе счета. По окончании вычислений фиктивная вязкость устремлялась к нулю и газ вновь становился невязким. Введение фиктивной вязкости нашло применение и в других задачах.

Фон Нейман принадлежит к числу создателей эффективного численного метода решения многомерных задач математической физики — метода Монте-Карло. Преимущество этого метода состоит в том, что он «срабатывает» там, где отказывают другие численные методы, и позволяет находить решения, казалось бы, безнадежных задач.

Метод Монте-Карло, или, как его еще называют, метод статистических испытаний, основан на замене решаемой задачи некоторой вероятностной моделью. Параметры модели дают приближенное решение исходной задачи. Например, площадь фигуры, вписанной в единичный квадрат, можно найти, если наугад разбросать по квадрату точки (координаты точек — случайные величины, равномерно распределенные на единичном отрезке) и подсчитать, какую долю от общего числа точек составляют те, которые попали на фигуру. Вычисление многомерного интеграла по методу Монте-Карло основано на той же идее и имеет преимущество по сравнению с обычными кубатурными формулами, число точек в которых быстро возрастает с размерностью пространства.

После того как вероятностная модель найдена, для решения задачи по методу Монте-Карло необходимо иметь датчик случайных чисел, позволяющий генерировать случайные точки с нужным распределением вероятности. Один из первых и наиболее простых датчиков был предложен фон Нейманом и основан на выборе «середины произведения»: произвольное $2n$-значное двоичное число возводится в квадрат (состоящий из $4n$ цифр), из которого вырезается n-значное число, стоящее в середине (от $n+1$ до $3n$-го знака). После многократного повторения возникает некоторая последовательность псевдослучайных чисел (правда, с распределением, отличающимся от равномерного).

Когда в конце 30-х годов фон Нейман обратился к проблемам гидродинамики, лучшей вычислительной машиной в США и, быть может, во всем мире был дифференциальный анализатор, построенный в конце 20-х годов под руководством В. Буша в Массачусетском технологическом институте. Предназначенный для решения широкого класса обыкновенных дифференциальных уравнений, анализатор был чисто механической машиной. Позднее В. Буш построил усовершенствованный электромеханический вариант своего дифференциального анализатора.

Первая электронная вычислительная машина была построена в 1943—1946 гг. в школе инженеров-электриков Мура Пенсильванского университета и получила название ЭНИАК (по первым буквам английского названия машины — электронный цифровой интегратор и вычислитель). Фон Нейман сразу же распознал возможности, заложенные в этой машине, и понял, как их можно использовать более оптимальным образом. Вот как рассказывает об этом конструктор ЭНИАКа А. Беркс: «Идея создания универсальной быстродействующей вычислительной машины принадлежит Джону Мохли. Он внес предложение Голдстайну из артиллерийского управления о том, чтобы армия Соединенных Штатов поддержала разработку и создание такой вычислительной машины, которую можно было бы использовать прежде всего для расчетов по баллистике. Такая поддержка была оказана, причем военных особенно поражала большая скорость, с которой электронная вычислительная машина могла составлять таблицы стрельб. Машина ЭНИАК проектировалась и создавалась... при техническом руководстве Мохли и Эккерта. Фон Нейман посетил нас, когда мы строили эту машину, и сразу же заинтересовался ею. К этому времени конструкция машины была уже выбрана, но после того как ее постройка была закончена, фон Нейман показал, как можно модифицировать машину, чтобы сильно упростить ее программирование».

В создании следующей машины ЭДВАК (электронный автоматический вычислитель с дискретными переменными), построенной также в школе Мура, фон Нейман принял гораздо более активное участие. Он не только разработал подробную логическую схему машины, в которой структурными единицами были не физические элементы цепей, а идеализированные вычислительные элементы, но и предложил ряд инженерных решений. Использование идеализированных вычислительных элементов было важным шагом вперед: оно позволило отделить создание принципиальной логической схемы от ее технического воплощения.

Фон Нейману принадлежит и предложение использовать в качестве элементов памяти не линии задержки, а электронно-лучевые трубки. Предложение было встречено со скепсисом, но первые же испытания подтвердили правоту фон Неймана, и тот начинает вынашивать замысел новой вычислительной машины с памятью на электронно-лучевых трубках. «Новая вычислительная машина,— свидетельствует Беркс,— должна была намного превосходить по быстродействию все рассматривавшиеся тогда машины в основном в силу следующих двух обстоятельств. Во-первых, применение электростатической запоминающей системы обеспечивает немедленный доступ к каждому разряду, тогда как разряд или все слово, хранящееся в линии задержки, недоступно до тех пор, пока не дойдет до конца линии. Во-вторых, было принято решение обрабатывать все разряды слова параллельно, что также снижает время вычислений». Планы фон Неймана не долго оставались на бумаге. Задуманная им машина была построена под руководством Дж. Бигелоу в Институте высших исследований. Ее логическую схему разработали Беркс, Голдстайн и фон Нейман. Машина Института высших исследований приобрела широкую известность под названием ДЖОНИАК — в честь фон Неймана. Ее логические и схемные решения послужили прототипами при создании вычислительных машин в Иллинойском университете, национальных лабораторий Лос-Аламоса, Аргонна, Ок-Риджа, корпорации РЭНД. Именно ДЖОНИАК позволил осуществить важные расчеты при создании водородной бомбы, превосходившие по своему объему все, что когда-либо было сосчитано человечеством.

В работе над ЭДВАК проявилась важная особенность мышления фон Неймана, проливающая свет на его деятельность инженера, изобретателя, физика. Конкретные детали реальной конструкции он рассматривал, по существу, аксиоматически, абстрагируясь от несущественных подробностей и сохраняя лишь главное. Такой подход не только отвечал его индивидуальным наклонностям, но и позволял фон Нейману использовать аппарат математической логики, оперируя с абстрактными элементами, как с символами. Эта мысль находит подтверждение в следующем замечании С. Улама: «Мы уже упоминали о способности фон Неймана, сравнительно редкой у математиков, общаться с физиками, понимать их язык и почти мгновенно, без малейшего промедления преобразовывать его в математические схемы и выражения. Затем, разобравшись в существе задачи, фон Нейман переводил их снова в выражения, общепринятые у физиков... Фон Нейман с необычайной легкостью производил прикидочные оценки и алгебраические и численные выкладки в уме, не прибегая к карандашу и бумаге. Эта способность, несколько напоминающая способность играть в шахматы вслепую, нередко производила сильное впечатление на физиков. У меня создалось впечатление, что фон Нейман, размышляя, не прибегал к зримым образам физических объектов, а предпочитал рассматривать их свойства как логические следствия из основных физических допущений. С каким блеском он умел играть в эту дедуктивную игру!»

В конце 40-х годов, накопив колоссальный практический опыт в создании быстродействующих вычислительных машин, фон Нейман приступил к созданию общей математической (или, как предпочитал называть ее сам фон Нейман, логической) теории автоматов.

По Берксу, теория автоматов — это наука об основных принципах, общих для искусственных автоматов (цифровых вычислительных машин, аналоговых вычислительных машин, управляющих систем) и естественных автоматов (нервной системы человека, самовоспроизводящихся клеток, организмов в эволюционном аспекте).

В планы фон Неймана входило создать систематическую теорию, математическую и логическую по форме, которая упорядочила бы понятия и принципы, касающиеся структуры и организации естественных и искусственных систем, роли языка и информации в таких системах, программирования и управления такими системами. Теория автоматов лежит на стыке разных дисциплин, объединяет различные подходы (с точки зрения логики, теории связи, физиологии), но в конце концов ей предстоит стать отдельной самостоятельной дисциплиной.

Различия между теорией автоматов фон Неймана и кибернетикой Винера несущественны и обусловлены скорее личным вкусом и опытом их создателей, чем принципиальными соображениями. Теория автоматов фон Неймана, принимавшего активное участие в разработке и создании современных быстродействующих ЭВМ первого поколения, основное внимание уделяет цифровым вычислительным машинам и дискретной математике (главным образом комбинаторике и логике). Кибернетика Винера, принимавшего в годы войны участие в разработке прибора управления артиллерийским зенитным огнем, сосредоточивает внимание на следящих системах и непрерывной математике (классическом анализе). Винер всячески подчеркивает важность обратной связи для управления и целенаправленного поведения, фон Нейман, по существу, используя обратную связь и в конструкции машин, и в блок-схемах программ, не считает необходимым специально подчеркивать это.

Разумеется, Винер сознавал важность цифровых вычислительных машин, а фон Нейман отнюдь не принадлежал к числу принципиальных противников непрерывного в математике. Предвосхищая успехи синергетики, фон Нейман намеревался построить непрерывную модель самовоспроизведения, основанную на нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных, которые описывают систему химически реагирующих и диффундирующих веществ. В этой связи небезынтересно отметить, что в 1952 г. независимо от фон Неймана аналогичную модель структурообразования предложил в работе «Химическая основа морфогенеза» английский математик А. Тьюринг, внесший немалый вклад в развитие теории автоматов.

Винер и фон Нейман находились под взаимным влиянием и, как показывает, например, рецензия фон Неймана на книгу Винера «Кибернетика, или управление и связь в животном и машине», были великолепно осведомлены о сильных и слабых сторонах каждого подхода, но все же их подходы и цели были различны.

Еще в период работы над созданием вычислительной машины ЭДВАК фон Нейман произвел сравнение некоторых элементов живых и искусственных автоматов. Более отчетливо цели и задачи такого сравнения были сформулированы им в начале знаменитой статьи «Общая и логическая теория автоматов», представлявшей собой текст доклада, с которым фон Нейман выступил в сентябре 1948 г. на симпозиуме «Механизмы мозга в поведении» в Калифорнийском технологическом институте: «В естественных науках автоматы играли роль, значение которой непрерывно возрастало и которая к настоящему времени стала весьма значительной. Этот процесс развивался в течение нескольких десятилетий. В конце этого периода автоматы стали захватывать и некоторые области математики, в частности (но не только) математическую физику и прикладную математику. Их роль в математике представляет интересный аналог некоторых сторон жизнедеятельности организмов в природе. Как правило, живые организмы гораздо более сложны и тоньше устроены и, следовательно, значительно менее понятны в деталях, чем искусственные автоматы. Тем не менее рассмотрение некоторых закономерностей устройства живых организмов может быть весьма полезно при изучении и проектировании автоматов. И наоборот, многое из опыта нашей работы с искусственными автоматами может быть до некоторой степени перенесено на наше понимание естественных организмов.

При сравнении живых организмов и, в частности, наиболее сложно организованной системы — нервной системы человека — с искусственными автоматами следует иметь в виду следующее ограничение. Естественные системы чрезвычайно сложны, и ясно, что проблему их изучения необходимо подразделить на несколько частей. Один метод такого расчленения, особенно важный в нашем случае, заключается в следующем. Организмы можно рассматривать как составленные из частей, из элементарных единиц, которые в определенных пределах автономны. Поэтому можно считать первой частью проблемы исследование структуры и функционирования таких элементарных единиц в отдельности. Вторая часть проблемы состоит в том, чтобы понять, как эти элементы организованы в единое целое и каким образом функционирование целого выражается в терминах этих элементов.

...Аксиоматизация поведения элементов означает следующее. Мы принимаем, что элементы имеют некоторые вполне определенные внешние функциональные характеристики, т. е. что их следует считать «черными ящиками». Это означает, что их рассматривают как автоматы, внутреннюю структуру которых нет необходимости раскрывать и которые, по предположению, реагируют на некоторые точно определенные раздражители (стимулы) посредством точно определенных реакций.

Установив это, мы можем перейти к изучению более сложных организмов, которые можно построить из этих элементов,— их структуры, функционирования, связей между элементами и общих теоретических закономерностей, обнаруживаемых в том сложном синтезе, который представляют собой рассматриваемые организмы».

Сравнивая особенности функционирования естественных и искусственных автоматов, фон Нейман обратил внимание на то, что живые автоматы и, в частности, человеческий мозг работают с непостижимой надежностью, несмотря на сравнительно низкую надежность их деталей. Можно ли смоделировать эту особенность живых организмов при помощи искусственных автоматов? Можно ли, и если можно, то как построить надежный автомат из ненадежных компонент? Можно ли понизить порог ошибки до заданного значения? Эти вопросы были разобраны в статье фон Неймана «Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент», написанной на основе пяти лекций, прочитанных в январе 1952 г. в Калифорнийском технологическом институте.

«Как показывает заглавие,— подчеркивает фон Нейман в Введении,— основным предметом статьи является роль ошибки в логике и в физическом орудии логики — синтезировании автоматов. Поэтому ошибка рассматривается не как исключительное событие, результат или причина какой-то неправильности, но как существенная часть рассматриваемого процесса. Значение понятия ошибки в синтезировании автоматов вполне сравнимо со значением обычно учитываемого фактора правильной логической структуры, которая имеется в виду.

Предлагаемая трактовка ошибки является неудовлетворительной и дается лишь для определенной ситуации. По убеждению автора, которого он придерживается уже много лет, ошибку следует рассматривать при помощи термодинамических методов, так же, как это делается с информацией в работах Л. Силарда и К. Шеннона».

По фон Нейману, каждую компоненту допустимо рассматривать как черный ящик с определенным числом входов и выходов. Если бы сигнал на выходе был функцией сигналов на входе, то мы имели бы надежную компоненту, срабатывающую с вероятностью 1. Если же сигнал на выходе при заданных сигналах на входе возникает с вероятностью меньше 1, то компонента ненадежна. Можно ли, располагая неограниченным запасом ненадежных компонент, построить надежный вариант любого заданного автомата?

Фон Нейман решает эту задачу двумя способами. Первое решение (автоматы с простыми линиями) позволяет понижать вероятность ошибки лишь до некоторого уровня. Суть решения состоит в построении из трех ненадежных одинаковых линий и смесителей, производящих сравнение сигналов на выходах подключенных к ним компонент, более надежной системы, выполняющей ту же функцию.

Второе решение фон Нейман называет трюком с кратными линиями. Двоичный выход машины заменяется пучком из многократно повторенного двоичного выхода, и значение сигнала на выходе определяется «большинством голосов» — значением сигнала на большей части линий в пучке. Схема идеального автомата, построенного из надежных компонент, преобразуется: каждая линия заменяется пучком линий, а каждый орган — аналогом, производящим операции с выходным сигналом большинства линий. Фон Нейман приводит оценки избыточности для второй схемы. Оказывается, что при замене органа, не срабатывающего с вероятностью 1/200, при избыточности 60 000 на единицу уровень ошибки понижается до 10^{-20}. Это означает, что автомат, сравнимый по сложности и быстродействию с человеческим мозгом, мог бы работать столетия без сбоев.

Другая важная особенность живых

организмов, которую фон Нейман стремился включить в общую теорию автоматов,— способность к самовоспроизведению. В записях фон Неймана сохранились два фрагмента теории. Первый из них мы находим в уже упоминавшейся статье «Общая и логическая теория автоматов». В нем речь идет о построении автоматов автоматами из сравнительно небольшого числа стандартных.

Второй несравненно более обширный фрагмент долгое время оставался известным лишь узкому кругу лиц, слушавших лекции фон Неймана. Благодаря усилиям А. Беркса, взявшего на себя тяжкий труд по разбору, дополнению и «монтажу» отдельных записей, сохранившихся в архиве фон Неймана, мы можем теперь по достоинству оценить важность и красоту многих идей фон Неймана, относящихся к теории самовоспроизведения и, в частности, доказанную им возможность самовоспроизведения конечного автомата, обладающего 29 внутренними состояниями.

Многие идеи фон Неймана еще не получили должного развития. К их числу относится, в частности, идея о взаимосвязи уровня сложности и способности системы к самовоспроизведению, о существовании критического уровня сложности, ниже которого система вырождается, а выше обретает способность к самовоспроизведению.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА И МОЗГ

При жизни фон Неймана часто сравнивали с безупречной логической машиной с тщательно подогнанными шестеренками. Но мозг его, подаривший миру столько блестящих идей, принадлежал человеку. И как все люди, фон Нейман был смертен. Он ушел из жизни после тяжелой болезни, измученный таявшими день ото дня надеждами на выздоровление, так и не примирившись с выводом, который задолго до кончины подсказал ему мозг. Человек, он до последней минуты надеялся. И до последней возможности, пока достало сил, работал над рукописью книги «Вычислительная машина и мозг», которую ему так и не суждено было закончить. Рассказывает Клара фон Нейман:

«Выступить на Силлименовских чтениях, одних из наиболее старых и почитаемых академических чтениях в Соединенных Штатах, считается привилегией и высокой честью среди ученых всего мира*. По традиции лектора приглашают прочесть в течение примерно двух недель цикл лекций, а затем представить их текст в виде рукописи для издания отдельной книгой под эгидой Йельского университета, родины и штаба по проведению Силлименовских чтений.

В начале 1955 г. моего мужа Джона Неймана пригласили выступить на Силлименовских чтениях в весенний семестр 1956 г., в конце марта или в начале апреля. Джонни был весьма польщен и обрадован приглашением, хотя ему сразу пришлось оговорить право ограничить продолжительность предполагаемого курса одной неделей. Было условлено, что в рукописи избранная им тема «Вычислительная машина и мозг», давно интересовавшая его, будет изложена более подробно. Просьба сократить продолжительность лекций была вынужденной, поскольку Джонни только что был назначен членом Комиссии по атомной энергии (КАЭ). Однако мой муж не сомневался, что найдет время написать лекции, поскольку свои работы он всегда писал дома по вечерам или ночами. Если его что-нибудь интересовало, то работоспособность его становилась практически беспредельной, а неизученные возможности автоматов представляли для него особый интерес. Поэтому он не сомневался, что сумеет подготовить целиком всю рукопись, несмотря на то что лекционный курс пришлось сократить. Йельский университет с готовностью и пониманием пошел навстречу Джонни еще тогда, как шел и позднее, когда не осталось ничего, кроме горечи, печали и сожалений, и принял его условия.

Весной 1955 г. мы переехали из Принстона в Вашингтон, и Джонни взял отпуск без сохранения содержания в Институте высших исследований, где он состоял профессором в Математической школе с 1933 г. Через три месяца

* Среди тех, кто выступал на Силлименовских чтениях, были выдающиеся ученые: Дж. Дж. Томсон, В. Нернст, Э. Резерфорд, Дж. Б. С. Холдейн, Ж. Адамар, Т. Х. Морган и другие.— *Прим. авт.*

привычный ритм нашей деятельной и напряженной жизни, в центре которой неизменно находился не знающий усталости поразительный ум моего мужа, внезапно был нарушен. У Джонни появились сильные боли в левом плече, и после операции был поставлен диагноз: костная форма рака. В последующие месяцы надежда сменялась отчаянием, отчаяние — надеждой. Иногда нам казалось, что в плече — единственное проявление ужасной болезни, что боли больше не повторятся, но трудно локализуемые боли, от которых Джонни нестерпимо страдал время от времени, лишали нас всяких надежд на будущее. На протяжении этого периода Джонни лихорадочно работал. День заставал его в служебном кабинете или в бесчисленных разъездах, связанных с его новой работой, ночь — склоненным над рукописями научных статей, которые прежде он откладывал до окончания срока пребывания на посту члена КАЭ. Тогда же он приступил к систематической работе над рукописью для Силлименовских чтений. Значительная часть опубликованного варианта книги была написана в те дни неопределенности и ожидания. В конце ноября последовал новый удар: метастазы были обнаружены в спинном мозге, и Джонни стало трудно ходить. С тех пор его состояние начало быстро ухудшаться, хотя оставалась небольшая надежда на то, что лечение и уход позволят хотя бы на время приостановить роковую болезнь.

К январю 1956 г. Джонни оказался прикованным к инвалидному креслу, но он продолжал принимать посетителей, требовал, чтобы его ежедневно привозили в служебный кабинет, и продолжал работать над рукописью. Силы его заметно таяли день ото дня. Все поездки и выступления мало-помалу пришлось отменить, все, кроме одного — Силлименовских лекций. Оставалась надежда, что облучение спинного мозга позволит ему хотя бы на время собраться с силами и отправиться в Нью-Хэвн, чтобы выполнить столь много значившее для него обязательство. Но даже в расчете на самый благоприятный исход лечения Джонни пришлось обратиться к комитету по проведению Силлименовских чтений с просьбой сократить число лекций до одной-двух, ибо напряжение недельного цикла лекций было бы опасным в его ослабленном состоянии. К марту все ложные надежды пришлось оставить. Вопрос о том, чтобы Джонни мог куда-нибудь поехать, отпал сам собой. И снова Йельский университет с неизменной готовностью и пониманием не отменил его лекций, а предложил представить рукопись, с тем чтобы кто-нибудь мог прочитать ее вместо Джонни. Несмотря на все усилия, Джонни не смог завершить работу над рукописью в намеченное время. Судьба сложилась так, что он вообще не смог закончить ее.

В начале апреля Джонни положили в госпиталь Уолтера Рида, из которого он так и не вышел до самой смерти, последовавшей 8 февраля 1957 г. Незаконченная рукопись отправилась вместе с ним в госпиталь, где он предпринял еще несколько попыток поработать над ней. Но к этому времени болезнь явно взяла верх, и даже исключительный разум Джонни оказался не в силах побороть телесную слабость».

ЭПИЛОГ

Еще при жизни Джон фон Нейман стал легендой. Он был удостоен высших академических почестей. Был избран членом Академии точных наук (Лима, Перу), Академии деи Линчеи (Рим, Италия), Американской академии искусств и наук, Американского философского общества, Ломбардского института наук и литературы, Национальной академии США, Нидерландской королевской академии наук и искусств, почетным доктором многих университетов в США и за рубежом.

Мы начали свой рассказ о фон Неймане словами из статьи Н. Бурбаки, написанными как бы о нем, и хотим завершить словами, которыми Гильберт закончил свой знаменитый доклад на втором Международном математическом конгрессе в 1990 г.: «Но,— спросим мы,— при расширении математического знания не становится ли в конце концов невозможным для отдельного исследователя охватить все его части? В качестве ответа я хочу сослаться на то, что существо математической науки таково, что каждый действительный успех в ней идет рука об руку с нахождением более сильных вспомогательных средств и более простых методов, которые облегчают понимание более ранних теорий и устраняют затруднительные старые рассуждения, поэтому отдельному исследователю, благодаря тому что усвоит эти более сильные вспомогательные методы, удастся легче ориентироваться в различных областях математики, чем это имеет место для какой-нибудь другой науки.

Единый характер математики обусловлен внутренним существом этой науки; ведь математика — основа всего точного естествознания. А для того чтобы в совершенстве выполнить это высокое назначение, пусть в грядущем столетии она обретет гениальных мастеров и многочисленных, пылающих благородным рвением приверженцев!»

Одним из таких мастеров и был Джон фон Нейман.

ПРИЛОЖЕНИЕ

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В НАУКАХ И В ОБЩЕСТВЕ*

Джон фон Нейман

В действительности мой доклад посвящен возможным направлениям развития Математики в не слишком далеком будущем. Во время предыдущего доклада я с чувством восхищения и зависти слушал профессора Спитцера, который поведал слушателям о ближайших перспективах своей науки. Проф. Спитцер рассказал широкой аудитории представителей естественных и гуманитарных наук о возможных направлениях Астрономии, не вдаваясь в детали, представляющие большой интерес для астрономов, но не способных увлечь широкую публику. В астрономии такое возможно.

В математике такого рода задача необычайно трудна. Если начать говорить о сугубо математических проблемах, что вполне уместно при обсуждении будущего, то очень быстро углубляешься в дебри проблем, находящих отклик только среди математиков. Поэтому я буду ориентироваться на иной круг слушателей и расскажу о роли математики в интеллектуальной жизни и в обществе.

С самого начала необходимо дать ответ на вопрос, возникающий во всех областях науки, как естественных, так и гуманитарных. Правда, в математике этот вопрос обретает особенно четкую и предельно ясную постановку. Речь идет о том, чем полезна математика, велика ли польза от нее, насколько важна польза от математики, стоит ли заниматься наукой ради науки или наукой надлежит заниматься лишь постольку, поскольку она приносит пользу обществу. Думаю, что, учитывая отведенные мне десять минут, я поступлю оптимально, если попытаюсь обрисовать, насколько трудна затронутая проблема и насколько она опасна, а затем поделюсь с аудиторией кое-какими соображениями на эту тему.

Позвольте мне привести притчу немецкого поэта Шиллера. В ней Шиллер приводит вымышленный разговор между Архимедом и его учеником. Молодой ученик выражает учителю свое восхищение наукой и жаждет быть посвященным в «божественную науку, которая только что спасла Государство» (имеются в виду созданные Архимедом боевые машины и устройства, которые помогли жителям Сиракуз выдержать осаду римского войска). В ответ Архимед произносит несколько напыщенную речь, в которой замечает восторженному юноше, что наука действительно *божественна*, но она была божественна и *до того*, как помогла Государству, и что наука божественна независимо от того, помогает она Государству или не помогает.

В наше время такая позиция особенно важна и актуальна. Наука, насколько я могу судить, не становится ни на йоту более божественной от того, что она оказывает помощь Государству или Обществу. Но заняв такую позицию, необходимо принять во внимание и двойственное утверждение о том, что если наука не становится ни на йоту *более* божественной, когда она помогает обществу, то, возможно, она не становится ни на йоту *менее* божественной, когда причиняет обществу ущерб. Вопрос этот отнюдь не

* Von Neumann. T. The Role of Mathematics in the Sciences and in Society. Graduate Alumni, Tune 1954; Collected Works, vol.VI, pp. 477—490.— Пер. Ю. А. Данилова.

тривиален. Архимеду следовало бы упомянуть и о том, что наука не становится ни на йоту менее божественной, даже когда она абсолютно неспособна защитить Государство, ибо Сиракузы вскоре пали и были захвачены римлянами.

Итак, я намереваюсь говорить о пользе науки, сознавая всю трудность оценки в таком контексте важности пользы науки в повседневной жизни, ее пользы для Общества, не вдаваясь при этом в обсуждение места математики в Обществе, воздействия, оказываемого математикой на всех нас в целом, и особенно воздействия, оказываемого ей за пределами группы профессионалов.

Весьма интересно также выяснить, какое воздействие математика оказывает на группу профессионалов. Действие же ее внутри группы профессионалов носит совершенно особый характер, который трудно себе представить. Что касается общих и внешних воздействий, то математика, несомненно, несет в себе нечто необычайно важное, а именно устанавливает некие эталоны объективности, эталоны истины. Весьма важно, что математика располагает средствами, позволяющими устанавливать эти эталоны независимо от чего бы то ни было, независимо от эмоционального состояния и моральных проблем. Очень важно осознать следующее: объективные критерии истины возможны, стремление достичь их не является ни внутренне противоречивым, ни в каком-то смысле нечеловеческим. Эта истина отнюдь не самоочевидна, и постижение ее восходит не к столь далекому прошлому. Самый престиж логики как таковой, науки как таковой, по-видимому, связан с ролью науки в нашей жизни и с ролью математики в ее совершенно абстрактной форме — в науке.

И снова мы сталкиваемся с тем, что внутренняя истинность подобных утверждений может быть спорной. Важно другое — то, что такие утверждения вообще могут быть высказаны и что можно нарисовать точную и подробную картину их содержания. Возможно это потому, что математика позволяет построить зримый образ того, как должна выглядеть система таких эталонов. Иначе говоря, безотносительно к тому, реальны или не реальны даваемые математикой объективные эталоны истины, мы обретаем возможность гораздо более осмысленно судить о предмете *после того*, как непосредственно и воочию ознакомимся с тем, как он выглядел бы, если бы существовал.

В подтверждение мы могли бы сослаться на несколько математических примеров. Как конкретно выбрать эти примеры? Еще один вопрос: если выбранные примеры не приведут к немедленному успеху, то какова в точности та система идей, для которой верны экстремальные утверждения-эталоны?

Многое еще можно было бы сказать по этому поводу и о роли математики в установлении возможности объективных эталонов истины. Позвольте мне сразу же упомянуть о выдвигаемых против этого возражениях. Широко обсуждалось возражение, суть которого сводится к тому, что даже если бы математика могла бы устанавливать абсолютные эталоны истины, они все равно не имели бы абсолютного значения для всего мира. Не думаю, чтобы я мог сообщить вам много нового на эту тему. Полагаю, что все мы сталкивались с этой проблемой и у всех имеются различные методы разрешения ее, удовлетворяют ли они нас или не удовлетворяют. Хочу отметить, однако, одну сторону проблемы, носящую более технический характер: сомнению можно подвергнуть и основополагающие утверждения о том, являются ли математические эталоны истинно объективными. Иначе говоря, не обязательно истинно утверждение о том, что математический метод есть нечто абсолютное, ниспосланное нам свыше, или нечто такое, что после того, как мы овладели им, было явно истинным и остается истинным с тех пор. Или, точнее, открывшаяся нам истина *могла* не вызывать сомнений в момент ее постижения, но с тех пор могла перестать быть истиной. Профессиональное мнение математиков относительно того, что такое математическая строгость, подвержено весьма серьезным флуктуациям. Упомяну лишь одно далеко не самое важное обстоятельство. На моем личном опыте, охватывающем лишь около тридцати лет, представление о математической строгости колебалось столь значительно, что мое личное и искреннее убеждение относительно того, как надлежит понимать математическую строгость, изменялось по крайней мере дважды. И это на протяжении короткого периода жизни одного индивидуума! Если же мы возьмем более продолжительный период, например с начала XVIII века, то обнаружим еще большее число серьезных флуктуаций в толковании того, что надлежит считать строгим математическим доказательством.

То, что принимали за математическое доказательство великие аналитики XVIII века, абсолютно неприемлемо в наше время. Правда, математики прошлого отстаивали свои убеждения с определенным чувством вины, но во многих случаях это внешне никак не проявлялось. Верно и то, что в XIX веке среди математиков были вполне искренние разногласия относительно того, можно ли считать доказательством или нет конкретное доказательство одной теоремы, предложенное одним из величайших математиков Риманом.

На моем личном опыте в начале XX столетия в двух случаях возникли весьма серьезные и содержательные дискуссии относительно того, что такое фундаментальные основания математики, относительно того, является ли логически тупиковой обширная глава математики или нет. В двадцатых годах (и несколько раньше) критика этих проблем показала со всей очевидностью, что никакой ясности в вопросе о том, как именно следует понимать абсолютную строгость, и, в частности, следует ли ограничиваться использованием только таких разделов математики, обоснованность которых не подлежит сомнению, нет. Выяснилось, однако, что относительно значительной части математики мнения существенно расходились! Одни математики считали, что не следует брать под сомнение любой раздел математики, если он используется. Другие полагали, что не следует использовать больше того, что удалось обосновать самой придирчивой критике. Третьи (и таких нашлось достаточно много) были убеждены, что даже если обоснованность какого-то раздела математики по тем или иным причинам вызывает сомнения, это не должно мешать его использованию. Третья группа математиков охотно приняла бы следующий манифест: разделы математики, пусть даже не вполне обоснованные с точки зрения критиков, но убедительно доказавшие свою полезность, в особенности для внутреннего употребления братства математиков (иначе говоря, в тех случаях, когда в «сомнительных» областях удается построить красивые математические теории), в конечном счете имеют прочные основания, быть может, более прочные, чем построения теоретической физики. Но что бы ни говорили критики, теоретическая физика опирается на прочный фундамент. Почему же следует считать недостаточно обоснованной область науки, которая, возможно, даже сослужила теоретической физике немалую службу, только потому, что она не на 100 % отвечает математическому идеалу строгости, и почему ей не следует заниматься? Возможно, все это звучит для вас странно, как призыв к снижению уровня требований, но именно таково было мнение, разделявшееся большой группой людей,— мнение, которое разделял и я, ибо был одним из них.

Мне не хотелось бы вдаваться в подробности этой критики оснований математики. Она связана с очень трудным эпистемологическим вопросом о том, правомочно ли рассматривать множества элементов, число которых не конечно, или; если вы имеете дело с бесконечным набором математических понятий, что означает общеутвердительное (или общеотрицательное) суждение о таком множестве, какой смысл имеет утверждение о том, что в этом множестве возможно то-то и то-то. Означает ли это, что у вас имеется конкретный пример? Означает ли это, что вы располагаете какими-то другими методами, позволяющими доказать существование такого примера? Есть ли способ, позволяющий установить существование примера, не предъявляя его? Одним из величайших сюрпризов для всех нас было открытие того, что общепринятые методы математики в действительности оказались своего рода трюками, окольными рассуждениями, позволявшими доказывать существование примера, не предъявляя его. Представить себе, как такое могло случиться, довольно трудно. Тем не менее такое случилось и стало обычной математической практикой.

Этим я хотел бы сказать, что здесь имеются весьма трудные и деликатные вопросы и что невольно напрашивается вывод о сопричастности их проблемам оснований теоретической физики. У некоторых из вас может возникнуть ощущение, что математические истины не более чем правдоподобны, а правдоподобие не лишено оттенка удобства и что речь отнюдь не идет об абсолютной сверхчеловеческой надежности, которую традиционно принято считать одним из атрибутов математики.

Таким образом, здесь есть место для сомнений, и при оценке характера и роли математики об этих сомнениях не следует забывать.

Позвольте мне теперь поговорить о функциях математики в нашем мышлении. Расхожее мнение состоит в том, что математика — превосходная школа мышления, что она побуждает вас к логическому мышлению и что, овладев математикой, вы сможете мыслить более здраво, чем те, кто с ней не знаком. Не знаю, все ли из этих утверждений истинны, но первое из них, по-видимому, вызывает наименьшие сомнения. Однако я думаю, что математика имеет весьма большое значение и для мышления в таких областях, которые не отличаются столь высокой точностью. Один из наиболее важных вкладов математики в наше мышление состоит, как мне кажется, в том, что она продемонстрировала необычайную гибкость в формировании понятий, гибкость, труднодостижимую в нематематическом мышлении. С аналогичными до некоторой степени ситуациями мы встречаемся в философии, но соответствующие области философии далеко не столь убедительны.

Необычайная гибкость, о которой я только что упомянул, означает следующее. Пользуясь обычной терминологией, можно сказать, что речь идет о проблеме, сильно занимающей философов, занятых изучением некоторой области: обладают ли действующие в этой области законы такой природой, что каждое событие определяет непосредственно следующее за ним событие. Это так называемый *причинный* подход. Существует альтернативный подход, согласно которому законы могли бы быть *телеологическими*, т. е. одно событие не определяет следующее за ним событие, но каким-то образом весь процесс надлежит рассматривать как единое целое, подчиняющееся некоему общему закону, в силу чего целое может быть понято только как целое. Говоря, что это проблема занимает философов, я говорю не всю правду. Эта проблема играла и продолжает играть весьма большую роль, например, в биологии.

Я отнюдь не хочу сказать, что это плохой вопрос или что он не имеет смысла. Я утверждаю лишь, что он гораздо более тонкий, чем кажется. Значительная часть математического опыта свидетельствует, что если не проявлять величайшей осторожности, вопрос может оказаться не имеющим смысла.

Классическим, выдающимся примером этого, заслуживающим, по моему мнению, гораздо большего признания, является область, лежащая между теоретической физикой и математикой, но являющейся в действительности математикой. Я имею в виду математические методы классической механики. Разумеется, классическая механика составляет часть теоретической физики. Но коль скоро вы приняли принципы механики, остается чисто математическая часть работы: выразить эти принципы на математическом языке и исследовать математическими средствами, как найти решения задачи, сколько решений она допускает и т. д. Сюда же относится и вопрос о том, как сформулировать одни и те же основополагающие принципы в различных математических формах, которые все эквивалентны, поскольку выражают одно и то же, но формально выглядят совершенно различными и поэтому порождают совершенно различные технические подходы к решению задач. Говоря общо, можно сказать, что речь идет о различных аспектах понимания проблемы.

Один из простейших фактов о механике состоит в том, что ее можно представить в одной из нескольких эквивалентных математических форм. Одна из таких форм — ньютоновская: состояние системы определяется не только положением каждой из ее частей, но и скоростью каждой части в тот же момент. Определенное таким образом состояние однозначно задает ускорение и, таким образом, положение и скорость в следующий момент. Повторяя этот процесс, можно определить состояние системы в сколь угодно далеком будущем, а также в прошлом. Иначе говоря, ньютоновская механика строго *причинна*: если вы знаете состояние системы в данный момент, то тем самым вы можете определить состояние системы в следующий момент, а повторяя процедуру, и в любой момент в будущем.

Вторая формулировка механики — на основе принципа наименьшего действия, который я не буду описывать математически. Он утверждает следующее. Если вы рассматриваете полную историю системы (под системой я понимаю любую механическую систему; это может быть планета, плывущая в космическом пространстве, рассматриваемая для упрощения как материальная точка, или такое сложное сооружение, как локомотив, или что угодно другое) — так вот, если вы рассматриваете полную историю системы между какими-то двумя моментами времени (например, ее состоянием сейчас и через пять минут или ее состоянием миллиард лет назад и сейчас, или какими-то другими комбинациями моментов), то знание полной истории позволяет вам вычислить некоторые характеристики и, в частности, интеграл от энергии, умноженной на время. Реальная история системы обращает эту величину в минимум. Это — явно *телеологический* принцип. Действительно, история не определяется ни одним одномоментным событием, необходимо рассмотреть всю историю и минимизировать численное значение интеграла по всем событиям.

Первый подход строго причинный, действующий от одной точки во времени к другой. Второй — строго телеологический и определяет с помощью некоторых оптимальных свойств только всю историю в целом, а не какую-то часть ее. Тем не менее оба подхода строго эквивалентны: реальная история движения, выводимая из одного подхода, в точности совпадает с историей, следующей из другого подхода. Вопрос о том, является ли механика причинной или телеологической (который в какой-нибудь другой области был бы весьма существенным вопросом, требующим ответа «да» и «нет»), в механике становится бессмысленным, так как зависит от выбора формы записи уравнений. Я далек от мысли иронизировать, когда говорю о том, как важно не забывать о телеологических принципах, когда занимаешься биологией, но полагаю, что осознать всю важность этих принципов в биологии невозможно, пока мы не поймем, что в механике проблема эквивалентности исчезает и становится бессмысленной, стоит лишь встать на несколько более изощренную точку зрения. Вполне возможно, что если мы до конца разберемся в другой области, то там произойдет то же самое.

Понимание такого рода, вероятно, никогда не было бы достигнуто без чисто математических трюков с преобразованиями уравнений механики; именно чисто математическое искусство преобразований и гибкость характеристик математической формулировки и переформулировки позволили осознать столь важный факт. Речь идет не о чистом мышлении на любом абстрактном уровне, а об особой математической процедуре.

В этой связи я хотел бы обратить внимание и на еще одно обстоятельство. (Как и прежде, я буду смешивать теоретическую физику с математикой. Приводимые мной примеры заимствованы из теоретической физики, но технические подробности получения результатов, о которых я упомяну, являются чисто математическими манипуляциями. Таким образом, речь идет о роли математики в достижении понимания, а не о роли теоретической физики: последняя достаточно важна, но представляет собой нечто иное, чем первая.) Утверждение, которое высказывается часто и свободно, особенно когда суть дела не проанализирована до конца, как в данном случае, состоит в том, что существует различие между проблемами, допускающими математическое рассмотрение, и вещами, предоставленными игре случая.

Такого рода утверждение правдоподобно и оставалось весьма правдоподобным до тех пор, пока лет двести назад не была создана теория вероятностей, сделавшая возможным строгое математическое рассмотрение недетерминированных и случайных событий. И снова для осознания одного весьма важного обстоятельства понадобился математический подход: если событие не детерминировано строгими законами, а предоставлено случаю, коль скоро четко сформулировано, что именно надлежит понимать под этим (и понятое может быть сформулировано со всей определенностью), то оно так же доступно количественному анализу, как если бы было строго детерминировано. Разумеется, количественный анализ не скажет вам, что произойдет, так как в данном случае это и не предполагается, но зато скажет вам, сколько благоприятных исходов вы скорее всего получите, если проведете миллион испытаний. Количественный анализ скажет вам также, что чем больше число испытаний, тем выше правдоподобие предсказания. Поведает количественный анализ и о том, какими комбинациями случайностей вы можете пренебречь как абсурдными, несмотря на неопределенности общих законов.

Теория вероятностей служит примером сказанного, но еще более поразительным примером такого математического подхода может служить современная форма квантовой механики. Оказывается, что элементарные процессы (процессы, в которых участвуют элементарные частицы, атомы или, возможно, субатомные частицы) вопреки всему известному ранее не подчиняются законам типа законов механики, причем не подчиняются вполне явно, поскольку законы механики в их причинной форме гласят, что если вам известно состояние системы теперь, то вы можете точно предсказать состояние системы в скором будущем; повторяя процедуру, вы можете предсказать состояние системы и в любой другой момент времени в будущем. Оказывается, что в случае элементарных процессов мы встречаемся с совершенно иной ситуацией. Наилучшее описание, которое может быть дано сегодня,— далеко не последнее (не исключено, что последнее описание снова вернет нас к причинной форме, хотя большинство физиков считают такой поворот событий маловероятным), но во всяком случае лучшее из имеющихся на сегодня состоит в признании того, что вы не располагаете полной детерминированностью и что состояние системы в настоящий момент отнюдь не определяет ее состояние ни непосредственно в следующий момент, ни позже. Разумеется, состояние в настоящий момент времени может быть несовместимо с допущениями относительно состояния, в которое система перейдет часом позже, или некоторые из допущений могут оказаться в высшей степени невероятными. Тем не менее многие возможности остаются неисключенными; можно подозревать, что такого рода идея не поддается описанию точными математическими средствами.

Недетерминированный характер элементарных процессов был открыт методом математической физики, а затем выкристаллизован и облечен в точную форму средствами математики. Для этого пришлось воспользоваться весьма изощренными математическими теориями, и обнаружились весьма необычные вещи. Например, система, подобная упоминавшейся выше, причинно непредсказуема. Зная ее состояние в настоящий момент, вы не можете вычислить ее состояние в следующий момент. Существует, однако, другой объект, причинно предсказуемый, а именно так называемая волновая функция. Эволюция волновой функции может быть вычислена от одного момента к следующему, но действие волновой функции на наблюдаемую реальность сводится только к вероятности. То, что такая комбинация вообще существует, что она помогает расшифровывать экспериментальные данные и что она может быть выведена из эксперимента, есть снова нечто такое, что было бы совершенно невозможно, если бы не существовал математический метод. И на этот раз огромный вклад математического метода в эволюцию нашего реального мышления состоял в том, что он сделал возможными такого рода логические циклы и наполнил их весьма конкретным содержанием. Математический метод позволил обращаться с волновыми функциями вполне надежно и без каких бы то ни было технических трудностей.

Еще одна проблема, которую мы не можем сегодня обсудить так подробно, как нам хотелось бы, но о которой нам многое известно, состоит в том, что было бы вполне разумно ожидать возникновение порочного круга при попытке анализировать субстрат, порождающий науку — функцию человеческого интеллекта. Вся совокупность данных, накопленных исследователями, работавшими в этой области, свидетельствует о том, что система, функционирование которой делает возможной интеллектуальную деятельность, иначе говоря, нервная система человека, может быть исследована физическими и математическими методами. Тем не менее существует, по-видимому, некоторое противоречие в попытке представить себе, что в любой момент времени индивидуум должен быть полностью информирован о состоянии своей нервной системы в тот самый момент времени. Вполне вероятно, что существующие здесь абсолютные ограничения также могут быть выражены в математических терминах и только в математических терминах.

Сегодня мы уже располагаем явлениями такого типа. Теоретическая физика указала две области физического мира, в которых существуют абсолютные пределы знания. Одна из этих областей — теория относительности, другая — квантовая теория. Как показывают лучшие описания, которыми мы располагаем сегодня, в обеих этих областях существуют абсолютные пределы познаваемого. Однако выразить их математически очень точно мы можем, если воспользуемся понятиями, которые были бы очень загадочными при попытке выразить их любыми другими средствами. И в теории относительности, и в квантовой теории всегда существует нечто такое, что не может быть известно, хотя вы обладаете значительной свободой контроля этого нечто. Например, в квантовой механике встречается следующее утверждение: вы никогда не можете знать одновременно положение и скорость элементарной частицы, но вы всегда можете выбрать по своему усмотрению, какую из двух величин следует измерить. Любая информация, которую вы получаете об одной величине, искажает имеющуюся информацию о другой величине. Ясно, что ситуация здесь весьма нетривиальна, и было бы совершенно безнадежно пытаться разрешить ее или хотя бы разобраться в ней с помощью каких-нибудь других методов, кроме математических, или описывать ее какими-нибудь другими методами, кроме математических, и тем более пытаться прогнозировать или предсказывать дальнейшее развитие событий с помощью других методов, кроме математических.

Переходя к развитию математики в ближайшем будущем, я опасаюсь, что не смогу избежать чрезмерной конкретности. Мне хотелось бы ограничиться несколькими общими замечаниями о будущем математики. Я считаю, что обстоятельства ее будущей эволюции более поучительны для широкой научной аудитории, чем краткое напоминание о том, что уже произошло, тем более поучительно то, что, по мнению кого-то, должно произойти в ближайшие десять лет. Обстоятельства развития математики в столь близком будущем весьма типичны и весьма поучительны.

И снова при рассмотрении роли математики в повседневной жизни или в других науках бросается в глаза одно очень подозрительное обстоятельство. Существуют обширные разделы математики, которые оказались весьма полезными в практических приложениях. Но эти «практические приложения» иногда оказываются практичностью весьма косвенного свойства.

Например, математик обычно считает, что математическая теория приносит непосредственную пользу, если она может быть полезна в теоретической физике. После этого ему не остается ничего другого, как признать, что идея в самой теоретической физике полезна только в том случае, если она полезна в экспериментальной физике. Затем вы должны признать, что понятие в экспериментальной физике по обычным критериям полезно, если оно полезно в технике. Вы можете сделать еще один шаг и после техники. Таким образом, все представления о пользе весьма ограничены, и, говоря о пользе, мы имеем в виду, что каждая наука должна иметь приложения за своими пределами и что в последовательности приложений существует некая общая направленность на немедленную социальную пользу. Но если не придираться по мелочам к определению пользы и учесть, что по стандартам математика полезно все лежащее за рамками математики, то нельзя не признать полезность больших разделов математики. И действительно, очень обширные разделы математики полезны по сумме всех перечисленных выше критериев. Все эти математические теории действительно привели к важным переменам в мире, в котором мы живем, как правило, несколько косвенным образом, обычно после вторжения в некоторую другую область, но тем не менее так, что математические методы имеют жизненно важное значение.

Весьма интересно, что по причинам совершенно другого характера авторы большинства математических теорий, разрабатывая их, весьма мало заботились о приносимой их творениями пользе и часто даже не подозревали, что те могут впоследствии приносить какую-то пользу. Такая ситуация весьма характерна. Я мог бы упомянуть о некоторых разделах алгебры матриц и операторов, которые были созданы во времена, когда ничто не позволяло даже подозревать, что через двадцать или сто лет они будут играть важную роль в (не существовавшей тогда) квантовой механике. То же в равной мере относится и к открытиям в области дифференциальной геометрии: когда они были сделаны, не было абсолютно никаких причин ожидать, что в один прекрасный день появится общая теория относительности и что эта общая теория относительности использует именно геометрию такого типа. Все эти математические теории имеют жизненно важное значение. Число примеров такого рода легко можно было бы увеличить.

Должен сказать, однако, что имеются и примеры противоположного толка. Один из самых важных контрпримеров — дифференциальное и интегральное исчисление, созданное Ньютоном для решения конкретных задач теоретической физики.

Но как бы то ни было, огромная часть математики становилась полезной без малейшего намерения быть полезной, причем в ситуации, когда никто не знал, в какой области она могла бы быть полезной. Нет никаких признаков того, что так будет продолжаться и впредь. Верно, однако, в целом, что в математике существует определенный период задержки между появлением математического открытия и тем моментом, когда оно становится полезным. Продолжительность этого периода может быть любой — от тридцати до ста лет, а в некоторых случаях и больше. Вся система — математика — функционирует, казалось бы, без определенного направления и без малейшего намерения производить что-нибудь полезное. Разумеется, следует иметь в виду, что сказанное верно и для общего развития науки. Иначе говоря, стоит обратить внимание на то, какие процессы приводят значительную часть науки к такой фазе ее развития, когда она начинает влиять на повседневную жизнь общества, как физика возникла из механики и что первоначальные открытия в области механики были связаны главным образом с астрономией и не были никак связаны с областями ее приложений в наше время.

Сказанное в полной мере относится ко всей науке. Ее успехи были достигнуты в основном за счет того, что были преданы забвению первоначальные цели и намерения (если какие-то намерения вообще были). Отвергая исследование ради прибыли и руководствуясь исключительно критериями интеллектуального изящества, наука неукоснительно придерживалась этого правила, которое в конечном счете позволяло ей уходить вперед несравненно дальше, чем любой строго утилитарный курс.

Думаю, что это явление может быть великолепно прослежено на примере математики и что каждый, кто занимается наукой, имеет прекрасную возможность оценить правильность высказанных мной замечаний. Я считаю, что необычайно поучительно проследить роль науки в повседневной жизни и отметить, к каким неожиданным и великолепным результатам приводил и приводит принцип «вольного поиска».

ЛИТЕРАТУРА

Фон Нейман Дж. Общая и логическая теория автоматов.— В кн.: Тьюринг А. Может ли машина мыслить? — М.: Физматгиз, 1960.— С. 59—102.

Фон Нейман И. (Дж.) Математические основы квантовой механики.— М.: Наука, 1964.

Фон Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент.— В сб.: Автоматы.— М.: ИЛ.— С. 68—139.

Фон Нейман Дж. Вычислительная машина и мозг — В сб.: Кибернетический сб.— 1960.— № 1.— С. 11—60.

Фон Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов.— М.: Мир, 1971.

Фон Нейман Дж, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение.— М.: Наука, 1970.

Вигнер Е. Джон фон Нейман — В кн.: Вигнер Е. Этюды о симметрии.— М.: Мир, 1971.

Фон Нейман Дж. К теории стратегических игр.— В сб.: Матричные игры.— М.: Физматгиз, 1961.— С. 173—204.

Фон Нейман Дж. Об одной нулевой игре двух лиц, эквивалентной задаче оптимального назначения.— В сб.: Матричные игры.— М., Физматгиз, 1961.— С. 145—155.

Фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу.— В 2-х т.— М.: Наука, 1987.

Фон Нейман Дж. Математик // Природа.— 1983.— № 2.

Данилов Ю. А. Математик фон Нейман и его «Математик» // Природа.— 1983.— № 2.

Heims S. J. John von Neumann and Norbert Wiener: From Mathematics to the Technologies of Life and Death.— Cambridge, Mass.: MIT Press, 1980.

Von Neumann J. Collected Works, v. 1—6.— New York, Oxford, London, Paris: Pergamon Press, 1961—1963.

Von Neumann J. The Computer and the Brain.— New Haven: Iale University Press, 1958.

Bulletin of the American Mathematical Society, 1958, 64, 3, Part 2. John von Neumann (1903—1957).

Научно-популярное издание

Данилов Юлий Александрович

ДЖОН ФОН НЕЙМАН

Гл. отраслевой редактор Г. Г. Карвовский
Редактор И. Г. Вирко
Мл. редактор С. С. Патрикеева
Художник Л. П. Ромасенко
Худож. редактор М. А. Бабичева
Техн. редактор Т. Н. Захаренкова
Корректор В. В. Каночкина

ИБ № 11523

Сдано в набор 15.10.90. Подписано к печати 21.11.90
Формат бумаги 70Х100 $^1/_{16}$. Бумага офсет. № 2. Гарнитура «Литературная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,90.
Усл. кр.-отт. 8,12. Уч.-изд. л. 4,26. Тираж 20 341 экз.
Заказ 2106. Цена 20 коп.
Издательство «Знание». 101835, ГСП, Москва, Центр,
проезд Серова, д. 4. Индекс заказа 904312.
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР по печати
142300, г. Чехов Московской области

Уважаемые читатели наших серий «Вычислительная техника и ее применение» и «Математика, кибернетика»

В 1990 г. вышли в свет:

Вычислительная техника и ее применение

Операционные системы
Игры, в которые играют люди...
Периферийные устройства ЭВМ
Язык персональных вычислений

Где купить информацию?
Компьютер и иностранные языки
Компьютер в офисе
Пользователям бытового компьютера
Защита информации
Экспертные системы
Пользователям профессионального компьютера
Система коллективного пользования

Математика, кибернетика

Обобщенные функции и их применение
Поиск глобального оптимума
Геометрия чисел и целочисленное программирование
Диагностика управляющих систем
Синергетика и информация
Имитационные системы и модели
Статистическая хронология
Машинная графика в задачах проекционной природы
Математика и спорт
Машинная геометрия и графика
Современная культура и компьютеры

В 1991 г. в серии «Математика, кибернетика» предполагается выпустить:

Многоликие асимптотики (Методы анализа линейных колебательных систем)
Математическая физика с групповой точки зрения
Предельные циклы. Аттракторы (Современные проблемы синергетики)
Современные проблемы математики (Сборник переводных статей)
Комбинаторная геометрия
Вокруг бильярда... (из теории динамических систем)
Маска, я тебя знаю ... (Структурная идентифицируемость математических моделей)

20 коп. Индекс 70096

Адрес подписчика:

7-882

Издательство «Знание» — крупнейшее в стране издательство по выпуску научно-популярной литературы.

Издательство выпускает 40 серий подписных научно-популярных брошюр

Подписная научно-популярная серия

Издательство «Знание»

МАТЕМАТИКА КИБЕРНЕТИКА

Дорогой читатель!

Брошюры этой серии в розничную продажу не поступают, поэтому своевременно оформляйте подписку. Подписка на брошюры издательства «Знание» ежеквартальная, принимается в любом отделении «Союзпечати».

Напоминаем Вам, что сведения о подписке Вы можете найти в «Каталоге советских газет и журналов» в разделе «Центральные журналы», рубрика «Брошюры издательства «Знание»

Наш адрес:
СССР,
Москва,
Центр,
проезд Серова, 4