С. М. НИКОЛЬСКИЙ
М. К. ПОТАПОВ

АЛГЕБРА

ПОСОБИЕ ДЛЯ САМООБРАЗОВАНИЯ

Издание второе,
переработанное и дополненное

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.141
Н66
УДК 512 (075.4)

Рецензент член-корреспондент АН СССР *Л.Д. Кудрявцев*

Никольский С.М., Потапов М.К.

Н66 **Алгебра: Пособие для самообразования.** – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 416 с.: ил.
ISBN 5-02-014340-5.

Содержание книги соответствует программе по алгебре для 7–9-х классов средней школы. При подготовке второго издания (1-е изд. – 1984 г.) книга подверглась существенной переработке. В связи с изменением школьной программы по математике добавлен ряд тем: производные линейной и квадратичной функций, показательная и логарифмическая функции, десятичные логарифмы, тригонометрические формулы, начала программирования. Упрощено и улучшено изложение ряда разделов. К каждой главе добавлены исторические сведения.

Для поступающих в вузы и техникумы, а также для учителей.

$Н \frac{1602040000-020}{053(02)-90}$ 62-90

ББК 22.141

ISBN 5-02-014340-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Авторы думают, что данная книга будет полезна для самообразования. Она может быть также учебным пособием для школьников, лиц, готовящихся к поступлению в вузы и техникумы, и учителей. Ее содержание соответствует программе 7–9-х классов средней школы.

Весьма трудным вопросом с методической точки зрения является изложение эволюции понятия числа. Каким образом и когда должно вводиться понятие действительного числа?

Все согласны, что действительное число надо вводить как десятичную дробь, вообще говоря, бесконечную. Но на какой стадии обучения это понятие должно быть введено и каким образом – здесь уже имеются разные точки зрения.

Мы считаем, что чем раньше сказать, что действительное число есть бесконечная десятичная дробь, тем лучше, потому что при изучении математики рано приходится оперировать с длиной отрезка, числовой осью, системой координат, графиками, квадратными корнями. Разговоры об иррациональности и несоизмеримости с единицей значительно упрощаются, если у изучающего математику есть представление (пусть самое элементарное) о числе как бесконечной десятичной дроби.

С изложения этого вопроса мы и начинаем нашу книгу. Сначала напоминаем те сведения из арифметики, которые, надо полагать, уже знакомы и которые нам понадобятся. Дополняя эти сведения, получаем, что рациональное число представимо в виде десятичной периодической дроби и, обратно, любая периодическая дробь есть представление некоторого рационального числа.

Отметим, что нет необходимости при этом вводить понятие сходящегося ряда. Приводятся примеры непериодических дробей, которые и называются иррациональными числами.

Бесконечные десятичные дроби сравниваются так же, как конечные десятичные дроби. Что же касается арифметических действий над ними, то здесь уже приходится обращаться к приближенным методам, тем более что надо изучать элементы приближенных вычислений.

Понятия многочлена, в частности многочлена стандартного вида, и ненулевого многочлена вводятся, как обычно. Однако мы придерживаемся алгебраической точки зрения: буквы у нас не обязательно числа, обозначенные буквами. Методическая выгода этой точки зрения сказывается в особенности при рассмотрении алгебраических дробей. Алгебраическая дробь определяется как отношение одного многочлена к другому, отличному от нулевого. Перечисляются правила, которым подчиняются многочлены и алгебраические дроби. В частности, одно из правил гласит, что алгебраическую дробь можно сокращать на ненулевой многочлен.

Например, выражение $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ есть алгебраическая дробь, потому что его числитель и знаменатель – многочлены и при этом $a-b$ есть ненулевой многочлен.

Эту дробь можно сократить на ненулевой многочлен $a-b$: $\frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = \frac{a+b}{1} = a+b$. На этой стадии объясняется также, что если вместо букв в подобных алгебраических равенствах подставить числа, то получатся верные числовые равенства, если только их части (правая и левая) имеют смысл. К этой теме мы еще возвратимся, когда придется решать уравнения.

Длина отрезка определяется как число $a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots$, где α_0 – длина его с точностью до 1 с недостатком; α_0,α_1 – длина его с точностью до 0,1 с недостатком; $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2$ – длина его с точностью до 0,01 с недостатком и т.д. Мы только формулируем, но не считаем возможным объяснить, почему надо считать, что и, обратно, всякое число $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ есть длина некоторого отрезка.

Большое внимание уделяется графикам, особенно графикам линейной функции и функции $y=x^2$. Ведь с помощью графиков линейной функции решаются уравнения и системы уравнений первой степени, а график $y=x^2$ помогает понять, почему корней квадратных из положительного числа два – один положительный, а другой отрицательный.

Чтобы убедиться в существовании указанных квадратных корней из положительного числа y, появляется необходимость объяснить, почему график функции $y=x^2$ есть непрерывная кривая.

Приходится, таким образом, говорить о переменных, стремящихся к нулю, и их свойствах. Но этот разговор носит чисто описательный, интуитивный характер.

Мы вводим также понятие производной и первообразной для многочлена. Это полезно при изучении равноускоренного движения на уроках физики в 9 классе.

В книге кратко излагаются основы двоичной системы счисления и имеется глава, посвященная приближенным вычислениям.

Отметим далее, что в книге много внимания уделено решению линейных, квадратных и вообще рациональных уравнений и неравенств, а также систем таких уравнений и неравенств.

По идеям данной книги был написан учебник, прошедший экспериментальную проверку в ряде школ.

При подготовке второго издания сделаны улучшения в сторону большей элементарности введения понятия действительного числа, улучшено изложение темы квадратных уравнений (§ 14), добавлены параграфы (§ 27, 28), посвященные степени с действительным (не только рациональным) показателем, а также показательной и логарифмической функциям.

С добавлением главы "Тригонометрические формулы" наша книга полностью исчерпывает существующую школьную программу алгебры 7–9 классов. К более старшим классам средней школы (или к техникуму, или ПТУ) относятся § 20, 27, 28. § 36 "Начала программирования", написанный Н.С. Бахваловым, с небольшими изменениями заимствован из пробного учебника для восьмого класса средней школы С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова. В конце глав введены исторические сведения.

Таким образом, главы этой книги при добавлении к ним достаточного количества упражнений составляют учебник алгебры 7–9-х классов средней школы.

ГЛАВА 1

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

1. Простые и составные числа. Числа

1; 2; 3; 4; 5; ...

называются *натуральными* или *целыми положительными числами.*

Мы знаем, что сумма и произведение натуральных чисел суть числа натуральные. Разность же натуральных чисел есть натуральное число только в том случае, если уменьшаемое больше вычитаемого. Частное двух натуральных чисел тоже не всегда есть натуральное число.

Если при делении одного натурального числа на другое в частном получается натуральное число, то говорят, что *первое число делится на второе нацело.* Если же при делении одного натурального числа на другое в частном получилось не целое (дробное) число, то говорят, что *первое число не делится на второе нацело.*

Например, 25 делится на 5 нацело, а 7 не делится на 3 нацело. Слово "нацело" обычно в этих предложениях опускают. Таким образом, говорят, например, что

6 делится на 3; 30 делится на 5; 37 не делится на 4;

40 не делится на 6; 5 делится на 1.

Натуральные числа мы будем обозначать малыми латинскими буквами $p, q, \ldots$

Каждое натуральное число p делится на единицу:

$$p : 1 = p$$

и само на себя:

$$p : p = 1.$$

Среди натуральных чисел особое место занимают те, которые больше 1 и делятся только на 1 и на самих себя. Такие числа называют *простыми.*

Ниже приводится список первых 15 простых чисел:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47.

Все простые числа выписать невозможно, так как их бесконечно много. Любой список простых чисел можно пополнить еще одним простым числом, отличным от этих чисел.

Итак, *каждое простое число делится только на* 1 *и на само себя.* Непростые натуральные числа, большие 1, называются *составными.*

Ниже приводится список всех составных чисел, меньших 30:

4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 27; 28.

Каждое составное число делится на себя, на 1 и еще хотя бы на одно натуральное число.

Принято считать, что единица не является ни простым, ни составным числом. Таким образом, множество натуральных чисел состоит из простых чисел, составных чисел и единицы.

Вопросы

1. Какое число называется простым?
2. Какое число называется составным?
3. Является ли 1 простым числом?
4. Является ли 1 составным числом?

Упражнения

1. Выяснить, какие из следующих чисел являются простыми и какие составными:

41; 57; 1121; 793.

2. Выписать первые 25 простых чисел в порядке их возрастания.
3. Выписать все составные числа, не превышающие 50, в порядке их возрастания.

2. Степень числа. Иногда приходится перемножать одно и то же число само на себя несколько раз. При этом применяют сокращенную запись.

Например, если число 2 перемножить само на себя шесть раз, то произведение

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

называют *шестой степенью числа* 2 и обозначают 2^6, т.е.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6;$$

при этом число 2 называют *основанием* степени, а число 6 – *показателем* степени.

Аналогично произведение пяти сомножителей, каждый из которых равен 3, называют пятой степенью числа 3 и обозначают 3^5, т.е.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5.$$

В этом примере показатель степени равен 5, а основание степени равно 3.

Приведем еще примеры:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256;$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5 = 100\,000.$$

Вообще *k-й степенью числа p* называется произведение k множителей, каждый из которых равен p:

$$p^k = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k \text{ раз}} \qquad (k > 1).$$

Число p называют *основанием* степени, а число k – *показателем* степени.

Число p в *первой степени* надо понимать как само число p, т.е.

$$p^1 = p.$$

Легко видеть, что верны следующие равенства:

$$2^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6^2;$$

$$5^1 \cdot 6^1 = 5 \cdot 6 = 30^1.$$

Эти равенства подтверждают справедливость следующего свойства степеней:

1) *степень произведения двух чисел равна произведению тех же степеней этих чисел*, т.е.

$$(pq)^n = p^n q^n.$$

Верны также равенства:

$$3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 3^{2+4};$$

$$5 \cdot 5^3 = 5 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 5^{1+3}.$$

Эти равенства подтверждают справедливость следующего свойства степеней:

2) *при умножении степеней одного и того же числа показатели степеней складываются*, т.е.

$$p^n p^m = p^{n+m}.$$

Наконец, рассмотрим следующие равенства:

$$(7^3)^2 = 7^3 \cdot 7^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6 = 7^{3 \cdot 2};$$

$$(2^4)^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12} = 2^{4 \cdot 3}.$$

Эти равенства подтверждают справедливость следующего свойства степеней:

3) *при возведении степени числа в степень показатели степеней перемножаются*, т.е.

$$(p^m)^n = p^{mn}.$$

Вопросы

1. Что называется k-й степенью числа p?
2. Что является показателем и основанием степени в записи p^k?

3. Чему равна первая степень числа?

4. Чему равно произведение степеней с одним и тем же показателем? Приведите примеры.

5. Чему равно произведение степеней чисел с одним и тем же основанием? Приведите примеры.

6. Чему равен показатель степени при возведении степени числа в степень? Приведитем примеры.

Упражнения

1. Вычислить третью степень следующих чисел:

а) 4; б) 5; в) 7; г) 100.

2. Найти показатель степени, в которую надо возвести число 2, чтобы получились числа:

а) 256; б) 1024.

3. Делители натурального числа. *Делителем* данного натурального числа называется натуральное число, на которое делится (нацело) данное число.

Из этого определения следует, что простое число p имеет только два делителя – числа 1 и p, а составное число n кроме делителей 1 и n имеет еще по крайней мере один делитель.

Так, делителями числа 13 являются числа 1 и 13, делителями числа 4 являются числа 1, 2, 4, делителями числа 12 являются числа 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Если делитель есть простое число, то он называется *простым делителем.* Так, число 13 имеет один простой делитель 13, число 4 – один простой делитель 2, а число 12 – два простых делителя 2 и 3. Каждое натуральное составное число можно представить как произведение некоторых степеней различных его простых делителей, например

$$28 = 2^2 \cdot 7; \quad 22 = 2 \cdot 11; \quad 81 = 3^4; \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2.$$

Правые части этих равенств называются *разложениями на простые множители чисел,* записанных в левых частях.

Таким образом, *разложить данное натуральное число на простые множители – значит представить его как произведение различных его простых делителей, взятых в соответствующих степенях.*

Можно доказать, что такое разложение единственно для каждого натурального числа, т.е. что у него нет других простых делителей и что его простые делители нельзя записать в других степенях.

Покажем на примере числа 90, как разлагаются на простые множители натуральные числа:

90 делится на простое число 2, поэтому

$$90 = 2 \cdot 45;$$

45 не делится на 2, но делится на простое число 3, поэтому

$$45 = 3 \cdot 15;$$

15 делится на 3, поэтому

$$15 = 3 \cdot 5.$$

Так как 5 – простое число, то процесс отыскания простых делителей закончен. Итак, получаем равенство

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Правая часть этого равенства есть разложение на простые множители числа 90. Этот процесс удобно записать так:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

В дальнейшем нас будут интересовать натуральные числа, которые других простых делителей, кроме 2 и 5, не имеют.

Разъясним, что понимается под выражением: "данное натуральное число m не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5".

Во-первых, m может быть степенью числа 2, т.е. равняться одному из следующих чисел:

$2;\ 2^2 = 4;\ 2^3 = 8;\ 2^4 = 16;\ 2^5 = 32;\ \ldots$

Во-вторых, m может быть степенью числа 5, т.е. равняться одному из следующих чисел:

$5;\ 5^2 = 25;\ 5^3 = 125;\ 5^4 = 625;\ \ldots$

В-третьих, m может быть произведением некоторой степени числа 2 на некоторую степень числа 5. Примерами таких чисел являются числа

$2^2 \cdot 5^2 = 100;\ 2^3 \cdot 5^2 = 200;\ 2^4 \cdot 5 = 80.$

Наконец, m может быть единицей ($m = 1$). Ведь единица не имеет простых делителей.

Вопросы

1. Что называется делителем натурального числа? Приведите примеры.
2. Что называется простым делителем натурального числа? Приведите примеры.
3. Что значит "разложить на простые множители натуральное число"? Приведите примеры.
4. Как понимать выражение: "данное натуральное число m не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5"? Приведите примеры таких чисел.

Упражнения

1. Найти все делители чисел:

а) 17; б) 45; в) 113; г) 476; д) 32.

2. Найти все простые делители чисел;

а) 19; б) 54; в) 112; г) 232.

3. Написать пять натуральных чисел, не имеющих других простых делителей, кроме 2 и 5, и пять натуральных чисел, не обладающих этим свойством.

§ 2. Дроби

1. Обыкновенные и конечные десятичные дроби. *Положительным рациональным числом* называется число, которое может быть записано в виде

$$\frac{p}{q},$$

где p и q — натуральные числа. Число p называется *числителем* дроби, а число q — ее *знаменателем.*

Положительное рациональное число называется также *обыкновенной положительной дробью* или просто *дробью.*

Примеры дробей:

$$\frac{2}{3};\ \frac{6}{8};\ \frac{123}{150};\ \frac{8}{4};\ \frac{7}{1};\ \frac{7}{5}.$$

Любое натуральное число p можно записать в виде дроби

$$\frac{p}{1}\quad \left(p = \frac{p}{1}\right).$$

В этом параграфе мы будем изучать положительные дроби (положительные рациональные числа), но для краткости прилагательное "положительный" будем опускать, подразумевая его.

Для любого натурального числа n справедливо равенство (*основное свойство дроби*)

$$\frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}. \tag{1}$$

Например, $\frac{7}{3} = \frac{35}{15}$; $2 = \frac{10}{5}$; $\frac{17}{2} = \frac{85}{10}$; . . .

Можно сказать, что левая и правая части равенства (1) являются разными записями одного и того же положительного рационального числа.

Если числа p и q не имеют общих простых делителей, то дробь $\frac{p}{q}$ называется *несократимой*. Например, дробь $\frac{2}{3}$ несократимая, а $\frac{6}{8}$ сократимая.

Если $p < q$, то дробь $\frac{p}{q}$ называется *правильной.* Например, $\frac{4}{8}$ — правильная дробь, а $\frac{9}{8}$ и $\frac{8}{8}$ — неправильные дроби.

Если знаменатель q дроби $\frac{p}{q}$ равен 10, или 100, или 1000, или 10 000, . . . , т.е. если q есть некоторая степень числа 10, то обыкновенную дробь $\frac{p}{q}$ можно записать в виде *конечной десятичной дроби.*

Например, обыкновенные дроби

$$\frac{7}{100}; \quad \frac{12\,437}{1000}; \quad \frac{234}{100\,000}$$

записываются соответственно в виде следующих конечных десятичных дробей:

0,07; 12,437; 0,00234.

Каждая из этих конечных десятичных дробей называется *десятичным разложением соответствующей обыкновенной дроби.*

При этом пишут равенства

$$\frac{7}{100} = 0{,}07; \quad \frac{12\,437}{1000} = 12{,}437; \quad \frac{234}{100\,000} = 0{,}00234$$

и говорят, что данные обыкновенные дроби разложены в конечные десятичные дроби.

Надо иметь в виду, что, например, $\frac{7}{100}$ и 0,07 суть разные обозначения одного и того же числа. Первое обозначение – в виде обыкновенной дроби, а второе – в виде конечной десятичной дроби.

Очевидно также, что всякая конечная десятичная дробь может быть записана в виде обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$, где p – натуральное число, а q – некоторая степень числа 10. Например,

$$3{,}0122 = \frac{30122}{10^4}; \quad 0{,}00012 = \frac{12}{10^5}.$$

Итак, *если знаменатель q обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$ есть некоторая степень числа* 10, *то эта дробь может быть разложена в конечную десятичную дробь.* Верно и обратное утверждение: *конечная десятичная дробь представляет собой десятичное разложение обыкновенной дроби, знаменатель которой есть некоторая степень числа* 10.

Отметим, что натуральное число считается частным случаем конечной десятичной дроби, например

$3 = 3{,}0 = 3{,}00 = 3{,}000 = \dots$

На практике такими обозначениями пользуются широко. Если, например, в результате вычислений, которые производились с точностью до 1 копейки, получилось 3 р., то пишут 3,00 р., подчеркивая этим, что полученный результат вычислен с точностью до 1 копейки.

Вопросы

1. Что называется положительным рациональным числом?

2. Как называются числа p и q в записи дроби $\frac{p}{q}$?

3. Какая дробь называется несократимой?

4. Можно ли считать натуральное число обыкновенной дробью или конечной десятичной дробью? Приведите примеры.

5. В чем заключается основное свойство дроби?

6. Можно ли записать конечную десятичную дробь в виде $\frac{p}{q}$? Приведите примеры.

7. Какая дробь называется правильной?

Упражнения

1. Выяснить, какие из следующих дробей являются несократимыми:

$\frac{17}{10}$; $\frac{396}{591}$.

2. Разложить следующие дроби в конечные десятичные:

а) $\frac{7\,398\,153}{100\,000}$; б) $\frac{1291}{100\,000}$; в) $\frac{198}{1000}$.

3. Найти обыкновенные дроби, равные следующим конечным десятичным дробям:

а) 0,037; б) 2,503; в) 0,713.

2. Разложение обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь. Ниже мы даем несколько примеров превращения конечной десятичной дроби в обыкновенную несократимую дробь:

$$0{,}375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8} = \frac{3}{2^3};$$

$$6{,}72 = \frac{672}{100} = \frac{168}{25} = \frac{168}{5^2};$$

$$0{,}065 = \frac{65}{1000} = \frac{13}{5^2 \cdot 2^3};$$

$$0{,}034 = \frac{34}{1000} = \frac{17}{5^3 \cdot 2^2};$$

$$17{,}0 = \frac{17}{1}.$$

Из этих примеров видно, что *если конечную десятичную дробь превратить в обыкновенную несократимую дробь* $\frac{p}{q}$, *то знаменатель* q *не имеет других простых делителей, кроме* 2 *и* 5.

Это утверждение доказывается и в общем случае.

Ведь если конечная десятичная дробь имеет после запятой не равные нулю цифры, то она, как мы знаем, равна обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$, знаменатель которой есть некоторая степень числа 10. Следовательно, q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5. Быть может, эту дробь понадобится сократить, но при сокращении не появятся новые делители. Если же после запятой у десятичной дроби стоят только нули, как это имеет место в последнем примере, то такая десятичная дробь имеет вид $\frac{p}{1}$, где p – натуральное число, стоящее до запятой. В этом случае число q равно 1, т.е. не имеет простых делителей (в том числе и делителей, отличных от 2 и 5).

Верно и обратное утверждение: *если знаменатель* q *несократимой дроби* $\frac{p}{q}$ *не имеет других простых делителей, кроме* 2 *и* 5, *то эта дробь разлагается в конечную десятичную дробь.*

Например,

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

В этом примере мы умножили знаменатель дроби на 2, в результате он превратился в степень числа 10. Чтобы дробь не изменилась, надо и числитель умножить на 2.

Аналогично поступаем мы и в следующих примерах:

$$\frac{501}{2^2 \cdot 5^3} = \frac{501 \cdot 2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{1002}{10^3} = 1{,}002;$$

$$\frac{17}{1} = \frac{170}{10} = 17{,}0.$$

Высказанные выше прямое и обратное утверждения можно выразить следующими словами: *для того чтобы несократимая дробь* $\frac{p}{q}$ *разлагалась в конечную десятичную дробь, необходимо и достаточно, чтобы ее знаменатель* q *не имел других простых делителей, кроме* 2 *и* 5.

Для разложения в конечную десятичную дробь обыкновенной несократимой дроби, знаменатель которой не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, существует два способа.

Один из них был рассмотрен выше. Он сводится к умножению числителя и знаменателя дроби $\dfrac{p}{q}$ на 2 или на 5 в такой степени, чтобы в знаменателе получилось число 10 в некоторой степени.

Вторым способом является известный способ деления числителя на знаменатель "уголком". Например, обратим этим способом дробь $\dfrac{3}{40}$ в десятичную дробь:

$$\begin{array}{r|l}
3 & 40 \\ \cline{2-2}
\underline{30} & 0{,}075 \\
-\ 300 & \\
\underline{280} & \\
-\ 200 & \\
\underline{200} & \\
0 &
\end{array}$$

Следовательно, $\dfrac{3}{40} = 0{,}075$.

До сих пор мы рассматривали десятичные дроби, называемые *конечными десятичными дробями*. Их называют конечными потому, что у них после запятой стоит конечное число цифр. В дальнейшем нам придется рассматривать и бесконечные десятичные дроби: у них после запятой бесконечно много цифр.

Вопросы

1. Может ли знаменатель обыкновенной несократимой дроби, равной конечной десятичной дроби, иметь простые делители, отличные от 2 и 5? Приведите примеры.

2. Каким свойством должен обладать знаменатель обыкновенной несократимой дроби, чтобы она разлагалась в конечную десятичную дробь?

3. Какими способами можно разложить обыкновенную дробь в десятичную дробь? Приведите примеры.

Упражнения

1. Разложить следующие обыкновенные дроби в конечные десятичные дроби:

а) $\dfrac{31}{20}$; $\dfrac{7}{50}$; $\dfrac{17}{200}$; б) $\dfrac{8}{5}$; $\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{13}{50}$; в) $\dfrac{3}{150}$; $\dfrac{21}{35}$; $\dfrac{13}{65}$.

2. Найти обыкновенную несократимую дробь, равную следующей конечной десятичной дроби:

а) 0,35; б) 2,01; в) 7,22; г) 0,001012.

3. Выяснить, какие из следующих обыкновенных дробей могут быть разложены в конечные десятичные дроби: $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{24}{15}$; $\dfrac{12}{35}$; $\dfrac{5}{300}$; $\dfrac{1}{7}$.

3. Понятие периодической десятичной дроби. Из предыдущего пункта мы знаем, что всякая несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$ разлагается в конечную десятичную дробь тогда и только тогда, когда ее знаменатель q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.

Поэтому если знаменатель несократимой дроби $\frac{p}{q}$ имеет простой делитель, отличный от 2 и 5, то эта дробь не разлагается в конечную десятичную дробь и, применив к ней способ деления "уголком", мы не получим конечную десятичную дробь.

П р и м е р 1. Пусть требуется разложить в десятичную дробь число $\frac{7}{9}$. Это несократимая дробь, и ее знаменатель имеет простой делитель 3, т.е. делитель, отличный от 2 и 5. Поэтому число $\frac{7}{9}$ заведомо не разлагается в конечную десятичную дробь. Применим все же к этой дроби правило деления числителя на знаменатель "уголком":

$$\begin{array}{r|l}
7 & 9 \\ \hline
70 & 0{,}777\ldots \\
-\,63 & \\ \hline
70 & \\
-\,63 & \\ \hline
70 & \\
-\,63 & \\ \hline
70 & \\
\ldots &
\end{array}$$

На каждом этапе этих вычислений получается один и тот же остаток 7, а в частном одна и та же цифра 7.

Процесс этот бесконечный (не имеет конца). Он привел нас к выражению

0,777. . . ,

где многоточие означает, что цифра 7 периодически повторяется бесконечно много раз, т.е. на любом месте (разряде) после запятой в этом выражении стоит одна и та же цифра 7.

Выражение 0,777. . . называют *бесконечной периодической десятичной дробью* или просто *периодической дробью* и записывают следующим образом: 0,(7).

Читают это выражение так: нуль целых и семь в периоде.

Говорят, что число $\frac{7}{9}$ представлено в виде периодической дроби 0,(7) или что число $\frac{7}{9}$ разложено в периодическую дробь 0,(7). При этом пишут

$$\frac{7}{9} = 0{,}777\ldots = 0{,}(7).$$

Выражения $\frac{7}{9}$ *и* 0,(7) *являются разными обозначениями одного и того же числа (в виде обыкновенной дроби* $\frac{7}{9}$ *и в виде бесконечной периодической десятичной дроби* 0,(7)).

Пример 2. Дробь $\frac{2}{99}$ несократимая, и ее знаменатель имеет простые делители, отличные от 2 и 5. Поэтому ее десятичное разложение не может быть конечным.

В самом деле,

$$\begin{array}{r|l} 2 & 99 \\ \hline \underline{20} & 0{,}0202\ldots \\ \underline{200} & \\ 2 & \\ \ldots & \end{array}$$

Процесс этот бесконечный. Он приводит к выражению

0,0202. . . ,

где теперь точки обозначают, что группа цифр (02) периодически повторяется бесконечно много раз. Это выражение также называют *периодической дробью* и записывают следующим образом 0,(02). Читают это выражение так: нуль целых и нуль два в периоде.

Говорят, что число $\frac{2}{99}$ представлено в виде периодической дроби или разложено в периодическую дробь. При этом пишут

$$\frac{2}{99} = 0{,}0202\ldots = 0{,}(02).$$

Предлагаем читателю получить, применяя способ деления "уголком", следующие равенства:

1) $\frac{5}{9} = 0{,}555\ldots = 0{,}(5);$

2) $\frac{17}{99} = 0{,}1717\ldots = 0{,}(17);$

3) $\frac{101}{900} = 0{,}11222\ldots = 0{,}11(2);$

4) $\frac{143}{45} = 3{,}1777\ldots = 3{,}1(7).$

Правые части этих равенств читаются соответственно так:

1) нуль целых и пять в периоде;

2) нуль целых и семнадцать в периоде;

3) нуль целых, одиннадцать сотых и два в периоде;

4) три целых, одна десятая и семь в периоде.

Во всех этих примерах рассматривались несократимые дроби, знаменатели которых имеют простые делители, отличные от 2 и 5. Верно и общее утверждение: если применить правило деления "уголком" к любой несократимой дроби $\frac{p}{q}$, у которой знаменатель имеет простые делители, отличные от 2 и 5, то получится бесконечная периодическая дробь.

Приписывая к целому числу или к конечной десятичной дроби бесконечно много нулей, мы также превращаем их в бесконечные периодические дроби с периодом 0; например,

$$27 = 27{,}000\ldots = 27{,}(0); \quad 0{,}354 = 0{,}354000\ldots = 0{,}354(0).$$

Следовательно, любое целое число и любую конечную десятичную дробь можно считать частным случаем бесконечной периодической десятичной дроби.

Справедливо, таким образом, следующее утверждение:

Всякое положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ *разлагается в бесконечную периодическую десятичную дробь.*

Верно и обратное утверждение:

Любая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого положительного рационального числа $\frac{p}{q}$.

Оба эти утверждения будут обоснованы в следующем пункте.

Вопросы

1. В каком случае несократимая обыкновенная дробь не разлагается в конечную десятичную дробь?

2. Каким способом разлагается любая обыкновенная дробь в десятичную?

3. Какие десятичные дроби могут получиться при применении способа деления "уголком" к произвольной обыкновенной дроби?

4. Как узнать, разлагается обыкновенная дробь в конечную или бесконечную десятичную? Приведите примеры.

5. Как можно записать конечную десятичную дробь или натуральное число в виде бесконечной десятичной дроби? Приведите примеры.

Упражнение

Написать десятичные разложения следующих дробей:

а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{12}{99}$; в) $\frac{17}{999}$; г) $\frac{6}{1}$; д) $\frac{35}{77}$.

4. Периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби. Зададим произвольное положительное рациональное число в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Покажем, что *если применить к ней способ деления "уголком", то получим в частном либо конечное, либо бесконечное периодическое ее десятичное разложение*.

Мы уже знаем, когда может получиться конечное десятичное разложение. Для этого q не должно иметь других простых делителей, кроме 2 и 5. В остальных случаях может быть только бесконечное разложение, которое является периодическим.

Пример 1. Пусть надо найти десятичное разложение несократимой дроби $\frac{1372}{65}$.

Будем делить 1372 на 65 способом деления "уголком":

$$\begin{array}{l|l}
1372 & 65 \\ \hline
\;\;72 & 21{,}1076923076\ldots \\
* \;\boxed{7} & \quad\;\; ** \quad *** \\
\;\;\;70 & \\
** \;\boxed{5} & \\
\;\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;500 & \\
\;\;\;\;\boxed{45} & \\
\;\;\;\;\;450 & \\
\;\;\;\;\;\boxed{60} & \\
\;\;\;\;\;\;600 & \\
\;\;\;\;\;\;\boxed{15} & \\
\;\;\;\;\;\;\;150 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\boxed{20} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;200 & \\
*** \;\boxed{5} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;500 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\boxed{45} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\ldots &
\end{array}$$

Здесь одной звездочкой отмечен тот этап вычислений, когда снесена последняя цифра делимого. Получаемые после этого остатки заключены в прямоугольники. Мы видим, что остатки, отмеченные двумя и тремя звездочками, равны между собой. Это показывает, что процесс деления носит периодический характер и приводит к бесконечной периодической десятичной дроби, т.е.

$$\frac{1372}{65} = 21{,}10(769230).$$

То, что десятичное разложение нашей дроби должно быть бесконечным периодическим, можно объяснить иначе.

Данная дробь $\frac{1372}{65}$ несократимая, и ее знаменатель 65 имеет простой делитель 13, отличный от 2 и 5. Следовательно, десятичное разложение числа $\frac{1372}{65}$ не может быть конечным, т.е. возникающие при делении остатки положительны (не равны нулю) на любом этапе деления. В то же время каждый остаток меньше 65, т.е. он равен одному из чисел $1, 2, 3, \ldots, 63, 64$. Но тогда, если мы будем рассматривать подряд остатки, начиная с отмеченного одной звездочкой, то среди первых 65 из них обязательно должны найтись два равных между собой, что и показывает, что мы должны получить в частном периодическую дробь.

Эти рассуждения проводятся для любой несократимой дроби $\frac{p}{q}$, знаменатель которой q имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5.

Если делить p на q "уголком", то наступит такой этап, когда цифры делимого будут снесены. Если рассмотреть подряд все возникающие, начиная с этого момента, q остатков (все они положительны и каждый из них меньше q), то среди них всегда окажутся два равных между собой, а это и показывает, что процесс деления бесконечный периодический.

Итак, доказано, что *всякое положительное рациональное число* $\frac{p}{q}$ *разлагается в бесконечную периодическую десятичную дробь*.

Напоминаем, что конечную десятичную дробь мы тоже называем периодической дробью (с периодом 0). Верно и обратное утверждение: *всякая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого положительного рационального числа*.

Ниже на примерах мы показываем, как можно находить это число.

Пример 2. Записать периодическую дробь 0,(8) в виде обыкновенной дроби.

Обозначим искомую дробь через x. Тогда справедливо равенство

$$x = 0,(8). \qquad (1)$$

Умножая это равенство на 10, получаем

$$10x = 8,(8),$$

или

$$10x = 8 + 0,(8). \qquad (2)$$

Вычитая равенство (1) из (2), находим, что

$$10x - x = 8,$$

откуда

$$x = \frac{8}{9}.$$

Применив к дроби $\frac{8}{9}$ способ деления "уголком", получим, что эта дробь действительно равна периодической дроби $0,(8)$.

П р и м е р 3. Записать периодическую дробь $2,35(7)$ в виде обыкновенной дроби.

Обозначим искомую дробь через x. Тогда справедливо равенство

$$x = 2,35(7).$$

Умножая это равенство на 100 и на 1000, получаем, что справедливы равенства

$$100x = 235,(7); \tag{3}$$

$$1000x = 2357,(7). \tag{4}$$

Вычитая равенство (3) из (4), находим, что

$$1000x - 100x = 2357 - 235,$$

откуда

$$x = \frac{2357 - 235}{900} = \frac{2122}{900}.$$

Применив к дроби $\frac{2122}{900}$ способ деления "уголком", получим, что эта дробь действительно равна периодической дроби $2,35(7)$.

П р и м е р 4. Записать периодическую дробь $0,(0108)$ в виде обыкновенной дроби.

Обозначим искомую дробь через x:

$$x = 0,(0108).$$

Умножим это равенство на 10 000:

$$10\,000x = 108,(0108).$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем

$$10\,000x - x = 108 - 0,$$

откуда

$$x = \frac{108 - 0}{9999} = \frac{108}{9999}.$$

Эти примеры приводят к следующему правилу:

Чтобы записать данную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девя-

ток записать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Если к полученной обыкновенной дроби применить правило деления "уголком", то получим, что эта дробь равна данной периодической дроби.

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что

$$2{,}4(0) = \frac{240 - 24}{90} = 2{,}4; \qquad 2{,}3(9) = \frac{239 - 23}{90} = 2{,}4.$$

Следовательно,

$$2{,}4 = 2{,}4(0) = 2{,}3(9).$$

Аналогично показывается, что

$$7{,}25 = 7{,}25(0) = 7{,}24(9);$$

$$0{,}031 = 0{,}031(0) = 0{,}030(9);$$
$$12{,}3018 = 12{,}3018(0) = 12{,}3017(9).$$

Таким образом, периодические дроби с периодом 9 всегда можно заменить соответствующими конечными десятичными дробями.

Отметим, что получаемое по правилу "уголка" десятичное разложение обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$ не может иметь период 9. В самом деле, если бы это было так, то в процессе применения этого правила, после того как снесены все цифры делимого, должен наступить момент, начиная с которого все остатки будут равны одному и тому же числу k, причем $k < n$, а цифры частного будут равны одному и тому же числу 9. Значит, будет справедливо равенство $10k = 9n + k$, т.е. $9k = 9n$ и $k = n$. А этого не может быть, так как $k < n$.

В о п р о с ы

1. Какие обыкновенные дроби разлагаются в периодические дроби с периодом 0?

2. Какое условие необходимо и достаточно, чтобы обыкновенная дробь разлагалась в периодическую дробь с периодом, отличным от 0 и от 9?

У п р а ж н е н и я

1. Найти десятичные разложения обыкновенных дробей:

а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{17}{25}$; в) $\frac{689}{4950}$; г) $\frac{5}{16}$.

2. Найти периодические дроби, равные данным обыкновенным дробям:

а) $\frac{7}{40}$; б) 19; в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{3}{11}$.

3. Следующие периодические десятичные дроби записать в виде обыкновенных дробей:

а) 23,5(0); б) 23,5(1); в) 0,1(13); г) 0,01(027).

1. Рациональные числа. Если перед натуральным числом поставить знак "+" (плюс), то получим равное ему число. Поэтому, например, пишут

$$2 = +2; \quad +100 = 100.$$

Поставив же перед натуральным числом знак "–" (минус), получим противоположное ему отрицательное число, называемое целым отрицательным числом. Например, числа

$$-2; \quad -9; \quad -123$$

целые отрицательные.

Натуральные числа, целые отрицательные числа и число нуль образуют множество целых чисел.

Поставив перед положительным рациональным числом – обыкновенной дробью – знак плюс, получим равную ей дробь. Поэтому, например, пишут

$$\frac{123}{973} = +\frac{123}{973}; \quad +\frac{117}{91} = \frac{117}{91}$$

Поставив перед положительной дробью знак минус, получим противоположную ей – отрицательную дробь, называемую отрицательным рациональным числом. Примеры отрицательных рациональных чисел:

$$-\frac{1}{3}; \quad -\frac{7}{2}; \quad -\frac{9}{4}; \quad -2.$$

Знак минус, стоящий перед отрицательной дробью, можно записать или в числитель, или в знаменатель дроби. Поэтому, например, пишут

$$-\frac{1}{3} = \frac{-1}{3}; \quad -\frac{7}{2} = \frac{7}{-2}.$$

Положительные дроби, отрицательные дроби и число нуль образуют множество рациональных чисел.

Любое рациональное число может быть записано в виде $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа и $q \neq 0$.

Отметим основные свойства рациональных чисел:

$$+\frac{p}{q} = \frac{p}{q}; \quad -\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} = \frac{p}{-q};$$

$$\frac{p}{1} = p; \quad \frac{p}{q} = \frac{pn}{qn},$$

где n – любое целое отличное от нуля число. Из этих свойств следует, что любое рациональное число можно записать в виде $\dfrac{r}{s}$, где s — натуральное число, а r — целое число.

Сложение, вычитание, умножение и деление рациональных чисел проводятся соответственно по правилам:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+qm}{qn};$$

$$\frac{p}{q}-\frac{m}{n}=\frac{pn-qm}{qn};$$

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn};$$

$$\frac{p}{q}:\frac{m}{n}=\frac{pn}{qm}\qquad(m\neq 0).$$

Заметим, что если рациональные числа приведены к общему знаменателю, то их сумму и разность можно вычислять соответственно по правилам:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{q}=\frac{p+m}{q};\quad \frac{p}{q}-\frac{m}{q}=\frac{p-m}{q},$$

потому что, например, $\dfrac{p}{q}+\dfrac{m}{q}=\dfrac{pq+mq}{q^2}=\dfrac{(p+m)q}{q^2}=\dfrac{p+m}{q}$.

Для того чтобы сравнить два рациональных числа, их надо сначала привести к общему положительному знаменателю. Из двух рациональных чисел с общим положительным знаменателем больше то, у которого числитель больше.

Например, $-\dfrac{3}{4}<-\dfrac{2}{3}$, так как $-\dfrac{3}{4}=\dfrac{-3}{4}=\dfrac{-9}{12}$, $-\dfrac{2}{3}=\dfrac{-2}{3}=\dfrac{-8}{12}$, $-9<-8$.

Вопросы

1. Какие числа образуют множество целых чисел?
2. Какие числа образуют множество рациональных чисел?
3. В каком виде можно записать любое рациональное число?
4. Каковы основные свойства рациональных чисел?
5. По каким правилам находят сумму, разность, произведение и частное рациональных чисел?
6. Как сравнивают рациональные числа?

Упражнения

1. Сравнить числа:

а) $-\dfrac{5}{28}$ и $-\dfrac{1}{7}$; б) $-\dfrac{13}{24}$ и $-\dfrac{17}{36}$; в) $-\dfrac{498}{497}$ и $-\dfrac{499}{498}$.

2. Выполнить действия:

а) $\frac{71}{78}+\frac{17}{91}$; б) $\frac{50}{49}-\frac{15}{56}$; в) $-\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{75}{2}\right)$; г) $-\frac{32}{77}:\left(-\frac{64}{55}\right)$.

2. Десятичные разложения рациональных чисел. В § 2 рассматривались положительные периодические десятичные дроби. Поставив перед ними знак плюс, получим равные им дроби. Поэтому, например, пишут

$$+\frac{237}{99\,900}=0{,}00(237)=+0{,}00(237).$$

Поставив же перед положительной периодической дробью знак минус, получим отрицательную периодическую дробь, например

$$-0{,}00(237)=-\frac{237}{99\,900}.$$

Периодическая дробь в левой части этого равенства называется *десятичным разложением числа*, записанного в правой части.

Таким образом, каждая отрицательная периодическая дробь является десятичным разложением некоторого отрицательного рационального числа, а каждое отрицательное рациональное число имеет десятичным разложением некоторую отрицательную периодическую дробь.

Отметим, что число нуль также может быть записано в виде нулевой периодической дроби:

$$0=0{,}(0)=+0{,}(0)=-0{,}(0).$$

Итак, *каждое рациональное число может быть разложено в периодическую дробь, а каждая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого рационального числа.*

Значит, можно сказать, что каждая периодическая дробь (положительная, отрицательная или нулевая) есть другая форма записи некоторого рационального числа.

Мы знаем, как разлагать рациональное число в периодическую дробь и как обращать периодическую дробь в рациональное число, и дальше для рациональных чисел будем выбирать ту форму их записи, которая удобна в рассматриваемом случае.

Вопросы

1. Что называется нулевой периодической дробью?
2. Что называется положительной периодической дробью?
3. Что называется отрицательной периодической дробью?
4. Любое ли рациональное число может быть разложено в периодическую дробь?

Упражнения

1. Привести пять примеров отрицательных периодических десятичных дробей.
2. Следующие рациональные числа записать в виде периодических десятичных дробей:

а) $-\frac{3}{7}$; б) $\frac{9}{16}$; в) $-\frac{511}{90}$; г) 0.

3. Следующие периодические десятичные дроби записать в виде $\frac{p}{q}$, где p – целое число, а q – натуральное число:

а) $-0,3(17)$; б) $2,(0)$; в) $-3,4(5)$; г) $-0,(0)$.

3. Понятие действительного числа. Рассмотрим положительную бесконечную десятичную дробь

$$3,101101110111110\ldots,$$

у которой после запятой записаны цифры: единица, нуль, две единицы, нуль, три единицы, нуль и т.д. У этой дроби никакая группа цифр не является периодом – нет периода сразу после запятой и после любой из цифр. Поэтому эта дробь непериодическая и, следовательно, не может быть десятичным разложением какого-либо рационального числа.

Вот еще примеры положительных бесконечных непериодических десятичных дробей:

$$0,01001000100001\ldots; \quad 17,12345678\ldots$$

У первой дроби после запятой записаны цифры: нуль, единица, два нуля, единица, три нуля, единица и т.д. У второй – после запятой записаны в возрастающем порядке числа натурального ряда.

Поставив перед положительной дробью знак минус, получим противоположную ей отрицательную дробь. Например, дроби

$$-0,01001000100001\ldots; \quad -17,12345678\ldots$$

есть отрицательные бесконечные непериодические десятичные дроби.

Число, которое можно записать в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, называют *иррациональным* (*нерациональным*) *числом*.

Если обозначить иррациональное число буквой, например

$$a = 0,01001000100001\ldots,$$

то говорят, что правая часть этого равенства есть десятичное разложение числа a.

Рациональные и иррациональные числа называют действительными числами.

Таким образом, *любое действительное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби. Если число рациональное, то дробь периодическая, если число иррациональное, то дробь непериодическая.*

Если десятичная дробь не имеет знака, или, что то же самое, имеет знак плюс, то она положительная, т.е. определяет положительное число. Если же дробь имеет знак минус, то она отрицательная, т.е. определяет отрицательное число. Но в этом правиле есть одно исключение: если у десятичной дроби до запятой стоит число нуль и все цифры после запятой нули, то независимо от знака, который она имеет, эта дробь равна 0.

Число до запятой у положительной бесконечной десятичной дроби будем называть *целой частью этой дроби.*

§ 7

П. 1. 1. а) $a^2 + 4ab + 4b^2$; б) $4x^2 + 12xy + 9y^2$; в) $10x^2 + 12xy + 10y^2$. 2. а) $(a+2c)^2$; б) $(1+x)^2$; в) $(ac+d)^2$.

П. 2. 1. а) $x^2 - 4xy + 4y^2$; б) $\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta\gamma + \gamma^2$; в) $25x^2y^2 - 20xy + 4$. 2. а) $(a-2b)^2$; б) $(x-2)^2$; в) $(a^2-1)^2$.

П. 3. а) $(x-2)^2+1$; б) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$; в) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$.

П. 4. 1. а) $x^3 + 9x^2z + 27xz^2 + 27z^3$; б) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$; в) $8b^3 + 36b^2 + 54b + 27$. 2. а) $(2x+y)^3$; б) $(\alpha+1)^3$; в) $(3+b)^3$.

П. 5. 1. а) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; б) $8a^3 - 3a^2b + 54ab^2 - 27b^3$; в) $a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3$. 2. а) $(1-x)^3$; б) $(a-2)^3$; в) $(2a-3b)^3$.

П. 6. 1. а) $x^2 - 4$; б) $a^4 - 1$; в) $4\alpha^2 - 9\beta^2$. 2. а) $(2a+1)(2a-1)$; б) $(a+b)(a-b)$; в) $(3x^2+2)(3x^2-2)$; г) $(x^2+4)(x^2-4)$.

П. 7. 1. а) $27x^3+y^3$; б) $a^{12}+1$; в) $8\alpha^3+27$. 2. а) $(a^2+b)(a^4-a^2b+b^2)$; б) $(3\alpha+2\beta)(9\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2)$.

П. 8. 1. а) $8a^3-27b^3$; б) a^6-1; в) $x^3y^3z^3-t^3$. 2. а) $(a-2b)(a^2+2ab+b^2)$; б) $(2a^2-3)(4a^4+6a^2+9)$; в) $(xy-z)(x^2y^2+xyz^2+z^4)$.

П. 9. 1. а) $a^8 - 17a^4 + 16$; б) $a^2+b^2-c^2$; в) a^8-b^8. 2. а) $(y-5+2x)\times\times(y-5-2x)$; б) $3ab(a+b)$; в) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)$.

П. 10. а) $(a+c)(b+d)$; б) $(a-b+c)(a-b-c)$; в; $(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)$; г) $(a+b)(a+b+c)$; д) $(3y-1+x)(3y-1-x)$; е) $(x^2+y-1)(x^2-y+5)$.

§ 8

П. 1. а) $a-b$; б) a^2-ab+b^2; в) $\alpha-\beta$.

П. 2. 1. а) $2\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; $4\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}$; б) $\frac{3\alpha^3-\alpha^2\beta+2\beta^3}{2\alpha^2}$; $\frac{-\alpha^3-\alpha^2\beta-2\beta^3}{2\alpha^2}$. 2. а) $\frac{(a-b)b}{a}$; б) $\frac{1}{a^4+a^2b^2+b^4}$.

П. 3. а) $\frac{a(a-b)}{b(a-b)}$ и $\frac{b^2}{b(a-b)}$; б) $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2-\beta^2}$ и $\frac{\alpha^3}{\alpha^2-\beta^2}$.

П. 5. 1. а) b; б) α. 2. Не имеют смысла выражения б), в), г).

П. 6. 1. а) $a\neq b$ и $a\neq 0$; б) $x\neq 0$, $y\neq 0$ и $x\neq -y$; в) $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ и $\alpha\neq\beta$. 2. а) $\frac{400}{111}$; б) $28\frac{1}{11}$; в) $-\frac{5}{3}$.

П. 7. а) $a\neq b$ и $a\neq -b$; б) $a\neq b$ и $a\neq -b$.

§ 9

П. 1. 2. а) $\frac{7}{3}$; б) 0; в) $-\frac{5}{4}$; г) $-\frac{15}{4}$.

П. 2. 2. а), б), в) – да; г), д) – нет.

П. 3. а) 7; б) $-\frac{6}{5}$; в) нет корней; г) -6; д) любое действительное число – корень этого уравнения; е) 0; ж) $\frac{5}{3}$; з) $\frac{4}{5}$; и) 2.

П. 4. 1. 10. 2. 20 км/ч.

Первую цифру после запятой у бесконечной десятичной дроби называют *цифрой первого разряда* этой дроби, вторую цифру после запятой — *цифрой второго разряда*, третью — *цифрой третьего разряда* и т.д.

Действительные числа α и $-\alpha$ называются *противоположными*.

Если α — положительное число, то $-\alpha$ — отрицательное; если же α — отрицательное число, то $-\alpha$ — положительное; наконец, если $\alpha = 0$, то $-\alpha = 0$.

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа α называется:

само число α, если α — положительное число;

нуль, если α — нуль;

число $-\alpha$, если α — отрицательное число.

Абсолютная величина действительного числа α обозначается $|\alpha|$. Таким образом,

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha > 0, \\ 0, \text{ если } \alpha = 0, \\ -\alpha, \text{ если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Например, пусть

$a = 0{,}10110111\ldots;$

$b = -2{,}1234567891011\ldots;$

$c = 0,(0)$.

Тогда

$|a| = 0{,}10110111\ldots;$

$|b| = -b = 2{,}1234567891011\ldots;$

$|c| = 0.$

Подчеркнем, что рациональные числа имеют два обозначения: каждое рациональное число можно записать либо в виде обыкновенной дроби, либо в виде ее десятичного разложения, являющегося периодической десятичной дробью.

Иррациональные же числа имеют одно обозначение: каждое иррациональное число представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь по определению.

Мы определили действительные числа пока формально. Полное их определение получится, если дать правила их сравнения, а также правила их сложения, вычитания, умножения и деления.

Правила сложения, вычитания, умножения и деления конечных десятичных дробей нам хорошо известны. Можно дать также формальные правила сложения, вычитания, умножения и деления бесконечных десятичных дробей, т.е. действительных чисел. Нужно сказать, что эти правила для бесконечных десятичных дробей сложнее соответствующих правил для конечных десятичных дробей – они требуют применения бесконечных процессов – и потому могут представлять только теоретический интерес.

На практике бесконечные десятичные дроби (т.е. действительные числа) складывают, вычитают, умножают и делят приближенно. Ниже будет показано, как это делается.

Вопросы

1. Что называется иррациональным числом?
2. Что называется целой частью положительной бесконечной десятичной дроби?
3. Что называется цифрой третьего разряда бесконечной десятичной дроби?
4. Что называется абсолютной величиной действительного числа?

Упражнения

1. Придумать какие-нибудь пять бесконечных непериодических дробей (иррациональных чисел).
2. Придумать пять положительных и пять отрицательных иррациональных чисел.
3. Найти абсолютную величину чисел:

а) $-3{,}17(2)$; б) $+0{,}00(1)$; в) $+3{,}17(2)$; г) $-0,(0)$.

4. Сравнение действительных чисел. Пусть заданы две бесконечные десятичные дроби (считаем, что обе они не имеют период 9).

При сравнении бесконечных десятичных дробей следует руководствоваться следующими правилами.

Правило 1. Две бесконечные десятичные дроби (т.е. два действительных числа) равны между собой, если они имеют одинаковые знаки и их абсолютные величины имеют одинаковые целые части и одинаковые цифры соответствующих разрядов. В других случаях бесконечные десятичные дроби считаются неравными.

Единственным исключением из этого правила является число 0, которое не изменяется, если поставить перед ним знак минус или плюс:

$$0 = 0{,}000\ldots = -0{,}000 = +0{,}000\ldots$$

Правило 2. Отрицательная бесконечная десятичная дробь меньше 0 и меньше любой положительной бесконечной десятичной дроби. Число 0 меньше любой положительной бесконечной десятичной дроби.

Правило 3. Если целые части двух положительных десятичных дробей разные, то та дробь больше, у которой целая часть больше. А если целые части одинаковые, то надо обратиться к наименьшему разряду, для которого цифры наших дробей различны. Та из дробей больше, у которой цифра этого разряда больше.

Для отрицательных десятичных дробей все наоборот: та из них больше, у которой абсолютная величина меньше.

Если действительные числа (бесконечные десятичные дроби) a и b равны, то пишут $a = b$. Если же a меньше b, то пишут $a < b$ или $b > a$. Наконец, если a не равно b, то пишут $a \neq b$.

Пример. Сравнить числа $-3,1$ и $-3,(1)$.

Так как

$$|-3,1| = 3,1 = 3,1000\ldots; \quad |-3,(1)| = 3,(1) = 3,1111\ldots;$$

$$3,1 < 3,(1),$$

то

$$-3,1 > -3,(1).$$

Действительно, модули этих чисел имеют одинаковые целые части и одинаковые цифры первого разряда, но цифра второго разряда первой дроби меньше цифры второго разряда второй дроби, поэтому модуль первой дроби меньше модуля второй. Так как эти дроби отрицательные, то по правилу сравнения получаем

$$-3,1 > -3,(1).$$

Вопросы

1. Когда равны два действительных числа?
2. Когда не равны два действительных числа a и b $(a \neq b)$?
3. Когда одно действительное число меньше другого? Приведите примеры.

Упражнения

1. Записать в неубывающем порядке следующие действительные числа:

$a = 3,(007)$; $b = 3,(0008)$; $c = 2,303003000\ldots$;

$d = 3,(007)$; $l = -0,23(1)$; $f = -0,231(17)$.

2. Записать в невозрастающем порядке следующие действительные числа:

$a = -2,(0)$; $b = 5,1(01)$; $c = -0,00(1)$; $d = 0,(001)$; $l = +0,(0)$.

3. Показать справедливость неравенств:

а) $0,75757 < 0,(75) < 0,75758$;

б) $3,023023 < 3,(023) < 3,023024$.

5. Приближенные значения числа. Если число a_1 мало отличается от числа a, то пишут

$$a \approx a_1$$

и говорят, что *число a приближенно равно числу a_1* или что *число a_1 есть приближение числа a*.

Знак "$\approx$" есть знак приближенного равенства.

Если при этом $a_1 < a$, то a_1 называют *приближением a с недостатком* или *приближением a снизу*. Если же $a_1 > a$, то a_1 называют *приближением a с избытком* или *приближением a сверху*.

Если случится, что $a_1 = a$, то a_1 можно назвать приближением a как снизу, так и сверху.

Действительные числа, задаваемые бесконечными десятичными дробями, приближают конечными десятичными дробями. Сама запись бесконечной десятичной дроби подсказывает, как эти приближения подбирать. Рассмотрим пример.

Пусть $a = 2,3(28)$. Оборвем эту дробь на цифре второго разряда. Получим число 2,32, которое меньше a. Если у числа 2,32 увеличить цифру второго разряда на 1, то получим число 2,33, уже большее, чем a.

Таким образом,

$$2,32 < a < 2,33.$$

Отсюда 2,32 есть приближение снизу числа a, а 2,33 – его приближение сверху.

При этом пишут

$$a \approx 2,32, \quad a \approx 2,33$$

и говорят: 2,32 есть приближение числа a *с точностью до одной сотой с недостатком* (снизу);

2,33 есть приближение числа a *с точностью до одной сотой с избытком* (сверху).

Вместо слов "с точностью до одной сотой" говорят еще "с точностью до единицы второго разряда".

Так как третья цифра после запятой у числа a больше 5, то можно еще сказать, что 2,33 есть приближение числа a с точностью до 0,01 *с округлением*.

Рассуждая аналогично, получаем

$$2.328 < a < 2,329;$$

$$a \approx 2,328; \quad a \approx 2,329,$$

где 2,328 есть приближение a с точностью до 0,001 снизу и в то же время с округлением, а 2,329 есть приближение a с точностью до 0,001 сверху.

Подобным образом для числа

$$b = -2,3(28)$$

имеем

$$-2,33 < b < -2,32.$$

Отсюда

$$b \approx -2,33, \quad b \approx -2,32,$$

и при этом $-2,33$ есть приближение b с точностью до 0,01 снизу и в то же время с округлением, а $-2,32$ есть приближение b с точностью до 0,01 сверху.

Отметим, что чем с большим числом разрядов мы будем брать приближенное значение данного действительного числа, тем ближе будет это приближенное значение к самому числу.

Теперь покажем, как надо приближенно складывать, вычитать, умножать и делить действительные числа. Метод, который при этом применяется, очень простой: сумма (разность, произведение, частное) двух чисел считается приближенно равной сумме (разности, произведению, частному) их приближенных значений.

Отметим, что чем с большим число разрядов мы будем брать приближенные значения двух чисел, тем ближе будет сумма (разность, произведение, частное) этих приближенных значений к истинной сумме (разности, произведению, частному) этих чисел.

Например, пусть даны числа

$a = 3{,}1834567\ldots;\quad b = 1{,}23(75).$

Округлим их с точностью до единицы первого разряда после запятой:

$a \approx 3{,}2;\quad b \approx 1{,}2.$

Теперь мы можем вычислить сумму, разность, произведение и частное полученных приближенных значений, а результаты считать приближенно равными:

$$a + b \approx 3{,}2 + 1{,}2 = 4{,}4;$$

$$a - b \approx 3{,}2 - 1{,}2 = 2{,}0;$$

$$ab \approx 3{,}2 \cdot 1{,}2 = 3{,}84 \approx 3{,}8;$$

$$\frac{a}{b} \approx \frac{3{,}2}{1{,}2} = \frac{8}{3} = 2{,}666\ldots \approx 2{,}7.$$

Замечание. В случаях произведения и частного мы округлили результаты с точностью до 0,1. В дальнейшем будут даны правила округления при приближенном вычислении произведения и частного чисел. В приведенном примере все округления произведены в соответствии с этими правилами.

Вопросы

1. Как называется знак "$\approx$"?
2. Как читается выражение $a \approx a_1$?
3. Что называется приближением с недостатком (снизу), с избытком (сверху)?
4. Можно ли считать равенство 5 = 5 приближенным равенством?
5. Как находят приближенно сумму, разность, произведение и частное чисел? Покажите на примерах.

Упражнения

1. Пусть

$a = 2{,}14(56);\quad b = 0{,}78788788878888\ldots$

Найти приближенно $a + b$ и $a - b$, взяв у a и b после запятой один знак, два знака, пять знаков.

2. Пусть

$a = 2{,}13(1);\quad b = 9{,}(2).$

Найти приближенно ab и $\frac{a}{b}$, взяв у a и b после запятой один знак, два знака.

6. Свойства действительных чисел. Здесь приводятся свойства чисел, связанные с равенствами. А свойства, связанные с неравенствами, приводятся в следующем пункте.

Для любых действительных чисел a, b и c справедливы равенства:

$$a + b = b + a; \tag{1}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c); \tag{2}$$

$$ab = ba; \tag{3}$$

$$(ab)c = a(bc); \tag{4}$$

$$a(b + c) = ab + ac; \tag{5}$$

$$a + 0 = a; \tag{6}$$

$$a + (-a) = 0; \tag{7}$$

$$a - b = a + (-b); \tag{8}$$

$$a \cdot 1 = a; \tag{9}$$

$$a \cdot 0 = 0; \tag{10}$$

$$-a = (-1)a; \tag{11}$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \text{ (если } a \neq 0); \tag{12}$$

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \text{ (если } b \neq 0). \tag{13}$$

Равенство (1) выражает *переместительный* (*коммутативный*) *закон сложения*. Он утверждает, что два действительных числа можно складывать в любом порядке.

Равенство (2) выражает *сочетательный* (*ассоциативный*) *закон сложения*. Он утверждает, что вместо того, чтобы к сумме $(a + b)$ прибавить c, можно к a прибавить сумму $(b + c)$; результат будет тот же самый. Отметим, что выражение $(a + b) + c$ записывают и так: $a + b + c$, т.е. пишут $(a + b) + c = a + b + c$.

Равенство (3) есть *переместительный* (*коммутативный*) *закон умножения*, а равенство (4) – *сочетательный* (*ассоциативный*) *закон умножения*. Пишут также $(ab)c = abc$.

Равенство (5) называют *дистрибутивным* (*распределительным*) *законом*. Этот закон утверждает, что если a умножить на сумму $(b + c)$, то получится такое же число, как если a умножить на b, затем a умножить на c и полученные произведения сложить.

Равенство (6) утверждает, что прибавление нуля к любому числу не меняет этого числа.

Равенство (7) утверждает, что сумма противоположных чисел есть число нуль.

Разность $a - b$ есть число, которое надо прибавить к b, чтобы получить a. Равенство (8) утверждает, что это число можно записать в виде суммы a и $-b$, где $-b$ есть число, противоположное b.

Равенство (9) утверждает, что умножение любого числа на единицу не меняет его.

Равенство (10) утверждает, что умножение любого числа на нуль дает нуль.

Равенство (11) утверждает, что число, противоположное числу a, равно произведению a на число -1.

Если $a \neq 0$, то $\frac{1}{a}$ называется числом, *обратным* к a. Очевидно, что и a есть обратное число к $\frac{1}{a}$, поэтому оба эти числа называются *взаимно обратными.*

Равенство (12) утверждает, что произведение двух взаимно обратных чисел равно 1.

Равенство (13) утверждает, что если $b \neq 0$, то частное от деления a на b равно произведению a на $\frac{1}{b}$.

Подчеркнем еще раз, что делить на нуль нельзя, поэтому запись $\frac{a}{0}$ не имеет смысла для любого действительного числа a, в том числе и для $a = 0$.

Вопросы

1. Сформулируйте: а) переместительный закон сложения; б) переместительный закон умножения; в) сочетательный закон сложения; г) сочетательный закон умножения; д) распределительный закон.
2. Что получится, если к числу прибавить 0?
3. Чему равна сумма противоположных чисел?
4. Можно ли разность $a - b$ записать в виде суммы?
5. Что получится, если число умножить на 1?
6. Что получится, если число умножить на 0?
7. Какое число называется обратным к числу a $(a \neq 0)$?
8. Какие числа называются взаимно обратными?
9. Чему равно произведение двух взаимно обратных чисел?

7. Числовые неравенства. Действительные числа подчинены следующим правилам.

Правило 1. Для любых действительных чисел a и b имеет место и притом только одно из соотношений

$a = b$; $a > b$; $a < b$.

Правило 2. Для любых действительных чисел a и b таких, что $a < b$, найдется такое действительное число c, что $a < c$ и $c < b$, или, что то же самое $a < c < b$.

Правило 3. Для любых действительных чисел a, b и c из соотношений $a < b$ и $b < c$ следует, что $a < c$ (свойство транзитивности неравенств).

П р а в и л о 4. Для любых действительных чисел a, b и c из соотношения $a < b$ следует, что $a + c < b + c$.

П р а в и л о 5. Для любых действительных чисел a и b и любого положительного числа c из соотношения $a < b$ следует, что $ac < bc$.

Приведем примеры к правилу 2.

Если $a = 2{,}13(4)$, $b = 2{,}135(0)$, то $a < b$. Полагая, например, $c = 2{,}1345$, получим $a < c < b$.

Если $a < 0$ и $b > 0$, то $a < b$, и можно положить $c = 0$, ибо очевидно, что в этом случае $a < c < b$.

Если $a = -3{,}236$, $b = 1{,}17(35)$, то $a < b$. Полагая, например, $c = -2$, получим $a < c < b$.

Из перечисленных выше пяти правил вытекают следующие с в о й с т в а числовых неравенств.

1. Если числа a, b, c и d таковы, что $a < b$ и $c < d$, то

$$a + c < b + d.$$

Действительно, из условия $a < b$ на основании правила 4 следует, что

$$a + c < b + c;$$

из условия $c < d$ на основании того же правила 4 следует, что

$$b + c < b + d.$$

Теперь, применяя правило 3, получаем

$$a + c < b + d.$$

2. Если положительные числа a, b, c и d удовлетворяют неравенствам $a < b$ и $c < d$, то они удовлетворяют и неравенству $ac < bd$.

Действительно, из условия $a < b$, учитывая, что c – положительное число, на основании правила 5 получаем

$$ac < bc.$$

Из условий $c < d$ и $b > 0$ на основании правила 5 вытекает, что

$$bc < bd.$$

Теперь на основании правила 3 получаем

$$ac < bd.$$

3. Если $a < b$, то $-b < -a$.

В самом деле, прибавив к левой и правой частям неравенства $a < b$ число $(-b - a)$, на основании правила 4 получим

$$a + (-b - a) < b + (-b - a),$$

откуда следует, что $-b < -a$.

4. Если $a < b$ и c – отрицательное число, то $ac > bc$.

Действительно, из $a < b$ следует, что $-b < -a$; умножая это неравенство на положительное число $-c$, получаем

$$(-b)(-c) < (-a)(-c),$$

откуда

$bc < ac.$

5. Если a и b – положительные числа и $a < b$, то

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

В самом деле, умножив неравенство $a < b$ на положительное число $\frac{1}{ab}$, получим на основании правила 5 после сокращений нужное неравенство

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

6. Если a и b – положительные числа и $a < b$, то $a^2 < b^2$.

В самом деле, умножив неравенство $a < b$ на положительное число a, на основании правила 5 получим

$$a^2 < ba.$$

Аналогично, умножив неравенство $a < b$ на b, имеем

$$ab < b^2.$$

Теперь на основании правила 3 получим

$$a^2 < b^2.$$

Выше употреблялись знаки равенства и строгого неравенства ("$<$" или "$>$"). Иногда возникает необходимость в нестрогих неравенствах.

Пример. В эту зиму температура в Москве не опускалась ниже $-30°$C. Если температуру в Москве обозначить буквой t, то в любой день этой зимы либо $t > -30°$C, либо $t = -30°$C. В таких случаях принято писать $t \geqslant -30°$C.

Приведем определение нестрогих неравенств $a \leqslant b$ и $a \geqslant b$.

Числовое неравенство $a \leqslant b$ считается верным и при $a < b$, и при $a = b$ и неверным лишь в случае $a > b$.

Запись $a \leqslant b$ читается так: a не больше b, или так: a меньше или равно b.

Числовое неравенство $a \geqslant b$ считается верным и при $a > b$, и при $a = b$; оно считается неверным лишь в случае $a < b$. Запись $a \geqslant b$ читается либо "a не меньше b", либо "a больше или равно b".

Например, неравенства $5 \leqslant 6$ и $4 \leqslant 2^2$ оба верные, а неравенство $9 \leqslant 7$ неверное; неравенство $7 \geqslant 6$ верное, а $3 \geqslant 4$ неверное.

Если $a \geqslant 0$, то говорят, что число a *неотрицательное*.

Для нестрогих неравенств справедливы приведенные выше правила 3 – 5 и свойства 1 – 6, если в них знак строгого неравенства заменить на знак нестрогого неравенства.

Мы уже отмечали, что если $a < b$ и $b < c$, то пишут

$$a < b < c.$$

Подобным образом, если $a \leqslant b$ и $b < c$, то пишут

$$a \leqslant b < c,$$

а если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то пишут

$$a \leqslant b \leqslant c.$$

Вопросы

1. Сформулируйте свойство транзитивности неравенств.
2. Какие неравенства можно складывать?
3. Какие неравенства можно перемножать?
4. Когда верно неравенство $a \leqslant b$?
5. Когда неверно неравенство $a \geqslant b$?

Упражнения

1. Для чисел a и b найти c такое, что $a < c < b$: а) $a = 0$, $b = 0{,}0123(1)$; б) $a = 2{,}13(4)$, $b = 2{,}135$; в) $a = -1$, $b = 0{,}172$; г) $a = -3{,}231$, $b = -1{,}17(35)$.
2. Доказать, что если $a < b$ и $c < d$, то $a - d < b - c$.
3. Доказать, что если положительные числа a, b, c и d удовлетворяют неравенствам $a < b$ и $c < d$, то они удовлетворяют и неравенству $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.
4. Если $|a| < |b|$, то всегда ли верно неравенство $a < b$?
5. Пусть $|a| = |b|$. В каких случаях $a = b$ и в каких случаях $a \neq b$?
6. Как надо понимать записи: $a \leqslant b$, $a < b < c$, $a \leqslant b < c$, $a < b \leqslant c$, $a \leqslant b \leqslant c$?

8. Длина отрезка. Рассмотрим несколько примеров измерения длины отрезка. За единичный отрезок (единицу длины) возьмем 1 дм (рис. 1).

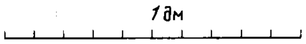


Рис. 1

Пример 1. Отрезок AB, изображенный на рис. 2, имеет длину 2 дм, т.е. на отрезке AB укладывается точно 2 дм. Пишут $AB = 2$ дм.

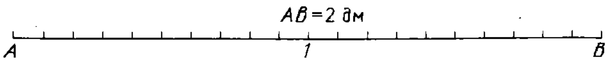


Рис. 2

Пример 2. На рис. 3 в отрезке AB укладывается 2 дм с некоторым остатком, меньшим 1 дм. В этом случае говорят, что длина AB приближенно равна 2 дм с точностью до 1 дм с недостатком, и пишут $AB \approx 2$ дм.

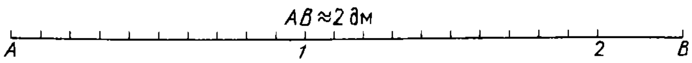


Рис. 3

П р и м е р 3. На рис. 4 в отрезке AB укладывается 2 дм с остатком, в котором укладывается точно 3 см. В этом случае пишут $AB = 2{,}3$ дм.

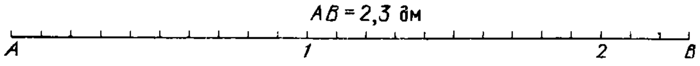


Рис. 4

П р и м е р 4. На рис. 5 в отрезке AB укладывается 2 дм с остатком, в котором укладывается 3 см с остатком, меньшим 1 см. В этом случае длина отрезка AB приближенно равна 2,3 дм с точностью до 0,1 дм с недостатком: $AB \approx 2{,}3$ дм.

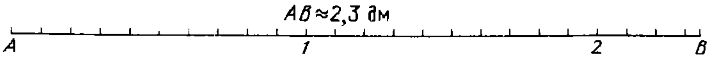


Рис. 5

П р и м е р 5. Если в примере 4 во втором остатке укладывается точно 4 мм, то $AB = 2{,}34$ дм.

П р и м е р 6. Если в примере 4 во втором остатке укладывается 4 мм с остатком, меньшим 1 мм, то говорят, что длина AB приближенно равна 2,34 дм с точностью до 0,01 дм с недостатком: $AB \approx 2{,}34$ дм.

Так же, как в примерах 1 – 6, можно измерять длины отрезков любой другой единицей длины: 1 см, 1 м, 1 км, . . .

П р и м е р 7. Если $AB = 0{,}2305$, то это значит, что длина отрезка AB меньше длины единичного отрезка (единицы длины); в AB укладывается 0,2 этой единицы с остатком, в котором укладывается 0,03 единицы с остатком, в котором укладывается точно 0,0005 единицы.

Если при измерении данного отрезка AB при помощи заданной единицы длины, ее десятых, сотых, тысячных и т.д. долей на любом этапе измерения возникает остаток, то длина AB при помощи конечной дроби может быть выражена только приближенно. Точно же длина отрезка AB выражается бесконечной десятичной дробью:

$$AB = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots$$

Здесь α_0 – приближенная длина AB с точностью до 1 с недостатком; α_0, α_1 – приближенная длина AB с точностью до 0,1 с недостатком; $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2$ – приближенная длина AB с точностью до 0,01 с недостатком и т.д.

П р и м е р 8. Если $AB = 3,(07) = 3{,}070707\ldots$, то 3 – приближенная длина AB с точностью до 1 с недостатком;

3,0 – приближенная длина AB с точностью до 0,1 с недостатком;

3,07 – приближенная длина AB с точностью до 0,01 с недостатком;

3,070 – приближенная длина AB с точностью 0,001 с недостатком и т.д.

Отметим, что $3,(07) = 3\frac{7}{99}$. Поэтому это число можно рассматривать как длину отрезка, в котором укладывается 3 единицы (три единичных отрезка) и еще $\frac{7}{99}$ единицы.

На практике, чтобы начертить с помощью линейки отрезок AB, воспользовались бы его приближенной длиной, заданной десятичной дробью. Например, приняли бы, что $AB \approx 3{,}07$. Ведь обычные измерительные приборы приспособлены к десятичной системе счисления – единица длины делится на 10, 100, 1000, . . . равных частей.

9. Координатная ось. Зададим прямую, на которой выбрано *направление*, показанное стрелкой и называемое *положительным*, и выбрана точка O, называемая *начальной точкой*. Зададим еще отрезок, длину которого примем за единицу, – *единичный отрезок*.

Прямую, на которой выбраны начальная точка, положительное направление и единичный отрезок, называют *координатной осью*.

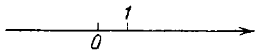


Рис. 6

На рис. 6 координатная ось нарисована горизонтально с положительным направлением, идущим вправо от точки O. Но, вообще говоря, координатная ось может быть расположена вертикально или еще как-нибудь и положительное направление на ней может быть выбрано так, как это может оказаться удобным.

Начальная точка O делит координатную ось на два луча. Один из них, идущий от точки O в положительном направлении, называется *положительным*, другой – *отрицательным*.

Каждой точке координатной оси поставим в соответствие действительное число x по следующему правилу:

Начальной точке O поставим в соответствие число нуль $(x = 0)$; *точке A, если она находится на положительном луче, поставим в соответствие число x, равное длине отрезка OA* $(x = OA)$; *точке A, если она находится на отрицательном луче, поставим в соответствие отрицательное число x, равное длине отрезка OA, взятой со знаком* минус $(x = -OA)$.

Определенную таким образом координатную ось называют *координатной осью x* или коротко *осью x*.

Согласно указанному правилу, число x, соответствующее произвольной точке оси x, называют *координатой этой точки*.

Впрочем, в этих названиях буква x может быть заменена любой другой буквой, например буквами $y, z, t, \ldots$ и тогда говорят об оси y, оси z и т.д.

Согласно указанному правилу:

1. *Каждой точке оси x соответствует действительное число – координата этой точки.*

2. *Две различные точки A и B оси x имеют разные координаты x_1 и x_2.*

3. *Каждое действительное число есть координата некоторой точки оси x.*

Точку O называют еще *началом координатной оси x.*

Положительный луч называют *положительной координатной полуосью x*, а отрицательный луч – *отрицательной координатной полуосью.*

Для краткости точку, имеющую координату x, называют точкой x.

Вопросы

1. Что называется координатной осью?
2. Что называется положительной (отрицательной) координатной полуосью?
3. Что называется координатой точки на координатной оси?

Упражнение

Отметить на координатной оси x точки:

$x = -0{,}01$; $x = 5{,}3$; $x = 0{,}(0)$.

10. Множества чисел. Пусть дана координатная ось x, и пусть даны два действительных числа a и b, удовлетворяющие неравенству $a < b$. Числа a и b можно рассматривать как координаты двух различных точек оси x, которые мы условились также называть точками a и b (рис. 7).

Множество точек оси x, состоящее из точек a и b и всех точек, находящихся между ними, называют *отрезком с концами a и b* и обозначают $[a;\ b]$.

Таким образом, отрезок $[a;\ b]$ – это множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Точки a и b называются концами отрезка $[a;\ b]$. Концы отрезка $[a;\ b]$ принадлежат этому отрезку.

Если из отрезка $[a;\ b]$ исключить оба его конца, то получим множество точек, которое обозначают $(a;\ b)$ и называют *интервалом.*

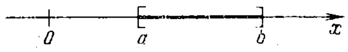


Рис. 7

Таким образом, интервал $(a;\ b)$ есть множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам

$$a < x < b.$$

Если из отрезка $[a;\ b]$ исключить точку b, то получим множество точек, которое обозначают $[a;\ b)$ и называют *полуинтервалом* $[a;\ b)$.

Таким образом, полуинтервал $[a;\ b)$ есть множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$a \leqslant x < b,$$

а полуинтервал $(a;\ b]$ есть множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам

$a < x \leqslant b$.

Пример 1. Интервал (0; 1) есть множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $0 < x < 1$ (рис. 8).

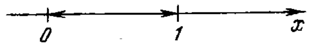


Рис. 8

Пример 2. Отрезок [–1; 3] есть множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant x \leqslant 3$ (рис. 9).

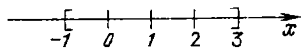


Рис. 9

Пример 3. Полуинтервал [1; 2) есть множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant x < 2$ (рис. 10).

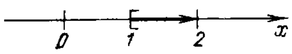


Рис. 10

Пример 4. Полуинтервал (–1; 1] есть множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $-1 < x \leqslant 1$ (рис. 11).

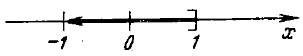


Рис. 11

Если точка x движется по координатной оси x в положительном направлении и при этом ее координата может принимать сколь угодно большие значения, то говорят, что эта точка стремится к плюс бесконечности, и обозначают $x \to +\infty$.

Аналогично если точка x движется по координатной оси в отрицательном направлении и при этом ее координата x такова, что число $|x|$ может принимать сколь угодно большие значения, то говорят, что эта точка стремится к минус бесконечности, и обозначают $x \to -\infty$.

Выше считалось, что a и b – данные числа (или точки оси x), но термин "интервал" понимают также в более широком смысле, заменяя b на $+\infty$ или a на $-\infty$.

Через $(a; +\infty)$, где a – данное число, обозначают множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x$, или множество всех точек оси x, имеющих координаты $x > a$.

Через $(-\infty; a)$, где a – данное число, обозначают множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a > x$, или множество всех точек оси x, имеющих координаты $x < a$.

Наконец, через $(-\infty; +\infty)$ обозначают множество всех действительных чисел или множество всех точек оси x.

Таким образом, интервал $(a; b)$ может быть конечным, если a и b – данные числа (или точки оси x), но может быть и бесконечным, если a или b – это соответственно $-\infty$ или $+\infty$.

Отрезок $[a; b]$ всегда конечный. Отрезок определяется данными числами a и b (или точками оси x).

Полуинтервалы также могут быть бесконечными. Через $[a; +\infty)$ обозначают множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant a$, или множество всех точек оси x, имеющих координаты $x \geqslant a$. Через $(-\infty; b]$ обозначают множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x \leqslant b$, или множество всех точек оси x, имеющих координаты $x \leqslant b$.

Кроме отрезков, интервалов и полуинтервалов часто приходится рассматривать и другие множества чисел. Для простоты записи множества чисел часто обозначают буквами $A, B, C, \ldots$

Некоторые множества имеют специальные обозначения. Например, множество действительных чисел обозначается $\boldsymbol{R}$, множество действительных неотрицательных чисел обозначается $\boldsymbol{R}_+$.

Вопросы

1. Что называется отрезком?
2. Что называется интервалом (конечным)?
3. Что называется интервалом (бесконечным)?
4. Что означает запись $x \to +\infty$?
5. Что означает запись $x \to -\infty$?

§ 4. Степень с целым показателем

1. Степень с натуральным показателем. Ранее уже вводилось понятие степени натурального числа. Теперь мы его приведем в общем виде.

Произведение n множителей, каждый из которых равен числу a, называется *n-й степенью* числа a и обозначается a^n. Таким образом,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}. \tag{1}$$

При этом число a называется *основанием* степени, число n – *показателем* степени, а умножение числа a само на себя n раз называют *возведением в натуральную степень* или *возведением числа a в n-ю степень.*

В этом определении показатель степени n есть натуральное число, большее единицы, так как имеет смысл говорить о произведении, состоящем не менее чем из двух множителей.

Поэтому нужно еще дать определение степени с показателем единица. По определению число a в первой степени равно a:

$$a^1 = a.$$

Однако равенство (1) мы будем применять и к случаю $n = 1$, т.е. выражение справа в (1) при $n = 1$ будем считать равным a.

Отмстим, что в дальнейшем мы не будем считать возведение в натуральную степень как новое действие, а будем считать, что это есть некоторый особый случай умножения.

Перейдем к рассмотрению важнейших свойств натуральных степеней чисел.

Пусть a и b – произвольные действительные числа, а m и n – произвольные натуральные числа. Тогда справедливы следующие равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \tag{2}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \tag{3}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n. \tag{4}$$

Равенство (2) утверждает, что *при умножении степеней одного и того же числа а показатели степеней складываются.*

Например,

$$a^5 \cdot a^3 = a^8; \quad a^4 \cdot a = a^5; \quad a^2 \cdot a^4 = a^6; \quad a \cdot a^3 = a^4.$$

Доказательство свойства (2) очень простое:

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}})(\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ раз}} = a^{m+n}. \tag{5}$$

З а м е ч а н и е. Конечно, если $m = 1$ или $n = 1$, то под выражением $\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}}$ или $\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$ надо понимать, как мы условились, число a.

Равенство (3) утверждает, что *при возведении степени (числа а) в степень показатели степеней перемножаются.*

Например,

$$(a^5)^3 = a^{15}; \quad (a^3)^1 = a^3; \quad (a^1)^7 = a^7; \quad (a^2)^4 = a^8.$$

Докажем это свойство сначала при $m = 3, n = 2$:

$$(a^3)^2 = (a \cdot a \cdot a)^2 = (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{3 \cdot 2}.$$

В общем случае придется писать так:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}}}_{n \text{ раз}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{mn \text{ раз}} = a^{mn}. \tag{6}$$

Равенство (4) утверждает, что произведение одинаковых степеней двух чисел равно той же степени произведения этих чисел, или степень произведения двух чисел равна произведению тех же степеней этих чисел.

Например,

$2^3 \cdot 5^3 = 10^3$; $0{,}25^5 \cdot 8^5 = 2^5$.

Докажем сначала свойство (4) при $n = 3$:

$$a^3b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (ab)^3.$$

В общем виде доказательство выглядит так:

$$a^nb^n = (\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{(ab)(ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ раз}} = (ab)^n. \qquad (7)$$

Формулы (2)–(4) можно усложнить, как видно из следующих примеров.

Пример 1.

$$a^ma^na^l = (a^ma^n)a^l = a^{m+n}a^l = a^{m+n+l}.$$

Пример 2.

$$((a^m)^n)^l = (a^{mn})^l = a^{mnl}.$$

Пример 3.

$$(abc)^n = [(ab)c]^n = (ab)^nc^n = a^nb^nc^n.$$

Представление степени в виде произведения степеней часто называют *разложением степени на множители.*

Вот пример таких разложений:

$$a^3 = a \cdot a \cdot a; \quad a^5 = a^3 \cdot a^2; \quad (ab)^4 = (ab)^2 \cdot (ab)^2.$$

Вопросы

1. Что называется n-й степенью b?
2. По какому правилу перемножаются натуральные степени одного и того же числа?
3. По какому правилу находится натуральная степень произведения четырех чисел?

Упражнения

1. Вычислить:
а) $0{,}125^9 \cdot 8^9$; б) $2^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 5^3$.
2. Представить выражение в виде степени с основанием a:
а) $(a^2)^5$; б) $(a^4)^3$.
3. Представить a^{50} в виде степени с основанием:
а) a^2; б) a^5; в) a^{10}; г) a^{25}.
4. Представить в виде степени произведение:
а) abc^7b^7; б) $8 \cdot 27$; в) $x^4y^2z^4y^2$.
5. Разложить на два множителя (хотя бы одним способом):
а) 7^{10}; б) a^4; в) $(cd)^7$.
6. Разложить на три множителя (хотя бы одним способом):
а) 5^6; б) b^5; в) $(mn)^4$.

7. Представить выражение в виде произведения степеней:

а) $(abcd)^4$; б) $(ab^2)^3$; в) 6^2.

2. Понятие степени с целым показателем. Мы знаем, что степенью действительного числа a с натуральным показателем n называется a^n, определяемое по правилу

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

При этом, если $n = 1$, считается, что правая часть этого равенства равна a: $a^1 = a$.

Мы выяснили ряд свойств натуральных степеней чисел. В частности, было показано, что если a – действительное число, а m и n – натуральные числа, то

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Выясним теперь, как делятся натуральные степени одного и того же числа a. При этом придется считать, что число a отлично от нуля ($a \neq 0$), потому что на нуль делить нельзя.

Пусть a – действительное, отличное от нуля число, а m и n – натуральные числа. Рассмотрим частное от деления a^m на a^n:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n}.$$

Применим к этой дроби основное правило дробей. При этом придется рассмотреть три случая: 1) $m > n$; 2) $m < n$; 3) $m = n$.

1) Если $m > n$, то

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}.$$

И мы приходим к правилу: если число $a \neq 0$, m и n – натуральные числа и $m > n$, то

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad (1)$$

2) Посмотрим, что будет, если $m < n$. Рассмотрим сначала пример. Пусть $m = 3$ и $n = 5$. Тогда

$$a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1 \cdot a^3}{a^2 \cdot a^3} = \frac{1}{a^2}.$$

Мы видим, что при $m < n$ правило 1) неприменимо. Однако если условиться дробь $\frac{1}{a^2}$ обозначить через a^{-2}, т.е. считать, что

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2},$$

то получим равенство

$$a^3 : a^5 = a^{-2} = a^{3-5},$$

которое можно рассматривать как частный случай равенства (1), но без ограничения $m > n$.

Вот еще пример:

$$a^7 : a^{10} = \frac{a^7}{a^{10}} = \frac{1}{a^3} \quad (a \neq 0).$$

Если обозначить дробь $\frac{1}{a^3}$ через a^{-3}, то получим равенство

$$a^7 : a^{10} = a^{-3} = a^{7-10},$$

которое тоже можно рассматривать как частный случай равенства (1) без ограничения $m > n$.

В общем случае, если $m < n$,

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

Здесь дробь $\frac{1}{a^{n-m}}$ мы обозначили $a^{-(n-m)}$.

3) Рассмотрим теперь случай $m = n$. Тогда

$$a^m : a^n = a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1.$$

Это равенство показывает, что целесообразно a^0 считать равным единице, и тогда получим равенство

$$a^m : a^m = 1 = a^0 = a^{m-m},$$

которое также можно рассматривать как частный случай равенства (1), но уже без ограничения $m > n$.

Приведенные выше рассуждения показывают, что целесообразно ввести следующие два соглашения.

1. Для любого действительного, отличного от нуля числа a и любого натурального числа m число $\frac{1}{a^m}$ условимся обозначать a^{-m} и писать

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (a \neq 0).$$

Это равенство читают так: "a в степени $-m$ равно единице, деленной на a в степени m".

2. Для любого действительного, отличного от нуля числа a условимся под выражением a^0 понимать число 1 и писать

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

Это равенство читают так: "a в степени нуль равно единице".

Итак, теперь мы знаем, что такое a^m, где $a \neq 0$ и m – любое целое число (положительное, отрицательное или нуль). Именно, если a – любое отличное от нуля действительное число, то

$$a^m = \begin{cases} \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}}, & \text{если } m \text{ – натуральное число,} \\ 1, & \text{если } m = 0, \\ \dfrac{1}{a^{-m}}, & \text{если } m \text{ – целое отрицательное число.} \end{cases}$$

При этом число a^m называется *степенью с целым показателем*, число a – *основанием степени*, число m – *показателем степени*.

Замечание. Выражение 0^0 считается лишенным смысла. Если m – натуральное число, то выражение 0^{-m} также считается лишенным смысла, однако

$$0^m = \underbrace{0 \cdot \ldots \cdot 0}_{m \text{ раз}} = 0.$$

Вопросы

1. Что понимается под a^{-m}, если $a \neq 0$ и m – натуральное число?
2. Что понимается под a^0, если $a \neq 0$?
3. Что называется степенью с целым показателем?

Упражнения

1. Найти частное от деления:
а) 5^3 на 5^2; б) 10^5 на 10^6; в) 7^{99} на 7^{99}.
2. Записать в виде степени с целым показателем:
а) $5^2 : 5^4$; б) $7^4 : 7^1$; в) $9^2 : 3^4$.

3. Свойства степени с целым показателем. Пусть a и b – произвольные, отличные от нуля действительные числа, m и n – произвольные целые числа. Тогда справедливы следующие равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \qquad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; \qquad (3)$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m; \qquad (4)$$

$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m. \qquad (5)$$

Равенство (1) утверждает, что *при умножении степеней одного и того же числа а показатели степеней складываются.*

Равенство (2) утверждает, что *при делении степеней одного и того же числа а показатели степеней вычитаются*; точнее, из показателя степени делимого вычитается показатель степени делителя.

В справедливости этих утверждений легко убедиться на примерах. Два таких примера, когда $m = 3$, $n = 5$ и $m = 7$, $n = 10$, были уже рассмотрены в предыдущем пункте.

Вот еще примеры ($a \neq 0, b \neq 0$):

1) $a^{-3}a^2 = \frac{1}{a^3} \cdot a^2 = \frac{1}{a} = a^{-1} = a^{(-3)+2}$;

2) $a^{-6}a^{-7} = \frac{1}{a^6} \cdot \frac{1}{a^7} = \frac{1}{a^{13}} = a^{-13} = a^{(-6)+(-7)}$;

3) $\frac{a^{-3}}{a^{-2}} = \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{a^2}} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a} = a^{-1} = a^{(-3)-(-2)}$;

4) $\frac{a^5}{a^{-2}} = \frac{a^5}{\frac{1}{a^2}} = \frac{a^5 \cdot a^2}{1} = a^7 = a^{5-(-2)}$;

5) $\frac{a^0}{a^5} = \frac{1}{a^5} = a^{-5} = a^{0-5}$.

Равенство (3) утверждает, что *при возведении степени* (числа a) *в степень показатели степеней перемножаются.*

При натуральных m и n это правило нам хорошо известно. В справедливости же его при любых m и n можно убедиться на следующих примерах:

6) $(a^{-3})^2 = \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{(-3)\cdot 2}$;

7) $(a^{-4})^0 = 1 = a^0 = a^{(-4)\cdot 0}$;

8) $(a^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{a^6}} = a^6 = a^{(-2)\cdot(-3)}$.

Равенство (4) утверждает, что *степень произведения двух чисел равна произведению тех же степеней этих чисел.*

Равенство (5) утверждает, что *степень частного двух чисел равна частному тех же степеней этих чисел.*

В справедливости этих правил легко убедиться на следующих примерах:

9) $(ab)^{-3} = \frac{1}{(ab)^3} = \frac{1}{a^3b^3} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} = a^{-3} \cdot b^{-3}$;

10) $\dfrac{a^0}{b^0} = \dfrac{1}{1} = 1 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^0$;

11) $\dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$.

В каждом из примеров 1–11 мы привели все необходимые выкладки. Но после того, как правила (1)–(5) будут усвоены, промежуточные выкладки обычно опускают, ссылаясь на эти правила. Таким образом, сразу пишут (считая, что $a \neq 0, b \neq 0$):

1) $a^{-3} \cdot a^2 = a^{-1}$;

2) $a^{-6} \cdot a^{-7} = a^{-13}$;

3) $\dfrac{a^{-3}}{a^{-2}} = a^{-1}$;

4) $\dfrac{a^5}{a^{-2}} = a^7$;

5) $\dfrac{a^0}{a^5} = a^{-5}$;

6) $(a^{-3})^2 = a^{-6}$;

7) $(a^{-4})^0 = 1$;

8) $(a^{-2})^{-3} = a^6$;

9) $(ab)^{-3} = a^{-3}b^{-3}$;

10) $\dfrac{a^0}{b^0} = 1$;

11) $\dfrac{a^3}{b^3} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$.

Вопросы

1. По какому правилу умножаются степени с целыми показателями одного и того же числа?
2. По какому правилу находится степень с целым показателем частного двух чисел?
3. По какому правилу делят степени с целыми показателями одного и того же числа?
4. По какому правилу находится степень с целым показателем произведения двух чисел?
5. По какому правилу возводится в степень с целым показателем степень числа?

Упражнения

1. Представить a^{50} в виде степени с основанием:
а) a^{-2}; б) a^{-5}; в) a^{10}; г) a^{-25}.

2. Представить в виде степени произведение:
а) $a^{-3}b^{-3}$; б) $7^2 \cdot 2^{-3} \cdot 7$.
3. Представить выражение в виде произведения степеней:
а) $(a^2b^{-5})^3$; б) $(a^{-7}b^2)^{-2}$; в) $(a^{-3}b^{-5})^{-4}$.

4. Стандартный вид числа. Всякое положительное число A можно записать так:

$$A = a \cdot 10^k, \qquad (1)$$

где число a удовлетворяет неравенствам

$$1 \leqslant a < 10,$$

а k – целое число. Такая запись называется *записью числа в стандартном виде.* Показатель степени k здесь может быть любым целым числом – положительным, отрицательным или нулем; 10^k называется *порядком* числа A.

Например,

$$273{,}095 = 2{,}73095 \cdot 10^2, \qquad 0{,}0234 = 2{,}34 \cdot 10^{-2},$$

$$0{,}21 = 2{,}1 \cdot 10^{-1}, \qquad 6781 = 6{,}781 \cdot 10^3,$$

$$3{,}1 = 3{,}1 \cdot 10^0.$$

Здесь в правых частях равенств записаны числа в стандартном виде.

Значащей цифрой числа называется ее первая (слева направо) отличная от нуля цифра, а также все следующие за ней цифры.

Например, в числе 235 000 все цифры значащие; в числе 0,302 цифры, стоящие после запятой, значащие; в числе 0,003004 цифры, начиная с цифры 3, значащие.

Из этих примеров видно, что для того, чтобы привести данное число к стандартному виду, надо перенести в нем запятую так, чтобы она оказалась непосредственно правее первой значащей цифры, и полученное число умножить на 10^k, где k подбирается так, чтобы произведение было равно данному числу.

Иногда число a в записи (1) округляют с точностью, которая необходима в данной задаче, и тогда равенство (1) заменяют на приближенное равенство.

Например,

$$1{,}324 \cdot 10^0 \approx 1{,}3 \cdot 10^0;$$

$$2{,}178 \cdot 10^3 \approx 2{,}2 \cdot 10^3;$$

$$3{,}599 \cdot 10^{-4} \approx 3{,}6 \cdot 10^{-4}.$$

Слева записаны числа в стандартном виде, а справа – соответствующие им приближения.

Вопросы

1. Что называется записью числа в стандартном виде?
2. Любое ли положительное число можно записать в стандартном виде?
3. Что называется значащей цифрой числа?
4. Как привести число к стандартному виду, используя его значащие цифры?

Упражнение

Записать следующие числа в стандартном виде:
а) 27,4; б) 3821; в) 0,0011.

Исторические сведения

Задолго до нашей эры потребность счета привели человека к понятию натурального числа. Постепенно математики Вавилона, Египта, Китая, Греции еще до нашей эры заложили основы науки – теории чисел, изучающей свойства натуральных чисел, в частности вопросы распределения простых чисел среди натуральных.

В нашей стране крупнейшими представителями теории чисел были Л. Эйлер, П.Л. Чебышев и И.М. Виноградов.

Большой вклад в теорию чисел внес величайший математик Леонард Эйлер (1707–1783). Современники считали Л. Эйлера общим учителем математиков второй половины XVIII в., но он был также выдающимся механиком и физиком. По происхождению Эйлер был швейцарцем, однако более 30 лет он прожил в России и был членом Петербургской Академии наук. Свои основные научные работы он написал в Петербурге. Сам он так описывает роль России в его творчестве: "Его королевское величество (Фридрих II) недавно меня спрашивал, где я изучил то, что знаю? Я, согласно истине, ответил, что всем обязан моему пребыванию в Петербургской Академии наук".

Эйлер является основателем русской математической школы. Он написал учебник "Полное введение в алгебру", по образцу которого в дальнейшем писались другие учебники алгебры.

В прошлом веке существенный вклад в решение ряда задач теории чисел внес великий русский ученый академик Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894). Он внес большой вклад и в другие направления математики, а также механики, в теорию вероятностей, теорию механизмов, теорию функций и т.д.

В XX в. крупнейшим представителем теории чисел был советский математик академик Иван Матвеевич Виноградов (1891–1982), директор Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук СССР.

Приведем примеры отдельных решенных и нерешенных проблем в теории чисел.

Чебышев показал, что среди натуральных чисел от n до $2n$ $(n > 1)$ имеется хотя бы одно простое число.

Виноградов доказал для достаточно больших нечетных чисел проблему Гольдбаха, остававшуюся нерешенной 200 лет: любое нечетное число, большее 5, есть сумма трех простых чисел. Однако для всех нечетных чисел проблема Гольдбаха до сих пор не решена.

До сих пор не подтверждено также высказывание Эйлера (проблема Эйлера): каждое четное число, большее 4, можно представить как сумму двух простых чисел.

Математиков давно уже занимает следующий вопрос.

Пусть N – натуральное число, а $a(N)$ – количество простых чисел, не превышающих N. Надо как можно точнее оценить число $a(N)$. Существенный вклад в решение этого вопроса внес П.Л. Чебышев.

В связи с необходимостью измерять различные величины – длины, площади, объемы, веса и др. – наряду с натуральными числами возникли дробные или положительные рациональные числа. Дробные числа использовались математиками еще до нашей эры. Результаты практических измерений обыкновенно даются рациональными числами, выражающими приближенно измеряемую величину. При этом широко употребляют конечные десятичные дроби.

Предполагают, что впервые десятичные дроби появились в Китае, и связано это с десятичной системой мер, которая существовала в Китае еще во II в. до н.э.

В 1427 г. самаркандский математик и астроном Джемшид инб-Масуд аль-Каши подробно описал систему десятичных дробей и действий над ними. В Европе десятичные дроби стали известны через сто с лишним лет после этого благодаря главным образом трудам фламандского инженера и ученого С. Стевина.

В русской литературе учение о десятичных дробях было впервые изложено в "Арифметике" Леонтия Филлиповича Магницкого (1669–1739) – первом русском печатном учебнике по математике (1703 г.). Эта книга сыграла большую роль в распространении математических знаний в России, по ней учился гениальный русский ученый М.В. Ломоносов, хранивший эту книгу до конца своих дней.

М.В. Ломоносов назвал "Арифметику" Магницкого и "Грамматику" Смотрицкого "вратами учености".

В.К. Тредиаковский – русский поэт, ученый-филолог, писал: "Магницкий Леонтий муж, сведущий славянского языка . . . добросовестный и нельстивый человек, первый Российский арифметик и геометр; первый издатель и учитель в России арифметики и геометрии".

Магницкий в предисловии к своей "Арифметике" писал:

"И желаем да будет сей труд
Добре пользовать русский весь люд".

Десятичные дроби благодаря простой записи и сходными с натуральными числами правилами действий получили широкое распространение в практических расчетах.

Древние греки за несколько столетий до нашей эры обнаружили, что наряду с рациональными отрезками, т.е. отрезками, имеющими длины, выражаемые рациональными числами, имеются также нерациональные отрезки, длины которых выражаются рациональными числами только приближенно. Для их точного выражения требуется введение новых чисел. Греки, например, умели доказывать, что диагональ квадрата со стороной длины 1 не выражается рациональным числом.

Ход их рассуждений был примерно таков: предположим противное, т.е. что длина диагонали есть рациональное число $\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь. Так как площадь квадрата, построенного на диагонали, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах, то $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, т.е.

$$\frac{p \cdot p}{q \cdot q} = 2.$$

Так как левая часть этого равенства есть несократимая дробь, а правая – натуральное число, то это равенство невозможно. Следовательно, наше предположение неверно, и поэтому длина диагонали не есть рациональное число, т.е. длина диагонали есть иррациональное число.

Таким образом, при решении математических задач стали появляться иррациональные (нерациональные) числа. Такими, например, являются числа, квадраты которых равны 2, 3, 17. Примеры таких чисел знал, а может быть, и впервые их открыл Пифагор – знаменитый греческий математик VI в. до н.э.

Важную роль в математике играет число, равное отношению длины окружности к ее диаметру. Обозначение этого числа греческой буквой π ("пи") получило в XVIII в. широкое распространение после работ Эйлера. Ученые вычисляли приближенно значение π с разной точностью. Так, великий греческий математик и механик Архимед (III в. до н.э.) доказал неравенства

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Д.аль-Каши выразил приближенное значение π дробью, записанной в шестидесятичной системе счисления:

$$\pi \approx 3°8'29''44''' \left(= 3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3}\right).$$

Но только в XVIII в. было доказано, что число π иррациональное.

В математике долго стояла проблема об общем определении чисел, которые выражали бы длины произвольных отрезков. Эта проблема до конца была решена только в прошлом столетии. Выяснилось, что, например, в качестве таких чисел можно взять десятичные дроби. Длина произвольного отрезка выражается десятичной дробью, вообще говоря, бесконечной. Верно и обратное утверждение: любая десятичная дробь (в том числе бесконечная) есть длина некоторого отрезка.

Длина отрезка тесно связана с понятием координатной оси.

Еще во II–I вв. до н.э. китайские ученые использовали отрицательные числа для обозначения противоположных состояний: наличие – отсутствие, имущество – долг, приход – расход и т.д.

Отрицательные числа использовали и индийские математики в VII в.

В Европе первым к понятию отрицательного числа пришел итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в XIII в. Когда при решении уравнения у него получается отрицательный ответ, он объясняет его как долг.

Но много веков отрицательные числа считались чем-то надуманным и мало применялись в математике. Широкое распространение они получили после того, как была понята важность введения в математику координатной оси. Координатная ось имеет два направления, и поэтому все ее точки нельзя представить только положительными числами – нужны и отрицательные.

Каждая точка координатной оси имеет координату – действительное число (оно может быть рациональным или иррациональным, положительным, нулем или отрицательным); каждое действительное число есть координата некоторой точки координатной оси.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 5. Одночлены

1. Числовые выражения. При решении многих задач приходится над заданными числами производить арифметические действия – сложение, вычитание, умножение и деление. Но часто, прежде чем доводить до конца каждое из этих действий, удобно заранее указать порядок (план), следуя которому надо производить эти действия. Этот план сводится к тому, что по данным задачи с помощью чисел, знаков действий и скобок составляется *числовое выражение*.

Приведем примеры числовых выражений:

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}-(3-5)\cdot\frac{3}{4};$$

$$(937-811):63+\frac{3-21}{9}-2\cdot(7-2^4:2);$$

$$(39-15):2^3+\frac{3\cdot 2^2}{3-7}.$$

Если в числовом выражении выполнить все указанные в нем действия, то в результате получим действительное число, про которое говорят, что оно равно данному числовому выражению.

Например, первое числовое выражение в наших примерах равно 2, второе тоже равно 2, третье же равно 0. Поэтому мы пишем

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}-(3-5)\cdot\frac{3}{4}=2;$$

$$(937-811):63+\frac{3-21}{9}-2\cdot(7-2^4:2)=2;$$

$$(39-15):2^3+\frac{3\cdot 2^2}{3-7}=0.$$

Подчеркнем, что числовое выражение дает указание, какие арифметические действия и в каком порядке следует производить над данными числами. Скобки помогают установить порядок следования действий.

Мы, конечно, предполагаем, что все действия можно осуществить. Поясним эти слова. Всегда можно произвести сложение, вычетание и умножение любых чисел. А вот делить числа одно на другое можно, только если делитель не равен нулю: на нуль делить нельзя. Если в данном выражении на некотором его этапе требуется делить на нуль, то это требование неосуществимо. Такое выражение не имеет смысла.

Например, выражения

$$0,37 - \frac{3,1 + 0,172}{1,5 + (2 - 5) : 2}; \quad \frac{35,079}{\frac{1}{3} - 0,(3)}$$

не имеют смысла, потому что при выполнении указанных в них действий появляется необходимость делить на нуль.

Заметим, что числовое выражение может состоять и из одного числа.

Вопросы

1. Когда числовое выражение имеет смысл?
2. Когда выражение не имеет смысла?
3. Может ли числовое выражение состоять из одного числа?

Упражнения

1. Установить, какие из следующих выражений имеют смысл и какие не имеют. Для имеющих смысл найти числа, которым они равны:

а) $\dfrac{4\frac{1}{3} + 5,4 - 0,2(6)}{0,0(23) - 0,1} : \left(-5 + 7\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3}\right)$;

б) $3\frac{1}{7} + \left[1\frac{1}{4}\left(75 : \frac{25}{3} - 14\right)\right]\frac{4}{7}$;

в) $\left[\dfrac{3,(4) + 6\frac{5}{9}}{5\frac{7}{8} - 2\frac{1}{4} - 0,5} : \left(12\frac{8}{11} - 8\frac{50}{99}\right)\right] \cdot \left(2\frac{3}{8} - 1\frac{5}{8}\right)$.

2. Придумать два примера числовых выражений, где участвовали бы все арифметические действия.

2. Буквенные выражения. *Если в числовом выражении некоторые (или все) входящие в него числа заменить буквами (разные числа – разными буквами), то получится буквенное выражение.*

Пример 1. Если в числовом выражении

$$\frac{5 + 3}{2}$$

число 5 заменить буквой a, число 3 – буквой b и число 2 – буквой c, то получим буквенное выражение

$$\frac{a+b}{c}.$$

Пример 2. Если в числовом выражении

$$\frac{(5-3)+(5-2)}{5-1}$$

число 5 заменить буквой x и число 3 – буквой y, то получим буквенное выражение

$$\frac{(x-y)+(x-2)}{x-1}.$$

Вот еще примеры буквенных выражений.

Пример 3. $a+(-a)-(a+3)$.

Пример 4. $x+(y+z)$.

Пример 5. $\frac{a}{b}$.

Пример 6. $\frac{x+a}{c-d}$.

Буквенное выражение может состоять и из одной буквы, например a; c; n; x.

Буквенные выражения называют еще *алгебраическими выражениями*; отдельные числа также называют алгебраическими выражениями.

Если два данных алгебраических выражения соединить знаком сложения, вычитания, умножения или деления (+; –; ·; :), то получим снова алгебраическое выражение, которое называется соответственно *суммой, разностью, произведением* или *частным данных алгебраических выражений.* Впрочем, не для всяких двух выражений можно определить частное. Это связано с делением на 0, о чем будет сказано ниже.

Например, сумма, разность, произведение и частное алгебраических выражений

$a+1$ и $a-b$

есть в свою очередь алгебраические выражения, имеющие соответственно вид:

$(a+1)+(a-b)$; $(a+1)-(a-b)$;

$(a+1)\cdot(a-b)$ или $(a+1)\times(a-b)$;

$(a+1):(a-b)$ или $\frac{a+1}{a-b}$.

Знак умножения ($\cdot$ или $\times$) часто опускают. Например, произведение $(a+1)\cdot(a-b)$ записывают и так: $(a+1)(a-b)$.

Вопросы

1. Что называется буквенным выражением? Приведите пример.
2. Может ли буквенное выражение состоять из одной буквы?
3. Можно ли называть число алгебраическим выражением?
4. Что называется суммой, разностью, произведением, частным двух данных алгебраических выражений? Приведите примеры.
5. Можно ли опускать знак умножения при записи произведения алгебраических выражений?

Упражнения

1. Написать алгебраическое выражение, с помощью которого вычисляется объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c.
2. Написать алгебраическое выражение, которое представляет:
а) целые числа, делящиеся нацело на 5;
б) натуральные числа, делящиеся на 5 с остатком 3.

3. Понятие одночлена. *Одночленом* называется алгебраическое выражение, являющееся произведением букв и чисел. Эти буквы и числа называются *множителями* данного одночлена.

Например, алгебраическое выражение

$$3abc$$

есть одночлен; его множителями являются число 3 и буквы a, b, c.

Заметим, что при записи этого одночлена опущены знаки умножения. Вот еще примеры одночленов:

$$x\cdot(-3)\cdot y\cdot 1\cdot x;\quad 1\cdot a\cdot(-1)\cdot b;$$

$$a\cdot 0\cdot b\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot a.$$

Здесь при записи одночленов знаки умножения не опущены.

Число или одну букву также называют одночленом.

Например, алгебраические выражения a; b; c; 1; $\frac{1}{3}$; 0 – одночлены.

Число 0 *называется нулевым одночленом.*

Сформулируем некоторые свойства одночленов.

Свойство 1. *Два одночлена считаются равными, если они отличаются друг от друга лишь порядком множителей.*

Для записи равенства двух одночленов употребляют знак равенства (=). Полученное равенство называют *алгебраическим равенством.*

Два одночлена $a3bc$ и $3cba$ равны, так как они различаются лишь порядком множителей, поэтому пишут алгебраическое равенство

$$a3bc = 3cba. \tag{1}$$

Ниже речь будет идти только об алгебраических равенствах, хотя слово "алгебраическое" часто будет опускаться.

Отметим, что равенство (1) и ниже рассматриваемые равенства одночленов превращаются в верные числовые равенства, если в них заменить буквы числами. Ведь тогда, например, в левой части равенства (1) будет написано произведение чисел, а в правой – то же произведение, но с переставленными множителями, а произведение чисел не зависит от порядка его сомножителей.

Когда говорят, что в равенстве буквы заменяются числами, имеется в виду, что одна и та же буква, где бы она ни находилась в равенстве, заменяется одним и тем же числом.

Свойство 2. *Два одночлена считаются равными, если один из них получен из другого заменой некоторых его числовых множителей их произведением*; например,

$$a \cdot 7 \cdot (-3) \cdot b = a \cdot (-21) \cdot b;$$

$$c \cdot 2 \cdot 4 \cdot b \cdot 3 \cdot 1 \cdot a = c 8 b 3 a.$$

Свойство 3. *Одночлен считается равным нулю, если среди его множителей есть число нуль*; например,

$$a \cdot (-1) \cdot b \cdot 0 \cdot c = 0; \quad 0 \cdot 3 \cdot c \cdot b = 0.$$

Одночлен, среди множителей которого есть число нуль, называется *нулевым одночленом*. Остальные одночлены называются *ненулевыми*.

Свойство 4. *Два одночлена считаются равными, если один из них получен из другого опусканием множителя* 1; например,

$$a \cdot 1 \cdot b \cdot c = abc; \qquad 1 \cdot abd = abd.$$

Вопросы

1. Что называется одночленом? Приведите примеры.
2. Что называется множителями одночлена? Приведите примеры.
3. Можно ли называть число одночленом?
4. Можно ли одну букву называть одночленом?
5. Что называется нулевым одночленом?
6. Приведите примеры алгебраических равенств одночленов.
7. Если в алгебраическом равенстве, получающемся при перестановке множителей одночлена, заменить буквы числами, то получится ли верное числовое равенство? Приведите примеры.

Упражнение

Написать все одночлены, получающиеся изменением порядка множителей следующего одночлена:

а) $3ab$; б) $d(-2) \cdot 3c$; в) $x7yz$.

4. Произведение одночленов. *Произведение одночленов равно одночлену, множителями которого являются все множители данных одночленов.*

Например, произведение одночлена $a3$ на одночлен bca есть одночлен $a3bca$, что записывается в виде алгебраического равенства

$$a3 \cdot bca = a3bca$$

или

$a3 \times bca = a3bca.$

Произведение k одинаковых одночленов, каждый из которых есть a, кратко обозначают a^k и называют *k-й степенью a.* Число k называют *показателем* степени, а букву a – *основанием* степени. Например, пишут

$$aa = a^2; \quad aaa = a^3; \quad aaaa = a^4; \ldots$$

и говорят соответственно, что

произведение a на a равно a во второй степени или a в квадрате;

произведение трех множителей, каждый из которых есть a, равно a в третьей степени или a в кубе;

произведение четырех множителей, каждый из которых есть a, равно a в четвертой степени и т.д.

Пишут также

$$a^1 = a$$

и говорят, что *a в первой степени равно a.*

Если m и n – натуральные числа, то выполняются равенства

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \tag{1}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n; \tag{2}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \tag{3}$$

Равенство (1) означает, что при умножении степеней одной и той же буквы показатели степеней складываются, а основание остается прежним. Равенство (2) означает, что при возведении в степень произведения букв надо возвести в эту степень каждую букву и результаты перемножить. Равенство (3) означает, что при возведении степени буквы в степень надо взять показателем произведение показателей степеней, а основание оставить прежним.

Справедливость равенств (1)–(3) подтверждается следующими примерами:

$$a^3 \cdot a^2 = aaa \cdot aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2};$$

$$a^1 \cdot a^3 = a \cdot aaa = a^4 = a^{1+3};$$

$$(ab)^2 = ab \cdot ab = aa \cdot bb = a^2 b^2;$$

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6 = a^{2 \cdot 3}.$$

Для упрощения записи одночлена одинаковые буквы заменяют соответствующими степенями этих букв. Например, пишут

$$(-3)aaab = (-3)a^3 b.$$

Сказанное выше выразим в виде следующего свойства одночленов.

Свойство 5. *Два одночлена считаются равными, если один из них получен из другого заменой произведения множителей, каждый из кото-*

рых есть одна и та же буква, соответствующей степенью этой буквы; например,

$$5a^2bab^3 = 5a^3b^4;$$

$$2a^3baa3b^2 = 2a^5 3b^3.$$

Свойство 6. *Если перед одночленом поставить знак плюс, то получится одночлен, равный исходному*; например,

$$+abc = abc; \quad +(-7)ab = (-7)ab.$$

Свойство 7. *Если перед одночленом поставить знак минус, то получится одночлен, равный исходному, умноженному на число* -1; например,

$$-ab = (-1)ab; \quad -(-7)\alpha\beta = (-1)(-7)\alpha\beta.$$

Пользуясь свойством 7, получаем равенства

$$-(-7\alpha\beta) = (-1)[(-1)7\alpha\beta] = (-1)(-1)7\alpha\beta = 7\alpha\beta;$$

$$-(-a) = (-1)(-1)a = a.$$

Одночлен и такой же одночлен, но со знаком минус перед ним называются *противоположными одночленами*. Например, одночлены $3a^2bc$ и $-3a^2bc$ противоположные.

Чтобы получить один из них из другого, нужно перед другим поставить знак минус, или, что то же самое, умножить его на число -1.

Например, одночлены a и $-a$, так же как $-a$ и $-(-a)$, противоположные.

Вопросы

1. Чему равно произведение одночленов?
2. Что называется k-й степенью буквы a?
3. Чему равна первая степень буквы a?
4. По какому правилу умножаются степени одной и той же буквы?
5. По какому правилу возводится в степень произведение букв?
6. По какому правилу возводится в степень степень буквы?
7. Сформулируйте свойства одночленов.
8. Какие одночлены называются противоположными?
9. Какие одночлены равны 0?

Упражнения

1. Записать следующие произведения в виде степеней:

а) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$; б) $a^5a^2a^3$.

2. Используя понятие натуральной степени, написать одночлены, равные следующему одночлену:

а) $\alpha\beta\alpha\beta\alpha$; б) $2 \cdot 3 \cdot a \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot a$.

5. Стандартный вид одночлена. Говорят, что ненулевой одночлен, содержащий буквы, имеет *стандартный вид*, если он имеет только один числовой множитель, записанный на первом месте, а каждая его буква участвует в его записи лишь один раз в виде некоторой ее степени; при этом буквы одного и того же алфавита (латинского, греческого) записаны в порядке этого алфавита.

Числовой множитель ненулевого одночлена, содержащего буквы и имеющего стандартный вид, называется *коэффициентом* одночлена.

Например, ненулевые одночлены

$$(-12)ab^2c; \quad \frac{1}{3}x^4y^2; \quad (-1)a^2b$$

имеют стандартный вид. Их коэффициенты соответственно равны числам $-12; \ \frac{1}{3}; \ -1$.

Если ненулевой одночлен имеют только буквенные множители, то считают, что его коэффициент равен 1. Например, одночлены

$$a; \quad ab; \quad x^2yz^2$$

являются одночленами стандартного вида. Коэффициент каждого из них равен 1.

Если коэффициент ненулевого одночлена стандартного вида есть отрицательное число, то такой одночлен записывают еще и так: сначала пишется знак минус, потом абсолютная величина коэффициента, а затем буквенные множители. Например, следующие одночлены:

$$-\frac{4}{3}x^4y^2; \quad -a^2b^3$$

считаются одночленами стандартного вида; $-\frac{4}{3}$ – коэффициент первого из них, -1 – коэффициент второго. При этом пишут

$$\left(-\frac{4}{3}\right)x^4y^2 = -\frac{4}{3}x^4y^2; \quad -a^2b^3 = (-1)a^2b^3.$$

Любое действительное число считается одночленом, записанным в стандартном виде. Например, числа

$$-5; \quad 2; \quad \frac{7}{9}; \quad -\frac{3}{195}$$

являются одночленами стандартного вида. *Стандартный вид нулевого одночлена есть* 0.

Следующие одночлены записаны в нестандартном виде:

$$3a^2 2bc; \quad (-1)ba^2d^3; \quad 7a^4ba^2b^3; \quad 0 \cdot a^2b^2.$$

Любой одночлен можно привести к стандартному виду, пользуясь свойствами 1–7. Иначе говоря, для любого одночлена найдется одночлен стандартного вида, которому он равен.

Рассмотрим примеры приведения одночленов к стандартному виду.

Пример 1.

$$b^2a^2(-1)c3ab^3 4c^2 = (-12)a^3b^5c^3 = -12a^3b^5c^3.$$

Произведение всех числовых множителей здесь равно -12. Это — коэффициент одночлена. Ставим его впереди букв. Произведение множителей — степеней b — равно $b^2 \cdot b^3 = b^5$; произведение множителей — степеней c — равно $c \cdot c^2 = c^3$; произведение множителей — степеней a — равно $a^2 \cdot a = a^3$. Располагаем буквы a, b, c в порядке латинского алфавита. В итоге получаем первое равенство. Затем, используя соглашение о записи одночлена с отрицательным коэффициентом, пишем второе равенство.

Пример 2.

$$a^3 5b0c = 0.$$

Это нулевой одночлен, потому что среди его множителей имеется число 0. Его стандартный вид есть число 0.

Пример 3.

$$\beta\alpha\gamma = \alpha\beta\gamma.$$

Здесь мы греческие буквы α, β, γ расположили в порядке алфавита.

Степенью ненулевого одночлена называется сумма показателей степеней всех его букв. Например, одночлен $3a^2b$ третьей степени, одночлен $3c$ первой степени. Степень одночлена $a^2 2ba$ равна 4.

По определению *действительное, отличное от нуля, число считается одночленом нулевой степени.* Например, одночлены

$$-5; \quad 7; \quad -0{,}3; \quad \frac{7}{16}$$

имеют степень 0. *Число нуль — нулевой одночлен — это единственный одночлен, степень которого не определена.*

Вопросы

1. Что называется одночленом, имеющим стандартный вид?
2. Что называется коэффициентом одночлена?
3. Каков стандартный вид нулевого одночлена?
4. Любой ли одночлен можно привести к стандартному виду?
5. Что называется степенью одночлена?

Упражнения

1. Привести одночлен к стандартному виду:

а) $cdab$; б) $\frac{1}{500}xy(-1)yzx^2$;

в) $\left(-\frac{4}{3}\right)xy^2(0{,}3)^2zx^4$; г) $\beta\alpha$;

д) $7x0y$; е) $-\frac{7}{13}$; ж) 0.

2. Привести одночлен к стандартному виду, найти его коэффициент и степень: а) $3acb5$; б) $dcab$; в) $(-1)\alpha\gamma5\beta$.

6. Подобные одночлены. Ненулевые одночлены называются *подобными*, если они равны между собой или различаются лишь своими коэффициентами. Например, одночлены $3ab$ и $5ab$ подобны, так как они различаются лишь своими коэффициентами.

Чтобы узнать, подобны ли данные одночлены, их надо привести к стандартному виду.

Выясним, подобны ли одночлены $abab^2$ и $baab^2$. Приведем их к стандартному виду:

$abab^2 = a^2b^3$ и $baab^2 = a^2b^3$.

Одночлены подобны, потому что после приведения их к стандартному виду они равны между собой.

Одночлены

$-3a^2bc$ и $a^2(-2)b3c = (-6)a^2bc$

также подобны, потому что после приведения их к стандартному виду они различаются лишь коэффициентами.

Среди одночленов

a^2; b^2; a^3; 1; $3a^2b$; $3ab^2$

нет подобных; любые два из них не подобны.

По определению *сумма подобных одночленов равна одночлену, подобному каждому из них с коэффициентом, равным сумме коэффициентов данных одночленов.* Если сумма коэффициентов равна нулю, то и сумма одночленов равна нулю. Например,

$$3a^2b + 2a^2b = (3 + 2)a^2b = 5a^2b;$$

$$2x^3y^2 + (-2)x^3y^2 = (2 - 2)x^3y^2 = 0 \cdot x^3y^2 = 0;$$

$$7xyz + 3xyz + (-5)xyz = [7 + 3 + (-5)]xyz = 5xyz.$$

По определению *разность двух подобных одночленов равна одночлену, подобному каждому из них с коэффициентом, равным коэффициенту уменьшаемого минус коэффициент вычитаемого.* Если разность коэффициентов равна нулю, то и разность одночленов равна нулю. Например,

$$2abc^2 - 7abc^2 = (2 - 7)abc^2 = (-5)abc^2 = -5abc^2;$$

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)a = \frac{1}{6}a;$$

$$3ac - 3ac = (3 - 3)ac = 0ac = 0.$$

Разность двух подобных одночленов можно заменить суммой уменьшаемого одночлена и одночлена, противоположного вычитаемому. Например, так как

$$7ab - 3ab = (7 - 3)ab = 4ab;$$

$$7ab + (-3ab) = [7 + (-3)]ab = 4ab,$$

то

$$7ab - 3ab = 7ab + (-3ab).$$

Поэтому в дальнейшем мы будем говорить только о сумме подобных одночленов.

Замена суммы подобных одночленов одночленом, равным этой сумме, называется ***приведением подобных членов.***

Вот примеры приведения подобных членов:

$$\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)a =$$

$$= \left(\frac{4}{12} - \frac{6}{12} + \frac{3}{12}\right)a = \frac{1}{12}a;$$

$$\frac{2}{7}xy - \frac{6}{7}xy + \frac{4}{7}xy = \left(\frac{2}{7} - \frac{6}{7} + \frac{4}{7}\right)xy = 0xy = 0.$$

Отметим, что эти равенства, если в них заменить буквы числами, превращаются в верные числовые равенства на основании распределительного закона для чисел.

Вопросы

1. Какие одночлены называются подобными?
2. Чему равна сумма подобных одночленов?
3. Чему равна разность двух подобных одночленов?
4. Приведите примеры равной нулю суммы (разности) подобных одночленов.
5. Что значит заменить разность двух подобных одночленов суммой двух других одночленов?
6. Что значит привести подобные одночлены?
7. Если в алгебраическом равенстве, получающемся при приведении подобных одночленов, заменить буквы числами, то получится ли верное числовое равенство? Почему? Приведите примеры.

Упражнения

1. Среди следующих одночленов найти подобные:

а) a^2bc; $2abca$; a^3bc; $-3bca^2$;

б) $\alpha^2\beta$; $-\alpha\beta\alpha^2$; $-3\alpha^2\beta 0$; $7\alpha^2\beta\alpha$.

2. Найти сумму подобных одночленов:

а) $a^2bc + 2abca + (-3bca^2)$; б) $(-\alpha\beta\alpha^2) + 7\alpha^2\beta\alpha + \alpha^3\beta$;

в) $7\alpha^2 + (-3\alpha^2) + (-4\alpha^2)$.

3. Найти разность подобных одночленов:

а) $3abc - 7abc$; б) $9a^3b^2 - 9a^3b^2$; в) $5\alpha - 6\alpha$.

§ 6. Многочлены

1. Понятие многочлена. *Многочлен* — это сумма одночленов, называемых *членами многочлена.*

Например,

а) $a^2 + 2ab + b^2$ — многочлен; $a^2, 2ab, b^2$ — его члены;

б) $a^3 + b^3$ — многочлен; a^3, b^3 — его члены;

в) $\frac{1}{3}a^2 + (-2b) + (-b^2)$ — многочлен; $\frac{1}{3}a^2$, $-2b$, $-b^2$ — его члены.

Многочлен в) принято еще записывать следующим образом:

$$\frac{1}{3}a^2 - 2b - b^2.$$

Это выражение также называют многочленом, несмотря на то что в его записи участвуют знаки минус. Надо иметь в виду, что, называя данное выражение многочленом, считают, что его второй член есть $-2b$, а третий есть $-b^2$.

В силу этого соглашения равны многочлены

$$\frac{1}{3}a^2 + (-2b) + (-b^2) \quad \text{и} \quad \frac{1}{3}a^2 - 2b - b^2.$$

Для записи равенства двух многочленов употребляется знак равенства. Полученное равенство называют *алгебраическим равенством*. Поэтому имеет место алгебраическое равенство

$$\frac{1}{3}a^2 + (-2b) + (-b^2) = \frac{1}{3}a^2 - 2b - b^2. \qquad (1)$$

Подобным образом пишут

$$x^3 - y^3 = x^3 + (-y^3); \quad (-x^2) + (-y^2) = -x^2 - y^2.$$

Ниже речь будет идти только об алгебраических равенствах, хотя слово "алгебраическое" часто будет опускаться.

Одночлен также называют многочленом.

Поэтому выражения

$$a^5; \ 2ab; \ \frac{7}{3}; \ -\frac{5}{9}; \ 0; \ a$$

можно рассматривать не только как одночлены, но и как многочлены.

Число нуль называется нулевым многочленом.

Вопросы

1. Что называется многочленом? Приведите примеры.
2. Что называется членами многочлена? Приведите пример многочлена и укажите все его члены.
3. Можно ли считать одночлен многочленом?
4. Что такое нулевой многочлен?
5. Можно ли считать число 2,(5) многочленом?
6. Приведите примеры алгебраических равенств многочленов.

Упражнение

Выписать все члены следующих многочленов;
а) $2x^2 - 3xy - xy + 7y$; б) $-x^7 - x^5 - 2x^3 - 3x$.

2. Свойства многочленов. Многочлены мы будем преобразовывать по определенным правилам, которые будем называть свойствами многочленов.

Свойство 1. *Члены многочлена можно менять местами.*

Иначе говоря, два многочлена считаются равными, если они отличаются друг от друга лишь порядком их членов.

Например, имеют место следующие алгебраические равенства:

$$
\begin{aligned}
&2a^2b + 3ab^2 = 3ab^2 + 2a^2b;\\
&a^2 - b^2 = -b^2 + a^2;\\
&x^2 - x + 1 = 1 - x + x^2 = -x + x^2 + 1.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Свойство 2. *Прибавление к многочлену нуля (нулевого многочлена) не изменяет его.*

Иначе говоря, два многочлена считаются равными, если один из них получен из другого прибавлением числа нуль.

Например,

$$
\begin{aligned}
&a^4 + (-a^2) + 0 = a^4 + (-a^2);\\
&0 + \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma;\\
&2\alpha - 3\beta + 0 - \gamma = 2\alpha - 3\beta - \gamma.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Свойство 3. *В многочлене можно приводить подобные члены.*

Иначе говоря, два многочлена считаются равными, если один из них получен из другого заменой подобных членов их суммой.

Например,

а) $a^2 + ab - ab + b^2 = a^2 + 1ab + (-1)ab + b^2 =$

$= a^2 + [1 + (-1)]ab + b^2 = a^2 + 0 \cdot ab + b^2 = a^2 + 0 + b^2 = a^2 + b^2;$

б) $a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - a^2b + ab^2 - b^3 =$

$= a^3 + \underline{(-2)a^2b} + \underline{\underline{2ab^2}} + \underline{(-1)a^2b} + \underline{\underline{1 \cdot ab^2}} - b^3 =$

$= a^3 + [(-2) + (-1)]a^2b + (2 + 1)ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

Мы подчеркнули одной и двумя чертами две пары подобных членов, а затем привели подобные члены.

Многочлены можно упрощать, пользуясь их свойствами. Рассмотренные выше примеры и есть примеры упрощения многочленов. Отметим, что рассмотренные выше алгебраические равенства превращаются в верные числовые равенства, если в них буквы заменить числами. Например, равенства (1) превращаются тогда в верные числовые равенства на основании переместительного закона сложения для чисел. Равенства (2) превращаются в верные числовые равенства потому, что от прибавления к сумме чисел числа 0 сумма не изменяется.

Еще раз отметим, что когда говорят, что в равенстве буквы заменяются числами, то имеют в виду, что одна и та же буква, где бы она ни находилась в равенстве, заменяется одним и тем же числом.

Вопросы

1. Сформулируйте свойства многочленов.

2. Если в алгебраических равенствах (1), (2) буквы заменить числами, то на основании каких свойств чисел получатся верные числовые равенства?

Упражнение

Упростить следующие многочлены:

а) $xyx - 2x^2y + 2x - 3x$;

б) $\beta\alpha^2 - 3\alpha^3 + 7\alpha\beta\alpha + 3\alpha^3 - 8\alpha^2\beta$.

3. Многочлены стандартного вида. Говорят, что *многочлен имеет стандартный вид, если все его члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.*

Ниже приводятся примеры многочленов стандартного вида:

$$2;\quad a;\quad a-b;\quad a^2+2ab+b^2;\quad \frac{1}{7}-a;\quad 0.$$

Примерами многочленов нестандартного вида могут служить следующие многочлены:

$$a\cdot a-5a+6;\quad a^3-2ab+b^2-3ab-11;\quad 3-5+a^2.$$

У первого из них не все члены записаны в стандартном виде, у второго есть подобные члены – второй и четвертый, а у третьего подобны первый и второй члены.

Многочлен стандартного вида, состоящий из двух членов, называют *двучленом*; многочлен стандартного вида, состоящий из трех членов, называют *трехчленом* и т.д.

Приведем примеры:

двучленов: $\frac{1}{3}a^2-2b$; $ab-cd$;

трехчленов: $3a-2b-7$; $x+yz-2z^2$;

четырехчленов: $a+b-c-d$; $-abc-acd-bcd-abd$.

Напомним, что одночлен также называется многочленом, состоящим из одного члена.

Любой многочлен можно привести к стандартному виду.

Для этого необходимо: 1) каждый его член привести к стандартному виду; 2) привести подобные члены. Например;

$$a^3+2aba+b^2a+ba^2-2abb-b^2b=$$

$$=a^3+\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}-\underline{\underline{2ab^2}}-b^3=$$

$$=a^3+(2+1)a^2b+(1-2)ab^2-b^3=a^3+3a^2b-ab^2-b^3.$$

В этом примере в первом равенстве все члены данного многочлена мы привели к стандартному виду, у полученного многочлена подчеркнули одной и двумя чертами две пары подобных членов и после приведения подобных членов (второе равенство) получили многочлен стандартного вида.

З а м е ч а н и е. Если многочлен после приведения его к стандартному виду обращается в 0, то он является нулевым многочленом. Например, рассмотрим многочлены $a - a$ и $3x^2 - x^2 - 2x^2$. Они записаны в нестандартном виде. После приведения к стандартному виду они обращаются в 0:

$$a - a = 0;$$

$$3x^2 - x^2 - 2x^2 = 0.$$

Следовательно, это нулевые многочлены.

Степенью ненулевого многочлена называют наибольшую из степеней одночленов, входящих в этот многочлен, когда он приведен к стандартному виду.

Например, многочлен

$$\frac{1}{3} a^2 - 2b + 7$$

имеет степень 2, так как он записан в стандартном виде и входящие в него одночлены имеют степени 2, 1 и 0.

Многочлен $-x^3yz - x + y^2$ имеет степень 5, так как он записан в стандартном виде и входящие в него одночлены имеют степени 5, 1 и 2. Очевидно, что $ab + c$ – многочлен второй степени и abc – многочлен третьей степени.

Многочлен

$$2x - 5$$

имеет степень 1. Говорят еще, что это многочлен первой степени относительно x.

Аналогично многочлен

$$2a - 3b + 7$$

есть многочлен первой степени относительно a и b.

Любое действительное, отличное от нуля число есть многочлен нулевой степени. Нуль – единственный многочлен, степень которого не определена.

В о п р о с ы

1. Что называется многочленом, имеющим стандартный вид? Приведите примеры.
2. Любой ли многочлен можно привести к стандартному виду?
3. Что называется двучленом (трехчленом)? Приведите примеры.
4. Что нужно сделать для того, чтобы привести многочлен к стандартному виду?
5. Что называется степенью ненулевого многочлена?
6. Определена ли степень нулевого многочлена?

У п р а ж н е н и я

1. Выяснить, какие из следующих многочленов имеют стандартный вид:
а) $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 1$; б) $\beta\alpha - \alpha^2\beta - \alpha^3\beta$;
в) $a^3b + ab^3 - a^2b^2 + 2bab^2$.
2. Привести к стандартному виду и определить степени следующих многочленов:
а) $7a^3 - 8aba^2 + 3a^2 - 4b$; б) $x^5 - 7y^2 + 3xyx^4 + 2x - 1$;
в) $\alpha\gamma + 2\alpha\beta\gamma - 7\alpha^2 + 3\gamma\alpha - 3\gamma\alpha\beta$.

4. Сумма и разность многочленов. *Сумма многочленов* равна многочлену, членами которого являются все члены слагаемых многочленов. Например, сумма многочленов

$$a^2 + ab \text{ и } b^2 + ac$$

равна многочлену

$$a^2 + ab + b^2 + ac,$$

что можно записать в виде алгебраического равенства

$$(a^2 + ab) + (b^2 + ac) = a^2 + ab + b^2 + ac.$$

Разность двух многочленов равна многочлену, членами которого являются все члены уменьшаемого и взятые с противоположными знаками все члены вычитаемого. Например, разность многочленов

$$a^2 + ab \text{ и } b^2 + ac$$

равна многочлену

$$a^2 + ab - b^2 - ac.$$

Иначе говоря, можно записать алгебраическое равенство

$$(a^2 + ab) - (b^2 + ac) = a^2 + ab - b^2 - ac.$$

Про алгебраические равенства

$$(a^2 + ab) + (b^2 + ac) = a^2 + ab + b^2 + ac;$$

$$(a^2 + ab) - (b^2 + ac) = a^2 + ab - b^2 - ac$$

говорят, что *при переходе от их левых частей к правым мы раскрываем скобки.*

Надо руководствоваться следующим правилом раскрытия скобок: *чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак плюс, надо записать без скобок все члены, находящиеся внутри них, без изменений; чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак минус, надо записать без скобок с противоположными знаками все члены, находящиеся внутри них. Если перед скобками нет никакого знака, то подразумевается, что стоит знак плюс*; например,

$$(a - b) + (d - c) - (x - y) - (z - t) =$$
$$= a - b + d - c - x + y - z + t.$$

Про написанные выше равенства говорят еще, что при переходе от правых их частей к левым мы производим заключение в скобки.

Надо пользоваться следующим правилом заключения в скобки: *чтобы заключить многочлен в скобки со знаком плюс перед ними, надо записать в скобках все его члены; чтобы заключить многочлен в скобки со знаком минус перед ними, надо записать в скобках все его члены с противополож-*

ными знаками; например,

$$a - b - c + d = (a - b) + (-c + d);$$

$$a - b - c + d = (a - b) - (c - d).$$

Отметим, что алгебраические равенства, получающиеся при раскрытии скобок и заключении в скобки, при замене в них букв числами обращаются в верные числовые равенства на основании сочетательного закона сложения чисел и правила умножения чисел на -1.

Вопросы

1. Чему равна сумма многочленов?
2. Чему равна разность двух многочленов;
3. В чем заключается правило раскрытия скобок?
4. Как надо заключать многочлен в скобки?
5. Во что превращается алгебраическое равенство, получающееся при раскрытии скобок или при заключении в скобки, если в нем заменить буквы числами? Приведите примеры.

Упражнения

1. Преобразовать следующие суммы и разности многочленов в многочлен стандартного вида:
а) $(x^2 + 4x) + (x^2 - x + 1) - (x^2 - x)$; б) $(a^5 + 5a^2 + 3a - a) - (a^3 - 3a^2 + a)$;
в) $(x^2 - 3x + 2) - (-2x - 3)$; г) $(abc + 1) + (-1 - abc)$.

2. Заключить первые два члена многочленов в скобки со знаком минус перед ними, а последние два – в скобки со знаком плюс перед ними:
а) $x^2 - y^2 + 2x - 1$; б) $9y^2 - 1 - x^2 - 6y$;
в) $-a^3 - 3a^2 + 4 - a$.

5. Произведение одночлена на многочлен. *Произведение одночлена на многочлен равно многочлену, членами которого являются произведения этого одночлена на все члены данного многочлена.*

Например, произведение одночлена a на многочлен $a - b$ равно многочлену $aa - ab$. Это записывается в виде алгебраического равенства

$$a(a - b) = aa - ab = a^2 - ab. \qquad (1)$$

В последнем равенстве мы привели многочлен к стандартному виду.

Равенство (1), написанное в обратном порядке, имеет вид

$$a^2 - ab = a(a - b). \qquad (2)$$

В данном случае многочлен $a^2 - ab$ преобразован в произведение одночлена a на многочлен $a - b$.

Преобразование многочлена в произведение одночлена на многочлен называется *вынесением за скобки общего множителя многочлена.*

В равенстве (2) мы вынесли за скобки общий множитель (одночлен) a многочлена $a^2 - ab$.

Вот еще пример вынесения за скобки общего множителя:

$$x^4y - x^2y^3 = x^2y(x^2 - y^2).$$

Данный многочлен и многочлен, полученный из него умножением на число -1, называются *противоположными*.

Например,

$$ab - 2b^3 \quad \text{и} \quad -ab + 2b^3$$

есть противоположные многочлены.

Легко видеть, что сумма противоположных многочленов равна нулю; например,

$$(ab - 2b^3) + (-ab + 2b^3) = ab - 2b^3 - ab + 2b^3 =$$
$$= (1 - 1)ab + (-2 + 2)b^3 = 0 \cdot ab + 0 \cdot b^3 = 0.$$

Легко проверить, что *разность двух многочленов есть сумма уменьшаемого и многочлена, противоположного вычитаемому.*

Наконец, отметим, что *если число 1 умножить на многочлен, то в результате получится тот же самый многочлен.* Например,

$$1 \cdot (a^2 + b^3) = 1 \cdot a^2 + 1 \cdot b^3 = a^2 + b^3.$$

Вопросы

1. По какому правилу умножается одночлен на многочлен?
2. Какие многочлены называются противоположными?
3. Каким свойством обладают противоположные многочлены?
4. Можно ли разность двух многочленов заменить суммой многочленов?
5. Каким свойством обладает разность многочленов?
6. Что получится с многочленом, если его умножить на число 1?

Упражнения

1. Умножить одночлен на многочлен:

а) $(-abc)(ab + ac + bc)$; б) $ac(a + 12c)$;

в) $(-2b)(a^2 + ab + 4b^2)$.

2. Вынести за скобки общий множитель многочлена:

а) $a^3 + 4b^2a$; б) $-2a^2b + 4ab^2 - 4b^3$;

в) $-5x^3y^2 - 5x^2y$.

6. Произведение многочленов. *Произведение двух многочленов равно многочлену, членами которого являются произведения каждого члена одного многочлена на каждый член другого многочлена.*

Таким образом, чтобы найти произведение многочленов, надо каждый член одного из них умножить на каждый член другого и полученные одночлены сложить.

Пользуясь этим правилом, найдем произведение многочленов $a + b$ и $a - b$:

$$(a + b)(a - b) = a \cdot a + ba + a(-b) + b(-b) =$$
$$= a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2. \qquad (1)$$

Полученный многочлен приведен к стандартному виду.

Очевидно, что произведение двух многочленов не зависит от того, будем ли мы умножать первый многочлен на второй или второй на первый.

Если надо найти произведение нескольких многочленов, то нужно сначала найти произведение любых двух из них, затем найти произведение полученного многочлена на любой третий многочлен и т.д.; например,

$$(a-b)(2a+b)(3a-2b)=(a\cdot 2a-b\cdot 2a+ab-bb)(3a-2b)=$$
$$=(2a^2-ab-b^2)(3a-2b)=2a^2 3a-ab3a-b^2 3a-$$
$$-2a^2 2b+ab2b+b^2 2b=6a^3-3a^2b-3ab^2-$$
$$-4a^2b+2ab^2+2b^3=6a^3-7a^2b-ab^2+2b^3. \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2), если их записать в обратном порядке, имеют соответственно вид

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b); \qquad (3)$$
$$6a^3-7a^2b-ab^2+2b^3=(a-b)(2a+b)(3a-2b) \qquad (4)$$

и могут служить примерами разложения многочлена на множители.

Разложением многочлена на множители называется преобразование его в произведение двух или нескольких многочленов.

Любой многочлен можно разложить на два множителя, один из которых есть не равное нулю число; например,

$$x^2+y^2=3\cdot\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2\right);$$

$$3a^2-2ab+b^2=5\left(\frac{3}{5}a^2-\frac{2}{5}ab+\frac{1}{5}b^2\right).$$

Это разложение на множители, один из которых имеет степень 0, а другой – ту же степень, что и исходный многочлен. Более интересны разложения на множители, каждый из которых имеет степень, большую 0. Такими являются разложения (3) и (4).

З а м е ч а н и е 1. При перемножении многочленов нестандартного вида нужно сначала привести их к стандартному виду, а потом уже применить правило умножения многочленов; результат будет тот же, но вычисления, как правило, значительно сократятся; например,

$$(a^2-ab+ab-b^2)(2a-b-a)=$$
$$=(a^2-b^2)(a-b)=a^3-a^2b-ab^2+b^3.$$

З а м е ч а н и е 2. Произведение нулевого многочлена на любой многочлен есть нулевой многочлен; например,

$$(a-a)(a^2+ab+b^2)=0\cdot(a^2+ab+b^2)=$$
$$=0\cdot a^2+0\cdot ab+0\cdot b^2=0+0+0=0.$$

Вопросы

1. Чему равно произведение двух многочленов?
2. Зависит ли произведение двух многочленов от порядка множителей?
3. По какому правилу умножаются три (и более) многочлена?
4. Что называется разложением многочлена на множители?
5. Следует ли приводить перемножаемые многочлены к стандартному виду?
6. Чему равно произведение многочленов, один из которых нулевой?

Упражнение

Преобразовать произведение многочленов в многочлен стандартного вида:

а) $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$; б) $(a + b + c)(a + b - c)$;

в) $(a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2)$.

7. Целые выражения. *Целым выражением* называется такое алгебраическое выражение, в котором несколько многочленов соединены знаками сложения, вычитания и умножения; например,

$$(a + b)(c - d) + (a - b) - (c - d);$$

$$-a(b - c)^3 + (d - c) - a^3 - 5;$$

$$-(a - b) - cd.$$

Считается, что многочлен также есть целое выражение.

Целые выражения можно упрощать, пользуясь правилами, которым подчинены многочлены, а также правилами сложения, вычитания и умножения многочленов.

Как следует из этих правил, любое целое выражение можно преобразовать в многочлен стандартного вида. Следовательно, любое целое выражение равно некоторому многочлену.

Рассмотрим пример упрощения целого выражения:

$$15a^3b^2 - (3a^2b + a)(5ab - 2) =$$
$$= 15a^3b^2 - 3a^2b5ab + 3a^2b \cdot 2 - a5ab + a \cdot 2 =$$
$$= 15a^3b^2 - 15a^3b^2 + 6a^2b - 5a^2b + 2a =$$
$$= (15 - 15)a^3b^2 + (6 - 5)a^2b + 2a =$$
$$= 0 + a^2b + 2a = a^2b + 2a.$$

Вопросы

1. Что называется целым выражением? Приведите примеры.
2. Является ли число целым выражением?
3. Является ли одночлен целым выражением?
4. Является ли многочлен целым выражением?
5. Любое ли целое выражение можно преобразовать в многочлен стандартного вида?
6. Какими правилами пользуются при преобразовании целых выражений?
7. Может ли целое выражение равняться нулевому многочлену? Приведите примеры.

Упражнение

Упростить следующие целые выражения:

а) $15x^3y^2 - (5xy - 2)(3x^2y + x)$;

б) $(a + b + c)(a + b - c) - 2ab$;

в) $(\alpha + 2\beta)(\alpha + \gamma) - (\alpha - 2\beta)(\alpha - \gamma)$.

8. Числовое значение целого выражения. Рассмотрим сначала целое выражение, в которое входит одна буква:

$$a^2 + 5a - 13. \qquad (1)$$

Если вместо буквы a (где бы она ни стояла в этом выражении) подставить число 3, то получим числовое выражение

$$3^2 + 5 \cdot 3 - 13,$$

равное 11. Это число 11 называется *числовым значением выражения* (1) *при* $a = 3$.

Легко видеть, что числовое значение этого же выражения при $a = 0$ равно -13, а при $a = -0{,}1$ равно $-13{,}49$ и т.д.

Рассмотрим теперь выражение

$$0{,}2a + 3b - ab + \frac{7}{4}, \qquad (2)$$

в которое входят две буквы.

Если вместо буквы a (где бы она ни стояла в этом выражении) подставить число $-0{,}1$, а вместо буквы b (где бы она ни стояла в этом выражении) подставить число 2,5, то получим числовое выражение

$$0{,}2 \cdot (-0{,}1) + 3 \cdot 2{,}5 - (-0{,}1) \cdot (2{,}5) + \frac{7}{4},$$

равное числу 9,48. Это число называется *числовым значением выражения* (2) *при* $a = 0{,}1$ *и* $b = 2{,}5$. При $a = 0$ и $b = 0$ числовое значение этого выражения равно $\frac{7}{4}$, а при $a = -3$ и $b = 0$ оно равно $\frac{23}{20}$ и т.д.

Аналогично определяются числовые значения целых выражений, содержащих три, четыре и более букв.

Пример 1. Числовое значение выражения

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{15}b + c(a + b)$$

при $a = 3$, $b = -5$, $c = 0{,}3$ равно

$$\frac{1}{6} \cdot 3 - \frac{1}{15} \cdot (-5) + 0{,}3[3 + (-5)] = \frac{7}{30}.$$

П р и м е р 2. Числовое значение выражения

$$x-y+t(z-x)+z(t+y)$$

при $x=-0{,}1$, $y=-3{,}2$, $z=1{,}7$, $t=3{,}5$ равно

$$(-0{,}1)-(-3{,}2)+3{,}5[1{,}7-(-0{,}1)]+1{,}7[3{,}5+(-3{,}2)]=9{,}91.$$

Подчеркнем, что для любого целого выражения при любых выбранных числовых значениях входящих в него букв соответствующее числовое выражение всегда имеет смысл, так как не содержит деления на нуль.

В о п р о с ы

1. Что называется числовым значением целого выражения при данных числовых значениях букв?

2. При каких числовых значениях букв целое выражение имеет соответствующее числовое значение?

У п р а ж н е н и е

Вычислить числовые значения следующих целых выражений:

а) $a^2+5a-13$ при $a=-3$;

б) $0{,}2\alpha^2+3\beta-\frac{1}{5}\alpha+\frac{7}{4}$ при $\alpha=1$, $\beta=-2$;

в) $x-y+(z-x)+z(t+y)$ при $x=0$, $y=-1$, $z=-3$, $t=2$;

г) $2x+3y-z+3$ при $x=1$, $y=-1$, $z=-1$;

д) $\frac{1}{3}a-\frac{1}{15}b+c(a+b)$ при $a=3$, $b=-5$, $c=0{,}3$;

е) $(a-b)(c-d)$ при $a=1$, $b=2$, $c=-3$, $d=4$.

9. Тождественное равенство целых выражений. В § 5 и 6 рассматривались алгебраические равенства. Рассмотрим одно из таких равенств для одночленов:

$$2aaabb=2ababa. \qquad (1)$$

Оно превращается в верное числовое равенство, если в нем заменить буквы числами. Ведь тогда в левой его части будет стоять произведение чисел, в правой – то же произведение, но с переставленными множителями, а произведение чисел не зависит от порядка его сомножителей.

Когда говорят, что в алгебраическом равенстве буквы заменяются числами, то имеется в виду, что одна и та же буква, где бы она ни находилась в равенстве, заменяется одним и тем же числом.

Рассмотрим теперь алгебраическое равенство для многочленов

$$x+y=y+x. \qquad (2)$$

Оно превращается в верное числовое равенство, если в нем заменить буквы числами. Ведь тогда в левой части будет стоять сумма чисел, в правой – та же сумма, но с переставленными слагаемыми, а сумма чисел не зависит от порядка ее слагаемых.

Вообще, если в данном многочлене переставить его члены, то получают алгебраическое равенство между данными и полученными многочленами. Но если подставить в это равенство вместо букв любые числа, то получится верное числовое равенство, потому что сумма чисел не изменится, если в ней переставить местами слагаемые. Аналогичные рассуждения показывают, что алгебраические равенства, получаемые при приведении подобных членов, при умножении одночлена на многочлен, многочлена на многочлен и т.д., превращаются в верные числовые равенства, если в них заменить буквы числами.

Равенство между алгебраическими выражениями называется *тождеством*, если оно превращается в верное числовое равенство при подстановке в него вместо букв любых чисел.

Все алгебраические равенства между целыми выражениями есть тождества.

В частности, равенства (1) и (2) являются тождествами.

Нулевые многочлены равны нулю тождественно, т.е. при любых числовых значениях входящих в них букв их числовое значение есть нуль. Такими многочленами являются, например, многочлены

$$a - a;\quad 3x^2 - x^2 - 2x^2.$$

Остальные (ненулевые) многочлены могут обращаться в нуль только при определенных числовых значениях букв, но не тождественно, т.е. для каждого ненулевого многочлена существуют числовые значения букв, при которых многочлен не обращается в нуль. Вот примеры ненулевых многочленов:

$$a + b;\quad x - y;\quad a^2 + b^2 + 1.$$

Первый многочлен $a + b$ обращается в нуль лишь для числовых значений a и b, удовлетворяющих равенству $a = -b$, но для остальных числовых значений a и b он не обращается в нуль.

Второй многочлен $x - y$ обращается в нуль лишь для числовых значений x и y, удовлетворяющих равенству $x = y$, но он не обращается в нуль для остальных числовых значений x и y.

Третий многочлен $a^2 + b^2 + 1$ не обращается в нуль ни для каких числовых значений a и b.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем понятие тождества будет несколько обобщено.

В о п р о с ы

1. Что называется тождеством?
2. Приведите примеры равных тождественно целых выражений.
3. Приведите примеры многочленов, тождественно равных нулю.
4. Является ли тождеством алгебраическое равенство между целыми выражениями?

Упражнения

1. Выяснить, являются ли тождественно равными выражения:

а) $x+y$ и $y+x$; б) $\gamma(3\beta\alpha)$ и $3\alpha\beta\gamma$.

2. Выяснить, являются ли тождествами следующие равенства:

а) $x+y-2x+3y=4y-x$; б) $2\alpha-\beta\cdot 3+3\beta=2\alpha$.

§ 7. Формулы сокращенного умножения

1. Квадрат суммы. По определению степени

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b).$$

Пользуясь правилом умножения многочлена на многочлен, получаем

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b=$$
$$=a^2+2ab+b^2. \qquad (1)$$

Равенства (1) являются тождествами, потому что если вместо a и b подставить в них любые числа, то на основании распределительного и переместительного законов для чисел получим верные числовые равенства.

Равенство

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (2)$$

называется *формулой квадрата суммы.*

Так как в формуле (2) можно считать, что a и b – произвольные числа, то ее обычно формулируют так:

квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе и плюс квадрат второго числа.

Формула квадрата суммы часто применяется для упрощения вычислений; например,

$$51^2=(50+1)^2=50^2+2\cdot 50+1^2=2601.$$

Формула (2), если ее читать справа налево, показывает, что многочлен $a^2+2ab+b^2$ можно разложить на множители, а именно представить как произведение двух одинаковых множителей $a+b$.

Вопросы

1. Какое равенство называется формулой квадрата суммы? Как оно формулируется?
2. Что показывает формула квадрата суммы, если прочитать ее справа налево?
3. Является ли формула квадрата суммы тождеством? Почему?

Упражнения

1. Записать в виде многочлена следующие выражения:

а) $(a+2b)(a+2b)$; б) $(2x+3y)^2$; в) $(3x+y)^2+(x+3y)^2$.

2. Выяснить, являются ли следующие многочлены квадратами каких-либо двучленов:

а) $a^2 + 4ac + 4c^2$; б) $1 + x^2 + 2x$; в) $a^2c^2 + 2acd + d^2$.

2. Квадрат разности. Очевидны следующие равенства:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a \cdot a - b \cdot a - a \cdot b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

откуда

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \qquad (1)$$

Это равенство называется *формулой квадрата разности.* На основании распределительного и переместительного законов для чисел равенство (1) является тождеством. Оно удобно для запоминания в следующей формулировке:

квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе и плюс квадрат второго числа.

Эта формула также часто применяется для упрощения вычислений; например,

$$49^2 = (50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 + 1 = 2401.$$

Формула (1), если ее читать справа налево, показывает, что многочлен $a^2 - 2ab + b^2$ можно представить как произведение двух одинаковых множителей $a - b$.

Замечание. Формулу (1) можно получить как следствие формулы (2) предыдущего пункта, заменив в ней всюду b на $-b$.

Вопросы

1. Какое равенство называется формулой квадрата разности? Как оно формулируется?
2. Что показывает формула квадрата разности, если ее прочитать справа налево?
3. Является ли формула квадрата разности тождеством? Почему?

Упражнения

1. Записать в виде многочлена следующие выражения:

а) $(x - 2y)^2$; б) $(\alpha\beta - \gamma)^2$; в) $(5xy - 2)^2$.

2. Выяснить, являются ли следующие многочлены квадратами каких-либо двучленов:

а) $a^2 - 4ab + 4b^2$; б) $x^4 - 4x + 4$; в) $a^4 - 2a^2 + 1$.

3. Выделение полного квадрата.

Пример 1. Рассмотрим многочлен второй степени относительно x:

$$x^2 + 6x + 5.$$

Этот многочлен можно преобразовать следующим образом (пояснение дано ниже):

$$x^2 + 6x + 5 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5 = (x + 3)^2 - 4.$$

Мы представили $6x$ в виде удвоенного произведения x на 3, прибавили к многочлену и вычли из него одно и то же число 3^2, далее применили формулу квадрата суммы для двучлена $x + 3$.

Итак, получено равенство

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4,$$

показывающее, что многочлен второй степени $x^2 + 6x + 5$ равен квадрату двучлена $x + 3$ плюс число -4. Говорят, что *из многочлена $x^2 + 6x + 5$ выделен полный квадрат.*

Пример 2. Рассмотрим многочлен второй степени

$$x^2 - 8x.$$

Проведем преобразования:

$$x^2 - 8x = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 = (x - 4)^2 - 16.$$

Мы представили $8x$ в виде удвоенного произведения x на 4, прибавили к многочлену и вычли из него одно и то же число 4^2, наконец, применили формулу квадрата разности для двучлена $x - 4$.

Итак, получено равенство

$$x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16,$$

показывающее, что многочлен второй степени $x^2 - 8x$ равен квадрату двучлена $x - 4$ плюс число -16. Говорят, что из многочлена $x^2 - 8x$ выделен полный квадрат.

Аналогично рассуждая, можно выделить полный квадрат из любого многочлена второй степени относительно x с коэффициентом при x^2, равным 1, т.е. записать этот многочлен в виде квадрата двучлена плюс число. Вот еще примеры выделения полного квадрата из многочлена второй степени.

Пример 3.

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Пример 4.

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 9 = (x - 3)^2.$$

Вопрос

Из любого ли многочлена второй степени с коэффициентом 1 при x^2 можно выделить полный квадрат?

Упражнения

Выделить полный квадрат из следующих многочленов второй степени:

а) $x^2 - 4x + 5$; б) $x^2 + 3x - 1$; в) $x^2 - 5x$.

4. Куб суммы. По свойству натуральной степени

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b).$$

Применяя теперь формулу квадрата суммы и правило умножения многочленов и приводя подобные члены, получаем

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Итак, доказано равенство

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (1)$$

которое называется *формулой куба суммы.* Оно удобно для запоминания в следующей формулировке:

куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго и плюс куб второго числа.

Формула (1), если ее читать справа налево, показывает, что многочлен $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ можно разложить на множители, а именно на произведение трех одинаковых множителей $a + b$.

Упражнения

1. Записать в виде многочлена следующие выражения:

а) $(x+3z)^3$; б) $(a+2)^3$; в) $(2b+3)^3$.

2. Выяснить, являются ли следующие многочлены кубами каких-либо двучленов:

а) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$; б) $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$;

в) $27 + 27b + 9b^2 + b^3$.

5. Куб разности. Рассуждая, как в п. 4, получаем

$$(a-b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) =$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

т.е. получаем равенство

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \qquad (1)$$

Это равенство называется *формулой куба разности.* Оно удобно для запоминания в следующей формулировке:

куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго и минус куб второго числа.

Переписав формулу (1) в виде

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3,$$

получим, что многочлен $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ разложен на множители.

Упражнения

1. Записать в виде многочлена следующие выражения:

а) $(x - 1)^3$; б) $(2a - 3b)^3$; в) $(a^2 - 2b)^3$.

2. Выяснить, являются ли следующие многочлены кубами каких-либо двучленов:

а) $1 - 3x + 3x^2 - x^3$; б) $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$;

в) $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$.

6. Разность квадратов. Рассмотрим произведение

$$(a + b)\ (a - b).$$

Применяя правило умножения многочленов и делая приведение подобных членов, получаем

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ba - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

На основании распределительного и переместительного законов для чисел эти равенства являются тождествами.

Итак, получено равенство

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b), \qquad (1)$$

которое называется *формулой разности квадратов* и является тождеством. Оно удобно для запоминания в следующей формулировке:

разность квадратов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на их разность.

Формула (1) дает разложение многочлена $a^2 - b^2$ на множители.

Вопросы

1. Какое равенство называется формулой разности квадратов? Как оно формулируется?
2. Что показывает формула разности квадратов?
3. Является ли тождеством формула разности квадратов?

Упражнения

1. Записать в виде многочлена следующие произведения:

а) $(x - 2)(x + 2)$; б) $(a^2 + 1)(a^2 - 1)$; в) $(2\alpha - 3\beta)(2\alpha + 3\beta)$.

2. Разложить на множители следующие многочлены:

а) $4a^2 - 1$; б) $a^2 - b^2$; в) $9x^4 - 4$; г) $x^4 - 16$.

7. Сумма кубов. Применяя правило умножения многочленов и приводя подобные члены, получаем

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Итак, доказано равенство

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2). \qquad (1)$$

Это равенство называется *формулой суммы кубов*. Оно является тождеством.

Многочлен $a^2 - ab + b^2$ называют *неполным квадратом разности a и b*.

Формула (1) удобна для запоминания в следующей формулировке: *сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат разности этих чисел.*

Формула (1) дает разложение многочлена $a^3 + b^3$ на множители.

Вопросы

1. Какое равенство называется формулой разности кубов?
2. Чему равна разность кубов двух чисел?
3. Что называется неполным квадратом суммы a и b?
4. Является ли тождеством формула суммы кубов? Почему?

Упражнения

1. Записать в виде многочленов следующие произведения:

а) $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$; б) $(a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1)$;
в) $(4\alpha^2 - 6\alpha + 9)(2\alpha + 3)$.

2. Разложить на множители следующие многочлены:

а) $a^6 + b^3$; б) $27\alpha^3 + 8\beta^3$.

8. Разность кубов. Проведя рассуждения, как в п. 7, получим

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \tag{1}$$

Это равенство называется *формулой разности кубов*. Оно является тождеством.

Многочлен $a^2 + ab + b^2$ называют *неполным квадратом суммы a и b*.

Формула (1) удобна для запоминания в следующей формулировке: *разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат суммы этих чисел.*

Формула (1) дает разложение многочлена $a^3 - b^3$ на множители.

Вопросы

1. Какое равенство называется формулой суммы кубов?
2. Чему равна сумма кубов двух чисел?
3. Что называется неполным квадратом разности a и b?
4. Дает ли формула разности кубов разложение многочлена на множители?
5. Является ли тождеством формула разности кубов? Почему?

Упражнения

1. Записать в виде многочлена следующие произведения:

а) $(2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$; б) $(a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1)$;

в) $(x^2y^2z^2 + xyzt + t^2)(xyz - t)$.

2. Разложить на множители следующие многочлены:

а) $a^3 - 8b^3$; б) $8a^6 - 27$; в) $x^3y^3 - z^6$.

9. Применение формул сокращенного умножения. Формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

называются *формулами сокращенного умножения.*

Они остаются справедливыми, если в них вместо a и b подставить любые целые выражения.

Например, выражение

$$(a+b+c+d)^2$$

можно рассматривать как квадрат суммы двух целых выражений $a+b$ и $c+d$; поэтому справедливы равенства

$$(a+b+c+d)^2 = [(a+b)+(c+d)]^2 =$$
$$= (a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Таким образом, получена формула

$$(a+b+c+d)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Формулы сокращенного умножения часто применяются для упрощения целых выражений, например,

$$(a+1)(a-1)(a^4 + a^2 + 1) + (a^2 - a + 1)(a+1) =$$
$$= (a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1) + (a+1)(a^2 - a + 1) =$$
$$= (a^6 - 1) + (a^3 + 1) = a^6 + a^3.$$

Здесь мы последовательно применили формулы разности квадратов, разности и суммы кубов. Отметим, что формулы сокращенного умножения применяются для разложения многочлена на множители. Об этом речь будет идти в следующем пункте.

Вопросы

1. Назовите известные вам формулы сокращенного умножения.

2. Останутся ли верными формулы сокращенного умножения, если в них вместо букв $a, b, \ldots$ подставить любые целые выражения?

3. Для чего применяются формулы сокращенного умножения?

Упражнения

1. Записать в виде многочлена следующие выражения:

а) $(a+1)(a+2)(a^2+4)(a^2+1)(a-2)(a-1)$;

б) $(a+b+c)(a+b-c)-2ab$;

в) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$.

2. Разложить на множители следующие выражения:

а) $y^2-10y+25-4x^2$; б) $(a+b)^3-a^3-b^3$;

в) $x^{16}-y^{16}$.

10. Разложение многочлена на множители. Напомним, что разложить многочлен на множители – значит преобразовать его в произведение двух или нескольких множителей.

Приведем некоторые способы разложения многочлена на множители.

1. Вынесение за скобки общего множителя многочлена. Нами уже рассматривались примеры разложения многочлена на множители этим способом. Приведем здесь еще один пример.

Пример 1. Разложить на множители многочлен

$$2ab-3ac+a^2. \qquad (1)$$

Легко видеть, что все члены многочлена (1) имеют общий множитель a. Вынося его за скобки, мы получаем разложение многочлена (1) на множители:

$$2ab-3ac+a^2=a(2b-3c+a).$$

2. Применение формул сокращенного умножения. Как уже отмечалось выше, сами формулы сокращенного умножения дают разложение на множители важных в математике многочленов.

Часто, прежде чем применить какую-либо формулу сокращенного умножения, многочлен надо преобразовать.

Пример 2. Разложить на множители многочлен

$$49x^4-16y^6. \qquad (2)$$

Так как $49x^4=(7x^2)^2$, а $16y^6=(4y^3)^2$, то многочлен (2) можно записать в виде разности квадратов выражений $7x^2$ и $4y^3$. Применяя затем формулу разности квадратов, получаем разложение многочлена (2) на множители:

$$49x^4-16y^6=(7x^2)^2-(4y^3)^2=(7x^2+4y^3)(7x^2-4y^3).$$

3. Применение метода выделения полного квадрата. Многочлен иногда можно разложить на множители, если воспользо-

ваться сначала методом выделения полного квадрата (см. п. 3), а затем формулой разности квадратов.

Пример 3.

$$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 8 = (x+1)^2 - 9 =$$
$$= (x+1)^2 - 3^2 = [(x+1)+3]\,[(x+1)-3] = (x+4)(x-2).$$

Пример 4.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 5 + 5^2 - 5^2 + 9 = (x^2 - 5)^2 - 16 =$$
$$= (x^2 - 5)^2 - 4^2 = [(x^2 - 5) + 4]\,[(x^2 - 5) - 4] =$$
$$= (x^2 - 1)(x^2 - 9) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3).$$

4. Группировка членов многочлена. Этот способ применяется чаще всего в сочетании со способом вынесения за скобки общего множителя.

Пример 5. Разложить на множители многочлен

$$2ax + 2ay + 3bx + 3by. \qquad (3)$$

Группируя первый и второй члены, а также третий и четвертый, многочлен (3) перепишем в виде

$$2ax + 2ay + 3bx + 3by = (2ax + 2ay) + (3bx + 3by).$$

Теперь в скобках записаны многочлены, каждый из которых имеет свой общий множитель. Вынося каждый их этих множителей за скобки, получаем

$$(2ax + 2ay) + (3bx + 3by) = 2a(x+y) + 3b(x+y).$$

Теперь выносим за скобки общий множитель $x + y$:

$$2a(x+y) + 3b(x+y) = (x+y)(2a+3b).$$

Итак, многочлен (3) разложен на множители:

$$2ax + 2ay + 3bx + 3by = (x+y)(2a+3b).$$

Способ группировки часто применяется также в сочетании с формулами сокращенного умножения.

Пример 6. Разложить на множители многочлен

$$a^3 + a^2 - b^3 - b^2. \qquad (4)$$

Группируя первый и третий члены, а также второй и четвертый и применяя затем формулы разности кубов и разности квадратов, получаем

$$a^3 + a^2 - b^3 - b^2 = (a^3 - b^3) + (a^2 - b^2) =$$
$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)(a+b).$$

Выносим за скобки общий множитель $a - b$:

$$a^3 + a^2 - b^3 - b^2 = (a - b)(a^2 + ab + b^2 + a + b).$$

Получили разложение многочлена (4) на множители.

Отметим, что если бы мы сгруппировали члены многочлена (4) как-нибудь иначе, нам не удалось бы разложить его на множители. Это говорит о том, что способ группировки – трудный способ, требующий определенных навыков и смекалки.

5. Применение различных способов разложения многочлена на множители. Часто для разложения многочлена на множители надо применить (может быть, неоднократно) несколько из рассмотренных выше способов.

Пример 7. Разложить на множители многочлен

$$a^4 + a^2b + ab^3 + 2ab^2 + b^3. \qquad (5)$$

Объединяя первый и третий члены, а также второй, четвертый и пятый, выносим за скобки их общие множители:

$$a^4 + a^2b + ab^3 + 2ab^2 + b^3 =$$

$$= (a^4 + ab^3) + (a^2b + 2ab^2 + b^3) = a(a^3 + b^3) + b(a^2 + 2ab + b^2).$$

Применяя формулы суммы кубов и квадратов суммы, получаем

$$a(a^3 + b^3) + b(a^2 + 2ab + b^2) =$$

$$= a(a + b)(a^2 - ab + b^2) + b(a + b)^2.$$

Выносим за скобки общий множитель $a + b$:

$$a(a + b)(a^2 - ab + b^2) + b(a + b)^2 =$$

$$= (a + b)[a(a^2 - ab + b^2) + b(a + b)] =$$

$$= (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 + ab + b^2).$$

Итак, многочлен (5) разложен на множители:

$$a^4 + a^2b + ab^3 + 2ab^2 + b^3 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 + ab + b^2).$$

В заключение отметим, что разложение многочлена на множители (мы имеем в виду множители, имеющие степень, большую нуля) – трудная, не всегда выполнимая задача. Существуют многочлены, которые вообще не разлагаются на множители, имеющие степень больше нуля. Таким, например, является многочлен $a^2 + b^2$.

Вопрос

Какие методы можно применять для разложения многочлена на множители?

Упражнение

Разложить следующие многочлены на множители:

а) $ab + cb + ad + cd$; б) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$; в) $a^4 - 16b^4$;

г) $a^2 + 2ab + ac + b^2 + bc$; д) $9y^2 - 6y + 1 - x^2$;

е) $x^4 + 4x^2 - y^2 + 6y - 5$.

§ 8. Алгебраические дроби

Мы уже знаем, что сумма, разность и произведение двух многочленов есть многочлен. Теперь рассмотрим частное двух многочленов.

1. Понятие алгебраической дроби. Иногда удобно обозначать многочлены большими букавами $A, B, C, \ldots$ *Алгебраической дробью* называется алгебраическое выражение

$$\frac{A}{B},$$

являющееся частным от деления многочлена A на ненулевой многочлен B.

Многочлен A называется *числителем* алгебраической дроби $\frac{A}{B}$, а многочлен B – ее ***знаменателем.***

Следующие выражения могут служить примерами алгебраических дробей:

$$1)\ \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 + 1}; \qquad 2)\ \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

В знаменателе второй дроби стоит число 3. Напомним, что любое число можно рассматривать как многочлен.

Если многочлен A есть число a, т.е. $A = a$, а ненулевой многочлен B есть число b, т.е. $B = b$ и $b \neq 0$, то частное $\frac{A}{B}$ если число $\frac{a}{b}$:

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}.$$

Например, если $A = -5$, а $B = 3$, то алгебраическая дробь $\frac{A}{B}$ есть на самом деле число $-\frac{5}{3}$.

Алгебраические дроби подчинены правилам, выраженными следующими алгебраическими равенствами:

$$\frac{A}{1} = A; \tag{1}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \text{ для любого многочлена } C \neq 0; \tag{2}$$

$$-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}. \tag{3}$$

Равенство (1) означает, что если многочлен разделить на 1, то получится тот же многочлен, т.е. всякий многочлен A можно рассматривать как алгебраическую дробь $\frac{A}{1}$.

Например,

$$x - 2y = \frac{x - 2y}{1}.$$

Равенство (2) означает, что если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится равная ей алгебраическая дробь. Это есть *основное свойство алгебраической дроби.* Его можно сформулировать и так:

алгебраическую дробь можно сократить на ненулевой многочлен.

Например,

$$\frac{ax + x^2}{ax - x^2} = \frac{x(a + x)}{x(a - x)} = \frac{a + x}{a - x}; \quad \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} = \frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)(a + b)} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Равенство (3) означает, что если $\frac{A}{B}$ есть алгебраическая дробь, то выражение $-\frac{A}{B}$ также есть алгебраическая дробь, а именно частное от деления многочлена $-A$ на многочлен B или многочлена A на многочлен $-B$.

Например,

$$-\frac{a - b}{c - a} = \frac{b - a}{c - a} = \frac{a - b}{a - c}.$$

Отметим, что равенства (1) – (3) аналогичны соответствующим равенствам для чисел.

З а м е ч а н и е 1. Если буквы, входящие в многочлен A, заменить числами, то A станет числовым выражением, равным некоторому числу a. Мы знаем, что для любого числа a верно числовое равенство $\frac{a}{1} = a$.

Таким образом, алгебраическое равенство (1) превращается в верное числовое равенство при замене в нем букв числами.

З а м е ч а н и е 2. Если буквы, входящие в многочлены A, B и C, заменить числами, то они станут числовыми выражениями, равными соответственно некоторым числам a, b и c. Если при этом окажется, что числа b и c отличны от нуля, то, как мы знаем, будет справедливо числовое равенство

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Таким образом, алгебраическое равенство (2) превращается в верное числовое равенство при замене в нем букв числами (при этом надо исключить те значения букв, при которых многочлены B или C обращаются в нуль).

З а м е ч а н и е 3. Если буквы, входящие в многочлены A и B, заменить числами, то они станут числовыми выражениями, равными соответственно некоторым числам a и b. Если при этом окажется, что число b отлично от нуля, то, как мы знаем, будут справедливы числовые равенства

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Таким образом, алгебраическое равенство (3) превращается в верное числовое равенство при замене в нем букв числами (при этом надо исключить те значения букв, при которых многочлен обращается в нуль).

В о п р о с ы

1. Что называется алгебраической дробью? Приведите примеры.
2. Что называется числителем и знаменателем алгебраической дроби?
3. Каким правилам подчиняются алгебраические дроби?
4. Можно ли многочлен рассматривать как алгебраическую дробь?
5. Сформулируйте основное свойство алгебраической дроби.

У п р а ж н е н и е

Сократить следующие дроби:

а) $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$; б) $\frac{a^3 + b^3}{a + b}$; в) $\frac{(2a + b)(\alpha + \beta)}{2a + b}$.

2. Арифметические действия над алгебраическими дробями. Дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{A_1}{B_1}$ складывают, вычитают, умножают и делят по следующим правилам:

$$\frac{A}{B}+\frac{A_1}{B_1}=\frac{AB_1+BA_1}{BB_1}; \tag{1}$$

$$\frac{A}{B}-\frac{A_1}{B_1}=\frac{AB_1-A_1B}{BB_1}; \tag{2}$$

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{A_1}{B_1}=\frac{AA_1}{BB_1}; \tag{3}$$

$$\frac{A}{B}:\frac{A_1}{B_1}=\frac{AB_1}{BA_1}. \tag{4}$$

Иначе говоря, справедливы алгебраические равенства (1) – (4). Правило (4) применяется, естественно, при условии, что A_1 – ненулевой многочлен (многочлены B и B_1 уже заранее считаются ненулевыми). Отметим, что эти правила аналогичны соответствующим правилам для чисел.

Пример 1. $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{(x+a)+(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\dfrac{2x}{x^2-a^2}.$

Пример 2. $\dfrac{1}{x^2-a^2}-\dfrac{1}{x^2+a^2}=\dfrac{(x^2+a^2)-(x^2-a^2)}{x^4-a^4}=\dfrac{2a^2}{x^4-a^4}.$

Пример 3. $\dfrac{a^3-b^3}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{(a^3-b^3)(a^2-b^2)}{(a+b)^2(a^2+ab+b^2)}=$

$$=\frac{(a-b)(a-b)}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{a+b}.$$

Пример 4. $\dfrac{a+b}{a-b}:\dfrac{(a+b)}{b}=\dfrac{(a+b)b}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{b}{a-b}.$

Замечание. Если буквы, входящие в многочлены A, B, A_1 и B_1, заменить числами, то они станут числовыми выражениями, равными соответственно некоторым числам a, b, c и d. Если при этом окажется, что числа b и d отличны от нуля, то, как мы знаем, будут справедливы числовые равенства:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Если, кроме чисел b и d, отлично от нуля число c, то будет справедливо и числовое равенство

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Таким образом, алгебраические равенства (1) – (4) превращаются в верные числовые равенства при замене в них букв числами. При этом надо исключить те значения букв, при которых обращается в нуль хотя бы один из многочленов B и B_1, а для равенства (4) исключить те значения букв, при которых обращается в нуль хотя бы один из многочленов B, B_1 и A_1.

Вопросы

1. Как складывают алгебраические дроби?
2. Как вычитают алгебраические дроби?
3. Как умножают алгебраические дроби?
4. Как делят алгебраические дроби?
5. Можно ли разделить алгебраическую дробь $\frac{A}{B}$ на алгебраическую дробь $\frac{A_1}{B_1}$, если A_1 – нулевой многочлен?

Упражнения

1. Найти сумму и разность следующих алгебраических дробей:

а) $\frac{a+b}{a-b}$ и $\frac{a-b}{a+b}$; б) $\frac{\alpha - \beta}{2}$ и $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2}$.

2. Найти:

а) произведение дробей $\frac{a^2 - b^2}{a}$ и $\frac{b}{a+b}$;

б) частное дробей $\frac{a+b}{a^3 - b^3}$ и $\frac{a^3 + b^3}{a - b}$.

3. Свойства алгебраических дробей. Докажем свойства, вытекающие из правил, рассмотренных в пп. 1 и 2.

1. Если B – ненулевой многочлен, то

$$\frac{0}{B} = 0.$$

Действительно, в числителе 0 можно заменить на $0 \cdot B$, а в знаменателе B заменить на $1 \cdot B$, потому что $0 \cdot B = 0$ и $1 \cdot B = B$. Далее, пользуясь тем, что B есть ненулевой многочлен, можно на основании основного свойства алгебраической дроби полученную дробь сократить на B. В результате получаем $\frac{0}{1}$, что равно числу 0 (нулевому многочлену):

$$\frac{0}{B} = \frac{0 \cdot B}{1 \cdot B} = \frac{0}{1} = 0.$$

Например, так как $x - y$ – ненулевой многочлен, то

$$\frac{0}{x-y} = 0.$$

2. $\frac{1}{AB} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B}$.

Действительно,

$$\frac{1}{AB} = \frac{1 \cdot 1}{A \cdot B} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B}.$$

3. $\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B}$.

Действительно,

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot 1}{1 \cdot B} = \frac{A}{1} \cdot \frac{1}{B} = A \cdot \frac{1}{B}.$$

З а м е ч а н и е. В частности, если B есть, например, число 7, то

$$\frac{A}{7} = \frac{1}{7} \cdot A.$$

Следовательно, дробь $\frac{A}{7}$ можно рассматривать как многочлен $\frac{1}{7} \cdot A$.

Конечно, в этом примере число 7 можно заменить на любое другое не равное нулю число.

Пусть даны две алгебраические дроби: $\frac{A}{B}$ и $\frac{A_1}{B_1}$. Умножая числитель и знаменатель первой дроби на B_1, а числитель и знаменатель второй дроби на B, на основании основного свойства алгебраических дробей получаем

$$\frac{A}{B}=\frac{AB_1}{BB_1}\ ;\quad \frac{A_1}{B_1}=\frac{A_1B}{BB_1}\ .$$

У дробей $\frac{AB_1}{BB_1}$ и $\frac{A_1B}{BB_1}$ одинаковые знаменатели. В таких случаях говорят, что *дроби* $\frac{A}{B}$ *и* $\frac{A_1}{B_1}$ *приведены к общему знаменателю.* Для приведения двух алгебраических дробей к общему знаменателю достаточно умножить числитель и знаменатель каждой из них на знаменатель другой.

Пример. Приведем дроби $\frac{a}{a-b}$ и $\frac{b}{a+b}$ к общему знаменателю.

Умножая числитель и знаменатель каждой дроби на знаменатель другой дроби, получаем

$$\frac{a}{a-b}=\frac{a\,(a+b)}{a^2-b^2}\ ;\quad \frac{b}{a+b}=\frac{b\,(a-b)}{a^2-b^2}\ .$$

У дробей, записанных в правых частях этих равенств, одинаковые знаменатели. Следовательно, данные дроби приведены к общему знаменателю.

Вопросы

1. Какими свойствами обладают алгебраические дроби?
2. Как привести две дроби к общему знаменателю?

Упражнение

Привести следующие алгебраические дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a-b}$; б) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ и $\frac{\alpha^3}{\alpha^2-\beta^2}$.

4. Способы упрощения действий над алгебраическими дробями. Рассмотрим случай приведения к общему знаменателю алгебраических дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{A_1}{B_1}$ со знаменателями, имеющими общий множитель:

$$B = PQ;\ B_1 = PQ_1,$$

где P, Q и Q_1 – ненулевые многочлены.

Поступим следующим образом:

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{PQ} = \frac{AQ_1}{PQ_1Q}; \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_1}{PQ_1} = \frac{A_1Q}{PQ_1Q}.$$

Таким образом, общий знаменатель данных дробей есть PQQ_1.

П р и м е р 1. Привести дроби $\dfrac{x}{x^2 - y^2}$ и $\dfrac{y}{(x+y)^2}$ к общему знаменателю.

Так как

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \quad \text{и} \quad (x+y)^2 = (x+y)(x+y),$$

то

$$\frac{x}{x^2 - y^2} = \frac{x}{(x-y)(x+y)} = \frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)(x+y)} = \frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)^2};$$

$$\frac{y}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)(x+y)} = \frac{y(x-y)}{(x+y)(x+y)(x-y)} = \frac{y(x-y)}{(x-y)(x+y)^2}.$$

Мы привели дроби к общему знаменателю.

Отметим, что правило (1) п. 2 сложения алгебраических дробей при $B = B_1$ можно заменить более простым:

$$\frac{A}{B} + \frac{A_1}{B_1} = \frac{A + A_1}{B}, \tag{1'}$$

потому что

$$\frac{A}{B} + \frac{A_1}{B} = \frac{AB + A_1B}{B^2} = \frac{(A + A_1)B}{B^2} = \frac{A + A_1}{B}.$$

П р и м е р 2. Сложить алгебраические дроби $\dfrac{1}{x+1}$ и $\dfrac{x}{x+1}$.

Согласно правилу (1'),

$$\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{1+x}{x+1} = 1.$$

Может случиться, что у алгебраических дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{A_1}{B_1}$ многочлены B и B_1 имеют общий множитель:

$$B = PQ; \quad B_1 = PQ_1,$$

где P, Q и Q_1 – ненулевые многочлены. Тогда вычисления будут менее громоздкими, если мы будем рассуждать следующим образом.

Приведем обе дроби к общему знаменателю PQQ_1 и воспользуемся правилом (1′):

$$\frac{A}{B} + \frac{A_1}{B_1} = \frac{A}{PQ} + \frac{A_1}{PQ_1} = \frac{AQ_1}{PQQ_1} + \frac{A_1Q}{PQ_1Q} = \frac{AQ_1 + A_1Q}{PQQ_1}.$$

Подобные замечания можно привести также и в отношении правила (2) п. 2.

Это хорошо знакомая нам схема, следуя которой упрощают сложение рациональных чисел. Ранее буквы A, A_1, B, B_1, P, Q, Q_1 означали целые числа, а в нашем случае это многочлены. Но аналогия полная.

Пример 3.

$$\frac{1}{(x+a)^2(x-a)} + \frac{1}{(x^2-a^2)(x-a)} =$$

$$= \frac{1}{(x+a)(x^2-a^2)} + \frac{1}{(x-a)(x^2-a^2)} =$$

$$= \frac{x-a}{(x^2-a^2)(x+a)(x-a)} + \frac{x+a}{(x-a)(x^2-a^2)(x+a)} =$$

$$= \frac{(x-a)+(x+a)}{(x^2-a^2)(x^2-a^2)} = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2}.$$

Вопрос

По каким правилам складываются и вычитаются дроби, имеющие одинаковые знаменатели?

5. Рациональные выражения. *Рациональным выражением* называют такое выражение, в котором несколько алгебраических дробей соединены знаками арифметических действий. Причем это выражение не содержит деления на нулевой многочлен.

Ясно, что алгебраическая дробь есть рациональное выражение. Вот другие примеры рациональных выражений:

$$\frac{z+a}{(c-d)^2}+1; \qquad \frac{a}{5}-5\,\frac{a\,(b-1)^3+\frac{1}{a}}{d+5\frac{a}{c}}.$$

Рациональные выражения можно упрощать, пользуясь правилами, которым подчинены алгебраические дроби.

П р и м е р 1. Упростим рациональное выражение:

$$\frac{1+\frac{1}{a}}{\frac{6}{b}+\frac{3}{a}+\frac{3}{ab}}-\frac{\frac{ab}{3}}{2a+b+1}=$$ (по правилу сложения алгебраических дробей)

$$=\frac{\frac{a+1}{a}}{\frac{6a+3b+3}{ab}}-\frac{\frac{ab}{3}}{2a+b+1}=$$ (по правилу деления алгебраических дробей)

$$=\frac{(a+1)\,ab}{a\,(6a+3b+3)}-\frac{ab}{3\,(2a+b+1)}=$$ (после сокращения на ненулевой многочлен)

$$=\frac{(a+1)\,b}{6a+3b+3}-\frac{ab}{6a+3b+3}=$$ (по правилу вычитания алгебраических дробей)

$$=\frac{ab+b-ab}{6a+3b+3}=$$ (после приведения подобных членов)

$$=\frac{b}{6a+3b+3}=$$ (выносим в знаменателе общий множитель 3 за скобки)

$$=\frac{b}{3(2a+b+1)}$$

Пример 2.

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)[(x-y)^2+xy]+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)[(x+y)^2-xy]=$$

$$=\frac{x+y}{xy}(x^2-xy+y^2)+\frac{y-x}{xy}(x^2+xy+y^2)=$$

$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy}-\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy}=$$

$$=\frac{x^3+y^3}{xy}-\frac{x^3-y^3}{xy}=\frac{x^3+y^3-x^3+y^3}{xy}=\frac{2y^3}{xy}=2\cdot\frac{y^2}{x}.$$

Пример 3.

$$\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x^2-xy}-\frac{(a+y)^2}{yx-y^2}=\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x(x-y)}-\frac{(a+y)^2}{y(x-y)}=$$

$$=\frac{a^2(x-y)+(a+x)^2y-(a+y)^2x}{xy(x-y)}=$$

$$=\frac{a^2x-a^2y+a^2y+2axy+x^2y-a^2x-2ayx-y^2x}{xy(x-y)}=$$

$$=\frac{x^2y-y^2x}{xy(x-y)}=\frac{xy(x-y)}{xy(x-y)}=1.$$

Замечание. Мы исключаем из рассмотрения как не имеющие смысла такие выражения, которые содержат деление на нулевой многочлен.

Например, выражения

$$\frac{a+b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}};\quad \frac{\frac{1}{a}}{c^3-c^3};\quad \frac{1+\frac{x^2+y^2}{4y^2-(y+y)^2}}{x^2-1}.$$

не имеют смысла, так как они содержат деление на нулевой многочлен.

Еще раз подчеркнем, что такие выражения не рассматривались нами ранее и не будут рассматриваться в дальнейшем.

Вопросы

1. Что называется рациональным выражением?
2. По каким правилам можно упрощать рациональные выражения?
3. Что называется выражением, не имеющим смысла?

Упражнения

1. Упростить следующие рациональные выражения:

а) $\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}\right)\left(\frac{a}{a^2+ab+b^2}\right)-(a-b)$; б) $\frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}:\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}$.

2. Какие из следующих выражений не имеют смысла:

а) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$; б) $\frac{7-\frac{x-a}{a^2-2a^2+a^2}}{x^2+a^2}$;

в) $\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{(x-5)^2-x^2-25+10x}$; г) $\frac{1}{a-\frac{1}{a}-\frac{a^2-1}{a}}$?

6. Числовое значение рационального выражения. Рассмотрим для примера рациональное выражение

$$\frac{a^2+1}{a-1}+2a. \qquad (1)$$

Если подставить в него вместо буквы a число 3, то получим числовое выражение $\frac{3^2+1}{3-1}+2\cdot 3=11$. Число 11 называется *числовым значением* или просто *значением выражения* (1) *при* $a=3$.

При $a=-1$ значение выражения (1) равно

$$\frac{(-1)^2+1}{(-1)-1}+2\cdot(-1)=-3.$$

Подобным образом можно вычислить значение выражения (1) при любых значениях a, за исключением $a=1$. Ведь при $a=1$ выражение (1) не имеет смысла, так как содержит деление на нуль:

$$\frac{1^2+1}{1-1}+2\cdot 1.$$

Говорят, что выражение (1) определено для всех числовых значений a, кроме $a=1$.

В качестве второго примера рассмотрим рациональное выражение

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y}. \qquad (2)$$

Зададим два числа. Первое из них подставим в выражение (2) вместо x, а второе – вместо y. Если при этом числовое значение знаменателя окажется не равным нулю, то получится числовое выражение, равное некоторому числу. Это число называется *числовым значением* или просто *значением дроби* (2) *при заданных числовых значениях* x *и* y. Мы видим, что дробь (2) имеет числовые значения для любых значений x и y, если только они отличны друг от друга.

Говорят, что дробь (2) определена для всех числовых значений x и y, отличных друг от друга.

Обратим внимание на то, что знаменатель дроби (2) есть ненулевой многочлен. Однако его значение при равных между собой значениях x и y обращается в нуль. Но имеется много пар числовых значений x и y, для которых знаменатель не обращается в нуль. Для каждой такой пары наша дробь имеет числовое значение, т.е. определена.

Подобным образом определяются числовые значения любых рациональных выражений.

Например, выражение

$$\frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2} - xyz$$

определено для всех числовых значений x, y и z, кроме $x = y = z = 0$.

Выражение

$$\frac{1 + \dfrac{d + a}{(c - d)^2}}{a^2 + b^2 + 1}$$

определено для всех числовых значений a, b, c, d, кроме тех, для которых $c = d$.

Алгебраическая дробь $\dfrac{A}{B}$ определена для всех числовых значений входящих в нее букв, исключая те, для которых знаменатель B обращается в нуль.

Например, дробь

$$\frac{x - y - z - t}{2x - 3y}$$

определена для всех числовых значений x, y, z и t, за исключением таких, для которых $2x - 3y = 0$.

В о п р о с ы

1. При каких числовых значениях букв не определено данное рациональное выражение?

2. Что называется числовым значением рационального выражения?

У п р а ж н е н и я

1. Найти, для каких числовых значений букв определено каждое из следующих выражений:

а) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a}$; б) $\dfrac{(xy-5)}{(x+y)}\cdot\dfrac{(x-y)}{xy}$; в) $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}}{\alpha-\beta}$.

2. Вычислить числовые значения следующих выражений:

а) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}+a+\dfrac{b}{a}$ при $a=3,\ b=4$;

б) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}-\alpha^2$ при $\alpha=-3,\ \beta=4$;

в) $\dfrac{xy-5}{x+y}\cdot\dfrac{x+y}{x-y}$ при $x=0,\ y=-3$.

7. Тождественное равенство рациональных выражений. В пп. 1–5 рассмотрены алгебраические равенства рациональных выражений. Вот одно из таких алгебраических равенств:

$$\frac{a^2+a+1}{a-3}=\frac{(a^2+a+1)(a-1)}{(a-3)(a-1)}. \tag{1}$$

Левая его часть определена для числовых значений a, отличных от 3. Правая же его часть определена для числовых значений a, отличных от 3 и 1. Но тогда равенство (1) определено для всех числовых значений a, отличных от 3 и 1. Более того, для каждого из этих значений a числовые значения левой и правой частей в алгебраическом равенстве (1) равны между собой. Действительно, если заменить в равенстве (1) букву a любым числом, отличным от 3 и 1, то получим верное числовое равенство: ведь тогда его левая часть есть числовая дробь, а правая – числовая дробь, полученная из нее умножением ее числителя и знаменателя на одно и то же не равное нулю число. Но такие числовые дроби равны.

Вот еще пример:

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{x-3+x-2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}. \tag{2}$$

Алгебраическое равенство (2) превращается в верное числовое равенство для всех числовых значений x, для которых определены левая и правая его части (т.е. для x, отличных от 2 и 3), потому что тогда оно выражает правило сложения числовых дробей.

Равенство двух рациональных выражений называется *тождеством* или *тождественным равенством*, если оно превращается в верное числовое равенство для всех числовых значений букв, для которых оба эти выражения определены.

Мы видели, что алгебраические равенства (1) и (2) суть тождества. Подобными рассуждениями можно установить это свойство для любого алгебраического равенства.

Итак, *любое алгебраическое равенство есть тождество, т.е. оно превращается в верное числовое равенство для всех числовых значений букв, для которых оно определено.*

З а м е ч а н и е 1. Определение тождества, приведенное в этом пункте, не противоречит ранее данному определению тождественного равенства целых выражений, поскольку целые выражения определены для всех числовых значений букв.

З а м е ч а н и е 2. На практике говорят, например, что алгебраическое равенство (2) есть тождество для всех x, отличных от 2 и 3.

В о п р о с ы

1. Какое равенство двух рациональных выражений называется тождеством?
2. Почему алгебраическое равенство называется тождеством?
3. Приведите пример алгебраического равенства для многочленов относительно одной буквы x. Для каких значений x это равенство есть тождество?
4. Приведите пример алгебраического равенства относительно x, левая часть которого определена для всех x, отличны от 0 и 1, а правая – для всех x, отличных от 0.

У п р а ж н е н и е

Выписать множества, на которых являются тождествами следующие алгебраические равенства:

а) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2} = \dfrac{1}{a-b}$; б) $\dfrac{a}{a-b} - \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

§ 9. Линейные уравнения с одним неизвестным

1. Уравнения первой степени с одним неизвестным. Следующие уравнения

$$5x-3=0;\quad x+5=0;\quad -2x-7=0;\quad 3x=0$$

могут служить примерами уравнений первой степени с одним неизвестным.

Выражение, записанное в уравнении слева от знака равенства, называется *левой частью* уравнения, а выражение, записанное справа, – *правой частью*.

Теперь можно сказать, что *уравнением первой степени с одним неизвестным x* называется уравнение, левая часть которого есть многочлен стандартного вида первой степени относительно x, а правая – нуль.

Общий вид уравнения первой степени с одним неизвестным x таков:

$$kx+b=0\qquad (k\neq 0),$$

где k и b – заданные числа, при этом k не равно нулю. Число k называется *коэффициентом при неизвестном* в этом уравнении, а число b – *свободным членом* этого уравнения. Так, в уравнении

$$5x - 3 = 0$$

5 – коэффициент при неизвестном, а -3 – свободный член; в уравнении

$$3x = 0$$

3 – коэффициент при неизвестном, а 0 – свободный член.

Корнем (или *решением*) уравнения называется такое число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство.

Решить уравнение – значит найти все его корни.

Чтобы решить общее уравнение первой степени

$$kx + b = 0 \quad (k \neq 0), \tag{1}$$

будем рассуждать так.

Предположим, что число x_0 есть корень уравнения (1).

Подставляя его в это уравнение, получаем верное числовое равенство

$$kx_0 + b = 0. \tag{2}$$

Перенося число b с противоположным знаком в правую часть равенства (2), получаем верное числовое равенство

$$kx_0 = -b. \tag{3}$$

Разделив обе части равенства (3) на k, получим

$$x_0 = -\frac{b}{k}.$$

Следовательно, равенство (2) справедливо для

$$x_0 = -\frac{b}{k}.$$

Мы показали, что если x_0 есть корень уравнения (1), то он обязательно равен числу $-\frac{b}{k}$.

Теперь надо проверить, что число $-\frac{b}{k}$ действительно есть корень уравнения (1):

$$k\left(-\frac{b}{k}\right) + b = 0.$$

Мы видим, что это действительно так.

Следовательно, мы доказали, что уравнение (1) имеет единственный корень

$$x_0 = -\frac{b}{k}.$$

Итак, для того чтобы решить уравнение (1), надо:

1) перенести свободный член этого уравнения в правую часть (естественно, изменив при этом знак у числа b на противоположный);

2) затем разделить обе части полученного уравнения на коэффициент при неизвестном.

Тогда число, полученное в правой части последнего уравнения, и есть единственный корень уравнения (1).

Вопросы

1. Что называется корнем уравнения с одним неизвестным?
2. Что значит "решить уравнение"?
3. Какое уравнение называется уравнением первой степени с одним неизвестным? Приведите примеры.
4. Сколько корней имеет уравнение первой степени с одним неизвестным?
5. Что называется свободным членом уравнения первой степени с одним неизвестным?
6. Что называется коэффициентом при неизвестном в уравнении первой степени с одним неизвестным?
7. Каков общий вид уравнения первой степени с неизвестным x?

Упражнения

1. Написать три уравнения первой степени с одним неизвестным.
2. Решить уравнения:

а) $3x - 7 = 0$; б) $5x = 0$; в) $-8x - 10 = 0$; г) $4x + 15 = 0$,

рассуждая по схеме, приведенной выше.

2. Линейные уравнения с одним неизвестным. Следующие уравнения:

$7x + 9 = 0$; $3x - 5 + 2x - 1 = 2$;

$4x - 3 = 3x - 4$; $0 = 2x - 7 - x - 1$;

$6x - 3 + 2x = 3x - 4 - x + 1$

могут служить примерами линейных уравнений с одним неизвестным x. Вообще *линейным уравнением с одним неизвестным* называется уравнение, левая и правая части которого есть многочлены первой степени относительно x или числа. Члены многочленов, находящихся в левой и правой частях уравнения, называются *членами уравнений*.

Уравнение $kx + b = 0$, где k и b – любые данные числа, есть линейное уравнение как при $k \neq 0$, так и при $k = 0$.

При $k \neq 0$ оно, как отмечалось выше, называется также уравнением первой степени.

Таким образом, уравнение первой степени с одним неизвестным x есть частный случай линейного уравнения с одним неизвестным x.

Рассмотрим линейное уравнение

$$kx + b = 0, \tag{1}$$

где k и b — данные числа.

Как показано в предыдущем пункте, уравнение (1) при $k \neq 0$ имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{k}$. Уравнение (1) при $k = 0$ записывается так:

$$0 \cdot x + b = 0.$$

Теперь очевидно, что если $b \neq 0$, то уравнение (1) не имеет корней, а если $b = 0$, то любое действительное число является корнем уравнения (1).

Итак, линейное уравнение (1):

1) при $k \neq 0$ имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{k}$;

2) при $k = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней;

3) при $k = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней — любое действительное число является его корнем.

Два уравнения называются *равносильными*, если любой корень первого уравнения является корнем второго, а любой корень второго является корнем первого.

Отметим три утверждения:

1. *Если обе части уравнения умножить или разделить на отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное исходному.*

Например, умножив левую и правую части уравнения

$$x - 1 = 2x - \frac{1}{7} \tag{2}$$

на 7, получим уравнение

$$7x - 7 = 14x - 1, \tag{3}$$

равносильное исходному. Потому что, если число x_0 есть корень уравнения (2), то выполняется числовое равенство

$$x_0 - 1 = 2x_0 - \frac{1}{7}. \tag{4}$$

Умножив его на 7, получим, что выполняется числовое равенство

$$7x_0 - 7 = 14x_0 - 1, \tag{5}$$

показывающее, что x_0 есть корень уравнения (3).

Если же x_0 есть корень уравнения (2), то справедливо числовое равенство (5). Разделив равенство (5) на 7, получим, что справедливо числовое равенство (4), показывающее, что x_0 есть корень уравнения (5).

Вместо того чтобы говорить "умножим левую и правую части уравнения на число k", говорят "умножим уравнение на число k".

2. *Если перенести член уравнения с противоположным знаком из одной части уравнения в другую, то получим уравнение, равносильное исходному.*

Например, уравнения

$$3x - 2 = 5x + 3 \tag{6}$$

и

$$3x = 5x + 3 + 2 \tag{7}$$

равносильны.

Чтобы получить уравнение (7), мы перенесли с противоположным знаком член -2 уравнения (6) из левой его части в правую.

Говорят "перенесем член данного уравнения из одной его части в другую", подразумевая, что переносимый член надо взять с противоположным знаком.

3. *Если в левой или правой части уравнения привести подобные члены, то получится уравнение, равносильное исходному.*

Например, уравнения

$$x + x + 2 - 1 = 0$$

и

$$2x + 1 = 0$$

равносильны.

Справедливость утверждений 2 и 3 показывается так же, как справедливость утверждения 1.

Вопросы

1. Какое уравнение называется линейным уравнением с одним неизвестным? Приведите примеры линейных уравнений.

2. Является ли уравнение первой степени линейным уравнением?

3. Что называется членами линейного уравнения?

4. Какие уравнения называются равносильными? Приведите примеры равносильных уравнений.

5. Какие утверждения о равносильности линейных уравнений вам известны?

6. Для каких значений k и b линейное уравнение $kx + b = 0$ а) имеет единственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесконечно много решений?

Упражнения

1. Привести пять примеров линейных уравнений с одним неизвестным.

2. Равносильны ли уравнения:

а) $2x + 3 = 0$ и $2x = -3$;

б) $3x - 7 = 4x - 3$ и $0 = (4x - 3) - (3x - 7)$;

в) $-3x-7=0$ и $3x+7=0$;
г) $-2x+3=0$ и $2x+3=0$;
д) $3x-7+2x-3=x$ и $4x-10=0$?

3. Решение линейных уравнений с одним неизвестным. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение

$$3x-5+2x-1=0. \quad (1)$$

Приведя подобные члены в левой части этого уравнения, получим уравнение

$$5x-6=0, \quad (2)$$

которое равносильно уравнению (1). Но уравнение (2) имеет единственный корень

$$x_0 = \frac{6}{5}.$$

Следовательно, и уравнение (1) имеет тот же самый единственный корень

$$x_0 = \frac{6}{5}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$2x+8=2x+6. \quad (3)$$

Перенеся члены правой части этого уравнения в левую часть, получим уравнение

$$2x+8-2x-6=0,$$

равносильное уравнению (3).

Приведя подобные члены, получим линейное уравнение

$$0\cdot x+2=0, \quad (4)$$

равносильное уравнению (3).

Уравнение (4) не имеет корней: нет числа x_0, которое удовлетворяло бы этому уравнению. Следовательно, и уравнение (3) не имеет корней.

Пример 3. Решить уравнение

$$2x+1=3x+1-x. \quad (5)$$

Перенеся члены его правой части в левую и приведя подобные члены, получим линейное уравнение

$$0\cdot x+0=0, \quad (6)$$

равносильное уравнению (5).

Уравнение (6) обращается в верное числовое равенство при любом числовом значении x. Следовательно, уравнение (5) имеет бесконечно много корней: любое действительное число есть корень (5). Можно еще сказать, что уравнение (5) на самом деле есть тождество.

Замечание. Мы рассмотрели примеры линейных уравнений с одним неизвестным x. Любое такое уравнение можно решить, перенеся все члены его правой части в левую и приведя затем подобные члены. В результате получится:

1) либо уравнение первой степени, которое приводит к единственному корню;

2) либо линейное уравнение $0 \cdot x + 0 = 0$, показывающее, что исходное уравнение на самом деле есть тождество, т.е. что любое действительное число есть корень исходного уравнения;

3) либо линейное уравнение $0 \cdot x + b = 0$ $(b \neq 0)$, показывающее, что исходное уравнение не имеет корней.

Вопросы

1. Может ли линейное уравнение с одним неизвестным не иметь корней? Приведите примеры.
2. Может ли линейное уравнение с одним неизвестным иметь единственный корень? Приведите примеры.
3. Может ли линейное уравнение с одним неизвестным иметь бесконечно много корней? Приведите примеры.

Упражнение

Решить уравнения:

а) $x + 3 = 2x - 4$; б) $2x - 4 = 7x + 2$;

в) $x + 4 = x + 2$; г) $2x - 6 = 3x$;

д) $3x - 5 = -2x + 7 + 5x - 12$; е) $5x = 6x$;

ж) $x - 1 + 3x - 5 = (x - 5) - (x - 3) + (x + 1)$;

з) $2x + 5 - 7x + 2 = 3$; и) $7 = 5x + 2 - 3x + 1$.

4. Решение задач с помощью линейных уравнений. Рассмотрим решение старинной задачи.

Задача 1. Летела стая гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: "Здравствуйте, сто гусей!". А вожак ему и отвечает: "Нет, нас не сто гусей! Вот если бы нас было еще столько, да еще полстолько, да еще четверть столько, да ты, гусь, то было бы сто гусей. Вот и рассчитай-ка, сколько нас".

Решение. В задаче надо узнать, сколько гусей в стае. Обозначим это количество x. Вожак сказал, что если бы гусей было:

а) еще столько же, т.е. еще x;

б) еще полстолько же, т.е. еще $\frac{1}{2}x$;

в) еще четверть столько же, т.е. еще $\frac{1}{4}x$;

г) да еще один гусь,
т.е. вожак сказал, что если бы гусей было:

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1,$$

то их было бы 100.

Следовательно,

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100.$$

Получилось линейное уравнение с одним неизвестным.

Решив это уравнение, получим, что оно имеет единственный корень $x_0 = 36$, а это означает, что в стае было 36 гусей.

Вот еще одна задача.

Задача 2. Отцу 50 лет, а сыну 20. Сколько лет тому назад отец был в 3 раза старше сына?

Решение. Обозначим искомое количество лет x, тогда x лет назад отцу было $50 - x$ лет, а сыну $20 - x$ лет. Так как в то время отец был в 3 раза старше сына, то

$$50 - x = 3 \cdot (20 - x).$$

Получилось линейное уравнение с одним неизвестным. Решив его, найдем его единственный корень $x_0 = 5$.

Следовательно, пять лет назад отец был старше сына в 3 раза.

Упражнения

1. Надо разменять 1 рубль на монеты по 2 и 5 копеек, чтобы всех монет было 26. Сколько должно быть монет по 2 копейки?

2. На путь по течению реки пароход затратил 3 ч, а на обратный путь 5 ч. Скорость течения реки 5 км/ч. Какова скорость парохода в стоячей воде?

Исторические сведения

Алгебра – часть математики, посвященная изучению буквенных выражений и уравнений. Долгое время алгебра была частью науки о числе – арифметики. Среди различных задач, которые ставит жизнь, много таких, которые решаются одинаковыми способами, приемами. Используя вместо чисел буквы, математики научились решать такие задачи в общем виде. На этом пути и образовалась математическая наука – алгебра.

Исторически зачатки алгебры были известны вавилонянам, египтянам и грекам задолго до нашей эры. Сохранился египетский папирус Ахмеса (XVII в. до н.э.) с решением алгебраических задач. Диофант, греческий математик, живший в III в. до н.э. в г. Александрии написал трактат "Арифметики", в котором он свободно обращается с линейными и другими уравнениями.

В средние века особенно активно алгебра развивалась в арабских странах и в Средней Азии. Само слово "алгебра" арабское (аль-джебр) – впервые оно появилось в заглавии одного сочинения Мухаммеда аль-Хорезми, узбекского математика и астронома.

Вот как определял алгебру таджикский ученый и поэт Омар Хойям (ок. 1048 – ок. 1123(?)):

"Алгебра есть научное искусство. Ее предмет – это абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-либо известной вещи так, что их можно определить; эта известная вещь есть количество или индивидуальное определенное отношение, и к этой известной вещи приходят, анализируя условия задачи; в этом искусстве ищут соотношения, связывающие данные в задачах величины с неизвестной, которая вышеуказанным образом составляет предмет алгебры . . . Алгебраические решения, как это хорошо известно, производятся лишь с помощью уравнений . . .".

На протяжении многих веков развитие арифметики и алгебры сильно тормозилось, потому что математикам долго не удавалось ввести в свои исследования удачные обозначения. Поэтому изложение математических работ выглядело громоздко.

Только начиная с XVI столетия постепенно в математику начали вводить современные обозначения. Вот, например, как в книге "Всеобщая арифметика" вводит алгебраические дроби великий английский ученый И. Ньютон (1643 – 1727):

"Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, обозначает частное или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю. Так . . . $\frac{a}{b}$ есть величина, возникающая при делении a на b . . . Точно также $\frac{a \cdot b - b \cdot b}{a \cdot x \cdot x}$ означает величину, получающуюся при делении $a \cdot b - b \cdot b$ на $a \cdot x \cdot x$ и т.д. Величины такого рода называются дробями".

О связи арифметики и алгебры Ньютон писал так: "Все действия арифметики столь необходимы в алгебре, что они лишь совместно образуют полную науку вычислений".

Символы a^2, a^3, a^4 и т.д. впервые встречаются у французского ученого Р. Декарта (1596–1650). Символ a^n для произвольного n предложен Ньютоном.

Мы уже отмечали, что в XVIII в. в России большое влияние на распространение математических знаний оказала "Арифметика" Магницкого, содержащая в себе кроме арифметики необходимые для практических приложений сведения из алгебры, тригонометрии, геометрии, астрономии и навигации. В частности, в ней изложены правила действий над многочленами, правила решения линейных уравнений и т.д.

Как уже отмечалось, Диофант в своих книгах уделял много внимания уравнениям. Может быть, поэтому другой древнегреческий ученый, Метродор, составил алгебраическую задачу в стихах, описывающую его жизнь:

Здесь погребен Диофант, и камень могильный
При счете искусном расскажет нам,
Сколь долог был его век.
Велением бога он мальчиком был шестую часть своей жизни;
В двенадцатой части затем прошла его светлая юность.
Седьмую часть жизни прибавим – перед нами очаг Гименея.
Пять лет протекли, и прислал Гименей ему сына.
Но горе ребенку! Едва половину он прожил
Тех лет, что отец, как скончался несчастный.
Четыре года страдал Диофант от утраты такой тяжелой
И умер, прожив для науки. Скажи мне, скольких лет
Достигнув, смерть воспринял Диофант?

Задача сводится к составлению и решению уравнения

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x.$$

Решение этого уравнения – $x = 84$ – столько лет жил Диофант.

ГЛАВА 3

ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

§ 10. Понятие функции и ее графика

1. Декартова система координат на плоскости. Зададим на плоскости две взаимно перпендикулярные оси координат – ось x и ось y – с точкой пересечения O, являющейся начальной точкой каждой из этих осей, и равными единичными отрезками.

Говорят, что этим на плоскости определена *прямоугольная система координат* Oxy. Ее называют еще *декартовой* системой координат (по имени французского математика и философа Декарта, введшего в математику это важное понятие).

Ось x (или Ox) называют еще *осью абсцисс*, а ось y (или Oy) – *осью ординат*. Точку O пересечения осей координат называют *началом системы координат*. Плоскость, на которой задана декартова система координат,

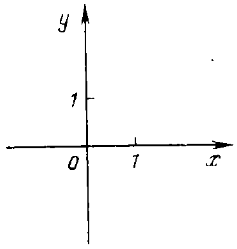


Рис. 12

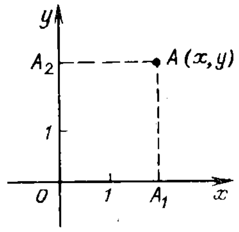


Рис. 13

называют *координатной плоскостью*.

Обычно ось абсцисс изображают в виде горизонтальной прямой, направленной вправо, а ось ординат – в виде вертикальной прямой, направленной вверх (рис. 12).

Пусть A – произвольная точка координатной плоскости. Проведем через точку A прямые, параллельные осям координат (рис. 13). Прямая, параллельная оси y, пересечет ось x в точке A_1, а прямая, параллельная оси x, пересечет ось y в точке A_2. *Абсциссой точки* A называется координата x точки A_1 на оси x. *Ординатой точки* A называется координата y точки A_2 на оси y. Абсцисса x и ордината y точки A называются *координатами точки* A.

Координаты точки записывают в скобках рядом с буквой, обозначающей эту точку: $A(x; y)$, причем на первом месте пишется абсцисса, а на втором – ордината. Например, точка A, изображенная на рис. 14, имеет абсциссу $x = 4$ и ординату $y = 3$; поэтому пишут $A(4; 3)$. На рис. 15 изображена прямоугольная система координат Oxy и точки $O(0; 0)$, $B(-1; 1)$, $C(-3; -4)$, $D(4; -4)$, $E(6; 0)$, $F(0; 5)$.

Важно отметить, что *если на плоскости задана прямоугольна.. система координат, то каждой точке A плоскости приводится в соответствие пара чисел $(x; y)$ – пара координат A, и в то же время произвольную пару чисел $(x; y)$ можно рассматривать как пару координат некоторой точки A плоскости.*

Нужно иметь в виду, что если пара состоит из разных чисел, то, переменив эти числа местами, мы получим другую пару, определяющую другую точку плоскости.

Поэтому часто пару координат $(x; y)$ точки A называют *упорядоченной парой чисел*.

Итак, если на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy, то:

1) *каждой точке плоскости поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (пара координат точки)*;

2) *разным точкам плоскости поставлены в соответствие разные упорядоченные пары чисел*;

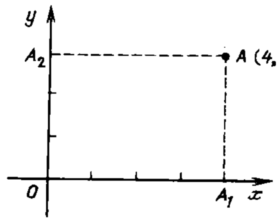


Рис. 14

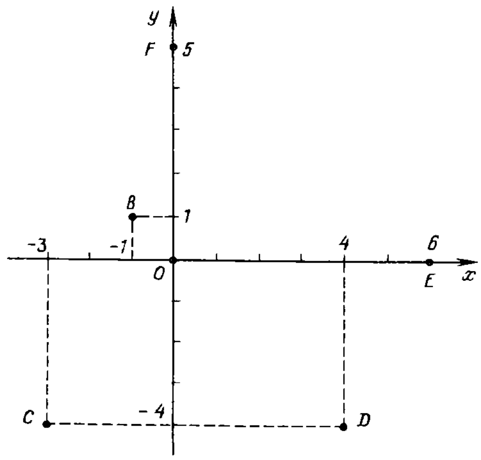


Рис. 15

3) *каждая упорядоченная пара чисел соответствует некоторой точке плоскости.*

Прямоугольная система координат Oxy разделяет плоскость на четыре части, называемые *координатными углами*, или *координатными четвертями*, или просто *четвертями*. Обозначим их римскими цифрами I, II, III, IV (рис. 16). Если исключить точки, лежащие на осях координат, то можно сказать, что:

точки I четверти имеют координаты $(x; y)$ такие, что $x > 0$, $y > 0$;
точки II четверти имеют координаты $(x; y)$ такие, что $x < 0$, $y > 0$;
точки III четверти имеют координаты $(x; y)$ такие, что $x < 0$, $y < 0$;
точки IV четверти имеют координаты $(x; y)$ такие, что $x > 0$, $y < 0$.

Например, точка $B(-1;\ 1)$ на рис. 15 принадлежит координатному углу II; точка $D(4;\ -4)$ – координатному углу IV.

Легко видеть, что:

абсцисса точки равна нулю тогда и только тогда, когда эта точка лежит на оси y;

ордината точки равна нулю тогда и только тогда, когда эта точка лежит на оси x.

Например, на рис. 15 точка F лежит на оси y и имеет абсциссу $x = 0$; точка E лежит на оси x и имеет ординату $y = 0$.

Отметим еще, что начало координат – точка O – и только она имеет координаты, обе равные нулю.

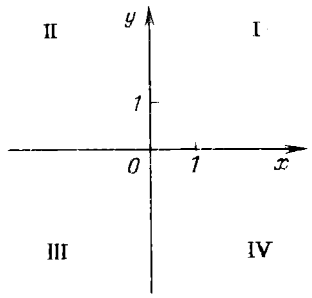


Рис. 16

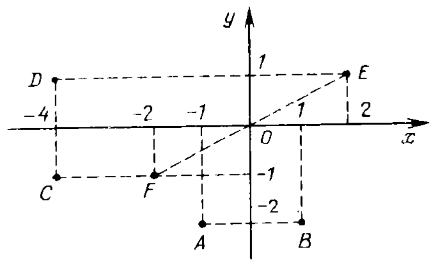


Рис. 17

Две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ *симметричны относительно оси ординат* (оси y), если их координаты удовлетворяют равенствам

$x_1 = -x_2$ и $y_1 = y_2$.

Две точки $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ *симметричны относительно оси абсцисс* (оси x), если их координаты удовлетворяют равенствам

$x_1 = x_2$ и $y_1 = -y_2$.

Две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ *симметричны относительно начала координат* (точки O), если их координаты удовлетворяют равенствам

$$x_1 = -x_2 \quad \text{и} \quad y_1 = -y_2.$$

Например, на рис. 17 точки A и B симметричны относительно оси ординат, точки C и D симметричны относительно оси абсцисс, точки E и F симметричны относительно начала координат.

Вопросы

1. Что означают слова "на плоскости задана декартова система координат"?
2. Что называется: а) координатной плоскостью; б) началом системы координат; в) абсциссой; г) ординатой; д) координатами точки на координатной плоскости?
3. Как записывают координаты точки?
4. Для каких точек координатной плоскости: а) абсцисса равна нулю; б) ордината равна нулю; в) абсцисса положительна; г) ордината положительна?
5. Какими свойствами обладают координаты точек I, II, III, IV четвертей?
6. Какими свойствами обладают координаты точек, симметричных относительно: а) оси x; б) оси y; в) начала координат?

Упражнения

1. Отметить на координатной плоскости точки:

$A_1(-5; 6)$; $A_2(-3; -2)$; $A_3(2; -1)$; $A_4(1; 3)$;
$A_5(0; -3)$; $A_6(-2; 0)$; $A_7(0; 0)$.

2. Для точки A найти точки, симметричные ей относительно оси x, оси y и начала координат, если:

а) $A(1; 2)$; б) $A(-1; 3)$; в) $A(2; -3)$;
г) $A(-4; -3)$, и отметить эти точки на координатной плоскости.

2. Понятие функции.

Пример 1. Из геометрии известно, что объем куба равен кубу длины его ребра. Это утверждение носит общий характер, оно относится к любому кубу. Естественно, соответствующее ему равенство написать также в общем виде. Пусть a — длина ребра куба, V — его объем. Тогда указанное геометрическое свойство можно записать следующим образом:

$$V = a^3 \quad (a > 0). \tag{1}$$

Неравенство, записанное в скобках, говорит о том, что данное свойство рассматривается только для положительных значений a, потому что длина ребра куба есть положительное число.

Мы получили формулу, выражающую зависимость объема V от длины ребра a.

По формуле (1) для каждого значения длины ребра a можно найти соответствующее ему значение объема V. Мы видим, что значения V зависят от значений a, причем каждому положительному значению a соответствует определенное значение V. В таком случае говорят, что V *есть функция* от a. Говорят еще, что V *есть функция от a, определенная на множестве положительных чисел.*

П р и м е р 2. Из физики известно, что при прямолинейном движении тела с постоянной скоростью, например 80 (км/ч), путь S (км), пройденный этим телом за время t (ч), вычисляется по формуле

$$S = 80t \quad (t \geqslant 0). \tag{2}$$

Мы получили формулу, выражающую зависимость пути S от времени t. По формуле (2) для каждого неотрицательного значения времени t можно найти соответствующее ему значение пути S. Мы видим, что значения S зависят от значений t, причем каждому неотрицательному значению t соответствует определенное значение S.

В таком случае говорят, что S *есть функция от t*. Говорят еще, что S *есть функция от t, определенная на множестве неотрицательных чисел.*

Приведем общее определение функции.

Пусть дано некоторое множество чисел M, и пусть каждому числу x из M соответствует определенное число y. Тогда говорят, что y *есть функция от x.*

Множество M называют *областью определения этой функции.*

Говорят еще, что y *есть функция от x, определенная на множестве M.*

Это определение функции принадлежит великому русскому математику Н.И. Лобачевскому (1792–1856) и немецкому математику Л. Дирихле (1805–1859).

Чтобы указать, что y есть функция от x, пишут

$$y = f(x),$$

где буква f характеризует то правило, по которому получаются значения y, соответствующие данным x.

Называют еще x *независимой переменной* или *аргументом*, а y – *зависимой переменной.*

Иногда для того, чтобы подчеркнуть, что y зависит от x, вместо y пишут $y(x)$.

Число, соответствующее числу x_0 для данной функции $y(x)$, называется *значением* этой *функции в точке* x_0 и обозначается $y(x_0)$, или если функция записана в виде $y = f(x)$, то $f(x_0)$.

Например, для функции $y = 2x$ пишут

$$y(1) = 2; \quad y(2) = 4; \quad y(-3) = -6$$

или

$$f(1) = 2; \quad f(2) = 4; \quad f(-3) = -6.$$

При этом говорят, например, что значение данной функции в точке 2 равно 4. Говорят еще: f от 2 равно 4, y от 1 равно 2 и т.д.

Чтобы задать функцию, нужно указать способ (правило, закон), с помощью которого для каждого значения аргумента x можно найти соответствующее значение функции y.

Укажем способы задания функций.

Функция может быть задана формулой.

Например, формула

$$y = 3x$$

определяет функцию y от x по правилу: каждому числу x соответствует число y, равное $3x$.

Вот еще примеры функций, заданных формулами:

$$y = -2x; \quad y = 3x - 4; \quad y = x^2.$$

Указанные функции заданы (определены) для любых значений x, т.е. на множестве всех действительных чисел.

Областью определения функции

$$y = \frac{1}{x}$$

является множество всех действительных чисел x, отличных от нуля.

Буквы x и y нередко заменяют другими буквами, в особенности в конкретных случаях.

Например, площадь S квадрата есть функция

$$S = a^2 \quad (a > 0)$$

от длины его стороны, определенная на множестве положительных чисел.

Функция может быть задана таблицей.

Например, если измерять температуру воздуха T через каждый час, то каждому моменту времени $t = 0, 1, 2, \ldots, 24$ будет соответствовать определенное число T. Это соответствие можно записать в виде таблицы:

t	0	1	2	3	...	14	...	24
T	16	16	15	15	...	25	...	17

Таким образом, T есть функция от t, определенная на множестве целых чисел от 0 до 24 и заданная таблицей. Закон, по которому каждому t из этого множества соответствует T, определяется в данном случае не формулой, а таблицей.

Функция может быть задана при помощи графика. Об этом будет идти речь в следующем пункте.

Вопросы

1. Что называется: а) функцией; б) аргументом; в) зависимой переменной; г) независимой переменной; д) областью определения функции; е) значением функции в точке x_0?

2. Как можно задавать функцию? Приведите примеры функций, заданных: а) формулами; б) таблицами.

Упражнения

1. Привести пять примеров функций, заданных формулами.
2. Записать периметр P квадрата как функцию длины его стороны a.
3. Привести пример функции, заданной таблицей.
4. Вычислить таблицу значений функции $y = 2x^2$ для значений $x = 0$; $0,1$; $0,2$; $0,9$; 1.

3. Понятие графика функции. *Функция может быть задана при помощи графика.* Например, чтобы узнать, как изменяется температура воздуха, на метеорологических станциях пользуются прибором, называемым термографом. Термограф состоит из барабана, вращающегося вокруг своей оси при помощи часового механизма, и латунной изогнутой коробки, чувствительной к изменению температуры. При повышении температуры она разгибается, а прикрепленное к ней при помощи системы рычажков самопишущее перо поднимается вверх. Понижение же температуры влечет за собой опускание пера. На барабан навертывается соответствующим образом разграфленная бумажная лента, на которой перо вычерчивает непрерывную линию – график функции, выражающей зависимость между временем и температурой воздуха.

На рис. 18 изображен такой график в системе координат OtT, где t – время, а T – температура. С его помощью можно без вычислений определить значения температуры воздуха T для каждого момента времени t. Для этого на оси абсцисс надо отметить точку t и восстановить из нее перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком. Ордината точки пересечения и будет значением функции $T(t)$.

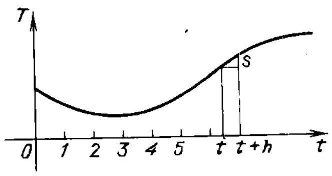


Рис. 18

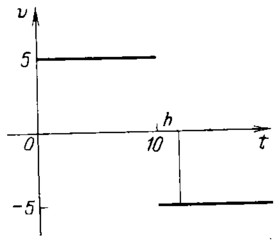


Рис. 19

Можно еще сказать, что график функции $T(t)$ в системе координат OtT есть совокупность точек вида $(t;\ T(t))$ для всех t из рассматриваемого промежутка времени.

Наш график есть непрерывная линия, т.е. она получена одним непрерывным движением пера без отрыва его острия от бумаги; поэтому функцию T от t называют *непрерывной*. Это свойство непрерывности функции можно охарактеризовать еще так: *малому изменению аргумента t соответствует малое изменение функции T.*

На рис. 18 на оси абсцисс отмечены значения времени t и $t + h$, которым соответствуют значения температуры T и $T + s$. Число h называется *изменением* (*приращением*) *аргумента* t, а число s, соответствующим *изменением* (*приращением*) *функции* T.

Мы видим, что малому h соответствует малое s.

Температура T при непрерывном изменении времени t изменяется непрерывно без скачков.

Но в практике возможны и другие ситуации.

Например, представим себе, что по прямой линии движется шарик со скоростью $v = 5$ (м/с). Через 10 с он ударяется о стену и затем движется обратно со скоростью $v = 5$ (м/с).

Можно считать практически, что скорость v шарика зависит от времени t следующим образом:

$v = 5$ для $t \leqslant 10$,

$v = -5$ для $t > 10$.

График этой функции изображен на рис. 19.

Получилась разрывная линия с разрывом при $t = 10$. В момент времени $t = 10$ скорость мяча равнялась 5. Но если мы к 10 добавим положительное как угодно малое h, то в момент $10 + h$ скорость уже будет равна -5. Приращение $s = -10$. Теперь уже малому h не соответствует малое s.

В данном случае функция v от t не является непрерывной: она имеет *разрыв* при $t = 10$.

Рассмотренные примеры показывают целесообразность следующих определений.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости Oxy вида $(x; f(x))$, где x – любое число из области определения функции.

Если график функции – непрерывная линия, то функцию называют *непрерывной*. Можно сказать и так: функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной*, если малому изменению аргумента x соответствует малое изменение функции y.

В дальнейшем будут приведены примеры графиков функций, заданных конкретными формулами. В п. 4 будет рассмотрен график простейшей функции $y = x$. Графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = x^2$ будут рассмотрены в § 11 и 12.

Вопросы

1. Можно ли задать функцию при помощи графика? Приведите примеры.
2. Что называется графиком функции?
3. Какую функцию называют непрерывной?

4. График функции $y = x$. Зададим на плоскости прямоугольную систему координат Oxy. Зададим также прямую, являющуюся биссектрисой

I и III координатных углов. Пусть

$A(x, y)$

есть произвольная точка этой прямой.

На рис. 20 отмечена точка A данной прямой, имеющая положительную абсциссу x. Пусть прямая, параллельная оси Oy, пересекает Ox в точке A_1. Очевидно, что

$$|OA_1| = x, \quad |A_1A| = y.$$

На рис. 21 отмечена точка A, имеющая отрицательную абсциссу x. Пусть прямая, параллельная оси Oy, пересекает ось Ox в точке A_1, но теперь

$$|OA_1| = -x, \quad |A_1A| = -y.$$

В каждом из этих случаев треугольник OA_1A прямоугольный и его острый угол A_1OA равен 45°. Но тогда треугольник OA_1A равнобедренный и $|OA_1| = |A_1A|$, откуда получаем, что

$$y = x. \tag{1}$$

Мы получили равенство (1), выражающее зависимость между абсциссой x и ординатой y произвольной точки A данной прямой. Впрочем, при выводе этого равенства мы исключили случай, когда точка A совпадает с началом координат O. Но непосредственно видно, что в этом случае равенство (1) тоже выполняется, так как в этом случае $x = 0$ и $y = 0$.

Итак, любая точка $A(x; y)$ рассматриваемой биссектрисы имеет координаты, удовлетворяющие равенству (1). Но верно и обратное утверждение: если точка $A(x; y)$ такова, что

$$y = x,$$

то она лежит на биссектрисе I и III координатных углов. В самом деле, рассмотрим сначала точку $A(x; y)$ такую, что $x > 0$. Тогда $y > 0$.

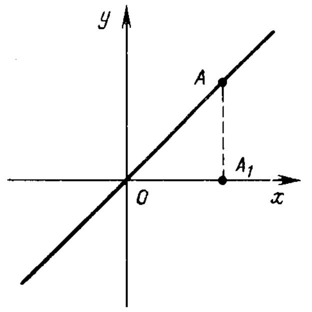


Рис. 20

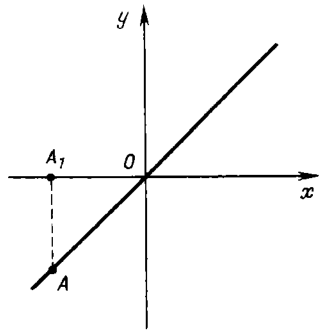


Рис. 21

Обращаясь к рис. 20, получаем

$$|OA_1| = x = y = |AA_1|.$$

Значит, прямоугольный треугольник OA_1A равнобедренный, следовательно, каждый из его острых углов равен 45°. Но тогда точка $A(x;\ y)$ находится на биссектрисе I координатного угла. Если же $x < 0$, то $y < 0$, и, обращаясь к рис. 21, получим, что точка $A(x;\ y)$ находится на биссектрисе III координатного угла.

Таким образом, показано:

если точка $A(x;\ y)$ лежит на биссектрисе I и III координатных углов, то $y = x$;

если же точка $A(x;\ y)$ такова, что $y = x$, то она лежит на биссектрисе I и III координатных углов.

Говорят, что *биссектриса* I *и* III *координатных углов есть график функции* $y = x$.

Говорят также, что *биссектриса* I *и* III *координатных углов есть множество точек* $A(x;\ y)$ *плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению* $y = x$.

Вопросы

1. Что является графиком функции $y = x$?
2. Какое уравнение имеет биссектриса I и III координатных углов?

Упражнение

Доказать, что биссектриса II и IV координатных углов есть график функции $y = -x$.

§ 11. Функция $y = x^2$

1. Основные свойства функции $y = x^2$. Функция, заданная формулой

$$y = x^2,$$

определена для всех действительных значений x: каждому числу x соответствует значение y, равное квадрату x.

Сформулируем и обоснуем некоторые свойства функции $y = x^2$.

1) Если $x = 0$, то $y = 0$.

Это свойство очевидно.

2) Если $x > 0$, то $y > 0$.

В самом деле, мы знаем, что если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$, но тогда из того, что $x > 0$, следует $x^2 > 0$, т.е. $y > 0$.

3) для неотрицательных значений x функция $y = x^2$ возрастает, т.е. большему неотрицательному значению x соответствует большее значение y. Иначе говоря, если x_1 и x_2 — неотрицательные числа и $x_1 < x_2$, $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, то

$$y_1 < y_2.$$

В самом деле, для $x_1 = 0$ это есть свойство 2). Пусть теперь $x_1 > 0$ и $x_1 < x_2$. Тогда, умножив неравенство $x_1 < x_2$ на положительное число x_1, получим

$$x_1^2 < x_1 x_2 \tag{1}$$

и, умножив неравенство $x_1 < x_2$ на положительное число x_2, получим

$$x_1 x_2 < x_2^2. \tag{2}$$

Из (1) и (2) по свойству транзитивности неравенств следует, что

$$x_1^2 < x_2^2,$$

т.е.

$$y_1 < y_2.$$

4) Если положительное x, неограниченно возрастая, стремится к $+\infty$, то и $y = x^2$ стремится к $+\infty$, т.е.

$$y \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

В самом деле, пусть x стремится к $+\infty$, принимая натуральные значения $n = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots$ Тогда $y = x^2$ будет соответственно принимать значения

$$n^2 = 1;\ 4;\ 9;\ 16;\ \ldots$$

и тоже стремится к $+\infty$.

Для промежуточных (нецелых) значений x тоже справедливо это свойство.

5) При изменении знака x на противоположный соответствующее значение $y = x^2$ не изменяется.

В самом деле, $(-x)^2 = x^2$.

Функцию, обладающую этим свойством, называют *четной функцией*.

Таким образом, функция $y = x^2$ четная.

6) Функция $y = x^2$ непрерывна, т.е. малому изменению x соответствует малое изменение y.

Этот факт становится очевидным для положительных x, если, например, будем считать, что y — площадь квадрата со стороной x. Ясно, что малое изменение стороны квадрата влечет за собой малое изменение площади.

Таким образом, график функции $y = x^2$ есть непрерывная линия.

В качестве следствия этих основных свойств функции $y = x^2$ легко обосновать и такие ее свойства:

а) если $x < 0$, то $y > 0$;

б) если $x \to -\infty$, то $y \to +\infty$;

в) для неположительных значений x функция $y = x^2$ убывает, т.е. большему неположительному значению x соответствует меньшее значение y.

Вопросы

1. Что значит, что функция $y = x^2$ возрастает для неотрицательных значений x?
2. Что значит, что функция $y = x^2$ четная?
3. Что значит, что функция $y = x^2$ непрерывная?

4. Сформулируйте основные свойства функции $y = x^2$.

5. Покажите, что из свойств 2) и 5) функции $y = x^2$ следует, что $y > 0$ для всех $x \neq 0$.

6. Покажите, что из свойств 3) и 5) функции $y = x^2$ следует, что для неположительных значений x функция $y = x^2$ убывает, т.е. если $x_1 < x_2 \leqslant 0$ и $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, то $y_1 > y_2$.

2. График функции $y = x^2$. Графиком функции $y = x^2$ является множество точек координатной плоскости Oxy с координатами $(x;\ x^2)$, где x – любое действительное число.

Чтобы построить график функции

$$y = x^2, \tag{1}$$

мы должны вычислить для каждого действительного числа x соответствующее значение y по формуле (1) и полученные точки $(x;\ y)$ отметить на плоскости в заданной декартовой системе координат. Совокупность всех этих точек и образует график функции $y = x^2$.

Однако эту работу до конца выполнить невозможно, потому что указанных точек бесконечно много. Все же график функции $y = x^2$ можно построить приближенно.

Зададим побольше отдельных положительных значений x и вычислим соответствующие им по формуле (1) значения y. Из этих чисел составим таблицу. Приведем такую таблицу для значений x, отличающихся друг от друга на 0,1 и изменяющихся на отрезке [0; 3]:

x	y	x	y	x	y
0	0	1,1	1,21	2,1	4,41
0,1	0,01	1,2	1,44	2,2	4,84
0,2	0,04	1,3	1,69	2,3	5,29
0,3	0,09	1,4	1,96	2,4	5,76
0,4	0,16	1,5	2,25	2,5	6,25
0,5	0,25	1,6	2,56	2,6	6,76
0,6	0,36	1,7	2,89	2,7	7,29
0,7	0,49	1,8	3,24	2,8	7,84
0,8	0,64	1,9	3,61	2,9	8,51
0,9	0,81	2,0	4,00	3,0	9,00
1,0	1,00				

Точки $(x;\ y)$ таблицы отметим на плоскости в заданной прямоугольной системе координат Oxy. Получилась точечная линия, расположенная над отрезком [0; 3] оси Ox (рис. 22). Соединим эти точки плавной непрерывной линией такой, что ордината y ее подвижной точки возрастает вместе с абсциссой (рис. 23). Полученную непрерывную линию можно рассматривать как приближенный график функции $y = x^2$ на отрезке [0; 3] изменения x.

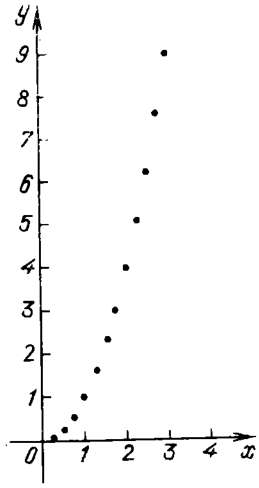


Рис. 22

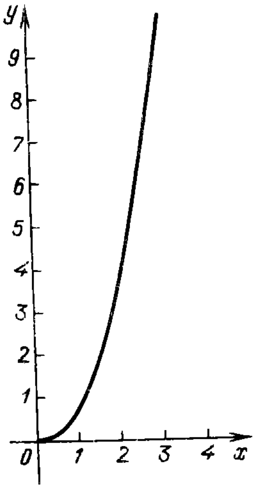


Рис. 23

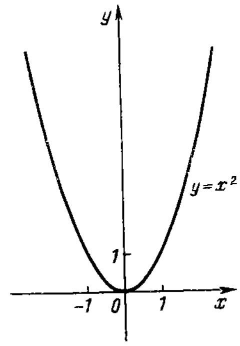


Рис. 24

Отметим, что нарисованный на рис. 23 график отражает свойства 1), 2), 3), 6) функции $y = x^2$, сформулированные в предыдущем пункте. Свойство 6) указывает на то, что график функции $y = x^2$ должен представлять собой непрерывную линию. Поэтому мы и соединили точки нашей точечной линии непрерывной линией.

Легко представить себе, как выглядит график функции $y = x^2$ для больших x. Если абсцисса точки этого графика стремится к $+\infty$, то ее ордината y по свойству 4) тоже стремится к $+\infty$. При этом надо иметь в виду, что y стремится к $+\infty$ гораздо быстрее, чем x. Если, например, x принимает значения 1; 2; 3; 4; . . . , то y соответственно равен квадратам этих чисел: 1; 4; 9; 16; . . .

В силу свойства

$$(-x)^2 = x^2$$

точки графика $y = x^2$ с абсциссами x и $-x$ имеют равные ординаты, поэтому график функции $y = x^2$ симметричен относительно оси y. Таким образом, ось y является осью симметрии кривой $y = x^2$.

График функции $y = x^2$ имеет вид, изображенный на рис. 24.

Линия, являющаяся графиком функции $y = x^2$, называется *параболой*. Часто мы будем говорить коротко "парабола $y = x^2$".

Впрочем, в дальнейшем будет сказано, что графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — данные числа и $a \neq 0$, также называются параболами.

Точка пересечения параболы с ее осью симметрии называется *вершиной параболы*. В данном случае это есть точка $O(0;\ 0)$.

Рассматривая параболу $y = x^2$, можно непосредственно заключить о ряде свойств функции $y = x^2$.

В самом деле, парабола $y = x^2$ проходит через начало координат — это свойство 1) функции $y = x^2$.

Точки параболы $y = x^2$, кроме ее вершины, находятся выше оси x. Для точек с абсциссой $x > 0$ это есть свойство 2).

Если точка $A(x;\ y)$ параболы движется по ней так, что ее абсцисса x положительна и возрастает, то ее ордината y тоже возрастает. Это — свойство 3).

Парабола $y = x^2$ есть непрерывная линия (свойство 6)), симметричная относительно оси y (свойство 5)). Но мы видим также из графика, что если абсциссы x точек параболы отрицательны и возрастают, то ординаты y убывают, т.е. бóльшим отрицательным значениям x соответствуют меньшие значения y. Это следует из свойств 3) и 5).

Вопросы

1. Как построить приближенно график функции $y = x^2$?
2. Как называется линия, являющаяся графиком функции $y = x^2$?
3. В чем заключается свойство непрерывности этого графика?
4. Какая точка называется вершиной параболы $y = x^2$?
5. Какая прямая является осью симметрии параболы $y = x^2$?

§ 12. Функция $y = \frac{1}{x}$

1. Основные свойства функции $y = \frac{1}{x}$. Функция

$$y = \frac{1}{x}$$

определена для любых числовых значений x, за исключением $x = 0$.

В этом пункте мы будем рассматривать функцию $y = \frac{1}{x}$ только для положительных x.

Отметим следующие ее свойства:

1) Если $x > 0$, то $y > 0$.

Это свойство очевидно.

2) Для положительных x функция $y = \frac{1}{x}$ является убывающей, т.е. большему положительному значению x соответствует меньшее значение y. Иначе говоря, если $0 < x_1 < x_2$, то $y_1 > y_2$, где $y_2 = \frac{1}{x_2}$, $y_1 = \frac{1}{x_1}$.

Докажем это утверждение методом "от противного", исходя из основных свойств чисел.

Предположим, что $0 < x_1 < x_2$, а

$$\frac{1}{x_1} \leqslant \frac{1}{x_2}. \qquad (1)$$

Умножив неравенство (1) на положительное число $x_1 x_2$, получим

$$x_2 \leqslant x_1.$$

Но это неравенство противоречит условию $x_1 < x_2$. Следовательно, наше предположение неверно, а верно утверждение 2.

3) Если положительное x стремится к нулю, что $y = \frac{1}{x}$ стремится к $+\infty$, а если x стремится к $+\infty$, то $y = \frac{1}{x}$ стремится к нулю, т.е.

$$y = \frac{1}{x} \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to 0 \ (x > 0),$$

$$y = \frac{1}{x} \to 0 \ \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Эти свойства мы проиллюстрируем на примерах.

Если положительное x стремится к нулю, пробегая значения

$$x = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}, \ldots,$$

то функция $y = \frac{1}{x}$ соответственно пробегает значения

$$y = 1; 2; 3; 4; 5; \ldots,$$

т.е. $y \to +\infty$.

Если же x стремится к $+\infty$, пробегая значения

$$x = 1; \ 2; \ 3; \ 4; \ \ldots,$$

то соответственно y стремится к нулю, пробегая значения

$$y = 1; \ \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$$

4) Функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна для положительных x, т.е. малому изменению положительного x соответствует малое изменение y.

Это свойство мы проиллюстрируем на следующем примере.

Пусть спортсмену надо пробежать дистанцию 1 км. Будем считать, что он бежит всю дистанцию с одинаковой скоростью v км/с. Тогда на весь путь 1 км он затратит t с, причем

$$t = \frac{1}{v}. \tag{2}$$

Следовательно, время есть функция от скорости v. Совершенно очевидно, что малое изменение скорости даст малое изменение времени, затраченного на путь. Поэтому функция, заданная формулой (2), непрерывная (напомним, что в формуле (2) $v > 0$).

Таким образом, график функции $y = \frac{1}{x}$ для положительных x есть непрерывная линия, т.е. он может быть изображен непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги.

Вопросы

1. Для каких x определена функция $y = \frac{1}{x}$?

2. Является ли функция $y = \frac{1}{x}$ убывающей для положительных x?

3. К чему стремится $y = \frac{1}{x}$, когда положительное x стремится к нулю?

4. К чему стремится $y = \frac{1}{x}$, когда x стремится к $+\infty$?

5. Является ли функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывной для положительных x?

2. График функции $y = \frac{1}{x}$. Построим сначала график функции $y = \frac{1}{x}$ для положительных x. Чтобы его построить, мы должны вычислить для каждого положительного числа x соответствующее значение $y = \frac{1}{x}$ и полученные точки $(x;\ y)$ отметить на плоскости, где задана декартова система координат Oxy. Совокупность всех этих точек образует график функции $y = \frac{1}{x}$ для положительных x.

Однако эту работу до конца выполнить невозможно, потому что указанных точек бесконечно много. Все же график нашей функции можно построить приближенно.

Зададим побольше отдельных положительных значений x и вычислим по формуле $y = \frac{1}{x}$ соответствующее им значения y. Приведем таблицу для некоторых значений x:

x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{7}$

x	0,8	0,9	1	2	3	4
y	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{9}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Отметим на плоскости в системе координат Oxy (рис. 25) точки, соответствующие парам чисел $(x;\ y)$, приведенным в таблице.

Соединим эти точки плавной непрерывной линией (рис. 26) такой, что ордината y ее подвижной точки убывает вместе с возрастанием ее абсциссы. Полученную непрерывную линию можно рассматривать как приближенный график функции $y = \frac{1}{x}$ для положительных x.

Отметим, что изображенный на рис. 26 график отражает свойства 1) – 4) функции $y = \frac{1}{x}$, сформулированные в предыдущем пункте.

Действительно, график функции $y = \frac{1}{x}$ для положительных x расположен над осью Ox, что соответствует свойству 1).

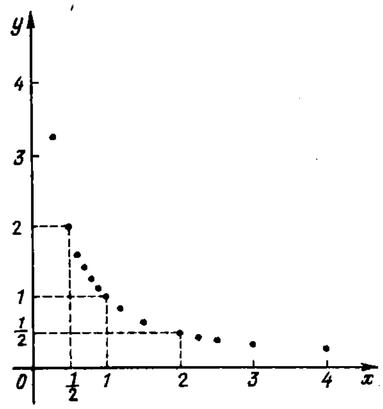


Рис. 25

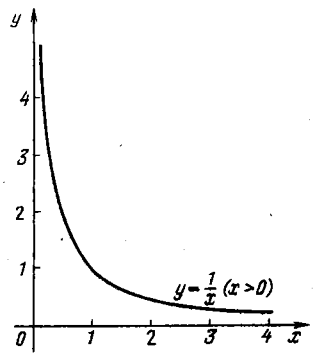


Рис. 26

Если увеличивается абсцисса точки x, движущейся по кривой, то ордината этой точки уменьшается, что соответствует свойству 2).

Свойство 3) заключается в том, что если $x \to +\infty$, то $y \to 0$. Если же $x \to 0$ $(x > 0)$, то $y \to +\infty$. Оно тоже в какой-то мере отражено на рис. 26.

Наконец, на основании свойства 4) наш график должен быть непрерывной линией, поэтому мы и соединили полученные с помощью таблицы точки непрерывной линией.

Областью определения функции $y = \frac{1}{x}$ является множество чисел x, отличных от нуля, или, выражаясь геометрическим языком, множество точек оси Ox, отличных от нулевой точки. Это множество симметрично относительно нулевой точки. Кроме того, для любого x из этого множества выполняется равенство

$$\frac{1}{-x} = -\left(\frac{1}{x}\right), \tag{1}$$

т.е. при изменении знака x на противоположный соответствующее значение функции изменяется на противоположное.

Функцию, обладающую этим свойством, называют *нечетной функцией*.

Таким образом, функция $y = \frac{1}{x}$ нечетная.

В силу (1) точки графика $y = \frac{1}{x}$ с абсциссами x и $-x$ имеют противоположные ординаты, поэтому график функции $y = \frac{1}{x}$ симметричен относительно начала координат. Значит для построения графика функции $y = \frac{1}{x}$ для отрицательных x надо изобразить линию, симметричную уже построенной линии относительно начала координат.

График функции $y = \frac{1}{x}$ для всех x (отличных от нуля) изображен на рис. 27.

Линия, являющаяся графиком функции $y = \frac{1}{x}$, называется *гиперболой*.

Отметим, что гипербола $y = \frac{1}{x}$ состоит из двух кусков, называемых *ветвями гиперболы*. Одна из них расположена над положительным лучом оси Ox (без точки $x = 0$). Из графика функции $y = \frac{1}{x}$ (см. рис. 27) видно, что функция $y = \frac{1}{x}$ для отрицательных x обладает следующими свойствами:

1) Если $x < 0$, то $y < 0$.

2) Для отрицательных x функция $y = \frac{1}{x}$ убывает.

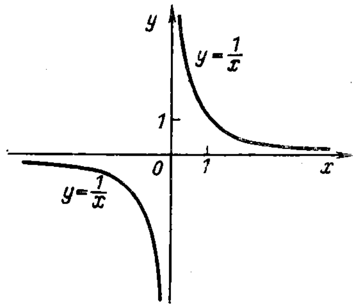


Рис. 27

3) Если отрицательное x стремится к нулю, то $y = \frac{1}{x}$ стремится к $-\infty$, а если x стремится к $-\infty$, то $y = \frac{1}{x}$ стремится к нулю, т.е.

$$y = \frac{1}{x} \to -\infty \quad \text{при} \quad x \to 0 \quad (x < 0),$$

$$y = \frac{1}{x} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty.$$

4) Для отрицательных x функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна.

Формальное доказательство этих свойств мы опускаем.

Вопросы

1. Каковы свойства функции $y = \frac{1}{x}$ для отрицательных x?
2. Какая линия является графиком функции $y = \frac{1}{x}$?
3. Сколько ветвей имеет гипербола?

§ 13. Квадратные корни

1. Понятие квадратного корня. В геометрии иногда решается задача: площадь квадрата равна b, найти длину его стороны. Эта задача есть частный случай более общей задачи. Для данного действительного числа b найти действительное число a такое, что $a^2 = b$. Мы увидим, что эта задача имеет решение, только если b есть неотрицательное число.

Зададим действительное число a. Возведя его в квадрат, получим действительное число $b = a^2$, которое называется *квадратом числа a*. Покажем, что число b неотрицательное.

В самом деле, если $a = 0$, то

$$b = a^2 = 0 \cdot 0 = 0;$$

если $a > 0$, то, умножая неравенство $a > 0$ на положительное число a, получаем

$$b = a^2 > 0;$$

если же $a < 0$, то, умножая это неравенство на отрицательное число a, получаем

$$b = a^2 > 0.$$

Итак, показано, что для любого действительного числа a справедливо неравенство

$$a^2 \geqslant 0,$$

т.е. *квадрат любого действительного числа есть число неотрицательное.*

Из сказанного следует, что *нет такого действительного числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу.*

Теперь покажем, применяя графический метод, что для любого неотрицательного числа b существует действительное число a такое, что

$$a^2 = b.$$

При $b = 0$ нам надо найти такое число a, что $a^2 = 0$. Но тогда $a = 0$, потому что, как показано выше, $0^2 = 0$; если же $a \neq 0$, то $a^2 > 0$.

Итак, существует единственное число 0 такое, что его квадрат равен числу $b = 0$.

Пусть теперь $b > 0$. Построим в прямоугольной системе координат Oxy график функции (рис. 28) $y = x^2$. Отложим от начала координат вверх по оси Oy отрезок длиной b и через верхний его конец проведем прямую, параллельную оси Ox. Эта прямая пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках A и B (см. рис. 28).

Пусть абсцисса точки A есть число a. Тогда абсцисса точки B есть число $-a$, потому что точки A и B симметричны относительно оси Oy. Очевидно, что квадраты чисел a и $-a$ равны b:

$$a^2 = (-a)^2 = b.$$

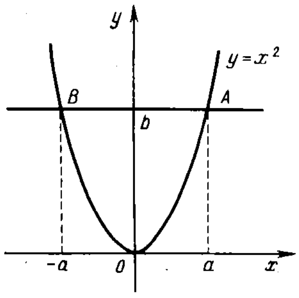


Рис. 28

При этом нет других действительных чисел, квадраты которых равнялись бы b.

Квадратным корнем из данного числа называется такое число, квадрат которого равен данному числу.

Из сказанного следует, что:

1) *существует и притом только два квадратных корня из любого положительного числа b. Оба они равны по абсолютной величине, но имеют разные знаки, т.е. один из корней положительный, а другой отрицательный*;

2) *квадратный корень из нуля единствен и равен нулю*;

3) *нет действительного числа, являющегося квадратным корнем из отрицательного числа.*

Замечание 1. В дальнейшем будут введены корни квадратные из отрицательных чисел, но это будут уже не действительные числа, а так называемые комплексные числа.

Замечание 2. Говорят, что квадратный корень из отрицательного числа не существует, подразумевая под этим, что нет действительного числа, квадрат которого есть отрицательное число.

Пример 1. Числа 17 и -17 – квадратные корни из 289, потому что $17^2 = (-17)^2 = 289$.

Пример 2. Числа $\frac{1}{7}$ и $-\frac{1}{7}$ – квадратные корни из $\frac{1}{49}$; потому что $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$.

Пример 3. Числа $\frac{5}{3}$ и $-\frac{5}{3}$ – квадратные корни из $\frac{25}{9}$, потому что $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$.

Пример 4. Число 0 – единственный квадратный корень из 0.

Пример 5. Нет квадратных корней из -4.

Вопросы

1. Может ли быть отрицательным числом квадрат действительного числа?
2. Что называется квадратным корнем из данного числа?
3. Сколько существует квадратных корней из неотрицательного числа?
4. Существуют ли действительные числа, являющиеся квадратными корнями из данного отрицательного числа?

Упражнение

Найти квадратные корни из чисел:

а) $\frac{1}{169}$; б) 625; в) 1 000 000; г) 1,44; д) 30,25; е) 0,0256; ж) 0; з) -9.

2. Арифметический квадратный корень. *Арифметическим квадратным корнем из данного неотрицательного числа* b называется неотрицательное число a такое, что $a^2 = b$. Это число a обозначается символом $\sqrt{b}$:

$$a = \sqrt{b}.$$

Запись эта читается так: a есть арифметический квадратный корень из числа b.

Например,

$$\sqrt{0} = 0; \quad \sqrt{9} = 3; \quad \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7};$$

$$\sqrt{1} = 1; \quad \sqrt{16} = 4; \quad \sqrt{25} = 5;$$

$$\sqrt{4} = 2; \quad \sqrt{225} = 15; \quad \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

Иногда вместо слов "арифметический квадратный корень из числа" говорят "арифметическое значение квадратного корня из числа" или "арифметический корень второй степени из числа".

Часто символ $\sqrt{b}$ мы будем называть просто квадратным корнем из b, опуская для краткости прилагательное "арифметический", но подразумевая его.

Среди двух квадратных корней из положительного числа b один арифметический, т.е. равный $\sqrt{b}$, а другой равен $-\sqrt{b}$.

Зато квадратный корень из 0 только один, равный $\sqrt{0} = 0$.

Значит, *для каждого неотрицательного числа b существует и притом только один арифметический квадратный корень.*

Отметим, что если неотрицательные числа b_1 и b_2 таковы, что $b_1 < b_2$, то $\sqrt{b_1} < \sqrt{b_2}$.

Действительно, если допустить, что $\sqrt{b_1} \geqslant \sqrt{b_2}$, то, возводя это неравенство в квадрат, получаем $b_1 \geqslant b_2$, а это противоречит исходному неравенству.

Итак, мы доказали: *если даны два неотрицательных числа и квадрат первого из них больше квадрата второго, то первое число больше второго.*

Из сказанного следует также, что *если два неотрицательных числа равны, то равны арифметические квадратные корни из них.* Можно сказать и так: *если квадраты неотрицательных чисел равны, то эти числа равны.*

Вопросы

1. Что называется арифметическим квадратным корнем?
2. Сколько существует арифметических квадратных корней из данного числа?
3. Могут ли быть равными арифметические квадратные корни из неравных чисел?

Упражнения

1. Найти арифметические квадратные корни из чисел:

а) 3; б) 0,49; в) $\frac{1}{9}$; г) 0; д) -7.

2. Вычислить: а) $\sqrt{\frac{1}{169}}$; б) $\sqrt{30,25}$; в) $\sqrt{0,0121}$.

3. **Квадратный корень из натурального числа.** Квадрат натурального числа есть натуральное число. Но не всякое натуральное число есть квадрат некоторого натурального числа.

Среди натуральных чисел, не больших 20, только четыре из них:

1; 4; 9; 16

суть квадраты натуральных чисел.

Среди же натуральных чисел, меньших 1000, их всего 31, т.е. примерно 3 %. Вот они:

1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169; 196; 225; 256; 289; 324; 361; 400; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 841; 900; 961.

Если же рассмотреть натуральные числа, не большие 10 000, то среди них имеется всего 100, т.е. 1 %, являющихся квадратами натуральных чисел, именно:

1^2; 2^2; 3^2; . . . ; 100^2.

Если извлечь арифметические квадратные корни из каждого из этих чисел, то получатся соответственно числа

1; 2; 3; . . . ; 100.

Мы видим, что среди больших натуральных чисел очень редко попадаются квадраты натуральных чисел.

Теорема. *Если натуральное число не есть квадрат некоторого натурального числа, то оно есть квадрат иррационального числа.*

Доказательство. Пусть N – натуральное число, не являющееся квадратом натурального числа. Предположим, что $\sqrt{N}$ есть число рациональное, т.е.

$$\sqrt{N} = \frac{p}{q}, \tag{1}$$

где p и q – натуральные числа. Будем считать, что дробь несократимая, иначе мы предварительно ее сократили бы. После возведения равенства (1) в квадрат получим

$$N = \frac{p^2}{q^2}. \tag{2}$$

Если здесь $q = 1$, то $N = p^2$, т.е. N – квадрат натурального числа, что противоречит условию. Если же $q > 1$, то левая часть равенства (2) есть натуральное число, а правая – несократимая дробь, что невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно, т.е. $\sqrt{N}$ есть число иррациональное. Теорема доказана.

Таким образом, квадратные корни

$$\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \sqrt{5};\ \sqrt{6};\ \sqrt{7};\ \sqrt{8};\ \sqrt{10};\ \sqrt{11};\ \sqrt{12};\ldots$$

есть иррациональные числа.

Вопросы

1. Может ли быть рациональным числом квадратный корень из простого числа?
2. Может ли быть рациональным числом квадратный корень из натурального числа?

Упражнения

1. Доказать иррациональность следующих чисел:
а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt{11}$.
2. Доказать иррациональность следующих чисел:
а) $\sqrt{80}$; б) $\sqrt{972}$; в) $\sqrt{1152}$.

4. Приближенное вычисление квадратных корней. Мы знаем, что $\sqrt{2}$ есть иррациональное число. Следовательно, его десятичное разложение

$$\sqrt{2} = a_0, a_1 a_2 \ldots$$

бесконечное непериодическое.

Из неравенства

$$1 < 2 < 4,$$

как показано в п. 2, следует, что

$$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}, \text{ т.е. } 1 < \sqrt{2} < 2.$$

Значит,

$$a_0 = 1.$$

Будем теперь искать a_1. Для этого рассмотрим числа

$$1{,}0;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ \ldots;\ 1{,}9;\ 2{,}0.$$

Где-то между ними находится число $\sqrt{2}$. Чтобы узнать, между какими из них, будем последовательно возводить их в квадрат. Имеем

$$1^2 = 1;\quad 1{,}1^2 = 1{,}21;\quad 1{,}2^2 = 1{,}44;$$

$$1{,}3^2 = 1{,}69;\quad 1{,}4^2 = 1{,}96;\quad 1{,}5^2 = 2{,}25.$$

Дальше вычислять не надо: мы видим, что

$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2,$$

или

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5.$$

Это показывает, что

$$a_1 = 4.$$

Чтобы найти a_2, придется рассмотреть квадраты чисел

$$1{,}40^2 = 1{,}96; \quad 1{,}41^2 = 1{,}9881; \quad 1{,}42^2 = 2{,}0164.$$

Мы видим, что

$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2,$$

т.е.

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42.$$

Поэтому

$$a_2 = 1.$$

Итак, мы нашли целую часть и первые две цифры после запятой в десятичном разложении $\sqrt{2}$, или приближенное значение $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41,$$

с недостатком с точностью до второго знака после запятой. Продолжая этот процесс, мы будем находить приближенные значения $\sqrt{2}$ с тем количеством цифр после запятой, которое нам понадобится. Другими словами, продолжая этот процесс, мы вычислим $\sqrt{2}$ с точностью до любого необходимого нам знака после запятой. Этот процесс можно применить к приближенному вычислению арифметического квадратного корня из любого натурального числа, не являющегося квадратом натурального числа.

Но на практике такие вычисления не делают. Существуют подробные таблицы для приближенных значений квадратных корней из натуральных чисел.

Кроме того, стали получать все большее распространение микрокалькуляторы, с помощью которых можно моментально узнать, чему приближенно равен квадратный корень из данного натурального числа.

Пример. Вычислить с помощью микрокалькулятора $\sqrt{135{,}17}$.
Нажимаем на клавиши

$\boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{7}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$

получаем на табло число 11,626263.

Ответ, как видим, дается с точностью до шестого знака после запятой.

Ответ. $\sqrt{135{,}17} \approx 11{,}626263$.

Вопросы

1. Как приближенно вычисляются корни квадратные из натуральных чисел?
2. Что значит "вычислить с точностью до седьмого знака после запятой $\sqrt{N}$, где N – простое число"?

Упражнения

1. Вычислить с точностью до третьего знака после запятой числа:
а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{7}$

и сверить результаты с таблицей квадратных корней.

2. Вычислить с точностью до пятого знака после запятой число $\sqrt{2}$.

5. Свойства арифметических квадратных корней.

Теорема. *Пусть a, b и c – любые неотрицательные числа. Тогда справедливы равенства*

$$(\sqrt{a})^2 = a; \tag{1}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}; \tag{2}$$

$$\sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}, \quad c \neq 0. \tag{3}$$

Для любого действительного числа a справедливо равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|. \tag{4}$$

Доказательство. Равенство (1) верно по определению, ведь $\sqrt{a}$ для неотрицательного числа a есть число, квадрат которого равен a.

Равенство (2) говорит, что *корень из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел.*

Заметим, что в этой формулировке мы для краткости вместо слов "арифметический квадратный корень" написали просто "корень".

Левая и правая части равенства (2) – неотрицательные числа, и их квадраты равны одному и тому же числу ab:

$$(\sqrt{ab})^2 = ab;$$

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab.$$

Но тогда, как мы знаем из п. 2, и сами числа равны.

Равенство (3) говорит, что *корень из частного от деления неотрицательного числа на положительное равен частному корней из этих чисел.*

Равенство (3) доказывается так же, как равенство (2). Возводим в квадрат его левую и правую части:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 = \frac{a}{c};$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{c})^2} = \frac{a}{c}.$$

Так как квадраты чисел $\sqrt{\frac{a}{c}}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$ равны, то левая часть (3) равна правой.

Квадрат любого действительного числа неотрицателен. Поэтому в левой части равенства (4) действительно записан арифметический корень из неотрицательного числа.

Один из квадратных корней из a^2 равен a, а другой равен $-a$, но тогда арифметическое значение корня квадратного из a^2 равно $|a|$. Равенство (4) доказано.

Теорема доказана.

Равенства (1)–(4) помогают упрощать числовые выражения, содержащие квадратные корни.

Пример 1. $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

Пример 2. $\sqrt{\frac{27}{25}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 3}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}}\sqrt{\frac{3}{1}} = \frac{3}{5}\sqrt{3}$.

Пример 3. $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7}) = (\sqrt{11})^2 - (\sqrt{7})^2 =$
$= 11 - 7 = 4$.

Пример 4. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{8 \cdot 32} = \sqrt{16^2} = 16$.

Пример 5. $(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2}) =$
$= (2\sqrt{4}\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{2}\sqrt{36} + \sqrt{4}\sqrt{5} - 4\sqrt{2}) =$
$= (4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2}) =$
$= (3\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) = 6(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) =$
$= 6[(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2] = 6(5 - 2) = 18$.

Вопросы

1. Чему равно произведение квадратных корней из неотрицательных чисел?
2. Чему равен $\sqrt{a^2}$ для положительного числа a?
3. Чему равно частное квадратных корней из положительных чисел?
4. Перечислите основные свойства арифметических квадратных корней.
5. Если $a < 0$, то является ли выражение $\sqrt{a^2}$ арифметическим квадратным корнем?

Упражнения

1. Упростить следующие числовые выражения:

а) $\sqrt{363}$; б) $\sqrt{147}$; в) $15\sqrt{1{,}04} - \frac{3}{5}\sqrt{5\frac{5}{9}} + 6\sqrt{\frac{1}{18}}$;

г) $-(5\sqrt{0{,}02} - \sqrt{300})$.

2. Вычислить:

а) $2(\sqrt{252} - \sqrt{175})(\sqrt{112} - \sqrt{63} - \sqrt{28})$; б) $(\sqrt{6} - 2\sqrt{15})\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{20}$.

3. Доказать, что для любого действительного числа a и любого неотрицательного числа b справедливо равенство

$$\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}.$$

4. Доказать, что для любого действительного числа a и любого положительного числа b справедливо равенство

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

Алгебра оперирует с буквенными выражениями. Буква в алгебре часто означает произвольное число, принадлежащее к некоторому множеству чисел. Отсюда небольшой шаг к тому, чтобы под буквой в алгебре понимать переменную величину, пробегающую некоторое множество чисел. Величины, связанные между собой, например, при помощи алгебраического равенства, определяют функцию.

Мы уже отмечали, что определение функции, данное в этом пособии, принадлежит великому русскому математику Н.И. Лобачевскому (1792–1856) и немецкому математику Л. Дирихле (1805–1859).

Н.И. Лобачевский был профессор и ректор Казанского университета. Мы называем его великим математиком за его важнейшие труды в области геометрии. Он создал новую геометрию, носящую теперь его имя. Однако Н.И. Лобачевский интересовался не только геометрией, но внес также существенный вклад в математический анализ. Отвечая на вопрос, что такое функция, он дал следующее ее определение:

"Это общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано аналитическим выражением, или условием, которое подает средства испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной.

Обширный вид теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одно с другим в связи, принимать как бы данными вместе".

Система координат дает возможность изобразить функцию графически – в виде линии. Но и, обратно, может оказаться, что линия, изображенная в системе координат, есть график некоторой функции. Однако тогда ее изучение может быть сведено к изучению соответствующей функции. Таким путем мы изучали прямую, параболу и в дальнейшем будем изучать другие линии.

Французский математик и философ Р. Декарт (1596–1650) впервые применил метод координат к изучению геометрических вопросов. Это привело к созданию новой науки – аналитической геометрии. Например, графические методы решения линейных уравнений относятся к аналитической геометрии.

Слово "координаты" составлено из двух латинских слов: *co* (*cum*) – приставка, означающая "совместно", и *ordinatus*, что значит "упорядоченный", "определенный". Значит, координаты – это заданные совместно числа, которые определяют положения точки на плоскости.

Еще ученые Вавилона (более 4000 лет назад) умели находить приближенное значение квадратного корня из любого натурального числа. Правило, применявшееся в Вавилоне, таково:

чтобы извлечь корень из натурального числа c, его разлагают на сумму $a^2 + b$ (число a должно быть наибольшим таким, что $a^2 < c$), тогда квадратный корень из c приближенно вычисляют по формуле

$$\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Например,

$$\sqrt{1700} = \sqrt{40^2 + 100} \approx 40 + \frac{100}{2 \cdot 40} = 40 + \frac{5}{4} = 41\frac{1}{4}.$$

Грекам был известен вавилонский метод приближенного нахождения квадратного корня. Например, у Герона Александрийского (ок. 1 в.) написано

$$\sqrt{160} = \sqrt{144 + 16} \approx 12 + \frac{16}{2 \cdot 12} = 12\frac{2}{3}.$$

ГЛАВА 4

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 14. Квадратные уравнения

1. Квадратный трехчлен. Многочлен вида

$$ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

где a, b, c — данные числа и $a \neq 0$, называется *квадратным трехчленом.* Число

$$D = b^2 - 4ac$$

называется *дискриминантом квадратного трехчлена* (1).

Теорема 1. *Справедлива формула*

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right]. \tag{2}$$

Доказательство. Вынося за скобки число a (по условию отличное от нуля) и выделяя в скобках полный квадрат, получаем

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right].$$

Отметим, что *равенство* (2) *есть тождество*, ибо оно превращается в верное числовое равенство для каждого числового значения x.

Пример 1. $2x^2 + 4x + 34 =$

$= 2(x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 17) = 2[(x + 1)^2 + 16]$.

Пример 2. $3x^2 + 18x + 27 =$

$= 3(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) = 3(x + 3)^2$.

Пример 3. $2x^2 - 4x - 16 =$

$= 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 8) = 2[(x + 1)^2 - 9]$.

Теорема 2. *Если дискриминант квадратного трехчлена положителен, то этот квадратный трехчлен разлагается на множители*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{3}$$

где

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}. \tag{4}$$

Доказательство. В теореме 1 показано, что справедливо равенство (2).

Так как $D > 0$, то существует квадратный корень из D и выполняется равенство

$$\frac{D}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2.$$

Следовательно,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right]. \tag{5}$$

В квадратных скобках в правой части равенства (5) записана разность квадратов. Применяя формулу разности квадратов, получаем

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right] =$$

$$= a\left[x - \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\right].$$

Но тогда, если обозначить

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a},$$

получим требуемое разложение (3).

Отметим, что *равенство* (3) *есть тождество*, ибо оно превращается в верное числовое равенство для каждого числового значения x.

Множители $x - x_1$ и $x - x_2$ называют *линейными множителями*, поэтому разложение (3) часто называют *разложением квадратного трехчлена на линейные множители.*

Пример 4. Разложить на линейные множители квадратный трехчлен

$$2x^2 - 3x + 1. \tag{6}$$

Так как

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0,$$

то, согласно теореме 2, квадратный трехчлен (6) можно разложить на линейные множители.

Вычислим числа x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\cdot 2} = 1;$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Теорема 3. *Если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то этот квадратный трехчлен разлагается на два одинаковых линейных множителя.*

Доказательство. Как показано в теореме 1, если $D = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

а это равенство и означает, что квадратный трехчлен разложен на два одинаковых линейных множителя.

Отметим, что если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, то этот квадратный трехчлен не разлагается на линейные множители (этот факт будет доказан ниже).

Итак, *квадратный трехчлен*:

1) *при положительном дискриминанте разлагается на разные линейные множители*;

2) *при дискриминанте, равном нулю, разлагается на одинаковые линейные множители*;

3) *при отрицательном дискриминанте не разлагается на линейные множители.*

Вопросы

1. Что называется: а) квадратным трехчленом; б) дискриминантом квадратного трехчлена?

2. Приведите примеры квадратных трехчленов с дискриминантом: а) положительным; б) равным нулю; в) отрицательным.

3. Разлагается ли на линейные множители квадратный трехчлен, если его дискриминант: а) положителен; б) равен нулю; в) отрицателен?

4. Каким должен быть дискриминант квадратного трехчлена, чтобы он разлагался на линейные множители: а) разные; б) одинаковые?

Упражнение

Разложить на множители квадратные трехчлены, если это возможно, если нет, то указать почему:

а) $a^2 + 8x + 15$; б) $4x^2 - 4x + 1$; в) $2x^2 - 3x + 4$.

2. Понятие квадратного уравнения. *Квадратным уравнением* называется уравнение, левая часть которого есть квадратный трехчлен, а правая — нуль.

Квадратное уравнение называют также *уравнением второй степени.*

Следующие уравнения:

$$2x^2 - 3x - 7 = 0; \quad 2x^2 - 3 = 0; \quad x^2 - 4x = 0;$$

$$-x^2 + 11 = 0; \quad -5x^2 + 3x + 5 = 0$$

могут служить примерами квадратных уравнений.

Общее квадратное уравнение имеет вид

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

где a, b, c — данные числа и $a \neq 0$. Число a называется коэффициентом при x^2, число b — коэффициентом при x, число c — свободным членом уравнения (1). Выражения ax^2, bx и c называются членами уравнения (1). Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом уравнения* (1).

Так, в уравнении

$$2x^2 - 3x - 7 = 0$$

число 2 — коэффициент при x^2, -3 — коэффициент при x, -7 — свободный член; в уравнении

$$x^2 - 3 = 0$$

число 1 — коэффициент при x^2, 0 — коэффициент при x, -3 — свободный член.

Напомним, что *корнем* (*или решением*) *уравнения с неизвестным* x называется число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство.

Например, число 0 является корнем уравнения

$$2x^2 - 7x = 0,$$

ибо если подставить 0 вместо x, то получим верное числовое равенство

$$2 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 = 0.$$

Решить уравнение — значит найти все его корни или показать, что их нет. В следующих пунктах будет показано, как надо решать квадратное уравнение, т.е. как находить его корни.

В будущем будут введены так называемые комплексные числа. Тогда мы увидим, что уравнения, которые мы рассматриваем, всегда имеют корни. В одних случаях они являются действительными числами, в других — комплексными. Но сейчас речь о комплексных числах не идет, и мы будем говорить, что данное уравнение не имеет корней, если оно не имеет действительных корней.

При решении квадратных уравнений приходится умножать или делить обе части уравнения на не равное нулю число, переносить члены из одной части уравнения в другую, применять формулы сокращенного умножения. В результате будет получаться уравнение, равносильное прежнему, т.е. уравнение, имеющее те и только те корни, что и прежнее уравнение. Доказательство этих утверждений такое же, как для линейных уравнений.

Вопросы

1. Какое уравнение называется квадратным?
2. Какой вид имеет общее квадратное уравнение?
3. Что называется членами уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?
4. Что называется свободным членом уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?
5. Что называется дискриминантом уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?
6. Что называется корнем уравнения?
7. Что значит решить уравнение?
8. Какие уравнения называются равносильными?

Упражнения

1. Какие из следующих уравнений являются квадратными:
а) $x^2 + 4x - 5 = 0$; б) $x^2 = 0$;
в) $2x^2 + 1 = 0$; г) $4x - 5 = 0$?

2. Является ли число $-\dfrac{9}{16}$ корнем уравнения:
а) $2x^2 - 3x + 6 = 0$; б) $16x^2 + 25x + 9 = 0$?

3. Равносильны ли следующие уравнения:
а) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ и $x^2 - 2x + 3 = 0$;
б) $x^2 - 4x + 1 = 0$ и $x^2 + 1 = 4x$;
в) $x^2 - 4 = 0$ и $x - 2 = 0$?

3. Неполные квадратные уравнения. Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

называется *неполным*, если у него $b = 0$ или $c = 0$. В этом пункте рассматриваются решения неполных квадратных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 = 0. \tag{1}$$

Существует только одно число 0, квадрат которого равен 0. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень $x_0 = 0$.

Неполное квадратное уравнение, у которого $b = c = 0$, т.е. уравнение

$$ax^2 = 0 \quad (a \neq 0),$$

равносильно уравнению (1) и, следовательно, также имеет единственный корень $x_0 = 0$.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2 - 5 = 0. \tag{2}$$

Так как $x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$, то уравнение (2) можно записать в виде

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0. \tag{3}$$

Это уравнение, очевидно, имеет корни $x_1 = \sqrt{5}$ и $x_2 = -\sqrt{5}$. Других корней оно не имеет, ибо если подставить в его левую часть вместо x любое число, отличное от $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$, то получится число, не равное 0.

Таким образом, уравнение (2) имеет два корня:

$$x_1 = \sqrt{5} \text{ и } x_2 = -\sqrt{5}$$

и других корней не имеет.

Пример 3. Решить уравнение

$$x^2 + 7 = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что это уравнение не имеет корней. Ведь квадрат любого действительного числа x_0 неотрицателен, и, следовательно, $x_0^2 + 7$ есть положительное число. Другими словами, никакое действительное число x_0 не может быть корнем уравнения (4). Мы решили уравнение (4), а именно показали, что оно не имеет действительных корней.

Неполное квадратное уравнение, у которого $b = 0$, имеет вид

$$ax^2 + c = 0 \quad (a \neq 0). \tag{5}$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0. \tag{6}$$

Ясно, что если $\frac{c}{a}$ есть число положительное, то, как и в примере 3, уравнение (6), а значит, и уравнение (5) не имеют корней.

Пусть теперь число $\frac{c}{a}$ отрицательное. Уравнение (6) можно записать в виде

$$x^2 - \left(-\frac{c}{a}\right) = 0. \tag{7}$$

Так как число $-\frac{c}{a}$ положительное, то уравнение (7) можно записать в виде

$$\left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0. \tag{8}$$

Рассуждая, как в примере 2, получим, что уравнение (8), а значит, и уравнение (5) имеют два корня:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

и других корней не имеют.

При $c = 0$ уравнение (5), как мы знаем, имеет единственный корень $x = 0$.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^2 - 3x = 0. \tag{9}$$

Перепишем уравнение (9) в виде

$$x(x-3) = 0. \tag{10}$$

Это уравнение имеет, очевидно, корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Других корней оно не имеет, ибо если в его левую часть подставить вместо x любое число, отличное от 0 и 3, то получится число, не равное 0.

Неполное квадратное уравнение, у которого $c = 0$, $b \neq 0$, имеет вид

$$ax^2 + bx = 0 \quad (a \neq 0, \ b \neq 0). \tag{11}$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x^2 + \frac{b}{a} x = 0. \tag{12}$$

Так же как в примере 4, показывается, что уравнение (12), а значит, и уравнение (11) имеют два корня:

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

и других корней не имеют.

Приведенные примеры показывают, что квадратное уравнение может иметь один или два корня, а может и не иметь корней.

В следующем пункте мы увидим, что приведенные примеры характерны: любое квадратное уравнение имеет либо два корня, либо один, либо не имеет корней.

Вопросы

1. Какое уравнение называется неполным квадратным уравнением?
2. Сколько корней может иметь неполное квадратное уравнение

$ax^2 + c = 0 \quad (a \neq 0, \ c \neq 0)$?

3. Сколько корней имеет неполное квадратное уравнение

$ax^2 + bx = 0 \quad (a \neq 0, \ b \neq 0)$?

Упражнение

Решить уравнения:

а) $-3x^2 = 0$; б) $2x^2 + 3 = 0$; в) $7x^2 - 1 = 0$;

г) $8x^2 + 12 = 0$; д) $3x^2 - 5 = 0$; е) $3x^2 - 4x = 0$;

ж) $x^2 + 2x = 0$.

4. Решение общего квадратного уравнения. В этом пункте мы рассмотрим решение общего квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0). \tag{1}$$

Теорема 1. *Если дискриминант квадратного уравнения* (1) *положителен, то оно имеет два различных корня:*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

и других корней не имеет.

Доказательство. Как показано в п. 1, если $D > 0$, то справедливо тождество

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где числа x_1 и x_2 определяются равенствами (2).

Поэтому уравнение (1) можно записать в виде

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0. \tag{3}$$

Очевидно, что уравнение (3) имеет корни x_1 и x_2 и других корней не имеет, потому что если подставить в его левую часть вместо x любое число, отличное от x_1 и x_2, то получится число, отличное от нуля.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если дискриминант квадратного уравнения* (1) *равен нулю, то оно имеет один корень*

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

и других корней не имеет.

Доказательство. Как показано в п. 1, если $D = 0$, то справедливо тождество

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2,$$

где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Поэтому уравнение (1) можно записать в виде

$$a(x - x_0)^2 = 0 \quad (a \neq 0). \tag{4}$$

Очевидно, что уравнение (4) имеет корень x_0 и других корней не имеет, потому что если подставить в его левую часть вместо x любое число, отличное от x_0, то получится число, отличное от нуля.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если дискриминант квадратного уравнения* (1) *отрицателен, то оно не имеет корней.*

Доказательство. Как показано в п. 1, справедливо тождество

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right].$$

Поэтому уравнение (1) можно записать в виде

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]=0 \quad (a\neq 0). \tag{5}$$

Так как $a\neq 0$, то уравнение (5) равносильно уравнению

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0. \tag{6}$$

Уравнение (6) равносильно уравнению

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}. \tag{7}$$

Уравнение (7) при $D<0$ не имеет корней, потому что квадрат действительного числа не может быть отрицательным числом. Следовательно, при $D<0$ уравнение (1) не имеет корней.

Итак, *квадратное уравнение* (1):

1) *имеет два различных корня, если его дискриминант положителен;*
2) *имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю;*
3) *не имеет корней, если его дискриминант отрицателен.*

Замечание 1. Если дискриминант уравнения (1) положителен, то формулы (2) для корней этого уравнения часто записывают в виде одной формулы

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{8}$$

Замечание 2. Если дискриминант уравнения (1) равен нулю, то формула (8) остается справедливой. В этом случае она дает единственный корень

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

или, как говорят, два совпадающих корня:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

Вот несколько примеров.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$3x^2 + 2x - 2 = 0. \tag{9}$$

Вычисляем дискриминант уравнения (9):

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 28 > 0.$$

Следовательно, уравнение (9) имеет два корня, которые вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

О т в е т. Уравнение (9) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}.$$

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$25x^2 - 30x + 9 = 0. \tag{10}$$

Вычисляем дискриминант уравнения (10):

$$D = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9 = 0.$$

Следовательно, уравнение (10) имеет единственный корень, который можно вычислить по формуле

$$x_0 = x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{30 \pm 0}{2 \cdot 25} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}.$$

О т в е т. Уравнение (10) имеет единственный корень $\frac{3}{5}$, или, что то же самое, два совпадающих корня:

$$x_1 = x_2 = \frac{3}{5}.$$

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$2x^2 - 4x + 3 = 0. \tag{11}$$

Вычисляем дискриминант уравнения (11):

$$D = -8 < 0.$$

Следовательно, уравнение (11) не имеет корней.

О т в е т. Уравнение (11) не имеет корней.

С л е д с т в и е. *Если дискриминант квадратного трехчлена*

$$ax^2 + bx + c \tag{12}$$

отрицателем, то этот трехчлен не разлагается на линейные множители.

Доказательство. Предположим, что у квадратного трехчлена (12) дискриминант отрицателен, но существуют два действительных числа x_1 и x_2 таких, что справедливо тождество

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (a \neq 0).$$

Тогда из этого тождества следовало бы, что квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

имеет корни x_1 и x_2, но это противоречит теореме 3.

Следовательно, при $D < 0$ квадратный трехчлен (12) не разлагается на линейные множители.

Вопросы

1. Сколько корней имеет квадратное уравнение, если его дискриминант:
а) отрицателен; б) положителен; в) равен нулю?
2. По какой формуле можно находить корни квадратного уравнения, если его дискриминант неотрицателен?

Упражнение

Решить уравнения:

а) $3x^2 - 7x + 4 = 0$; б) $x^2 - 7x + 6 = 0$;

в) $2x^2 - 7x + 6 = 0$; г) $25x^2 + 30x + 9 = 0$.

5. **Приведенное квадратное уравнение.** Квадратное уравнение с коэффициентом при x^2, равным 1, называется *приведенным уравнением.*

Следующие уравнения:

$$x^2 - 2x + 7 = 0; \quad x^2 = 0; \quad x^2 - 5 = 0; \quad x^2 - 3x = 0$$

могут служить примерами приведенных квадратных уравнений.

Приведенное квадратное уравнение в общем виде обычно записывают следующим образом:

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1}$$

где p и q — данные числа. Число p есть коэффициент при x, а q — свободный член.

Таким образом, уравнение (1) можно рассматривать как частный случай общего квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2}$$

где

$$a = 1, \quad b = p, \quad c = q.$$

Дискриминант уравнения (1) равен

$$D = b^2 - 4ac = p^2 - 4q. \tag{3}$$

Пусть

$$D > 0.$$

Тогда, как мы знаем, уравнение (1) имеет два корня, вычисляемых по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

которую обычно записывают в виде

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{4}$$

Эта формула дает также два совпадающих корня для $D = 0$:

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}. \tag{5}$$

Если же $D < 0$, то, как мы знаем, уравнение (1) не имеет действительных корней.

Обычно в случае приведенного уравнения (1) вместо дискриминанта D рассматривается выражение

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

имеющее тот же знак, что и D.

Мы показали, что:

1) *если* $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, *то уравнение* (1) *имеет два корня, вычисляемые по формуле* (4);

2) *если* $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, *то уравнение* (1) *имеет два совпадающих корня, вычисляемые по той же формуле* (4), *или, что то же самое, по формуле* (5);

3) *если* $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, *то уравнение* (1) *не имеет корней.*

З а м е ч а н и е. Формула (4) удобна, когда p – четное число.

П р и м е р. Решить уравнение

$$x^2 - 8x + 7 = 0. \tag{6}$$

Вычисляем:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-4)^2 - 7 = 9 > 0;$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 4 \pm \sqrt{9} = 4 \pm 3.$$

Следовательно, уравнение (6) имеет два корня: $x_1 = 7$, $x_2 = 1$.

Вопросы

1. Какое уравнение называется приведенным квадратным уравнением?

2. По какой формуле можно находить корни приведенного квадратного уравнения, если его дискриминант неотрицателен?

Упражнение

Решить уравнения:

а) $x^2 - 8x - 9 = 0$; б) $x^2 - 6x + 9 = 0$; в) $x^2 - 16x + 65 = 0$.

6. Теорема Виета. Пусть дано приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1}$$

Теорема Виета. *Если приведенное квадратное уравнение* (1) *имеет неотрицательный дискриминант, то сумма корней этого уравнения равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.*

Иначе говоря, если x_1 и x_2 – корни уравнения (1), то

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q. \tag{2}$$

Формулы (2) называются *формулами Виета.*

Замечание 1. Подчеркнем, что здесь при $D = 0$ подразумевается, что уравнение (1) имеет два совпадающих корня.

Доказательство теоремы Виета. Корни уравнения (1) при неотрицательном дискриминанте вычисляются по формулам

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{3}$$

Сложив равенства (3), получим

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = -p.$$

Умножив равенства (3) друг на друга и применив формулу разности квадратов, получим

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) =$$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Теорема Виета доказана.

Справедлива также теорема, обратная теореме Виета:

Если для чисел x_1, x_2, p, q справедливы формулы (2), *то x_1 и x_2 – корни уравнения* (1).

В самом деле,

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + px + q.$$

З а м е ч а н и е 2. Теорему Виета можно сформулировать и для общего квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0), \tag{4}$$

используя его равносильность приведенному уравнению

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Если общее квадратное уравнение (4) имеет неотрицательный дискриминант и если x_1 и x_2 – корни уравнения (4), то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема Виета и теорема, обратная ей, часто применяются при решении различных задач.

П р и м е р 1. Написать приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа 1 и –3. Иначе говоря, надо найти числа p и q такие, чтобы уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

имело корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$.

По формулам Виета

$$-p = x_1 + x_2 = -2; \quad q = x_1 x_2 = -3.$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

П р и м е р 2. Не решая уравнения

$$x^2 - 364x + 497 = 0, \tag{5}$$

определить знаки его корней.

Дискриминант этого уравнения положителем, так как

$$\frac{D}{4} = 182^2 - 497 > 0.$$

Следовательно, уравнение имеет два корня: x_1 и x_2. По теореме Виета

$$x_1 \cdot x_2 = 497,$$

т.е. произведение корней положительно. Следовательно, корни имеют одинаковые знаки: либо $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, либо $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$.

Но по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = 364,$$

т.е. сумма корней также положительна и оба слагаемые положительны.

Следовательно, уравнение (5) имеет два положительных корня.

Вопросы

1. Как формулируется теорема Виета?
2. Что называется формулами Виета?

Упражнения

1. Написать приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) $x_1 = 0, \quad x_2 = -1$; б) $x_1 = 4, \quad x_2 = -\frac{3}{4}$;

в) $x_1 = -1 + \sqrt{7}, \quad x_2 = -1 - \sqrt{7}$.

2. Не вычисляя, определить знаки корней квадратного уравнения:

а) $x^2 + 1000x + 2139 = 0$; б) $x^2 - 200x - 39 = 0$.

7. Применение квадратных уравнений к решению задач.

Задача 1. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел больше произведения этих чисел на 57. Найти эти числа.

Решение. Меньшее из искомых чисел обозначим x, тогда большее будет $x + 1$. По условию задачи

$$x^2 + (x + 1)^2 = x(x + 1) + 57. \qquad (1)$$

Таким образом, искомое число x должно быть корнем уравнения (1). Перенеся все члены уравнения (1) в левую часть, после приведения подобных членов получим уравнение

$$x^2 + x - 56 = 0, \qquad (2)$$

равносильное уравнению (1). Так как дискриминант $D = 225 > 0$, то корни квадратного уравнения (2) вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-1 \pm 15}{2}.$$

Следовательно, уравнение (2) и равносильное ему уравнение (1) имеют корни

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -8. \qquad (3)$$

Так как нам надо найти натуральное число x, удовлетворяющее уравнению (1), то из этих двух корней (3) условию задачи удовлетворяет лишь $x_1 = 7$.

Ответ. 7 и 8.

Задача 2. Предмет первоначально стоил 25 р. После двух последовательных снижений цен он стал стоить 18 р. При этом процент снижения во второй раз был в два раза больше, чем процент снижения в первый раз. На сколько процентов снижалась цена каждый раз?

Р е ш е н и е. Пусть в первый раз цена предмета снизилась на x %. Это значит, что после первого снижения цена предмета стала меньше на $\frac{x}{100}$ частей первоначальной стоимости, т.е. предмет стал стоить $25\left(1 - \frac{x}{100}\right)$.

Во второй раз цена предмета снизилась на $2x$ %. Это значит, что после второго снижения цена предмета стала меньше на $\frac{2x}{100}$ частей ее стоимости после первого снижения, т.е. предмет стал стоить $25\left(1 - \frac{x}{100}\right) \times$ $\times \left(1 - \frac{2x}{100}\right)$. По условию задачи после двух снижений предмет стал стоить 18 р. Следовательно, искомое число должно быть корнем уравнения

$$25\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{2x}{100}\right) = 18. \qquad (4)$$

Перенесем все члены уравнения (4) в левую часть и, раскрыв скобки, получим уравнение

$$\frac{x^2}{200} - \frac{3x}{4} + 7 = 0. \qquad (5)$$

Умножая это уравнение на 200, получаем уравнение

$$x^2 - 150x + 1400 = 0. \qquad (6)$$

Решая уравнение (6), находим его корни: $x_1 = 10$ и $x_2 = 140$. Так как уравнения (5) и (4), (6) и (5) равносильны, то уравнение (4) имеет те же корни $x_1 = 10$ и $x_2 = 140$. Поскольку снизить цену предмета на 140 % нельзя, то условию задачи удовлетворяет лишь $x_1 = 10$.

О т в е т. Цену снижали первый раз на 10 %, а второй раз на 20 %.

У п р а ж н е н и я

1. Произведение двух последовательных натуральных чисел больше их суммы на 109. Найти эти числа.

2. Найти периметр прямоугольника, длина которого на 4 см больше ширины, а площадь равна 60 см^2.

8. Комплексные числа. Рассмотрим уравнение

$$x^2 - 2x + 2 = 0. \qquad (1)$$

Хотя оно имеет отрицательный дискриминант ($D = -4$), напишем чисто формально формулы для его корней:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1}. \qquad (2)$$

До сих пор мы считали, что такие выражения не имеют смысла, т.е. не являются действительными числами, потому что $\sqrt{-1}$ не есть действительное число.

Однако этот символ оказался очень полезным в математике. Его обозначают буквой i:

$$\sqrt{-1} = i$$

и называют *мнимой единицей.*

С помощью мнимой единицы i и действительных чисел можно составлять буквенные выражения.

Например,

$$1 + i; \quad \frac{2+i}{i-1}; \quad \frac{2-i}{3}; \quad i^2 + i^3.$$

Для таких буквенных выражений создано счисление, подчиняющееся следующему правилу: эти выражения преобразуются как обычные буквенные выражения; однако при этом считают, что i в квадрате равно -1:

$$i^2 = -1.$$

Например,

$$1 - 3i + 5i = 1 + 2i; \qquad i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i;$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1; \qquad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i;$$

$$(1+i):(1-i) = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{(1+i)^2}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1+i)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 2i + i^2) = \frac{1}{2}(1 + 2i - 1) = i.$$

Выражение

$$a + bi,$$

где a и b – действительные числа, называется *комплексным числом.*

Действительное число a есть частный случай комплексного числа $a + bi$ при $b = 0$:

$$a + 0 \cdot i = a.$$

Выражение bi, где b – действительное число, называется *мнимым числом.* Например,

$$3i; \quad -i; \quad 7i$$

есть мнимые числа. Мнимое число bi есть частный случай комплексного числа $a + bi$ при $a = 0$:

$$0 + bi = bi.$$

Наконец, в этом счислении считают, что

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7}\sqrt{-1} = \sqrt{7}\cdot i;$$

$$\sqrt{-8} = \sqrt{8}\sqrt{-1} = 2\sqrt{2}i$$

и т.д.

Важно отметить, что любая арифметическая комбинация из комплексных чисел есть комплексное число.

Например,

$$(2+3i)-(5-7i) = -3+10i;$$

$$(2+3i)(1-i) = 2+3i-2i-3i^2 = 5+i;$$

$$\frac{2-i}{3+2i} = \frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-3i-4i+2i^2}{9-4i^2} =$$

$$= \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i.$$

Итак, выражения $1 \pm \sqrt{-1}$ представляют собой комплексные числа: $x_1 = 1+i, \quad x_2 = 1-i.$

Легко проверить, применяя изложенные правила, что комплексные числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения (1).

Например,

$$x_1^2 - 2x_1 + 2 = (1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2 = 0.$$

С введением комплексных чисел можно утверждать, что любое квадратное уравнение имеет два корня: действительные, если дискриминант положительный; действительные совпадающие, если дискриминант равен нулю; комплексные, если дискриминант отрицательный.

Таким образом, квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{3}$$

имеет два корня, вычисляемые по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{4}$$

При этом, если $b^2 - 4ac > 0$, эти корни действительные различные; если $b^2 - 4ac = 0$, то эти корни действительные совпавшие.

В случае, если $b^2 - 4ac < 0$, эти формулы можно записать так:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|b^2-4ac|}}{2a}, \tag{5}$$

где $\sqrt{|b^2 - 4ac|}$ – арифметическое значение квадратного корня из положительного числа $|b^2 - 4ac|$.

Итак, при $b^2 - 4ac < 0$ корни уравнения (3) комплексные различные.

П р и м е р. Решить уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0. \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) ищем по формулам (4):

$$x_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = +1 \pm 2i.$$

О т в е т. $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$.

Отметим, что теорема Виета остается верной и в случае, когда дискриминант квадратного уравнения отрицателен, только в этом случае корни x_1 и x_2 будут комплексными числами.

В о п р о с ы

1. Как принято обозначать символ $\sqrt{-1}$?
2. Как называется символ i?
3. Что называется комплексным числом?
4. По каким правилам выполняются действия с комплексными числами?

У п р а ж н е н и я

1. Выполнить указанные действия:

а) $(2 - 3i) + (5 + i)$; б) $(7 - 2i) - (4 - 3i)$;

в) $(3 - 5i)(4 - 6i)$; г) $(4 + i) : (3 - i)$.

2. Решить квадратное уравнение:

а) $2x^2 - 5x + 5 = 0$; б) $x^2 + 6x + 10 = 0$.

§ 15. Рациональные уравнения

1. Понятие рационального уравнения. Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x, называется *рациональным уравнением с неизвестным x.*

Например, следующие уравнения являются рациональными:

$$5x^6 - 9x^5 + 4x^2 - 3x + 1 = 0;$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 + x;$$

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{5x^2 - 2}{x^4 + 3}.$$

Напомним еще раз, что корнем (или решением) уравнения с неизвестным x называется число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство. Решить уравнение — значит найти все его корни или показать, что их нет.

При решении рациональных уравнений приходится умножать или делить обе части уравнения на не равное нулю число, переносить члены уравнения из одной его части в другую, применять правила сложения и вычитания алгебраических дробей. В результате будет получаться уравнение, равносильное предшествующему, т.е. уравнение, имеющее те же корни и только их.

В этом параграфе будет рассмотрено несколько типов рациональных уравнений, решение которых сводится к решению уравнений первой и второй степеней.

Вопросы

1. Какое уравнение называется рациональным с неизвестным x?
2. Что называется корнем уравнения с неизвестным x?
3. Что значит решить уравнение?
4. Какие уравнения называются равносильными?

2. Биквадратное уравнение. Уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad (1)$$

где a, b, c — данные числа и $a \neq 0$, называется *биквадратным уравнением*.

Чтобы решить уравнение (1), вводят новое неизвестное при помощи равенства

$$y = x^2. \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) превращается в квадратное уравнение

$$ay^2 + by + c = 0 \qquad (3)$$

относительно неизвестного y.

Если уравнение (3) не имеет корней, то тогда, очевидно, и данное уравнение (1) не имеет корней.

Если же уравнение (3) имеет корни, то, подставив их в равенство (2) вместо y, получим уравнения относительно x. Решения полученных уравнений, если они существуют, и являются решениями уравнения (1). Других решений уравнение (1), очевидно, не имеет.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) после замены $y = x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$y^2 - 4y + 3 = 0.$$

Так как

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 3 = 1 > 0,$$

то оно имеет два корня:

$$y_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 2 \pm 1,$$

т.е.

$$y_1 = 1 \quad \text{и} \quad y_2 = 3.$$

Подставляя эти числа вместо y в равенство (2), получаем уравнения относительно x:

$$1 = x^2 \quad \text{и} \quad 3 = x^2.$$

Решая их, получаем четыре корня уравнения (4):

$$x_1 = 1, \ x_2 = -1, \ x_3 = \sqrt{3}, \ x_4 = -\sqrt{3}.$$

Других корней уравнение (4), очевидно, не имеет.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4 - 2x^2 - 2 = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) после замены $y = x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$y^2 - 2y - 2 = 0.$$

Так как

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 3 > 0,$$

то оно имеет два корня, определяемые по формуле

$$y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3},$$

т.е.

$$y_1 = 1 + \sqrt{3}, \ y_2 = 1 - \sqrt{3}.$$

Подставляя y_1 в равенство (2) вместо y, получаем уравнение

$$1 + \sqrt{3} = x^2,$$

откуда получаем два корня уравнения (5):

$$x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}}, \qquad x_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{3}}.$$

Подставляя y_2 в равенство (2), получаем уравнение

$$1 - \sqrt{3} = x^2,$$

не имеющее корней, потому что $1 - \sqrt{3} < 0$.

Таким образом, уравнение (5) имеет два найденных выше корня x_1 и x_2 и других корней не имеет.

Пример 3. Решить уравнение

$$2x^4 - 3x^2 + 5 = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) после замены $y = x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$2y^2 - 3y + 5 = 0.$$

Его дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 40 = -31 < 0,$$

и, следовательно, оно не имеет корней. Но тогда и уравнение (6) не имеет корней.

Пример 4. Решить уравнение

$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) после замены $y = x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$9y^2 - 6y + 1 = 0$$

с дискриминантом

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0.$$

Оно имеет, таким образом, единственный корень

$$y_0 = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Решая уравнение

$$\frac{1}{3} = x^2,$$

получаем два корня уравнения (7):

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Других корней уравнение (7) не имеет.

Пример 5. Решить уравнение

$$x^4 + 10x^2 + 25 = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) после замены $y = x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$y^2 + 10y + 25 = 0,$$

для которого

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 25 - 25 = 0.$$

Оно имеет, таким образом, единственный корень

$$y_0 = -5 \pm 0 = -5.$$

Подставляя y_0 в равенство (2), получаем уравнение

$$x^2 = -5,$$

которое не имеет корней. Значит, уравнение (8) также не имеет корней.

Отметим, что уравнение $x^4 = 0$ имеет один корень $x_0 = 0$, а уравнение $x^4 - x^2 = 0$ имеет три корня: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$.

Замечание. Из рассмотренных примеров видно, что биквадратное уравнение может иметь четыре, три, два или один действительный корень, но может и не иметь корней. Биквадратное уравнение имеет, вообще говоря, четыре комплексных корня. Впрочем, бывает, что их меньше чем четыре, но в таких случаях считают, что некоторые корни совпадают.

Вопросы

1. Какое уравнение называется биквадратным уравнением?
2. Как решается биквадратное уравнение?
3. Сколько корней может иметь биквадратное уравнение?

Упражнение

Решить уравнения:

а) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$; б) $5x^4 + 8x^2 + 3 = 0$;

в) $4x^4 - 5x^2 - 6 = 0$; г) $9x^4 - 24x^2 + 16 = 0$;

д) $25x^4 + 30x^2 + 9 = 0$; е) $7x^4 - 9x^2 + 3 = 0$.

3. Уравнения, решение которых сводится к решению квадратных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$(x^2 - 5x + 7) - 2(x^2 - 5x + 7) - 3 = 0. \qquad (1)$$

Введем новую неизвестную при помощи равенства

$$y = x^2 - 5x + 7. \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) превращается в квадратное уравнение

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \qquad (3)$$

относительно неизвестного y.

Так как

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 3 = 4 > 0,$$

то уравнение (3) имеет два корня:

$$y_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 \pm 2,$$

т.е. $y_1 = 3$ и $y_2 = -1$.

Подставляя эти числа вместо y в равенство (2), получаем уравнения относительно x:

$$x^2 - 5x + 7 = 3$$

и

$$x^2 - 5x + 7 = -1.$$

Решим сначала первое из них. Оно равносильно уравнению

$$x^2 - 5x + 4 = 0, \tag{4}$$

дискриминант которого

$$D = b^2 - 4ac = 9 > 0.$$

Следовательно, уравнение (4) имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

т.е. $x_1 = 4$ и $x_2 = 1$.

Теперь решим второе уравнение. Оно равносильно уравнению

$$x^2 - 5x + 8 = 0. \tag{5}$$

Дискриминант уравнения (5)

$$D = b^2 - 4ac = -15 < 0.$$

Следовательно, уравнение (5) не имеет корней.

Таким образом, уравнение (1) имеет два найденных выше корня x_1 и x_2 и других корней не имеет.

Ответ. $x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

Пример 2. Решить уравнение

$$(x^4 + x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 3) + 2 = 0. \tag{6}$$

Введем новую неизвестную при помощи равенства

$$y = x^4 + x^2 + 1, \tag{7}$$

тогда уравнение (6) превращается в квадратное уравнение относительно неизвестного y:

$$y^2 + 2y + 2 = 0, \tag{8}$$

дискриминант которого

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 8 < 0.$$

Следовательно, уравнение (8) корней не имеет. Но тогда уравнение (6) не имеет корней.

Ответ. Уравнение (6) не имеет корней.

Упражнение

Решить уравнения:

а) $(x+2)^2 = 2(x+2)+3$;

б) $(x^2+5x-7)(2x^2+10x-11)+1=0$;

в) $(x^4+x^2+1)(x^4+x^2+2)=12$;

г) $(x^2-5x+7)^2-2(x-2)(x-3)=1$.

4. Распадающиеся уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$(x^2-5x+6)(x^2+x-2) = 0. \tag{1}$$

Если число x_0 есть корень уравнения (1), то подставляя x_0 вместо x в уравнение (1), получаем верное числовое равенство

$$(x_0^2-5x_0+6)(x_0^2+x_0-2) = 0. \tag{2}$$

Но произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Поэтому из (2) следует, что x_0 есть корень хотя бы одного из уравнений

$$x^2-5x+6 = 0 \tag{3}$$

или

$$x^2+x-2 = 0. \tag{4}$$

С другой стороны, любой корень любого из уравнений (3) или (4) есть корень уравнения (1).

Таким образом, множество всех корней уравнения (1) есть объединение множества всех корней уравнения (3) и множества всех корней уравнения (4).

Уравнение (3) имеет корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, а уравнение (4) – корни $x_3 = -2$ и $x_4 = 1$.

Следовательно, уравнение (1) имеет корни

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 1$$

и других корней не имеет.

Говорят, что *уравнение распадается на два уравнения*, если множество всех его корней есть объединение множества всех корней этих двух уравнений.

Таким образом, уравнение (1) распадается на уравнения (3) и (4).

Пример 2. Решить уравнение

$$x^3 - 1 = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) распадается на два уравнения:

$$x-1 = 0 \tag{6}$$

и

$$x^2+x+1 = 0, \tag{7}$$

потому что

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Уравнение (6) имеет, очевидно, корень $x_1 = 1$, уравнение же (7) не имеет корней.

Следовательно, уравнение (5) имеет единственный корень

$$x_1 = 1.$$

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$x^6 - 1 = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) распадается на три уравнения:

$$x - 1 = 0, \quad (9)$$

$$x + 1 = 0 \quad (10)$$

и

$$x^4 + x^2 + 1 = 0, \quad (11)$$

потому что

$$x^6 - 1 = (x^2-1)(x^4+x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^4+x^2+1).$$

Уравнения (9) и (10) соответственно имеют корни

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -1.$$

Уравнение же (11) не имеет корней. В самом деле, уравнение (11) биквадратное. Замена

$$y = x^2$$

приводит его к квадратному уравнению

$$y^2 + y + 1 = 0,$$

не имеющему корней, так как $D = b^2 - 4ac = -3 < 0$.

Следовательно, уравнение (8) имеет два корня:

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -1.$$

П р и м е р 4. Решить уравнение

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0. \quad (12)$$

Так как

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3),$$

то уравнение (12) распадается на два уравнения:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ и } x = 0.$$

Первое из них имеет два корня:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2,$$

но тогда уравнение (12) имеет три корня:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0.$$

Вопросы

1. Приведите пример распадающегося уравнения и покажите, как его решить.
2. Что значит "уравнение распадается на два уравнения"?

Упражнение

Решить уравнения:

а) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 3)(x + 1) = 0$; б) $(x^4 + x^2 - 2)(x^2 - 9) = 0$;

в) $x^2 + 5x^3 + 6x = 0$.

5. Уравнение, левая часть которого алгебраическая дробь, а правая равна нулю.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - x - 3} = 0. \tag{1}$$

Мы знаем, что корнем уравнения относительно неизвестного x называется число x_0, при подстановке которого вместо x получается верное числовое равенство. Поэтому, если x_0 есть корень уравнения (1), выражение

$$\frac{x_0^2 + 4x_0 - 21}{x_0^2 - x_0 - 3}$$

есть числовое выражение, равное нулю. Но тогда числитель этого выражения должен равняться нулю, а знаменатель не должет равняться нулю.

Таким образом, чтобы решить уравнение (1), мы должны найти корни уравнения

$$x^2 + 4x - 21 = 0 \tag{2}$$

и подставить их в знаменатель левой части уравнения (1). Те из них, которые обращают знаменатель в число, не равное нулю, являются корнями уравнения (1). Других корней равнение (1) не имеет.

Дискриминант квадратного уравнения (2) положительный, и, следовательно, оно имеет два корня, определяемые по формуле

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 21} = -2 \pm 5,$$

т.е.

$$x_1 = 3 \quad \text{и} \quad x_2 = -7.$$

Подставляя эти числа в знаменатель левой части уравнения (1), получаем

$$x_1^2 - x_1 - 3 = 9 - 3 - 3 = 3 \neq 0;$$

$$x_2^2 - x_2 - 3 = 49 + 7 - 3 = 53 \neq 0.$$

Это показывает, что числа

$$x_1 = 3 \quad \text{и} \quad x_2 = -7$$

являются корнями уравнения (1), и других корней это уравнение не имеет.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 3x} = 0. \tag{3}$$

Решим сначала уравнение

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Оно имеет два корня:

$$x_1 = 2 \quad \text{и} \quad x_2 = -1.$$

Подставляем их в знаменатель левой части уравнения (3):

$$x_1^3 - 2x_1^2 - 3x_1 = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -6 \neq 0;$$

$$x_2^3 - 2x_2^2 - 3x_2 = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 0.$$

Следовательно, уравнение (3) имеет единственный корень $x_1 = 2$, так как только при $x = 2$ знаменатель не равен нулю.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{2x - 3}{4x^4 + 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3} = 0. \tag{4}$$

Решим сначала уравнение

$$2x - 3 = 0.$$

Оно имеет единственный корень

$$x_1 = \frac{3}{2}.$$

Так как

$$4x_1^4 + 4x_1^3 - 15x_1^2 + 2x_1 - 3 = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 +$$

$$+ 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 0,$$

то уравнение (4) не имеет корней.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 3} = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) не имеет корней, потому что уравнение

$$x^2 + x + 1 = 0$$

не имеет корней.

Таким образом, чтобы решить уравнение

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \tag{6}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, надо найти корни уравнения

$$P(x) = 0$$

и подставить их в знаменатель левой части уравнения (6). Те из них, которые обращают знаменатель $Q(x)$ в число, не равное нулю, являются корнями уравнения (6). Других корней уравнение (6) не имеет.

Вопрос

Как можно решить уравнение, одна часть которого нуль, а другая алгебраическая дробь?

Упражнение

Решить уравнения:

а) $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2} = 0;$ б) $\dfrac{x^6 - 1}{x^3 - 1} = 0;$

в) $\dfrac{x^2 - 1}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3)} = 0.$

6. Рациональные уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$2 - \frac{x+1}{x-1} = 0. \tag{1}$$

Применим к левой части уравнения (1) правило вычитания алгебраических дробей:

$$2 - \frac{x+1}{x-1} = \frac{2(x-1) - (x+1)}{x-1} = \frac{x-3}{x-1}. \tag{2}$$

Для любого числа $x_0 \neq 1$ равны числовые значения левой и правой частей равенства (2).

В частности, если для некоторого числа x_0 обращается в нуль одна часть равенства (2), то для него обращается в нуль и другая его часть. А это означает, что уравнение (1) равносильно уравнению

$$\frac{x-3}{x-1} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) мы умеем решать (см. п. 4). Для этого решаем сначала уравнение

$$x - 3 = 0.$$

Оно имеет единственный корень $x_0 = 3$. При этом число $x_0 = 3$ не обращает в нуль знаменатель дроби левой части уравнения (3):

$$x_0 - 1 = 3 - 1 = 2 \neq 0.$$

Поэтому уравнение (3) имеет единственный корень $x_0 = 3$. Значит, и исходное уравнение (1) имеет единственный корень

$$x_0 = 3.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-4}{x-3} - 1. \qquad (4)$$

Перенося правую часть уравнения (4) налево, получаем уравнение

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-4}{x-3} + 1 = 0, \qquad (5)$$

равносильное уравнению (4).

Применим к левой части уравнения (5) правила сложения и вычитания алгебраических дробей:

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-4}{x-3} + 1 = \frac{(x-1)(x-3) - (x-4)(x+2) + (x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} =$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 5}{(x+2)(x-3)}.$$

Рассуждая, как в примере 1, получаем, что уравнение (5) равносильно уравнению

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x+2)(x-3)} = 0. \qquad (6)$$

Для решения уравнения (6) надо сначала решить уравнение

$$x^2 - 3x + 5 = 0.$$

Поскольку его дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0,$$

то оно не имеет корней.

Следовательно, исходное уравнение (4) не имеет корней.

Из приведенных примеров следует правило:

для решения рационального уравнения надо перенести все его члены в левую часть, затем, применяя правило сложения и вычитания алгебраи-

ческих дробей, записать левую часть как алгебраическую дробь и, наконец, решить полученное уравнение (по правилу, приведенному в предыдущем пункте).

З а м е ч а н и е. Отклонение от высказанного правила может привести к потере корней или к необоснованному приобретению лишних корней данного уравнения.

Например, если применить данное правило к уравнению

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = 1, \tag{7}$$

то получим равносильное ему уравнение

$$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0. \tag{8}$$

Оно не имеет корней. Следовательно, уравнение (7) тоже не имеет корней.

Однако если бы мы, отклоняясь от правила, сократили дробь в левой части уравнения (7) на $x - 3$, то получили бы уравнение

$$x - 2 = 1, \tag{9}$$

которое имеет корень $x = 3$. Но $x = 3$ не является корнем уравнения (7): при $x = 3$ левая часть уравнения (7) превращается в выражение, не имеющее смысла.

Следовательно, при таком "способе решения" мы приобрели лишний корень для уравнения (7).

Если же сначала будет дано уравнение (9), а мы вопреки правилу умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{x-2}{1}$ на ненулевой многочлен $x - 3$, то придем к уравнению (7), которое не имеет корней. Значит, при таком "способе решения" мы потеряли корень уравнения (9).

В о п р о с ы

1. По какому правилу решают рациональные уравнения?
2. Что может произойти при отклонении от этого правила?

У п р а ж н е н и е

Решить уравнения:

а) $\frac{1}{x^2+x+2} = \frac{1}{2x^2+3x-6}$; б) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x+2)} = 1$;

в) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$.

7. Искусственный способ решения рациональных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 + 4x - \frac{15}{x^2 + 4x} - 2 = 0. \qquad (1)$$

Если привести левую часть этого уравнения к общему знаменателю, то получим уравнение

$$\frac{x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15}{x^2 + 4x} = 0,$$

для решения которого надо сначала решить уравнение

$$x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15 = 0.$$

Но у нас нет способа для решения такого уравнения. Поэтому такой способ решения уравнения (1) не привел нас к цели – нахождению корней уравнения (1).

Применим следующий прием.

Обозначим

$$y = x^2 + 4x. \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$y - \frac{15}{y} - 2 = 0. \qquad (3)$$

Приводя левую часть уравнения (3) к общему знаменателю, получаем уравнение

$$\frac{y^2 - 2y - 15}{y} = 0, \qquad (4)$$

равносильное уравнению (3). Для решения уравнения (4) решим сначала квадратное уравнение

$$y^2 - 2y - 15 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $y_1 = 5$ и $y_2 = -3$.

Так как ни одно из этих чисел не обращает в нуль знаменатель левой части уравнения (4), то уравнение (4), а значит, и уравнение (3) имеют два корня: $y_1 = 5$ и $y_2 = -3$. Теперь для решения уравнения (1) остается решить два уравнения:

$$x^2 + 4x = 5 \quad \text{и} \quad x^2 + 4x = -3.$$

Перепишем эти уравнения так:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Каждое из этих квадратных уравнений имеет по два корня: первое $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, второе $x_3 = -1$, $x_4 = -3$.

Следовательно, уравнение (1) имеет четыре корня.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $x_3 = -1$, $x_4 = -3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2 - 5x + 7 = \frac{12}{(x-2)(x-3)}. \tag{5}$$

Поступим, как в примере 1. Замечая, что $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$, обозначим

$$x^2 - 5x + 6 = y. \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) перепишется в виде

$$y + 1 = \frac{12}{y}. \tag{7}$$

Уравнение (7) равносильно уравнению

$$\frac{y^2 + y - 12}{y} = 0. \tag{8}$$

Решения квадратного уравнения

$$y^2 + y - 12 = 0$$

есть $y_1 = 3$ и $y_2 = -4$.

Так как ни одно из этих чисел не обращает в нуль знаменатель левой части уравнения (8), то уравнение (8), а значит, и уравнение (7) имеют два корня: $y_1 = 3$ и $y_2 = -4$.

Теперь для решения уравнения (5) остается решить два уравнения:

$$x^2 - 5x + 6 = 3 \quad \text{и} \quad x^2 - 5x + 6 = -4.$$

Первое из них имеет два корня: $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$, а второе корней не имеет.

Следовательно, уравнение (5) имеет два корня.

Ответ: $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$.

Упражнение

Решить уравнения:

а) $2x^2 - 3x + 5 - \frac{5}{2x^2 - 3x + 1} = 0$;

б) $x^4 + 3x^2 = \frac{1}{x^4 + 3x^2 + 2}$.

8. Задачи.

З а д а ч а 1. Пароход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B пароход прошел за 7 ч. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода (собственная скорость – скорость в неподвижной воде).

Р е ш е н и е. Обозначим через x км/ч собственную скорость парохода. Тогда вниз по течению реки пароход шел со скоростью $x + 1$ км/ч и затратил на путь до устья притока $\frac{60}{x+1}$ ч.

По притоку пароход шел со скоростью $x - 1$ км/ч и затратил на путь по притоку $\frac{20}{x-1}$ ч. На весь путь пароход затратил 7 ч. Значит,

$$\frac{60}{x+1} + \frac{20}{x-1} = 7. \qquad (1)$$

Таким образом, искомое число x должно быть корнем рационального уравнения (1). Решим его.

Перенеся все его члены в левую часть и применив к левой части полученного уравнения правила сложения и вычитания дробей, получим уравнение

$$\frac{7x^2 - 80x + 33}{(x+1)(x-1)} = 0, \qquad (2)$$

равносильное уравнению (1).

Уравнение $7x^2 - 80x + 33 = 0$ имеет корни

$$x_1 = 11, \quad x_2 = \frac{3}{7}.$$

Оба они не обращают в нуль знаменатель левой части уравнения (2), и поэтому эти оба корня являются корнями уравнения (2), а значит, и уравнения (1).

Итак, уравнение (1) имеет два корня: $x_1 = 11$, $x_2 = \frac{3}{7}$.

Однако по условию задачи скорость парохода не может быть меньше 1 км/ч, так как пароход двигался по притоку против течения, скорость которого равна 1 км/ч.

Следовательно, условию задачи удовлетворяет лишь $x_1 = 11$.

О т в е т. Собственная скорость парохода 11 км/ч.

З а д а ч а 2. Экскаваторщик получил задание выкопать две траншеи одинаковой глубины на различных участках строительной площадки. Экскаватор сначала вырыл первую траншею длиной 5 м, потом доехал до второго участка и вырыл там траншею длиной 3 м. Время, затраченное на прокладку первой траншеи, на 1 ч 12 мин меньше, чем время, затраченное на переезд экскаватора и рытье второй траншеи. Если бы производительность экскаватора была в четыре раза меньше, то время, затраченное на прокладку первой траншеи, равнялось бы времени переезда экскаватора с одного места работы на другое. Определить длину траншеи, выкапываемой экскаватором за 1 ч.

Решение. Обозначим через x м длину траншеи, выкапываемой экскаватором за 1 ч. Тогда на рытье первой траншеи экскаватор затратил $\frac{5}{x}$ ч, а на рытье второй $\frac{3}{x}$ ч. По условию время, затраченное экскаватором на переезд с одного места работы на другое, в четыре раз больше времени, затраченного экскаватором на рытье первой траншеи, т.е. равно $\frac{20}{x}$ ч. Так как время, в течение которого экскаватор прокладывал первую траншею, на $1\frac{12}{60}$ ч меньше времени, затраченного на переезд и рытье второй траншеи, то получаем уравнение

$$\frac{5}{x} + 1\frac{12}{60} = \frac{20}{x} + \frac{3}{x}. \qquad (3)$$

Таким образом, искомое число x должно быть корнем уравнения (3). Решим его.

Перенося все члены в левую часть и применяя правила сложения и вычитания дробей, получаем уравнение

$$\frac{6x - 90}{5x} = 0, \qquad (4)$$

равносильное уравнению (3). Уравнение (4) имеет единственный корень $x_0 = 15$.

Ответ. Длина траншеи 15 м.

Упражнения

1. Расстояние между пристанями A и B равно 48 км. Отчалив от пристани A в 9 часов утра, пароход проплыл вниз по течению реки до пристани B. Простояв у пристани B 1 ч, пароход отправился в обратный рейс и прибыл к пристани A в 17 часов того же дня. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найти собственную скрость парохода, если известно, что на пути из A в B и из B в A она была одной и той же.

2. Буровой установкой пробурили скважину в точке A глубиной 1800 м, затем установку перевезли в точку B, где пробурили еще скважину глубиной 750 м. На бурение первой скважины было затрачено времени на один месяц больше, чем на перевозку установки и бурение второй скважины. Если бы скважину в точке A бурили с удвоенной скоростью, то время, затраченное на ее бурение, совпало бы со временем, необходимым на перевозку установки из A в B. Определить скорость бурения в метрах за месяц.

§ 16. Системы линейных уравнений

1. Уравнение первой степени с двумя неизвестными. Уравнение

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

где a, b, c – данные числа и хотя бы одно из чисел a или b отлично от нуля, а x и y – неизвестные, называется *уравнением первой степени с двумя неизвестными x и y*.

Это название связано с тем, что левая часть уравнения (1) есть многочлен стандартного вида первой степени относительно x и y.

Числа a и b называются *коэффициентами при неизвестных*, число a – *коэффициентом при x*, а число b – *коэффициентом при y*.

Выражения

$$ax;\ by;\ c$$

называются *членами уравнения* (1). При этом число c называется *свободным членом*.

Пара чисел $(x_0;\ y_0)$ называется *решением уравнения* (1), если эти числа удовлетворяют уравнению (1), т.е. если при подстановке x_0 вместо x и y_0 вместо y уравнение превращается в верное числовое равенство

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Примером уравнения первой степени с двумя неизвестными может служить уравнение

$$2x - 3y + 3 = 0. \tag{2}$$

В нем $a = 2$, $b = -3$, $c = 3$, пара чисел $(0;\ 1)$ есть решение уравнения (2). Но легко видеть, что уравнение (2) имеет бесконечно много решений. В самом деле, если вместо x подставить в уравнение (2) любое число x_0, то получим уравнение первой степени с одним неизвестным y. Решив его, найдем некоторое число y_0, которое вместе с заданным числом x_0 образует пару чисел $(x_0;\ y_0)$ – решение уравнения (2).

Полагая, например, $x_0 = 1$, получим уравнение с одним неизвестным y:

$$2 \cdot 1 - 3y + 3 = 0.$$

Его решением будет $y_0 = \dfrac{5}{3}$. Следовательно, пара чисел $\left(1;\ \dfrac{5}{3}\right)$ есть решение уравнения (2).

Если любое число x_0 подставить в уравнение (2) и решить полученное уравнение первой степени относительно y, то получим:

$$-3y = -2x_0 - 3,$$

$$y = \frac{-2x_0}{-3} + \frac{-3}{-3},$$

то получим

$$y_0 = \frac{2}{3} x_0 + 1. \tag{3}$$

Следовательно, каждому числу x_0 соответствует решение $(x_0;\ y_0)$ уравнения (2), где y_0 находится по данному x_0 по формуле (3). Например, если $x_0 = 0$, то из формулы (3) $y_0 = 1$ и пара чисел (0; 1) есть решение уравнения (2); если $x_0 = 3$, то из формулы (3) $y_0 = 3$ и пара чисел (3; 3) есть решение уравнения (2) и т.д.

Можно еще сказать, что любое решение уравнения (2) есть пара чисел $\left(x_0;\ \frac{2}{3} x_0 + 1\right)$, где x_0 – любое число.

Вообще любое уравнение вида

$$ax + by + c = 0 \tag{4}$$

с коэффициентами a и b, не равными нулю, имеет бесконечно много решений, потому что его можно решить относительно y при любом заданном числовом значении x_0, и тогда полученное число y_0 вместе с заданным числом x_0 образует пару чисел $(x_0;\ y_0)$ – решение уравнения (4). Так как чисел x_0 бесконечно много, то и решений уравнения (4) бесконечно много.

Выразить y через x из данного уравнения с двумя неизвестными x и y – значит решить это уравнение относительно y при любом заданном значении x.

П р и м е р. Выразить из уравнения

$$2x - 5y + 2 = 0 \tag{5}$$

y через x и записать все решения этого уравнения.

Зададим произвольное число x. Подставим его в уравнения (5) и найдем из полученного уравнения y:

$$-5y = -2x - 2,$$

$$y = \frac{-2x - 2}{5}, \tag{6}$$

$$y = \frac{2}{5} x + \frac{2}{5}.$$

Формулы (6) выражают y через x из уравнения (5). Все решения уравнения (5) записываются в виде

$$\left(x;\ \frac{2}{5} x + \frac{2}{5}\right),$$

где x – любое число.

Вопросы

1. Какое уравнение называется уравнением первой степени с двумя неизвестными? Приведите примеры.

2. Что называется:

а) решением уравнения $ax + by + c = 0$;

б) членами уравнения $ax + by + c = 0$;

в) коэффициентами при неизвестных в уравнении $ax + by + c = 0$?

3. Что значит выразить y через x из данного уравнения с двумя неизвестными?

Упражнения

1. Написать пять примеров уравнений первой степени с двумя неизвестными.

2. Является ли пара чисел $(1;\ 1)$ решением уравнений из упражнения 1?

3. Написать пять решений уравнения $x - y + 1 = 0$.

4. Сколько решений имеет уравнение $x - y + 1 = 0$?

2. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Задача. Известно, что разность лет возрастов брата и сестры равна 3, а сумма равна 15. Сколько лет брату и сколько лет сестре?

Решение. Надо найти две неизвестные величины – возраст брата и возраст сестры.

Пусть брату x лет, а сестре y лет. Так как разность лет возрастов брата и сестры равна 3, то

$$x - y = 3, \tag{1}$$

и так как сумма лет возрастов брата и сестры равна 15, то

$$x + y = 15. \tag{2}$$

Искомые числа x и y должны удовлетворять равенствам (1) и (2). Следовательно, наша задача свелась к определению пары чисел $(x;\ y)$, которые удовлетворяют одновременно равенствам (1) и (2). В таких случаях говорят, что дана система двух уравнений с двумя неизвестными x и y и пишут

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 15. \end{cases}$$

Пусть даны два уравнения первой степени с двумя неизвестными x и y:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0. \tag{3}$$

Говорят, что *дана система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y*, если требуется найти пары чисел $(x_0;\ y_0)$, являющиеся решениями одновременно и первого, и второго уравнений (3).

Обычно уравнения системы записывают в столбик одно под другим и объединяют их слева фигурной скобкой:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Решением системы (4) называется пара чисел $(x_0;\ y_0)$, которая является решением как первого, так и второго уравнения системы (4).

Решить систему – значит найти все ее решения или доказать, что данная система не имеет решений.

Приведем примеры систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0, \\ x + 2y + 4 = 0; \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x - 2y + 3 = 0; \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0, \\ 6x + 3y + 6 = 0; \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} 3x + 0 \cdot y + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0; \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} 2x + 0 \cdot y - 5 = 0, \\ 3x + 0 \cdot y + 2 = 0; \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} 5x + 0 \cdot y - 1 = 0, \\ 0 \cdot x + 3y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Если в системе уравнений (4) коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и удовлетворяют условию $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, то говорят, что *уравнения этой системы имеют пропорциональные коэффициенты при неизвестных.*

Например, уравнения системы (6) имеют пропорциональные коэффициенты при неизвестных. Уравнения системы (7) также имеют пропорциональные коэффициенты при неизвестных, более того, они пропорциональны свободным членам: $2 : 6 = 1 : 3 = 2 : 6$. Если в системе уравнений (4) коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и удовлетворяют условию $a_1 : a_2 \neq b_1 : b_2$, то говорят, что *уравнения системы* (4) *имеют непропорциональные коэффициенты при неизвестных.*

Например, уравнения системы (5) имеют непропорциональные коэффициенты при неизвестных.

Обычно в уравнениях члены $0 \cdot x$ и $0 \cdot y$ опускают, тогда системы (8)–(10) записываются в таком виде:

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0; \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} 2x - 5 = 0, \\ 3x + 2 = 0; \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} 5x - 1 = 0, \\ 3y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Вопросы

1. Когда говорят, что дана система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y? Приведите примеры.

2. Что называется решением системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными?

3. Что значит решить систему уравнений?

4. Когда говорят, что уравнения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеют пропорциональные (непропорциональные) коэффициенты при неизвестных?

5. Приведите примеры систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, имеющих при неизвестных:

а) порпорциональные коэффициенты;

б) непропорциональные коэффициенты.

Упражнения

1. Написать пять примеров систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

2. Выяснить, является ли пара чисел $(-3; 1)$ решением следующей системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x - 3y - 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + 4 = 0, \\ 3x + 4y + 5 = 0. \end{cases}$

3. Способ подстановки. В этом пункте рассматриваются системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, все коэффициенты при неизвестных которых отличные от нуля и непропорциональные.

Как мы увидим в дальнейшем, любая такая система имеет единственное решение.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0, \\ 3x + 4y - 11 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть пара чисел $(x_0;\ y_0)$ есть решение системы (1). Подставив эти числа в уравнения системы (1), получим верные числовые равенства:

$$\begin{cases} 2x_0 - 3y_0 + 4 = 0, \\ 3x_0 + 4y_0 - 11 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Пользуясь первым числовым равенством, выразим y_0 через x_0:

$$y_0 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{4}{3}. \tag{3}$$

Теперь во втором числовом равенстве (2) заменим число y_0 равным ему числом $\frac{2}{3}x_0 + \frac{4}{3}$, т.е. подставим $\frac{2}{3}x_0 + \frac{4}{3}$ вместо y_0.

Получим верное числовое равенство

$$3x_0 + 4\left(\frac{2}{3}x_0 + \frac{4}{3}\right) - 11 = 0,$$

т.е. получим, что число x_0 удовлетворяет уравнению

$$3x + 4\left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right) - 11 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем, что $x_0 = 1$. Подставив найденное значение x_0 в (3), получим $y_0 = 2$.

Итак, если система (1) имеет решение $(x_0;\ y_0)$, то

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 2.$$

Подставляя эти числа в уравнения системы (1), убеждаемся, что они действительно удовлетворяют этим уравнениям.

Следовательно, система (1) имеет единственное решение (1; 2).

Заметим, что к этому же результату можно прийти, если выразить y_0 через x_0 из второго равенства (2) и полученное выражение для y_0 подставить в первое равенство.

Можно также в этих рассуждениях роли x и y переменить, т.е. выразить x_0 через y_0 из какого-либо уравнения из (2) и полученное выражение подставить в другое уравнение.

Аналогичные рассуждения можно провести и для любой системы уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

если у нее коэффициенты при неизвестных отличные от нуля и непропорциональные. (Системы уравнений с пропорциональными коэффициентами будут изучены дальше.)

Из рассмотренного выше вытекает следующий способ решения системы (4), называемый способом подстановки:

для того чтобы решить систему уравнений вида (4) *с непропорциональными коэффициентами при неизвестных, надо*:

1) *одно из неизвестных* (*любое, например* y) *выразить через другое неизвестное из любого уравнения системы*;

2) *полученное выражение подставить вместо* y *в другое уравнение системы*;

3) *решить полученное уравнение с одним неизвестным* x;

4) *подставив найденное значение* x_0 *в формулу для* y, *найти* y_0; *тогда пара чисел* $(x_0;\ y_0)$ *и будет единственным решением системы.*

Пользуясь методом подстановки, рассмотрим пример.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 5y - 3 = 0, \\ 7x - y + 6 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Из второго уравнения системы (5) выражаем y через x:

$$y = 7x + 6 \tag{6}$$

и подставляем $7x + 6$ вместо y в первое уравнение системы (5):

$$4x - 5(7x + 6) - 3 = 0. \qquad (7)$$

Решаем уравнение (7):

$$4x - 35x - 30 - 3 = 0, \quad -31x - 33 = 0,$$

откуда ясно, что уравнение (7) имеет единственное решение

$$x_0 = -\frac{33}{31}.$$

Подставляя x_0 в (6), находим

$$y_0 = 7x_0 + 6 = 7\cdot\left(-\frac{33}{31}\right) + 6 = \frac{-7\cdot 33 + 6\cdot 31}{31} = -\frac{45}{31}.$$

Значит, система (5) имеет единственное решение

$$\left(-\frac{33}{31}; -\frac{45}{31}\right).$$

Вопросы

1. Сколько решений имеет система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, если ее коэффициенты при неизвестных отличные от нуля и непропорциональные?

2. В чем заключается способ подстановки для решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными? Покажите на примере.

Упражнение

Решить способом подстановки следующие системы:

а) $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0, \\ 3x + 4y - 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 3y - 5 = 0, \\ 6x + 8y + 11 = 0. \end{cases}$

4. Способ уравнивания коэффициентов. Мы продолжаем рассматривать системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, у которых коэффициенты при неизвестных непропорциональные. Каждая такая система, как это уже отмечалось, имеет единственное решение.

Кроме способа подстановки решения таких систем есть еще другой способ, называемый способом уравнивания коэффициентов или способом сложения.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 3x + 4y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Предположим, что пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение системы (1). Подставив эти числа в уравнения системы (1), получим верные числовые равенства

$$\begin{cases} 2x_0 + 3y_0 + 1 = 0, \\ 3x_0 + 4y_0 + 2 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Сделаем в этих равенствах коэффициенты при x_0 одинаковыми. Для этого умножим первое равенство на 3, а второе на 2:

$$\begin{cases} 2x_0 + 3y_0 + 1 = 0 & \big| \, 3, \\ 3x_0 + 4y_0 + 2 = 0 & \big| \, 2. \end{cases}$$

Получим верные числовые равенства .

$$\begin{cases} 6x_0 + 9y_0 + 3 = 0, \\ 6x_0 + 8y_0 + 4 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем верное числовое равенство $y_0 - 1 = 0$. Откуда $y_0 = 1$.

Подставим это число в первое из равенств (2) :

$2x_0 + 3 \cdot 1 + 1 = 0$.

Таким образом, если система (1) имеет решение $(x_0; y_0)$, то это может быть лишь пара чисел $x_0 = -2, y_0 = 1$.

Подставляя эти числа в уравнения системы (1), убеждаемся, что они действительно удовлетворяют этим уравнениям.

Следовательно, система (1) имеет единственное решение $(-2; 1)$. Мы подставили число 1 вместо y_0 в первое из равенств (2), но результат будет тот же, если подставить это число во второе из равенств (2). В самом деле, тогда второе равенство запишется в виде $3x_0 + 4 \cdot 1 + 2 = 0$.

Отсюда опять находим, что $x_0 = -2$. Мы снова получили уже найденное решение $(-2; 1)$. Вместо того чтобы уравнивать в равенствах (2) коэффициенты при x_0, можно уравнивать коэффициенты при y_0. Результат будет тот же самый.

Аналогичные рассуждения можно провести для любой системы уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

если у нее коэффициенты при неизвестных отличные от нуля и непропорциональные.

Из рассмотренного выше вытекает следующий способ решения системы (3), называемый способом сложения или уравнивания коэффициентов: *для того чтобы решить систему уравнений вида* (3) *с непропорциональными коэффициентами при неизвестных, надо*:

1) *умножением на числа, отличные от нуля, сделать равными коэффициенты при любом из неизвестных, например при x, в обоих уравнениях*;

2) *вычесть одно уравнение из другого*;

3) *решить полученное уравнение с одним неизвестным* y;

4) *подставив найденное значение* y_0 *в любое уравнение системы, найти из полученного уравнения с одним неизвестным его решение* x_0; *тогда найденная пара чисел* $(x_0;\ y_0)$ *и будет единственным решением системы.*

Пользуясь способом сложения, решим несколько примеров.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5 = 0, \\ 2x + 3y + 1 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Умножая первое уравнение этой системы на 2, а второе на 3 и вычитая затем из первого уравнения второе, получаем линейное уравнение с одним неизвестным y

$$-y + 7 = 0,$$

откуда $y = 7$. Подставляя 7 вместо y в первое уравнение системы (4), получаем

$$3x + 28 + 5 = 0,$$

откуда $x = -11$.

Следовательно, система (4) имеет единственное решение $(-11;\ 7)$.

Вопрос

В чем заключается способ сложения (или уравнивания коэффициентов) для решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными?

Упражнение

Решить способом сложения следующие системы:

а) $\begin{cases} 7x - y + 1 = 0, \\ 2x + y - 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0, \\ 6x - 3y - 4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x - 3y + 6 = 0, \\ 4x - y + 2 = 0. \end{cases}$

5. Равносильность уравнений и систем уравнений. Уравнение, левой и правой частями которого являются числа или многочлены первой степени относительно x и y, называется *линейным уравнением с двумя неизвестными* x, y. Примеры линейных уравнений:

$$2x - 3y + 1 = 0;\quad 5x - 4y = 3x - 1;\quad 2x - 3y = 5;\quad 3x - y + 1 = 3x - y - 1.$$

Члены многочленов, находящихся в левой и правой частях линейного уравнения, называются членами этого уравнения.

Два уравнения называются *равносильными*, если любое решение первого уравнения является решением второго, а любое решение второго является решением первого. В частности, *равносильны два уравнения, каждое из которых не имеет решений.*

1) *Если обе части уравнения умножить или разделить на отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное исходному.*

Например, уравнения

$$2x - 3y + 1 = 0 \text{ и } 4x - 6y + 2 = 0$$

равносильны.

2) *Если перенести с противоположным знаком член уравнения из одной части в другую, то получим уравнение, равносильное исходному.*

Например, уравнения

$$5x - 4y = 3x - 1 \text{ и } 5x - 4y - 3x + 1 = 0$$

равносильны.

3) *Если в левой или правой части уравнения привести подобные члены, то получится уравнение, равносильное исходному.*

Например, уравнения

$$2x - 7 + 3x - 4 = y \text{ и } 5x - 11 = y$$

равносильны.

Доказательство этих утверждений проводится так же, как для линейного уравнения с одним неизвестным.

Если в любом линейном уравнении перенести все члены в левую часть и привести подобные члены, то окажется, что оно равносильно линейному уравнению

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

где a, b и c – некоторые числа.

При этом, если хотя бы одно из чисел a или b отлично от нуля, уравнение (1), как уже говорилось, есть уравнение первой степени.

Предположим, что в уравнении (1) $a = b = 0$, $c \neq 0$, тогда оно имеет вид

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$$

и никакая пара чисел $(x;\ y)$ не удовлетворяет ему, т.е. уравнение (1) не имеет решения.

Если же $a = b = c = 0$, то уравнению (1) удовлетворяют любые пары чисел $(x;\ y)$.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если любое решение первой системы является решением второй системы и любое решение второй системы является решением первой системы. В частности, две системы равносильны, если каждая из них не имеет решений.

Очевидно, что если одно из уравнений системы заменить другим, равносильным ему уравнением, то полученная система будет равносильна исходной.

Так, например, система

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} y = -2x + 1, \\ 4x + 7y - 5 = 0. \end{cases}$$

Ниже понятие равносильности применяется при решении систем уравнений первой степени с пропорциональными коэффициентами при неизвестных.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x + 2y + 3 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Коэффициенты при неизвестных в этой системе отличные от нуля и пропорциональные.

Если разделить обе части второго уравнения системы (2) на 2, то получим систему

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x + y + \dfrac{3}{2} = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

равносильную системе (2).

Перенося свободные члены уравнений этой системы в правые части, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ x + y = -\dfrac{3}{2}, \end{cases} \qquad (4)$$

равносильную системе (3), следовательно, и системе (2).

Очевидно, что никакая пара чисел $(x; y)$ не может удовлетворять системе (4), потому что одно и то же число $x + y$ не может одновременно равняться и -1, и $-\dfrac{3}{2}$.

Таким образом, система (4) не имеет решений. Такую систему называют противоречивой.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x + 2y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь также коэффициенты при неизвестных отличные от нуля и пропорциональные. Больше того, они пропорциональны свободным членам: $2 : 1 = 2 : 1 = 2 : 1$.

Если разделить обе части второго уравнения системы на 2, то получим систему

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x + y + 1 = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

равносильную системе (5).

Очевидно, что множество решений системы (6) совпадает с множеством решений одного уравнения:

$$x + y + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет бесконечно много решений $(x;\ y)$, где x – любое число, а $y = -x - 1$. Поэтому все решения системы (5) имеют вид $(x;\ -x - 1)$, где x – любое число.

Отметим, что любая система уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$$

у которой коэффициенты при неизвестных отличные от нуля и пропорциональные, либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений. Такие системы можно решать подобно тому, как это было сделано в примерах 1 и 2. Но их можно также решать и способом подстановки.

Решим примеры 1 и 2 способом подстановки.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x + 2y + 3 = 0. \end{cases}$$

Выразим y через x из первого уравнения системы:

$$y = -x - 1$$

и подставим $-x - 1$ вместо y во второе уравнение системы:

$$2x + 2\,(-x - 1) + 3 = 0.$$

Получили противоречивое равенство $1 = 0$, показывающее, что данная система не имеет решений.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x + 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Выразим y через x из первого уравнения системы:

$$y = -x - 1$$

и подставим $-x - 1$ вместо y во второе уравнение системы:

$$2x + 2(-x - 1) + 2 = 0.$$

Получили тождество 0 = 0, показывающее, что число y, равное $-x - 1$, удовлетворяет как первому, так и второму уравнению системы при любых значениях x. Следовательно, все решения данной системы имеют вид $(x;\ -x-1)$, где x — любое число.

Вопросы

1. Какое уравнение называется линейным уравнением с двумя неизвестными?
2. Что называется членами линейного уравнения?
3. Является ли уравнение первой степени с двумя неизвестными линейным?
4. Приведите пример линейного уравнения с двумя неизвестными, не являющегося уравнением первой степени?
5. Какие два уравнения называются равносильными?
6. Какие есть утверждения о равносильности линейных уравнений?
7. Какие две системы уравнений называются равносильными?
8. Какие есть утверждения о равносильности систем уравнений?
9. Когда система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, у которой пропорциональны коэффициенты при неизвестных: а) не имеет решений; б) имеет бесконечно много решений?
10. Можно ли решать такие системы способом подстановки?

6. Решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Перенося все члены правых частей этих уравнений в левые части и приведя подобные члены, получим равносильную данной системе систему вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — некоторые числа.

Мы уже знаем, как решать такую систему, когда все коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 при неизвестных отличны от нуля. Мы знаем также, что если коэффициенты при неизвестных непропорциональные, то решение системы (1) существует и единственно; если же коэффициенты системы пропорциональные, то либо решений бесконечно много, либо их нет совсем.

Нам остается рассмотреть те случаи системы (1), когда некоторые коэффициенты при неизвестных равны нулю. Это будет сделано на характерных примерах.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Второе уравнение этой системы имеет отличные от нуля коэффициенты при неизвестных, а первое уравнение имеет коэффициент при x, отличный от нуля, и коэффициент при y, равный нулю.

Эту систему проще всего решить методом подстановки. Из первого уравнения находим

$$x = -\frac{1}{3},$$

и подставляем его во второе. Получаем

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + y - 5 = 0,$$

откуда

$$y = 5\frac{2}{3}.$$

Таким образом, пара чисел $\left(-\frac{1}{3};\ 5\frac{2}{3}\right)$ есть единственное решение системы (2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 1 = 0, \\ 3y + 2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) есть частный случай системы (1), где $a_1 = 5$, $b_1 = 0$, $c_1 = -1$, $a_2 = 0$, $b_2 = 3$, $c_2 = 2$. Единственным решением этой системы является пара чисел $\left(\frac{1}{5};\ -\frac{2}{3}\right)$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2y + 3 = 0, \\ y + \frac{3}{2} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Из каждого уравнения системы получаем $y = -\frac{3}{2}$.

Теперь вспомним, что систему (4) мы рассматриваем как частный случай системы (1), где $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$. Таким образом, система (4) может быть записана так:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 2y + 3 = 0, \\ 0 \cdot x + y + \frac{3}{2} = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что x здесь может быть любым числом, а $y = -\frac{3}{2}$.

Таким образом, решения системы (4) записываются в виде пар чисел $\left(x;\ -\frac{3}{2}\right)$, где x — любое число.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2 = 0, \\ 2x - 5 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Эта система противоречива (не имеет решений), потому что x не может одновременно равняться и 2, и $\frac{5}{2}$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + c_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Если $c_2 \neq 0$, то эта система противоречива, потому что никакая пара чисел $(x;\ y)$ не удовлетворяет второму уравнению системы (6).

Если же $c_2 = 0$, то второму уравнению удовлетворяют любые x и y. Остается только первое уравнение. Оно уже рассматривалось. Следовательно, все решения первого уравнения являются решениями системы, а как решать одно уравнение, мы знаем.

Замечание. Все рассмотренные выше примеры можно решить методом подстановки.

Рассмотрим с этой точки зрения эти примеры.

Пример 1. Он был решен методом подстановки.

Пример 2. Решая первое уравнение системы (3) относительно x, получаем $x = \frac{1}{5}$. Теперь надо полученное значение для x подставить во второе уравнение. Но во втором уравнении нет x. Формально можно считать, что такая подстановка сделана и получилось уравнение относительно y: $3y + 2 = 0$, откуда $y = -\frac{2}{3}$.

Пример 3. Решая первое уравнение системы (4) относительно y, находим $y = -\frac{3}{2}$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем $0 = 0$. Это показывает, что значение $y = -\frac{3}{2}$ удовлетворяет обоим уравнениям одновременно при любом x. Итак, всевозможные решения системы (4) определяются парами $\left(x;\ -\frac{3}{2}\right)$, где x – любое число.

Пример 4. Решая первое уравнение системы (5) относительно x и подставляя полученное значение 2 во второе уравнение, приходим к противоречию: $-1 = 0$, показывающему, что система (5) противоречива.

Пример 5. Если, например, $b \neq 0$, то из первого уравнения системы (6) можно y выразить через x. Получим выражение вида $y = kx + l$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим противоречие, если $c_1 \neq 0$, и равенство $0 = 0$, если $c_1 = 0$. Во втором случае все решения (6) имеют вид $(x;\ y)$, где x – любое число, а $y = kx + l$.

Вопросы

1. Может ли система двух линейных уравнений с двумя неизвестными не иметь решений; иметь одно решение; иметь бесконечно много решений? Приведите примеры.

2. Можно ли любую систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными решить способом подстановки?

7. **Задачи.** Решение многих задач сводится к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Приведем примеры.

Задача 1 (старинная). Сошлись два пастуха, Иван да Петр. Иван говорит Петру: "Отдай-ка ты мне одну овцу, тогда у меня будет овец вдвое больше, чем у тебя!" А Петр ему отвечает: "Нет! Лучше ты отдай мне одну овцу, тогда у нас будет овец поровну!". Сколько же было у каждого овец?

Решение. Пусть у Ивана было x овец, а у Петра – y овец. Если бы Петр отдал Ивану одну овцу, то у Петра осталось бы $y - 1$ овец, а у Ивана стало бы $x + 1$ овец. Но тогда у Ивана было бы вдвое больше овец, чем у Петра. Следовательно,

$$x + 1 = 2(y - 1). \qquad (1)$$

Если бы Иван отдал Петру одну овцу, то у Ивана осталось бы $x - 1$ овец, а у Петра стало бы $y + 1$ овец. Но тогда они имели бы овец поровну. Следовательно,

$$x - 1 = y + 1. \qquad (2)$$

В задаче надо найти такие значения x и y, которые одновременно удовлетворяют и уравнению (1), и уравнению (2). Другими словами, надо решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x + 1 = 2(y - 1), \\ x - 1 = y + 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Решим эту систему способом подстановки. Из первого уравнения получаем

$$x = 2y - 3. \qquad (4)$$

Подставляя $2y - 3$ вместо x во второе уравнение системы (3), получаем уравнение с одним неизвестным y:

$$(2y - 3) - 1 = y + 1,$$

которое имеет единственное решение $y_0 = 5$. Подставив $y_0 = 5$ в (4), найдем $x_0 = 7$. Следовательно, система (3) имеет единственное решение: $x_0 = 7$, $y_0 = 5$.

Ответ. У Ивана было 7 овец, а у Петра – 5 овец.

Задача 2. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа за ним выехал автомобиль. На половине пути от A до B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в пункт B, велосипедисту оставалось проехать еще треть пути. Сколько времени затратил на преодоление пути от A до B велосипедист и сколько автомобиль, если известно, что скорости велосипедиста и автомобиля были постоянными.

Р е ш е н и е. Обозначим через x время в минутах, за которое велосипедист проедет путь от A до B, а через y время в минутах, за которое автомобиль проедет этот же путь. На половину пути от A до B велосипедист затратил $\frac{1}{2}x$ мин, а автомобиль $\frac{1}{2}y$ мин. По условию на полпути от A до B они находились одновременно, хотя автомобиль выехал на 15 мин позже. Значит,

$$\frac{1}{2}y + 15 = \frac{1}{2}x. \qquad (5)$$

К моменту прибытия автомобиля в пункт B велосипедист находился в пути уже $y + 15$ мин и проехал за это время $\frac{2}{3}$ расстояния от A до B, т.е. затратил на этот путь $\frac{2}{3}x$ мин, следовательно,

$$y + 15 = \frac{2}{3}x. \qquad (6)$$

В задаче надо найти такие значения x и y, которые одновременно удовлетворяют и уравнению (5), и уравнению (6). Другими словами, надо решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + 15 = \frac{1}{2}x, \\ y + 15 = \frac{2}{3}x. \end{cases} \qquad (7)$$

Решим эту систему способом подстановки. Из второго уравнения имеем

$$y = \frac{2}{3}x - 15. \qquad (8)$$

Подставляя $\frac{2}{3}x - 15$ вместо y в первое уравнение системы (7), получаем уравнение с одним неизвестным x:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}x - 15\right) + 15 = \frac{1}{2}x,$$

которое имеет единственное решение $x_0 = 45$. Подставляя $x_0 = 45$ в (8), находим $y_0 = 15$.

Ответ. На путь от A до B велосипедист затратил 45 мин, а автомобиль – 15 мин.

Упражнения

1. Сумма двух натуральных чисел равна 31, а разность равна 5. Найти эти числа.

2. Два куска одинаковой ткани стоят вместе 91 р. Когда из первого куска продали столько, сколько было первоначально во втором, а из второго – половину того, что было первоначально в первом, то остаток первого куска оказался на 10 м больше остатка второго куска. Сколько метров ткани было в каждом куске, если 1 м ткани стоит 1 р. 40 к?

§ 17. Линейная функция и системы двух уравнений с двумя неизвестными

1. Прямая пропорциональная зависимость. Функция, заданная формулой

$$y = kx, \tag{1}$$

где k – данное не равное нулю число, называется *прямой пропорциональной зависимостью*. Эта функция определена для всех действительных чисел x.

Такое название связано с тем, что для любых двух отличных от нуля чисел x_1 и x_2 соответствующие значения y_1 и y_2 $(y_1 = kx_1,\ y_2 = kx_2)$ им пропорциональны.

Действительно, так как

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{kx_1}{x_1} = k, \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{kx_2}{x_2} = k,$$

то

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Если функция задана формулой (1), то говорят еще, что *переменная y пропорциональна переменной x с коэффициентом пропорциональности k.* Например, функция $s = 80t$ есть прямая пропорциональная зависимость. При равномерном движении тела путь, пройденный им, прямо пропорционален времени с коэффициентом пропорциональности, равным его скорости.

Вопросы

1. Какая функция называется прямой пропорциональной зависимостью? Приведите примеры.

2. Что значит, что переменная y пропорциональна переменной x с коэффициентом пропорциональности k?

2. График прямой пропорциональной зависимости. Зададим на плоскости прямоугольную систему координат и рассмотрим, например, функцию

$$y = 2x.$$

Эта функция определена для любых действительных чисел x, при этом каждому значению x соответствует число y, равное $2x$. Следовательно, каждому значению x соответствует точка $A(x; y)$ координатной плоскости такая, что $y = 2x$, т.е. каждому значению x соответствует точка $A(x; 2x)$ координатной плоскости, имеющая абсциссу x и ординату $2x$. Ниже приведена таблица некоторых значений x, соответствующих им значений y ($y = 2x$) и точек $(x; 2x)$:

x	$y = 2x$	(x, y)	x	$y = 2x$	(x, y)
-3	$2 \cdot (-3) = -6$	$(-3; -6)$	1	$2 \cdot 1 = 2$	$(1; 2)$
-2	$2 \cdot (-2) = -4$	$(-2; -4)$	2	$2 \cdot 2 = 4$	$(2; 4)$
-1	$2 \cdot (-1) = -2$	$(-1; -2)$	3	$2 \cdot 3 = 6$	$(3; 6)$
0	$2 \cdot 0 = 0$	$(0; 0)$			

Полученные точки отмечены на рис. 29. Приложив линейку, мы видим, что эти точки лежат на одной прямой, именно на прямой l, проходящей через начало координат и точку $B(1; 2)$.

Возникает вопрос: если мы будем задавать другие значения x, то будут ли соответствующие точки лежать на прямой l? Да, будут. Это доказывается ниже.

Графиком функции $y = 2x$ является множество точек координатной плоскости Oxy с координатами $(x; 2x)$, где x – любое действительное число.

Докажем, что график функции $y = 2x$ есть прямая l, проходящая через начало координат и точку $B(1; 2)$.

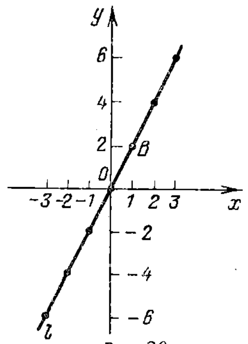


Рис. 29

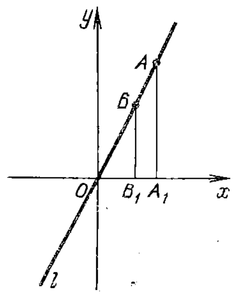


Рис. 30

Пусть $A(x;\ y)$ – произвольная точка этой прямой. Рассмотрим три возможных случая: 1) $x > 0$; 2) $x < 0$; 3) $x = 0$.

1) На рис. 30 отмечена точка A, имеющая положительную абсциссу x.

Проведем через точки A и B прямые, параллельные оси Oy – они пересекут ось Ox в точках A_1 и B_1. Очевидно, что

$$|OB_1| = 1, \quad |BB_1| = 2, \quad |OA_1| = x, \quad |AA_1| = y.$$

Треугольники OB_1B и OA_1A прямоугольные и имеют общий угол BOB_1. Как доказывается в геометрии, у этих треугольников пропорциональны соответствующие катеты, т.е.

$$\frac{|AA_1|}{|BB_1|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|},$$

или

$$\frac{y}{2} = \frac{x}{1},$$

откуда

$$y = 2x.$$

Следовательно, точка A имеет абсциссу x и ординату $2x$, т.е.

$$A(x; 2x).$$

2) На рис. 31 отмечена такая точка $A(x; y)$, у которой $x < 0$. Но тогда у нее и $y < 0$, и поэтому

$$|OB_1| = 1, \quad |BB_1| = 2,$$

$$|OA_1| = -x, \quad |AA_1| = -y.$$

Треугольники OB_1B и OA_1A прямоугольные и имеют равные углы BOB_1 и AOA_1 (они равны как вертикальные углы). Как доказывается в геометрии, у этих треугольников пропорциональны соответствующие катеты, т.е.

$$\frac{|AA_1|}{|BB_1|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|},$$

или

$$\frac{-y}{2} = \frac{-x}{1},$$

откуда

$$y = 2x.$$

Следовательно, точка A имеет абсциссу x и ординату $2x$, т.е.

$$A(x;\ 2x).$$

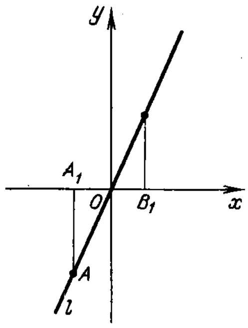


Рис. 31

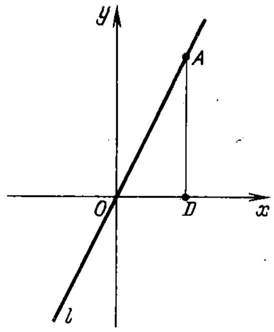


Рис. 32

3) Если у точки $A(x; y)$ абсцисса $x = 0$, то точка A есть начало координат и ее ордината $y = 0$. Но тогда $y = 2x$, потому что $0 = 2 \cdot 0$.

Итак, доказано, что если точка $A(x; y)$ лежит на прямой l, то ее ордината y равна $2x$, т.е.

$A(x;\ 2x)$.

Докажем теперь обратное, а именно если точка $A(x; y)$ такова, что ее ордината y равна $2x$, т.е. если

$A(x;\ 2x)$,

то эта точка A лежит на прямой l.

В самом деле, отметим на оси абсцисс точку D (рис. 32), имеющую абсциссу x, и проведем через точку D прямую, параллельную оси Oy. Эта прямая пересечет прямую l в некоторой точке A. Как мы уже знаем, ордината этой точки равна $2x$, т.е. это и есть точка A, имеющая абсциссу x и ординату $2x$. Таким образом, доказано, что точка $A(x; 2x)$ лежит на прямой l.

Итак, сформулированное выше утверждение доказано.

Рассмотрим теперь функцию

$y = kx$,

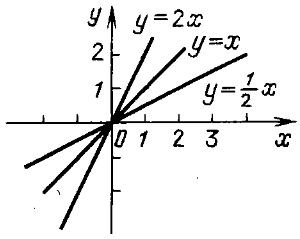
где k – данное число.

Графиком функции $y = kx$ является множество точек координатной плоскости Oxy с координатами $(x;\ kx)$, где x – любое действительное число.

Так же как в рассматриваемом выше примере, доказывается, что:

график функции $y = kx$ есть прямая, проходящая через начало координат и точку $B(1; k)$.

При положительном k точка $B(1;\ k)$ находится в I четверти, а при отрицательном k – в IV четверти.



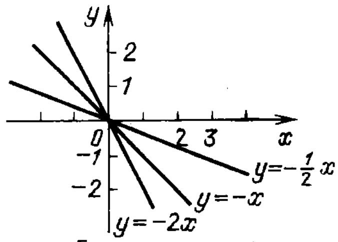


Рис. 33

Отметим, что любая точка оси абсцисс имеет ординату y, равную 0, независимо от ее абсциссы.

Графиком функции $y = 0$ является ось абсцисс.

Итак, графиком функции $y = kx$, где k есть некоторое данное число (положительное, отрицательное или нуль), является прямая, проходящая через начало координат и точку $B(1;\ k)$. Вместо того чтобы говорить "график функции $y = kx$", часто говорят "прямая $y = kx$". Говорят еще, что прямая, проходящая через начало координат и точку $B(1;\ k)$, имеет уравнение

$$y = kx.$$

Число k называют *угловым коэффициентом* прямой $y = kx$.

Если угловой коэффициент k прямой положителен $(k > 0)$, то она образует острый угол с положительным направлением оси Ox (рис. 33,*а*), а если угловой коэффициент k прямой отрицателен $(k < 0)$, то она образует тупой угол с положительным направлением оси Ox (рис. 33, *б*) (угол отсчитывается против часовой стрелки).

З а м е ч а н и е. Напомним, что для построения прямой достаточно знать координаты двух точек, лежащих на ней.

При практическом построении прямой $y = kx$ точку $B(1; k)$ можно заменить любой другой точкой прямой $B_1(x_0;\ kx_0)$, достаточно удаленной от начала координат, чтобы чертеж получился более точным.

П р и м е р. Зададим систему координат Ots. Пусть осью абсцисс будет ось t, а осью ординат – ось s. Будем считать, что 1 см на оси t соответствует 1 с, а 1 см на оси s соответствует 1 м.

По оси s движется точка вверх равномерно со скоростью $v = 2$ м/с, при этом в начальный момент времени она находилась в точке 0. К моменту времени t $(t > 0)$ точка пройдет путь $2t$, и ее ординатой в этот момент будет

$$s = 2t.$$

Мы получили закон движения точки, выражающий зависимость ее ординаты s от времени t. График функции $s = 2t$ — полупрямая, выходящая из начала координат с угловым коэффициентом, равным 2 (рис. 34).

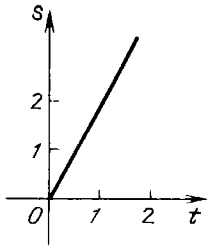


Рис. 34

Отметим, что наша точка движется по оси s, а график ее движения только помогает нам наглядно узнавать координату s движущейся точки в момент времени t.

Вопросы

1. Что является графиком функции $y = kx$?
2. Как записывается уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $(1;\ k)$, где k — данное число?
3. Что называется угловым коэффициентом прямой $y = kx$?
4. Какой угол с осью Ox образует прямая $y = kx$:
а) при $k > 0$; б) при $k < 0$?

Упражнения

1. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку:

а) $B\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$; б) $B(1;\ -3)$; в) $B\left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$; г) $B(1;\ 5)$.

2. На координатной плоскости Oxy начертить графики функций:

а) $y = \frac{1}{3}x$; б) $y = \frac{3}{4}x$; в) $y = \frac{5}{2}x$; г) $y = -\frac{7}{3}x$; д) $y = 0$; е) $y = -x$.

3. Линейная функция. Функция вида

$$y = kx + b, \tag{1}$$

где k и b — данные числа, называется *линейной*.

Линейная функция определена на множестве всех действительных чисел.

Если $b = 0$, то мы получим функцию

$$y = kx,$$

которую мы уже изучали в предыдущем пункте.

Приведем примеры линейных функций:

$y = 2x + 4; \quad y = -x + 5;$

$y = 5x - 3; \quad y = -\frac{1}{2}x + 2.$

Графиком функции $y = kx + b$ является множество точек координатной плоскости Oxy с координатами $(x;\ kx + b)$, где x – любое действительное число.

Чтобы построить, например, график функции

$$y = 2x + 4 \tag{2}$$

в прямоугольной системе координат Oxy (рис. 35), построим сначала график функции $y = 2x$. Это прямая, проходящая через точки $O(0;\ 0)$ и $B(1;\ 2)$.

Если эту прямую передвинуть параллельно самой себе вверх на 4 единицы масштаба, то получим график функции $y = 2x + 4$, потому что если A есть произвольная точка графика функции $y = 2x$, а C – точка графика функции $y = 2x + 4$, имеющая ту же абсциссу x, то ордината точки C, очевидно, на 4 единицы больше ординаты точки A.

Итак, прямая $y = 2x + 4$ параллельна прямой $y = 2x$. Кроме того, прямая $y = 2x + 4$ пересекает ось ординат в точке $D(0;\ 4)$, в чем можно убедиться, положив $x = 0$ в уравнении $y = 2x + 4$.

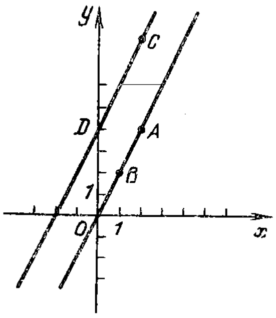


Рис. 35

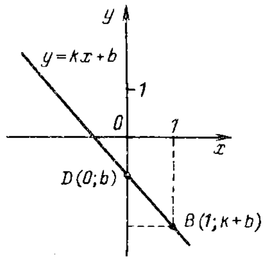


Рис. 36

Рассуждение, которое мы провели на примере функции $y = 2x + 4$, по аналогии обобщается на любую линейную функцию $y = kx + b$, где k и b – любые данные числа.

Итак, график линейной функции

$y = kx + b$

есть прямая, пересекающая ось ординат в точке $D(0; b)$, параллельная прямой $y = kx$.

Легко видеть, что точка $B(1; k + b)$ лежит на прямой

$$y = kx + b.$$

Поэтому можно сказать так: график линейной функции

$$y = kx + b$$

есть прямая, проходящая через точки $D(0; b)$ и $B(1; k + b)$ (рис. 36).

З а м е ч а н и е. Для построения прямой $y = kx + b$ не обязательно проводить ее через точки $D(0; b)$, $B(1; k + b)$; можно провести ее через две точки этой прямой, достаточно удаленные друг от друга, чтобы чертеж получился более точным.

Коэффициент k в уравнении

$$y = kx + b \tag{3}$$

называется *угловым коэффициентом этой прямой.* Число b есть ордината точки пересечения прямой с осью y.

Заметим, что *две прямые*

$$y = kx + b \quad \text{и} \quad y = k_1x + b_1,$$

имеющие одинаковые угловые коэффициенты k *и* k_1 $(k = k_1)$ *и разные числа* b *и* b_1 $(b \neq b_1)$, *параллельны.*

Если $k = 0$, то мы получим функцию

$$y = b, \tag{4}$$

от x не зависящую. Эта функция выражает следующий закон: каждому значению x соответствует одно и то же число $y = b$. Функция $y = b$ называется *постоянной.* График ее – *прямая, параллельная оси x, пересекающая ось y в точке* $(0; b)$ (рис. 37). *Угловой коэффициент ее равен нулю.*

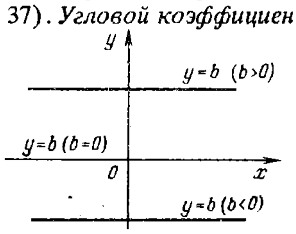


Рис. 37

Отметим, что *линейная функция непрерывна,* ведь ее график – непрерывная линия.

Вопросы

1. Какая функция называется линейной?
2. Что является графиком линейной функции?
3. Что называется угловым коэффициентом прямой $y = kx + b$?

4. Когда прямые $y = kx + b$ и $y = k_1x + b_1$ параллельны?

5. Что является графиком функции $y = b$?

6. Почему линейная функция непрерывна?

Упражнения

1. Начертить графики линейных функций:

а) $y = 3x + 2$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = x + 3$; г) $y = -x + 2$; д) $y = \frac{1}{2}x - 4$; е) $y = -3x + 5$.

2. Определить координаты точек, в которых прямые, перечисленные в упражнении 1, пересекают ось x.

3. Какие из прямых в упражнении 1 параллельны?

4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (0; 3) и параллельной прямой:

а) $y = 2x$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = \frac{3}{2}x - 1$; г) $y = -x + 2$.

4. Равномерное движение.

Пример 1. Зададим координатную ось s с начальной точкой O и единичным отрезком длины 1 см.

Пусть точка вышла в момент времени $t = 0$ из точки оси s, имеющей координату 3, и движется в положительном направлении этой оси равномерно со скоростью 2 см/с. Координата s (см) этой точки, очевидно, есть функция от времени t (с), выражаемая формулой

$$s = 3 + 2t.$$

Данная функция рассматривается для положительных значений t и $t = 0$, поэтому говорят, что она определена для неотрицательных значений t $(t \geqslant 0)$.

Введем прямоугольную систему координат Ots и в ней изобразим график функции

$$s = 3 + 2t \quad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

или, как говорят, график движения точки. Это есть луч, выходящий из точки $C(0; 3)$ и параллельный прямой $s = 2t$ (рис. 38).

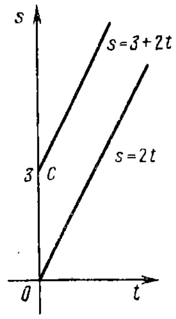


Рис. 38

Пользуясь этим графком, можно изучать рассматриваемое движение.

Например, чтобы узнать, где находится наша точка в заданный момент времени t, надо отложить по оси абсцисс от O вправо отрезок OA_1 длины t $(|OA_1| = t)$ и восставить из A_1 перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком движения в некоторой точке A. Число s, равное длине отрезка

$$s = |AA_1|,$$

есть координата по оси s нашей движущейся точки в момент времени t.

Пример 2. Зададим координатную ось s с начальной точкой O и единичным отрезком длины 1 см.

Пусть точка движется по оси s и при этом ее координата s есть линейная функция от времени t, выражаемая формулой

$$s = 4t + 2. \tag{2}$$

Если в этой формуле положить $t = 0$, то получим $s = 2$. Это показывает, что наша движущаяся точка в момент времени $t = 0$ имела координату $s = 2$.

Отметим два произвольных момента времени t_1 и t_2, где $t_1 < t_2$.

В момент $t = t_1$ наша точка имеет координату $s = s_1$, вычисляемую по формуле

$$s_1 = 4t_1 + 2.$$

В момент $t = t_2$ наша точка имеет координату $s = s_2$, вычисляемую по формуле

$$s_2 = 4t_2 + 2.$$

Промежуток времени между моментами t_1 и t_2 равен $t_2 - t_1$. Путь, пройденный точкой за этот промежуток, очевидно, равен

$$s_2 - s_1 = (4t_2 + 2) - (4t_1 + 2) = 4(t_2 - t_1).$$

Отсюда скорость нашей точки равна

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{4(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 4.$$

Мы получили, что если точка движется по оси s по закону, выражаемому формулой (2), то она движется равномерно со скоростью 4 см/с и при этом в момент времени $t = 0$ находилась в точке $s = 2$.

Упражнения

1. Написать уравнение движения точки, движущейся по оси s:
а) со скоростью 4 см/с, если она в момент времени $t = 0$ имеет координату $s = 5$;
б) со скоростью 6 см/с, если она в момент времени $t = 0$ имеет координату $s = 2$.
Нарисовать графики движения.

2. Дано уравнение движения точки, движущейся по оси s:

а) $s = 2t - 7$; б) $s = \frac{1}{2}t + 3$; в) $s = 3t$.

Определить координату точки в момент времени $t = 0$ и в момент времени $t = 3$. Определить также скорость точки. Нарисовать график движения.

5. Графический способ решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Пример 1. Решить графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ x + 2y + 3 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Разрешая каждое из этих уравнений относительно y, получаем систему

$$\begin{cases} y = 3x + 2, \\ y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}, \end{cases} \tag{2}$$

равносильную системе (1).

Введем в плоскости прямоугольную систему координат Oxy. Уравнение $y = 3x + 2$ есть уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(1;\ 5)$ и $B_1(0;\ 2)$, а уравнение $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$ есть уравнение прямой, проходящей через точки $A_2(1;\ -2)$ и $B_2\left(0;\ -\dfrac{3}{2}\right)$. Построим эти прямые в системе координат Oxy (рис. 39). Они, как видно из рис. 39, пересекаются в точке $M(-1;\ -1)$. Координаты ее $x = -1$, $y = -1$ и являются единственным решением системы (2), но тогда и равносильной ей системы (1).

Отметим, что по виду уравнений системы (2) заранее можно сказать, что рассматриваемые прямые пересекаются в одной точке. Ведь угловые коэффициенты этих прямых разные $\left(3 \neq -\dfrac{1}{2}\right)$, что показывает, что эти прямые не параллельны и, следовательно, пересекаются в одной точке.

О т в е т. $(-1;\ 1)$.

П р и м е р 2. Решить графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

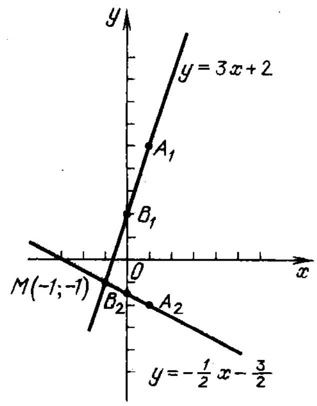


Рис. 39

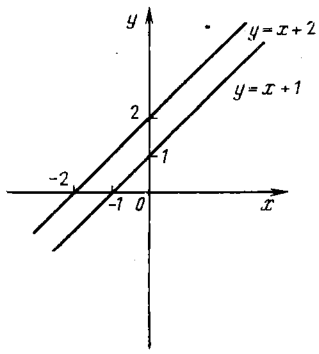


Рис. 40

Разрешая каждое из уравнений системы относительно y, получаем равносильную ей систему уравнений

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = x + 2. \end{cases} \qquad (4)$$

Эти уравнения – уравнения параллельных прямых, потому что они имеют равные угловые коэффициенты. Эти прямые не совпадают, потому что пересекают ось y в разных точках: первая – в точке $(0;\ 1)$, а вторая – в точке $(0;\ 2)$ (рис. 40).

Таким образом, прямые (3) не пересекаются, и потому система (4), а значит, и система (3) не имеют решений.

О т в е т. Система (3) не имеет решений.

П р и м е р 3. Решить графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0, \\ -4x - 4y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Разрешая каждое из уравнений системы относительно y, получаем равносильную ей систему уравнений

$$\begin{cases} y = -x + \dfrac{1}{2}, \\ y = -x + \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (6)$$

Уравнения этой системы одинаковы и, следовательно, определяют одну и ту же прямую $y = -x + \frac{1}{2}$ (рис. 41).

Это показывает, что все решения системы (5) образуют совокупность пар координат $(x; y)$ точек прямой $y = -x + \frac{1}{2}$.

О т в е т. Система (5) имеет бесконечно много решений: $\left(x; -x + \frac{1}{2}\right)$, где x – любое число.

Таким образом, *для решения графическим способом системы двух линейных уравнений надо*:

1) *разрешить каждое уравнение относительно* y *(если это возможно)*;

2) *построить на координатной плоскости прямые, соответствующие полученным уравнениям.*

Если прямые пересекаются, то надо найти точку их пересечения. Ее координаты и будут решением системы.

Если прямые окажутся параллельными, то система не имеет решений.

Если прямые совпадут, т.е. сольются в одну прямую, то система имеет бесконечно много решений – множество пар координат точек этой прямой.

З а м е ч а н и е. Случаи, когда хотя бы одно из уравнений системы не разрешается относительно y, будут рассмотрены в следующем пункте.

З а д а ч а. Поезд, выйдя в момент $t_0 = 0$ со станции O, идет со скоростью 100 км/ч. Навстречу ему со скоростью 80 км/ч идет другой поезд, вышедший со станции A в тот же момент $t_0 = 0$. Расстояние от O до A равно 200 км. Построить графики движения этих поездов и по ним определить, когда и где эти поезда встретятся.

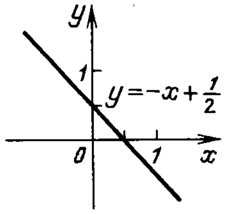


Рис. 41

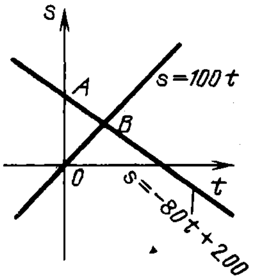


Рис. 42

Р е ш е н и е. Зададим прямоугольную систему координат Ots (рис. 42). Будем считать, что 1 см на оси t соответствует 1 ч, а 1 см на оси s соответствует 100 км.

Отметим на оси s точку A, имеющую координату $s = 200$. Удобно считать, что первый поезд движется в положительном направлении оси s от точки O, а второй – в отрицательном направлении оси s от точки A. Тогда закон движения первого поезда выражается функцией

$$s = 100t, \tag{7}$$

а закон движения второго поезда выражается функцией

$$s = -80t + 200. \tag{8}$$

Ведь скорость есть коэффициент при t. Для первого поезда она положительная, а для второго отрицательная. Кроме того, при $t = 0$ первый поезд имеет на оси s координату $s = 0$, а второй – координату $s = 200$, что согласуется с формулами (7) и (8).

На рис. 42 изображены прямые – графики этих функций. Встреча поездов произойдет в такой момент t, при котором ординаты поездов равны одному и тому же числу s. Но тогда эти числа t и s должны удовлетворять одновременно обоим уравнениям (7) и (8), т.е. быть координатами точки B пересечения прямых.

Из рисунка видно, что координаты точки B приблизительно равны

$t \approx 1$ ч, $s \approx 110$ км.

Для сравнения решим систему уравнений

$$\begin{cases} s = 100t, \\ s = -80t + 200. \end{cases}$$

Имеем

$$100t = -80t + 200,$$

$$t = \frac{200}{180} = \frac{10}{9}\text{ ч} \approx 66{,}66\ldots\text{ мин} \approx 67\text{ мин},$$

$$s = 100\frac{10}{9}\text{ км} = 111{,}11\ldots\text{ км} \approx 111\text{ км}.$$

Ответ. Поезда встретятся приблизительно через 67 мин на расстоянии приблизительно 111 км от станции O.

Замечание. При графическом способе решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными решение находят обычно приближенно, а не точно.

Вопрос

Как решить графическим способом систему линейных уравнений?

Упражнение

Решить графически системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + y - 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x - y - 3 = 0, \\ 14x - 2y + 5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ 6x + 2y - 2 = 0. \end{cases}$

6. Исследование системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Рассмотрим систему уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — данные, отличные от нуля числа.

Разрешив каждое из уравнений системы относительно y, получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1}, \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x - \dfrac{c_2}{b_2}. \end{cases} \quad (2)$$

Первое уравнение системы (2) есть уравнение прямой (в декартовой системе координат Oxy) с угловым коэффициентом $-\frac{a_1}{b_1}$.

Второе уравнение системы (2) есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $-\frac{a_2}{b_2}$.

Возможны три случая.

Случай 1. Коэффициенты при x и y уравнений системы (1) непропорциональны, т.е.

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Тогда угловые коэффициенты наших прямых различные:

$$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$$

и прямые пересекаются в единственной точке. Следовательно, система (1) имеет единственное решение.

Случай 2. Коэффициенты при x и y уравнений системы (1) пропорциональные, но они не пропорциональны свободным членам, т.е.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Тогда угловые коэффициенты наших прямых равны между собой:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}, \quad \text{но} \quad -\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_1}{b_2}.$$

В этом случае прямые параллельные и не совпадают, потому что при $x = 0$ значения y в уравнениях (2) различные. Следовательно, система (1) не имеет решений.

Случай 3. Числа a_1, b_1, c_1 соответственно пропорциональны числам a_2, b_2, c_2, т.е.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Тогда, очевидно, что оба уравнения системы (2) определяют одну и ту же прямую.

Координаты точек этой прямой и являются всевозможными решениями системы (1).

Замечание 1. Будем считать, что числа a_1, b_1, a_2, b_2 отличны от нуля. При $c_1 = c_2 = 0$, если числа a_1, b_1 пропорциональны числам a_2, b_2, прямые, о которых идет речь, совпадают. Если же эти числа непропорциональные, то прямые пересекаются в точке $(0;\ 0)$.

При $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, если числа a_1, b_1 пропорциональны числам a_2, b_2, прямые различные и параллельные; если же числа a_1, b_1 не пропорциональны числам a_2, b_2, прямые пересекаются.

Замечание 2. Если некоторые из коэффициентов системы уравнений первой степени равны нулю, то система (1) сводится к одной из следующих систем:

1) $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ y = b_0,\ a \neq 0,\ b \neq 0 \end{cases}$ (рис. 43, *а*);

2) $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ x = a_0,\ a \neq 0,\ b \neq 0 \end{cases}$ (рис. 43, *б*);

3) $\begin{cases} x = a_0, \\ y = b_0 \end{cases}$ (рис. 43, *в*);

4) $\begin{cases} y = b_1, \\ y = b_2 \end{cases}$ (рис. 43, *г*, *д*);

5) $\begin{cases} x = a_1, \\ x = a_2 \end{cases}$ (рис. 43, *е*, *ж*).

В случаях 1–3 прямые, соответствующие уравнениям системы, пересекаются в одной точке, т.е. системы имеют единственные решения.

В случаях 4 (при $b_1 \neq b_2$) и 5 (при $a_1 \neq a_2$) прямые параллельные и системы не имеют решений.

В случаях 4 (при $b_1 = b_2$) и 5 (при $a_1 = a_2$) указанные прямые сливаются в одну прямую и системы имеют бесконечно много решений, соответствующих точкам этих прямых.

Замечание 3. Отметим, что уравнению

$$x = a$$

удовлетворяют все точки координатной плоскости, имеющие абсциссу, равную a, и ординату, равную любому числу; все такие точки лежат на прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $A(a;\ 0)$.

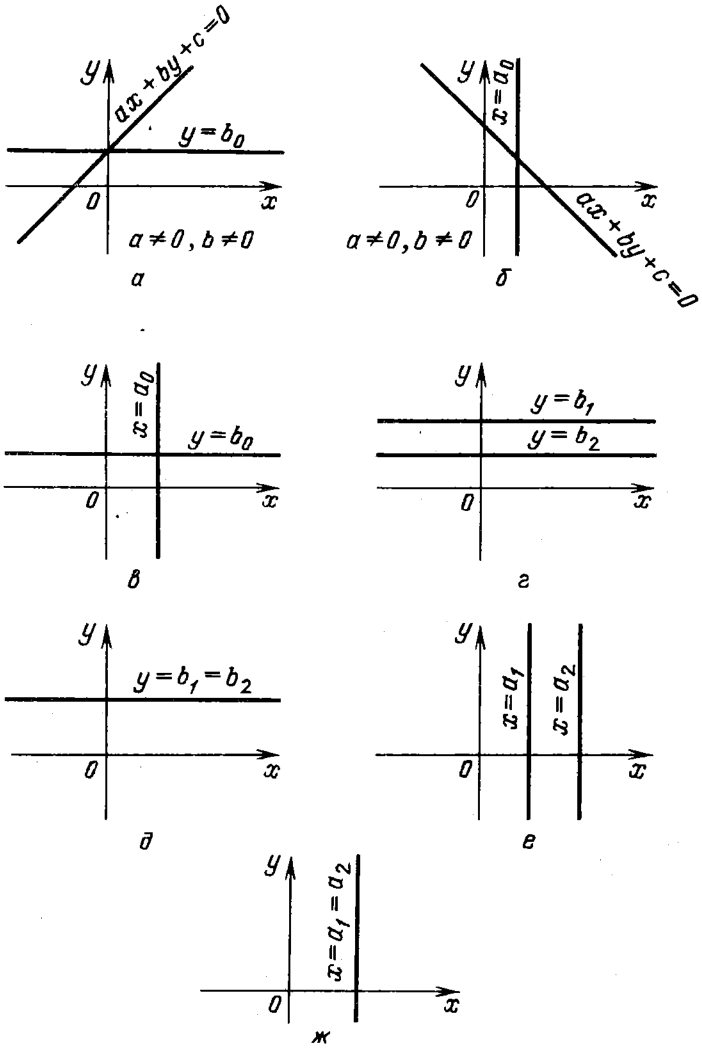
Вопросы

1. Какому условию должны удовлетворять числа k_1, k_2, b_1 и b_2, чтобы прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

а) пересекались; б) были параллельны; в) совпадали?

2. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2, \end{cases}$$



ax + by + c = 0
y = b0
a ≠ 0, b ≠ 0
а
x = a0
ax + by + c = 0
a ≠ 0, b ≠ 0
б
x = a0
y = b0
в
y = b1
y = b2
г
y = b1 = b2
д
x = a1
x = a2
е
x = a1 = a2
ж

Рис. 43

если:

а) $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$; б) $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$; в) $k_1 \neq k_2$?

3. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

(где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – числа, отличные от нуля), если:

а) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$; б) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$; в) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$?

4. Какому условию должны удовлетворять отличные от нуля числа a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0: \end{cases}$$

а) имела единственное решение; б) имела бесконечно много решений; в) не имела решений?

5. Какое уравнение имеет прямая, параллельная:

а) оси Ox; б) оси Oy?

§ 18. Системы рациональных уравнений

1. Понятие системы рациональных уравнений. Уравнение, обе части которого есть рациональные выражения относительно x и y, называется *рациональным уравнением с двумя неизвестными* x *и* y.

Вот примеры рациональных уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$2x - y + 4 = 0; \tag{1}$$

$$2x^2 - 3x + y - x + 1 = 0; \tag{2}$$

$$\frac{1}{x} = 3 - \frac{4}{y}. \tag{3}$$

Пара чисел $(x_0; y_0)$ называется *решением уравнения с двумя неизвестными* x, y, если эти числа удовлетворяют этому уравнению, т.е. если при подстановке x_0 вместо x, а y_0 вместо y это уравнение превращается в верное числовое равенство.

Например, пара чисел $(-2;\ 0)$ есть решение уравнения (1), пара чисел $(0;\ -1)$ – решение уравнения (2), пара чисел $(-1;\ 1)$ – решение уравнения (3).

Уравнение, обе части которого есть рациональные выражения относительно x, y и z, называется *рациональным уравнением с тремя неизвестными* x, y *и* z.

Вот примеры рациональных уравнений с тремя неизвестными x, y и z:

$$3x - 6y + z - 6 = 0; \tag{4}$$

$$7x^2 + 5xy - z^2 + yz - x + z + y - 3 = 0; \tag{5}$$

$$\frac{x-y}{x-z} + \frac{x+y}{x+z} = x + y + z. \tag{6}$$

Тройка чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ называется *решением уравнения с тремя неизвестными* x, y *и* z, если эти числа удовлетворяют этому уравнению, т.е. если при подстановке x_0 вместо x, y_0 вместо y, z_0 вместо z это уравнение превращается в верное числовое равенство.

Например, тройка чисел $(2;\ -1;\ -6)$ есть решение уравнения (4), тройка чисел $(0;\ 3;\ 0)$ – решение уравнения (5), тройка чисел $(0;\ 1;\ 1)$ – решение уравнения (6).

Аналогично определяются рациональное уравнение с n неизвестными и его решение.

Рациональное уравнение, левая часть которого есть многочлен первой степени, а правая – нуль, называют еще *уравнением первой степени*.

Например, уравнение (1) есть уравнение первой степени с двумя неизвестными x и y, а уравнение (4) – уравнение первой степени с тремя неизвестными x, y и z.

Рациональное уравнение, левая часть которого есть многочлен второй степени, а правая – нуль, называют еще *уравнением второй степени*.

Например, уравнение (2) есть уравнение второй степени с двумя неизвестными x и y, уравнение (5) – уравнение второй степени с тремя неизвестными x, y и z.

Пусть даны два рациональных уравнения с двумя неизвестными x и y. Говорят, что надо решить систему двух рациональных уравнений с двумя неизвестными x и y, если требуется найти все пары чисел $(x; y)$, являющиеся решениями одновременно и первого, и второго уравнений.

Вот примеры систем двух рациональных уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x - 7y + 9 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ x^2 - 7xy + 3y^2 - x + 4y - 11 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 0, \\ x^2 + 2y = 0. \end{cases}$$

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными x и y называется пара чисел $(x_0; y_0)$, являющаяся решением как первого, так и второго уравнения этой системы.

Пусть даны три рациональных уравнения с тремя неизвестными x, y и z. Говорят, что надо решить систему трех рациональных уравнений с тремя неизвестными x, y и z, если требуется найти все тройки чисел $(x; y; z)$, являющиеся решениями одновременно всех трех этих уравнений.

Вот примеры систем трех рациональных уравнений с тремя неизвестными x, y и z:

$$\begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - z + 7 = 0, \\ 7x - 3y + z + 11 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y - 2z + 1 = 0, \\ x - y - 9z + 7 = 0, \\ 3x^2 - 2xy - y^2 - 7y + 11 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{z}{x+y} - 5 = 0, \\ \dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y} = 1, \\ 2x + 3y - z^2 = 0. \end{cases}$$

Решением системы трех уравнений с тремя неизвестными x, y и z называется тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$, являющаяся решением и первого, и второго, и третьего уравнений этой системы.

Аналогично определяются система n рациональных уравнений с n неизвестными и ее решение.

Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или показать, что их нет.

Мы уже рассмотрели решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. В этом параграфе мы покажем на примерах, как можно решать системы уравнений первой степени с n неизвестными, а также системы уравнений первой и второй степеней. Кроме того, будут рассмотрены задачи, приводящие к более сложным системам рациональных уравнений. При этом будем пользоваться утверждениями о равносильности, приведенными в § 16.

Вопросы

1. Какое уравнение называется рациональным?
2. Какое уравнение называется уравнением: а) первой степени; б) второй степени?
3. Что называется решением уравнения с двумя неизвестными x и y?
4. Что называется решением уравнения с тремя неизвестными x, y и z?
5. Когда говорят, что надо решить систему двух уравнений с двумя неизвестными?
6. Когда говорят, что надо решить систему трех уравнений с тремя неизвестными?
7. Что называется решением системы трех уравнений с тремя неизвестными?
8. Что значит решить систему уравнений?

2. Системы уравнений первой степени. Мы уже изучили системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Любую такую систему можно решить способом подстановки. Ниже мы приведем примеры решения системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными и системы четырех уравнений первой степени с четырьмя неизвестными и покажем, что эти системы также можно решать способом подстановки.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0, \\ 3x - 4y - z + 2 = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Покажем, как можно решить эту систему способом подстановки. Из третьего уравнения системы (1) выражаем x через y и z:

$$x = y - z \qquad (2)$$

и подставляем $y - z$ вместо x в первое и второе уравнения системы (1). Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2(y - z) - 3y + z - 1 = 0, \\ 3(y - z) - 4y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

которые после приведения подобных членов запишутся в виде

$$\begin{cases} -y - z - 1 = 0, \\ -y - 4z + 2 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Таким образом, метод подстановки свел решение системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными x, y и z к решению системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными y и z.

Решая систему (3), находим $y_0 = -2$, $z_0 = 1$. Подставляя z_0 и y_0 в выражение (2), находим $x_0 = -3$.

Итак, система (1) имеет единственное решение: $x_0 = -3$, $y_0 = -2$, $z_0 = 1$.

В общем случае при решении системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными x, y и z можно поступать так же, как в этом примере. Одну из неизвестных, например z, пользуясь одним из уравнений системы, выражаем через остальные переменные, входящие в это уравнение, и полученное выражение подставляем в другие два уравнения. Получаем систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y.

Если эта система имеет единственное решение, то находим ее решение — числа x_0 и y_0 и, подставляя их в выражение для z, находим z_0. Тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ и будет единственным решением системы. Если же эта система не имеет решений, то и исходная система также не имеет решений. Наконец, если эта система имеет бесконечно много решений, то и исходная система будет иметь бесконечно много решений.

Подобным образом решаются системы уравнений первой степени с четырьмя, пятью и т.д. неизвестными.

Но на этом пути могут быть упрощения. Например, если одно из уравнений системы содержит только x, то, решив его, найдем сразу же его решение — число x_0. Подставив x_0 в остальные два уравнения вместо x, получим два уравнения с двумя неизвестными y и z. Но может случиться, что и подставлять некуда, потому что два уравнения не содержат x. Остается их решить относительно y и z.

Так будет, например, в следующем примере.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x + y - u + 1 = 0, \\ 2x - 3y - z - 3 = 0, \\ x + y - z + u - 4 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Из первого уравнения системы имеем

$$y = 1 - x. \tag{5}$$

Подставив $1 - x$ вместо y в остальные уравнения системы (4), получим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + (1 - x) - u + 1 = 0, \\ 2x - 3(1 - x) - z - 3 = 0, \\ x + (1 - x) - z + u - 4 = 0, \end{cases}$$

которая после приведения подобных членов запишется так:

$$\begin{cases} 2 - u = 0, \\ 5x - z - 6 = 0, \\ -z + u - 3 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Из первого уравнения системы (6) находим $u = 2$. Подставив $u = 2$ в третье уравнение системы (6), находим $z = -1$. Подставив $z = -1$ во второе уравнение системы (6), находим $x = 1$. Наконец, подставив $x = 1$ в (5), находим $y = 0$. Итак, система (4) имеет единственное решение: $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$, $u = 2$.

Замечание. Если мы все делали правильно, то можно не проверять результат. Но могут вкрасться ошибки в вычисления, и потому рекомендуется подставить полученное решение в уравнения системы и убедиться, что оно действительно удовлетворяет этим уравнениям.

Вопрос

В чем заключается способ подстановки для решения системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными?

Упражнение

Решить следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0, \\ 3x - 4y - z + 2 = 0, \\ x + y + z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - 7y = 0, \\ x + z = 12, \\ 3x - 4y + z = 6. \end{cases}$

3. Решение задач при помощи систем уравнений первой степени.

Задача. На покупку портфеля, авторучки и книги затрачено 14 р. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка в 2 раза дешевле, книга в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 4 р. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 3 раза дешевле, авторучка в 4 раза дешевле, а книга в 2 раза дешевле, то за ту же покупку уплатили бы 5 р. Сколько стоят портфель, авторучка и книга?

Решение. Пусть портфель стоит x р., авторучка – y р., а книга – z р. Первое уравнение составляется из условия, что покупка стоит 14 р.:

$$x + y + z = 14.$$

Второе уравнение составляется из условия: если бы потрфель стоил $\frac{1}{5}x$ р., авторучка $\frac{1}{2}y$ р., книга $\frac{1}{2,5}z$ р., то покупка стоила бы 4 р.:

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2,5}z = 4.$$

Наконец, третье уравнение составляется из условия: если бы потрфель стоил $\frac{1}{3}x$ р., авторучка $\frac{1}{4}y$ р., а книга $\frac{1}{2}z$ р., то покупка стоила бы 5 р.:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 5.$$

В задаче надо найти такие значения x, y и z, которые одновременно удовлетворяют всем трем уравнениям. Другими словами, надо решить систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y + z = 14, \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2,5}z = 4, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 5. \end{cases} \tag{1}$$

Из первого уравнения системы (1) выражаем z через x и y:

$$z = 14 - x - y \tag{2}$$

и подставляем выражение $14 - x - y$ вместо z во второе и третье уравнения системы (1); получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{2}{5}(14 - x - y) = 4, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}(14 - x - y) = 5. \end{cases} \tag{3}$$

Умножая обе части первого уравнения на 10, а обе части второго на 12, перенося все члены уравнений в левые части и приводя, наконец, подобные члены, получаем, что система (3) равносильна системе

$$\begin{cases} -2x + y + 16 = 0, \\ 24 - 2x - 3y = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Из первого уравнения системы (4) выражаем y через x:

$$y = 2x - 16 \tag{5}$$

и подставляем выражение $2x - 16$ вместо y во второе уравнение системы (4). Получаем уравнение с одним неизвестным x:

$$24 - 2x - 3(2x - 16) = 0,$$

которое после приведения подобных членов запишется в виде

$$72 - 8x = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет единственный корень $x_0 = 9$. Подставляя x_0 в выражение (5), находим $y_0 = 2$. Подставляя x_0 и y_0 в выражение (2), находим $z_0 = 3$.

Следовательно, система (1) имеет единственное решение: $x_0 = 9$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$.

Ответ. Портфель стоил 9 р., авторучка – 2 р., книга – 3 р.

Упражнение

Пункт C расположен в 12 км от пункта B вниз по течению реки. Рыбак отправился на лодке в пункт C из пункта A, расположенного выше B. Через 4 ч он прибыл в C, а на обратный путь затратил 6 ч. Поставив на лодку мотор и тем самым увеличив скорость лодки относительно воды втрое, рыбак доплыл от пункта A до пункта B за 45 мин. Определить расстояние от A до B, скорость течения реки, считая ее постоянной, и собственную скорость лодки (т.е. скорость в стоячей воде).

4. Системы уравнений первой и второй степеней. В этом пункте мы приведем примеры решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, одно из которых первой степени, а другое второй степени, и системы трех уравнений с тремя неизвестными, два из которых первой степени, а третье второй степени.

Будет показано, что для решения таких систем применим способ подстановки.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0, \\ x^2 + 2xy + y^2 + 3y - 4x - 31 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Первое уравнение этой системы – уравнение первой степени.

Выразим из него x через y:

$$x = 7 - 2y. \tag{2}$$

Подставляя выражение $7-2y$ вместо x во второе уравнение системы, получаем уравнение

$$(7-2y)^2+2(7-2y)y+y^2+3y-4(7-2y)-31=0,$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов запишется в виде

$$y^2-3y-10=0. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет два корня:

$$y_1=-2 \text{ и } y_2=5.$$

Подставив эти числа в выражение (2) вместо y, получим

$$x_1=11 \text{ и } x_2=-3.$$

Итак, система (11) имеет два решения:

$$x_1=11, \quad y_1=-2;$$

$$x_2=-3, \quad y_2=5$$

и других решений она не имеет.

Ответ. $(11; -2)$ и $(-3; 5)$.

Подобным образом можно решить любую систему двух уравнений с неизвестными x и y, где одно уравнение первой степени, а другое второй степени. Выражаем x (или y) из уравнения первой степени и подставляем это выражение в уравнение второй степени. Получаем квадратное уравнение с неизвестным y (или x). Если квадратное уравнение имеет корни, то и система имеет соответствующие пары решений; если нет, то система не имеет решений.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-y+9=0, \\ x^2-y^2+y-5x-32=0. \end{cases} \tag{4}$$

Первое уравнение системы (4) – уравнение первой степени, а другое второй степени. Из первого уравнения выражаем y через x:

$$y=3x+9.$$

Подставляем выражение $3x+9$ вместо y во второе уравнение системы (4). Получаем уравнение

$$x^2-(3x+9)^2+(3x+9)-5x-32=0,$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов записывается в виде

$$-8x^2-56x-104=0.$$

Сократив на -8, получим квадратное уравнение

$$x^2+7x+13=0, \tag{5}$$

дискриминант которого

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -3 < 0.$$

Следовательно, уравнение (5) не имеет корней. Значит, и система (4) не имеет решений.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x - y - z + 3 = 0, \\ x^2 + 2xy + y^2 - xz + z^2 + x - 5 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Из первого уравнения системы (6) выражаем y через x и z:

$$y = z - x - 1. \tag{7}$$

Подставляя выражение $z - x - 1$ вместо y во второе и третье уравнения системы (6), получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными x и z:

$$\begin{cases} x - (z - x - 1) - z + 3 = 0, \\ x^2 + 2x(z - x - 1) + (z - x - 1)^2 - xz + z^2 + x - 5 = 0, \end{cases}$$

которая после раскрытия скобок и приведения подобных членов запишется в виде

$$\begin{cases} 2x - 2z + 4 = 0, \\ 2z^2 - xz + x - 2z - 4 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из первого уравнения системы (8) выражаем x через z:

$$x = z - 2 \tag{9}$$

и, подставляя выражение $z - 2$ вместо x во второе уравнение системы (8), получаем уравнение с одним неизвестным z:

$$2z^2 - z(z - 2) + (z - 2) - 2z - 4 = 0,$$

которое после упрощения запишется в виде

$$z^2 + z - 6 = 0. \tag{10}$$

Квадратное уравнение (10) имеет два корня:

$$z_1 = -3 \text{ и } z_2 = 2.$$

Подставляя эти числа в (9), получаем

$$x_1 = -5, \ x_2 = 0.$$

Наконец, подставляя сначала x_1 и z_1, а затем x_2 и z_2 в (7), находим

$$y_1 = 1 \text{ и } y_2 = 1.$$

Следовательно, система (6) имеет два решения:

$x_1 = -5, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = -3;$

$x_2 = 0, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = 2$

и других решений не имеет.

Ответ. $(-5;\ 1;\ -3)$ и $(0;\ 1;\ 2)$.

Вопрос

Как можно решать систему уравнений первой и второй степеней?

Упражнение

Решить следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 2x^2 - y^2 + 3x - y - 9 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y + z = 4, \\ x + 4y + 4z = -5, \\ xy + yz + zx = -9. \end{cases}$

5. Решение задач при помощи систем уравнений первой и второй степеней.

Задача. Проценты содержания (по массе) кислоты в трех растворах таковы, что квадрат процента второго равен произведению процентов первого и третьего. Если смешать первый, второй и третий растворы в массовом отношении $2:3:4$, то получится раствор, содержащий 32% кислоты. Если же смешать их в массовом отношении $3:2:1$, то получится раствор, содержащий 22% кислоты. Сколько процентов кислоты содержит каждый раствор?

Решение. Пусть в первом растворе x % кислоты, во втором y % кислоты и в третьем z % кислоты. По первому условию задачи

$$y^2 = xz. \tag{1}$$

В 1 г первого раствора содержится $\frac{x}{100}$ г кислоты, в 1 г второго раствора — $\frac{y}{100}$ г кислоты и в 1 г третьего раствора — $\frac{z}{100}$ г кислоты. Если мы возьмем 2 г первого раствора, 3 г второго и 4 г третьего, то получим 9 г смеси, содержащей

$$2 \cdot \frac{x}{100} + 3 \cdot \frac{y}{100} + 4 \cdot \frac{z}{100} \text{ (г)}$$

кислоты. По условию задачи полученная смесь содержит 32% кислоты, т.е. в 9 г смеси содержится $9 \cdot \frac{32}{100}$ г кислоты. Из этого условия получаем уравнение

$$2 \cdot \frac{x}{100} + 3 \cdot \frac{y}{100} + 4 \cdot \frac{z}{100} = 9 \cdot \frac{32}{100}. \tag{2}$$

Аналогично рассуждая, получаем еще одно уравнение:

$$3 \cdot \frac{x}{100} + 2 \cdot \frac{y}{100} + 1 \cdot \frac{z}{100} = 6 \cdot \frac{22}{100}. \qquad (3)$$

Мы видим, что искомые числа x, y и z одновременно удовлетворяют уравнениям (1)–(3). Следовательно, для решения задачи надо решить систему трех уравнений (1)–(3) в тремя неизвестными x, y и z. Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ 2x + 3y + 4z = 288, \\ 3x + 2y + z = 132 \end{cases} \qquad (4)$$

и решим ее. Из третьего уравнения системы (4) выразим z через x и y:

$$z = 132 - 3x - 2y. \qquad (5)$$

Подставляя выражение $132 - 3x - 2y$ вместо z в первое и второе уравнения системы (4), получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} y^2 = x(132 - 3x - 2y), \\ 2x + 3y + 4(132 - 3x - 2y) = 288. \end{cases}$$

После переноса всех членов каждого уравнения в одну сторону, раскрытия скобок и приведения подобных членов получим систему

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 2xy - 132x = 0, \\ 240 - 10x - 5y = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Из второго уравнения системы (6) выразим y через x:

$$y = 48 - 2x \qquad (7)$$

и подставим выражение $48 - 2x$ вместо y в первое уравнение системы (6). Получим уравнение с одним неизвестным x

$$3x^2 + (48 - 2x)^2 + 2x(48 - 2x) - 132x = 0,$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов можно записать в виде

$$3x^2 - 228x + 2304 = 0.$$

Сократив это уравнение на 3, получим квадратное уравнение

$$x^2 - 76x + 768 = 0. \qquad (8)$$

Дискриминант этого квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac = (-76)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 768 = 52^2 > 0.$$

Значит, уравнение (8) имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{76 \pm 52}{2},$$

т.е. $x_1 = 64$, $x_2 = 12$.

Подставляя x_1 и x_2 в выражение (7), находим

$$y_1 = -80, \quad y_2 = 24.$$

Подставляя пары $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ в выражение (5), находим

$$z_1 = 100, \quad z_2 = 48.$$

Итак, система (4) имеет два решения:

$$x_1 = 64, \quad y_1 = -80, \quad z_1 = 100;$$

$$x_2 = 12, \quad y_2 = 24, \quad z_2 = 48,$$

но по предположению y есть процент кислоты во втором растворе, и, значит, y не может быть отрицательным числом. Следовательно, условию задачи удовлетворяет лишь одно решение:

$$x_2 = 12, \quad y_2 = 24, \quad z_2 = 48.$$

Ответ. Первый раствор содержал 12% кислоты, второй – 24%, третий – 48%.

Упражнения

1. Периметр прямоугольника равен 16, площадь – 15. Определить стороны этого прямоугольника.

2. Квадрат меньшего из двух натуральных чисел равен их сумме, а разность этих чисел равна 15. Найти эти числа.

6. Решение задач при помощи систем рациональных уравнений.

Задача 1. Бригада рабочих начала рыть траншею. Через 3 дня к ней присоединилась вторая бригада, и им понадобилось еще 8 дней совместной работы, чтобы окончить рытье траншеи. Если бы, наоборот, первые три дня работала только вторая бригада, то до окончания работы обеим бригадам вместе потребовалось бы еще 9 дней. За какое время каждая из бригад в отдельности сделала бы всю работу?

Решение. Пусть первая бригада может сделать всю работу за x дней, а вторая – за y дней. Тогда за 1 день первая бригада делает $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а вторая – $\frac{1}{y}$ часть.

В первом случае первая бригада работала 11 дней и, следовательно, сделала $11 \cdot \frac{1}{x}$ часть всей работы, а вторая бригада работала 8 дней и сделала $8 \cdot \frac{1}{y}$ часть всей работы. Поскольку вместе они выполнили всю работу, то

$$11 \cdot \frac{1}{x} + 8 \cdot \frac{1}{y} = 1. \qquad (1)$$

Во втором случае первая бригада работала бы 9 дней и сделала $9 \cdot \frac{1}{x}$ часть всей работы, а вторая – 12 дней и сделала $12 \cdot \frac{1}{y}$ часть всей работы. Опять вместе они выполнили бы всю работу, т.е.

$$9 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{y} = 1. \qquad (2)$$

Таким образом, искомые числа x и y удовлетворяют уравнениям (1) и (2), т.е., чтобы решить задачу, надо решить систему двух рациональных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 11 \cdot \frac{1}{x} + 8 \cdot \frac{1}{y} = 1, \\ 9 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{y} = 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Для решения этой системы уравнений нет необходимости приводить каждое уравнение к виду, где в левой части алгебраическая дробь, а в правой нуль. В данном случае это только затруднит решение. Лучше здесь рассматривать $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ как новые неизвестные. Тогда решаем систему (3) как линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными. Из первого уравнения системы (3) выражаем $\frac{1}{y}$ через $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{8} - \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{x} \qquad (4)$$

и подставляем выражение $\frac{1}{8} - \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{x}$ вместо $\frac{1}{y}$ во второе уравнение системы (3). Получаем уравнение

$$9 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{x}\right) = 1,$$

откуда $\frac{1}{x} = \frac{1}{15}$. Подставляя $\frac{1}{15}$ вместо $\frac{1}{x}$ в выражение (4), находим $\frac{1}{y} = \frac{1}{30}$. Теперь ясно, что $x = 15$, а $y = 30$.

Ответ. Первая бригада сделала бы всю работу за 15 дней, а вторая — за 30 дней.

Задача 2. По окружности движутся две точки в одну и ту же сторону. Длина окружности равна 24 м. Первая точка обходит окружность на 9 мин быстрее второй и обгоняет ее каждые 4 мин. Определить скорости этих точек.

Решение. Пусть скорость первой точки x м/мин, скорость второй y м/мин. Тогда первая точка проходит всю окружность за $\frac{24}{x}$ мин, а вторая — за $\frac{24}{y}$ мин. Так как первая точка проходит окружность на 9 мин быстрее второй, то

$$\frac{24}{y} = \frac{24}{x} + 9. \tag{5}$$

Второе условие задачи означает, что за 4 мин первая точка проходит на 24 м больше второй. Но за 4 мин первая точка проходит $4x$ м, а вторая — $4y$ м, поэтому

$$4x = 4y + 24. \tag{6}$$

Следовательно, искомые значения x и y удовлетворяют одновременно уравнениям (5) и (6), т.е., чтобы решить задачу, надо решить систему двух рациональных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{24}{y} = \frac{24}{x} + 9, \\ 4x = 4y + 24. \end{cases} \tag{7}$$

Из второго уравнения системы (7) выражаем x через y:

$$x = y + 6 \tag{8}$$

и подставляем $y + 6$ вместо x в первое уравнение системы (7).

Получаем уравнение

$$\frac{24}{y} = \frac{24}{y+6} + 9. \tag{9}$$

Перенося в уравнении (9) все члены в левую часть и вычитая затем алгебраические дроби, получаем уравнение

$$-\frac{9y^2 - 54y + 144}{y(y+6)} = 0, \tag{10}$$

равносильное уравнению (9). Решим теперь уравнение

$$-9y^2 - 54y + 144 = 0$$

или равносильное ему уравнение

$$y^2 + 6y - 16 = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) имеет два корня:

$$y_1 = 2 \text{ и } y_2 = -8.$$

Так как числа y_1 и y_2 не обращают в нуль знаменатель левой части уравнения (10), то они являются его корнями. Теперь, подставляя y_1 и y_2 в выражение (8), находим

$$x_1 = 8 \text{ и } x_2 = -2.$$

Таким образом, система (7) имеет два решения:

$$x_1 = 8,\ y_1 = 2 \text{ и } x_2 = -2,\ y_2 = -8.$$

В наших рассуждениях скорости x и y – положительные числа, поэтому второе решение системы не удовлетворяет условиям задачи.

Ответ. Скорость первой точки 8 м/мин, а второй 2 м/мин.

Задача 3. Каждому из трех рабочих для выполнения некоторой работы требуется определенное время, причем третий рабочий выполняет ее на 1 ч быстрее первого. Работая все вместе, они выполняют работу за 1 ч. Если же первый рабочий проработает 1 ч и прекратит работу, а затем второй рабочий проработает 4 ч, то они вместе выполнят всю работу. За сколько времени может выполнить всю работу каждый рабочий?

Решение. Пусть первый рабочий может выполнить всю работу за x ч, второй – за y ч, третий – за z ч. Тогда за 1 ч первый сделает $\frac{1}{x}$ часть всей работы, второй – $\frac{1}{y}$ часть всей работы и третий – $\frac{1}{z}$ часть всей работы. Работая вместе, они выполняют в час $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ часть всей работы. Но по условию задачи за 1 ч они выполняют всю работу, следовательно,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1. \tag{12}$$

Если первый рабочий проработает 1 ч, а затем второй проработает 4 ч, то они вместе сделают $\frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{y}$ часть всей работы. Но по условию, так работая, они сделают всю работу, следовательно,

$$\frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{y} = 1. \tag{13}$$

Так как третий рабочий выполняет всю работу на 1 ч быстрее первого, то

$$x = z + 1. \tag{14}$$

Таким образом, искомые числа x, y, z одновременно удовлетворяют уравнениям (12)–(14). Следовательно, для решения задачи надо решить систему трех рациональных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \\ \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{y} = 1, \\ x = z + 1. \end{cases} \tag{15}$$

Из третьего уравнения системы (15) выражаем z через x:

$$z = x - 1. \tag{16}$$

Из второго уравнения системы (15) выражаем $\frac{1}{y}$ через x:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right). \tag{17}$$

Подставляя выражения (16) и (17) вместо z и $\frac{1}{y}$ в первое уравнение системы (15), получаем уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x - 1} = 1. \tag{18}$$

Перенося все его члены в левую часть и складывая в ней алгебраические дроби, получаем уравнение

$$\frac{3x^2 - 10x + 3}{4x(x - 1)} = 0, \tag{19}$$

равносильное уравнению (18). Решим теперь уравнение

$$3x^2 - 10x + 3 = 0. \tag{20}$$

Оно имеет два корня: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Так как x_1 и x_2 не обращают в нуль знаменатель левой части уравнения (19), то x_1 и x_2 есть корни уравнения (19). Подставляя x_1 и x_2 в (16) и (17), находим $y_1 = 6$, $y_2 = -2$, $z_1 = 2$, $z_2 = -\frac{2}{3}$. Следовательно система (15) имеет два решения:

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 6, \quad z_1 = 2; \qquad x_2 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = -2, \quad z_2 = -\frac{2}{3}.$$

Поскольку через x, y и z мы обозначили количество часов, необходимое для выполнения работы, то x, y и z не могут быть отрицательными числами. Поэтому условию задачи удовлетворяет лишь решение $x_1 = 3$, $y_1 = 6$, $z_1 = 2$.

Ответ. Первый рабочий может выполнить всю работу за 3 ч, второй – за 6 ч, третий – за 2 ч.

Упражнения

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 525 км, выехал мотоциклист. Через некоторое время из B в A выехала автомашина, которая встретилась с мотоциклистом в тот момент, когда он проехал $\frac{3}{7}$ расстояния от A до B. Мотоциклист и автомашина продолжали двигаться дальше, и мотоциклист приехал в B через 3 ч после того, как автомашина прибыла в A. Если бы автомашина выехала из B на 1,5 ч раньше, чем в действительности, то она встретилась бы с мотоциклистом на расстоянии 180 км от A. Определить скорости мотоциклиста и автомашины, считая их постоянными; опеределить также, на сколько позднее мотоциклиста вышла автомашина из B в A.

2. Геолог шел в гору. Когда он проходил вторую половину своего пути наверх, то сбавил скорость на 0,5 км/ч по сравнению со скоростью, с которой шел первую половину пути. На преодоление всего пути до вершины ему потребовалось 12 ч. Спускаясь той же дорогой, он проходил за 1 ч на 1 км больше, чем в первую половину своего пути наверх. На спуск он затратил 4 ч. Найти длину пути и скорость, с которой он шел первую половину пути наверх.

3. В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 км до реки, далее по реке вверх против течения до пристани B, затратив 18 ч на весь путь от A до B. Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B до A по тому же пути равно 15 ч. Собственная скорость парохода, т.е. скорость в стоячей воде, равна 18 км/ч. Скорость течения реки 3 км/ч. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость течения притока?

Исторические сведения

Квадратные уравнения умели решать еще вавилоняне. Это было связано с решением задач о нахождении площадей земельных участков, а также с развитием астрономии.

Однако у вавилонян еще не было понятия отрицательного числа, и поэтому корни квадратного уравнения могли быть только положительными.

В "Арифметике" Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится ряд задач, решаемых при помощи составления уравнений.

Задачи на квадратные уравнения встречаются в трудах индийских математиков уже с V в.н.э. Вот одна из задач индийского математика XII в. Бхскары:

Обезьянок резвых стая,
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам . . .
Стали прыгать, повисая . . .
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?

Этой задаче соответствует квадратное уравнение

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x.$$

Квадратные уравнения классифицируются в трактате "Алгебра" аль-Хорезми. В нем приводятся и способы их решения.

Только в XVI в. благодаря главным образом исследованиям французского математика Ф. Виета (1540–1603) впервые уравнения второй степени, так же, впрочем, как третьей и четвертой степеней, стали рассматривать в буквенных обозначениях. Именно Виет впервые ввел буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для данных, т.е. коэффициентов уравнений. Особенно ценил Виет открытые им формулы, которые теперь называются формулами Виета. Однако Виет признавал только положительные корни.

Лишь в XVII в. после работ Декарта, Ньютона и других математиков решение квадратных уравнений принимает современный вид.

В "Арифметике" Л.Ф. Магницкого имеется немало задач на квадратные уравнения. Вот одна из них:

"Некий генерал хочет с 5000 человек баталию учинить, и чтобы та была в лице вдвое, нежели в стороне. Колико она баталия имети будет в лице и в стороне?"

Другими словами, сколько солдат надо поставить по фронту и сколько им в затылок, чтобы число солдат по фронту в два раза было больше, чем число солдат, расположенных им в затылок?

Системы уравнений первой и второй степеней встречаются еще в древневавилонских текстах.

Вот, например, одна такая задача:

"Площади двух своих квадратов я сложил: $25\frac{5}{12}$. Сторона второго квадрата равна $\frac{2}{3}$ стороны первого и еще 5".

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\dfrac{5}{12}, \\ y = \dfrac{2}{3}x + 5. \end{cases}$$

Еще в древности математики сталкивались в процессе решений задач с извлечением корня квадратного из отрицательного числа; в этом случае задача считалась неразрешимой. Однако постепенно выяснялось, что решения многих задач, задаваемых в действительных числах, получают простое объяснение при помощи выражений $a + b\sqrt{-1}$, которые в конце концов стали называть тоже числами, но уже комплексными. Первое обоснование простейших действий над комплексными числами дал итальянский математик Р. Бомбелли в 1572 г., хотя еще долгое время к комплексным числам относились как к чему-то сверхъестественному. Л. Эйлер внес существенный вклад в вопросы теории комплексных чисел. После его работ комплексные числа получили окончательное признание как предмет и средство изучения. Само название "комплексное число" было в 1831 г. предложено К. Гауссом – великим немецким математиком.

В настоящее время комплексные числа широко употребляются во многих вопросах физики и техники.

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. НЕРАВЕНСТВА

§ 19. Квадратичная функция и ее график

Функция

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

где a, b, c – данные числа, называется *квадратичной*. Областью ее определения является множество всех действительных чисел.

При $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ эта функция есть хорошо известная нам функция $y = x^2$.

В этом параграфе будут изучаться свойства и график этой функции при других значениях a, b, c.

1. Функция $y = ax^2$. Рассмотрим сначала свойства и график функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

Функция

$$y = ax^2 \quad (a > 0) \qquad (1)$$

определена для любых действительных значений x.

Ее свойства очень похожи на уже известные нам свойства функции $y = x^2$ и доказываются аналогично. Перечислим их.

1. Если $x = 0$, то $y = 0$.
2. Если $x \neq 0$, то $y > 0$.
3. Для неотрицательных значений x функция (1) возрастает, а для неположительных значений x убывает.
4. Если положительное x неограниченно возрастает, то y неограниченно возрастает, а если отрицательное x таково, что его абсолютная величина неограниченно возрастает, то y неограниченно возрастает. Иными словами, $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.
5. Функция (1) четная, поэтому ее график симметричен относительно оси Oy.
6. Функция (1) непрерывная, поэтому ее график – непрерывная линия, т.е. он может быть изображен одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги.

График функции (1) очень похож на график функции $y = x^2$.

Линия, являющаяся графиком функции (1), называется *параболой*. Говорят, что эта парабола имеет уравнение $y = ax^2$. Коротко мы будем говорить "парабола $y = ax^2$".

Пример 1. Рассмотрим две функции

$y = x^2$ и $y = 2x^2$.

Обе они определены для любых действительных значений x.

Зададим декартову систему координат Oxy и число x_0. Точка $A(x_0;\ x_0^2)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, а точка $A_1(x_0;\ 2x_0^2)$, имеющая ту же абсциссу, принадлежит графику функции $y = 2x^2$ (рис. 44). Ординаты точек A_1 и A находятся в отношении $2:1$, т.е. точка A_1 получается из точки A растяжением ординаты точки A в два раза, а точка A получается из точки A_1 сжатием ординаты точки A_1 в два раза. Это рассуждение можно провести для любых точек графиков функций $y = x^2$ и $y = 2x^2$, имеющих одну и ту же абсциссу x. Поэтому говорят, что график функции $y = 2x^2$ получается из графика функции $y = x^2$ растяжением последнего в два раза вдоль оси Oy.

Рассуждая аналогично, можно показать, что график функции

$y = ax^2$,

если $a > 1$, получается из графика функции $y = x^2$ растяжением последнего в a раз вдоль оси y; если же $0 < a < 1$, то сжатием последнего в $\dfrac{1}{a}$ раз.

На рис. 45,*а* изображены в одной и той же декартовой системе координат Oxy параболы $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, а на рис. 45,*б* – параболы $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$.

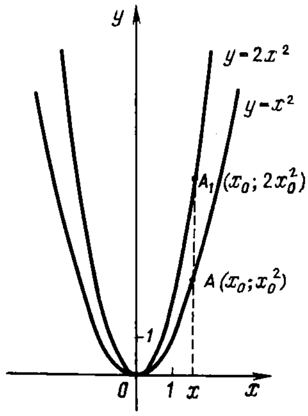


Рис. 44

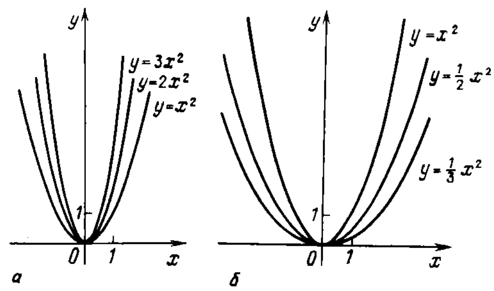


Рис. 45

Рассмотрим теперь функцию $y = ax^2$ при $a < 0$.

На рис. 46 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2$.

Первый из них расположен выше, а второй – ниже оси Ox, если исключить точку $O(0;\ 0)$. Эти графики симметричны относительно оси Ox: ординаты их точек, имеющих одну и ту же абсциссу x_0, одинаковы по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки.

Точно так же графики функций

$$y = ax^2 \quad \text{и} \quad y = -ax^2,$$

где a – данное, отличное от нуля число, симметричны относительно оси Ox. При $a > 0$ первый из них расположен выше, а второй – ниже оси Ox, если исключить точку $O(0;\ 0)$. Таким образом, графиком функции $y = ax^2$ при $a < 0$, так же как и при $a > 0$, является парабола.

На рис. 47 в одной и той же декартовой системе Oxy изображены параболы $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$.

При любом данном значении a $(a \neq 0)$ функция

$$y = ax^2$$

четная, потому что для всякого x выполняется равенство

$$a(-x)^2 = ax^2.$$

Это показывает, что ось Oy служит осью симметрии параболы

$$y = ax^2 \quad (a \neq 0).$$

Точка, в которой парабола $y = ax^2$ пересекается со своей осью симметрии, называется *вершиной параболы*, а ось симметрии параболы называется *осью параболы*.

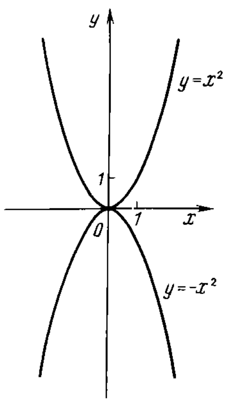


Рис. 46

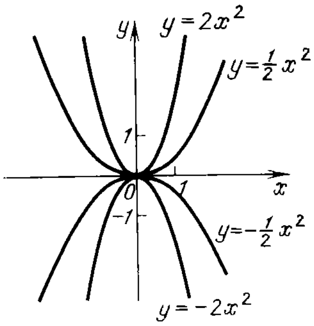


Рис. 47

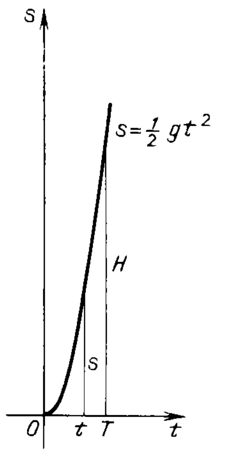


Рис. 48

Пример 2. Изучая свободное падение тел, Галилей[1]) пришел к следующему физическому закону.

Падающая на землю материальная точка[2]) движется по закону

$$s = \frac{1}{2} gt^2 \quad (t \geqslant 0,\ g \approx 9{,}81), \qquad (2)$$

где s – путь (в метрах), пройденный точкой за время падения t (в секундах) и g (м/с^2) – ускорение свободного падения.

Функция (2) есть частный случай функции $s = at^2$ при $a = g/2$, рассматриваемой на множестве неотрицательных t. Ее схематический график изображен на рис. 48.

Пользуясь формулой (2), мы можем вычислить путь s, пройденный точкой за данное время t.

Обратно, по данному $s \geqslant 0$ определяется t по формуле

$$t = \sqrt{2s/g}.$$

Пользуясь графиком (см. рис. 48), мы можем определить s по t и t по s без вычислений.

Если точка падала с высоты H и достигла земли за время T, то

$$H = \frac{1}{2}gT^2 \text{ и } T = \sqrt{2H/g}.$$

Замечание. При пользовании графиком, изображенным на рис. 48, было бы ошибкой думать, что точка движется по графику. Надо считать, что точка движется по оси Os, т.е. ее траекторией является ось Os. График помогает узнавать, где на оси Os она находится в каждый данный момент t.

Вопросы

1. Как называется линия, являющаяся графиком функции $y = ax^2$ $(a > 0)$?
2. Как получить график функции $y = ax^2$ $(a > 0)$ из графика функции $y = x^2$?
3. Какими свойствами обладает функция $y = ax^2$ $(a > 0)$?
4. Как называется линия, являющаяся графиком функции $y = ax^2$ $(a \neq 0)$?
5. Какая прямая является осью симметрии параболы $y = ax^2$? Почему?
6. Что называется: а) вершиной; б) осью параболы $y = ax^2$ $(a \neq 0)$?
7. Как записывается уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox параболе $y = ax^2$ $(a \neq 0)$?

Упражнения

1. Нарисовать в декартовой системе координат Oxy графики парабол:

а) $y = 0{,}3x^2$; б) $y = 3x^2$; в) $y = 1{,}5x^2$.

[1]) Г. Галилей (1564–1642) – итальянский ученый, один из основателей точного естествознания.

[2]) Предполагается, что тело падает в безвоздушном пространстве. Для реального падающего тела надо еще учитывать сопротивление воздуха.

2. Нарисовать в декартовой системе координат Oxy графики парабол:

а) $y = -3x^2$; б) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

3. Нарисовать в одной и той же декартовой системе координат Oxy графики парабол:

$y = 3x^2$; $y = -3x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$; $y = x^2$; $y = -x^2$.

2. Парабола $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

Теорема. *Пусть в прямоугольной системе координат Oxy дана парабола*

$$y = ax^2 \quad (a \neq 0), \tag{1}$$

и пусть произведен параллельный перенос этой параболы так, что в результате ее вершина оказалась в точке $O(x_0;\ y_0)$, где x_0 и y_0 – данные числа. Тогда парабола, полученная в результате переноса, имеет уравнение

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть в плоскости Oxy дана парабола (рис. 49) $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. Выполним параллельный перенос параболы так, чтобы ее вершина – точка O – перешла в точку $O'(x_0;\ y_0)$.

Предположим, что при том же параллельном переносе вместе с параболой были перенесены и прямые Ox и Oy. Они перешли при этом в прямые $O'x'$ и $O'y'$ (изображенные штриховыми линиями). Можно считать, что у нас теперь есть новая система координат $O'x'y'$.

Произвольная точка A перенесенной параболы в системе координат Oxy имела координаты $(x;\ y)$, а в системе $O'x'y'$ имеет координаты $(x';\ y')$. Эти числа связаны между собой формулами

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \tag{3}$$

Действительно, пусть, как на рис. 49, числа x_0, y_0, x', y' положительные.

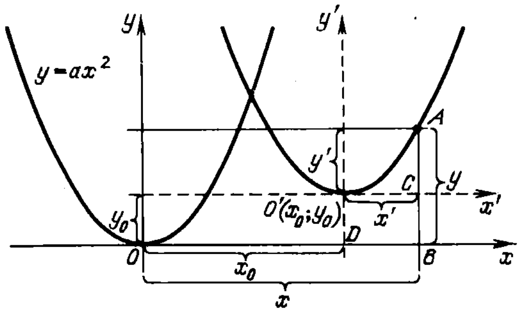


Рис. 49

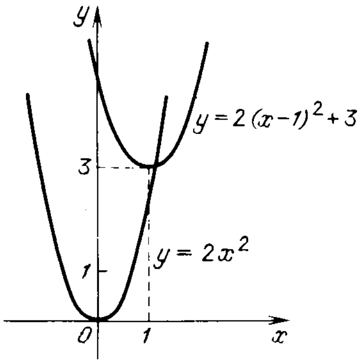


Рис. 50

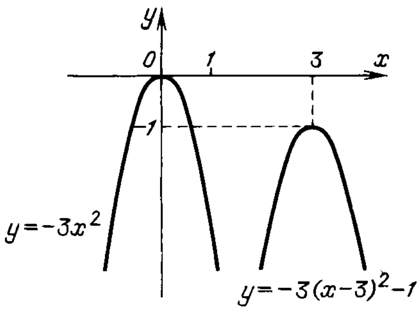


Рис. 51

Проведя через точку A прямые, параллельные осям координат, получим

$$x = OB, \quad x_0 = OD, \quad x' = DB,$$
$$y = AB, \quad y_0 = BC, \quad y' = AC.$$

Но $OB = OD + DB$, $AB = BC + CA$, откуда и следуют равенства (3).

Подобные рассуждения можно провести и в случае, когда числа x_0, y_0, x', y' любые, необязательно положительные.

Формулы (3) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases} \tag{4}$$

Так как мы перенесли параболу (1) вместе с системой координат, то в новой системе координат парабола, полученная в результате переноса, имеет уравнение

$$y' = a(x')^2. \tag{5}$$

Подставляя в (5) формулы (4), получаем, что эта парабола имеет в системе координат Oxy уравнение

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2,$$

или уравнение

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Теорема доказана.

П р и м е р 1. Уравнение

$$y = 2(x - 1)^2 + 3$$

есть уравнение параболы в плоскости Oxy с вершиной в точке (1; 3), полученной параллельным переносом параболы $y = 2x^2$ (рис. 50).

Пример 2. Если произвести параллельный перенос параболы

$$y = -3x^2$$

так, чтобы ее вершина оказалась в точке (3; –1), то ее уравнение будет иметь вид (рис. 51)

$$y = -3(x-3)^2 - 1.$$

В частном случае, когда $x_0 = 0$, формула (2) имеет вид

$$y = ax^2 + y_0.$$

Это есть уравнение параболы, полученной параллельным переносом параболы $y = ax^2$ на y_0 вдоль оси Oy. Вершина этой параболы имеет координаты $(0; y_0)$ (рис. 52).

Если же в формуле (2) положить $y_0 = 0$, то получим

$$y = a(x - x_0)^2.$$

Это есть уравнение параболы, полученной параллельным переносом параболы $y = ax^2$ на x_0 вдоль оси Ox. Вершина этой параболы имеет координаты $(x_0; 0)$ (рис. 53).

Вопросы

1. Как из графика функции $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ получить график функции:

а) $y = a(x - x_0)^2$; б) $y = a(x - x_0)^2 - y_0$; в) $y = ax^2 + y_0$?

Как называются эти графики? Какие точки являются их вершинами? Каковы уравнения их осей?

2. Пусть $a > 0$. Каким должно быть число y_0, чтобы парабола

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

а) пересекала ось Ox в двух точках; б) пересекала ось Ox в одной точке; в) не пересекала ось Ox?

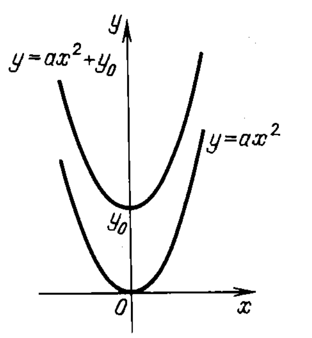


Рис. 52

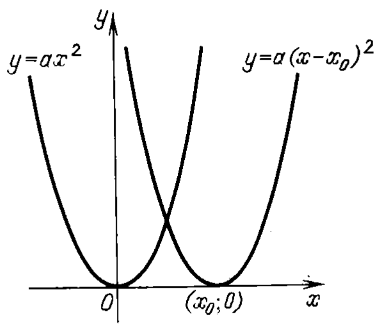


Рис. 53

Упражнения

1. Написать уравнение параболы, которая получается из параболы:

а) $y=x^2$; б) $y=-x^2$; в) $y=-2x^2$; г) $y=2x^2$,

если передвинуть ее параллельно самой себе так, чтобы ее вершиной оказалась точка $(1; -1)$.

2. Нарисуйте в плоскости Oxy параболы:

а) $y=3(x-1)^2+1$; б) $y=-(x+1)^2-1$;

в) $y=2x^2+2$; г) $y=2(x-1)^2+1$.

3. График квадратичной функции.

Теорема. *Графиком квадратичной функции*

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0) \tag{1}$$

является парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, *полученная параллельным переносом параболы* $y=ax^2$, *где*

$$x_0=-\frac{b}{2a}, \quad y_0=-\frac{D}{4a}, \quad D=b^2-4ac. \tag{2}$$

Доказательство. Функцию (1), выделив из нее полный квадрат, можно записать в виде

$$y=a(x-x_0)^2+y_0, \tag{3}$$

где числа x_0 и y_0 определяются по формулам (2). Но, как было доказано в п. 2, график функции (3), а следовательно, и функции (1) есть парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, полученная параллельным переносом параболы $y=ax^2$.

Теорема доказана.

Пример 1. Построить график функции

$$y=x^2-2x-3. \tag{4}$$

Выделив из трехчлена полный квадрат:

$$x^2-2x-3=x^2-2x+1-4=(x-1)^2-4,$$

получим, что функция (4) может быть записана следующим образом:

$$y=(x-1)^2-4.$$

Но тогда график функции (4) есть парабола, полученная параллельным переносом параболы

$$y=x^2$$

так, что ее вершина оказалась в точке $A(1; -4)$ (рис. 54).

Из графика видно, что вершина параболы расположена ниже оси Ox и парабола пересекает ось Ox в двух точках, т.е. если положить в равенстве (4) $y=0$, то полученное квадратное уравнение

$$x^2-2x-3=0$$

должно иметь два действительных корня.

Конечно, это заключение можно проверить. Поскольку дискриминант этого квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac = 16 > 0,$$

то уравнение имеет корни

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2},$$

т.е. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Пример 2. Построить параболу

$$y = 3x^2 + 12x + 15. \qquad (5)$$

Вынесем за скобку коэффициент 3 и выделим из полученного трехчлена полный квадрат:

$$3(x^2 + 4x + 5) = 3(x^2 + 2 \cdot 2x + 4 + 1) = 3(x + 2)^2 + 3.$$

Таким образом, функцию (5) можно записать в виде

$$y = 3(x + 2)^2 + 3.$$

Поэтому график функции (5) есть парабола, полученная параллельным переносом параболы $y = 3x^2$ так, что ее вершина оказалась в точке $A(-2; 3)$ (рис. 55).

Из графика видно, что парабола (5) расположена выше оси Ox. Это показывает, что уравнение

$$3x^2 + 12x + 15 = 0 \qquad (6)$$

не имеет действительных корней и, следовательно, дискриминант квадратного уравнения (6) должен быть отрицательным.

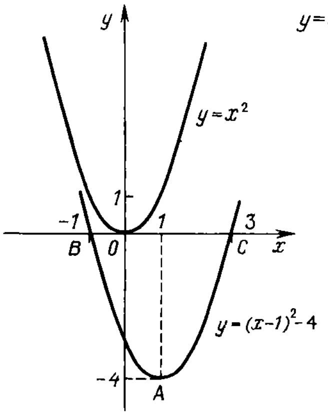


Рис. 54

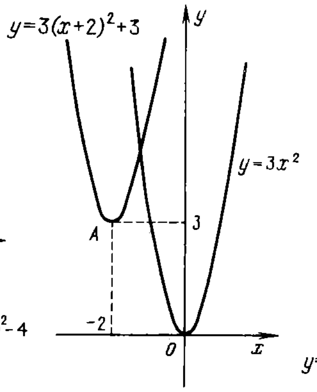


Рис. 55

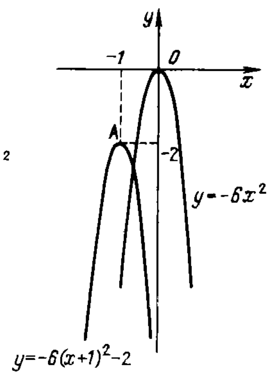


Рис. 56

Действительно,

$$D = b^2 - 4ac = 144 - 180 = -36 < 0.$$

Пример 3. Построить параболу

$$y = -6x^2 - 12x - 8. \quad (7)$$

Решение. Запишем функцию (7) в виде

$$y = -6(x+1)^2 - 2.$$

Отсюда видно, что график функции (7) есть парабола, полученная параллельным переносом параболы

$$y = -6x^2$$

так, что ее вершина оказалась в точке $A(-1; -2)$ (рис. 56).

Мы видим, что и на этот раз парабола не пересекает ось Ox, и уравнение

$$-6x^2 - 12x - 8 = 0$$

не имеет действительных корней.

Вопросы

1. Как получить график функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ из графика функции $y = ax^2$?
2. Какая линия является графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$?
3. Как относительно оси Ox расположен график функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

при $a > 0$, если: а) $D > 0$; б) $D = 0$; в) $D < 0$;

при $a < 0$, если: а) $D > 0$; б) $D = 0$; в) $D < 0$?

4. Способы построения графика квадратичной функции. Рассмотрим некоторые практические способы построения графика квадратичной функции на примере функции

$$y = x^2 - 2x - 1. \quad (1)$$

Способ 1. 1) Запишем функцию (1) в виде

$$y = (x-1)^2 - 2.$$

Следовательно, вершина параболы имеет координаты $(1; -2)$.

2) Построим параболу $y = x^2$ в системе координат Oxy (рис. 57).

3) Выполним параллельный перенос параболы $y = x^2$ так, чтобы ее вершина оказалась в точке $(1; -2)$.

Полученная парабола является графиком функции (1).

Способ 2. 1) Запишем функцию (1) в виде

$$y = (x-1)^2 - 2.$$

Вершина этой параболы имеет координаты $(1; -2)$.

2) Построим вспомогательную прямоугольную систему координат $O'x'y'$ с осями, параллельными соответствующим осям координат системы координат Oxy, и с началом O' $(1;\ -2)$.

3) В системе координат $O'x'y'$ строим параболу $y = (x')^2$ (рис. 58). Полученная парабола является графиком функции (1) в системе координат Oxy.

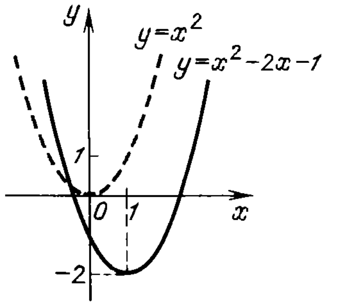


Рис. 57

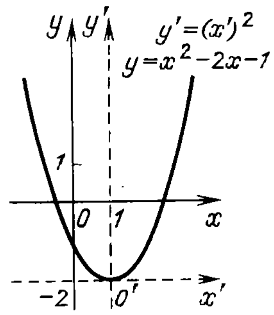


Рис. 58

Способ 3. 1) Найдем координаты двух точек параболы, симметричных относительно ее оси. Для простоты используем точку пересечения графика с осью Oy: $y(0) = -1$, тогда $-1 = x^2 - 2x - 1$, $x^2 - 2x = 0$, т.е. $x = 0$ или $x = 2$. Искомые точки $(0;\ -1)$, $(2;\ -1)$.

2) Найдем координаты вершины параболы $x = \dfrac{0+2}{2} = 1$.

$y = y(1) = 1 - 2 - 1 = -2$, т.е. $(1;\ -2)$.

3) Строим параболу, проходящую через точки $(0;\ -1)$ и $(2;\ -1)$ с вершиной в точке $(1;\ -2)$ (рис. 59).

Полученная парабола является графиком функции (1).

Упражнение

Построить график квадратичной функции:

а) $y = 2x^2 - 4x + 3$; б) $y = -3x^2 - 3x + 18$;

в) $y = x^2 - 10x + 25$; г) $y = -x^2 + 2x - 3$.

5. Пример движения тела в поле земного тяготения. В точке O поверхности земли произошел выстрел из винтовки вверх. Пуля вылетела из дула винтовки в момент времени $t = 0$ со скоростью 800 м/с. Будем считать, что пуля движется в безвоздушном пространстве, а ускорение силы тяжести приближенно равно 10 м/с² ($g \approx 10$ м/с²). Направим из точки O координатную ось Os вверх. Тогда закон движения пули приближенно выражается функцией

$$s = 800t - 5t^2, \qquad (1)$$

где s – координата пули (в метрах), а t – время (в секундах).

Если бы силы земного притяжения не было, то пуля летела бы вверх равномерно с сообщенной ей скоростью и закон ее движения имел бы вид $S = 800t$. Но благодаря земному притяжению, действующему вниз,

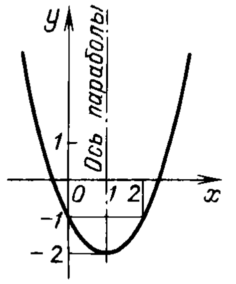


Рис. 59

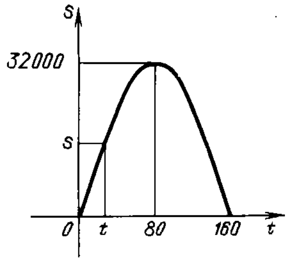


Рис. 60

в правой части равенства (1) появляется второй член:

$$\frac{gt^2}{2} \approx 5t^2,$$

взятый со знаком минус. В реальной обстановке надо было бы учитывать еще сопротивление воздуха.

Так как

$$800t - 5t^2 = -5(t^2 - 160t) =$$
$$= -5(t^2 - 2 \cdot 80t + 80^2) + 32\,000 = -5(t - 80)^2 + 32\,000,$$

то функцию (1) можно записать в виде

$$s = -5(t - 80)^2 + 32\,000.$$

Введем прямоугольную систему координат Ost (рис. 60).

В ней графиком движения пули является часть параболы, полученной параллельным переносом параболы $y = -5t^2$ так, что ее вершина есть точка (80; 32 000).

Из приведенного на рис. 60 схематического графика видно, что при возрастании t от 0 до 80 расстояние s пули до поверхности земли увеличивается от 0 до 32 000 м = 32 км, затем на отрезке времени [80; 160] расстояние пули до земли уменьшается и в момент времени $t = 160$ пуля снова достигает земли.

З а м е ч а н и е. При пользовании графиком, изображенным на рис. 60, нельзя думать, что пуля движется по графику. Пуля движется по оси Os, а график помогает узнавать, где (на оси Os) она находится в каждый момент времени t.

§ 20. Производные линейной и квадратичной функций

1. Мгновенная скорость. Начнем с примера.

П р и м е р 1. Пусть материальная точка движется по закону

$$s(t) = 4t^2,$$

где s – путь, пройденный ею за время t.

Спрашивается, какова средняя скорость этой точки за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$.

Путь, пройденный за время $t_1 = 2$, равен

$$s(2) = 4 \cdot 2^2 = 16,$$

а путь, пройденный за время $t_2 = 5$, равен

$$s(5) = 4 \cdot 5^2 = 100.$$

Но тогда путь, пройденный за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$, равен

$$s(5) - s(2) = 100 - 16 = 84.$$

Средняя же скорость точки за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = \frac{84}{3} = 28.$$

Пусть точка движется по закону

$$s = f(t).$$

Чтобы вычислить ее среднюю скорость за промежуток времени от момента t до момента $t + h$, рассуждаем аналогично.

Путь, пройденный точкой за время t, равен $f(t)$. Путь, пройденный точкой за время $t + h$, равен $f(t + h)$. Но тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени от t до $t + h$, равен

$$f(t + h) - f(t).$$

Следовательно, средняя скорость точки за промежуток времени от t до $t + h$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{f(t + h) - f(t)}{h}. \tag{1}$$

Введем теперь понятие скорости точки в момент времени t, или *мгновенной скорости* в момент времени t.

Обратимся к примеру 1.

Итак, пусть точка движется по закону $s(t) = 4t^2$. Зададим момент времени $t = 3$.

Будем вычислять для разных малых h среднюю скорость движения нашей точки за время от $t = 3$ до $t = 3 + h$. Результаты вычислений сведем в таблицу:

h	$[t; t+h]$	$v_{ср}$	h	$[t; t+h]$	$v_{ср}$
0,01	3; 3 + 0,01	24,04	0,00001	3; 3 + 0,00001	24,00004
0,001	3; 3 + 0,001	24,004	0,000001	3; 3 + 0,000001	24,000004
0,0001	3; 3 + 0,0001	24,0004	...	...	...

Из этой таблицы видно, что средняя скорость $v_{ср}$ точки на отрезке времени $[3; 3 + h]$ для малых h приближенно равна 24:

$$v_{ср} \approx 24.$$

Это приближение тем лучше, чем меньше h. Можно еще сказать, что $v_{ср}$ стремится к 24 при h, стремящемся к нулю, т.е.

$$v_{ср} \to 24 \text{ при } h \to 0.$$

В данном случае число 24 называется скоростью точки в момент времени $t = 3$.

В общем случае, если точка движется по закону

$$s = f(t),$$

ее *скоростью*, или *мгновенной скоростью*, в момент времени t называется число v, к которому стремится ее средняя скорость на промежутке времени $[t; t+h]$ при $h \to 0$:

$$v_{ср} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \to v \text{ при } h \to 0.$$

П р и м е р 2. Найти мгновенную скорость v точки, движущейся по закону $s(t) = 4t^2$, в момент времени t.

Средняя скорость за промежуток времени $[t; t+h]$ равна

$$v_{ср} = \frac{4(t+h)^2 - 4t^2}{h} = 8t + 4h.$$

Отсюда

$$8t + 4h \to 8t \text{ при } h \to 0.$$

Следовательно,

$$v = 8t.$$

Например,

$$v = 16 \text{ при } t = 2; \qquad v = 24 \text{ при } t = 3.$$

В математике скорость точки, движущейся по закону $s = f(t)$, в момент времени t называют *производной* функции f в точке t. В следующем пункте будет дано формальное определение производной.

Вопросы

1. Как вычисляется $v_{ср}$ движения тела за промежуток времени от t до $t + h$, если известен закон движения тела $s(t)$?

2. Какова $v_{ср}$ за промежутки времени

$[5; 5 + 0{,}1]$, $[5; 5 + 0{,}01]$, $[5; 5 + 0{,}0001]$

для тел, законы движения которых таковы: а) $s(t) = 5t + 3$; б) $s = 3t^2 + 4$?

3. Что называется мгновенной скоростью в момент времени t точки, движущейся по закону $s = f(t)$?

4. Какова мгновенная скорость v в момент времени t для тел, законы движения которых таковы: а) $s(t) = 5t + 3$; б) $s = 3t^2 + 4$?

2. Производные линейной и квадратичной функций. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$. Пусть x – любая точка этого интервала. Рассмотрим еще точки $x + h$ того же интервала при $h \to 0$.

Число, к которому стремится отношение

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

при $h \to 0$, называется *производной* функции $f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$ (читается "эф штрих от икс"):

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to f'(x) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Если производная при данном значении x из интервала $(a; b)$ существует, то она есть определенное число. Таким образом, если производная от функции существует при каждом значении x из интервала $(a; b)$, то она есть функция от x, определенная на интервале $(a; b)$.

На основании рассуждений предыдущего пункта можно сказать, что *мгновенная скорость v в момент времени t точки, движущейся по закону $s = f(t)$, равна производной функции $f(t)$ в точке t, т.е. $v = f'(t)$.*

Вычислим производные для некоторых функций, определенных на интервале $(-\infty; +\infty)$,

1) $f(x) = x$.

Легко видеть, что для любой точки x

$$f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h.$$

Поэтому

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1.$$

Следовательно, производная функции $f(x) = x$ в любой точке x равна 1, т.е. $x' = 1$.

2) $f(x) = C$.

Постоянную можно рассматривать как функцию от x, равную одному и тому же числу C для любого значения x из интервала $(-\infty;\ +\infty)$. Поэтому для этой функции

$$f(x) = f(x+h) = C,$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0.$$

Следовательно, производная постоянной $f(x) = C$ в любой точке равна нулю, т.е. $(C)' = 0$.

3) $f(x) = kx + b$, где k и b – данные числа.

Для любой точки x имеем

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[k(x+h)+b]-(kx+b)}{h} = k.$$

Следовательно, производная линейной функции $f(x) = kx + b$ в любой точке x равна числу k, т.е.

$$(kx+b)' = k.$$

Отсюда следует, что если тело движется по линейному закону $s = at + b$, то его мгновенная скорость v в любой момент времени t равна

$$v = f'(t) = a,$$

т.е. его скорость в этом случае постоянная.

4) $f(x) = x^2$.

Для любой точки x имеем

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2.$$

Поэтому

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x + h.$$

Поскольку $2x + h$ стремится к $2x$, когда h стремится к 0, то

$$f'(x) = 2x.$$

Следовательно, производная функция $f(x) = x^2$ в любой точке равна $2x$, т.е.

$$(x^2)' = 2x.$$

5) $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b и c – данные числа, причем $a \neq 0$.

Для любой точки x имеем

$$f(x+h) - f(x) = [a(x+h)^2 + b(x+h) + c] - (ax^2 + bx + c) =$$
$$= 2axh + bh + ah^2.$$

Поэтому

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2ax + b + ah.$$

Поскольку $2ax + b + ah \to 2ax + b$, когда $h \to 0$, то

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Следовательно, производная квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ в любой точке x равна $2ax + b$, т.е.

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b. \tag{1}$$

Замечание. Так как

$$(ax^2)' = 2ax, \quad (bx)' = b, \quad c' = 0,$$

то равенство (1) может быть записано в виде

$$(ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + c'.$$

Это равенство означает, что производная суммы слагаемых ax^2, bx, c равна сумме из производных.

Это утверждение верно и в общем случае:

$$[f(x) + \varphi(x)]' = f'(x) + \varphi'(x),$$

но мы не останавливаемся на его обосновании.

6) Из физики известно, что если тело падает под действием силы тяжести с нулевой начальной скоростью с некоторой высоты, то, поместив

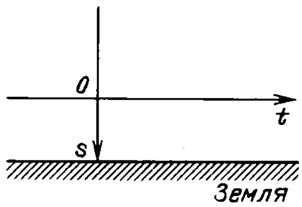


Рис. 61

начало координат в эту точку и направив положительную полуось Os к земле (рис. 61), получим, что закон движения этого тела имеет вид

$$s(t) = \frac{gt^2}{2},$$

где g – ускорение силы тяжести ($g \approx 9{,}8$ м/с^2). Но тогда мгновенная скорость падающего тела в момент времени t равна

$$v = s'(t) = gt.$$

Мы получили известную в физике формулу для определения скорости этого движения в любой момент времени t:

$$v = gt.$$

Вопросы

1. Что называется производной функции $f(x)$ в точке x?
2. Чему равна мгновенная скорость тела, движущегося по закону $s = f(t)$?
3. Чему равна производная постоянной?
4. Чему равна производная линейной функции $y = kx + b$?
5. Какова производная в точке x функции:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = -2 - 3x$;

в) $y = 2x^2 - 3x + 1$; г) $y = x^2 + 2x - 1$?

6. Закон движения точки определяется функцией:

а) $3t$; б) $3t^2 + 1$.

Какова скорость ее движения в момент времени t, в частности при $t = 2$?

3. Первообразная для линейной функции. Производная функции x^2 равна функции $2x$:

$$(x^2)' = 2x.$$

Но говорят также, что функция x^2 есть первообразная для функции $2x$.

Вообще функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на интервале $(a;\ b)$, если производная функции $F'(x)$ равна $f(x)$ на этом интервале:

$$F'(x) = f(x).$$

Заметим, что если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то сумма $F(x) + C$, где C – любая постоянная, также есть первообразная для $f(x)$, потому что

$$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = f(x).$$

Например, не только x^2 есть первообразная для $2x$, но и $x^2 + C$, где C – произвольная постоянная, есть первообразная для $2x$.

Запишем равенства

$$C' = 0;\quad (x + C)' = 1;\quad \left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x;\quad \left(\frac{ax^2}{2} + bx + C\right)' = ax + b.$$

Из этих равенств следует, что функции

$$C;\quad x + C;\quad \frac{x^2}{2} + C;\quad \frac{ax^2}{2} + bx + C,$$

где C – произвольная постоянная, являются соответственно первообразными для функций 0; 1; x; $ax + b$.

В п. 2 по закону движения определялась скорость движения тела в любой момент времени. Часто требуется решать и обратную задачу: зная скорость движения тела, определять закон движения этого тела.

Отметим сразу, что для решения этой задачи требуются еще дополнительные данные о том, где находилось тело в момент начала движения. При решении этих задач используется понятие первообразной. Покажем на примерах, как решаются такие задачи.

Пример 1. Пусть тело движется с постоянной скоростью a. Найти закон движения $s = f(t)$ этого тела, считая, что $s = 0$ при $t = 0$.

Так как производная $f'(t)$ равна скорости движения, то

$$f'(t) = a \tag{1}$$

и $f(t)$ есть первообразная для a. Но тогда

$$s = f(t) = at + C,$$

где C – неизвестная постоянная.

Так как $s = 0$ в момент $t = 0$, то $C = 0$. Поэтому искомый закон движения определяется равенством

$$s = at.$$

Пример 2. Пусть тело движется со скоростью

$$v = gt + a,$$

где t – время, отсчитываемое от начала движения. Надо найти закон движения $s = f(t)$, считая, что $s = 0$ при $t = 0$.

Так как производная $f'(t)$ равна скорости движения, то

$$f'(t) = gt + a \tag{2}$$

и $f(t)$ есть первообразная для функции $gt + a$. Но тогда

$$s = f(t) = \frac{gt^2}{2} + at + C,$$

где C – неизвестная постоянная.

Так как $s = 0$ в момент $t = 0$, то $C = 0$. Поэтому искомый закон движения определяется равенством

$$s = \frac{gt^2}{2} + at.$$

Заметим, что $v = a$ при $t = 0$ (см. (2)). Это показывает, что в момент начала движения тело имеет начальную скорость $v = a$.

Вопросы

1. Что называется первообразной для функции $f(x)$?
2. Однозначно ли определяется первообразная для данной функции?
3. Чему равна первообразная для: а) 0; б) 1; в) x; г) $ax + b$?
4. Для решения каких физических задач применяется первообразная?
5. Какова первообразная для функций:

а) 2; б) $3x - 2$; в) $x + 1$; г) $-x - 4$; д) $2 - 2x$?

§ 21. Линейные неравенства с одним неизвестным

1. Неравенства первой степени. Неравенство первой степени с неизвестным x имеет вид

$$kx + b > 0 \tag{1}$$

или

$$kx + b < 0, \tag{2}$$

где k и b – данные числа, причем $k \neq 0$.

Число k называется *коэффициентом* при неизвестном, а число b – *свободным членом* неравенства (1) или (2).

Решением неравенства с одним неизвестным x называется такое число x_0, при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения.

Пример 1. Решить неравенство

$$2x + 5 < 0. \tag{3}$$

Чтобы его решить, можно рассуждать так.

Пусть некоторое число x_0 есть решение неравенства (3). Подставим его вместо x в неравенство (3). Получим верное числовое неравенство

$$2x_0 + 5 < 0. \tag{4}$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства число -5, получим верное числовое неравенство

$$2x_0 < -5. \tag{5}$$

Деля это неравенство на положительное число 2, получаем верное числовое неравенство

$$x_0 < -\frac{5}{2}. \tag{6}$$

Пусть теперь некоторое число x_0 удовлетворяет неравенству (6). Умножив это неравенство на положительное число 2, получим верное числовое неравенство (5). Прибавляя далее к обеим частям неравенства (5) число 5, получаем верное числовое неравенство (4), т.е. получаем, что число x_0 удовлетворяет неравенству (3).

Итак, множество всех решений неравенства (3) есть множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < -\frac{5}{2}$. Можно еще сказать, что множеством всех решений неравенства (3) является интервал $\left(-\infty;\ -\frac{5}{2}\right)$.

Аналогичные рассуждения можно провести и при решении любых неравенств первой степени (1) и (2). Из этих рассуждений вытекает следующий способ решения неравенств первой степени с одним неизвестным:

а) перенести свободный член этого неравенства в его правую часть (естественно, изменив при этом знак числа b на противоположный);

б) разделить обе части полученного неравенства на коэффициент при неизвестном (при этом если $k > 0$, то знак неравенства не изменяется; если $k < 0$, то знак неравенства изменяется на противоположный).

В результате получим либо неравенство $x < a$, либо неравенство $x > a$, где a – некоторое число. В случае $x < a$ множество всех решений исходного неравенства есть интервал $(-\infty;\ a)$. В случае $x > a$ множество всех решений исходного неравенства есть интервал $(a;\ +\infty)$.

П р и м е р 2. Решить неравенство

$$-4x + 13 < 0. \qquad (7)$$

Перенося свободный член в правую часть, получаем неравенство

$$-4x < -13.$$

Разделив обе части этого неравенства на число -4, получим неравенство

$$x > \frac{13}{4}$$

(обратите внимание на изменение знака неравенства). Таким образом, множество всех решений неравенства (7) есть интервал $\left(\frac{13}{4};\ +\infty\right)$.

В о п р о с ы

1. Какой вид имеет неравенство первой степени с одним неизвестным?
2. Что называется коэффициентом при неизвестном и свободным членом неравенства первой степени с одним неизвестным?
3. Что называется решением неравенства с одним неизвестным?
4. Что значит решить неравенство с одним неизвестным?
5. Как решаются неравенства первой степени с одним неизвестным?

У п р а ж н е н и е

Решить неравенства:
а) $-x + 5 > 0$; б) $3x + 4 < 0$; в) $-2x - 7 > 0$.

2. Применение графиков к решению неравенств первой степени. Покажем, как можно, используя график линейной функции, решать неравенства вида

$$kx + b > 0 \qquad (1)$$

или

$$kx + b < 0, \qquad (2)$$

где k и b – данные числа и $k \neq 0$.

В декартовой системе координат Oxy рассмотрим прямую

$$y = kx + b. \qquad (3)$$

Такая прямая изображена на рис. 62, *а* при $k > 0$, а на рис. 62, *б* при $k < 0$.

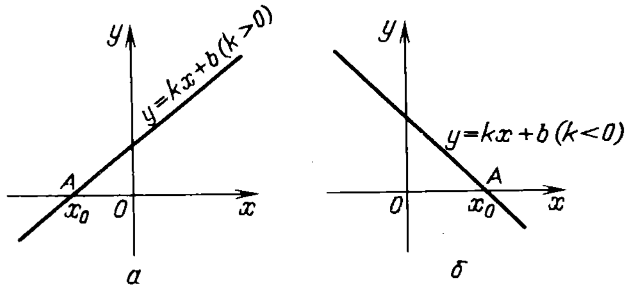


Рис. 62

Решить неравенство (1) – значит найти все значения x, для каждого из которых соответствующая точка прямой $y = kx + b$ расположена выше оси Ox.

Пусть A – точка пересечения прямой (3) с осью Ox. Абсциссу точки A обозначим x_0. Так как ее ордината равна нулю, то x_0 удовлетворяет уравнению

$$0 = kx_0 + b,$$

откуда

$$x_0 = -\frac{b}{k}.$$

Обратимся к рис. 62, *а*, соответствующему случаю $k > 0$. Мы видим, что точки прямой $y = kx + b$ расположены выше оси Ox для всех x, находящихся правее точки x_0, т.е. для всех x из интервала $(x_0;\ +\infty)$.

Итак, при $k > 0$ множество решений неравенства (1) есть интервал $(x_0;\ +\infty)$, а множество решений неравенства (2) есть интервал $(-\infty;\ x_0)$.

При $k < 0$ (см. рис. 62, *б*), наоборот, множество решений неравенства (1) есть интервал $(-\infty;\ x_0)$, а множество решений неравенства (2) есть интервал $(x_0;\ +\infty)$.

П р и м е р 1. Решить, используя график линейной функции, неравенства

$$2x + 1 > 0 \tag{4}$$

и

$$2x + 1 < 0. \tag{5}$$

Изобразим в декартовой системе координат прямую (рис. 63)

$$y = 2x + 1. \tag{6}$$

Для этого нужно знать две ее точки. В качестве первой точки возьмем точку пересечения нашей прямой с осью Ox. Полагая в формуле (6) $y = 0$, получаем уравнение

$$0 = 2x + 1.$$

Его решение

$$x_0 = -\frac{1}{2}$$

есть абсцисса A – точки пересечения прямой с осью Ox. Итак, $A\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$.

В качестве второй точки можно взять точку B пересечения нашей прямой с осью Oy. Ее абсцисса $x = 0$, а ордината $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Итак, $B\,(0;\ 1)$.

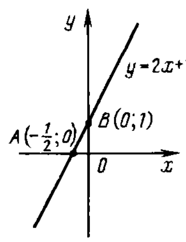


Рис. 63

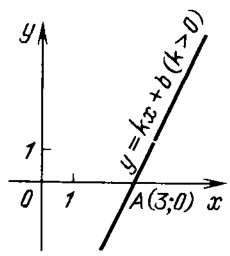


Рис. 64

Через точки A и B проводим прямую. Это и есть прямая $y = 2x + 1$.

Из рис. 63 видно, что множество решений неравенства (4) есть интервал $\left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$, а множество решений неравенства (5) – интервал $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$.

П р и м е р 2. Решить неравенство

$$kx + b > 0, \tag{7}$$

если известно, что прямая $y = kx + b$ пересекает ось Ox в точке $A\ (3;\ 0)$ и ее угловой коэффициент положительный.

Р е ш е н и е. Так как угловой коэффициент прямой $y = kx + b$ положительный и прямая пересекает ось Ox в точке A (3; 0), то прямая может быть расположена (схематически), только как на рис. 64. Из этого рисунка видно, что множество всех решений неравенства (7) есть интервал (3; $+\infty$).

В о п р о с

Как можно решить неравенство первой степени с одним неизвестным, используя график линейной функции?

У п р а ж н е н и е

Решить, применяя графический метод, неравенства:
а) $2x + 5 < 0$; б) $-x - 4 > 0$; в) $-3x + 2 < 0$.

3. Линейные неравенства. Неравенство, левая и правая части которого есть многочлены первой степени относительно x или числа, называется *линейным неравенством с одним неизвестным x.*

Следующие неравенства могут служить примерами линейных неравенств с одним неизвестным x:

$$3x + 2 < 0; \quad 2x - 7 < x - 5; \quad 2x + 7 < 2x + 9;$$

$$2x + 7 > 2x + 5; \quad 3x + 2 + x > x - 1 + x.$$

Ясно, что любое неравенство первой степени есть частный случай линейного неравенства.

Члены многочленов в левой и правой частях линейного неравенства называются *членами* этого неравенства.

Число x называется *решением* линейного неравенства с неизвестным x, если при подстановке его вместо x получается верное числовое неравенство.

Два неравенства с неизвестным x называются *равносильными*, если любое решение первого неравенства является решением второго и, обратно, любое решение второго является решением первого.

При решении неравенств пользуются следующими утверждениями.

1. Члены неравенства можно переносить с противоположными знаками из одной части неравенства в другую.

Иначе говоря, если какой-либо член неравенства перенести с противоположным знаком из одной части неравенства в другую, то получится неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$2x - 7 < 0 \text{ и } 2x < 7;$$

$$3x + 5 > 2x - 9 \text{ и } 3x - 2x + 5 > -9.$$

2. В неравенстве можно приводить подобные члены.

Иначе говоря, если в левой или правой части неравенства привести подобные члены, то получится неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$3x-4+5x-1>0 \quad \text{и} \quad 8x-5>0;$$

$$2x+2<-x+2 \quad \text{и} \quad 3x<0.$$

3. При умножении (или делении) неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется.

Иначе говоря, если обе части неравенства умножить (или разделить) на положительное число и сохранить знак неравенства, то получим неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$3x+5<0 \quad \text{и} \quad x+\frac{5}{3}<0;$$

$$2x-3>7x-5 \quad \text{и} \quad x-\frac{3}{2}>\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}.$$

4. При умножении (или делении) неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

Иначе говоря, если обе части неравенства умножить (или разделить) на отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$7x-3>0 \quad \text{и} \quad 3-7x<0;$$

$$5x+4<-3x+2 \quad \text{и} \quad -5x-4>3x-2.$$

Доказательство этих утверждений проводится аналогично доказательству подобных утверждений для уравнений. Оно предоставляется читателю.

Пример 1. Решить неравенство

$$4x-7<-2x+5. \tag{1}$$

Перенеся все члены неравенства (1) в левую часть, получим неравенство

$$4x-7+2x-5<0,$$

равносильное неравенству (1). Приведя подобные члены в левой части полученного неравенства, получим неравенство первой степени с одним неизвестным

$$6x-12<0, \tag{2}$$

равносильное неравенству (1). Все его решения образуют интервал $(-\infty;\ 2)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$7x+5<7x-1. \tag{3}$$

Перенеся все члены неравенства (3) в левую часть, получим неравенство

$$7x+5-7x+1<0, \tag{4}$$

равносильное неравенству (3). Приведя подобные члены в левой части неравенства (4), имеем

$$0 \cdot x + 6 < 0.$$

Получилось противоречие: положительное число 6 должно быть больше нуля. Это противоречие говорит о том, что нет ни одного числового значения x, которое удовлетворяло бы неравенству (3). Следовательно, неравенство (3) не имеет решений.

Пример 3. Решить неравенство

$$9x - 5 > 9x - 6. \tag{5}$$

Перенеся все члены неравенства (5) в левую часть, получим неравенство

$$9x - 5 - 9x + 6 > 0, \tag{6}$$

равносильное неравенству (5). Приведя подобные члены в левой части неравенства (6), имеем

$$0 \cdot x + 1 > 0. \tag{7}$$

Получилось неравенство, справедливое для любых значений x. Это означает, что решением неравенства (5) является любое действительное число, т.е. множество всех решений неравенства (5) образует интервал $(-\infty; +\infty)$.

Аналогичные рассуждения можно провести и при решении любого линейного неравенства. Из них вытекает следующий способ решения линейного неравенства с одним неизвестным:

а) надо перенести все члены (с противоположными знаками) из его правой части в левую;

б) привести подобные члены в левой части.

В результате получится:

либо неравенство первой степени;

либо верное числовое неравенство, показывающее, что исходное неравенство имеет решением любое действительное число;

либо противоречивое числовое неравенство, показывающее, что исходное неравенство не имеет решений.

Вопросы

1. Какое неравенство называется линейным неравенством с одним неизвестным?
2. Что называется членами линейного неравенства?
3. Какие неравенства называются равносильными?
4. Какие есть утверждения о равносильности неравенств?
5. Как решаются линейные неравенства с одним неизвестным?

Упражнение

Решить неравенства:

а) $-x + 3 < 2x + 2 - x$; б) $2x - 7 > 5x - 4$;
в) $7x - 3 < 7x + 2$.

4. Системы линейных неравенств с одним неизвестным. Если требуется найти все числа x, каждое из которых есть решение одновременно нескольких данных линейных неравенств с одним неизвестным x, то говорят, что надо решить систему линейных неравенств с одним неизвестным x.

Для того чтобы решить систему линейных неравенств, надо решить каждое неравенство этой системы, а затем найти общую часть полученных решений. Она и будет решением данной системы.

Обычно неравенства системы записывают в столбик одно под другим и объединяют их слева фигурной скобкой.

Рассмотрим примеры решения системы линейных неравенств.

П р и м е р 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ -4x + 5 < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решив первое неравенство системы (1), получим, что множество всех его решений составляет интервал $\left(-\frac{3}{2};\ +\infty\right)$. Решив второе неравенство системы (1), получим, что множество всех его решений составляет интервал $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$. Для того чтобы решить систему (1), надо найти те числовые значения x, для которых одновременно превращаются в верные оба неравенства системы (1), т.е. надо найти общую часть интервалов $\left(-\frac{3}{2};\ +\infty\right)$ и $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$. Отметим на координатной оси оба интервала. Из рис. 65 видно, что общая часть этих интервалов есть интервал $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$.

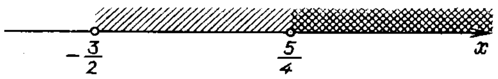


Рис. 65

Следовательно, множество всех решений системы неравенств (1) образует интервал $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$.

П р и м е р 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5x - 23 < 0, \\ 12x - 13 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решив каждое неравенство системы (2), найдем, что множеством всех решений первого неравенства являются все x, меньше $\frac{23}{5}$ $\left(x < \frac{23}{5}\right)$, а множеством всех решений второго – все x, большие $\frac{13}{12}$ $\left(x > \frac{13}{12}\right)$.

Множеством всех решений системы (2) будет множество всех тех x, для каждого из которых одновременно обращаются в верные числовые неравенства оба неравенства системы (2). Следовательно, это будут те x, которые больше $\frac{13}{12}$, но меньше $\frac{23}{5}$, т.е. все x из интервала $\frac{13}{12} < x < \frac{23}{5}$ (рис. 66).

Рис. 66

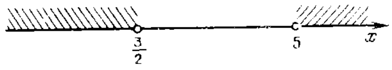


Рис. 67

Итак, множество всех решений системы (2) образует интервал $\left(\frac{13}{12}; \frac{23}{5}\right)$.

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x - 5 > 0, \\ 2x - 3 < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Множеством всех решений первого неравенства системы (3) являются все $x > 5$, а множеством всех решений второго – все $x < \frac{3}{2}$.

Решением системы (3) могут быть только те x, которые больше 5, но меньше $\frac{3}{2}$. Ясно, что таких x не существует (рис. 67). Следовательно, система (3) не имеет решений.

Вопросы

1. Что значит решить систему линейных неравенств с одним неизвестным?
2. Как решается система линейных неравенств?

Упражнение

Решить следующие системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ -x + 3 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 4 < 0, \\ x - 2 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -x + 3 < 0, \\ x + 7 < 0. \end{cases}$

§ 22. Неравенства второй степени с одним неизвестным

1. Понятие неравенства второй степени с одним неизвестным. Неравенство второй степени с неизвестным x имеет вид

$$ax^2 + bx + c > 0 \tag{1}$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0, \qquad (2)$$

где a, b и c — данные числа, причем $a \neq 0$.

Число a называется коэффициентом при x^2, число b — коэффициентом при x, число c — свободным членом. Выражения ax^2, bx и c называются членами неравенств (1) и (2).

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ называется также *дискриминантом неравенств* (1) и (2).

Примерами неравенств второй степени могут служить следующие неравенства:

$$3x^2 - 4x + 5 > 0; \quad -x^2 - 1 > 0;$$

$$-6x^2 - 2x + 1 < 0; \quad -2x^2 < 0.$$

Напомним, что решением неравенства с одним неизвестным x называется такое число x_0, при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство; решить неравенство — значит найти все его решения. При решении неравенств второй степени мы будем пользоваться утверждениями о равносильности неравенств, приведенными в § 21. Эти утверждения там иллюстрировались на примере линейных неравенств, на самом деле они верны и для других неравенств, в частности для неравенств второй степени.

Заметим, что если a — отрицательное число, то, умножив неравенство (1) на -1, получим на основании утверждения 4 п. 3 § 21 равносильное ему неравенство

$$(-a)x^2 + (-b)x + (-c) < 0$$

уже с положительным коэффициентом при x^2.

Аналогично если a — отрицательное число, то, умножив неравенство (2) на -1, получим равносильное ему неравенство

$$(-a)x^2 + (-b)x + (-c) > 0$$

также с положительным коэффициентом при x^2.

Учитывая это, дальше будем рассматривать решения неравенств (1) и (2), считая, что a — положительное число. Ниже будет рассмотрено решение этих неравенств отдельно при условиях $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$.

Как мы знаем, если дискриминант квадратного трехчлена неотрицательный, то квадратный трехчлен разлагается на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Числа x_1 и x_2 есть корни квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

разные, если $D > 0$, и совпадающие, если $D = 0$. Эти числа называются также *корнями квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$.

Вопросы

1. Какой вид имеет неравенство второй степени с одним неизвестным?
2. Что называется дискриминантом неравенства второй степени?
3. Что называется решением неравенства с одним неизвестным?
4. Что значит решить неравенство с одним неизвестным?
5. Что значит, что два неравенства равносильны?
6. Какие есть утверждения о равносильности неравенств?
7. Что называется корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$?

Упражнения

1. Напишите пять неравенств второй степени.
2. Является ли число $-\frac{3}{7}$ решением неравенств:

а) $3x^2 - 4x + 1 > 0$; б) $7x^2 - 46x - 21 > 0$;
в) $x^2 - 5x + 1 < 0$?

2. Неравенства второй степени с положительным дискриминантом. Пусть надо решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0, \tag{1}$$

где a, b и c – данные числа, причем a и D положительные: $a > 0$, $D > 0$.

Как отмечено в п. 1, в этом случае

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{2}$$

где x_1 и x_2 – корни трехчлена $ax^2 + bx + c$. Поэтому неравенство (1) можно переписать в виде

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0. \tag{3}$$

Так как a – положительное число, то на основании утверждения 3 п. 3 § 21

Рис. 68

неравенство

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \tag{4}$$

равносильно неравенству (3).

Заметим, что точки $x = x_1$ и $x = x_2$ не удовлетворяют неравенству (4). Так как $D > 0$, то $x_1 \neq x_2$. Для определенности будем считать, что $x_1 < x_2$. Отметим на координатной оси Ox точки x_1 и x_2 (рис. 68). Эти точки делят ось Ox на три части $x < x_1$, $x_1 < x < x_2$, $x > x_2$, другими словами, на три интервала

$(-\infty;\ x_1)$,

$(x_1;\ x_2)$,

$(x_2;\ +\infty)$.

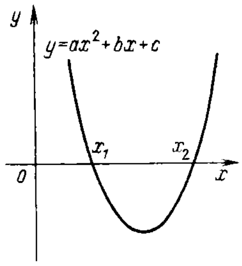


Рис. 69

Пусть x принадлежит интервалу $(x_2;\ +\infty)$, тогда

$x - x_1 > 0, \quad x - x_2 > 0$

и, следовательно,

$(x - x_1)(x - x_2) > 0.$

Пусть далее x принадлежит интервалу $(x_1;\ x_2)$, тогда

$x - x_1 > 0, \quad x - x_2 < 0$

и, следовательно,

$(x - x_1)(x - x_2) < 0.$

Пусть x принадлежит интервалу $(-\infty;\ x_1)$, тогда

$x - x_1 < 0, \quad x - x_2 < 0$

и, следовательно,

$(x - x_1)(x - x_2) > 0.$

Учитывая, что неравенства (4) и (1) равносильны, получаем, что при условии $D = b^2 - 4ac > 0$ множество всех решений неравенства (1) состоит из двух интервалов $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_2;\ +\infty)$, где x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ – корни трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Одновременно получим, что при указанном условии множество всех решений неравенства

$$ax^2 + bx + c < 0 \tag{5}$$

образует интервал $(x_1;\ x_2)$.

Результат, к которому мы пришли, можно также получить, используя график квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{6}$$

Так как в рассматриваемом случае $a > 0$ и $D > 0$, то квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два не равных между собой корня x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$, и схематический график функции (6) будет иметь вид, как на рис. 69.

Точки, в которых парабола пересекает ось Ox, имеют абсциссы x_1 и x_2. Очевидно, что для тех x, для которых соответствующие точки параболы расположены выше оси Ox, выполняется неравенство (1), а для тех x, для которых они расположены ниже оси, выполняется неравенство (5). Поэтому из рис. 69 видно, что множество всех решений неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0$$

состоит из двух интервалов $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_2;\ +\infty)$, а множество всех решений неравенства

$$ax^2 + bx + c < 0$$

есть интервал $(x_1;\ x_2)$.

П р и м е р 1. Решить неравенство

$$x^2 - 5x + 6 < 0. \qquad (7)$$

Так как дискриминант неравенства (7)

$$D = b^2 - 4ac = 1 > 0,$$

то трехчлен $x^2 - 5x + 6$ имеет два корня:

$$x_1 = 2 \quad \text{и} \quad x_2 = 3.$$

Поэтому неравенство (7) можно переписать в виде

$$(x-2)(x-3) < 0. \qquad (8)$$

Отметим (рис. 70) на координатной оси Ox точки 2 и 3. Лего видеть, что выражение

$$(x-2)(x-3)$$

положительно для любого x, расположенного правее точки 3, отрицательно

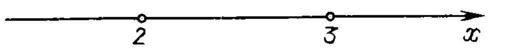


Рис. 70

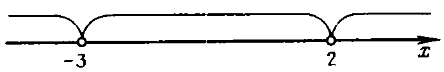


Рис. 72

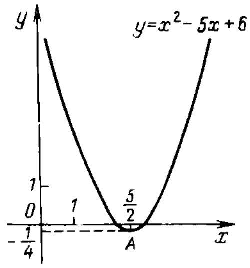


Рис. 71

для любого x, расположенного между точками 2 и 3, положительно для любого x, расположенного левее точки 2.

Поэтому множество всех решений неравенства (8), следовательно, и равносильного ему неравенства (7) есть интервал (2; 3). Этот же результат можно получить, используя график функции $y = x^2 - 5x + 6$ (рис. 71).

П р и м е р 2. Решить неравенство

$$-x^2 - x + 6 > 0. \qquad (9)$$

Умножив неравенство (9) на -1, получим равносильное ему неравенство

$$x^2+x-6<0, \tag{10}$$

в котором коэффициент при x^2 уже положительный. Дискриминант этого неравенства

$$D=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=25>0.$$

Корни квадратного трехчлена x^2+x-6 есть

$$x_1=-3 \text{ и } x_2=2.$$

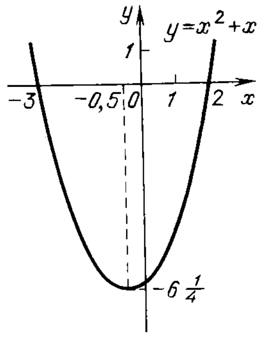


Рис. 73

Отметим на координатной оси Ox точки -3 и 2 (рис. 72). Рассуждая, как выше, получаем, что множество всех решений неравенства (10), а значит, и неравенства (9) есть интервал $(-3;\ 2)$. К этому же выводу мы приходим из рассмотрения рис. 73, на котором изображена парабола $y=x^2+x-6$.

Вопросы

1. Как решается неравенство второй степени с положительным дискриминантом?
2. Как используется график квадратичной функции для решения неравенства второй степени?
3. Если положителен дискриминант неравенства второй степени, то имеет ли оно решения?

Упражнение

Решить неравенства:
а) $-3x^2+5x+2>0$; б) $-x^2+x+2<0$;
в) $x^2-x-6>0$.

3. Неравенства второй степени с дискриминантом, равным нулю. Пусть надо решить неравенство

$$ax^2+bx-c>0, \tag{1}$$

где a, b и c – данные числа, причем a положительно, а

$$D=b^2-4ac=0 \qquad (a>0,\ D=0).$$

Как отмечено в п. 1, в этом случае

$$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2, \tag{2}$$

где $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ – корень квадратного трехчлена ax^2+bx+c. Поэтому неравенство (1) можно переписать в виде

$$a(x-x_0)^2>0. \tag{3}$$

При $x=x_0$ многочлен $(x-x_0)^2$ равен нулю. При любом же числовом значении $x\neq x_0$ многочлен $(x-x_0)^2$, а значит, и многочлен $a(x-x_0)^2$

принимают положительные значения. Следовательно, решением неравенства (1) будет любое число x, кроме $x = x_0$. Иначе говоря, множество всех решений неравенства (1) состоит из двух интервалов $(-\infty;\ x_0)$ и $(x_0;\ +\infty)$, где x_0 – корень трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Из сказанного следует также, что при тех же условиях на числа a, b и c неравенство

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad (4)$$

не имеет решений. Эти же выводы можно получить, используя график квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (5)$$

Так как $a > 0$, $D = 0$, то схематический график функции (5) имеет вид,

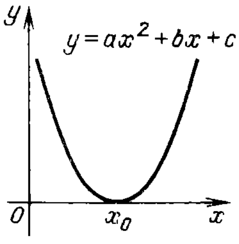


Рис. 74

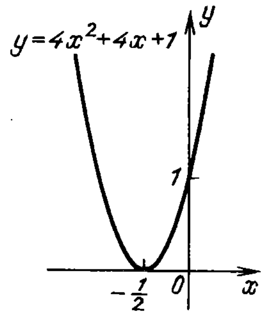


Рис. 75

как на рис. 74, откуда сразу видно, что неравенство (1) справедливо для всех x, кроме $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, а неравенство (4) не имеет решений.

Пример. Решить неравенства

$$4x^2 + 4x + 1 > 0; \qquad (6)$$

$$4x^2 + 4x + 1 < 0. \qquad (7)$$

Находим дискриминант неравенства (6):

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0.$$

Применяя метод выделения полного квадрата, имеем

$$4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Следовательно, неравенство (6) можно переписать так:

$$4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > 0, \qquad (8)$$

откуда видно, что решением неравенства (8), а значит, и неравенства (6) будет любое $x \neq -\frac{1}{2}$, т.е. множество всех решений неравенства (6) состоит из двух интервалов $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2};\ \infty\right)$. Неравенство же (7), очевидно, не имеет решений.

На рис. 75 в плоскости Oxy изображена парабола

$$y = 4x^2 + 4x + 1.$$

Вся она, кроме точки $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$, расположена выше оси Ox. Из рис. 75 видно, что решением неравенства (6) являются все x, кроме

$$x = -\frac{1}{2},$$

а неравенство (7) решений не имеет.

Вопросы

1. Если дискриминант неравенства второй степени равен нулю, то имеет ли оно решения?
2. Как используется график квадратичной функции для решения неравенства второй степени?
3. Как с помощью графика квадратичной функции объяснить, почему неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ при $a > 0$ и $D = 0$ не имеет решений?

Упражнение

Решить неравенства:
а) $25x^2 - 40x + 16 > 0$; б) $-x^2 + 4x - 4 > 0$;
в) $4x^2 - 12x + 9 < 0$.

4. Неравенства второй степени с отрицательным дискриминантом. Рассмотрим неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0, \tag{1}$$

где a, b, c — данные числа и $a > 0$, $D < 0$.

Выделив полный квадрат из трехчлена $ax^2 + bx + c$, получим

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}. \tag{2}$$

Из равенства (2) следует, что неравенство (1) можно переписать следующим образом:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} > 0,$$

откуда, учитывая, что $a > 0$ и $D < 0$, видно, что неравенство (1) выполняется для всех x, иначе говоря, на интервале $(-\infty;\ +\infty)$.

Отсюда также следует, что при указанных выше условиях (т.е. $a > 0$, $D < 0$) неравенство

$$ax^2 + bx + c < 0$$

не имеет решений. При $a > 0$ и $D < 0$ схематический график функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

имеет вид, как на рис. 76. Вся парабола расположена выше оси Ox, и поэтому неравенство (1) справедливо для любого значения x.

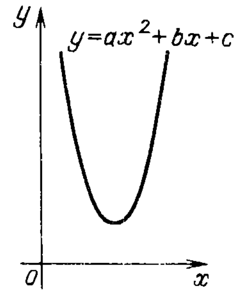


Рис. 76

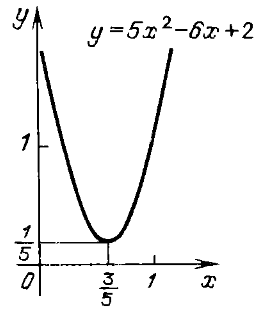


Рис. 77

Пример 1. Решить неравенства

$$5x^2 - 6x + 2 > 0, \tag{3}$$

$$5x^2 - 6x + 2 < 0. \tag{4}$$

Дискриминант этих неравенств

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 5 \cdot 2 < 0.$$

Преобразуем квадратный трехчлен в левой части (3) методом выделения полного квадрата:

$$5x^2 - 6x + 2 = 5\left[x^2 - 2x \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}\right] =$$

$$= 5\left[\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}\right].$$

Таким образом, неравенство (3) можно записать следующим образом:

$$5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} > 0,$$

откуда видно, что неравенство (3) выполняется для любых x, или, другими словами, на интервале $(-\infty; +\infty)$, а неравенство (4) не имеет решений.

Из рис. 77, на котором изображена парабола

$y = 5x^2 - 6x + 2$,

так же видно, что неравенство (3) справедливо для любого x, а неравенство (4) не имеет решений.

Вопросы

1. Если дискриминант неравенства второй степени отрицательный, то имеет ли оно решения?

2. Как используется график квадратичной функции для решения неравенства второй степени?

3. Как с помощью графика квадратичной функции объяснить, почему неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ при $a > 0$ и $D < 0$ не имеет решений?

Упражнение

Решить неравенства:

а) $4x^2 + x + 3 < 0$; б) $-4x^2 + 5x - 2 < 0$; в) $3x^2 - 13x + 30 > 0$.

5. Неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени. Часто приходится решать неравенства, левые и правые части которых многочлены. Для решения таких неравенств можно применять утверждения, приведенные в п. 3 § 21. На основании этих утверждений после переноса всех членов неравенства в левую его часть и приведения подобных членов получится неравенство, равносильное исходному. В правой части полученного неравенства будет стоять нуль, а в левой – многочлен. Дальше в этом пункте будут рассмотрены примеры решения неравенств, сводящихся к неравенствам второй степени.

Пример 1. Решить неравенство

$$x^2 - 2x + 3 > 2x^2 - 3 - x. \qquad (1)$$

Перенося все члены неравенства в левую его часть, получаем неравенство

$$x^2 - 2x + 3 - 2x^2 + 3 + x > 0, \qquad (2)$$

равносильное неравенству (1).

Приводя в неравенстве (2) подобные члены, приходим к неравенству

$$-x^2 - x + 6 > 0, \qquad (3)$$

равносильному неравенству (2).

Неравенство (3) есть неравенство второй степени с отрицательным коэффициентом при x^2. Умножив его на -1, получим неравенство второй степени с положительным коэффициентом при x^2:

$$x^2 + x - 6 < 0, \qquad (4)$$

равносильное неравенству (3).

Так как дискриминант неравенства (4)

$$D = 1 + 24 = 25 > 0,$$

то квадратный трехчлен

$$x^2 + x - 6$$

имеет два корня:

$$x_1 = -3 \text{ и } x_2 = 2.$$

Поэтому неравенство (4) можно записать в виде

$$[x - (-3)]\,(x - 2) < 0. \qquad (5)$$

Отметим (рис. 78) на координатной оси Ox точки -3 и 2. Легко видеть, что выражение $[x - (-3)]\,(x - 2)$ положительно для любого x, расположенного правее точки 2, отрицательно для любого x, расположенного между

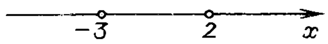


Рис. 78

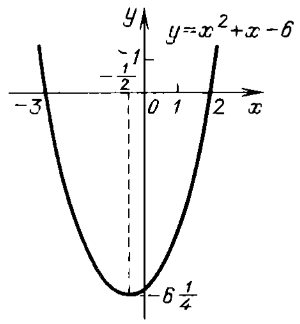


Рис. 79

точками -3 и 2, положительно для любого x расположенного левее точки -3.

Следовательно, множество всех решений неравенства (5), а значит, и равносильного ему неравенства (1) есть интервал $(-3;\ 2)$.

Этот же результат можно получить, используя график функции $y = x^2 + x - 6$ (рис. 79).

Пример 2. Решить неравенство

$$x^2 < 5. \qquad (6)$$

Перенесем 5 в левую часть неравенства (6), получим неравенство второй степени

$$x^2 - 5 < 0, \qquad (7)$$

равносильное неравенству (6).

Разлагая на линейные множители многочлен $x^2 - 5$, приходим к неравенству

$$[x - (-\sqrt{5})]\,(x - \sqrt{5}) < 0, \qquad (8)$$

равносильному неравенству (7).

Отметим на координатной оси Ox (рис. 80) точки $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$. Рассуждая, как выше, получаем, что множество всех решений неравенства (8), а значит, и неравенства (6) есть интервал $(-\sqrt{5};\ \sqrt{5})$. Этот же результат можно получить, используя график функции $y = x^2 - 5$ (рис. 81).

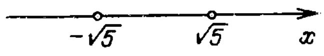


Рис. 80

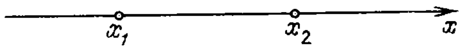


Рис. 82

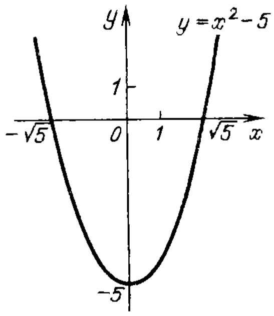


Рис. 81

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2} > \frac{1}{3}x^2. \tag{9}$$

Перенесем все члены неравенства (9) в левую часть, получим неравенство

$$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{2} > 0, \tag{10}$$

равносильное неравенству (9). Так как производить вычисления с целыми коэффициентами удобнее, то умножим неравенство (10) на число -30. Получим неравенство

$$10x^2 - 6x - 15 < 0, \tag{11}$$

равносильное неравенству (10).

Так как квадратный трехчлен $10x^2 - 6x - 15$ имеет два корня:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{159}}{10} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{159}}{10},$$

то неравенство (11) равносильно неравенству

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0. \tag{12}$$

Рассуждая, как выше (рис. 82), получаем, что множество всех решений неравенства (12) есть интервал $(x_1; x_2)$, т.е. интервал

$$\left(\frac{3 - \sqrt{159}}{10}; \frac{3 + \sqrt{159}}{10}\right).$$

Вопрос

Как можно решать неравенства, левые и правые части которых многочлены?

Упражнение

Решить неравенства

а) $(2x+2)(x-1) < 5x+5$; б) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} > x(x-1)+4$.

§ 23. Рациональные неравенства

1. Метод интервалов. Отметим на координатной оси Ox число x_0 (рис. 83). Как уже было отмечено в § 22, точка x_0 делит ось Ox на две

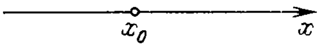


Рис. 83

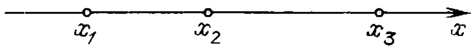


Рис. 84

части: для любого x, находящегося справа от точки x_0, двучлен $x - x_0$ положителен, а слева от точки x_0 он отрицателен.

Это свойство двучлена лежит в основе метода интервалов. Пусть, например, требуется решить неравенство

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) > 0 \tag{1}$$

или неравенство

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) < 0, \tag{2}$$

где

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Отметим на оси Ox точки x_1, x_2 и x_3. Они делят ось Ox на четыре интервала: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ (рис. 84).

Рассмотрим выражение

$$A(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \tag{3}$$

Очевидно, что для любого x, находящегося справа от x_3, любой двучлен в произведении (3) положителен, так как точка x находится правее всех точек x_1, x_2, x_3. Поэтому и $A(x) > 0$ для любого x, принадлежащего интервалу $(x_3; +\infty)$.

Для любого x, находящегося между точками x_2 и x_3, последний сомножитель в (3) отрицательный так как x находится левее точки x_3, а любой из оставшихся сомножителей положительный, так как x находится правее точек x_1 и x_2. Поэтому $A(x) < 0$ для любого x из интервала $(x_2; x_3)$.

Рассуждая аналогично, получаем, что $A(x) > 0$ для любого x из интервала $(x_1; x_2)$ и $A(x) < 0$ для любого x из интервала $(-\infty; x_1)$.

На этом рассуждении основан метод интервалов решения неравенств (1) и (2), состоящий в следующем: на оси Ox отмечают точки x_1, x_2, x_3, над интервалом $(x_3; +\infty)$ ставят знак плюс, над интервалом $(x_2; x_3)$ – знак минус, над интервалом (x_1, x_2) – знак плюс, над интервалом $(-\infty; x_1)$ – знак минус (рис. 85). Тогда множество всех решений неравенства (1) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак плюс, а множество всех решений неравенства (2) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак минус.

Подобным образом можно решать неравенства

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) > 0,$$

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) < 0,$$

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, n – натуральное число.

Отметим, что фактически этим же методом мы решали неравенства второй степени с положительным дискриминантом.

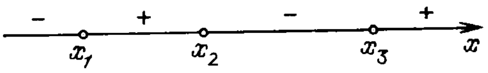


Рис. 85

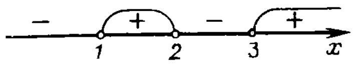


Рис. 86

Отметим еще, что сами числа x_1, x_2, x_3 не являются решениями неравенств $A(x) > 0$ и $A(x) < 0$. Этим объясняется, что множество решений этих неравенств состоит из интервалов, а не из отрезков, полуинтервалов.

Пример 1. Решить неравенство

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0. \qquad (4)$$

Будем решать неравенство (4) методом интервалов. Отметим на оси Ox точки 1, 2, 3. Над интервалами $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$ справа налево поочередно расставим знаки плюс и минус (рис. 86), начиная с плюса. Из рис. 86 видно, что множество всех решений неравенства (4) состоит из двух интервалов: $(1; 2)$ и $(3; +\infty)$. (На рисунке они отмечены дугами.)

Пример 2. Решить неравенство

$$(2 - x)(x^2 - 4x + 3)(x + 1) > 0. \qquad (5)$$

Разлагая квадратный трехчлен $x^2 - 4x + 3$ на множители:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3),$$

получаем, что неравенство (5) можно записать в виде

$$[x - (-1)]\,(2 - x)(x - 1)(x - 3) > 0. \qquad (6)$$

Умножая неравенство (6) на -1, получаем, что оно равносильно неравенству

$$[x - (-1)]\,(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0. \qquad (7)$$

Поэтому остается решить неравенство (7). Оно уже записано в нужном для метода интервалов виде. Отметим на оси Ox точки -1, 1, 2 и 3 (рис. 87). Применяя метод интервалов, находим, что множество всех решений неравенства (5) состоит из двух интервалов: $(-1; 1)$ и $(2; 3)$.

П р и м е р 3. Решить неравенство

$$(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4)<0. \qquad (8)$$

Неравенство (8) нельзя решать, как предыдущие неравенства, так как не все двучлены в его левой части находятся в первой степени. Для решения таких неравенств обычно применяется обобщенный метод интервалов,

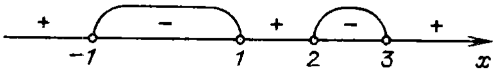


Рис. 87

Рис. 88

состоящий в следующем: на оси Ox отмечают точки 1, 2, 3, 4, а затем в каждом из интервалов

$$(-\infty;\ 1),\ (1;\ 2),\ (2;\ 3),\ (3;\ 4),\ (4;\ +\infty) \qquad (9)$$

исследуется знак выражения

$$A(x)=(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4). \qquad (10)$$

Над каждым интервалом ставят найденный знак – плюс или минус. Тогда множество всех решений неравенства (8) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак минус.

Исследуем знак выражения (10) в каждом из интервалов (9). Над интервалами (9) должны стоять знаки, как на рис. 88. Поэтому множество всех решений неравенства (8) состоит из трех интервалов: (1; 2), (2; 3), (3; 4).

В о п р о с ы

1. В чем заключается метод интервалов решения неравенств?
2. К неравенствам какого вида применим метод интервалов?

У п р а ж н е н и е

Решить неравенства:

а) $(x-3)(x^2-3x+2)>0$; б) $(x^2-1)(x-2)(x+3)<0$;

в) $(x^2-3x-4)(x^2+x-2)<0$.

2. Решение рациональных неравенств. Пусть дана алгебраическая дробь $\dfrac{A(x)}{B(x)}$, где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены относительно x.

Неравенство

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \qquad (1)$$

называется *рациональным неравенством.*

Решением неравенства (1) называется такое числовое значение $x = x_0$, при котором неравенство (1) превращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство (1) – значит найти все его решения.

Легко видеть, что любое решение неравенства (1) есть решение неравенства

$$A(x) \cdot B(x) > 0. \qquad (2)$$

Действительно, если число x_0 есть решение неравенства (1), то справедливо числовое неравенство $A(x_0)/B(x_0) > 0$, означающее, что числа $A(x_0)$ и $B(x_0)$ одного знака, т.е. что $A(x_0) \cdot B(x_0) > 0$, а это означает, что x_0 есть решение неравенства (2). Аналогично показывается, что любое решение неравенства (2) есть решение неравенства (1). Следовательно, неравенства (1) и (2) равносильны.

Будем рассматривать лишь тот случай, когда многочлены $A(x)$ и $B(x)$ разлагаются в произведение разных двучленов вида $x - x_0$. Тогда неравенство (2) можно решить методом интервалов. Но неравенства (1) и (2)

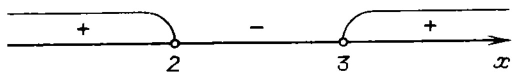


Рис. 89

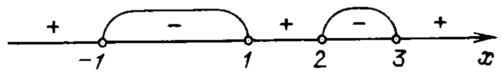


Рис. 90

равносильны. Поэтому нет необходимости переходить к неравенству (2); достаточно сразу к неравенству (1) применить метод интервалов.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{x-3}{x-2} > 0. \qquad (3)$$

Применяя метод интервалов (рис. 89), находим, что множество всех решений неравенства (3) состоит из двух интервалов: $(-\infty;\ 2)$ и $(3;\ +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x + 2} < 0. \qquad (4)$$

Разложим на линейные множители квадратные трехчлены

$$x^2 - 2x - 3, \quad (5)$$

$$x^2 - 3x + 2. \quad (6)$$

Дискриминант квадратного трехчлена (5)

$$D = p^2 - 4q = 16 > 0.$$

Поэтому квадратный трехчлен (5) имеет два корня: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ — и разлагается на линейные множители:

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3).$$

Дискриминант квадратного трехчлена (6)

$$D = p^2 - 4q = 1 > 0.$$

Поэтому квадратный трехчлен (6) также имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ — и разлагается на линейные множители:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Следовательно, неравенство (4) можно переписать в виде

$$\frac{[x - (-1)](x - 3)}{(x - 1)(x - 2)} < 0.$$

Применяя метод интервалов (рис. 90), находим, что множество всех решений неравенства (4) состоит из двух интервалов: $(-1; 1)$ и $(2; 3)$.

Вопросы

1. Какое неравенство называется рациональным?
2. Каким способом можно решать рациональное неравенство?

Упражнение

Решить неравенства:

а) $\frac{x^2 - x - 2}{5 - x} > 0$; б) $\frac{2 - x}{4 + 3x - x^2} < 0$; в) $\frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x^2 - x} > 0$.

3. Системы рациональных неравенств. Если надо найти все числа x, каждое из которых есть решение одновременно нескольких данных рациональных неравенств, то говорят, что надо решить систему рациональных неравенств с одним неизвестным x.

Чтобы решить систему рациональных неравенств, надо найти множества решений каждого неравенства системы, тогда общая часть этих множеств и будет множеством решений системы.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 5)(x - 7) < 0, \\ \dfrac{(x - 2)(x - 3)}{x - 4} > 0. \end{cases} \quad (1)$$

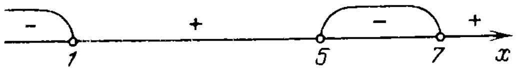


Рис. 91

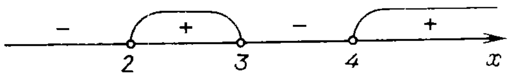


Рис. 92

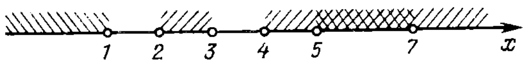


Рис. 93

Применяя метод интервалов, находим, что множество всех решений первого неравенства системы (1) состоит из интервалов $(-\infty;\ 1)$ и $(5;\ 7)$ (рис. 91), а множество всех решений второго неравенства системы (1) – из интервалов $(2;\ 3)$ и $(4;\ +\infty)$ (рис. 92).

Отметим на координатной оси Ox (рис. 93) первое и второе множества. Ясно, что общей частью этих множеств является интервал $(5;\ 7)$. Следовательно, множество всех решений системы неравенств (1) составляет интервал $(5;\ 7)$.

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 10 < 0, \\ \dfrac{x^7 - x^3 + x + 2}{x^4 - x^2 + 1} > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Применяя метод выделения полного квадрата, можно написать

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 10 = (x - 3)^2 + 1.$$

Поэтому первое неравенство системы (2) можно записать так:

$$(x - 3)^2 + 1 < 0,$$

откуда видно, что оно не имеет решений.

Второе неравенство системы (2) можно не решать. Так как ответ уже ясен: система неравенств (2) не имеет решений.

Вопросы

1. Что значит решить систему рациональных неравенств?
2. Как решается система рациональных неравенств?

У п р а ж н е н и е

Решить системы неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x^2+5x+6} > 0, \\ \dfrac{x+5}{x-1} < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+x+1 < 0, \\ \dfrac{x^2-5}{x+9} > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+2x+3 > 0, \\ \dfrac{x^2-4}{x^2-1} > 0. \end{cases}$

4. **Нестрогие рациональные неравенства.** Рассмотрим решение нестрогих неравенств

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0, \tag{1}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0, \tag{2}$$

где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены относительно x.

Если некоторое число x_0 есть решение неравенства (1), то справедливо числовое неравенство

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} \geqslant 0.$$

Тогда в силу определения знака нестрогого неравенства справедливо или числовое неравенство $\dfrac{A(x_0)}{B(x_0)} > 0$, или числовое равенство $\dfrac{A(x_0)}{B(x_0)} = 0$. Иначе говоря, если число x_0 есть решение неравенства (1), то оно либо решение неравенства

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \tag{3}$$

либо решение уравнения

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0. \tag{4}$$

Легко также заметить, что любое решение неравенства (3) и любое решение уравнения (4) есть решение неравенства (1).

Следовательно, множество всех решений неравенства $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0$ есть объединение множества всех решений неравенства $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$ и множества всех решений уравнения $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$.

Аналогично множество всех решений неравенства $\dfrac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0$ есть объединение множества всех решений неравенства $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$ и множества всех решений уравнения $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$.

П р и м е р 1. Решить неравенство

$$3x - 7 \geqslant 0. \qquad (5)$$

Сначала решим уравнение

$$3x - 7 = 0. \qquad (6)$$

Оно имеет единственный корень $x_0 = \frac{7}{3}$.

Затем решим неравенство

$$3x - 7 > 0. \qquad (7)$$

Перенося свободный член направо и деля полученное неравенство на 3, получаем, что множеством всех решений неравенства (7) являются все $x > \frac{7}{3}$. Объединяя множества всех решений неравенства (7) и уравнения (6), получаем, что множество всех решений неравенства (5) составляет полуинтервал $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$.

П р и м е р 2. Решить неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant 0. \qquad (8)$$

Сначала решим уравнение

$$2x^2 - x - 1 = 0. \qquad (9)$$

Оно имеет корни $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$.

Затем решим неравенство

$$2x^2 - x - 1 < 0. \qquad (10)$$

Так как квадратный трехчлен $2x^2 - x - 1$ имеет корни $x = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$, то неравенство (10) можно записать в виде

$$2\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right](x - 1) < 0.$$

Решая его методом интервалов (рис. 94), получаем, что множество всех решений неравенства (10) составляет интервал $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

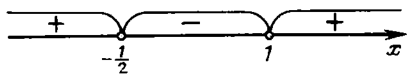


Рис. 94

Объединяя решения неравенства (10) и уравнения (9), получаем, что множество всех решений неравенства (8) составляет отрезок $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

П р и м е р 3. Решить неравенство

$$9x^2 - 6x + 1 \leqslant 0. \qquad (11)$$

Сначала решим уравнение

$$9x^2 - 6x + 1 = 0. \qquad (12)$$

Оно имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

Затем решим неравенство

$$9x^2 - 6x + 1 < 0. \qquad (13)$$

Так как квадратный трехчлен $9x^2 - 6x + 1$ имеет единственный корень $x_0 = \frac{1}{3}$, то неравенство (13) можно записать в виде

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 < 0.$$

Следовательно, нет ни одного действительного числа x, удовлетворяющего этому неравенству (квадрат любого действительного числа не может быть отрицательным). Поэтому неравенство (13) не имеет решений.

Итак, неравенство (11) имеет единственное решение $x_0 = \frac{1}{3}$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{(x + 2)(x - 4)}{(x + 3)x} \leqslant 0. \qquad (14)$$

Сначала решим уравнение

$$\frac{(x + 2)(x - 4)}{(x + 3)x} = 0. \qquad (15)$$

Легко видеть, что оно имеет только корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$.

Затем решим неравенство

$$\frac{(x + 2)(x - 4)}{(x + 3)(x - 0)} < 0. \qquad (16)$$

Применяя метод интервалов (рис. 95), найдем, что множество всех решений неравенства (16) составляет два интервала: $(-3; -2)$ и $(0; 4)$.

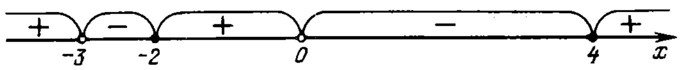


Рис. 95

Объединяя решения уравнения (15) и неравенства (16), получаем, что множество всех решений неравенства (14) составляет два полуинтервала: $(-3; -2]$ и $(0; 4]$.

Вопрос

Как решаются нестрогие рациональные неравенства?

Упражнение

Решить следующие неравенства:

а) $-2x - 5 \leqslant 0$; б) $x^2 - 4x - 21 \geqslant 0$; в) $\frac{(x + 4)(x + 1)}{x - 5} \geqslant 0$.

Исторические сведения

Параболу, которую мы изучали в этой главе, знал еще Архимед, величайший математик и механик древней Греции. Он применял параболу при решении ряда практических задач – в судоходстве и военном деле.

Архимеду, например, понадобилось вычислить площадь сегмента параболы, т.е. части плоскости, ограниченной параболой и некоторой ее хордой (рис. 96). Метод, который он применял при этом, впоследствии, через

2000 лет, дал основание для развития важной математической науки – дифференциального и интегрального исчисления. В § 20 изложены элементы этой науки применительно к линейным и квадратичным функциям.

Архимед в своих рассуждениях не пользовался системой координат. Понятие прямоугольной системы координат было введено в математику много позже – в XVII в. Обычно это понятие связывают с именем французского математика и философа Р. Декарта (1596–1650), исследования

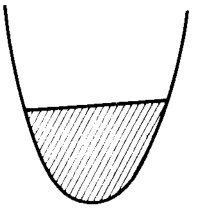


Рис. 96

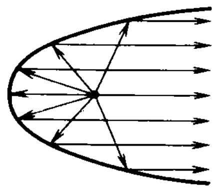


Рис. 97

которого убедили математиков в том, что метод координат является весьма удобным методом решения многих математических задач.

Архимед знал, что на оси параболы имеется замечательная точка, называемая фокусом параболы, которая обладает тем свойством, что если в нее поместить источник света, то лучи его, падающие на параболу, которую будем считать зеркалом, после отражения от него образуют пучок прямых, уходящих в бесконечность параллельно оси параболы (рис. 97). Если же считать, что пучок лучей, параллельных оси параболы, например идущих от солнца, падает на нее, тогда окажется, что все отраженные лучи пересекутся в фокусе. Этим можно воспользоваться на практике для того, чтобы создать в фокусе высокую температуру. Существует легенда о том, что Архимед сжег неприятельский флот при помощи зажигательных зеркал.

На таком же эффекте основан принцип действия "гиперболоида инженера Гарина" в одноименном романе А.Н. Толстого. Следует только заметить, что на самом деле прибор этот должен называться параболоидом, так как только парабола обладает указанным свойством, а у гиперболы такого свойства нет.

Знак равенства "=" ввел в 1557 г. английский математик Р. Рикорд, который мотивировал это так: никакие два предмета не могут быть между собой более равными, чем два параллельных отрезка.

Английский ученый Харрит в книге "Практика аналитического искусства" (1631 г.) ввел знаки неравенств "$<$" и "$>$", мотивируя это так: если две величины не равны, то отрезки, фигурирующие в знаке равенства, уже не паралельны, а пересекаются. Пересечение может быть справа ($>$) или слева ($<$). В первом случае образованный знак неравенства будет обозначать "больше", во втором – "меньше".

Знаки нестрогих неравенств "$\leqslant$" и "$\geqslant$" были введены в 1734 г. французским математиком П. Буге.

ГЛАВА 6

СТЕПЕНЬ ЧИСЛА

§ 24. Степенные функции

1. Некоторые свойства натуральных степеней. Напомним определение натуральной степени числа.

Пусть a – действительное число, а n – натуральное число, тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} \qquad (n \geqslant 1).$$

Имеют место следующие свойства натуральных степеней.

1) $0^n = 0$.

2) $1^n = 1$.

3) Если $a > 0$, то $a^n > 0$.

4) Если $b > a > 0$, то $b^n > a^n > 0$.

В самом деле,

1) $0^1 = 0$;
$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$;
$0^3 = 0^2 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$;
$0^4 = 0^3 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$;
. . . .

Применив эти рассуждения n раз, получим $0^n = 0$.

2) $1^1 = 1$;
$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$;
$1^3 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$;
. . . .

Применив эти рассуждения n раз, получим $1^n = 1$.

3) Пусть $0 < a$, т.е. пусть a – положительное число.

Умножив неравенство $0 < a$ на положительное число a, получим

$a \cdot 0 < a^2$, или $0 < a^2$.

Умножив это неравенство на положительное число a, получим

$0 \cdot a < a^3$, или $0 < a^3$.

Умножив это неравенство на положительное число a, получим

$0 \cdot a < a^4$, или $0 < a^4$, и т.д.

Применив эти рассуждения n раз, получим $0 < a^n$ или $a^n > 0$.

4) Пусть $0 < a < b$, т.е. пусть $0 < a$ и $a < b$, тогда $b > 0$. Умножая неравенство $a < b$ сначала на a, затем на b, учитывая, что a и b – положительные числа, получаем

$a^2 < ab$ и $ab < b^2$,

откуда следует, что

$a^2 < b^2$.

Умножая теперь неравенство $a < b$ на a^2 и неравенство $a^2 < b^2$ на b и учитывая, что a^2 и b – положительные числа, получаем

$a^3 < a^2 b$ и $a^2 b < b^3$,

откуда следует, что

$a^3 < b^3$.

Умножая неравенство $a < b$ на a^3 и неравенство $a^3 < b^3$ на b, получаем

$a^4 < a^3 b$ и $a^3 b < b^4$,

откуда, следует, что $a^4 < b^4$, и т.д.

Применив эти рассуждения n раз, получим $a^n < b^n$.

Рассмотрим несколько следствий из свойств 1) – 4).

С л е д с т в и е 1. *Если* $0 \leqslant a < b$, *то* $a^n < b^n$.

Действительно, при $a = 0$ имеем $0 < b$, и тогда по свойству 3) $0 < b^n$. Если же $0 < a$, то $a^n < b^n$ на основании свойства 4).

С л е д с т в и е 2. *Если* $0 \leqslant a < 1$, *то* $a^n < 1$.

Действительно, из неравенств $0 \leqslant a < 1$ на основании следствия 1 следует, что $a^n < 1^n$, но $1^n = 1$, и поэтому $a^n < 1$.

С л е д с т в и е 3. *Если* $1 < b$, *то* $1 < b^n$.

Действительно, учитывая, что $0 < 1$, т.е. $0 < 1 < b$, на основании свойства 4) имеем $1^n < b^n$. Откуда, учитывая, что $1^n = 1$, получаем, что $1 < b^n$.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим еще раз доказательство свойства 1). Равенства

$$0^1 = 0, \quad 0^2 = 0, \quad 0^3 = 0, \quad 0^4 = 0$$

следуют из определения натуральной степени числа и следующего свойства: произведение любого числа на нуль равно нулю. Доказательство этих равенств проведено выше. Так же мы могли бы доказать, что $0^5 = 0$, но мы этого делать не стали, а отметили, что, применив эти рассуждения n раз, получим $0^n = 0$. Этот вывод кажется убедительным, но в математике не считается безукоризненным хотя бы потому, что n может быть настолько большим, что для него невозможны все вычисления, подобные приведенным при доказательстве свойства 1). Поэтому приведенные выше доказательства свойств 1)–4) на само деле годятся только для малых натуральных n. Для любых n появляется необходимость в другом способе доказательства, в котором выполнение всех указанных этапов рассуждений не требуется. Этот способ доказательства основан на принципе полной индукции.

Вопросы

1. Если $a > 0$, то может ли a^n быть отрицательным числом?
2. Если $a > b > 0$, то какое число больше: a^n или b^n?
3. Если $a > 1$, то число a^n больше или меньше 1?

Упражнение

Доказать, что:

а) если $0 \leqslant a \leqslant b$, то $a^n \leqslant b^n$;
б) если $0 < a \leqslant b$, то $a^n \leqslant b^n$;
в) если $0 \leqslant a$, то $0 \leqslant a^n$.

2. Принцип полной индукции. Прежде чем сформулировать принцип полной индукции в общем виде, разъясним его на следующем примере. Надо доказать, что если $a > 0$, то

$$0 < a^n \tag{1}$$

для любого натурального n.

Согласно принципу полной индукции, чтобы считать верным неравенство (1) для всех натуральных n, достаточно проверить, что выполняются следующие два утверждения:

1) неравенство (1) справедливо для $n = 1$;

2) если допустить, что для некоторого $n = k$ неравенство (1) справедливо, т.е. если имеет место неравенство $0 < a^k$, то оно справедливо и для $n = k + 1$, т.е. имеет место неравенство

$$0 < a^{k+1}.$$

Утверждение 1) действительно выполняется, потому что, положив в неравенстве (1) $n = 1$, получим неравенство $0 < a$, верное по условию. Утверждение 2) тоже выполняется: ведь если предположить верным неравенство $0 < a^k$, то после умножения его на положительное число a получим верное неравенство

$$0 < a^{k+1}.$$

Таким образом, утверждения 1) и 2) выполняются. Но тогда принцип полной индукции утверждает, что неравенство (1) *верно для любого натурального n*.

Сформулируем теперь принцип полной индукции.

Если свойство, зависящее от натурального n, во-первых, верно при $n = 1$ и, во-вторых, из предположения, что оно верно при $n = k$, вытекает, что оно верно при $n = k + 1$, то считают, что это свойство верно для любого натурального n.

Доказательство, основанное на принципе индукции, называется доказательством по индукции или доказательством методом индукции.

Заметим, что не только доказательство, но и определения n-й степени, строго говоря, нужно давать по индукции.

Например, говорят, что a^n при натуральном n есть такое число, которое определяется следующим образом:

$$a^1 = a \quad \text{и} \quad a^{k+1} = a^k \cdot a \tag{2}$$

для любого натурального k.

Пользуясь этим определением, получим, например, что

$$a^5 = a^4 \cdot a = a^3 \cdot a \cdot a =$$

$$= a^2 \cdot a \cdot a \cdot a = a^1 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = aaaaa.$$

Пример 1. Равенство

$$0^n = 0 \tag{3}$$

для любого натурального n доказывается по индукции следующим образом. При $n = 1$ равенство (3) тривиально. Если допустить доказанным равенство $0^k = 0$, то отсюда будет следовать, что $0^{k+1} = 0^k \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$. Следовательно, согласно принципу полной индукции, равенство (3) надо считать верным для любого натурального n.

Пример 2. Если $0 < a < b$, то

$$a^n < b^n. \tag{4}$$

для любого натурального n.

Это утверждение доказывается по индукции следующим образом.

Положив в неравенстве (4) $n = 1$, получим верное неравенство $a < b$, имеющееся в условии. Пусть далее верно неравенство

$$a^k < b^k. \tag{5}$$

Так как по условию a — положительное число, то и a^k — положительное число; это было доказано выше. Умножив неравенство $a < b$ на a^k и неравенство (5) на b, получим

$$a^{k+1} < a^k b \quad \text{и} \quad a^k b < b^{k+1},$$

откуда

$$a^{k+1} < b^{k+1}.$$

Следовательно, согласно принципу полной индукции, неравенство (5) надо считать верным для любого натурального n.

Пример 3. Доказать по индукции неравенство

$$(1 + b)^n \geqslant 1 + nb \qquad (b > 0), \tag{6}$$

где n — натуральное число.

Действительно, так как

$$(1 + b)^1 = 1 + b,$$

то этим мы доказали (6) при $n = 1$.

Допустим теперь, что свойство (6) верно при $n = k$, т.е. верно неравенство

$$(1+b)^k \geqslant 1 + kb$$

для некоторого натурального k. Тогда

$$(1+b)^{k+1} = (1+b)^k(1+b) \geqslant (1+kb)(1+b) =$$

$$= 1 + (k+1)b + kb^2 > 1 + (k+1)b,$$

т.е. мы доказали (6) при $n = k + 1$.

Но тогда (6) верно при любом натуральном n.

Пример 4. Равенство

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \tag{7}$$

где m и n — любые натуральные числа, доказывается по индукции следующим образом.

Зададим произвольное натуральное m и будем, как говорят, вести индукции по n. При $n = 1$ равенство (7) верно (см. (2)) по определению степени:

$$a^{m+1} = a^m \cdot a = a^m \cdot a^1.$$

Пусть теперь верно равенство

$$a^{m+k} = a^m \cdot a^k.$$

Тогда в силу определения степени (см. (2))

$$a^{m+k+1} = a^{m+k} \cdot a^1 = a^m a^k a^1 = a^m a^{k+1},$$

т.е.

$$a^{m+k+1} = a^m a^{k+1}.$$

Но тогда, согласно принципу полной индукции, равенство (7) имеет место для любого натурального n при произвольно выбранном натуральном m.

Это показывает верность равенства (7) для любых натуральных n и m.

Вопросы

1. В чем заключается принцип полной индукции?
2. Что такое доказательство по индукции?

Упражнения

1. Доказать по индукции равенства для натуральных n и m:

а) $1^n = 1$; б) $a^n b^n = (ab)^n$; в) $(a^m)^n = a^{mn}$.

2. Пусть $a < 0$. Доказать по индукции, что $a^m > 0$ при четном m; $a^m < 0$ при нечетном m.

3. Функция $y = x^n$.

Функции

$$y = x^2; \quad y = x^3; \quad y = x^4; \ \ldots \tag{1}$$

называются *степенными*.

Эти функции имеют ряд одинаковых свойств, поэтому в общем случае рассматривают степенную функцию

$$y = x^n, \tag{2}$$

где $n (n \geqslant 2)$ – некоторое натуральное число.

Как мы знаем, графиком функции $y = x^2$ является парабола. Теперь назовем этот график *параболой второй степени.*

График функции

$$y = x^n \quad (n \geqslant 2)$$

называется ***параболой n-й степени*** или, коротко, параболой $y = x^n$.

Отметим свойства функции $y = x^n (n \geqslant 2)$ пока только для неотрицательных $x (x \geqslant 0)$.

1) Если $x = 0$, то $y = 0$.

2) Если $x = 1$, то $y = 1$.

3) Если $x > 0$, то $y > 0$.

4) Функция $y = x^n$ является возрастающей для неотрицательных x.

5) Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.

6) Функция $y = x^n$ непрерывна.

Свойства 1) и 2) непосредственно следуют из формулы (2). Геометрически они выражают, что парабола $y = x^n$ проходит через начало координат и точку (1; 1).

Свойство 3) следует из того, что если $x > 0$, то $x^n > 0$ (см. свойство 3) п. 1). Оно выражает, что парабола $y = x^n$ для $x > 0$ расположена выше оси Ox.

Свойство 4) следует из того, что если $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, то $x_1^n < x_2^n$ (см. следствие 1 п. 1).

Свойство 5) очевидно. В самом деле, если x стремится к $+\infty$, пробегая натуральные числа

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots,$$

то $y = x^n$ тоже стремится к $+\infty$, пробегая числа $1^n;\ 2^n;\ 3^n;\ \ldots$

Для остальных чисел x справедливость этого свойства очевидна.

Свойство 6) для $n = 2$ становится очевидным, если, например, считать, что y есть площадь квадрата со стороной x. Ясно, что малое изменение стороны квадрата влечет за собой малое изменение площади, а это и означает непрерывность функции $y = x^2$ для положительных x.

Для $n = 3$ свойство 6) также становится очевидным, если, например, считать, что y есть объем куба с ребром x. Ясно, что малое изменение ребра куба влечет за собой малое изменение объема, а это и означает непрерывность функции $y = x^3$ для положительных x.

Для других n свойство 6) надо доказывать, но это доказательство мы проводить не будем.

Свойство 6) означает, что график функции $y = x^n$ – непрерывная линия.

Вопросы

1. Какие функции называются степенными?
2. Как называется график функции $y = x^n$?
3. Возрастает ли функция $y = x^n$ для неотрицательных x?
4. Если x стремится к $+\infty$, то к чему стремится y для функции $y = x^n$?
5. Если натуральное n возрастает, то возрастает ли x^n при фиксированном x при: а) $0 < x < 1$; б) $1 < x$; в) $x = 1$; г) $x = 0$?

4. График функции $y = x^n$. На рис. 98 в одной и той же декартовой системе координат изображены графики функций

$$y = x^2; \quad y = x^3; \quad y = x^4 \tag{1}$$

пока только для неотрицательных значений x $(x \geqslant 0)$. Эти графики отражают отмеченные в предыдущем пункте свойства функций (1).

На интервале $(0; 1)$, т.е. для значений x, для которых

$$0 < x < 1,$$

выполняются неравенства

$$1 > x > x^2 > x^3 > x^4 > \ldots \tag{2}$$

Действительно, умножая неравенство $1 > x$ на x, где x – положительное число, получаем неравенство $x > x^2$; умножая это неравенство на $x > 0$, получаем неравенство $x^2 > x^3$ и т.д.

В силу неравенств (2) график функции $y = x^3$ на интервале $(0; 1)$ расположен ниже графика функции $y = x^2$, график функции $y = x^4$ расположен ниже графика функции $y = x^3$ и т.д.

Далее, на интервале $(1; \infty)$, т.е. для значений x, для которых $1 < x$, выполняются неравенства

$$1 < x < x^2 < x^3 < \ldots \tag{3}$$

Действительно, умножая неравенство $1 < x$ на положительное число x, получаем неравенство $x < x^2$. Умножая это неравенство на x $(x > 0)$, получаем неравенство $x^2 < x^3$ и т.д. Неравенства (3) показывают, что на интервале $(1; +\infty)$ парабола $y = x^3$ расположена выше параболы $y = x^2$, парабола $y = x^4$ расположена выше параболы $y = x^3$ и т.д. (см. рис. 98).

Посмотрим теперь, как расположены параболы $y = x^n$ для отрицательных значений x, т.е. для x, принадлежащих интервалу $(-\infty; 0)$.

Очевидно, что $(-x)^2 = x^2$; $(-x)^4 = x^4$; $(-x)^6 = x^6$; $(-x)^8 = x^8$. Вообще если $n = 2m$ – четное натуральное число, то

$$(-x)^{2m} = x^{2m}.$$

Действительно,

$$(-x)^{2m} = (-1 \cdot x)^{2m} = (-1)^{2m} \cdot x^{2m} =$$

$$= [(-1)^2]^m x^{2m} = 1^m \cdot x^{2m} = x^{2m}.$$

Следовательно, функция $y = x^n$ при четном n четная и график ее симметричен относительно оси Oy.

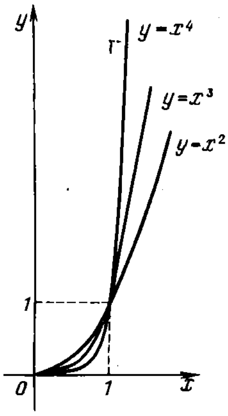


Рис. 98

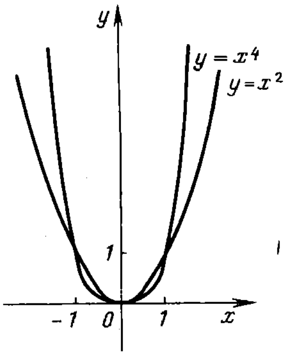


Рис. 99

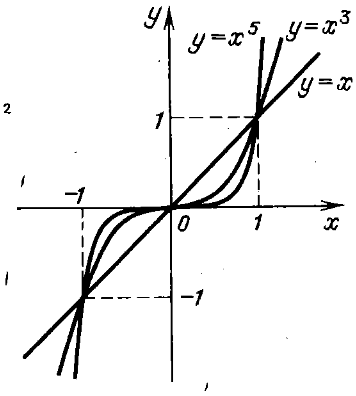


Рис. 100

На рис. 99 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^4$ для любых действительных значений x.

Для степенных функций с нечетными степенями выполняются уже другие равенства: $(-x)^3 = -x^3$; $(-x)^5 = -x^5$; $(-x)^7 = -x^7$. Вообще если $n = 2m + 1$ – нечетное натуральное число, то

$$(-x)^{2m+1} = -x^{2m+1}.$$

Действительно,

$$(-x)^{2m+1} = (-x)^{2m}(-x) = x^{2m}(-1)x = -x^{2m+1}.$$

Следовательно, функция $y = x^n$ при нечетном n нечетная и график ее симметричен относительно начала координат.

На рис. 100 изображены графики функций $y = x$, $y = x^3$ и $y = x^5$ для любых действительных значений x.

Вопросы

1. Как называется график функции $y = x^2$?
2. Для каких натуральных значений n функция $y = x^n$ а) четная; б) нечетная?
3. Относительно чего симметричен график функции $y = x^n$ при а) n четном; б) n нечетном?

Упражнения

1. Составить таблицу для функции $y = x^3$ для значений x, изменяющихся с шагом 0,1 на отрезке [0; 3], и, пользуясь этой таблицей, нарисовать приближенный график функции $y = x^3$ на отрезке [–3; 3].
2. Составить таблицу для функции $y = x^4$ для значений x, изменяющихся с шагом $\frac{1}{4}$ на отрезке [0; 2], и, пользуясь этой таблицей, нарисовать приближенный график функции $y = x^4$ на отрезке [–2; 2].

5. Функция $y = \dfrac{1}{x^n}$. Функция

$$y = \frac{1}{x^n},$$

где n – данное натуральное число, определена для любых числовых значений x, за исключением $x = 0$.

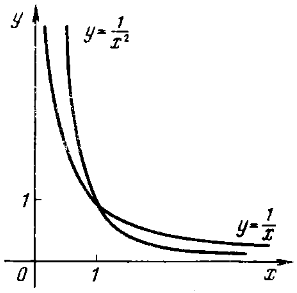


Рис. 101

Перечислим сначала свойства этой функции только для положительных x.

1) Если $x > 0$, то $y > 0$.

2) Для положительных значений x функция $y = \dfrac{1}{x^n}$ убывает.

3) Если положительное x стремится к 0, то $y = \dfrac{1}{x^n}$ стремится к $+\infty$, а если x стремится к $+\infty$, то $y = \dfrac{1}{x^n}$ стремится к 0, т.е.

$$y = \frac{1}{x^n} \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to 0 \ (x > 0);$$

$$y = \frac{1}{x^n} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

4) Для положительных x функция $y = \dfrac{1}{x^n}$ непрерывна.

Для построения графика функции $y = \dfrac{1}{x^n}$ для положительных x зададим побольше отдельных значений x и вычислим по формуле $y = \dfrac{1}{x^n}$ соответствующие им значения y; затем нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной непрерывной кривой. На рис. 101 изображены графики функций

$$y = \frac{1}{x}; \quad y = \frac{1}{x^2}$$

(для положительных x).

Если $n = 2m - 1$ – нечетное натуральное число, то функция

$$y = \frac{1}{x^{2m-1}}$$

нечетная. Из свойства нечетности вытекает, что ее график симметричен относительно начала координат.

На рис. 102 изображены графики функций

$$y = \frac{1}{x}; \quad y = \frac{1}{x^3}$$

(для всех x, отличных от нуля).

Если $n = 2m$ – четное натуральное число, то функция

$$y = \frac{1}{x^{2m}}$$

четная. Из свойства четности вытекает, что ее график симметричен относительно оси y.

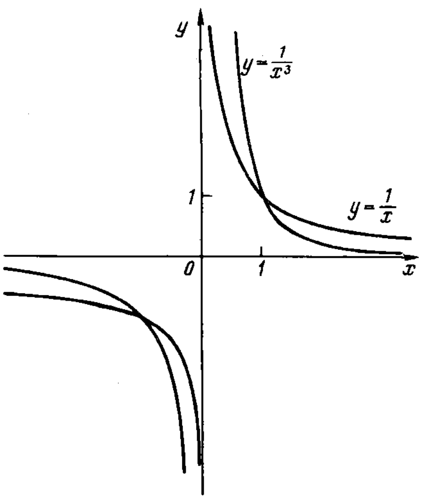


Рис. 102

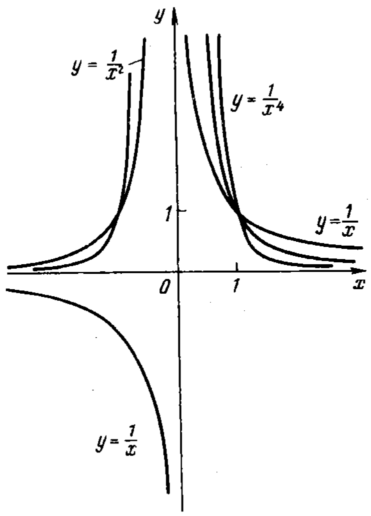


Рис. 103

На рис. 103 изображены графики функций

$$y = \frac{1}{x^2}; \quad y = \frac{1}{x^4}$$

и для сравнения график функции

$$y = \frac{1}{x}$$

(для всех x, отличных от нуля).

Упражнения

1. Построить графики функций $y = \frac{1}{x^2}$; $y = \frac{1}{x^3}$; $y = \frac{1}{x^4}$.

2. Доказать, что для отрицательных x функция $y = \frac{1}{x^2}$ возрастает.

3. Доказать, что для отрицательных x функция $y = \frac{1}{x^3}$ убывает.

4. Указать интервалы оси x, на которых следующие функции возрастают и убывают.

а) $y = \frac{1}{x^2}$; б) $y = \frac{1}{x^3}$; в) $\frac{1}{x^4}$; г) $y = \frac{1}{x^5}$; д) $\frac{1}{x^6}$.

5. Какие из перечисленных в упражнении 4 функций четные и какие нечетные? Что значит четная функция, нечетная функция? Чем характерны графики четных и нечетных функций?

6. Для каких значений x функции, рассмотренные в упражнении 1, не определены?

6. Функция $y = \frac{k}{x}$. При $k = 1$ эта функция уже рассматривалась в гл. 2. Можно рассматривать более общую функцию

$$y = \frac{k}{x}, \tag{1}$$

где k – любое данное, отличное от нуля число.

График ее также называется *гиперболой.*

При $k > 0$ эта функция имеет свойства, аналогичные свойствам функции $y = \frac{1}{x}$. На рис. 104 изображены графики таких функций для $k = 1$, $k = 2$, $k = \frac{1}{2}$.

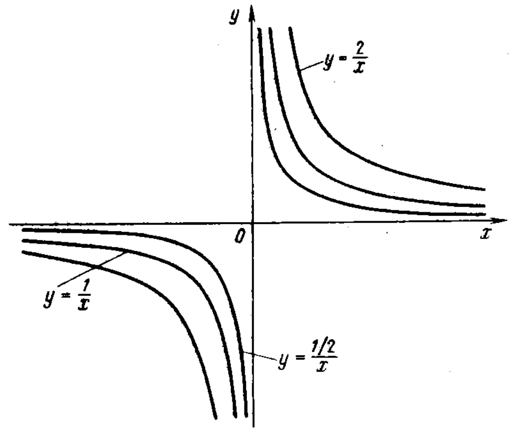


Рис. 104

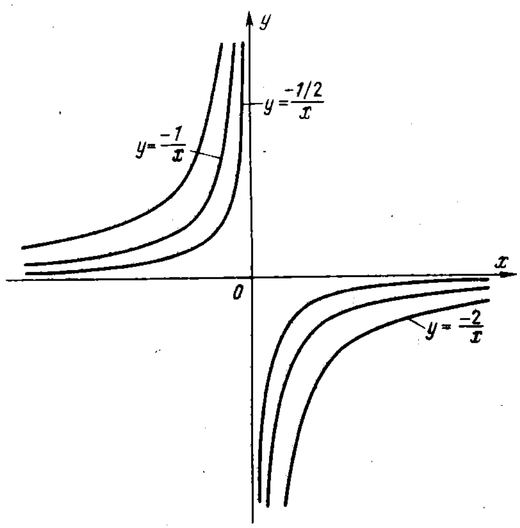


Рис. 105

При $k < 0$ график функции $y = \frac{k}{x}$ симметричен относительно оси Ox графику функции

$$y = \frac{|k|}{x}.$$

На рис. 105 изображены графики функции $y = \frac{k}{x}$ для $k = -1$, $k = -2$ и $k = -\frac{1}{2}$

Если функция (для $k > 0$ и $x > 0$) задана формулой (1), то говорят еще, что переменная y обратно пропорциональна переменной x: во сколько раз увеличивается x, во столько же раз уменьшается y.

Действительно, если x_1 и x_2 – положительные числа и $k > 0$, то числа $y_1 = \frac{k}{x_1}$ и $y_2 = \frac{k}{x_2}$ таковы, что $y_1 : y_2 = x_2 : x_1$. В самом деле,

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{k}{x_1}}{\frac{k}{x_2}} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Вопросы

1. Каковы свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при: а) $k > 0$; б) $k < 0$?
2. Как называется график функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$?
3. Сколько ветвей имеет гипербола?
4. Что значит "переменная y обратно пропорциональна переменной x"?

Упражнение

Изобразить в одной и той же системе координат графики функций:

а) $y = \frac{3}{x}$, $y = \frac{-3}{x}$; б) $y = \frac{1/3}{x}$, $y = \frac{-1/3}{x}$.

§ 25. Корень n-й степени

1. Понятие корня n-й степени. Пусть n – натуральное число и $n \geqslant 2$.

Корнем n-й степени из числа b называется такое число a (если оно существует), что n-я его степень равна b.

Мы уже знаем, что корень второй степени называется также *квадратным корнем*.

Корень третьей степени называют еще *кубическим корнем.*

Примеры

$$(-3)^3 = -27; \quad (-2)^3 = -8; \quad (-1)^3 = -1;$$

$$0^3 = 0; \quad 1^3 = 1; \quad 2^3 = 8; \quad 3^3 = 27$$

показывают, что числа

$$-3; \ -2; \ -1; \ 0; \ 1; \ 2; \ 3$$

можно рассматривать как кубические корни соответственно из чисел

$$-27; \ -8; \ -1; \ 0; \ 1; \ 8; \ 27.$$

Примеры

$$(-3)^5 = -243; \quad (-2)^5 = -32; \quad (-1)^5 = -1;$$

$$0^5 = 0; \quad 1^5 = 1; \quad 2^5 = 32; \quad 3^5 = 243$$

показывают, что числа

$$-3; \ -2; \ -1; \ 0; \ 1; \ 2; \ 3$$

можно рассматривать как корни пятой степени соответственно из чисел

$$-243; \ -32; \ -1; \ 0; \ 1; \ 32; \ 243.$$

Для четных показателей n имеет место несколько другая закономерность, например

$$0^4 = 0; \quad 1^4 = 1; \quad 2^4 = 16; \quad 3^4 = 81; \ \ldots,$$

$$(-1)^4 = 1; \quad (-2)^4 = 16; \quad (-3)^4 = 81; \ \ldots,$$

откуда видно, что есть два числа $+1$ и -1, являющиеся корнями четвертой степени из 1; есть два числа $+2$ и -2, являющиеся корнями четвертой степени из 16; есть также два числа $+3$ и -3, являющиеся корнями четвертой степени из 81. Далее, 0 есть корень четвертой степени из 0.

Мы извлекали корень четвертой степени из положительных чисел. Из отрицательных чисел корень четвертой степени не извлекается, т.е. не существует корня четвертой степени из отрицательного числа, потому что четвертая степень любого отличного от нуля числа есть, очевидно, число положительное.

В следующем пункте будут получены общие заключения, которые согласуются с рассмотренными выше частными фактами.

Вопросы

1. Что называется: а) квадратным корнем; б) кубическим корнем; в) корнем пятой степени; г) корнем n-й степени из числа b?

Упражнения

1. Выписать все натуральные числа, кубы которых не превышают 10000.
2. Выписать все целые числа, четвертые степени которых не превышают 10000.
3. Выяснить, сколько существует натуральных чисел, шестая степень которых не превышает 1000000.

2. Корни четной и нечетной степеней.

Теорема 1. *Существует один и только один корень нечетной степени из любого действительного числа, при этом корень нечетной степени:* а) *из положительного числа есть число положительное;* б) *из отрицательного числа есть число отрицательное;* в) *из нуля есть нуль.*

Доказательство. Применим графический метод. Отметим, что любое нечетное число, большее 1, можно записать в виде $2m + 1$, где m – натуральное число.

Построим в прямоугольной системе координат Oxy график функции $y = x^{2m+1}$ (рис. 106). Это есть непрерывная линия, проходящая через начало координат, симметричная относительно начала координат. Для каждой точки этой линии при возрастании ее абсциссы x от $-\infty$ до $+\infty$ ее ордината y тоже возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Зададим произвольное число b. Через точку B $(0;\ b)$ проведем прямую $y = b$, параллельную оси Ox. Она пересекает параболу $y = x^{2m+1}$ в одной и только в одной точке M. Точка M имеет ординату $y = b$. Абсциссу ее обозначим $x = a$.

Таким образом, полученное число a есть единственное, для которого выполняется равенство $a^{2m+1} = b$.

Если $b > 0$, то $a > 0$ (см. рис. 106).

Если $b < 0$, то $a < 0$ (рис. 107).

Наконец, если $b = 0$, то $a = 0$. Итак, показано, что для любого действительного числа b существует один и только один корень $(2m + 1)$-й степени. Он обозначается так: $\sqrt[2m+1]{b}$.

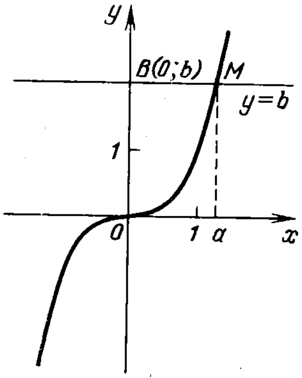


Рис. 106

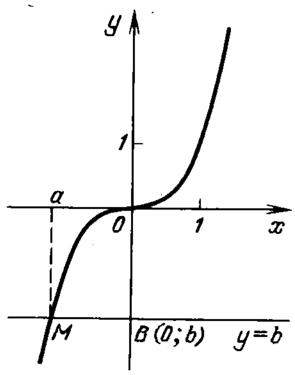


Рис. 107

Теорема 1 доказана.

Примеры.

$\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{-8} = -2$;

$\sqrt[5]{100\,000} = 10$; $\sqrt[5]{-100000} = -10$.

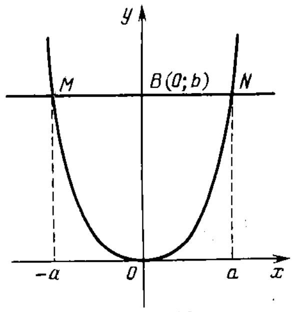


Рис. 108

Теорема 2. *Существует два и только два корня четной степени из любого положительного числа, которые различаются только знаками. Корень четной степени из* 0 *единственный, равный* 0. *Корня четной степени из отрицательного числа не существует.*

Доказательство. Отметим, что всякое положительное четное число можно записать в виде $2m$, где m – некоторое натуральное число. Если любое число, отличное от 0, возвести в четную степень $2m$, то получится положительное число. Если же 0 возвести в $2m$-ю степень, то получится 0. Это и доказывает, что корень $2m$-й степени из 0 единственный, равный 0, и что корня четной степени из отрицательного числа не существует.

Чтобы доказать первые два утверждения теоремы, применим графический метод.

Рассмотрим график функции $y = x^{2m}$ (рис. 108).

Это непрерывная линия, проходящая через начало координат, симметричная относительно оси Oy. Для каждой точки этой линии при возрастании абсциссы x от 0 до $+\infty$ ее ордината y также возрастает от 0 до $+\infty$.

Зададим произвольное положительное число b $(b > 0)$. Через точку $B(0;\ b)$ проведем прямую, параллельную оси Ox. Эта прямая пересекает параболу $y = x^{2m}$ в двух и только в двух точках M и N, имеющих одну и ту же ординату b. Абсциссы их в силу симметрии графика относительно оси Oy имеют противоположные знаки. Точка N имеет положительную абсциссу; обозначим ее $a (a > 0)$. Тогда точка M имеет отрицательную абсциссу, равную $-a$. Очевидно, что

$$a^{2m} = (-a)^{2m} = b.$$

Итак, показано, что для каждого положительного числа b существуют два и только два корня $2m$-й степени из b. Один из них a – положительный – обозначается $\sqrt[2m]{b}$.

Другой – отрицательный корень степени $2m$ из b – будет равен $-\sqrt[2m]{b}$.

Корень $2m$-й степени из 0, как показано выше, единственный, равный 0, обозначается $\sqrt[2m]{0} = 0$.

Теорема 2 доказана.

Примеры.

$\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[6]{1\,000\,000} = 10$; $\sqrt{0} = 0$;

$-\sqrt[4]{16} = -2$; $-\sqrt[6]{1\,000\,000} = -10$.

Замечание 1. Записи

$$\sqrt[4]{-16}; \quad \sqrt[4]{-81}; \quad \sqrt[6]{-1000000}; \quad \sqrt[4]{-13{,}2}; \quad \sqrt[8]{-0{,}1}$$

не имеют смысла, потому что корень четной степени из отрицательного числа не существует.

Подведем итоги. Пусть m – данное натуральное число.

Существует один и только один корень $(2m+1)$*-й степени из любого действительного числа a. Его обозначают так:*

$$\sqrt[2m+1]{a},$$

при этом

если $a > 0$, то $\sqrt[2m+1]{a} > 0$,

если $a = 0$, *то* $\sqrt[2m+1]{a} = 0$;

если $a < 0$, *то* $\sqrt[2m+1]{a} < 0$.

Существуют два и только два корня $2m$*-й степени из любого положительного числа* b; *они различаются только знаками.*

Положительный корень обозначают так: $\sqrt[2m]{b}$. *Тогда отрицательный корень равен* $-\sqrt[2m]{b}$.

Нуль есть единственный корень $2m$*-й степени из* 0, *обозначается он так:* $\sqrt[2m]{0}$. *Таким образом,* $\sqrt[2m]{0} = 0$.

Корня степени $2m$ *из отрицательного числа не существует.*

Замечание 2. При подробном изучении комплексных чисел показывается, в частности, что корни четной степени из отрицательных чисел являются комплексными числами. Фраза "корень четной степени из отрицательного числа не существует" означает, что не существует действительного числа, являющегося корнем четной степени из отрицательного числа.

Вопросы

1. Сколько существует корней нечетной степени из любого действительного числа?
2. Может ли корень нечетной степени из положительного числа быть числом отрицательным?
3. Будет ли корень нечетной степени из отрицательного числа числом отрицательным?
4. Чему равен корень нечетной степени из 0?
5. Как обозначается корень нечетной степени из числа b?
6. Для любого ли действительного числа существует корень четной степени?
7. Сколько существует корней четной степени из: а) положительного числа; б) нуля; в) отрицательного числа?
8. Чему равен корень четной степени из 0?
9. Как обозначается положительный корень четной степени из положительного числа?
10. Как обозначается отрицательный корень четной степени из положительного числа?
11. Почему не существует корней четной степени из отрицательного числа?

3. Арифметический корень. Пусть n — натуральное число, большее 1. Неотрицательный корень n-й степени из неотрицательного числа b ($b \geqslant 0$) называют *арифметическим значением корня n-й степени из b* или *арифметическим корнем n-й степени из b* и обозначают так:

$$\sqrt[n]{b} \quad (b \geqslant 0).$$

Как уже отмечалось в п. 2, для нечетного n существует только один корень из любого числа b, причем неотрицательный, если b неотрицательно. Поэтому *понятия корня нечетной степени из неотрицательного числа b и арифметического корня той же степени из того же числа b совпадают.*

В случае же четного n, как уже отмечалось в п. 2, существуют два корня n-й степени из положительного числа b. Из них корень $\sqrt[n]{b}$ положительный, т.е. арифметический корень n-й степени из b, а другой равен ему по абсолютной величине, но противоположен по знаку, т.е. $-\sqrt[n]{b}$. Корень n-й степени ($n > 1$) из 0 по определению есть арифметический корень n-й степени из 0: $\sqrt[n]{0} = 0$.

Замечание 1. В дальнейшем в этом пункте запись

$$\sqrt[n]{a} \quad (a \geqslant 0)$$

будет означать арифметический корень n-й степени из неотрицательного числа a.

Пример 1. Корни

$$\sqrt{3};\ \sqrt[3]{0};\ \sqrt[4]{5};\ \sqrt[4]{(-3)^2}$$

арифметические.

Пример 2. Выражения

$$-\sqrt[4]{2};\ \sqrt[3]{-5};\ -\sqrt[3]{2};\ \sqrt[5]{-8}$$

имеют смысл, но не являются арифметическими корнями.

Теорема 1. *Для натурального числа n ($n > 1$) и неотрицательного числа a справедливы равенства*

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a \geqslant 0), \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad (a \geqslant 0). \tag{2}$$

Доказательство. Так как a — неотрицательное число, то $\sqrt[n]{a}$ есть по определению неотрицательное число такое, что если его возвести в степень n, то получится число a. Это и выражается равенством (1).

Так как a — неотрицательное число, то, как показано в п. 1 § 24, $a^n \geqslant 0$. Кроме того, $\sqrt[n]{a^n}$ есть по определению неотрицательное число такое, что если его возвести в степень n, то получится число a^n. Таким числом является a, что и записано при помощи равенства (2). Другого неотрицательного числа, n-я степень которого равняется a^n, нет.

Теорема 1 доказана.

Пример 3.

$$(\sqrt[4]{2})^4 = 2;\quad (\sqrt[3]{7})^3 = 7;\quad (\sqrt[21]{1})^{21} = 1;$$

$$(\sqrt[4]{3^4}) = 3;\quad \sqrt[9]{100^9} = 100;\quad \sqrt[7]{0^7} = 0.$$

Теорема 2. *Для натурального числа n $(n > 1)$ и неотрицательных чисел a и b из равенства*

$$a^n = b^n$$

следует равенство

$$a = b.$$

Доказательство. Учитывая, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, из равенства $a^n = b^n$ следует равенство $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b^n}$. Используя (2), получаем

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ и } \sqrt[n]{b^n} = b.$$

Следовательно, $a = b$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Для натурального числа n $(n > 1)$ и неотрицательных чисел a, b и c $(c \neq 0)$ справедливы равенства*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \tag{3}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}. \tag{4}$$

Доказательство. По свойству (1) имеем

$$(\sqrt[n]{ab})^n = ab;$$

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Правые части этих равенств равны. Следовательно, равны и левые их части:

$$(\sqrt[n]{ab})^n = (\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n.$$

Так как числа $\sqrt[n]{ab}$ и $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ неотрицательные, то, применяя теорему 2, получаем, что справедливо равенство (3). Аналогично доказывается равенство (4).

Теорема 3 доказана.

Пример 4.

$$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3};$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3};$$

$$\sqrt[4]{\frac{2}{81}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{3}; \quad \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}.$$

З а м е ч а н и е 2. Если n – нечетное число, то теоремы 1–3 справедливы для любых действительных чисел a, b и c, необязательно неотрицательных $(c \neq 0)$.

Кроме того, для натурального числа m и любого действительного числа a справедливо равенство

$$\sqrt[2m+1]{-a} = -\sqrt[2m+1]{a},$$

потому что

$$\sqrt[2m+1]{-a} = \sqrt[2m+1]{(-1)a} = \sqrt[2m+1]{-1}\ \sqrt[2m+1]{a} = (-1)\ \sqrt[2m+1]{a} = -\sqrt[2m+1]{a}.$$

П р и м е р 5.

$$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3; \quad \sqrt[5]{-1} = -\sqrt[5]{1} = -1;$$

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2;$$

$$\sqrt[5]{-100\,000} = -\sqrt[5]{10^5} = -10.$$

В о п р о с ы

1. Что называется арифметическим корнем n-й степени $(n > 1)$ из числа a?
2. Для каких действительных чисел определен арифметический корень n-й степени $(n > 1)$ из данного числа?
3. Сколько существует арифметических корней n-й степени $(n > 1)$ из данного числа?
4. Верны ли для любого неотрицательного числа a и любого натурального числа n $(n > 1)$ равенства

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a?$$

5. Если $a^n = b^n$, то всегда ли $a = b$?
6. Чему равен корень n-й степени $(n > 1)$ из: а) произведения неотрицательных чисел; б) частного положительных чисел?
7. Чему равен $\sqrt[2m+1]{-a}$, если a – любое действительное число?

У п р а ж н е н и я

1. Упростить следующие числовые выражения:

а) $\sqrt[3]{32}$; б) $\sqrt[5]{800}$; в) $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}} + \frac{7}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + 5\sqrt[3]{144}$;

г) $\sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{40}$.

2. Упростить следующие числовые выражения:

а) $\sqrt[4]{80}$; б) $\sqrt[4]{405}$; в) $\sqrt[4]{81(4-\sqrt{17})^4}$;

г) $\sqrt[4]{0{,}0001} - \sqrt[6]{0{,}000064}$.

4. Свойства корней n-й степени.

Теорема 1. *Для натуральных чисел n, m ($n > 1$, $m > 1$) и неотрицательного числа a справедливы равенства*

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; \qquad (1)$$

$$\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}; \qquad (2)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \qquad (3)$$

Доказательство. Заметим, что в силу того, что $a \geqslant 0$, числа, стоящие в левых и правых частях (предполагаемых пока) равенств (1)–(3), неотрицательные.

Метод доказательства этих равенств основан на применении теоремы 2 п. 3, в силу которой если n-е степени неотрицательных чисел равны между собой, то и сами числа равны между собой.

Если возвести отдельно левую и правую части предполагаемого равенства (1) в n-ю степень, то получим равные числа:

$$[(\sqrt[n]{a})^m]^n = [(\sqrt[n]{a})^n]^m = a^m;$$

$$(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m.$$

Следовательно, равенство (1) верно.

Если возвести отдельно левую и правую части предполагаемого равенства (2) в степень mn, то получим равные числа:

$$(\sqrt[mn]{a^m})^{mn} = a^m;$$

$$(\sqrt[n]{a})^{nm} = [(\sqrt[n]{a})^n]^m = a^m.$$

Следовательно, равенство (2) верно.

Если возвести отдельно левую и правую части предполагаемого равенства (3) в степень mn, то получим равные числа:

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = [(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m]^n = (\sqrt[n]{a})^n = a;$$

$$(\sqrt[mn]{a})^{mn} = a.$$

Следовательно, равенство (3) верно.

Теорема 1 доказана.

Пример 1.

$$\sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{27^4}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^4 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81};$$

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2};$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{12}} = \sqrt[6]{12}; \quad \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Замечание. Если m – нечетное число, то теорема 1 справедлива для любых действительных чисел a, необязательно неотрицательных.

Т е о р е м а 2. *Для натурального числа m и любого действительного числа a справедливо равенство*

$$\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|. \qquad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a есть произвольное действительное число. Тогда

$$a^{2m} = |a|^{2m} \geqslant 0.$$

Поэтому в силу равенства (2) п. 3

$$\sqrt[2m]{a^{2m}} = \sqrt[2m]{|a|^{2m}} = |a|,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2 доказана.

П р и м е р 2.

$$\sqrt[6]{(-3)^6} = |-3| = 3; \ \sqrt[4]{5^4} = |5| = 5.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть a – положительное число, p – целое число и n – натуральное число, большее единицы. Тогда справедливо равенство*

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p. \qquad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если p – натуральное число, то равенство (5) уже доказано (см. (1)).

Если $p = 0$, то

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{1} = 1; \ (\sqrt[n]{a})^p = 1.$$

Следовательно, $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$.

Если $p < 0$, то $p = -|p|$, где $|p|$ – натуральное число. Тогда, используя определение степени с отрицательным целым показателем и свойства арифметических корней n-й степени, получаем

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^{|p|}}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^{|p|}}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^{|p|}} = (\sqrt[n]{a})^{-|p|} = (\sqrt[n]{a})^p.$$

Теорема 3 доказана.

П р и м е р 3.

$$\sqrt[3]{27^{-4}} = (\sqrt[3]{27})^{-4} = 3^{-4}; \ \sqrt{9^3} = (\sqrt{9})^3 = 3^3.$$

В о п р о с ы

1. Каковы свойства корней n-й степени?
2. Чему равен корень $\sqrt[2m+1]{-a}$, если a – любое действительное число?
3. Чему равен корень $\sqrt[2m]{a^{2m}}$, если a – любое действительное число?
4. Справедливо ли равенство $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$, если n – натуральное число ($n > 1$), p – целое число, a – положительное число?

Упражнения

1. Упростить следующие числовые выражения:

а) $\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt{4}}}$; б) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}} : \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}}\ \sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}$.

2. Записать в виде корней одной и той же степени следующие три числа:

а) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[6]{5}$; б) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{15}$ и $\sqrt[8]{50}$.

5. Корень *n*-й степени из натурального числа. Пусть n ($n > 1$) – натуральное число. Очевидно, что n-я степень натурального числа b есть натуральное число. Но не всякое натуральное число есть n-я степень некоторого натурального числа.

Например, среди натуральных чисел, не больших 100, только четыре, т.е. 4%, являются кубами натуральных чисел, а именно:

$$1^3;\ 2^3;\ 3^3;\ 4^3.$$

Среди натуральных чисел, не больших 1000, только десять, т.е. 1%, являются кубами натуральных чисел, а именно:

$$1^3;\ 2^3;\ 3^3;\ \ldots;\ 10^3.$$

Мы видим, что среди больших натуральных чисел редко попадаются n-е степени натуральных чисел.

Отметим следующий факт: арифметический корень n-й степени ($n > 1$) из натурального числа может быть или натуральным числом, или иррациональным числом. Таким образом, например, корни

$$\sqrt{2};\ \sqrt[3]{5};\ \sqrt[4]{3};\ \sqrt[5]{7};\ \sqrt[6]{19}$$

есть числа иррациональные.

Конечно, это утверждение при любом $n \geqslant 2$ надо доказывать. Оно доказывается так же, как было доказано ранее при $n = 2$. Приводить доказательство мы не будем.

Если данное натуральное число не есть n-я степень ($n > 1$) натурального числа, то принято говорить, что из этого числа корень n-й степени не извлекается. Покажем, как можно приближенно извлечь корень n-й степени из натурального числа, не являющегося n-й степенью натурального числа.

Ограничимся примером.

Вычислим приближенно с точностью до второго знака после запятой число $\sqrt[3]{17}$.

Мы знаем, что это число положительное. Оно имеет некоторое десятичное разложение:

$$\sqrt[3]{17} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

Вычислить приближенно с точностью до второго знака число $\sqrt[3]{17}$ – это значит вычислить точные значения числа α_0, $\alpha_1\alpha_2$ и написать приближенное равенство

$$\sqrt[3]{17} \approx \alpha_0, \alpha_1\alpha_2.$$

Рассмотрим числа

$$0^3;\ 1^3;\ 2^3;\ 3^3;\ \ldots,$$

чтобы найти два стоящих рядом, между которыми находится число 17. Очевидно, что

$$8 = 2^3 < 17 < 3^3 = 27.$$

Следовательно,

$$2 < \sqrt[3]{17} < 3$$

и

$$\alpha_0 = 2.$$

Теперь рассмотрим числа

$$2^3;\ 2{,}1^3;\ 2{,}2^3;\ 2{,}3^3;\ 2{,}4^3;\ \ldots;\ 2{,}9^3;\ 3^3;$$

найдем среди них два стоящих рядом, между которыми находится число 17.

Имеем

$$15{,}625 = 2{,}5^3 < 17 < 2{,}6^3 = 17{,}676,$$

откуда

$$2{,}5 < \sqrt[3]{17} < 2{,}6$$

и, следовательно,

$$\alpha_1 = 5.$$

Теперь рассмотрим с той же целью числа

$$2{,}5^3;\ 2{,}51^3;\ 2{,}52^3;\ \ldots,\ 2{,}59^3;\ 2{,}6^3.$$

Оказывается, что

$$16{,}974\ldots = 2{,}57^3 < 17 < 2{,}58^3 = 17{,}173\ \ldots;$$

следовательно,

$$\alpha_2 = 7.$$

Итак,

$$\sqrt[3]{17} \approx 2{,}57.$$

Как видно, приведенный метод вычисления простой, но громоздкий.

В последнее время получили распространение электронные микрокалькуляторы, с помощью которых корни вычисляются мгновенно. Точность результата определяется техническими возможностями калькулятора.

Пример. Чтобы вычислить $\sqrt[3]{17}$ на калькуляторе БЗ-38, надо нажать последовательно клавиши

$17\ F_2\ \boxed{x^{1/y}}\ 3\ \boxed{=}$.

Получится $\sqrt[3]{17} \approx 2{,}5712815$.

Приближенные значения квадратных и кубических корней из чисел также можно получить, используя таблицы квадратов и кубов чисел.

Вопросы

1. Может ли быть рациональным числом корень n-й степени ($n \geq 2$) из простого числа?

2. Может ли быть рациональным числом корень n-й степени ($n \geq 2$) из натурального числа?

3. Что значит вычислить с точностью до третьего знака после запятой $\sqrt[3]{N}$, где N – простое число?

4. Если натуральное число N не есть куб натурального числа, то является ли число $\sqrt[n]{N}$ иррациональным?

Упражнения

1. Вычислить с точностью до третьего знака после запятой числа:

а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt[3]{7}$

и сверить результаты с таблицей кубических корней.

2. Вычислить с точностью до первого знака после запятой числа:

а) $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[5]{7}$.

6. Функция $y = \sqrt[n]{x}$. Пусть n ($n \geq 2$) – натуральное число. Каждому неотрицательному числу x поставим в соответствие число y, равное арифметическому корню n-й степени из x. Иными словами, на множестве неотрицательных чисел зададим функцию

$$y = \sqrt[n]{x} \quad (x \geq 0). \tag{1}$$

Она называется *корнем n-й степени из x*.

Таким образом, областью определения функции (1) является множество неотрицательных чисел: $x \geq 0$.

Отметим следующие свойства функции (1).

1) Если $x = 0$, то $y = 0$.

2) Если $x > 0$, то $y > 0$.

3) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ возрастает.

4) Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.

5) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ непрерывна.

Свойство 1) следует из того, что корень n-й степени из 0 равен нулю.

Свойство 2) следует из того, что арифметический корень n-й степени из положительного числа есть число положительное.

Докажем теперь свойство 3), т.е. докажем, что если $0 \leq x_1 < x_2$, то $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$, способом от противного. Предположим, что найдутся числа

x_1 и x_2 такие, что

$$0 \leqslant x_1 < x_2, \text{ но } \sqrt[n]{x_1} \geqslant \sqrt[n]{x_2}.$$

Учитывая, что эти числа неотрицательные, получим

$$(\sqrt[n]{x_1})^n \geqslant (\sqrt[n]{x_2})^n,$$

т.е. $x_1 \geqslant x_2$, что противоречит неравенству $0 \leqslant x_1 < x_2$. Следовательно, наше предположение неверно, а верно свойство 3).

Если x стремится к бесконечности, пробегая числа

$$1^n;\ 2^n;\ 3^n;\ 4^n;\ \ldots,$$

то $y = \sqrt[n]{x}$ пробегает числа

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots;\ n;\ \ldots$$

и, очевидно, также стремится к плюс бесконечности. Для других значений x это свойство сохраняется.

Доказательство свойства 5) будет следовать из рассмотрения графика функции (1).

Перейдем к построению графика функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$.

Рассмотрим сначала степенную функцию

$$x = y^n \quad (y \geqslant 0) \tag{2}$$

и изобразим ее график в той же координатной плоскости Oxy.

Чтобы получить произвольную точку этого графика, имеющую ординату y $(y \geqslant 0)$, отметим на оси Oy точку $(0;\ y)$ (рис. 109), проведем через нее прямую, параллельную оси Ox, и на последней возьмем точку A, имеющую абсциссу $x = y^n$.

Точка A будет иметь координаты A $(y^n;\ y)$. Это и есть точка графика функции (2).

Совокупность точек A $(y^n;\ y)$, соответствующих любым неотрицательным y, есть график функции $x = y^n$ $(y \geqslant 0)$.

Но так как для $y \geqslant 0$ равносильны равенства

$$x = y^n \text{ и } y = \sqrt[n]{x},$$

то координаты точки A можно записать в виде

$$A\ (x;\ \sqrt[n]{x}).$$

Это показывает, что A – точка графика функции (1) – одновременно является и точкой графика функции (2). Но очевидно и обратное: если A – точка графика функции (2), то она является и точкой графика функции (1).

Итак, функции (1) и (2) имеют один и тот же график. Он непрерывен, потому что функция (2) непрерывна. Следовательно, и функция (1) непрерывна.

Легко видеть, что график функции (1) отражает свойства 1)–5) функции (1).

Действительно, график функции (1) проходит через начало координат – свойство 1); график функции (1) расположен выше оси Ox для $x > 0$ – свойство 2); график изображает возрастающую функцию – свойство 3); при $x \to \infty$ ординаты соответствующих точек графика функции неограниченно возрастают – свойство 4); график функции (1) есть непрерывная линия – свойство 5).

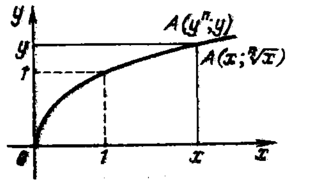


Рис. 109

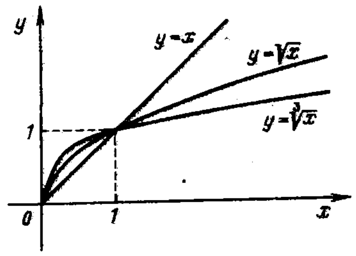


Рис. 110

Приведем еще некоторые свойства арифметических корней.

1) Если $x > 1$, то $\sqrt[n]{x} > 1$.

2) Если $0 < x < 1$, то $0 < \sqrt[n]{x} < 1$.

Справедливость этих свойств следует из того, что $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$, и того, что функция $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$ возрастает.

На рис. 110 в одной и той же декартовой системе координат Oxy изображены графики функций

$$y = x;\ y = \sqrt{x};\ y = \sqrt[3]{x}\ (x \geqslant 0).$$

На интервале $(0;\ 1)$, т.е. для значений x, для которых $0 < x < 1$, выполняются неравенства

$$x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < \ldots \qquad (3)$$

Например, для этих x очевидны неравенства

$$(\sqrt{x})^6 = x^3 < x^2 = (\sqrt[3]{x})^6,$$

откуда и получаем, что $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$. Аналогично доказываются и остальные неравенства в (3).

В силу неравенств (3) график функции $y = \sqrt{x}$ на интервале $(0;\ 1)$ расположен выше графика функции $y = x$, график функции $y = \sqrt[3]{x}$ расположен выше графика функции $y = \sqrt{x}$ и т.д.

Далее, на интервале $(1;\ +\infty)$ выполняются неравенства

$$x > \sqrt{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x} > \ldots \qquad (4)$$

Например, для этих x очевидны неравенства

$$(\sqrt{x})^6 = x^3 > x^2 = (\sqrt[3]{x})^6.$$

Откуда получаем, что $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$. Аналогично доказываются и остальные неравенства в (4).

В силу неравенств (4) график функции $y = \sqrt{x}$ на интервале $(1; +\infty)$ расположен ниже графика функции $y = x$, график функции $y = \sqrt[3]{x}$ расположен ниже графика функции $y = \sqrt{x}$ и т.д.

Вопросы

1. Какая функция называется корнем n-й степени из x?
2. Какова область определения функции $y = \sqrt[n]{x}$?
3. Каковы свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$?
4. Какая линия является графиком функции $y = \sqrt[n]{x}$?

§ 26. Степень с рациональным показателем

1. Понятие степени с рациональным показателем. Ранее уже было введено и изучено понятие степени с целым показателем p (a^p), т.е. когда показатель p – целое число (положительное, отрицательное или нуль). Теперь определим степень с рациональным показателем, т.е. с показателем p/q, где p – целое число, а q – натуральное число.

Пусть a – положительное число, а p/q $(q > 1)$ – рациональное число. По определению a в степени p/q равно корню q-й степени из a в степени p, т.е. по определению

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Например,

$$5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2};\ 3^{3/2} = \sqrt{3^3};\ 7^{1/5} = \sqrt[5]{7};\ 2^{-3/4} = \sqrt[4]{2^{-3}}.$$

Теорема. *Пусть a – любое положительное число, p – целое число, k и q $(q > 1)$ – натуральные числа. Тогда справедливы равенства*

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p; \tag{1}$$

$$a^{p/q} = a^{pk/qk}; \tag{2}$$

$$a^p = a^{(pq)/q}. \tag{3}$$

Доказательство. Применяя теорему 3 п. 4 § 25, имеем

$$\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

По определению степени с рациональным показателем левая часть этого равенства равна $a^{p/q}$, а правая равна $(a^{1/q})^p$. Откуда и вытекает равенство (1).

Докажем теперь равенство (2). В силу свойств корней q-й степени имеем

$$\sqrt[qk]{a^{pk}} = \sqrt[qk]{(a^p)^k} = \sqrt[q]{a^p}. \tag{4}$$

Но по определению степени с рациональным показателем левая часть этих равенств равна $a^{pk/(qk)}$, а правая равна $a^{p/q}$. Откуда и следует равенство (2).

Применяя определение степени с рациональным показателем и свойства корней n-й степени, получаем

$$a^{pq/q} = \sqrt[q]{a^{pq}} = \sqrt[q]{(a^p)^q} = a^p.$$

Тем самым доказано равенство (3)

Теорема доказана.

Примеры.

$$27^{-4/3} = (27^{1/3})^{-4} = 3^{-4};$$

$$6^{1/3} = 6^{3/9}; \quad 2^{-3} = 2^{-12/4}; \quad 5^{-3} = 5^{-6/2}.$$

Замечание 1. Если k и q – натуральные числа, а p – целое число, то справедливо равенство

$$\frac{p}{q} = \frac{pk}{qk}.$$

Поэтому если $r = \frac{p}{q}$, то $r = \frac{pk}{qk}$ для любого натурального k.

Равенство (2) показывает, что определение степени с рациональным показателем a^r не зависит от формы записи числа r, а зависит лишь от самого числа r. При любой форме записи данного рационального числа r определение a^r приводит к одному и тому же числу. Если бы это было не так, то определение степени с рациональным показателем было бы противоречиво.

Замечание 2. Равенство (3) показывает, что определение степени с рациональным показателем содержит в себе определение степени с целым показателем.

Вопросы

1. Что понимается под рациональной степенью $\frac{p}{q}$ $(q > 1)$ положительного числа a?
2. Как формулируется теорема, доказанная в этом пункте?
3. Почему в определении степени с рациональным показателем нет противоречия?
4. Содержит ли в себе определение степени с рациональным показателем определение степени с целым показателем?

2. Свойства степени с рациональным показателем.

Теорема 1. *Положительное число a в любой рациональной степени r положительно*:

$$a^r > 0 \quad (a > 0). \tag{1}$$

Доказательство. Запишем число r в виде

$$r = \frac{p}{q},$$

где q – натуральное число, а p – целое (положительное, отрицательное или нуль).

Так как a – положительное число, то, используя определение рациональной степени и свойства корня q-й степени, получаем

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a} > 0,$$

т.е. верно неравенство (1) при $p = 1$.

Используя равенство (1) теоремы из п. 1 и свойства целой степени положительного числа, при любом целом p имеем

$$a^r = a^{p/q} = (a^{1/q})^p > 0,$$

т.е. неравенство (1) доказано.

Т е о р е м а 2. *Пусть a – положительное число, а r_1, r_2 и r – рациональные числа. Тогда справедливы свойства:*

1) *При умножении рациональных степеней одного и того же положительного числа показатели степеней складываются:*

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}. \tag{2}$$

2) *Число a в степени $-r$ равно единице, деленной на a в степени r:*

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \tag{3}$$

3) *При делении рациональных степеней одного и того же положительного числа показатели степеней вычитаются:*

$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}. \tag{4}$$

4) *При возведении рациональной степени положительного числа в рациональную степень показатели степеней перемножаются:*

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r_1 = \dfrac{m}{n}$, $r_2 = \dfrac{p}{q}$, где n и q – натуральные числа, а m и p – целые числа. Тогда

$$r_1 = \frac{mq}{nq}, \qquad r_2 = \frac{pn}{qn}.$$

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства арифметических корней и свойства целых степеней чисел, получаем

$$a^{r_1} a^{r_2} = a^{mq/(nq)} \cdot a^{pn/(qn)} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\,\sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{(a^{mq})(a^{pn})} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{(mq+pn)/(nq)} = a^{mq/(nq)+pn/(qn)} = a^{r_1 + r_2},$$

т.е. равенство (2) доказано.

Теперь на основании свойства 1) имеем

$$a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1,$$

откуда и следует равенство (3).

Далее в силу свойств 1) и 2)

$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1} \cdot \frac{1}{a^{r_2}} = a^{r_1} \cdot a^{-r_2} = a^{r_1 + (-r_2)} = a^{r_1 - r_2},$$

и равенство (4) тем самым доказано.

Теперь докажем равенство (5).

Используя определение степени с рациональным показателем и свойства арифметических корней, имеем

$$(a^{r_1})^{r_2} = (a^{r_1})^{p/q} = \sqrt[q]{(a^{m/n})^p} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} =$$

$$= \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{mp/(qn)} = a^{r_1 r_2},$$

и равенство (5) доказано.

Теорема 2 доказана.

Примеры.

$$2^{-3/4} \cdot 2^{-1/4} = 2^{-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = 2^{-1} = \frac{1}{2};$$

$$3^{1/2} : 3^{1/4} = 3^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3};$$

$$(3^{-1/2})^{-4} = 3^{(-1/2)(-4)} = 3^2 = 9.$$

Теорема 3. *Пусть a и b – положительные числа, а r – рациональное число. Тогда справедливы свойства:*

1) *Рациональная степень произведения положительных чисел равна произведению тех же рациональных степеней сомножителей:*

$$(ab)^r = a^r \cdot b^r. \tag{6}$$

2) *Рациональная степень частного положительных чисел равна частному тех же рациональных степеней делимого и делителя:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $r = \dfrac{p}{q}$, где q – натуральное число, большее 1, а p – целое число. Тогда, используя определение степени с рациональным показателем и свойства арифметических корней, получаем

$$(ab)^r = (ab)^{p/q} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} =$$
$$= \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{p/q} b^{p/q} = a^r b^r,$$

и равенство (6) доказано.

Аналогично доказывается равенство (7).

Теорема 3 доказана.

Примеры.

$$(0{,}125)^{-2/3} \cdot 8^{-2/3} = (0{,}125 \cdot 8)^{-2/3} = 1^{-2/3} = 1;$$

$$(4{,}4)^{1/3} : (0{,}55)^{1/3} = \left(\frac{4{,}4}{0{,}55}\right)^{1/3} = 8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Теорема 4. *Пусть число $a > 1$, а r – рациональное число. Тогда*

$$a^r > 1 \quad \textit{при} \quad r > 0,$$
$$0 < a^r < 1 \quad \textit{при} \quad r < 0.$$

Доказательство. Запишем r в виде дроби

$$r = \frac{p}{q},$$

где q $(q > 1)$ – натуральное число, а p – целое.

Мы знаем, что верно неравенство

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a} > 1 \qquad (a > 1).$$

Если теперь $r > 0$, то $p > 0$ и

$$a^r = a^{p/q} = (a^{1/q})^p > 1.$$

Если же $r < 0$, то $p = -|p| < 0$, $|p| > 0$ и

$$a^r = a^{p/q} = (a^{1/q})^{-|p|} = \frac{1}{(a^{1/q})^{|p|}} < 1.$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть $a > 1$, а рациональные числа r_1 и r_2 удовлетворяют неравенству*

$$r_1 < r_2. \tag{8}$$

Тогда

$$a^{r_1} < a^{r_2}. \tag{9}$$

Доказательство. Используя свойства степени с рациональным показателем, получаем

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1).$$

На основании теоремы 1 $a^{r_1} > 0$ для любого рационального числа r_1 (положительного, отрицательного или нуля), на основании теоремы 4 $a^{r_2 - r_1} - 1 > 0$, потому что $r_2 - r_1 > 0$. Следовательно, $a^{r_2} - a^{r_1} > 0$.

Теорема 5 доказана.

Т е о р е м а 6. *Пусть число а из интервала* $0 < a < 1$, *а рациональные числа* r_1 *и* r_2 *удовлетворяют неравенству*

$$r_1 < r_2.$$

Тогда

$$a^{r_1} > a^{r_2}. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $0 < a < 1$, то $a^{-1} > 1$. Теперь, применяя теорему 5, имеем

$$(a^{-1})^{r_1} < (a^{-1})^{r_2}.$$

Откуда

$$\frac{1}{a^{r_1}} < \frac{1}{a^{r_2}}. \tag{11}$$

Так как $a^{r_1} > 0$ и $a^{r_2} > 0$, то, умножая неравенство (11) на $a^{r_1} \cdot a^{r_2}$, получаем неравенство (10).

Теорема 6 доказана.

П р и м е р ы.

$$2^{1/3} < 2^{1/2}, \text{ так как } 2 > 1 \text{ и } \frac{1}{3} < \frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}, \text{ так как } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ и } \frac{1}{3} < \frac{1}{2}.$$

В о п р о с ы

1. Может ли быть отрицательным числом рациональная степень положительного числа?
2. По какому правилу: а) умножаются; б) делятся рациональные степени одного и того же положительного числа?
3. По какому правилу возводится в рациональную степень рациональная степень положительного числа?
4. Чему равна рациональная степень: а) произведения положительных чисел; б) частного положительных чисел?
5. Если $a > 1$, то каким должно быть рациональное число r, чтобы: а) $a^r > 1$; б) $a^r < 1$?
6. Если $a > 1$ и рациональные числа r_1 и r_2 таковы, что $r_1 > r_2$, то что больше: a^{r_1} или a^{r_2}?
7. Если $0 < a < 1$ и рациональные числа r_1 и r_2 таковы, что $r_1 > r_2$, то что больше: a^{r_1} или a^{r_2}?

§ 27. Показательная и логарифмическая функции

1. Показательная функция. Рассмотрим функцию

$$y = a^x, \tag{1}$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$, на множестве рациональных чисел. Мы уже знаем из § 26, что для каждого рационального числа r определено число a^r. Следовательно, функция (1) действительно определена на множестве рациональных чисел.

График этой функции в системе координат Oxy есть совокупность точек $(x;\ a^x)$, где x — любое рациональное число.

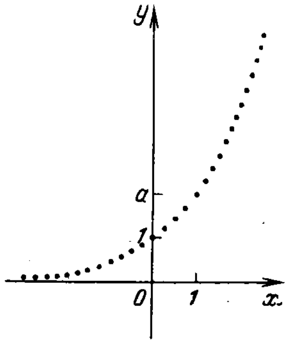


Рис. 111

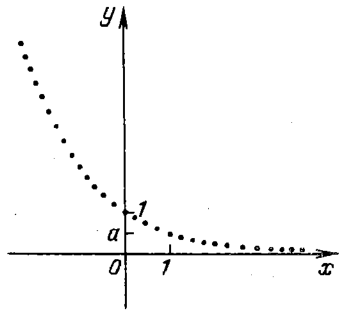


Рис. 112

При $a > 1$ этот график схематически изображен на рис. 111, а при $0 < a < 1$ — на рис. 112. Мы изобразили эти графики точечными линиями, чтобы подчеркнуть, что функции пока заданы для рациональных чисел (точек), а рациональные точки не заполняют полностью ось Ox. Кроме рациональных точек на оси Ox есть и иррациональные точки, и наша задача, определить функцию a^x также и для иррациональных значений x.

Отметим некоторые свойства построенных графиков, доказанные уже в § 26.

1) Каждый из графиков расположен выше оси Ox, потому что при $a > 0$

$$a^x > 0 \tag{2}$$

для любых рациональных значений x.

2) При $a > 1$ график функции $y = a^x$ изображает возрастающую функцию, так как при $a > 1$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \quad \text{для} \quad x_1 < x_2. \tag{3}$$

При этом

$$\begin{aligned} &a^x \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \\ &a^x \to 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Например, если x стремится к $+\infty$, пробегая числа

$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots,$

то a^x при $a > 1$ стремится к $+\infty$, пробегая числа

$1;\ a;\ a^2;\ a^3;\ \ldots$

Если же x стремится к $-\infty$, пробегая числа

$-1;\ -2;\ -3;\ -4;\ \ldots,$

то a^x стремится к 0, пробегая числа

$a^{-1};\ a^{-2};\ a^{-3};\ \ldots$

3) При $0 < a < 1$ график функции $y = a^x$ изображает убывающую функцию, так как при этих a

$$a^{x_1} > a^{x_2} \text{ для } x_1 < x_2. \tag{3'}$$

При этом

$$\begin{aligned} &a^x \to 0 \text{ при } x \to +\infty, \\ &a^x \to +\infty \text{ при } x \to -\infty. \end{aligned} \tag{4'}$$

Важно отметить, что оба точечных графика обладают еще свойством, что их просветы можно пополнить точками так, что после пополнения получатся графики непрерывных функций, заданных на всей действительной оси Ox, т.е. определенных для всех x.

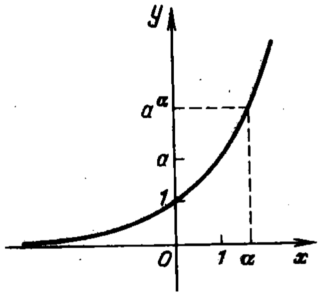


Рис. 113

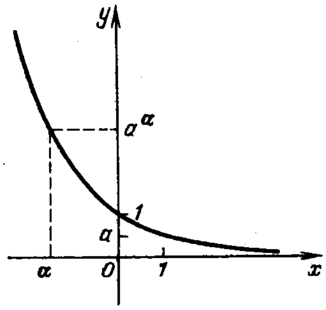


Рис. 114

Можно доказать, что такое пополнение возможно и притом единственным образом (доказательство мы опускаем).

В обоих случаях ($a > 1$ и $0 < a < 1$) полученную, определенную на всей оси Ox функцию мы снова обозначаем

$$y = a^x.$$

Ее называют *показательной функцией с основанием a.* График ее при $a > 1$ изображен на рис. 113, а при $0 < a < 1$ – на рис. 114. Отмеченные

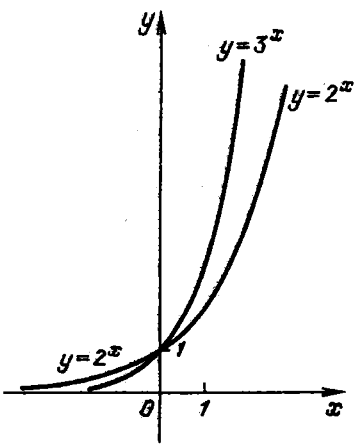


Рис. 115

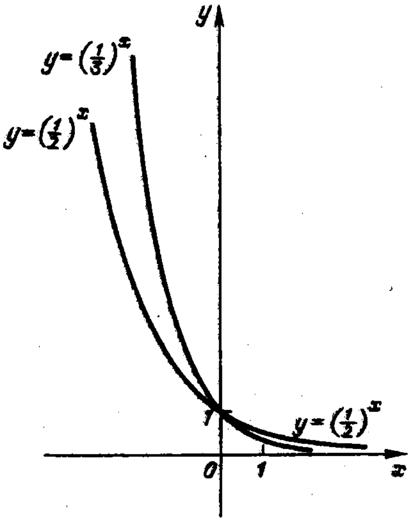


Рис. 116

выше свойства (2)–(4), (3′), (4′), которые ранее были известны лишь для рациональных чисел x, x_1, x_2, сохраняются и для действительных чисел.

Сохраняются также для любых действительных чисел x, x_1 и x_2 другие важные свойства показательной функции:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \quad (a>0); \tag{5}$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2} \quad (a>0); \tag{6}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad (a>0,\ b>0). \tag{7}$$

Эти свойства были доказаны в § 26 для рациональных чисел x_1 и x_2. Доказательство для действительных чисел x_1 и x_2 мы опускаем.

На рис. 115 в одной и той же декартовой системе координат изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = 3^x$.

А на рис. 116 изображены графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Вопросы

1. Какая функция называется показательной?
2. Как теоретически можно получить график показательной функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$?

3. Каковы свойства показательной функции $y = a^x$, общие как при $a > 1$, так и при $0 < a < 1$?

4. В чем различие свойств показательной функции $y = a^x$ при $a > 1$ и при $0 < a < 1$?

Упражнения

1. Построить в одной системе координат Oxy графики функций:

а) $y = 3^x$ и $y = 5^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

2. Построить в одной системе координат Oxy графики функций:

а) $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; б) $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2. Понятие степени положительного числа. Пусть число a таково, что $a > 0$ и $a \neq 1$. Тогда, пользуясь графиком функции $y = a^x$ (см. рис. 113 и 114), для каждого действительного числа α можно определить число a^α, равное ординате точки графика функции $y = a^x$, имеющей абсциссу $x = \alpha$.

Таким образом, можно считать, что число a ($a > 0$, $a \neq 1$) мы умеем возводить в любую действительную степень α.

Число a^α называется *степенью*, число a – *основанием степени*, число α – *показателем степени*.

Пример 1. Объясним, как надо понимать число $3^{\sqrt{2}}$.

Число $\sqrt{2}$ записывается в виде бесконечной десятичной дроби:

$\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$

Этим задается процесс приближения $\sqrt{2}$ со все большей и большей точностью:

$\sqrt{2} \approx 1;\quad \sqrt{2} \approx 1{,}4;\quad \sqrt{2} \approx 1{,}41;\ \ldots$

Соответственно задается процесс приближения числа $3^{\sqrt{2}}$ со все большей и большей точностью:

$3^{\sqrt{2}} \approx 3^1;\quad 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,4};\quad 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,41};\ \ldots$

Полученные числа все точнее и точнее приближают число $3^{\sqrt{2}}$. (Можно дать оценки приближения, но мы на этом останавливаться не будем.) То число, к которому они стремятся, и есть число $3^{\sqrt{2}}$.

Для числа a такого, что $a > 0$ и $a \neq 1$, и для любых действительных чисел α и β справедливы следующие основные свойства степеней:

1) $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$.

2) $a^{\alpha-\beta} = a^\alpha : a^\beta$.

3) $a^{\alpha\beta} = (a^\alpha)^\beta$.

4) Если $a > 1$ и $\alpha > \beta$, то $a^\alpha > a^\beta$.

5) Если $0 < a < 1$ и $\alpha > \beta$, то $a^\alpha < a^\beta$.

П р и м е р 2. Покажем, что $2^{\sqrt{3}} < 4$.

Действительно, так как $4 = 2^2$, $2 > 1$ и $\sqrt{3} < 2$, то по свойству 4) получаем, что $2^{\sqrt{3}} < 4$.

В о п р о с ы

1. Как, пользуясь графиком, определить a^{α} ($a > 0, a \neq 1$) для любого действительного числа α?

2. Может ли число a^{α} ($a > 0$, $a \neq 1$) быть не положительным?

3. Каковы основные свойства степени положительного числа?

У п р а ж н е н и я

1. Вычислить, используя основные свойства степеней:

а) $(2^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$; б) $3^{2+\sqrt{5}} : 3^{\sqrt{5}}$; в) $5^{1-\sqrt{7}} \cdot 5^{1+\sqrt{7}}$.

2. Какое из чисел больше:

а) $3^{\sqrt{5}}$ или 9; б) $5^{\sqrt{2}}$ или $5^{1,5}$?

3. Вычислить с помощью микрокалькулятора:

а) $3^{\sqrt{2}}$; б) $2^{\sqrt{3}}$.

4. Доказать, что

а) если $a > 1$, то

$a^{\alpha} > 1$ при $\alpha > 0$, $a^{\alpha} < 1$ при $\alpha < 0$;

б) если $0 < a < 1$, то

$a^{\alpha} < 1$ при $\alpha > 0$, $a^{\alpha} > 1$ или $\alpha < 0$.

3. Логарифмы. Пользуясь графиком функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) (см. рис. 113 и 114), можно найти число a^{α} для любого действительного числа α. Но этот же график дает возможность решить и обратную задачу: для данных положительных чисел b и $a > 0$ ($a \neq 1$) найти число α такое, что

$$b = a^{\alpha}.$$

Для этого надо отметить на оси Oy точку B, имеющую координаты $(0; b)$, и через нее провести прямую, параллельную оси Ox. Она пересечет график функции $y = a^x$ в единственной точке M (рис. 117). Абсцисса α

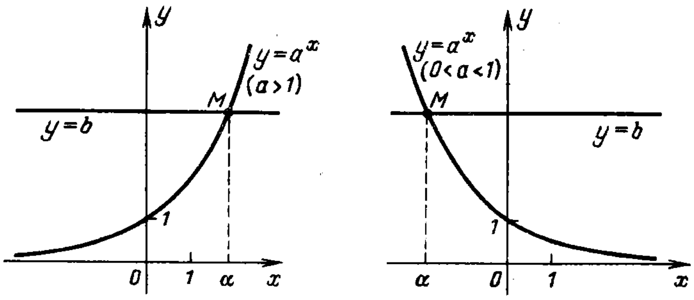


Рис. 117

точки M и удовлетворяет условию $b = a^{\alpha}$. Полученное таким образом число α единственное, удовлетворяющее этому условию.

Следовательно, для любого положительного числа b существует одно и только одно число α такое, что

$$b = a^{\alpha}.$$

Это число называется логарифмом числа b по основанию a.

Итак, *логарифмом положительного числа b по основанию a* называется число α такое, что

$$b = a^{\alpha}.$$

Логарифм положительного числа b по основанию a обозначается так: $\alpha = \log_a b$ $(a \neq 1,\ a > 0)$.

Подчеркнем, что a^{α} есть положительное число для любого α (положительного, отрицательного или равного нулю). Отсюда следует, что логарифма отрицательного числа, так же как логарифма нуля, не существует (не имеет смысла).

Примеры вычисления логарифмов:

$\log_2 1 = 0$, так как $1 = 2^0$;

$\log_{10} 10 = 1$, так как $10 = 10^1$;

$\log_3 27 = 3$, так как $27 = 3^3$;

$\log_{10} 1000 = 3$, так как $1000 = 10^3$;

$\log_{10} 0{,}001 = -3$, так как $0{,}001 = 10^{-3}$.

Т е о р е м а. *Пусть a, M и N – положительные числа, причем $a \neq 1$, и γ – действительное число. Тогда справедливы равенства*

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N; \tag{1}$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N; \tag{2}$$

$$\log_a (M^{\gamma}) = \gamma \log_a M. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим числа M и N следующим образом:

$M = a^{\alpha}$, где $\alpha = \log_a M$.

$N = a^{\beta}$, где $\beta = \log_a N$.

Тогда

$$MN = a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha + \beta},$$

откуда

$$\log_a MN = \alpha + \beta = \log_a M + \log_a N,$$

и мы доказали равенство (1).

Далее

$$\frac{M}{N} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta},$$

откуда

$$\log_a \frac{M}{N} = \alpha - \beta = \log_a M - \log_a N,$$

и мы доказали равенство (2).

Имеем также

$$M^\gamma = (a^\alpha)^\gamma = a^{\alpha\gamma},$$

откуда

$$\log_a M^\gamma = \alpha\gamma = \gamma \log_a M,$$

и мы доказали равенство (3).

Указанные свойства логарифмов удобны для запоминания соответственно в следующих формулировках.

Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел.

Лографим частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.

Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм этого числа.

Примеры.

$$\log_{10} 5 + \log_{10} 20 = \log_{10} 100 = 2;$$

$$\log_2 2^n = n \log_2 2 = n;$$

$$\log_3 54 - \log_3 2 = \log_3 \frac{54}{2} = \log_3 3^3 = 3.$$

Для положительных чисел a, b и M таких, что $a \neq 1$ и $b \neq 1$, справедливо также следующее равенство:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

Это равенство называется *формулой перехода логарифмов от одного основания к другому.*

Вопросы

1. Что называется логарифмом положительного числа по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$)?
2. Почему не существует логарифма: а) отрицательного числа; б) нуля?
3. Чему равен логарифм: а) произведения положительных чисел; б) частного положительных чисел; в) степени положительного числа?
4. Для каких значений b определено число $\log_a b$?

Упражнения

1. Вычислить:

а) $\log_2 \sqrt[3]{16}$; б) $\log_3 (27\sqrt{3})$;

в) $\log_5 \sqrt{5\sqrt{5}}$; г) $\log_{\sqrt[3]{1/3}} 9$;

д) $\log_{1/\sqrt{2}} \sqrt[3]{128\sqrt{2}}$.

2. Найти числовое значение числового выражения:

а) $\log_3 27 - \log_{\sqrt{3}} 27 - \log_{1/3} 27 - \log_{\sqrt{3}/2} \dfrac{64}{27}$;

б) $\log_{0,4}\left(\dfrac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{50}\right) + \log_{0,6} \dfrac{\sqrt{15}}{5} + \log_{0,32} \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$;

в) $\left(\log_{1/2} \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} + 6\log_{1/4} \dfrac{1}{2} - 2\log_{1/16} \dfrac{1}{4}\right) : \log_{\sqrt{2}} \sqrt[5]{8}$.

4. Функция $y = \log_a x$. Пусть a – данное положительное, не равное 1 число. Каждому положительному числу x поставим в соответствие число y, равное логарифму числа x по основанию a. Иными словами, на множестве положительных чисел определим функцию

$$y = \log_a x \qquad (x > 0). \tag{1}$$

Она называется *логарифмической функцией*. Областью ее определения является множество положительных чисел.

Построим график функции (1) при $a > 1$. Для этого сначала построим в системе координат Oxy график показательной функции

$$x = a^y \tag{2}$$

(рис. 118).

Чтобы получить произвольную точку этого графика, имеющую ординату y, отметим на оси Oy точку $(0;\ y)$, проведем через нее прямую, параллельную оси Ox. Она пересечет график функции $x = a^y$ в некоторой единственной точке A, которая имеет абсциссу $x = a^y$.

Итак, точка A графика функции $x = a^y$ имеет координаты $(a^y;\ y)$. А совокупность точек $(a^y;\ y)$, соответствующих любым действительным числам y, и есть график функции $x = a^y$.

Но для $x > 0$ равносильны равенства

$$x = a^y, \qquad y = \log_a x,$$

при этом, когда y пробегает любые действительные значения, x пробегает любые положительные значения (см. рис. 118). Поэтому можно считать, что график функции (1) есть совокупность точек

$$(x;\ \log_a x),$$

соответствующих любым положительным значениям x.

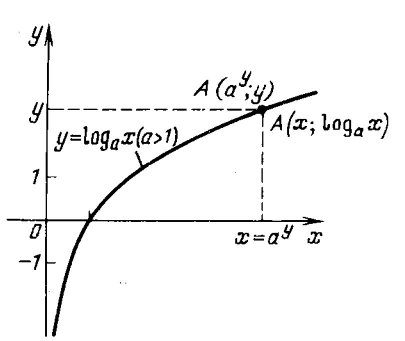


Рис. 118

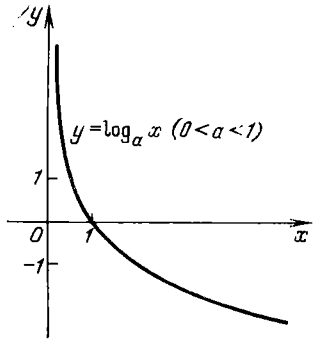


Рис. 119

Иначе говоря, линия, изображенная на рис. 118, есть одновременно и график функции $x = a^y$ $(-\infty < y < +\infty)$, и график функции $y = \log_a x$ $(x > 0)$.

Если y непрерывно возрастает, пробегая интервал $(-\infty; +\infty)$, то $x = a^y$ в свою очередь непрерывно возрастает, пробегая интервал $(0; +\infty)$. Но тогда верно и обратное утверждение.

Этим мы доказали следующие свойства: функция

$y = \log_a x$ при $a > 1$

1) непрерывна и возрастает;

2) если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$; если $x \to 0$, то $y \to -\infty$.

Так как $\log_a 1 = 0$, то из свойства 1) следует:

если $x > 1$, то $y > 0$;

если $0 < x < 1$, то $y < 0$.

На рис. 119 изображен график функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$.

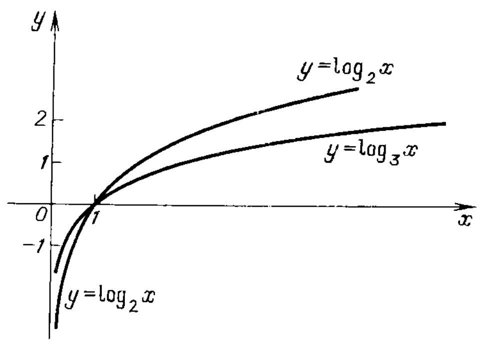


Рис. 120

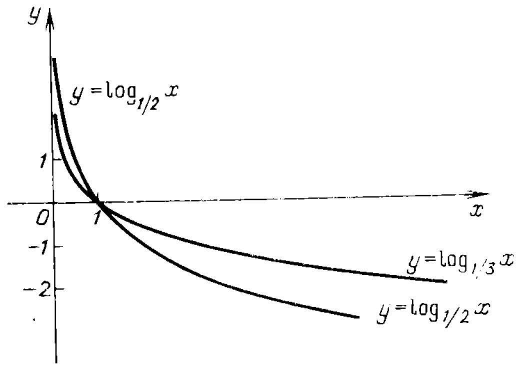


Рис. 121

Рассуждая аналогично, получим следующие свойства: функция

$y = \log_a x \quad (0 < x < \infty)$ при $0 < a < 1$

1) непрерывна и убывает;

2) если $x \to +\infty$, то $y \to -\infty$; если $x \to 0$, то $y \to +\infty$.

Так как $\log_a 1 = 0$, то из свойства 1) следует:

если $x > 1$, то $y < 0$;

если $0 < x < 1$, то $y > 0$.

На рис. 120 изображены графики функции

$y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$,

а на рис. 121 – графики функций

$y = \log_{1/2} x$ и $y = \log_{1/3} x$.

Вопросы

1. Как называется функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$?
2. Какова область определения функции $y = \log_a x$?
3. Является ли функция $y = \log_a x$ непрерывной?
4. Для каких a функция $y = \log_a x$ а) возрастает; б) убывает?
5. Для каких x функция $y = \log_a x$ $(a > 1)$ а) положительна; б) отрицательна?
6. Для каких x функция $y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$ а) положительна; б) отрицательна?

Упражнение

В одной и той же декартовой системе координат постройте графики функций:

а) $y = \log_4 x$ и $y = \log_5 x$; б) $y = \log_{1/4} x$ и $y = \log_{1/3} x$;

в) $y = \log_3 x$ и $y = \log_{1/3} x$.

§ 28. Десятичные логарифмы

1. Понятие десятичного логарифма. В этом параграфе будут рассматриваться логарифмы чисел только при основании 10. Они называются *десятичными логарифмами*.

Мы будем писать краткости ради $\lg A$ вместо $\log_{10} A$. Прилагательное "десятичный" будем часто опускать.

Вот примеры вычисления десятичных логарифмов:

$\lg 1 = 0$, так как $1 = 10^0$;

$\lg 10 = 1$, так как $10 = 10^1$;

$\lg 100 = 2$, так как $100 = 10^2$;

$\lg 1000 = 3$, так как $1000 = 10^3$;

$\lg 0{,}1 = -1$, так как $0{,}1 = 10^{-1}$;

$\lg 0{,}01 = -2$, так как $0{,}01 = 10^{-2}$;

$\lg 0{,}001 = -3$, так как $0{,}001 = 10^{-3}$.

Вопросы

1. Что называется десятичным логарифмом положительного числа A?
2. Почему не существует десятичного логарифма: а) отрицательного числа; б) нуля?
3. Чему равен логарифм:

а) произведения положительных чисел;

б) частного положительных чисел;

в) степени положительного числа?

4. Для каких значений b определено число $\lg b$?
5. К чему стремится $\lg b$ при:

а) $b \to +\infty$;

б) $b \to 0$?

2. Вычисление десятичных логарифмов на микрокалькуляторах. Для практических целей логарифмы чисел вычисляют приближенно.

Мы будем говорить "логарифм числа a" и писать $\lg a$, хотя на самом деле речь будет идти о приближенном значении десятичного логарифма числа a. Все же мы будем писать знаки равенства вместо знаков приближенного равенства.

Технически проще всего вычислять логарифмы чисел при помощи микрокалькулятора. Для этого не нужно даже знать определение логарифма. Нужно просто воспользоваться приложенными к калькуляторам инструкциями, чтобы вычислить логарифм данного числа.

Пример 1. Вычислить $\lg 1{,}23$.

Решение. Вычисляем искомый логарифм при помощи электронного микрокалькулятора Б3-38, применяя приложенные к нему правила. Для этого надо нажать последовательно клавиши

1 ⊡ 23 F_1 lg

В результате на индикаторе получим число 0,089905. Следовательно,

$$\lg 1{,}23 = 0{,}089905.$$

Этот результат получен с точностью до шестого знака после запятой, т.е. с точностью до 10^{-6}.

Отметим, что калькулятор БЗ-38 дает результат без округления. Но есть калькуляторы, которые округляют результаты.

П р и м е р 2. Вычислить $\lg 12{,}3$.

На калькуляторе БЗ-38 нажмем последовательно клавиши

1 2 $\boxed{\cdot}$ 3 F_1 $\underset{\square}{\lg}$

В результате на индикаторе получится 1,089905, т.е. $\lg 12{,}3 = 1{,}089905$.

П р и м е р 3. Вычислить $\lg 0{,}123$.

Надо нажать последовательно клавиши

0 $\boxed{\cdot}$ 1 2 3 F_1 $\underset{\square}{\lg}$

В результате на индикаторе получится число $-0{,}9100949$, т.е. $\lg 0{,}123 =$ $= -0{,}9100949$.

У п р а ж н е н и е

Вычислить с помощью микрокалькулятора:
а) $\lg 3{,}127$; б) $\lg 427{,}5$; в) $\lg 0{,}723$.

3. Характеристика и мантисса десятичного логарифма. Пусть надо вычислить логарифм положительного числа A. Запишем его в стандартном виде:

$$A = a \cdot 10^k,$$

где $1 \leqslant a < 10$, k – целое число.

По свойству десятичных логарифмов

$$\lg A = \lg a + k. \qquad (1)$$

Число k называется *характеристикой* логарифма числа A, число $\lg a$ – *мантиссой* логарифма числа A.

Характеристика есть число целое (положительное, отрицательное или равно нулю). Мантисса есть число неотрицательное, меньшее 1, точнее при $a = 1$ она есть 0, а в остальных случаях – положительное число, меньшее 1. Действительно, в силу того что функция $\lg x = \log_{10} x$ возрастает, из условия $1 \leqslant a < 10$ следует

$$0 = \lg 1 \leqslant \lg a < \lg 10 = 1.$$

Сумму (1) обычно записывают специальным образом, как это будет видно из примеров.

П р и м е р 1. Вычислить $\lg 0{,}123$.

Запишем число 0,123 в стандартном виде:

$$0{,}123 = 1{,}23 \cdot 10^{-1}.$$

Тогда

$$\lg 0{,}123 = \lg 1{,}23 + (-1) = 0{,}0899051 + (-1) = -0{,}9100949.$$

Удобно ввести запись

$$0{,}0899051 + (-1) = \bar{1}{,}0899051.$$

Тогда приведенные вычисления будут выглядеть так:

$$\lg 0{,}123 = \lg 1{,}23 + (-1) = 0{,}0899051 + (-1) =$$
$$= \bar{1}{,}0899051 = -0{,}9100949.$$

З а м е ч а н и е. Мантиссу логарифма числа 0,123 мы нашли при помощи электронного микрокалькулятора БЗ-38. Для этого пришлось нажать последовательно клавиши:

$1 \boxed{\cdot} 23$ F_1 $\underset{\square}{\lg}$

Ниже будет показано, как находить мантиссу логарифма при помощи таблиц логарифмов и логарифмической линейки.

П р и м е р 2. Вычислить $\lg 373{,}2$.

Так как $373{,}2 = 3{,}732 \cdot 10^2$, то

$$\lg 373{,}2 = \lg 3{,}732 + 2 = 0{,}5719416 + 2 = 2{,}5719416.$$

П р и м е р 3. Вычислить $\lg 0{,}00324$.

Так как $0{,}00324 = 3{,}24 \cdot 10^{-3}$, то

$$\lg 0{,}00324 = \lg 3{,}24 + (-3) = 0{,}508335 + (-3) =$$
$$= \bar{3}{,}508335 = -2{,}491665.$$

Иногда приходится решать и обратную задачу; зная (приближенно) десятичный логарифм числа, найти (приближенно) это число. Чтобы найти число A по данному $\lg A$, надо возвести 10 в степень $\lg A$:

$$A = 10^{\lg A}.$$

Число 10^{α} называют *антилогарифмом числа* α. Эти вычисления можно провести при помощи микрокалькулятора или таблиц антилогарифмов.

П р и м е р 4. Пусть $\lg A = 1{,}23$. Найти A при помощи микрокалькулятора.

Нажимая последовательно клавиши

$1 \boxed{\cdot} 23$ F_2 10^x

получаем (на индикаторе) 16,982436, т.е.

$$A = 10^{1{,}23} = 16{,}982436.$$

П р и м е р 5. Пусть $\lg A = -1{,}23$. Найти A при помощи микрокалькулятора.

Так как

$$A = 10^{\lg A} = 10^{-1{,}23} = \frac{1}{10^{1{,}23}},$$

то решение выглядит так: нажимая последовательно клавиши

$$1 \boxed{\cdot} 23\ F_2\ 10^x \boxed{=} F_1 \underset{\square}{\frac{1}{x}},$$

получаем (на индикаторе) 0,588844, т.е.

$$A = 10^{-1{,}23} = 0{,}588844.$$

В о п р о с ы

1. Что называется мантиссой десятичного логарифма положительного числа A?
2. Что называется характеристикой десятичного логарифма положительного числа A?
3. Каким числом может быть характеристика $\lg A$?
4. В каких пределах может изменяться мантисса $\lg A$?
5. Чему равны характеристика и мантисса $\lg A$, если: а) $\lg A = \bar{3},273$; б) $\lg = 3{,}273$; в) $\lg A = -3{,}273$?

У п р а ж н е н и я

1. Вычислить:
а) $\lg 427{,}5$; б) $\lg 0{,}723$.
2. Найти число A, если:
а) $\lg A = \bar{3},273$; б) $\lg A = 3{,}273$.

4. Таблица десятичных логарифмов. Таблица десятичных логарифмов задается для чисел, изменяющихся от 1 до 10.

Основу ее составляют два столбца:

a	$\lg a$
1,000	0,0000
1,001	0,0004
1,002	0,0009
.....	......
1,230	0,0899
.....	......
9,9998	0,9999
9,9999	1,0000

В левом столбце записаны по порядку числа a от 1 до 10, взятые через равные промежутки, в данном случае – через 0,001.

В правом столбце рядом с этими числами записаны их десятичные логарифмы (в данном случае вычисленные с точностью до четвертого знака после запятой).

Если дано число A, удовлетворяющее неравенствам

$$1 < A < 10,$$

то, чтобы найти его логарифм, находим в левом столбце таблицы ближайшее к нему число. Рядом с последним в правом столбце находится приближенное значение искомого $\lg A$.

При этом выполняются неравенства

$$0 < \lg A < 1.$$

Но и, обратно, по заданному числу α, удовлетворяющему неравенствам

$$0 < \alpha < 1,$$

можно найти его антилогарифм

$$A = 10^{\alpha},$$

т.е. такое число, логарифм которого равен α:

$$\alpha = \lg A.$$

Пусть теперь надо вычислить логарифм произвольного положительного числа A, не обязательно находящегося между 1 и 10.

Запишем A в стандартном виде:

$$A = a \cdot 10^k \; (1 \leqslant a < 10).$$

Тогда

$$\lg A = \lg a + k.$$

Число $\lg a$ есть мантисса $\lg A$. Ее мы вычисляем по таблицам. Число же k есть характеристика $\lg A$.

Пример 1. Вычислить $\lg 13{,}27$.

Имеем

$$\lg 13{,}27 = \lg 1{,}327 + 1 = 1{,}1229.$$

Пример 2. Найти число A, если $\lg A = -3{,}2378$.

Имеем

$$\lg A = -4 + 0{,}7622 = \bar{4}{,}7622.$$

Следовательно, характеристика $\lg A$ равна -4, а мантисса равна 0,7622.

По мантиссе 0,7622 из таблицы антилогарифмов находим

$$a = 5{,}784.$$

Поэтому

$$A = a \cdot 10^{-4} = 0{,}0005784.$$

С помощью таблицы десятичных логарифмов можно вычислить приближенно произведение и частное любых положительных чисел A и B.

Для этого, используя таблицу, вычисляем

$$\lg(AB) = \lg A + \lg B;$$

$$\lg \frac{A}{B} = \lg A - \lg B$$

и, наконец, по таблице антилогарифмов находим AB и $\frac{A}{B}$.

Вопросы

1. Для каких чисел составлены таблицы десятичных логарифмов?
2. Как с помощью таблиц вычисляются десятичные логарифмы чисел, больших 10?
3. Как с помощью таблиц найти для двух положительных чисел приближенное значение: а) их произведения; б) их частного?

Упражнения

1. С помощью таблиц десятичных логарифмов вычислить:
а) $\lg 372{,}93$; б) $\lg 0{,}00235$.
2. С помощью таблиц десятичных логарифмов найти число A, если:
а) $\lg A = -3{,}273$; б) $\lg A = 5{,}123$.
3. С помощью таблиц десятичных логарифмов найти произведение и частное чисел A и B, если:
а) $A = 0{,}005784$, $B = 372{,}4$; б) $A = 139{,}7$, $B = 0{,}97813$.

5. Логарифмическая линейка. В этом пункте мы объясним только идею построения логарифмической линейки.

Зададим координатную ось Ox и на ней каждому положительному числу A ($A \geqslant 1$) приведем в соответствие точку, имеющую координату

$$x = \lg A.$$

Возле этой точки отметим число A (рис. 122). Можно считать, что каждому числу приведена в соответствие указанным образом некоторая точка оси Ox. Этим, как говорят, на оси задана *логарифмическая шкала.*

Итак, *если каждому положительному числу A* на координатной оси Ox *приведена в соответствие точка $x = \lg A$*, то говорят, что *на оси задана логарифмическая шкала.*

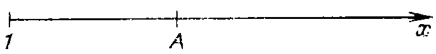


Рис. 122

Обычно логарифмическую шкалу размечают на линейке.

Возьмем две линейки. Приложим их друг к другу. На каждой из них разметим логарифмическую шкалу, как на рис. 123. Именно у нижней линейки разметка произведена на верхней ее кромке, а у верхней линейки — на нижней ее кромке. Указанные две линейки составляют логарифмическую линейку.

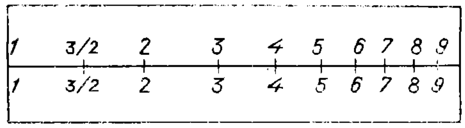


Рис. 123

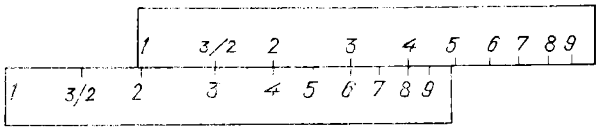


Рис. 124

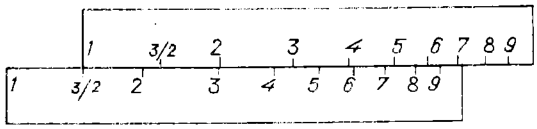


Рис. 125

При помощи логарифмической линейки можно умножать и делить числа.

Например, чтобы вычислить произведение $2 \cdot 3$, верхнюю линейку передвигаем в такое положение, чтобы ее точка 1 оказалась против точки 2 нижней линейки. Тогда против точки 3 верхней линейки на нижней линейке будет находиться точка $6 = 2 \cdot 3$ (рис. 124). Ведь $\lg 6 = \lg 2 + \lg 3$.

Если же мы хотим вычислить частное $3 : 2$, надо верхнюю линейку передвинуть так, чтобы ее точка 2 была против точки 3 нижней линейки. Тогда точка 1 верхней линейки окажется против точки 3/2 нижней линейки (рис. 125). Ведь $\lg \frac{3}{2} = \lg 3 - \lg 2$.

Если мы хотим умножить или разделить приближенно произвольные положительные числа A и B, то надо привести их к стандартному виду:

$$A = a \cdot 10^k \quad (1 \leqslant a < 10);$$

$$B = b \cdot 10^l \quad (1 \leqslant b < 10).$$

Тогда

$$AB = ab \cdot 10^{k+l};$$

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot 10^{k-l},$$

где числа ab и $\frac{a}{b}$ находим при помощи логарифмической линейки.

Вопросы

1. Как задать на оси логарифмическую шкалу?
2. Как составить логарифмическую линейку?
3. Как с помощью логарифмической линейки для двух положительных чисел найти приближенное значение: а) их произведения; б) их частного?

Упражнение

С помощью логарифмической линейки найти произведение и частное чисел A и B, если:

а) $A = 0{,}0005764$, $B = 372{,}4$;
б) $A = 139{,}7$, $B = 0{,}97813$.

Исторические сведения

Парабола $y = x^2$ и параболы $y = x^n$ для $n = 3, 4, 5, \ldots$ играют большую роль в математике.

Изучив свойства функции $y = x^n$, мы получили представление о ее графике, который в свою очередь помог нам убедиться в существовании, например, корней n-й степени из положительных чисел.

Мы уже знаем, что квадратные корни знали задолго до нашей эры греки.

Отметим Д. Кардано (1501–1576), выдающегося итальянского математика. Ему принадлежат формулы решения кубических уравнений. Кубические корни играют в них существенную роль.

Способы извлечения корня n-й степени известны давно. Например, хорезмский математик Бируни (973 – ок. 1050) в своей книге "Ключ арифметики" описывает способ извлечения корня с любым натуральным показателем. Впрочем, способ этот громоздкий и неудобный.

В XVI в. фламандский ученый С. Стевин (1548–1620) предложил понимать $\sqrt[n]{a}$ как степень числа a с дробным показателем $\frac{1}{n}$, т.е.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} .$$

Равенство $a^0 = 1$ применял в начале XV в. самаркандский ученый аль-Каши.

Независимо от него нулевой показатель степени ввел в XV в. Н. Шюке. Он же ввел и отрицательные целые показатели степени.

Систематически нулевые, отрицательные и дробные показатели степени стал применять И. Ньютон.

Рациональная степень числа позволяет определить показательную функцию $y = a^x$. Показательная функция имеет большое значение в математике. Существенный вклад в ее изучение внес Л. Эйлер.

Логарифмы открыты в XVI в. в связи с быстрым развитием астрономии, требовавшей сложных и точных вычислений.

Изобретателем логарифмов считают шотландского математика Д. Непера (1550–1617).

Непер опубликовал оригинальные по тем временам труды "Описание удивительной таблицы логарифмов" и "Построение удивительной таблицы логарифмов". В этих трудах Непер дал объяснение свойств логарифмов и снабдил их таблицами логарифмов величин, важных в практике вычислений.

По совету Непера английский математик Г. Бригс вычислил четырнадцатизначные таблицы десятичных логарифмов (1624), которыми пользуются до настоящего времени и зовут бригговыми.

Мы знаем, что с помощью таблицы логарифмов можно вычислять произведение и частное чисел, возводить в степень, извлекать корни любых степеней.

Долгое время этот способ вычисления широко употреблялся на практике. Еще быстрее подобные вычисления производились на логарифмической линейке.

Однако мы сейчас вступили в новую фазу технического прогресса, когда электронная техника привела к возможности производить вычисления моментально. Вычисления по таблицам и с помощью логарифмической линейки теперь уже выглядят допотопными.

С другой стороны, теоретическое значение понятия логарифма по-прежнему остается важным. Полная теория логарифмов была получена в трудах Л. Эйлера.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

§ 29. Арифметическая прогрессия

Говорят, что *числа*

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \dots;\ a_n;\ \dots \tag{1}$$

образуют арифметическую прогрессию $\{a_n\}$, *если любое последующее из них число получается прибавлением к предыдущему одного и того же числа d, называемого разностью арифметической прогрессии.*

Каждое число a_1; a_2; a_3; ... ; a_n; ... называется *членом* арифметической прогрессии (1), а число a_n, имеющее номер n, называется ее n-м членом. В частности, a_1 есть первый член арифметической прогрессии (1).

Например, числа

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \dots;\ n;\ \dots$$

образуют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 1, и разностью $d = 1$.

Числа же

$$3;\ 1;\ -1;\ -3;\ \dots;\ 5-2n;\ \dots$$

образуют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 3, и разностью $d = -2$. В данном случае n-й член прогрессии, т.е. ее член, имеющий номер n, есть $a_n = 5 - 2n$.

Отметим некоторые свойства арифметической прогрессии.

1) *Для любой арифметической прогрессии* a_1; a_2; a_3; ... ; a_n; ... *ее* n*-й член* a_n *выражается через ее первый член* a_1 *и разность этой прогрессии d при помощи формулы*

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \tag{2}$$

называемой формулой n-го члена арифметической прогрессии.

В самом деле, по определению

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

На $(n-1)$-м этапе этих рассуждений получим

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Число, равное сумме первых n членов арифметической прогрессии (1), обозначается S_n, т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Члены a_1 и a_n называются *крайними* членами суммы.

2) *Сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна произведению полусуммы крайних членов на число ее членов*, т.е. справедлива формула

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \qquad (3)$$

Действительно,

$$2S_n = S_n + S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) +$$

$$+ (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots$$

$$\ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Поскольку

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + [a_1 + (n-2)d] = a_1 + [a_1 + (n-2)d + d] =$$

$$= a_1 + [a_1 + (n-1)d] = a_1 + a_n;$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + [a_1 + (n-3)d] = a_1 + [a_1 + (n-3)d + 2d] =$$

$$= a_1 + [a_1 + (n-1)d] = a_1 + a_n$$

и т.д., то получаем

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Отсюда следует справедливость формулы (3).

Сумму S_n арифметической прогрессии можно выразить, очевидно, через ее первый член и разность:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \qquad (4)$$

Замечание. С формальной точки зрения проведенные выше рассуждения не могут считаться доказательством формул (2) – (4). Формальное их доказательство требует применения принципа полной индукции.

Приведем доказательство формулы (2) методом полной индукции. Для $n = 1$ формула (2), очевидно, верна: $a_1 = a_1 + 0 \cdot d$. Предположим, что она верна для $n = k$, т.е. что верно равенство

$$a_k = a_1 + (k-1)d.$$

Тогда она верна и для $n = k + 1$, потому что

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + [(k+1) - 1]d.$$

Тем самым, согласно принципу полной индукции, доказана справедливость формулы (2) для любого натурального числа n.

Аналогично проводится доказательство формул (3) и (4).

Вопросы

1. Что называется арифметической прогрессией?
2. Что называется разностью арифметической прогрессии?
3. По какой формуле находится n-й член арифметической прогрессии?
4. По какой формуле находится сумма первых n членов арифметической прогрессии?

Упражнения

1. Найти пятый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1 = -50$ и $d = 1{,}2$.
2. Найти сумму первых 30 членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1 = -2{,}5$ и $d = 3$.
3. Является ли число 34 членом арифметической прогрессии $-47; -44; -38; \ldots$? В случае утвердительного ответа найти его номер.

§ 30. Геометрическая прогрессия

1. Свойства геометрической прогрессии. Говорят, что *числа*

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots \qquad (1)$$

образуют геометрическую прогрессию $\{a_n\}$, *если любое последующее из них число получается умножением предыдущего на одно и то же отличное от нуля число* q, *называемое знаменателем геометрической прогрессии.*

Каждое число $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots$ называется *членом* геометрической прогрессии (1), а число a_n, имеющее номер n, называется ее n-м членом. В частности, a_1 есть первый член геометрической прогрессии (1).

Например, числа

$$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots;\ 2^n;\ \ldots$$

образуют геометрическую прогрессию с первым членом, равным 2, и знаменателем $q = 2$. Ее n-й член равен $a_n = 2^n$.

Числа же

$$\frac{1}{7};\ -\frac{1}{21};\ \frac{1}{63};\ -\frac{1}{189};\ \ldots;\ \frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1};\ \ldots$$

образуют геометрическую прогрессию с первым членом $a_1 = \dfrac{1}{7}$ и знаменателем $q = -\dfrac{1}{3}$. Ее n-й член равен $a_n = \dfrac{1}{7}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Отметим некоторые свойства геометрической прогрессии.

1) *Для любой геометрической прогрессии* a_1; a_2; ... ; a_n; ... *ее n-й член* a_n *выражается через ее первый член* a_1 *и ее знаменатель* q *при помощи формулы*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \tag{2}$$

называемой формулой n-го члена геометрической прогрессии.

В самом деле, по определению

$$a_2 = a_1 q;$$
$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2;$$
$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3;$$

. . . .

На $(n-1)$-м этапе рассуждений получим

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

2) *Сумма* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *первых n членов геометрической прогрессии* $\{a_n\}$ *со знаменателем* q *равна*:

$$S_n = na_1 \quad \text{при } q = 1; \tag{3}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q} = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} \quad \text{при } q \neq 1. \tag{4}$$

В самом деле, при $q = 1$ формула (3) очевидна.

Пусть теперь $q \neq 1$. Справедливы очевидные равенства

$$S_n(1-q) = S_n - S_n q = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} -$$
$$-(a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n) = a_1 - a_1 q^n = a_1(1-q^n).$$

Следовательно,

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n),$$

и так как $q \neq 1$, то

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q}.$$

З а м е ч а н и е. С формальной точки зрения проведенные выше рассуждения не могут считаться доказательством формул (2) – (4). Формальное их доказательство требует применения принципа полной индукции.

Приведем доказательство формулы (2) методом полной индукции. Для $n = 1$ формула (2), очевидно, верна: $a_1 = a_1 \cdot q^0$. Предположим, что она верна для $n = k$, т.е. что верно равенство

$$a_k = a_1 q^{k-1}.$$

Тогда она верна и для $n = k + 1$, потому что

$$a_{k+1} = a_k q = (a_1 q^{k-1}) q = a_1 q^{(k+1)-1}.$$

Тем самым, согласно принципу полной индукции, доказана справедливость формулы (2) для любого натурального числа n.

Аналогично проводится доказательство формул (3) и (4).

Вопросы

1. Что называется геометрической прогрессией?
2. Что называется знаменателем геометрической прогрессии?
3. По какой формуле находится n-й член геометрической прогрессии?
4. По какой формуле находится сумма первых n членов геометрической прогрессии?

Упражнения

1. Найти пятнадцатый член геометрической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1 = -0{,}001$ и $q = 10$.
2. Найти сумму первых 16 членов геометрической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_8 = 2{,}56$ и $q = 2$.

2. Убывающая геометрическая прогрессия. Геометрическая прогрессия

$$a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots$$

называется *убывающей*, если модуль ее знаменателя меньше 1:

$$|q| < 1.$$

Например, геометрическая прогрессия

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \ldots;\ \frac{1}{2^{n-1}};\ \ldots$$

убывающая, потому что модуль ее знаменателя $\left(q = \frac{1}{2}\right)$ меньше 1:

$$|q| = \frac{1}{2} < 1.$$

Отметим, что для любой геометрической прогрессии формулу (4) п. 1 можно переписать так:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n. \qquad (1)$$

Для убывающей геометрической прогрессии второй член в правой части равенства (1) при неограниченном увеличении n стремится к 0; но тогда левая часть равенства (1) стремится к числу

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Это число называется *суммой убывающей геометрической прогрессии:*

$a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots$

со знаменателем q ($|q| < 1$). При этом пишут

$$\frac{a_1}{1-q} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где $a_n = a_1 q^{n-1}$ ($|q| < 1$).

Вопросы

1. Что называется убывающей геометрической прогрессией?
2. Что называется суммой убывающей геометрической прогрессии?

3. Задача. Вдоль дороги лежало нечетное число камней на расстоянии 10 м один от другого. Эти камни надо было собрать туда, где находился средний камень. Человек может нести лишь один камень, поэтому он переносил их последовательно, начав с одного из крайних. Перенеся все камни, человек проделал путь в 3 км. Сколько было камней?

Решение. Пусть камней было $n = 2k + 1$ (так как n – нечетное число). Тогда справа и слева от среднего камня было по k камней. Пусть человек находился у крайнего правого камня. Чтобы отнести его, он должен пройти путь $10k$ метров. Чтобы отнести рядом лежащий камень, человек должен сначала вернуться к тому месту, где он лежит, т.е. пройти $10(k-1)$ метров. Затем, взяв камень, опять пройти $10(k-1)$ метров, т.е., чтобы отнести второй камень, он должен преодолеть путь $2 \cdot 10(k-1)$ метров. Чтобы отнести третий камень, он должен пройти $2 \cdot 10(k-2)$ метров и т.д. Наконец, чтобы отнести k-й камень, он должен пройти $2 \cdot 10 \cdot 1$ метров.

Значит, чтобы собрать все камни с правой стороны от среднего камня, человек должен пройти путь (в метрах)

$$S_1 = 10k + 20(k-1) + 20(k-2) + \ldots + 20 \cdot 1,$$

причем очевидно, что этот путь не зависит от того, в каком порядке человек собирал камни.

Чтобы собрать все камни с левой стороны от среднего камня, человек должен сначала пройти путь до крайнего камня, т.е. путь в $10k$ метров, а затем вновь сделать такой же путь, как и при сборе камней справа, т.е. путь в S_1 метров.

Значит, чтобы собрать все камни с левой стороны от среднего камня, человек должен пройти путь (в метрах)

$$S_2 = S_1 + 10k.$$

Поскольку весь путь, проделанный человеком, равен 3000 м, то

$$3000 = S_1 + S_2.$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными S_1, S_2 и k:

$$\begin{cases} S_1 = 10k + 20[(k-1) + (k-2) + \ldots + 1], \\ S_2 = S_1 + 10k, \\ S_1 + S_2 = 3000, \end{cases} \tag{1}$$

из которой нам надо найти лишь k.

Подставляя выражения для S_1 и S_2 в третье уравнение системы (1), получаем уравнение

$$3000 - 30k = 40[(k-1) + \ldots + 1]. \tag{2}$$

Применим к сумме в квадратных скобках формулу суммы $k - 1$ членов арифметической прогрессии:

$$(k-1) + (k-2) + \ldots + 1 = \frac{(k-1+1)(k-1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Тогда уравнение (2) перепишется в виде

$$3000 - 30k = 20k(k-1)$$

или в виде

$$2k^2 + k - 300 = 0. \tag{3}$$

Дискриминант последнего уравнения

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-300) = 2401 > 0.$$

Следовательно, уравнение (3) имеет два корня:

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 49}{4},$$

т.е.

$$k_1 = 12, \quad k_2 = -\frac{25}{2}.$$

Ясно, что условию задачи удовлетворяет лишь $k_1 = 12$. Но тогда $n = 25$.

Следовательно, камней было 25.

Упражнения

1. Из пункта A выехал велосипедист, через 1 ч после него и в том же направлении выехал мотоциклист, а еще через 30 мин — автомобиль, причем каждый из них едет с постоянной скоростью. Автомобиль догнал велосипедиста через 15 мин после того, как проехал мимо мотоциклиста, а мотоциклист догнал велосипедиста в 120 км от пункта A. Найти скорости велосипедиста, мотоциклиста и автомобиля, если известно, что они образуют арифметическую прогрессию.

2. Имеющиеся в совхозе комбайны, работая вместе, могут убрать урожай за одни сутки. По плану же работы в первый час работал один комбайн, во второй — два,

в третий – три, и т.д. И только в течение нескольких часов перед завершением уборки урожая работали все комбайны. Время работы по плану было бы сокращено на 6 часов, если бы с самого начала уборки постоянно работали все комбайны за исключением пяти. Сколько комбайнов было в совхозе?

Исторические сведения

Слово "прогрессия" (лат. *progressio*) буквально означает "движение вперед" (как слово "прогресс").

С начала нашей эры известна следующая задача-легенда:

"Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета, издеваясь над царем, потребовал за первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зерно, за вторую – 2 зерна, за третью – 4 зерна и т.д. Оказалось, что царь не был в состоянии выполнить это скромное желание Сеты".

В этой задаче надо найти сумму 64 членов геометрической прогрессии

$$1;\ 2;\ 2^2;\ 2^3;\ \ldots;\ 2^{63}$$

с первым членом 1 и знаменателем 2. Эта сумма равна

$$2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с урожая планеты, поверхность которой примерно в 2000 раз больше всей поверхности Земли.

Задачи на геометрические и арифметические прогрессии встречаются у вавилонян, в египетских папирусах, в древнекитайском трактате "Математика в 9 книгах". Так, в одной из клинописных табличек вавилонян предлагается найти сумму девяти членов геометрической прогрессии:

$$1;\ 2;\ 2^2;\ \ldots$$

В папирусе Райнса предлагается задача:

"У семи лиц по семь кошек, каждая кошка съедает по семь мышей, каждая мышь съедает по семь колосьев, из колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?"

Отметим также, что Архимед знал, что такое геометрическая прогрессия, и умел вычислять сумму любого числа ее членов. Правило нахождения суммы членов арифметической прогрессии впервые встречается в "Книге абак" Леонардо Пизанского (1202 г.). Формула для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии была известна П. Ферма (XVII в.).

В Старорусском юридическом сборнике "Русская правда" (X–XI вв.) содержатся выкладки количества зерна, собранного с определенного участка земли; некоторые из них содержат вычисление суммы геометрической прогрессии со знаменателем 2.

Интересные задачи на прогрессии есть в "Арифметике" Магницкого. Вот одна из таких задач:

"Некто продавал коня и просил за него 1000 рублей. Купец сказал, что за коня запрошена слишком большая цена. "Хорошо, – ответил продавец, – если ты говоришь, что конь дорого стоит, то возьми его себе даром, а заплати только за одни гвозди в его подковах. А гвоздей во всякой подкове по 6 штук. И будешь ты мне за них платить таким образом: за первый гвоздь заплатишь полушку $\left(\frac{1}{4}\text{ копейки}\right)$, за второй гвоздь – две полушки, за третий гвоздь – четыре полушки и так далее за все гвозди: за каждый в два раза больше, чем за предыдущий". Купец же, думая, что заплатит намного меньше чем 1000 рублей согласился. Проторговался ли купец, и если да, то на сколько?"

ТРИГОНОМЕТРИЯ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

§ 31. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла

1. Понятие угла. Введем на плоскости прямоугольную систему координат Oxy с положительной полуосью абсцисс Ox, направленной вправо, и с положительной полуосью ординат Oy, направленной вверх, и рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Пусть положительная полуось Ox пересекает окружность в точке A, и пусть на окружности дана еще точка B. Векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ образуют угол AOB (рис. 126).

Будем считать, что наряду с фиксированными векторами $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ есть еще вектор, начало которого – точка O, а конец – точка, движущаяся по окружности. Этот вектор назовем подвижным вектором.

На языке механики, можно сказать, что угол AOB образован вращением в плоскости подвижного вектора вокруг точки O от начального положения – вектора $\vec{OA}$ до конечного положения – вектора $\vec{OB}$, или, иными словами, что угол AOB получен поворотом подвижного вектора от вектора $\vec{OA}$ до вектора $\vec{OB}$ (на рис. 127 стрелка показывает, как двигался подвижный вектор).

Отметим, что угол AOB образован таким поворотом, при котором конец подвижного вектора, двигаясь по окружности, прошел расстояние не большее, чем длина полуокружности (см. рис. 127).

Однако можно совершить и такой поворот, что конец подвижного вектора, двигаясь по окружности, пройдет расстояние большее, чем длина полуокружности (рис. 128, *а*).

В тригонометрии принято считать, что любой поворот подвижного вектора образует угол.

Поэтому при повороте подвижного вектора может образоваться как угол, меньший развернутого (см. рис. 127), так и угол, больший развернутого (см. рис. 128, *а*).

Пусть подвижный вектор совершил такой поворот, что впервые его конечное положение (вектор $\vec{OB}$) совпало с начальным положением (вектором $\vec{OA}$). Такой поворот называют полным оборотом (рис. 128, *б*).

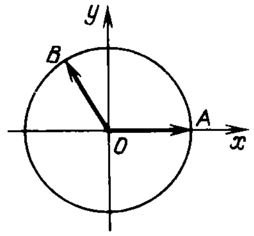


Рис. 126

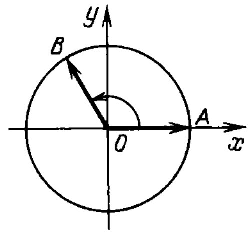


Рис. 127

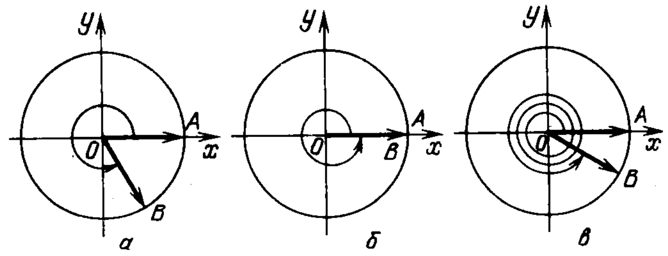


Рис. 128

Поворот подвижного вектора может складываться из нескольких полных оборотов и поворота, составляющего часть полного оборота (рис. 128,*в*).

Поворот подвижного вектора может быть совершен в двух противоположных направлениях – по часовой стрелке и против часовой стрелки (рис. 129).

В тригонометрии принято считать углы, образованные поворотом подвижного вектора против часовой стрелки, *положительными*, а углы, образованные поворотом подвижного вектора по часовой стрелке, – *отрицательными*.

Если подвижный вектор не совершил поворота, то будем считать, что образован нулевой угол.

Пусть подвижный вектор совершил поворот, равный $\frac{1}{360}$ части полного оборота, против часовой стрелки. В этом случае говорят, что образован угол, градусная мера которого равна *одному градусу*, или, короче, угол в один градус (пишут 1°).

Следовательно, совершив полный оборот против часовой стрелки, получим угол 360° (рис. 130,*а*), совершив один полный оборот по часовой стрелке, получим угол -360° (рис. 130,*б*).

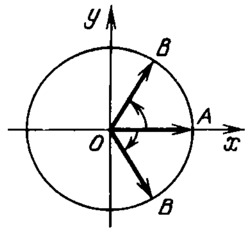


Рис. 129

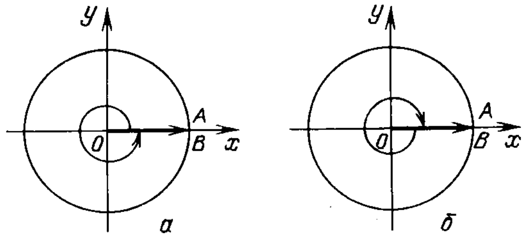


Рис. 130

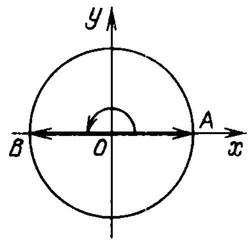


Рис. 131

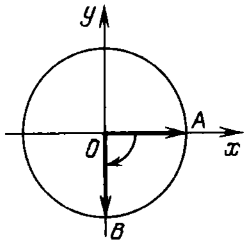


Рис. 132

Совершив поворот в половину полного оборота против часовой стрелки получим угол 180° (рис. 131); совершив поворот в четверть полного оборота по часовой стрелке, получим угол -90° (рис. 132).

Поскольку

$$450^\circ = 90^\circ + 360^\circ,$$

то, совершив поворот в четверть полного оборота против часовой стрелке, а затем еще полный оборот в том же направлении, получим угол 450° (рис. 133,*а*).

Поскольку

$$-540^\circ = -180^\circ - 360^\circ,$$

то, совершив поворот в половину полного оборота по часовой стрелке, а затем еще полный оборот в том же направлении, получим угол -540° (рис. 133,*б*).

Напомним, что $1'$ (одна минута) равна $\frac{1}{60}$ части градуса, а $1''$ (одна секунда) равна $\frac{1}{60}$ части минуты. Заметим, что в вычислительной практике минуты и секунды часто записываются в виде десятичных долей градуса. Обычно это производится при помощи микрокалькулятора.

Пример 1.

$14^\circ 25'36'' \approx 14{,}426666^\circ$.

Это вычисление произведено на микрокалькуляторе БЗ-38 нажатием на клавиши

$14 F_1 \boxed{\circ\ '\ ''}\ \ 25 F_1 \boxed{\circ\ '\ ''}\ \ 36 F_1 \boxed{\circ\ '\ ''}\ \ F_1 \boxed{\circ\ '\ ''}$

Для любого действительного числа a существует один и только один угол, градусная мера которого равна a°.

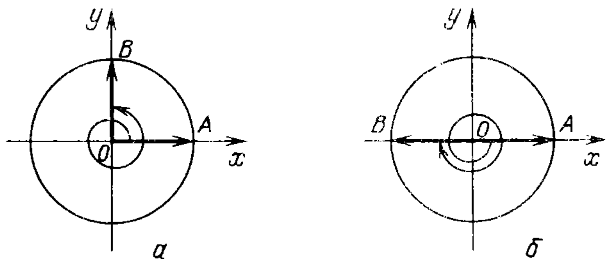


Рис. 133

Пусть подвижный вектор совершил такой поворот против часовой стрелки, что его конец, двигаясь по окружности, прошел расстояние, равное радиусу R этой окружности. Тогда говорят, что образован угол, радианная мера которого равна одному радиану, или, короче, угол в один радиан (пишут 1 рад).

Поскольку длина окружности равна $2\pi \cdot R$, то, совершив один полный оборот против часовой стрелки, получим угол 2π рад. Следовательно, угол 2π рад и угол 360° – это один и тот же угол. Но тогда угол 1° и угол $\frac{2\pi}{360}$ рад $= \frac{\pi}{180}$ рад также один и тот же угол.

Поэтому пишут

$360^\circ = 2\pi$ рад;

$-360^\circ = -2\pi$ рад;

1 рад $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17'45''$;

-5 рад $= -\frac{5}{\pi} \cdot 180^\circ \approx -286^\circ$; $\qquad \alpha$ рад $= \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180^\circ$.

Слово "радиан" в таких записях обычно опускают, но подразумевают его. Например, пишут $180^\circ = \pi$, $-60^\circ = -\frac{\pi}{3}$, $1 = \frac{1}{\pi} \cdot 180^\circ$, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx$ $\approx 0{,}017453\ldots$

Поскольку

$$-\frac{7\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi - 2\pi,$$

то, совершив поворот в три четверти оборота по часовой стрелке, затем

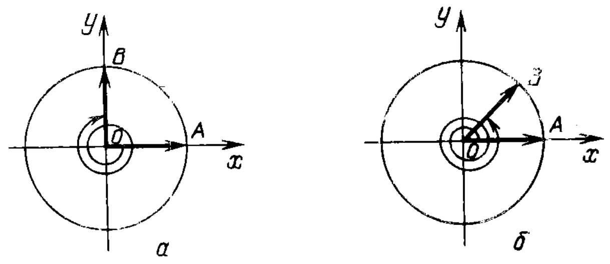


Рис. 134

полный оборот по часовой стрелке, получим угол в $-\frac{7}{2}\pi$ (рис. 134,*а*).

Поскольку

$$\frac{17}{4}\pi = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi,$$

то, совершив поворот в восьмую часть оборота против часовой стрелки, а затем полных два оборота в том же направлении, получим угол $\frac{17}{4}\pi$ (рис. 134,*б*).

Для любого действительного числа α существует один и только один угол, радианная мера которого равна $|\alpha|$ радиан, отложенный от начального вектора в положительном направлении при $\alpha > 0$ и отрицательном при $\alpha < 0$. Этот угол коротко будем называть углом α.

Отметим, что любое действительное число α можно записать в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k,$$

где число α_0 удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi,$$

а k — некоторое целое число.

Поэтому при $k \neq 0$ угол α можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на угол α_0 и 2) на $|k|$ полных оборотов (в положительном направлении при $k > 0$ и в отрицательном направлении при $k < 0$).

Пример 2. Так как

$$-\frac{11}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - 3 \cdot 2\pi,$$

то угол $-\frac{11}{2}\pi$ можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$ и 2) в отрицательном направлении на три полных оборота.

Замечание. Из предыдущего ясно, что только в случае, когда угол, рассматриваемый в тригонометрии, неотрицателен и не больше развернутого, его можно отождествлять с углом, рассматриваемым в геометрии.

Поэтому понятие угла, рассматриваемое в тригонометрии, считается обобщением понятия угла, рассматриваемого в геометрии.

Вопросы

1. Какой поворот называется полным оборотом?
2. Что такое: а) нулевой угол; б) положительный угол; в) отрицательный угол; г) угол в один градус; д) угол в один радиан?
3. Для любого ли числа α существует угол: а) радианная мера которого равна α радиан; б) градусная мера которого равна α градусов?

Упражнения

1. Изобразить на координатной плоскости угол AOB, полученный поворотом подвижного вектора от вектора $\vec{OA}$ до вектора $\vec{OB}$ на:

а) $\frac{3}{4}$ полного оборота по часовой стрелке; б) $\frac{3}{4}$ полного оборота против часовой стрелки; в) $-180°$; г) $270°$; д) $-1000°$; е) $2000°$; ж) $\frac{9}{2}\pi$; з) $-1{,}5\pi$; и) -17π.

2. Перевести градусную меру угла α в радианную, если:

а) $\alpha = 135°$; б) $\alpha = -1080°$; в) $\alpha = 10\,300°$.

3. Перевести радианную меру угла α в градусную, если:

а) $\alpha = 3\frac{1}{3}\pi$; б) $\alpha = -13{,}2\pi$; в) $\alpha = \frac{1}{7}\pi$.

2. Определение синуса и косинуса угла. Дальше рассматривается прямоугольная система координат Oxy, у которой положительная полуось Ox направлена вправо, а положительная полуось Oy направлена вверх. Напомним, что единичным вектором координатной оси Ox называется вектор, имеющий длину 1, начало в точке O и направленный вдоль положительной полуоси Ox.

Единичной окружностью в тригонометрии называется окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат Oxy при условии, что единичный вектор OA оси Ox принят за начальное положение подвижного вектора и что направление поворота против часовой стрелки принято за положительное.

Пусть подвижный вектор, совершив поворот от вектора $\vec{OA}$ до вектора $\vec{OB}$, образует угол AOB, радианная мера которого равна $|\alpha|$ радиан (с положительным поворотом при $\alpha > 0$ и отрицательном при $\alpha < 0$). Точку B единичной окружности назовем точкой, соответствующей углу α (рис. 135).

Таким образом, каждому действительному числу α поставлена в соответствие единственная точка единичной окружности. Эта точка получена поворотом в положительном направлении, если $\alpha > 0$, и в отрицательном, если $\alpha < 0$, при котором конец подвижного радиуса, двигаясь по единичной окружности, проходит расстояние, равное $|\alpha|$.

Числу 0 приводится в соответствие точка A. Поэтому единичную окружность можно рассматривать как окружность радиуса 1, на которую "намотана" числовая ось.

Так как единичная окружность имеет длину 2π, то числам

$$\alpha;\ \alpha + 2\pi;\ \alpha - 2\pi;\ \alpha + 4\pi;\ \alpha - 4\pi;\ \alpha + 6\pi;\ \alpha - 6\pi$$

соответствует одна и та же точка единичной окружности. Иначе говоря,

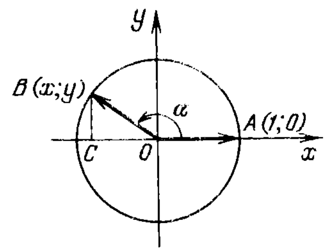


Рис. 135

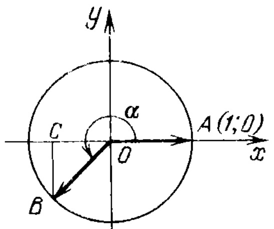


Рис. 136

что для любого целого числа k числа $\alpha + 2\pi k$ изображаются одной и той же точкой единичной окружности.

Это означает, что соответствующая углу α точка единичной окружности для любого целого числа k совпадает с точкой, соответствующей углу $\alpha + 2\pi k$.

Ордината точки $(x;\ y)$ единичной окружности, соответствующей углу α, называется *синусом угла* α и обозначается $\sin \alpha$, т.е.

$$\sin \alpha = y.$$

Абсцисса точки $(x;\ y)$ единичной окружности, соответствующей углу α, называется *косинусом угла* α и обозначается $\cos\alpha$, т.е.

$$\cos\alpha = x.$$

На рис. 135 $\sin\alpha = BC$, $\cos\alpha = -OC$; на рис. 136 $\sin\alpha = -BC$, $\cos\alpha = -OC$.

Замечание 1. Если вместо окружности радиуса 1 взять окружность радиуса R, то определения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ будут такими:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{R},$$

где x и y – координаты соответствующей углу α точки окружности радиуса R.

Замечание 2. Для углов, радианная мера которых заключена между 0 и π, приведенное определение синуса и косинуса угла совпадает с определением, известным из курса геометрии.

Пример 1. Найти $\sin\frac{5\pi}{4}$ и $\cos\frac{5\pi}{4}$.

Так как

$$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4},$$

то, опустив из точки B, соответствующей углу $\frac{5\pi}{4}$, перпендикуляр BC на ось Ox (см. рис. 136), получим, что в прямоугольном треугольнике OBC угол COB равен $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$, но тогда треугольник BCO равнобедренный, т.е. $BC = OC$. Так как $OB = 1$, то, $OC = BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как точка $B(x;\ y)$ находится в третьей четверти, то обе ее координаты отрицательные; следовательно, $x = -OC$, $y = -BC$, т.е. точка B имеет координаты $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Но так как точка B соответствует углу $\frac{5\pi}{4}$, то отсюда получаем $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 2. Найти все углы α, для каждого из которых $\sin\alpha = 0$.

Из определения синуса угла (рис. 137) следует, что $\sin 0 = 0$, $\sin\pi = 0$, $\sin(-\pi) = 0$, $\sin 2\pi = 0$, $\sin(-2\pi) = 0$, $\sin 3\pi = 0$, $\sin(-3\pi) = 0, \ldots$, т.е.

$$\sin k\pi = 0$$

для любого целого числа k.

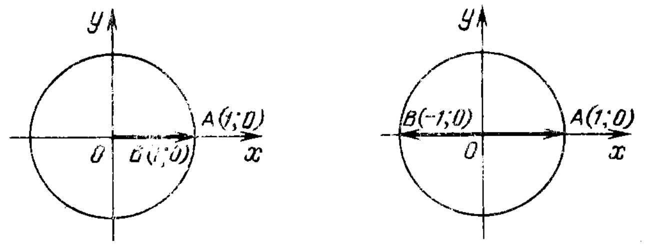


Рис. 137

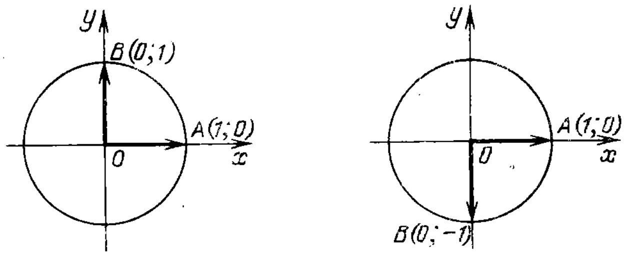


Рис. 138

Таким образом, $\sin\alpha = 0$ для углов $\alpha = k\pi$, где k — любое целое число. Для любых углов α, отличных от $k\pi$, $\sin\alpha \neq 0$.

Пример 3. Найти все углы α, для каждого из которых $\cos\alpha = 0$.

Из определения косинуса угла (рис. 138) следует, что $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\frac{5\pi}{2} = 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0, \ldots$, т.е.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

для любого целого числа k.

Таким образом, для любого целого числа k $\cos\alpha = 0$ для углов $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ и $\cos\alpha \neq 0$ для углов $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Ниже приводится таблица синусов и косинусов, часто встречающихся углов:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Для других углов, радианная мера которых заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$, их синусы и косинусы можно находить с помощью специальных тригонометрических таблиц или электронных микрокалькуляторов.

Пример 4.

$\cos 63°52'41'' \approx 0{,}440283.$

Это вычисление произведено на микрокалькуляторе БЗ-38 нажатием на клавиши

$63F_1$ [° ′ ″] $52F_1$ [° ′ ″] $41F_1$ [° ′ ″] $F_1\cos$

В следующем пункте будут приведены формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, с помощью которых вычисление косинусов и синусов любых углов можно свести к вычислению косинусов или синусов некоторых углов, радианная мера которых заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Вопросы

1. Что в тригонометрии называется единичной окружностью?
2. Какая точка единичной окружности называется точкой, соответствующей углу α?
3. Что называется: а) синусом угла α; б) косинусом угла α?
4. Для каких углов α: а) $\sin\alpha = 0$; б) $\cos\alpha = 0$?

Упражнения

1. Построить угол и вычислить для него:

а) $\cos 120°$; б) $\sin(-135°)$;

в) $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$; г) $\sin\frac{13\pi}{6}$.

2. С помощью микрокалькулятора найти синус и косинус угла α, если:

а) $\alpha = 35°52'43''$; б) $\alpha = 82°34'16''$.

3. Основные формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Теорема 1. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad (1)$$

которое называется основным тригонометрическим тождеством.

Доказательство. Из геометрии известно, что окружность радиуса 1 с центром в начале координат имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Как следует из определения синуса и косинуса угла α, точка $B(x;\ y)$, принадлежащая этой окружности и соответствующая углу α, имеет координаты

$$x = \cos\alpha; \quad y = \sin\alpha, \qquad (3)$$

которые удовлетворяют уравнению (2). Подставляя их значения в уравнение (2), получаем равенство (1).

Теорема 1 доказана.

Основное тригонометрическое тождество показывает, в какой зависимости находятся синус и косинус одного и того же угла. Зная синус угла, можно найти косинус этого угла, а зная косинус угла, можно найти его синус.

Пример. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{9}{11}$ и α принадлежит интервалу $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\sin\alpha$ отрицателен. Поэтому из формулы (1) следует, что

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{9}{11}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{10}}{11}.$$

Следствие. *Для любого угла α справедливы неравенства*

$$|\sin\alpha| \leqslant 1; \quad |\cos\alpha| \leqslant 1. \qquad (4)$$

Например, так как $\cos^2\alpha \geqslant 0$ для любого угла α, то

$$\sin^2\alpha \leqslant \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Заметим, что неравенства (4) можно записать и в другой форме:

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1; \quad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Теорема 2. *Для любого угла α справедливы равенства*

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha; \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha. \qquad (5)$$

Доказательство. Точка B, соответствующая углу α, и точка B_1, соответствующая углу $-\alpha$, симметричны (рис. 139) относительно оси Ox. Поэтому абсциссы этих точек равны, а ординаты равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, т.е. ординаты – противоположные числа. Следовательно, справедливы равенства (5).

Теорема 2 доказана.

Примеры.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}; \quad \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Теорема 3. *Для любого угла α и любого целого числа k справедливы равенства*

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha; \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha. \qquad (6)$$

Доказательство. Углам α и $\alpha + 2k\pi$ соответствует одна и та же точка B (рис. 140) единичной окружности. Поэтому справедливы равенства (6).

Теорема 3 доказана.

Примеры.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2};$$

$$\sin 660^\circ = \sin(720^\circ - 60^\circ) = \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Теорема 4. *Для любого угла α справедливы равенства*

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (7)$$

Доказательство. Точка B, соответствующая углу α, и точка B_1, соответствующая углу $\alpha + \pi$, симметричны относительно начала коорди-

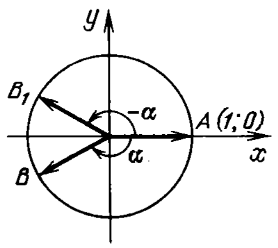


Рис. 139

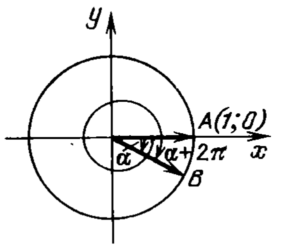


Рис. 140

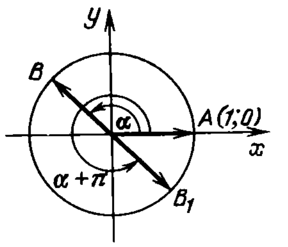


Рис. 141

нат (рис. 141). Поэтому абсциссы и ординаты этих точек — противоположные числа. Следовательно, справедливы равенства (7).

Теорема 4 доказана.

Примеры.

$$\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Равенства (1) и (5)–(7) являются *основными формулами для* $\sin\alpha$ *и* $\cos\alpha$.

Вопросы

1. Какая формула называется основным тригонометрическим тождеством?
2. Каким числом для любого угла α ограничен: а) $|\sin\alpha|$; б) $|\cos\alpha|$?
3. Каковы основные формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?
4. Для любого ли угла α справедливо равенство:

а) $\cos\alpha = \cos|\alpha|$; б) $\sin\alpha = \sin|\alpha|$?

Упражнения

1. Вычислить $\sin\alpha$, если

а) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $3\pi < \alpha < \frac{7\pi}{2}$.

2. Вычислить $\cos\alpha$, если:

а) $\sin\alpha = 0{,}8$, $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$; б) $\sin\alpha = -0{,}3$, $-\frac{9\pi}{2} < \alpha < -4\pi$.

4. Тангенс и котангенс угла. Число, равное отношению $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$, называется *тангенсом угла* α и обозначается $\operatorname{tg}\alpha$, т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Тангенс угла α определен для всех углов α, за исключением тех, для которых $\cos\alpha = 0$. Поэтому в определении $\operatorname{tg}\alpha$ должны быть исключены все углы

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad (2)$$

где k – любое целое число.

Число, равное отношению $\cos\alpha$ к $\sin\alpha$, называется *котангенсом угла* α и обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$, т.е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Котангенс угла α определен для всех углов α, за исключением тех, для которых $\sin\alpha = 0$. Поэтому в определении $\operatorname{ctg}\alpha$ должны быть исключены все углы

$$\alpha = k\pi, \qquad (4)$$

где k – любое целое число.

Из равенств (1) и (3) следует справедливость равенства

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \qquad (5)$$

для всех углов α, для которых существует одновременно и $\operatorname{tg}\alpha$, и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Левая часть неравенства (5) существует для всех углов, за исключением тех, для которых или $\sin\alpha = 0$, или $\cos\alpha = 0$; поэтому формула (5) справедлива для всех углов, кроме углов

$$\alpha = \frac{\pi}{2}k,$$

где k – любое целое число.

Из определения тангенса и котангенса угла следует, например, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg}45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1; \quad \operatorname{tg}60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}.$$

Тангенса угла $\frac{\pi}{2}$ не существует, потому что $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, но существует котангенс угла $\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \frac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Для угла 0°, наоборот, не существует котангенса, потому что $\sin 0° = 0$, но существует тангенс:

$$\operatorname{tg} 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0.$$

Основными формулами для $\operatorname{tg}\alpha$ являются следующие:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha, \tag{7}$$

где n – любое целое число.

Конечно, эти равенства верны только для таких углов α, для которых имеют смысл правые и левые их части.

Для любого угла α, для которого существует $\operatorname{tg}\alpha$, т.е. для углов, отличных от угла $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k – любое целое число, имеет смысл и $\operatorname{tg}(-\alpha)$, и $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$. Покажем справедливость равенств (6) и (7) для любого такого угла α. Используя формулы для $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, имеем

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Если n – четное число, т.е. $n = 2l$, и l – целое число, то

$$\operatorname{tg}(\alpha + n\pi) = \operatorname{tg}(\alpha + 2l\pi) = \frac{\sin(\alpha + 2l\pi)}{\cos(\alpha + 2l\pi)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Если n – нечетное число, т.е. $n = 2l + 1$, и l – целое число, то

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi + 2l\pi) = \frac{\sin(\alpha + \pi + 2l\pi)}{\cos(\alpha + \pi + 2l\pi)} = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} =$$

$$= \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом, равенство (7) доказано для любого целого числа n.
Примеры.

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1; \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Основными формулами для $\operatorname{ctg}\alpha$ являются следующие:

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \tag{8}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha, \tag{9}$$

где n – любое целое число.

Конечно, эти равенства верны только для таких углов α, для которых имеют смысл правые и левые их части.

Для любого угла α, для которого существует $\operatorname{ctg}\alpha$, т.е. для углов, отличных от угла $\alpha = k\pi$, где k – любое целое число, имеет смысл и $\operatorname{ctg}(-\alpha)$, и $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n)$. Доказательство справедливости равенств (8) и (9) для любого такого угла α аналогично доказательству равенств (6) и (7).

Примеры.

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1; \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Отметим еще формулы

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \tag{10}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{11}$$

Конечно, эти равенства верны только для таких углов α, для которых имеют смысл правые и левые их части.

Обе части равенства (10) имеют смысл для любого угла α, отличного от угла $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k – любое целое число.

Обе части равенства (11) имеют смысл для любого угла α, отличного от угла $\alpha = k\pi$, где k – любое целое число.

Формула (10) доказывается так:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Аналогично доказывается и формула (11).

Вопросы

1. Что называется: а) тангенсом угла α; б) котангенсом угла α?
2. Для какого угла α не существует: а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$?
3. Для каких углов α справедливо равенство $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$?
4. Каковы основные формулы для: а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$?
5. Для каких углов α справедливы основные формулы для: а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$?

Упражнения

1. Вычислить:

а) $\operatorname{ctg} 270°$; б) $\operatorname{tg} 1440°$; в) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{23\pi}{6}$.

2. Найти $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ и $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

3. Найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < -2\pi$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

4. Найти $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{-7\pi}{2} < \alpha < -3\pi$.

5. Найти $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 1$ и $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$.

§ 32. Формулы сложения

1. Косинус разности и косинус суммы двух углов.

Теорема 1. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta, \qquad (1)$$

называемое формулой косинуса разности двух углов.

Эту теорему можно сформулировать и так: *косинус разности двух углов равен произведению косинуса первого угла на косинус второго угла плюс произведение синуса первого угла на синус второго угла.*

Доказательство. Пусть даны углы α и β. Пусть точка B на единичной окружности соответствует углу α, а точка C – углу β (рис. 142). Тогда, используя определение синуса и косинуса угла, получаем, что точка B имеет координаты $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, а точка C – координаты $x = \cos\beta$, $y = \sin\beta$. Вектор $\vec{a} = \vec{OB}$ имеет координаты $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, а вектор $\vec{b} = \vec{OC}$ имеет координаты $(\cos\beta;\ \sin\beta)$.

Вычислим скалярное произведение этих векторов:

$$\vec{a}\vec{b} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta. \qquad (2)$$

Но, как известно из геометрии, скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними. Обозначим через γ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Учитывая, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, получаем

$$\vec{a}\vec{b} = \cos\gamma. \qquad (3)$$

Отметим, что в геометрии под углом между векторами понимается положительный угол из промежутка от 0 до π. Поэтому

$$0 \leqslant \gamma \leqslant \pi.$$

Запишем углы α и β в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi; \quad \beta = \beta_0 + 2l\pi,$$

где $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$, $0 \leqslant \beta_0 < 2\pi$, а k и l – некоторые целые числа.

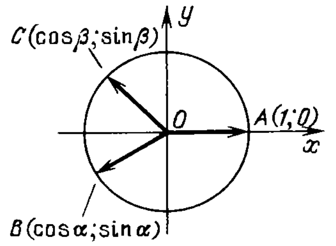


Рис. 142

Тогда можно считать, что точка B соответствует углу α_0, а точка C – углу β_0.

Легко видеть, что либо $\gamma = \alpha_0 - \beta_0$ (рис. 143, *а*), либо $\gamma = \beta_0 - \alpha_0$ (рис. 143, *б*), либо $\gamma = 2\pi - (\alpha_0 - \beta_0)$ (рис. 143, *в*), либо $\gamma = 2\pi - (\beta_0 - \alpha_0)$ (рис. 143, *г*), но в любом из этих случаев $\cos\gamma = \cos(\alpha_0 - \beta_0)$. Так как

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos[\alpha_0 - \beta_0 + 2(k - l)\pi] = \cos(\alpha_0 - \beta_0),$$

то получим

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\gamma. \tag{4}$$

Теперь из равенств (4), (3) и (2) вытекает, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Теорема 1 доказана.

Пример 1.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}.$$

Теорема 2. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta, \tag{5}$$

называемое формулой косинуса суммы двух углов.

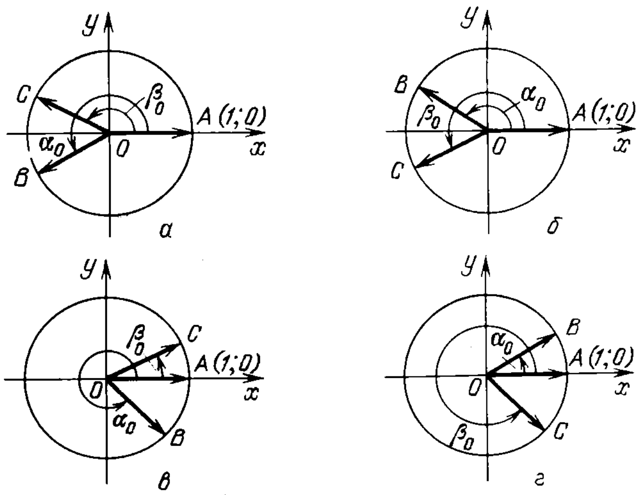


Рис. 143

Эту теорему можно сформулировать и так: *косинус суммы двух углов равен произведению косинуса первого угла на косинус второго угла минус произведение синуса первого угла на синус второго угла.*

Доказательство. Используя формулу косинуса разности двух углов и формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, имеем

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Теорема 2 доказана.

Пример 2.

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Вопросы

1. Какая формула называется формулой: а) косинуса разности двух углов; б) косинуса суммы двух углов?
2. Чему равен косинус: а) разности двух углов; б) суммы двух углов?

Упражнения

1. Вычислить:

а) $\cos 75°$; б) $\cos 15°$; в) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Найти $\cos(\alpha-\beta)$, если $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$, $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$, $\cos\beta=-\frac{1}{4}$.

3. Найти $\cos(\alpha+\beta)$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ и $\cos\alpha=-0{,}8$, $\sin\beta=-0{,}2$.

2. Формулы для дополнительных углов. Синус суммы и синус разности двух углов. Два угла α и β, в сумме составляющие $\frac{\pi}{2}$:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2},$$

называются *дополнительными углами.*

Теорема 1. *Для любого угла α справедливы равенства*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha; \tag{1}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha, \tag{2}$$

называемые формулами для дополнительных углов.

Доказательство. Используя формулу косинуса разности двух углов, имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha,$$

и формула (1) тем самым доказана.

Теперь докажем формулу (2), используя уже доказанную формулу (1). Обозначим $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, тогда по формуле (1)

$$\sin\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right). \tag{3}$$

Теперь, подставляя в формулу (3) $\frac{\pi}{2}-\alpha$ вместо β, получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

Пример 1.

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}.$$

Теорема 2. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta, \tag{4}$$

называемое формулой синуса суммы двух углов.

Эту теорему можно сформулировать и так: *синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго угла плюс произведение косинуса первого угла на синус второго угла.*

Доказательство. Используя формулы для дополнительных углов и формулу косинуса разности двух углов, имеем

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Теорема 2 доказана.

Пример 2.

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Теорема 3. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta, \quad (5)$$

называемое формулой синуса разности двух углов.

Эту теорему можно сформулировать и так: *синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго угла минус произведение косинуса первого угла на синус второго угла.*

Доказательство. Используя формулу синуса суммы двух углов и свойства $\sin\beta$ и $\cos\beta$, имеем

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=$$

$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Теорема 3 доказана.

Пример 3.

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Отметим еще формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad (6)$$

которую можно доказать так:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

В третьем равенстве мы разделили числитель и знаменатель на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$. Конечно, эта формула верна для таких углов α и β, для которых имеют смысл ее правая и левая части.

Вопросы

1. Какие углы называются дополнительными?
2. Какие формулы называются формулами для дополнительных углов?
3. Какая формула называется формулой: а) синуса суммы двух углов; б) синуса разности двух углов?
4. Чему равен синус: а) суммы двух углов; б) разности двух углов?

Упражнения

1. Доказать справедливость равенств:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

2. Вычислить:

а) $\sin 75°$; б) $\sin 15°$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Вычислить:

а) $\operatorname{tg} 105°$; б) $\operatorname{tg} 75°$.

3. Сумма и разность синусов и косинусов.

Теорема 1. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

называемое формулой суммы синусов.

Эту теорему иначе можно сформулировать и так: *сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.*

Теорема 2. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

называемое формулой разности синусов.

Эту теорему можно сформулировать и так: *разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих углов на косинус их полусуммы.*

Теорема 3. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

называемое формулой суммы косинусов.

Эту теорему можно сформулировать и так: *сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.*

Т е о р е м а 4. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

называемое формулой разности косинусов.

Эту теорему иначе можно сформулировать и так: *разность косинусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус их обратной полуразности.*

Выше под разностью углов понимается такая разность, когда из угла, стоящего на месте уменьшаемого, вычитается угол, стоящий на месте вычитаемого; под обратной разностью углов понимается такая разность, когда из угла, стоящего на месте вычитаемого вычитается угол, стоящий на месте уменьшаемого.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м 1 – 4. Положим

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}; \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

тогда

$$\alpha = x + y; \quad \beta = x - y.$$

Используя формулы косинуса суммы, косинуса разности, синуса суммы и синуса разности, получаем

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) =$$

$$= (\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y) + (\sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y) =$$

$$= 2\sin x\cdot\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin(x+y) - \sin(x-y) =$$

$$= 2\cos x\cdot\sin y = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos(x+y) + \cos(x-y) =$$

$$= 2\cos x\cdot\cos y = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = \cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\cdot\sin y =$$

$$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Теоремы 1 – 4 доказаны.

Пример.

$$\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{5\pi}{6}=2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=1;$$

$$\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}=2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}.$$

Вопросы

1. Какая формула называется формулой: а) суммы синусов; б) разности синусов; в) суммы косинусов; г) разности косинусов?
2. Чему равна: а) сумма синусов двух углов; б) разность синусов двух углов; в) сумма косинусов двух углов; г) разность косинусов двух углов?

Упражнения

1. Вычислить:

а) $\cos 70° + \cos 20°$; б) $\sin 20° + \sin 10°$.

2. Доказать справедливость равенств:

а) $\sin 50° + \sin 10° = \cos 20°$;

б) $\cos 20° - \sin 50° = \sin 10°$;

в) $\cos 48° + \sin 18° - \cos 12° = 0$.

4. Формулы для двойных и половинных углов.

Теорема 1. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

называемое формулой синуса двойного угла.

Эту теорему можно сформулировать и так: *синус 2α равен удвоенному произведению синуса α на косинус α.*

Доказательство. Используя формулу синуса суммы двух углов, получаем

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

называемое формулой косинуса двойного угла.

Эту теорему можно сформулировать и так: *косинус 2α равен квадрату косинуса α минус квадрат синуса α.*

Доказательство. Используя формулу косинуса суммы двух углов, получаем

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

П р и м е р 1. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и α принадлежит интервалу $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\cos\alpha$ отрицателен; поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{24}{25};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{25}.$$

Т е о р е м а 3. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \tag{1}$$

называемое формулой квадрата синуса половинного угла.

Т е о р е м а 4. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \tag{2}$$

называемое формулой квадрата косинуса половинного угла.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м 3 и 4. Используя формулу косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, имеем

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

откуда и следуют формулы (1) и (2).

Теоремы 3 и 4 доказаны.

П р и м е р 2. Найти $\cos\frac{\pi}{8}$.

Применяя формулу квадрата косинуса половинного угла, имеем

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Так как $\cos \frac{\pi}{8}$ положителен, то отсюда находим

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

П р и м е р 3. Найти $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ и угол α принадлежит интервалу $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Так как угол α принадлежит указанному интервалу, то $\cos \alpha$ отрицателен, и поэтому

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{7}{9}.$$

Применяя формулу квадрата синуса половинного угла, получаем

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{8}{9}.$$

Легко видеть, что угол $\frac{\alpha}{2}$ принадлежит интервалу $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, поэтому $\sin \frac{\alpha}{2}$ положителен. Теперь находим

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

В о п р о с ы

1. Какая формула называется формулой: а) синуса двойного угла; б) косинуса двойного угла; в) квадрата синуса половинного угла; г) квадрата косинуса половинного угла?
2. Чему равен: а) синус двойного угла; б) косинус двойного угла?
3. Чему равен квадрат: а) косинуса половинного угла; б) синуса половинного угла?

У п р а ж н е н и я

1. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$.
2. Доказать справедливость равенств:

а) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$; б) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

Исторические сведения

Слово "тригонометрия" греческое; оно переводится как "измерение треугольников". Как известно из геометрии, синус, косинус и тангенс угла используются при решении треугольников, поэтому формулы для них называются тригонометрическими.

В курсе геометрии синус, косинус и тангенс рассматриваются для углов, не больших развернутого. В этой главе было обобщено понятие угла и на него были распространены понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Понятие синуса, косинуса и тангенса угла возникли в геометрии и астрономии. По существу, ими оперировали еще древние математики, рассматривая отношение отрезков в треугольниках и окружностях. Знаменитый древнегреческий ученый Клавдий Птоломей, живший во II в., для своих астрономических исследований составил подробную, весьма точную таблицу синусов углов, в течение многих веков служившую средством для решения треугольников.

В XI–XIII вв. в трудах математиков Средней Азии, Закавказья, Ближнего Востока и Индии началось формирование тригонометрии как отдельной науки. Большая заслуга в этом принадлежит азербайджанскому ученому Насирэддину Туси (1201–1274). Однако в этих трудах не была введена необходимая символика, и поэтому развитие тригонометрии происходило очень медленно.

В XV в. немецкий ученый Иоганн Мюллер (1436–1476), известный в науке под именем Региомонтан, издал "Пять книг о треугольниках всех видов", сыгравшую важную роль в развитии тригонометрии.

В XV–XVII вв. в Европе были составлены и изданы несколько тригонометрических таблиц. Над составлением таблиц работали Н. Коперник (1473–1543), И. Кеплер (1571–1630), Ф. Виет (1540–1603), аль-Каши и др.

В России первые тригонометрические таблицы были изданы в 1703 г. при участии Л.Ф. Магницкого.

Современный вид тригонометрия получила в трудах Л. Эйлера. Эйлер, в частности, вывел все тригонометрические формулы из нескольких основных, установил несколько неизвестных до него формул, ввел единообразные знаки. Впервые в его трудах встречаются записи $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и др. На основании работ Эйлера были составлены учебники тригонометрии, излагавшие ее в строгой научной последовательности.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 33. Приближения чисел

1. Абсолютная величина числа. Напомним, что абсолютная величина числа a есть число $|a|$, равное a, если a неотрицательное, и равное $-a$, если a отрицательное, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например,

$|7| = 7;\quad |-7| = 7.$

Абсолютная величина a есть число неотрицательное. Точнее, абсолютная величина числа a, отличного от нуля, есть число положительное, а абсолютная величина нуля есть нуль.

Если отметить на координатной оси (рис. 144) точки a и $-a$, то абсолютная величина $|a|$ определяет расстояние от любой из этих точек до

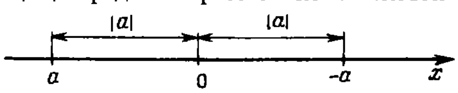


Рис. 144

нулевой точки (на рис. 144 $-a$ – положительное число, a – отрицательное число).

Перечислим основные свойства абсолютных величин.

1) *Абсолютная величина произведения двух чисел равна произведению абсолютных величин этих чисел:*

$|ab| = |a| \cdot |b|.$

Например,

$|7 \cdot 3| = 7 \cdot 3 = |7| \cdot |3|;$

$|(-7) \cdot 3| = |-7 \cdot 3| = 7 \cdot 3 = |-7| \cdot |3|;$

$|(-7) \cdot (-3)| = |7 \cdot 3| = 7 \cdot 3 = |-7| \cdot |-3|.$

2) *Абсолютная величина частного двух чисел равна частному абсолютных величин этих чисел*:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

Например,

$$\left|\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3} = \frac{|7|}{|3|};$$

$$\left|\frac{-7}{3}\right| = \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3} = \frac{|-7|}{|3|};$$

$$\left|\frac{-7}{-3}\right| = \frac{7}{3} = \frac{|-7|}{|-3|}.$$

3) *Абсолютная величина суммы двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел*:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

В самом деле, если числа a и b оба неотрицательные, то

$$a+b = +(|a|+|b|);$$

если же оба неположительные, то

$$a+b = -(|a|+|b|).$$

Но тогда в первом случае

$$|a+b| = |+(|a|+|b|)| = |a|+|b|$$

и во втором случае

$$|a+b| = |-(|a|+|b|)| = |a|+|b|.$$

Пусть теперь числа a и b разных знаков и для определенности $|a| \geqslant |b|$. Если число a положительное, то

$$a+b = +(|a|-|b|),$$

и если a отрицательное, то

$$a+b = -(|a|-|b|).$$

Но тогда при $a > 0$

$$|a+b| = |+(|a|-|b|)| = |a|-|b| \leqslant |a|+|b|$$

и при $a < 0$

$$|a+b| = |-(|a|-|b|)| = |a|-|b| \leqslant |a|+|b|,$$

потому что $-|b| \leqslant |b|$.

Итак, для любых действительных чисел a и b

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

4) *Абсолютная величина разности двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел*:

$$|a-b| \leqslant |a| + |b|.$$

Это свойство легко следует из свойства 3). Действительно,

$$|a-b| = |a+(-b)| \leqslant |a| + |-b| = |a| + |b|.$$

Вопросы

1. Что такое абсолютная величина числа?
2. Всегда ли абсолютная величина числа есть положительное число?
3. Что определяет на числовой оси абсолютная величина координаты точки?
4. Каковы основные свойства абсолютных величин чисел?

Упражнения

1. Показать, что если $a < c < b$, то $|c-a| \leqslant b-a$ и $|b-c| < b-a$ (т.е. если точка c числовой оси находится между точками a и b, то расстояние от c до a, так же как расстояние от c до b, меньше, чем расстояние между a и b).
2. Показать, что если $a \leqslant c < b$, то $|c-a| < b-a$ и $|b-c| \leqslant b-a$.

2. Абсолютная погрешность приближения. Если число $\bar{a}$ (a с чертой) мало отличается от числа a, то говорят, что a приближенно равно $\bar{a}$, и пишут

$$a \approx \bar{a}.$$

Говорят еще, что $\bar{a}$ есть приближение числа a. Знак "$\approx$" это *знак приближенного равенства.*

Величина

$$|a-\bar{a}|$$

называется *абсолютной погрешностью приближенного равенства* $a \approx \bar{a}$ или приближения числа a при помощи числа $\bar{a}$.

Другими словами, абсолютной погрешностью приближения числа a при помощи числа $\bar{a}$ называется абсолютная величина разности этих чисел.

Всякое число h, большее абсолютной погрешности приближения или равное ей:

$$h \geqslant |a-\bar{a}|,$$

называется *оценкой погрешности приближения* или, коротко, *погрешностью приближения* ($a \approx \bar{a}$).

Абсолютная погрешность приближения есть наименьшая (самая малая) погрешность приближения.

Ясно, что если число h – погрешность приближения, то любое большее его число h_1 ($h_1 \geqslant h$) также есть погрешность приближения.

Абсолютную погрешность приближения важно знать. Однако на практике она далеко не всегда может быть известна.

Поэтому обычно находят лишь погрешность приближения. При этом стараются, чтобы погрешность была записана в достаточно простой форме и чтобы она не была очень завышена.

Если число a удовлетворяет неравенствам

$$a_1 \leqslant a \leqslant a_2$$

и мы считаем, что a_1 и a_2 – приближения числа a ($a_1 \approx a$, $a_2 \approx a$), то говорят, что a_1 есть *приближение с недостатком* (*снизу*), а a_2 – *приближение с избытком* (*сверху*) *числа* a *с точностью до* $a_2 - a_1$.

П р и м е р 1. Имеет место приближенное равенство

$$17{,}32 \approx 17$$

с точностью до 1, потому что

$$|17{,}32 - 17| = 0{,}32 < 1.$$

В данном случае абсолютная погрешность равна 0,32, но в качестве погрешности мы сочли нужным взять число 1.

Например, если расстояние между двумя автобусными остановками 17,32 км, то во многих случаях мы сказали бы, что оно равно 17 км, и нас бы поняли в том смысле, что 17 км есть приближенное значение расстояния между остановками с точностью до 1 км.

П р и м е р 2. Имеет место приближенное равенство

$$879 \approx 900$$

с точностью до 50, потому что

$$|900 - 879| = 21 < 50.$$

В данном случае абсолютная погрешность приближения равна 21, но в качестве погрешности мы сочли нужным взять число 50. Например, при оплате железнодорожного проезда большие расстояния выражаются приближенно с точностью до 50 км.

П р и м е р 3. При измерении температуры больного обнаружили, что уровень ртутного столба термометра находится между 38,3 и 38,4 °С. Пусть T – истинная температура больного. Тогда говорят, что T приближенно равна 38,3 °С с точностью до 0,1 °С с недостатком или T приближенно равна 38,4 °С с точностью до 0,1 °С с избытком, и пишут

$$T \approx 38{,}3\ ^\circ\text{C}; \qquad T \approx 38{,}4\ ^\circ\text{C}. \tag{1}$$

Точное значение T нам неизвестно, абсолютная погрешность указанных приближений тоже неизвестна. Однако мы знаем, что

$$38{,}3 < T < 38{,}4.$$

Отсюда следует, что

$$|T - 38{,}3| \leqslant 0{,}1; \qquad |T - 38{,}4| < 0{,}1.$$

Поэтому приближения (1) имеют место с точностью до 0,1 °С.

П р и м е р 4. Для числа

$$a = -13{,}23089107$$

имеют место неравенства

$$-13{,}230 > a > -13{,}231,$$

показывающие, что

$$a \approx -13{,}231 \text{ и } a \approx -13{,}230$$

с точностью до 0,001 соответственно с недостатком и избытком.

Десятичные дроби можно *приближать с округлением.* Напомним процесс округления на примерах.

Пример 5. Надо приблизить числа: а) 3,5629; б) 3,56812; в) 3,565 с точностью до второго знака после запятой с округлением и указать погрешность приближения.

а) В силу неравенств

$$3{,}56 < 3{,}5629 < 3{,}57$$

в качестве приближения числа $a = 3{,}5629$ с точностью до 0,01 с одинаковым правом можно взять как 3,56, так и 3,57. Но если мы возьмем среди них ближайшее к A число, то получим приближение с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005$. Так как у A третья цифра после запятой есть 2, что меньше 5 $(2 < 5)$, то ближайшее к A число есть 3,56.

б) Справедливы неравенства

$$3{,}56 < 3{,}56812 < 3{,}57.$$

При этом разность $3{,}57 - 3{,}56 = 0{,}01$. Но число $B = 3{,}56812$ имеет третью цифру после запятой 8, большую 5 $(8 > 5)$. Следовательно, B ближе к 3,57, чем 3,56. Выбирая в качестве приближения число 3,57, получим погрешность приближения, меньшую чем 0,005.

в) Верны неравенства

$$3{,}56 < 3{,}565 < 3{,}57.$$

Третья цифра после запятой у числа $C = 3{,}565$ есть 5, т.е. C находится посредине между числами 3,56 и 3,57. В качестве приближения принято брать большее из них: 3,57.

Ответ. а) $3{,}5629 \approx 3{,}56$; б) $3{,}56812 \approx 3{,}57$; в) $3{,}565 \approx 3{,}57$. Погрешность в трех случаях не превышает $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005$.

Округляют также и целые числа. Например,

$$-3789 \approx -3800; \quad 279\,189 \approx 279\,000.$$

Погрешность первого приближения 50, второго 500.

Вопросы

1. Что такое приближенное равенство?
2. Что такое погрешность и абсолютная погрешность приближения?
3. Каков знак приближенного равенства?

4. Что называется приближением с недостатком (снизу)?

5. Что называется приближением с избытком (сверху)?

6. С какой точностью приближает a_1 (a_2) число a, если $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$?

7. Что значит приближение числа с точностью до второго знака после запятой с округлением? Какова погрешность этого приближения?

Упражнения

1. Написать приближения с недостатком и избытком с точностью до 0,001 для чисел: а) 37,57891; б) 0,002576; в) −117,00992; г) 0,3(9); д) −31,72(13); е) 0,00(03); ж) 32,10(004); з) −2,378523.

2. Написать приближения с округлением для указанных в упражнении 1 чисел, оставив после запятой три цифры, а остальные заменив нулями.

3. Относительная погрешность приближения. *Относительной погрешностью* приближенного равенства

$$a \approx \bar{a}$$

называется отношение его абсолютной погрешности к абсолютной величине числа a, т.е.

$$\frac{|a - \bar{a}|}{|a|} = \left|\frac{a - \bar{a}}{a}\right|.$$

Например, если

$$a = 17{,}83, \quad \bar{a} = 18,$$

то получим приближенное равенство

$$17{,}83 \approx 18$$

с абсолютной погрешностью

$$|a - \bar{a}| = 0{,}17$$

и относительной погрешностью

$$\left|\frac{a - \bar{a}}{a}\right| = \frac{0{,}17}{17{,}83} < \frac{0{,}17}{17} = 0{,}01,$$

которая, как мы видим, оценивается сверху числом 0,01, так как $17{,}83 > 17$.

Если некоторое число превышает данное, то говорят, что *оно оценивает данное число сверху* или *является оценкой сверху данного числа.*

Если бы кто-нибудь измерил длину детали, имеющей истинную длину 10 см, и при этом допустил абсолютную погрешность, равную 1 см, то мы сказали бы, что это измерение плохое – приближение грубое. Между тем если при измерении длины комнаты, истинная длина которой 5 м, допустить ту же абсолютную погрешность 1 см, то мы сказали бы, что это измерение неплохое. Точность приближения, как правило, характеризуется не абсолютной его погрешностью, а относительной. В примере с измерением детали относительная погрешность равна $\frac{1}{10}$, а в примере с комнатой относительная погрешность равна $\frac{1}{500}$. Чем меньше относительная погрешность приближения, тем приближение считается более точным.

Замечание. В практике относительной погрешностью часто называют величину $\left|\frac{a-\bar{a}}{\bar{a}}\right|$, обычно мало отличающуюся от $\left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right|$.

В жизни нам часто приходится упрощать числа. Например, если известно, что в городе 254 624 жителя, то обычно достаточно сказать, что в городе 254 000 жителей.

Здесь оставлены первые три значащие цифры (с округлением), а остальные значащие цифры заменены нулями. Таким образом,

$$254\,624 \approx 255\,000. \qquad (1)$$

Если известно, что в городе 397 243 жителя, то обычно достаточно сказать, что в городе 400 000 жителей.

Здесь оставлена только первая значащая цифра (но с округлением). Таким образом,

$$397\,243 \approx 400\,000. \qquad (2)$$

Мы упростим десятичную дробь 0,023712, если оставим в ней первые две значащие цифры, а остальные заменим нулями:

$$0{,}023712 \approx 0{,}023. \qquad (3)$$

На самом деле, естественно в этом примере упрощение дроби провести с округлением:

$$0{,}023712 \approx 0{,}024. \qquad (4)$$

Будем говорить, что *число приближено с точностью до k-й значащей цифры*, если у него оставлены первые k значащих цифр, а остальные значащие цифры заменены нулями.

Возникает вопрос об оценке относительной погрешности таких приближений. На практике пользуются следующим правилом.

Если число приближено с точностью до k-й значащей цифры, то относительная погрешность такого приближения не превышает $\frac{1}{10^{k-1}}$, а при округлении эта оценка уменьшается вдвое, т.е. не превышает $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{k-1}}$.

Убедимся в верности этого правила для приближенных равенств (1)–(4). Относительная погрешность не превышает в равенстве (1):

$$\frac{|254\,624-254\,000|}{254\,624} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1\,000}{100\,000} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}01 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{3-1}};$$

в равенстве (2):

$$\frac{|397\,243-400\,000|}{397\,243}<\frac{1}{2}\cdot\frac{100\,000}{100\,000}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{1-1}};$$

в равенстве (3):

$$\frac{|0{,}023712-0{,}023|}{0{,}023712}<\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}001}{0{,}01}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{2-1}};$$

в равенстве (4):

$$\frac{|0{,}023712-0{,}024|}{0{,}023712}\leqslant\frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}001}{0{,}01}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{2-1}}.$$

В этих примерах мы воспользовались следующим свойством: положительная дробь увеличится, если увеличить ее числитель или уменьшить ее знаменатель.

На практике пользуются числами, приближающими некоторые величины. Обычно, если это не оговорено, эти числа берут так, что они приближают данную величину с точностью до единицы разряда их последней цифры.

Например, запись

$$a\approx 30{,}5$$

выражает, что величина a приближается числом 30,5 с точностью до 0,1.

Оценим относительную погрешность этого приближения:

$$\frac{|a-30{,}5|}{a}<\frac{0{,}1}{10}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{10^{3-1}}.$$

Вообще, *если число $\bar{a}$ приближает величину a с точностью до единицы разряда последней цифры $\bar{a}$, то относительная погрешность такого приближения не превышает $\frac{1}{10^{k-1}}$, где k – число значащих цифр в числе $\bar{a}$.*

Например, относительная погрешность приближения

$$a\approx 0{,}031$$

не превышает $\frac{1}{10^{2-1}}=0{,}1$.

Вопросы

1. Что называется относительной погрешностью приближения?

2. Сформулируйте правило оценки относительной погрешности при упрощении чисел.

3. Сформулируйте правило оценки относительной погрешности приближения величины числом с точностью до единицы разряда последней его цифры.

Упражнения

1. Оценить относительную погрешность следующих приближений:

а) $23\,392 \approx 23\,000$; б) $25{,}136 \approx 25$; в) $0{,}324 \approx 0{,}3$; г) $0{,}000578 \approx 0{,}0006$.

2. Упростить следующие числа, заменив в них последние две цифры нулями:

а) $71\,523$; б) $0{,}568$; в) $0{,}00328$.

Оценить абсолютную и относительную погрешности возникающих при этом приближений.

4. Приближения суммы, разности, произведения и частного двух чисел. *Сумма (разность, произведение, частное) двух чисел считается приближенно равной сумме (разности, произведению, частному) их приближенных значений.*

Отметим, что чем с бо́льшим числом разрядов мы будем брать приближенные значения двух чисел, тем ближе будет сумма (разность, произведение, частное) этих приближенных значений к истинной сумме (разности, произведению, частному) этих чисел.

Точность вычисления находится в противоречии с простотой вычисления. Бо́льшая точность связана с употреблением бо́льшого количества цифр, меньшая точность требует употребления меньшего количества цифр, если вычисление производится правильно.

Чтобы найти сумму (или *разность*) *двух чисел, их надо округлить с точностью до единицы одного и того же разряда, а затем сложить* (или *вычесть*) *полученные приближения.*

Абсолютная погрешность такого приближения не превышает единицу того разряда, до которого округлили числа.

Обоснование этого правила будет проведено в следующем параграфе.

Пример 1. Даны числа

$$a = 12{,}36(75); \quad b = 3{,}1234567\ldots$$

Найти приближенно с точностью до $0{,}0001$ сумму $a+b$ и разность $a-b$.

Округлим каждое число с точностью до $0{,}0001$:

$$a \approx 12{,}3676; \quad b \approx 3{,}1235.$$

Тогда

$$a+b \approx 12{,}3676 + 3{,}1235 = 15{,}4911;$$

$$a-b \approx 12{,}3676 - 3{,}1235 = 9{,}2441.$$

Ответ. $a+b \approx 15{,}4911$; $a-b \approx 9{,}2441$.

Чтобы найти произведение (или *частное*) *двух чисел, их надо округлить с точностью до одной и той же, например k-й, значащей цифры, затем найти произведение* (или *частное*) *полученных приближений и, наконец, округлить результат до k-й значащей цифры. Относительная погрешность такого приближения не превышает* $\dfrac{1}{10^{k-1}}$.

Обоснование этого правила будет проведено в следующем параграфе.

П р и м е р 2. Даны числа

$$a = 136{,}08\,(6); \quad b = 0{,}0068751.$$

Найти приближенно ab; $\frac{a}{b}$; $\frac{b}{a}$ с относительной погрешностью, не превышающей 0,02.

Согласно правилу, числа a и b надо округлить с точностью до третьей значащей цифры:

$$a \approx 136; \quad b \approx 0{,}00688.$$

Тогда

$$a \cdot b \approx 136 \cdot 0{,}00688 = 0{,}93568 \approx 0{,}936;$$

$$\frac{a}{b} \approx \frac{136}{0{,}00688} = 19\,767{,}44\ldots \approx 19800;$$

$$\frac{b}{a} \approx \frac{0{,}00688}{136} = 0{,}00005058823\ldots \approx 0{,}0000506.$$

О т в е т. $a \cdot b \approx 0{,}936$; $\frac{a}{b} \approx 19800$; $\frac{b}{a} \approx 0{,}0000506$.

В о п р о с ы

1. Чему приближенно равны сумма, разность, произведение, частное двух чисел?
2. Сформулируйте правило приближенного сложения (вычитания) двух чисел?
3. Сформулируйте правило приближенного умножения (деления) двух чисел?

У п р а ж н е н и я

1. Найти приближенно сумму и разность чисел α и β, округлив их с точностью до единицы четвертого разряда:

а) $\alpha = 12{,}35817$, $\beta = 6{,}9879$;

б) $\alpha = 7{,}1723$, $\beta = 0{,}8192$;

в) $\alpha = 11{,}1429$, $\beta = 3{,}2872$;

г) $\alpha = 3{,}12\,(27)$, $\beta = 1{,}22(891)$;

д) $\alpha = 17{,}23(38)$, $\beta = -21{,}(136)$.

Какая будет при этом погрешность приближения?

2. Найти приближенно сумму и разность чисел α и β, имея в виду, что окончательный результат надо получить с точностью до 0,01:

а) $\alpha = 3{,}1567$, $\beta = 2{,}0921$;

б) $\alpha = 17{,}3281$, $\beta = -2{,}9856$;

в) $\alpha = -7{,}0003$, $\beta = -2{,}9812$.

3. Вычислить приближенно произведение и частное чисел

$a = 0{,}123456789\ldots$ и $b = 2{,}(7)$

с относительно погрешностью, меньшей 0,002.

4. Вычислить приближенно произведение и частное чисел

$a = 7{,}9(17)$ и $b = 1{,}2345678910$

с относительной погрешностью, меньшей 0,001.

5. **Микрокалькуляторы.** Практические вычисления, подобные рассмотренным выше, производят на электронных микрокалькуляторах. Как это делать, подробно рассказывается в инструкции, которая прилагается к каждому калькулятору. Поэтому мы остановимся только на некоторых вопросах, связанных с приближенными вычислениями. Вычисления калькулятор производит моментально. Однако это не значит, что знания об абсолютных и относительных погрешностях не нужны тому, кто пользуется калькулятором. Эти знания нужны для правильной постановки задачи, чтобы вычисления не были излишне громоздкими.

Кроме того, эти знания помогают правильно читать результаты, получаемые калькулятором. Если на табло калькулятора, в который внесены приближенные значения чисел, получено число с восемью знаками после запятой, то не всегда все они верные. Надо разобраться в том, какие из них заведомо верные и какие надо отбросить. В этом могут помочь полученные нами знания об абсолютных и относительных погрешностях.

Отметим, что микрокалькулятор обычно дает результаты без округления.

В настоящее время выпускается довольно много различных моделей микрокалькуляторов.

Мы будем говорить о конкретном микрокалькуляторе – "Электроника Б3-38". Но факты, о которых будет идти речь, имеют место по аналогии и для других калькуляторов.

В микрокалькулятор "Электроника Б3-38" ввводятся числа, каждое из которых состоит не более чем из восьми цифр. Например, числа 13,757689; 0,0000001; 0,00035; – 2,000002 калькулятор принимает.

Такие числа можно на калькуляторе складывать, вычитать, умножать, делить. На табло калькулятора результат выдается в виде числа, записанного не более чем восемью цифрами.

Если точный результат выражается не более чем восемью цифрами, то он и выдается на табло. В этом случае результат получен точно.

Если же точный результат выражается более чем восемью цифрами и его абсолютная величина меньше 10^8, то на табло появляется приближенное значение результата, состоящее из первых его восьми цифр.

Если же абсолютная величина результата будет больше 10^8, то приходится уже поступать иначе, применяя запись чисел в стандартном виде.

Например, воспользовавшись калькулятором, получим

$$356 \times 781 = 278\,086; \qquad (1)$$

$$22{,}1 \times 3{,}47 = 80{,}157; \qquad (2)$$

$$35{,}272 \times 62{,}116 \approx 2190{,}9555; \qquad (3)$$

$$0{,}00304 \times 85{,}123 = 0{,}2587739; \qquad (4)$$

$$20{,}3 \times 187\,235 \approx 3\,800\,870{,}5; \quad (5)$$

$$23 : 2{,}1 \approx 10{,}95238. \quad (6)$$

В этих равенствах каждое из данных чисел состоит не более чем из восьми цифр. Такие числа калькулятор принимает.

Равенства (1) и (2) точные, потому что произведение двух чисел, каждое из которых состоит из трех цифр, само состоит не более чем из шести цифр. Такие числа калькулятор выдает точно.

Равенство (3) приближенное, верное с точностью до четвертого знака после запятой. Калькулятор вычислил произведение точно и отбросил (без округления!) лишние (сверх восьми) цифры:

$$35{,}272 \times 62{,}116 = 2190{,}955552 \approx 2190{,}9555.$$

Таким образом, этот приближенный результат получен с точностью до $0{,}0001 = 10^{-4}$, т.е. с абсолютной погрешностью, меньшей 10^{-4}.

Аналогично калькулятор вычислил результаты в случаях (4)–(6).

Вопросы

1. Когда микрокалькулятор дает точный результат для: а) суммы; б) разности; в) произведения; г) частного двух чисел?

2. Когда микрокалькулятор дает приближенный результат для: а) произведения; б) частного двух чисел?

3. Для любых ли двух чисел можно при помощи микрокалькулятора найти (точно или приближенно) их: а) сумму; б) разность; в) произведение; г) частное?

§ 34. Оценки приближения суммы, разности, произведения и частного чисел

1. Абсолютная погрешность приближения суммы и разности. Пусть даны числа a и b, и пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – их приближения. Будем считать, что сумма $\overline{a} + \overline{b}$ и разность $\overline{a} - \overline{b}$ соответственно приближают сумму $a + b$ и разность $a - b$, т.е. будем рассматривать приближения

$$a+b \approx \overline{a} + \overline{b}; \quad a-b \approx \overline{a} - \overline{b}.$$

Теорема 1. *Абсолютная погрешность приближения суммы или разности двух чисел не превышает сумму абсолютных погрешностей приближений этих чисел.*

Доказательство. Так как абсолютная величина суммы чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел, то

$$|(\overline{a} + \overline{b}) - (a+b)| = |(\overline{a} - a) + (\overline{b} - b)| \leqslant |\overline{a} - a| + |\overline{b} - b|.$$

В левой части этого неравенства стоит абсолютная погрешность приближения суммы чисел a и b, а в правой – сумма абсолютных погрешностей приближений этих чисел.

Аналогично

$$|(\bar{a}-\bar{b})-(a-b)|=$$

$$=|(\bar{a}-a)-(\bar{b}-b)|\leqslant|\bar{a}-a|+|\bar{b}-b|.$$

Теперь в левой части неравенства стоит абсолютная погрешность приближения разности чисел a и b, а в правой – сумма абсолютных погрешностей приближений этих чисел.

Заметим, что из теоремы 1 вытекают правила приближенного сложения и вычитания двух чисел, сформулированные в предыдущем параграфе.

Теорема о погрешности приближения суммы двух слагаемых обобщается на любое конечное число слагаемых.

Теорема 2. *Абсолютная погрешность приближения суммы конечного числа слагаемых не превышает сумму абсолютных погрешностей приближений этих слагаемых.*

Пример. Дана таблица 20 чисел (десятичных дробей):

$$a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{20}.$$

Требуется вычислить сумму этих чисел приближенно с точностью до 0,1.

Если каждое число таблицы взять с точностью до 10^{-k}, то сумма их будет отличаться от истинной суммы не более чем на величину $h = 20\cdot 10^{-k}$.

При $k=1$ получаем $h=2$.

При $k=2$ получаем $h=0{,}2$.

При $k=3$ получаем $h=0{,}02<0{,}1$.

Итак, данные числа надо взять с тремя знаками после запятой.

Если их сложить, то полученная сумма будет приближенно равна истинной с точностью до 0,02 и тем более с точностью до 0,1.

Однако если мы запишем приближения наших чисел с округлением с двумя знаками после запятой, то эти числа приближают соответствующие числа с точностью до $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$. Тогда их сумма будет приближенно равна истинной с погрешностью, равной

$$20\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}=0{,}1.$$

Мы видим, что более экономно поставленную задачу можно решить, взяв приближения чисел с двумя знаками после запятой, но с округлением.

Вопросы

1. Как оценивается абсолютная погрешность: а) суммы; б) разности двух чисел?
2. Если надо приближенно вычислить сумму или разность двух чисел с точностью до 10^{-3}, то как надо упростить эти числа?

3. Как оценивается абсолютная погрешность приближения суммы нескольких слагаемых?

4. Если требуется найти приближенно сумму 20 дробей с точностью до 0,1, то как лучше их упростить?

Упражнения

1. Пол комнаты состоит из 17 досок. Ширина каждой из них 35 см с точностью до 1/2 см. Какую возможную погрешность мы сделаем, если будем считать, что размер комнаты в направлении ширины досок равен $d = 35 \times 17$ см?

2. Надо сложить указанные числа приближенно так, чтобы окончательный результат получить с точностью до 0,1: 0,378561; 3,789012; 7,178210; 11,532478; 2,235622; 4,251617; 9,100017. Произвести необходимые упрощения.

3. В упражнении 2 в таблице чисел оставить у этих чисел три знака после запятой, однако с округлением. Узнать, с какой точностью сумма полученных таким образом чисел приближает истинную сумму.

2. Приближение произведения. Рассмотрим приближенные равенства

$$a \approx \bar{a}; \quad b \approx \bar{b}.$$

Будем считать, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и что произведение $\bar{a}\bar{b}$ приближает произведение ab:

$$ab \approx \bar{a}\bar{b}. \tag{1}$$

При оценке относительной погрешности произведения обычно пользуются следующим правилом.

Относительная погрешность приближения произведения чисел a и b не превышает сумму относительных погрешностей приближений этих чисел:

$$\left| \frac{ab - \bar{a}\bar{b}}{ab} \right| \leqslant \left| \frac{a - \bar{a}}{a} \right| + \left| \frac{b - \bar{b}}{b} \right|. \tag{2}$$

Замечание. Это правило не совсем точно, но оно широко применяется в практике вычислений, когда относительные погрешности приближений чисел a и b настолько малы, что можно пренебречь их произведением сравнительно с самими погрешностями.

В самом деле, так как

$$ab - \bar{a}\bar{b} = a(b - \bar{b}) + \bar{b}(a - \bar{a}) =$$

$$= a(b - \bar{b}) + b(a - \bar{a}) + (\bar{b} - b)(a - \bar{a}),$$

то абсолютная погрешность приближения (1) оценивается следующим образом:

$$|ab - \bar{a}\bar{b}| \leqslant |b||a - \bar{a}| + |a||b - \bar{b}| + |b - \bar{b}||a - \bar{a}|, \tag{3}$$

потому что абсолютная величина суммы не превышает сумму абсолютных величин и абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин

Разделив неравенство (3) на произведение $|a||b|$, которое по предположению не равно нулю, получим

$$\left|\frac{ab-\bar{a}\bar{b}}{ab}\right| \leqslant \left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right| + \left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right| + \left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right|\left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|. \qquad (4)$$

Следовательно, относительная погрешность приближения произведения двух чисел a и b оценивается при помощи формулы (4).

Обычно приближения чисел выбирают так, что их относительные погрешности малы настолько, что их произведением сравнительно с их суммой можно пренебречь. Таким образом, в правой части неравенства (4) можно опустить третий член, и мы получим неравенство (2).

Отметим, что в приближенном вычислении произведения чисел a и b относительные погрешности $\left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right|$ и $\left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|$ надо стараться сделать равными. Это достигается тем, что приближения a и b берутся с одинаковым числом значащих цифр (и с округлением).

Именно так поступать и рекомендует правило приближенного умножения двух чисел, сформулированное в предыдущем параграфе.

Рассмотрим, какова относительная погрешность приближения

$$ab \approx 0{,}936 \qquad (5)$$

в примере 2 п. 4 § 33.

Округлив числа a и b: $a \approx 136$, $b \approx 0{,}00688$, получаем, что относительная погрешность каждого такого приближения не превышает $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{3-1}} = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$.

Согласно формуле (2), относительная погрешность приближения

$$ab \approx 0{,}93568 \qquad (6)$$

не превышает $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} = 10^{-2}$.

Отсюда видно, что число 0,93568 надо округлить, оставив только три значащие цифры. Тогда относительная погрешность приближения (5) не превышает

$$10^{-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{3-1}} < 0{,}02.$$

З а м е ч а н и е. Если вместо формулы (2) воспользоваться более точной формулой (4), то получим, что относительная погрешность приближения (5) все равно не превышает 0,02.

В о п р о с

По какому правилу находится относительная погрешность произведения двух чисел?

Упражнения

1. Вычислить приближенно произведение чисел

$$a = 0{,}123456789\ldots \quad \text{и} \quad b = 2{,}(7)$$

с относительной погрешностью, меньшей 0,002.

2. Вычислить приближенно произведение чисел

$$a = 7{,}9(17) \quad \text{и} \quad b = 1{,}2345678910$$

с относительной погрешностью, меньшей 1/500.

3. Приближение частного. Пусть даны приближения чисел a и b, отличных от нуля:

$$a \approx \bar{a}; \ b \approx \bar{b}, \ \bar{b} \neq 0.$$

Рассмотрим приближение частного этих чисел:

$$\frac{a}{b} \approx \frac{\bar{a}}{\bar{b}}. \tag{1}$$

При оценке относительной погрешности приближения частного обычно пользуются следующим правилом.

Относительная погрешность приближения частного чисел a и b не превышает сумму относительных погрешностей приближений этих чисел:

$$\left| \frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{\bar{a}}{\bar{b}}}{\dfrac{a}{b}} \right| \leqslant \left| \frac{a - \bar{a}}{a} \right| + \left| \frac{b - \bar{b}}{b} \right|. \tag{2}$$

З а м е ч а н и е. Это правило не совсем точно, но оно широко применяется в практике вычислений, когда число $\bar{b}$ настолько близко к числу b, что можно считать, что абсолютная величина их отношения близка к 1.

В самом деле, так как

$$\frac{a}{b} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a\bar{b} - \bar{a}b}{b\bar{b}} = \frac{a\bar{b} - ab + ab - b\bar{a}}{b\bar{b}} = \frac{a(\bar{b} - b)}{b\bar{b}} + \frac{a - \bar{a}}{\bar{b}},$$

то абсолютная погрешность приближения (1) оценивается следующим образом:

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right| \leqslant \left| \frac{a}{b\bar{b}} \right| |\bar{b} - b| + \frac{1}{|\bar{b}|} |a - \bar{a}|.$$

Разделив это неравенство на число $\left|\frac{a}{b}\right|$, по условию не равное нулю, получим

$$\left|\frac{\frac{a}{b}-\frac{\bar{a}}{\bar{b}}}{\frac{a}{b}}\right| \leqslant \left(\left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right| + \left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|\right)\left|\frac{b}{\bar{b}}\right|. \qquad (3)$$

Итак, относительная погрешность приближения (1) оценивается при помощи формулы (3).

Из этой формулы мы теперь получим более простую формулу (2), если $\bar{b}$ возьмем настолько близким к b, чтобы можно было заменить величину $\left|\frac{b}{\bar{b}}\right|$ на 1.

Дальше для оценки относительной погрешности мы будем пользоваться неравенством (2).

Отметим, что при приближенном вычислении частного чисел a и b надо стараться сделать равными относительные погрешности $\left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right|$ и $\left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|$.

Это достигается тем, что приближения a и b берутся с одинаковым числом значащих цифр (и с округлением). Именно так поступать и рекомендует правило приближенного деления двух чисел, сформулированное в предыдущем параграфе.

Рассмотрим, какова относительная погрешность приближений

$$\frac{a}{b} \approx 19800 \qquad (4)$$

и

$$\frac{b}{a} \approx 0{,}0000506 \qquad (5)$$

в примере 2 п. 4 § 33.

Округлив числа a и b: $a \approx 136$, $b \approx 0{,}00688$, получаем, что относительная погрешность каждого такого приближения не превышает $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{3-1}} = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$.

Согласно формуле (2), относительная погрешность приближения

$$\frac{a}{b} \approx 19767{,}44\ldots$$

не превышает

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 10^{-2}.$$

Отсюда видно, что число 19767,44... надо округлить, оставив только три значащие цифры. Тогда относительная погрешность приближения (4) не превышает

$$10^{-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{3-1}} \leqslant 0{,}02.$$

Согласно формуле (2), относительная погрешность приближения

$$\frac{b}{a} \approx 0{,}00005058823\ldots$$

не превышает

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 10^{-2}.$$

Отсюда видно, что число 0,00005058823... надо округлить, оставив только три значащие цифры. Тогда относительная погрешность приближения (5) не превышает

$$10^{-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{3-1}} \leqslant 0{,}02.$$

Вопрос

По какому правилу находится относительная погрешность частного двух чисел?

Упражнения

1. Вычислить приближенно частное $\frac{a}{b}$ чисел

$$a = 0{,}12345678\ldots \quad \text{и} \quad b = 2{,}(7)$$

с относительной погрешностью, меньшей 0,002.

2. Вычислить приближенно частное $\frac{a}{b}$ чисел

$$a = 7{,}9(17) \quad \text{и} \quad b = 1{,}12345678910$$

с относительной погрешностью, меньшей 0,002.

§ 35. Двоичное счисление

1. Понятие двоичного счисления. При записи чисел мы обычно пользуемся *десятичным счислением,* или *десятичной системой счисления.* В основу десятичного счисления положены цифры

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Эти цифры в то же время являются и числами: нулем и первыми девятью натуральными. Следующие после 9 натуральные числа записывают комбинациями из указанных цифр. Мы хорошо знаем, как это делается, и не будем подробно повторять.

Заметим, например, что

$$328 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8;$$

$$308 = 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8;$$

$$1001 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1.$$

Но для записи натуральных чисел можно употреблять и *двоичное счисление*, или *двоичную систему счисления*, в основе которой лежат две цифры:

0 и 1.

Эти цифры являются в то же время и числами: нулем и единицей. Следующие за единицей натуральные числа записываются только при помощи цифр 0 и 1. Как это делается, будет видно из следующих равенств. В каждом из них первые и вторые их члены записаны в десятичной системе, а третьи члены — в двоичной системе:

$$0 = 0 = 0;$$

$$1 = 1 = 1;$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0 = 10;$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1 = 11;$$

$$4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 = 100;$$

$$5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 101;$$

$$6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 110;$$

$$7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 111;$$

$$8 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 = 1000;$$

$$9 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 1001;$$

$$10 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 1010;$$

$$11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 1011;$$

$$12 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 = 1100;$$

$$13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 1101;$$

$$14 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 1110;$$

$$15 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 1111;$$

$$16 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 = 10000;$$

$$17 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 10001.$$

Мы видим, что любое натуральное число можно в двоичной системе счисления записать при помощи цифр 0 и 1 и притом единственным образом, как это будет видно из дальнейшего. Конечно, в обыденной жизни двоичная система для записи чисел неудобна. Даже малые натуральные числа в двоичной системе записываются громоздко. Например, 9 в двоичной системе есть четырехзначное число, а 17 – пятизначное число.

Однако для современных электронных счетных машин производить вычисления в двоичной системе удобнее, чем в десятичной.

Пусть дано натуральное число в двоичной системе счисления, например

100 101.

Последняя его цифра называется цифрой *первого разряда*, предпоследняя – цифрой *второго разряда*, ей предшествующая – цифрой *третьего разряда* и т.д.

Например, для данного числа

100 101

цифры его разрядов видны из следующей таблицы:

Номер разряда	...	6	5	4	3	2	1
Цифра разряда	...	1	0	0	1	0	1

Вообще для натурального числа, записанного в двоичной системе счисления, цифрой k-го разряда называется цифра, записанная на k-м месте, если считать цифры справа налево.

Из приведенных примеров видно, как перевести натуральное число, данное в двоичной системе, в десятичную систему. Вот еще примеры:

$$100\,101 = 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 32 + 4 + 1 = 37;$$

$$11\,100 = 2^4 + 2^3 + 2^2 = 16 + 8 + 4 = 28.$$

Перевод числа, данного в десятичной системе, в двоичную более сложен. Как это делается, мы покажем на примерах в следующем пункте.

Вопросы

1. Какие цифры лежат в основе а) десятичной системы счисления; б) двоичной системы счисления?

2. Что называется цифрой k-го разряда в записи натурального числа в двоичной системе счисления?

3. Как перевести число, заданное в двоичной системе, в десятичную систему? Приведите примеры.

Упражнения

1. Записать в двоичной системе числа:

а) 2; б) 2^2; в) 2^3; г) 2^4; д) 2^5.

2. Перевести следующие числа из двоичной системы в десятичную:

а) 101; б) 100000; в) 101000; г) 111.

2. Перевод чисел из десятичной системы в двоичную. Чтобы перевести данное число, заданное в десятичной системе, в двоичную систему надо разделить данное число на 2, при этом в остатке будет либо 0, либо 1. Затем частное разделить на 2 (опять в остатке будет либо 0, либо 1), новое частное разделить снова на 2 и так продолжать до конца этот процесс. Конечно, каждый раз деление на 2 можно производить в уме, а сами вычисления можно располагать, как и в приведенном ниже примере.

П р и м е р 1. Перевести число 91, заданное в десятичной системе, в двоичную систему.

$$\begin{aligned} 91 &= 45 \cdot 2 + 1 = \\ &= (22 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = 22 \cdot 2^2 + 2 + 1 = \\ &= (2 \cdot 11 + 0) \cdot 2^2 + 2 + 1 = 11 \cdot 2^3 + 2 + 1 = \\ &= (5 \cdot 2 + 1) \cdot 2^3 + 2 + 1 = 5 \cdot 2^4 + 2^3 + 2 + 1 = \\ &= (2 \cdot 2 + 1) \cdot 2^4 + 2^3 + 2 + 1 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2 + 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Следовательно,

$$91 = 1011011. \tag{2}$$

Слева в этом равенстве стоит число, записанное в десятичной системе, справа — это же число, записанное в двоичной системе. Запись эта единственна. Ее единственность следует из таких рассуждений.

Из первой строчки выкладок (1) видно, что последняя цифра в двоичной записи числа 91 должна быть 1, из второй строки видно, что предпоследняя цифра в записи (2) необходимо должна быть 1, из третьей строки видно, что третья цифра справа в записи (2) необходимо должна быть 0, и т.д.

Для больших чисел указанный процесс перевода из десятичной системы в двоичную может оказаться очень длинным. Поэтому покажем на примерах, как можно этот процесс сократить.

П р и м е р 2. Перевести число 327, записанное в десятичной системе, в двоичную систему.

Рассмотрим числа

$$1;\ 2;\ 2^2;\ 2^3;\ 2^4;\ \ldots$$

и подберем натуральное число n, для которого

$$2^n \leqslant 327 < 2^{n+1}.$$

Такое число n существует и единственно.

В самом деле,

$$256 = 2^8 \leqslant 327 < 2^9 = 512,$$

поэтому $n = 8$. Это показывает, что число 327 в двоичном счислении девятизначное. Приготовим таблицу (она приведена ниже). Против девятого разряда поставим в ней 1.

Вычисляем разность

$$327 - 2^8 = 327 - 256 = 71.$$

Найдем для нее число n, для которого

$$2^n \leqslant 71 < 2^{n+1}.$$

Так как

$$64 = 2^6 \leqslant 71 < 2^7 = 128,$$

то $n = 6$. Это показывает, что цифра седьмого разряда нашего числа в двоичном счислении есть 1, а цифра восьмого разряда есть 0. Записываем эти цифры в таблицу.

Далее,

$$71 - 2^6 = 71 - 64 = 7$$

и

$$4 = 2^2 \leqslant 7 < 2^3 = 8.$$

Это показывает, что цифра третьего разряда есть 1, а цифры четвертого, пятого и шестого разрядов — 0. Запишем их в таблицу. Наконец,

$$7 - 2^2 = 3; \quad 2 = 2^1 \leqslant 3 < 2^2 = 4.$$

Следовательно, цифра второго разряда есть 1, а остаток равен

$$3 - 2 = 1,$$

т.е. цифра первого разряда есть 1. Записываем их в таблицу:

Номер разряда	...	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Цифра разряда	...	1	0	1	0	0	0	1	1	1

Итак, получили, что

$$327 = 101000111.$$

Слева в этом равенстве стоит число, записанное в десятичной системе, справа — это же число, записанное в двоичной системе. Запись эта единственна, потому что на любом этапе наших рассуждений соответствующее n было единственным.

Пример 3. Перевести число 831 в двоичную систему.

Имеем

$$512 = 2^9 \leqslant 831 < 2^{10} < 1024,$$

т.е. $n = 9$. Следовательно, в двоичной системе число 831 десятизначное; его цифра десятого разряда есть 1.

Далее,

$$831 - 2^9 = 831 - 512 = 319;$$

$$256 = 2^8 \leqslant 319 < 2^9 = 512.$$

Следовательно, в двоичной системе цифра девятого разряда есть 1. Поскольку

$$319 - 2^8 = 319 - 256 = 63$$

и

$$32 = 2^5 \leqslant 63 < 2^6 = 64,$$

то цифра шестого разряда есть 1, а цифра восьмого и седьмого разрядов – 0.

Далее,

$$63 - 2^5 = 63 - 32 = 31$$

и

$$16 = 2^4 \leqslant 31 < 2^5 = 32.$$

Следовательно, в двоичной системе цифра пятого разряда есть 1. Поскольку

$$31 - 2^4 = 31 - 16 = 15$$

и

$$8 = 2^3 \leqslant 15 < 2^4 = 16,$$

то в двоичной системе цифра четвертого разряда есть 1.

Так как

$$15 - 2^3 = 15 - 8 = 7 \text{ и } 4 = 2^2 \leqslant 7 < 2^3 = 8,$$

то в двоичной системе цифра третьего разряда есть 1.

Далее,

$$7 - 2^2 = 7 - 4 = 3$$

и

$$2^1 \leqslant 3 < 2^2 = 4.$$

Следовательно, в двоичной системе цифра второго разряда есть 1.

Наконец,

$$3 - 2 = 1.$$

Следовательно, в двоичной системе цифра первого разряда есть 1.

Соответствующая таблица имеет вид

Номер разряда ...	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Цифра разряда ...	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1

Мы получили

$$831 = 1\,100\,111\,111,$$

где правая часть есть двоичное представление числа 831.

Вопрос

Как перевести число, заданное в десятичной системе счисления, в двоичную систему счисления?

Упражнение

Перевести следующие числа из десятичной системы в двоичную: а) 23; б) 62; в) 232; г) 421.

3. Понятие о действиях в двоичной системе счисления. Числа, заданные в двоичной системе счисления, сравниваются по аналогии с тем, как это делается в десятичной системе. Арифметические действия тоже производятся аналогично.

Следующие примеры понятны без пояснений:

$$101 < 1000;$$

$$101\,011 < 101\,100;$$

$$10\,001 < 10\,101.$$

При сложении в двоичном счислении надо иметь в виду, что

$$0 + 0 = 0;$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1;$$

$$1 + 1 = 10.$$

К последнему равенству надо привыкнуть: правая его часть есть число 2, записанное в двоичном счислении.

Если учесть эти равенства, то правила сложения чисел в двоичной системе ничем не отличаются от соответствующих правил в десятичной системе.

Пример 1.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}1001\\110\end{array}\\ \hline 1111\end{array}\ .$$

Пример 2.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}1001\\101\end{array}\\ \hline 1110\end{array}\ .$$

Пример 3.

$$\begin{array}{r} +\,\begin{array}{r}1101\\1001\end{array}\\ \hline 10110\end{array}\ .$$

Пример 4.

$$\begin{array}{r} +\,\begin{array}{r}110\\111\end{array}\\ \hline 1101\end{array}\ .$$

При вычитании в двоичной системе надо учесть, что

$0 - 0 = 0;$

$1 - 0 = 1;$

$1 - 1 = 0;$

$10 - 1 = 1.$

С учетом этих равенств вычитание столбиком в двоичной системе производится по таким же правилам, как это делается в десятичной системе.

Пример 5.

$$\begin{array}{r} -\,\begin{array}{r}1101\\1001\end{array}\\ \hline 100\end{array}\ .$$

Пример 6.

$$\begin{array}{r} -\,\begin{array}{r}1001\\101\end{array}\\ \hline 100\end{array}\ .$$

Пример 7.

$$\begin{array}{r} -\,\begin{array}{r}10\,101\\1\,111\end{array}\\ \hline 110\end{array}\ .$$

В двоичной системе счисления основная таблица умножения очень простая:

$0 \cdot 0 = 0;$

$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0;$

$1 \cdot 1 = 1.$

Поэтому умножение столбиком сводится к сложению и применению этой таблицы.

Пример 8.

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}10101\\ 11\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}10101\\ 10101\end{array}\\
\hline
111111
\end{array}.
$$

Пример 9.

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}10111\\ 101\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}10111\\ 10111\end{array}\\
\hline
1110011
\end{array}.
$$

Здесь надо учесть, что 1 + 1 = 10.

Вопросы

1. Какие основные правила сложения в двоичной системе счисления?
2. Какие основные правила умножения в двоичной системе счисления?

Упражнения

1. Найти сумму чисел, записанных в двоичной системе:

а) 1010 + 111 + 1011; б) 1 + 1 + 1;

в) 1 + 1 + 1 + 1; г) 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

2. Найти разность чисел, записанных в двоичной системе:

а) 101 − 11; б) 111 − 101; в) 10101 − 111.

3. Найти произведение чисел, записанных в двоичной системе:

а) 101 · 11; б) 111 · 101; в) 1010 · 11.

§ 36. Начала программирования

1. Электронные вычислительные машины. При работе с современной техникой широко используются сложные вычисления, которые "ручным" путем на бумаге произвести невозможно. В этом случае применяются ЭВМ (электронные вычислительные машины), которые, обладая высоким быстродействием, производят весьма сложные вычисления в очень короткие сроки. В 1 с ЭВМ делает миллион элементарных действий (операций).

Для небольших вычислений счеты и арифмометры используются и сейчас, но они постепенно вытесняются электронными микрокалькуляторами, которые представляют собой карманные счетные машины. Несмотря на такие размеры, они дают высокую точность вычислений, выраженную восемью-девятью точными цифрами.

Арифметические действия над большими числами мы расчленяем на элементарные действия с однозначными и двузначными числами, которые производим, привлекая на помощь свою память.

Сложение больших натуральных чисел сводим к сложению однозначных чисел. При этом просто помним, например, что $3 + 4 = 7$ или $6 + 8 = 14$. Подобным образом умножение натуральных чисел мы сводим к применению таблицы умножения.

Машина тоже расписывает сложные вычисления на совсем простые — элементарные. В сущности, она делает вычисления по тем же схемам, которые мы используем при "ручных" вычислениях на бумаге.

Многие ЭВМ приспособлены к двоичной системе счисления. Главным образом это объясняется тем, что (как это было отмечено выше) двоичная система имеет весьма простые основные таблицы сложения и умножения:

$$0 + 0 = 0; \qquad 0 + 1 = 1; \qquad 1 + 1 = 10;$$

$$0 \cdot 0 = 0; \qquad 0 \cdot 1 = 0; \qquad 1 \cdot 1 = 1.$$

С другой стороны, увеличение количества операций, вызываемое переходом от десятичной системы к двоичной, не имеет большого значения для ЭВМ.

Например, шестизначное в десятичной системе число в двоичной системе будет двадцатизначным. При "ручных" вычислениях на бумаге с такими длинными рядами цифр оперировать тяжело, но заставить оперировать с ними машину вполне возможно.

Данные числа вводятся в машину в десятичной системе счисления. Машина их автоматически переводит в двоичную систему, производит вычисления в двоичной системе, а результат снова выдает в привычной для нас десятичной системе.

Чтобы решить, например, обычную школьную задачу на ЭВМ, появляется необходимость предварительно составить для нее план решения — программу, так же как и для решения более сложных математических задач, с учетом возможностей данной машины. Как говорят, надо запрограммировать задачу для ЭВМ.

Отдельные операции, которые производятся машиной, называются *командами*. К ним относятся арифметические и логические операции, операции сравнения и др.

Составить *программу* задачи для ЭВМ — значит задать план ее решения при помощи определенной последовательности команд.

Существует отдельная математическая наука — *теория программирования*, изучающая способы составления программ для ЭВМ.

В последние годы появились электронные микрокалькуляторы, практически мгновенно выполняющие арифметические действия и вычисляющие значение элементарных функций (извлечение корня, вычисление синуса, косинуса, логарифма и т.д.).

Микрокалькулятор производит действия над числами за тысячные доли секунды. Однако эта большая скорость выполнения операций не дает существенного увеличения общей скорости вычислений, поскольку основное время уходит на нажатие клавиш для ввода чисел и выполнения операций. Если, например, нам нужно сложить 1000 трехзначных целых чисел, то придется 3000 раз нажимать на клавиши-цифры, 999 раз—на клавишу сложения и один раз на клавишу равенства. Это займет несколько десятков минут, в то время как затрата времени на сложение будет менее 1 с.

Около 40 лет назад были созданы электронные вычислительные машины, которые способны производить вычисления еще быстрее и, что особенно существенно, брать на себя управление процессом вычисления.

Если требуется сложить 1000 чисел, написанных на бумаге, то использование ЭВМ не дает существенного преимущества по сравнению с калькулятором, поскольку все равно основная часть работы уйдет на ввод этих чисел в ЭВМ путем непосредственного нажатия клавиш, соответствующих цифрам этих чисел.

Иначе обстоит дело при решении задач, в которых требуется осуществить много арифметических операций, но сама задача допускает простое описание.

ЭВМ отличается от простейшего калькулятора большой памятью и возможностью управления процессом вычисления. Это достигается за счет наличия в ЭВМ специальных команд, позволяющих ей самой контролировать процесс вычисления и управлять им.

В настоящее время появились так называемые персональные ЭВМ, габариты и стоимость которых близки к габаритам и стоимости обычного телевизора. Эти персональные ЭВМ могут хранить в памяти сотни тысяч чисел, выполнять сотни тысяч операций в 1 с и изображать результаты вычислений на телевизионном экране.

2. **Ввод программы в ЭВМ**. Управление вычислением в ЭВМ производится автоматически с помощью программы, введенной в память ЭВМ. Человек вводит программу и приказывает начать вычисление (начать выполне-

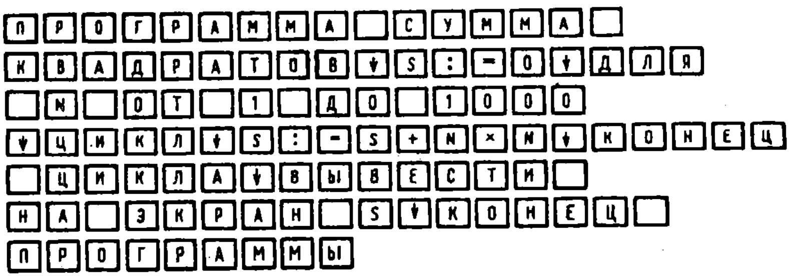


Рис. 145

ние программы). После этого все вычисления до получения результата проводятся без какого-либо участия человека.

Конечно, придуманную человеком программу нужно как-то "сообщить ЭВМ", ввести ее в память. Это делается с помощью клавиатуры, подобной клавиатуре обычной пишущей машинки или клавиатуре калькулятора. Отметим, что в отличие от калькулятора при вычислении на ЭВМ умножение обозначается знаком "×", а деление – знаком "/"; такие обозначения стоят и на клавишах ЭВМ. Например, программа для вычисления суммы квадратов чисел от 1 до 1000 выглядит следующим образом:

ПРОГРАММА СУММА КВАДРАТОВ
$S := 0$
ДЛЯ N ОТ 1 ДО 1000
ЦИКЛ
$S := S + N \times N$
КОНЕЦ ЦИКЛА
ВЫВЕСТИ НА ЭКРАН S
КОНЕЦ ПРОГРАММЫ

Опишем действия, которые нужно произвести для решения задачи с помощью указанной программы, и потом разъясним текст программы.

Ввести в ЭВМ программу. Для этого надо, пользуясь программой, последовательно нажимать клавиши, соответствующие буквам, цифрам и знакам "–", "+", "×", ":", "=", и две специальные клавиши

$\boxed{\downarrow}$ – новая строка, □ – пробел.

Таким образом, в данном случае придется последовательно нажать на клавиши, которые мы для ясности помещаем в квадратики (рис. 145).

По мере нажатия указанных клавиш на экране появляются соответствующие символы – буквы, числа, знаки "–", "+", "×", ":", "=". Знаки $\boxed{\downarrow}$ (новая строка) и □ (пробел) на экране не появляются: нажатие клавиши $\boxed{\downarrow}$ приводит к тому, что последующий текст начинается с новой строки, а нажатие клавиши □ обеспечивает пропуск перед следующим символом или словом. В результате на экране изобразится картина (рис. 146):

ПРОГРАММА СУММА КВАДРАТОВ
$S := 0$
ДЛЯ N ОТ 1 ДО 1000
ЦИКЛ
$S := S + N \times N$
КОНЕЦ ЦИКЛА
ВЫВЕСТИ НА ЭКРАН S
КОНЕЦ ПРОГРАММЫ

(1)

Рис. 146

Объясним подробнее действие знаков □ и [↓] при наборе программы на клавиатуре ЭВМ.

После нажатия клавиш [п], [р], [о], [г], [р], [а], [м], [м], [а] на экране появится слово "ПРОГРАММА". Нажатие следующей клавиши □ заставит ЭВМ сделать на экране пропуск, который отделит слово "ПРОГРАММА" от следующего за ним слова "СУММА". Если эти слова набрать без пробела, то на экране появится слово "ПРОГРАММАСУММА". Впоследствии ЭВМ сообщит, что у вас начало программы пропущено, и выполнять программу не станет.

По мере дальнейшего нажатия на экране повится строка "ПРОГРАММА СУММА КВАДРАТОВ". Следующее за этим нажатие клавиши [↓] приводит к тому, что последующее выражение "S := 0" появится на экране во второй строке (как в (1)). Следующее нажатие клавиши [↓] приводит к тому, что выражение "ДЛЯ N ОТ 1 ДО 1000" появится на экране в третьей строке, и т.д.

Заметим, что часто на ЭВМ имеются специальные клавиши для служебных слов и символов: "ПРОГРАММА", "ЦИКЛ", "КОНЕЦ ЦИКЛА", "ДЛЯ", "ОТ", "ДО", "КОНЕЦ ПРОГРАММЫ", "ВВЕСТИ НА ЭКРАН" и т.д. При нажатии одной такой специальной клавиши на экране появляется соответствующее слово или фраза.

После того как программа целиком появилась на экране, вы проверяете, правильно ли она введена. Предположим, что все правильно. Тогда вы нажимаете клавишу "ПУСК", и через несколько секунд на экране появится ответ.

Возможен и другой случай: ваша программа написана или введена неправильно в нарушение принятых для данной ЭВМ правил программирования. Тогда на экране появится ваш текст программы вместе с указанием на ошибки, которые сумела обнаружить ЭВМ. Например, если вы пропустите последнюю строку, то на экране появится сообщение: "ПРОГРАММА НЕ ЗАКОНЧЕНА".

Дело в том, что ЭВМ воспринимает не произвольный текст, написанный с помощью цифр, букв и символов, которые можно ввести с ее клавиатуры, а только текст, подчиненный правилам, называемым синтаксическими по аналогии с правилами школьной грамматики. Эти правила так же, как и упомянутые выше правила исправления ошибок, описаны в инструкции.

Например, в начале и в конце программы должны стоять слова "ПРОГРАММА", "КОНЕЦ ПРОГРАММЫ"; слова "ЦИКЛ", "КОНЕЦ ЦИКЛА" должны встречаться парами и т.д. Разбиение рассматриваемой программы на строки, обеспечиваемые нажатием клавиши [↓], также вызвано требованиями этой инструкции. Чтобы сделать текст более наглядным для восприятия, начала строк можно смещать вправо, последовательно нажимая клавишу [→].

Если вы видите, что программа содержит ошибки, то можно исправить эти ошибки экономным способом, не вводя заново всю программу. Этот способ описан в соответствующем разделе инструкции.

3. Что происходит в ЭВМ? При выполнении нашей программы промежуточные результаты хранятся в двух ячейках памяти: S — в одной ячейке, N — в другой.

Команда

$S := 0$

требует записать число 0 в ячейку S. Какое-бы число ни стояло в ячейке S до выполнения этой команды, оно исчезнет (будет забыто), а в ячейке окажется число 0. Знак ":=" называется *знаком присваивания*, а вся команда — *командой присваивания*.

Четыре следующие строки программы ЭВМ воспринимает как одну сложную команду, выполняемую за 1000 шагов. Первая из этих четырех строк

ДЛЯ N ОТ 1 ДО 1000

предписывает ЭВМ последовательно для значений N, равных

1; 2; ...; 1000,

выполнить совокупность команд, записанных между строками "ЦИКЛ" и "КОНЕЦ ЦИКЛА". В данном случае эта совокупность состоит из единственной команды присваивания

$S := S + N \times N.$

Знак присваивания ":=" делит строку на две части. В правой части стоит выражение, значение которого надо вычислить. В данном случае надо вычислить значение выражения "$S + N \times N$". В левой части указывается ячейка, в которую надо записать это вычисленное значение. В нашем случае по этой команде число, находящееся в ячейке S, надо сложить с квадратом числа ($N^2 = N \times N$), находящегося в ячейке N, и полученную сумму записать в ячейку S.

Таким образом, при выполнении этого цикла ЭВМ должна:

— на первом шаге (при $N = 1$) число 0, которое находится в ячейке S (после выполнения команды "$S := 0$"), сложить с числом $1 \times 1 = 1$ и полученную сумму 1 записать в ячейку S;

— на втором шаге (при $N = 2$) число 1, которое находится в ячейке S (после выполнения первого шага), сложить с числом $2 \times 2 = 4$ и полученную сумму 5 записать в ячейку S;

— на третьем шаге (при $N = 3$) число 5, которое находится в ячейке S (после выполнения второго шага), сложить с числом $3 \times 3 = 9$ и полученную сумму 14 записать в ячейку S;

. . . .

— на 1000-м шаге (при $N = 1000$) число 337 838 500, которое теперь находится в ячейке S (после выполнения 999-го шага), сложить с числом

$1000 \times 1000 = 1\,000\,000$ и полученную сумму 338 838 500 записать в ячейку S.

Команда

ВЫВЕСТИ НА ЭКРАН S

заставляет ЭВМ вывести на экран ответ — число, находящееся в ячейке S, — 338 838 500.

По строке "КОНЕЦ ПРОГРАММЫ" ЭВМ закончит выполнение программы, а ответ останется на экране.

Для решения нашей задачи вводить в ЭВМ название программы "СУММА КВАДРАТОВ" вовсе необязательно. Эту прогрумму можно было назвать как угодно, например "СУММИРОВАНИЕ" или "001", или вообще никак не называть.

Однако если программа имеет название, например "СУММА КВАДРАТОВ", то ее всегда можно выполнить еще раз или, нажав кнопку " ВЫЗОВ ПРОГРАММЫ" и указав название программы "СУММА КВАДРАТОВ", получить на экране ее текст. Дело в том, что часто удобнее не писать программу заново, а вызвать на экран текст сходной программы и внести в него необходимые изменения.

Нашу программу "СУММА КВАДРАТОВ", например, можно использовать для написания программы вычисления суммы кубов чисел от 1 до 1000. Пользуясь правилами исправления, заменив пятую строку на строку $S := S + N \times N \times N$ и название программы на "СУММА КУБОВ", получим нужную программу.

Разберем еще ряд программ.

```
ПРОГРАММА СУММА ОБРАТНЫХ ВЕЛИЧИН
S := 0
ДЛЯ N ОТ 1 ДО 1000
ЦИКЛ
    S := S + 1/N
КОНЕЦ ЦИКЛА
ВЫВЕСТИ НА ЭКРАН S
КОНЕЦ ПРОГРАММЫ
```

Есть еще один вид команд повторения, понятный ЭВМ. Эта команда используется, когда число повторения заранее неизвестно. Будем решать такую задачу: найти наименьшее N, при котором сумма квадратов чисел от 1 до N больше 10 000.

```
ПРОГРАММА СУММИРОВАНИЕ
N := 0
S := 0
ПОКА S ≤ 10000
ЦИКЛ
N := N + 1
```

```
S := S + N × N
КОНЕЦ ЦИКЛА
ВЫВЕСТИ НА ЭКРАН N
КОНЕЦ ПРОГРАММЫ
```

В этой программе использована команда повторения, начинающаяся со слова "ПОКА". После этого слова написано условие "$S \leqslant 10\,000$", которое проверяется перед каждым шагом команды повторения. Если условие справедливо, то делается очередной шаг команды повторения – последовательно выполняются команды, написанные между строками "ЦИКЛ" и "КОНЕЦ ЦИКЛА". Если условие не справедливо, то работа команды повторения заканчивается и выполняется команда, стоящая после строки "КОНЕЦ ЦИКЛА".

4. Условные команды. Еще одна важная команда, понятная ЭВМ, – условная команда. Будем решать такую задачу: сколько положительных среди чисел $\sin 1$; $\sin 2$; . . . ; $\sin 1000$? Прежде чем писать программу, заметим, что при использовании в программах $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и т.д. углы нужно заключить в скобки, т.е. писать не $\sin\alpha$, а $\sin(\alpha)$, не $\sin 1$, а $\sin(1)$ и т.д.

```
ПРОГРАММА ЧИСЛО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ
N := 0
ДЛЯ I ОТ 1 ДО 1000
ЦИКЛ
   ЕСЛИ sin(I) > 0,
     ТО
     N := N + 1
   КОНЕЦ ЕСЛИ
КОНЕЦ ЦИКЛА
ВЫВЕСТИ НА ЭКРАН N
КОНЕЦ ПРОГРАММЫ
```

В этой программе N является счетчиком, подсчитывающим число положительных чисел среди $\sin(1)$; $\sin(2)$; . . . ; $\sin(100)$. (Сначала счетчик делается равным нулю.) Для каждого I в пределах от 1 до 1000 выполняется условная команда, начинающаяся строкой "ЕСЛИ" и кончающаяся строкой "КОНЕЦ ЕСЛИ". При работе по этой команде вначале проверяется условие, записанное после слова "ЕСЛИ", т.е. условие "$\sin(1) > 0$". Если оно справедливо, то последовательно выполняются команды, написанные между строками "ТО" и "КОНЕЦ ЕСЛИ", т.е. команда увеличения числа N на 1. Если же условие не справедливо, то выполнение условий команды для этого значения I заканчивается.

Разберем еще один пример использования условной команды. Будем решать такую задачу: найти максимальное среди чисел $\sin(2)$, $\sin(3)$, ... , $\sin(1000)$.

```
ПРОГРАММА МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО
M := sin(1)
ДЛЯ I ОТ 2 ДО 1000
ЦИКЛ
   ЕСЛИ M < sin(I),
      ТО
         M := sin(I)
КОНЕЦ ЕСЛИ
КОНЕЦ ЦИКЛА
ВЫВЕСТИ НА ЭКРАН M
КОНЕЦ ПРОГРАММЫ
```

В этой программе M обозначает максимум уже рассмотренных чисел. Вначале рассматривается первое число $\sin(1)$, и M становится равным этому числу. Дальше при рассмотрении каждого нового числа производится проверка: если оно больше максимума рассмотренных ранее чисел, то максимум становится равным новому числу $\sin(I)$. В противном случае M не меняется.

Рассмотрим теперь пример более сложной задачи: найти с точностью до 0,001 положительный корень уравнения

$$x^3 - 10 = 0.$$

Это уравнение имеет положительный корень, так как при $x = 0$ есть левая часть отрицательная, а при $x = 3$ положительная. Вообще если мы найдем два числа $A < B$ такие, что $A^3 - 10 < 0$ и $B^3 - 10 > 0$, то между этими числами уравнение обязательно будет иметь корень. Два таких числа $(A;\ B)$ называют "ВИЛКОЙ", а величину $B - A$ – "ШИРИНОЙ ВИЛКИ".

Мы будем искать корень методом "ВИЛКИ". Этот метод состоит в последовательном построении пар чисел $(A;\ B)$, образующих "ВИЛКУ", таких, что каждая следующая "ВИЛКА" имеет ширину $B - A$, вдвое меньшую ширины предыдущей "ВИЛКИ".

```
ПРОГРАММА ПОИСК КОРНЯ МЕТОДОМ ВИЛКИ
A := 0
B := 3
ПОКА B = A ⩾ 0,002
ЦИКЛ
   x := (A + B)/2
   ЕСЛИ x × x × x – 10 > 0
         ТО B := x
         ИНАЧЕ A := x
КОНЕЦ ЕСЛИ
КОНЕЦ ЦИКЛА
x := (A + B)/2
```

ВЫВЕСТИ НА ЭКРАН x
КОНЕЦ ПРОГРАММЫ

В этой программе использована расширенная форма условной команды. Работает она так. Проверяется условие $x \times x \times x - 10 > 0$, написанное после слова "ЕСЛИ". В том случае, когда условие справедливо, последовательно выполняются команды, написанные между словами "ТО" и "ИНАЧЕ". В нашем случае это одна команда "$B := x$". Если же условие не справедливо, то последовательно выполняются команды, написанные между словами "ИНАЧЕ" и "КОНЕЦ ЕСЛИ".

При работе этой программы числа A и B постоянно образуют "ВИЛКУ".

При каждом повторении происходит "СУЖЕНИЕ ВИЛКИ": точкой x отрезок с концами A, B делится на две половины и в качестве новой "ВИЛКИ" берется либо левая, либо правая половина этого отрезка. Как только ширина "ВИЛКИ" становится меньше 0,002, цикл заканчивается и на экран выводится середина "ВИЛКИ", которая является приближенным значением корня уравнения.

Исторические сведения

Приближенные вычисления создавались вместе с развитием всей математики в связи с потребностями приложений.

Возникла математическая наука – теория приближенных вычислений. Ее начальные элементы изложены выше в этой главе.

Бурное развитие науки и техники приводит к необходимости решать весьма сложные математические задачи. Их обычно решают приближенно, а средствами вычисления служат современные электронно-вычислительные машины (ЭВМ) или – в простых случаях – ручные микрокалькуляторы. Конечно, прежде чем вычислять, появляется необходимость в подготовительной работе (часто очень сложной) в развитии все более и более глубоких методов приближенных вычислений и специальных методов, связанных с обслуживанием ЭВМ.

Большой вклад в приближенное вычисление внес Л. Эйлер.

Большое влияние на развитие теории приближенных вычислений оказал изданный в 1907 г. курс о приближенных вычислениях выдающегося русского ученого математика, механика и кораблестроителя академика Алексея Николаевича Крылова (1863–1945).

В этом курсе он создал единую, глубоко продуманную систему рациональной организации численных расчетов, встречающихся в различных областях физики и техники.

А.Н. Крылов в 1942 г. писал:

"Во всех справочниках, как русских, так и иностранных, рекомендуемые приемы численных вычислений могут служить образцом, как эти вычисления делать не надо . . . . Вычисление должно производиться с той степенью точности, которая необходима для практики, причем всякая неверная цифра составляет ошибку, а всякая лишняя цифра – половину ошибки . . . Приближенное число следует записать так, чтобы все цифры, кроме последней, были бы надежными, т.е. верными . . . "

Очень часто приходится решать уравнения приближенно. Существует много методов приближенного нахождения корней уравнения. Широко известен метод Ньютона.

Один из лучших методов принадлежит Н.И. Лобачевскому. В прошлом веке трудами П.Л. Чебышева зародилась родственная приближенным методам наука – теория приближений функций. Советская математика занимает в ней ведущее место.

Создателем первых советских электронных вычислительных машин является академик С.А. Лебедев. Под его руководством созданы первая советская цифровая вычислительная машина МЭСМ (малая электронная счетная машина) и ряд быстродействующих вычислительных машин БЭСМ (большая электронная счетная машина).

ОТВЕТЫ

§ 1

П. 1. 1. 41 – простое число, а остальные составные составные: $57 = 3 \cdot 19$; $1121 = 19 \cdot 59$; $793 = 13 \cdot 16$.

П. 2. 1. а) 64; б) 125; в) 343; г) 1 000 000. 2. а) $256 = 2^8$; б) $1024 = 2^{10}$.

П.3. 1. а) 1; 17; б) 1; 3; 5; 9; в) 1; 113; г) 1; 2; 4; 7; 14; 17; 28; 34; 68; 119; 238; 476; д) 1; 2; 4; 8; 16; 32. 2. а) 19; б) 2; 3; в) 2; 7; г) 2; 29.

§ 2

П. 1. 1. Дробь $\frac{17}{10}$ несократимая; $\frac{396}{591}$ сократимая. 2. а) 73,98153; б) 0,01291; в) 0,198. 3. а) $\frac{37}{1000}$; б) $\frac{2503}{1000}$; в) $\frac{713}{1000}$.

П. 2. 1. а) 1,55; 0,14; 0,085; б) 1,6; 1,5; 0,26; в) 0,02; 0,6; 0,2. 2. а) $\frac{7}{20}$; $\frac{201}{100}$; $\frac{361}{50}$; $\frac{253}{250\,000}$. 3. Нельзя разложить в конечные десятичные дроби $\frac{1}{3}$; $\frac{12}{35}$; $\frac{5}{300}$; $\frac{1}{7}$; можно разложить $\frac{24}{15} : \frac{24}{15} = \frac{8}{5} = 1{,}6$.

П. 3. а) 0,(8); б) 0,(12); в) 0,(017); г) 6,(0); д) 0,(45).

П. 4. 1. а) 0,(4); б) 0,68; в) 0,34(12); г) 0,3125. 2. а) 0,175(0); б) 19,(0); в) 0,(142857); г) 0,(27); 3. а) $\frac{47}{2}$; б) $\frac{1058}{45}$; в) $\frac{56}{495}$; г) $\frac{19}{1850}$.

§ 3

П. 1. 1. а) $-\frac{5}{25} < -\frac{1}{7}$; б) $-\frac{13}{24} > -\frac{17}{36}$; в) $-\frac{498}{497} < -\frac{499}{498}$. 2. а) $1\frac{53}{546}$; б) $\frac{295}{392}$; в) 15; г) $\frac{5}{14}$.

П. 2. 2. а) −0,(428571); б) 0,5625(0); в) −5,6(7); г) 0,(0). 3. а) $-\frac{157}{495}$; б) $\frac{2}{1}$; в) $-\frac{311}{90}$; г) −0.

П. 3. 3. а) 3,17(2); б) 0,00(1); в) 3,17(2); г) 0.

П. 4. 1. $f < l < c < b < a = d$. 2. $b > d > l > c > a$.

П. 5. 1. $a + b \approx 2{,}8$; 2,92; 2,93353; $a - b \approx 1{,}4$; 1,36; 1,35777. 2. $ab \approx 19{,}3$; $ab \approx$ $\approx 19{,}54$; $\frac{a}{b} \approx 0{,}228$; $\frac{a}{b} \approx 0{,}2310$.

П. 7. 1. а) $c = 0{,}01$; б) $c = 2{,}13$; в) $c = 0$; г) $c = -2$.

§ 4

П. 1. 1. а) 1; б) 343. 2. а) a^{10}; б) a^{12}. 3. а) $a^{50} = (a^2)^{25}$; б) $a^{50} = (a^5)^{10}$; в) $a^{50} = (a^{10})^5$; г) $a^{50} = (a^{25})^2$. 4. а) $(ab)^8$; б) 6^3; в) $(xyz)^4$. 5. а) $7^{10} = 7^2 \cdot 7^8$; б) $a^6 = a^2 \cdot a^4$; в) $(cd)^7 = c^7 d^7$. 6. а) $5^6 = 5 \cdot 5^2 \cdot 5^3$; б) $b^5 = b^2 \cdot b \cdot b^2$; в) $(mn)^4 = (mn)^2 m^2 n^2$. 7. а) $(abcd)^4 = a^4 b^4 c^4 d^4$; б) $(ab^2)^3 = a^3 b^6$; г) $6^2 = 2^2 \cdot 3^2$.

П. 2. 1. а) 5; б) $\frac{1}{10}$; в) 1. 2. а) 5^{-2}; б) 7^3; в) 1.

П. 3. 1. а) $a^{50} = (a^{-2})^{-25}$; б) $a^{50} = (a^{-5})^{-10}$; в) $a^{50} = (a^{10})^5$; г) $a^{50} = (a^{-25})^{-2}$. 2. а) $(ab)^{-3}$; б) $\left(\frac{7}{2}\right)^3$. 3. а) $a^6 b^{-15}$; б) $a^{14} b^{-4}$; в) $a^{12} b^{20}$.

П. 4. а) $2{,}74 \cdot 10^1$; б) $3{,}821 \cdot 10^3$; в) $1{,}1 \cdot 10^{-3}$.

§ 5

П. 1. 1. а) Не имеет смысла; б) $-\frac{3}{7}$; в) $\frac{54}{95}$.

П. 2. 1. abc. 2. а) $5k$, где k – целое число; б) $5k + 3$, где k – целое неотрицательное число.

П. 4. 1. а) a^6; б) a^{10}. 2. а) $\alpha^3 \beta^2$; 2) $36a^3$.

П. 5. 1. а) $abcd$; б) $-\frac{1}{500} x^3 y^2 z$; в) $-\frac{3}{25} x^5 y^2 z$; г) $\alpha\beta$; д) 0; е) $-\frac{7}{13}$; ж) 0. 2. а) $15abc$; коэффициент равен 15, степень равна 3; б) $abcd$; коэффициент равен 1, степень равна 4; в) $-5\alpha\beta\gamma$; коэффициент равен -5, степень равна 3.

П. 6. 1. а) Подобны одночлены a^2bc, $2abca = 2a^2bc$, $-3bca^2 = -3a^2bc$; б) подобны одночлены $\alpha^3\beta$, $-\alpha\beta\alpha^2 = -\alpha^3\beta$, $7\alpha^2\beta\alpha = 7\alpha^3\beta$. 2. а) 0; б) $7\alpha^3\beta$; в) 0. 3. а) $-4abc$; б) 0; в) $-\alpha$.

§ 6

П. 1. а) $2x^2$; $-3xy$; $-x^3y$; $7y$; б) $-x^7$; $-x^5$; $-2x^3$; $-3x$.

П. 2. а) $-x - x^2y$; б) 0.

П. 3. 1. Стандартный вид имеет многочлен а). 2. а) $-a^3b + 3a^2 - 4b$; степень этого многочлена равна 4; б) $3x^5y + x^5 - 7y^2 + 2x - 1$; степень этого многочлена равна 6; в) $-\alpha\beta\gamma - 7\alpha^2 + 4\alpha\gamma$; степень этого многочлена равна 3.

П. 4. 1. а) $x^2 + 4x + 1$; б) $a^5 - a^3 + 8a^2 + a$; в) $x^2 - x + 5$; г) 0. 2. а) $-(-x^2 + y^2) + (2x - 1)$; б) $-(-9y^2 + 1) + (-x^2 - 6y)$; в) $-(a^3 + 3a^2) + (4 - a)$.

П. 5. 1. а) $-a^2b^2c - a^2bc^2 - ab^2c^2$; б) $a^2c + 12ac^2$; в) $-2a^2b - 4ab^2 - 8b^3$. 2. а) $a(a^2 + 4b^2)$; б) $-2b(a^2 - 2ab + 2b^2)$; в) $-5x^2y(xy + 1)$.

П. 6. а) $a^3 + 8b^3$; б) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; в) $a^4 - 16b^4$.

П. 7. а) $x^2y + 2x$; б) $a^2 + b^2 - c^2$; в) $4\alpha\beta + 2\alpha\gamma$.

П. 8. а) -19; б) $-4\frac{1}{4}$; в) -5; г) 3; д) $\frac{11}{15}$; е) 7.

П. 9. 1. а) Да; б) да. 2. а) Да; б) да.

§ 7

П. 1. 1. а) $a^2 + 4ab + 4b^2$; б) $4x^2 + 12xy + 9y^2$; в) $10x^2 + 12xy + 10y^2$. 2. а) $(a+2c)^2$; б) $(1+x)^2$; в) $(ac+d)^2$.

П. 2. 1. а) $x^2 - 4xy + 4y^2$; б) $\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta\gamma + \gamma^2$; в) $25x^2y^2 - 20xy + 4$. 2. а) $(a-2b)^2$; б) $(x-2)^2$; в) $(a^2-1)^2$.

П. 3. а) $(x-2)^2+1$; б) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$; в) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$.

П. 4. 1. а) $x^3 + 9x^2z + 27xz^2 + 27z^3$; б) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$; в) $8b^3 + 36b^2 + 54b + 27$. 2. а) $(2x+y)^3$; б) $(\alpha+1)^3$; в) $(3+b)^3$.

П. 5. 1. а) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; б) $8a^3 - 3a^2b + 54ab^2 - 27b^3$; в) $a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3$. 2. а) $(1-x)^3$; б) $(a-2)^3$; в) $(2a-3b)^3$.

П. 6. 1. а) $x^2 - 4$; б) $a^4 - 1$; в) $4\alpha^2 - 9\beta^2$. 2. а) $(2a+1)(2a-1)$; б) $(a+b)(a-b)$; в) $(3x^2+2)(3x^2-2)$; г) $(x^2+4)(x^2-4)$.

П. 7. 1. а) $27x^3 + y^3$; б) $a^{12} + 1$; в) $8\alpha^3 + 27$. 2. а) $(a^2+b)(a^4 - a^2b + b^2)$; б) $(3\alpha+2\beta)(9\alpha^2 - 6\alpha\beta + 4\beta^2)$.

П. 8. 1. а) $8a^3 - 27b^3$; б) $a^6 - 1$; в) $x^3y^3z^3 - t^3$. 2. а) $(a-2b)(a^2+2ab+b^2)$; б) $(2a^2-3)(4a^4+6a^2+9)$; в) $(xy-z)(x^2y^2+xyz^2+z^4)$.

П. 9. 1. а) $a^8 - 17a^4 + 16$; б) $a^2 + b^2 - c^2$; в) $a^8 - b^8$. 2. а) $(y-5+2x) \times (y-5-2x)$; б) $3ab(a+b)$; в) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)$.

П. 10. а) $(a+c)(b+d)$; б) $(a-b+c)(a-b-c)$; в; $(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)$; г) $(a+b)(a+b+c)$; д) $(3y-1+x)(3y-1-x)$; е) $(x^2+y-1)(x^2-y+5)$.

§ 8

П. 1. а) $a-b$; б) $a^2 - ab + b^2$; в) $\alpha - \beta$.

П. 2. 1. а) $2 \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; $4 \cdot \frac{ab}{a^2-b^2}$; б) $\frac{3\alpha^3 - \alpha^2\beta + 2\beta^3}{2\alpha^2}$; $\frac{-\alpha^3 - \alpha^2\beta - 2\beta^3}{2\alpha^2}$. 2. а) $\frac{(a-b)b}{a}$; б) $\frac{1}{a^4+a^2b^2+b^4}$.

П. 3. а) $\frac{a(a-b)}{b(a-b)}$ и $\frac{b^2}{b(a-b)}$; б) $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2-\beta^2}$ и $\frac{\alpha^3}{\alpha^2-\beta^2}$.

П. 5. 1. а) b; б) α. 2. Не имеют смысла выражения б), в), г).

П. 6. 1. а) $a \neq b$ и $a \neq 0$; б) $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $x \neq -y$; в) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ и $\alpha \neq \beta$. 2. а) $\frac{400}{111}$; б) $28\frac{1}{11}$; в) $-\frac{5}{3}$.

П. 7. а) $a \neq b$ и $a \neq -b$; б) $a \neq b$ и $a \neq -b$.

§ 9

П. 1. 2. а) $\frac{7}{3}$; б) 0; в) $-\frac{5}{4}$; г) $-\frac{15}{4}$.

П. 2. 2. а), б), в) – да; г), д) – нет.

П. 3. а) 7; б) $-\frac{6}{5}$; в) нет корней; г) −6; д) любое действительное число – корень этого уравнения; е) 0; ж) $\frac{5}{3}$; з) $\frac{4}{5}$; и) 2.

П. 4. 1. 10. 2. 20 км/ч.

§ 13

П. 1. а) $\frac{1}{13}$ и $-\frac{1}{13}$; б) 25 и −25; в) 1000 и −1000; г) 1,2 и −1,2; д) 6,5 и −6,5; е) 0,16 и −0,16; ж) 0; з) нет.

П. 2. 1. а) $\sqrt{3}$; б) 0,7; в) $\frac{1}{3}$; г) 0; д) нет. 2. а) $\frac{1}{13}$; б) 6,25; в) 0,11.

П. 4. 1. а) 1,732; б) 2,236; в) 2,645. 2. 1,41421.

П. 5. 1. а) $11\sqrt{3}$; б) $7\sqrt{3}$; в) $3\sqrt{26}$; г) $10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. −14; б) $\sqrt{2}$.

§ 14

П. 1. а) $(x+5)(x+3)$; б) $(2x-1)^2$; в) не разлагается, так как отрицателен дискриминант.

П. 2. 1. а), б), в) квадратные; г) не квадратные. 2. а) Не являются; б) являются. 3. а), б) равносильны; в) не равносильны.

П. 3. а) $x_1=x_2=0$; б) нет корней; в) $x_1=\sqrt{\frac{1}{7}}$, $x_2=-\sqrt{\frac{1}{7}}$; г) нет корней; д) $x_1=\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x_2=-\sqrt{\frac{5}{3}}$; е) $x_1=0, x_2=\frac{4}{3}$; ж) $x_1=0$, $x_2=-2$.

П. 4. а) $x_1=1$, $x_2=\frac{4}{3}$; б) $x_1=1$, $x_2=6$; в) $x_1=2$, $x_2=\frac{3}{2}$; г) $x_1=x_2=\frac{3}{5}$.

П. 5. а) $x_1=9$, $x_2=-1$; б) $x_1=x_2=3$; в) нет корней.

П. 6. а) x^2+x; б) $x^2-\frac{13}{4}x-3$; в) x^2+2x-6.

П. 7. 1. 11 и 12. 2. 32.

П. 8. 1. а) $7-2i$; б) $3+i$; в) $-18-38i$; г) $\frac{11}{10}+\frac{7}{10}i$. 2. а) $x_1=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{15}}{4}i$, $x_2=\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{15}}{4}i$; б) $x_1=-3+i$, $x_2=-3-i$.

§ 15

П. 2. а) $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{2}$, $x_4=-\sqrt{2}$; б) нет корней; в) $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$; г) $x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$; $x_2=-\frac{2}{\sqrt{3}}$; д), е) нет корней.

П. 3. а) $x_1=1$, $x_2=-3$; б) $x_1=1$, $x_2=-6$, $x_3=\frac{-5+\sqrt{51}}{2}$, $x_4=\frac{-5-\sqrt{51}}{2}$; в) $x_1=1$, $x_2=-1$; г) $x_1=2$, $x_2=3$.

П. 4. а) $x_1=\sqrt{3}, x_2=-\sqrt{3}, x_3=-1$; б) $x_1=1$, $x_2=-1, x_3=3, x_4=-3$; в) $x_1=0$.

П. 5. а) $x=-3$; б) $x=-1$; в) нет корней.

П. 6. а) $x_1=2$, $x_2=-4$; б) $x_1=\sqrt{5}$, $x_2=-\sqrt{5}$; в) $x=-\frac{5}{2}$.

П. 7. а) $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{2}$; б) нет решений.

П. 8. 1. 14 км/ч. 2. 150 метров в месяц.

§ 16

П. 1. 3. (0; 1); (−1; 0); (1; 2); (2; 3); (3; 5). 4. Бесконечно много.

П. 2. 2. а) Не является; б) является.

П. 3. а) $\left(-\frac{25}{17}; \frac{23}{17}\right)$; б) $\left(\frac{1}{6}; -\frac{3}{2}\right)$.

П. 4. а) $\left(\frac{2}{9}; \frac{23}{9}\right)$; б) $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; в) бесконечно много.

П. 7. 1. а) 18 и 13. 2. 40 м и 25 м.

§ 17

П. 2. 1. а) $y = \frac{1}{2}x$; б) $y = -3x$; в) $y = -\frac{1}{2}x$; г) $y = 5x$.

П. 3. 2. а) $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$; б) $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; в) (−3; 0); г) (2; 0); д) (8; 0); е) $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$. 3. Параллельные прямые а) и б). 4. а) $y = 2x + 3$; б) $y = 2x + 13$; в) $y = \frac{3}{2}x + 3$; г) $y = -x + 3$.

П. 4. 1. а) $s = 4t + 5$; б) $s = 6t + 2$.

П. 5. а) (0; 1); б) нет решений; в) решениями являются все пары координат $(x; y)$ точек прямой $y = -3x + 1$.

§ 18

П. 2. а) $\left(-\frac{11}{13}; -\frac{6}{13}; \frac{17}{13}\right)$; б) (7; 5; 5).

П. 3. Расстояние от A до B равно 7,2 км; скорость течения реки 0,8 км/ч; собственная скорость лодки 4 км/ч.

П. 4. а) (7; 10); (−3; 0); б) (3; −3; 1); (3; 1; −3).

П. 5. 1. 3 и 5. 2. 5 и 20.

П. 6. 1. Скорость мотоциклиста 50 км/ч; скорость автомашины 75 км/ч; автомашина вышла на 30 мин позднее мотоциклиста. 2. Длина пути 8 км, скорость 1 км/ч. 3. Расстояние равно 290 км; скорость течения притока 2 км/ч.

§ 19

П. 2. 1. а) $y = (x-1)^2 - 1$; б) $y = -(x-1)^2 - 1$; в) $y = -2(x-1)^2 - 1$; г) $y = 2(x-1)^2 - 1$.

§ 21

П. 1. а) $(-\infty; 5)$; б) $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$; в) $\left(-\infty; -\frac{7}{2}\right)$.

П. 2. а) $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$; б) $(-\infty; -4)$; в) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

П. 3. а) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $(-\infty; +\infty)$.

П. 4. а) $\left(-\frac{5}{3}; 3\right)$; б) нет решений; в) $(-\infty; -7)$.

§ 22

П. 1. 2. а), в) является; б) не является.

П. 2. а) $\left(-\frac{1}{3};\ 2\right)$; б) $(-\infty;\ -1)$ и $(2;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -2)$ и $(3;\ +\infty)$.

П. 3. а) $\left(-\infty;\ \frac{4}{5}\right)$ и $\left(\frac{4}{5};\ +\infty\right)$; б), в) нет решений.

П. 4. а) нет решений; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $(-\infty;\ +\infty)$.

П. 5. а) $-1 < x < \frac{7}{2}$; б) нет решений.

§ 23

П. 1. а) $(1;\ 2)$ и $(3;\ +\infty)$; б) $(-3;\ -1)$ и $(1;\ 2)$; в) $(-2;\ -1)$ и $(1;\ 4)$.
П. 2. а) $(-\infty;\ -1)$ и $(2;\ 5)$; б) $(-\infty;\ -1)$ и $(2;\ 4)$; в) $(-2;\ 1)$ и $(2;\ 3)$.
П. 3. а) $(-5;\ -3)$; $(-2;\ -1)$ и $(0;\ 1)$; б) нет решений; в) $(-\infty;\ -2)$; $(-1;\ 1)$ и $(2;\ \infty)$.

П. 4. а) $\left[-\frac{5}{2};+\infty\right)$; б) $(-\infty;-3]$ и $[7;+\infty)$; в) $[-4;-1]$ и $(5;\ +\infty)$.

§ 24

П. 5. 4. а), в), д) возрастает на $-\infty < x < 0$, убывает на $0 < x < +\infty$; б), г) убывает на $-\infty < x < 0$ и на $0 < x < +\infty$. 5. Четные функции: $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^4}$, $y = \frac{1}{x^6}$; нечетные функции: $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x^5}$. 6. Не определены для $x = 0$.

§ 25

П. 1. 3. 10.

П. 3. 1. а) $2\sqrt[3]{4}$; б) $2\sqrt[5]{25}$; в) $97 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{12}}$; г) $2\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{75} + 2\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{5}$.
2. а) $2\sqrt[4]{5}$; б) $3\sqrt[4]{5}$; в) $12 - 3\sqrt{13}$; г) $-0{,}1$.

П. 4. 1. а) $\sqrt[8]{2^7}$; б) $\sqrt[6]{2}$; в) $4\sqrt[12]{2^7}$. 2. а) $\sqrt[6]{9}$, $\sqrt[6]{8}$ и $\sqrt[6]{5}$; б) $\sqrt[8]{625}$, $\sqrt[8]{225}$ и $\sqrt[8]{50}$.
П. 5. 1. а) 1,442; б) 1,709; в) 1,912. 2. а) 1,1; б) 1,4.

§ 27

П. 2. 1. а) 32; б) 9; в) 25. 2. а) $3^{\sqrt{5}} > 9$; б) $5^{\sqrt{2}} < 5^{1,5}$.
П. 3. 1. а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{7}{2}$; в) $\frac{3}{4}$; г) -6; д) -5. 2. а) 6; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{20}{9}$.

§ 29

1. $a_5 = -45{,}2$. 2. $S_{30} = 1230$. 3. Да, $34 = a_{28}$, $a_1 = -47$, $d = 3$.

§ 30

П. 1. 1. $a_{15} = -10^{11}$. 2. $S_{16} = \dfrac{2^{16}-1}{50}$.

П. 3. 1. Скорость велосипедиста 30 км/ч; скорость мотоцикла 40 км/ч; скорость автомобиля 50 км/ч. 2.25.

§ 31

П. 1. 2. а) $\alpha = \frac{3}{4}\pi$; б) $\alpha = -6\pi$; в) $\alpha = 57\frac{2}{9}\pi$. 3. а) $\alpha = 600°$; б) $\alpha = -2376°$; в) $25\frac{5}{7}°$.

П. 2. 1. а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{1}{2}$.

П. 3. 1. а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; б) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$. 2. а) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; б) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$.

П. 4. 1. а) 0; б) 0; в) -1; г) $-\sqrt{3}$. 2. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{8}}$.
3. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$. 4. $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}}$. 5. $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§ 32

П. 1. 1. а) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$; в) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; г) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.
2. $\frac{\sqrt{15}}{8}$. 3. $\frac{3-8\sqrt{6}}{25}$.

П. 2. 2. а) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; в) $-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; г) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.
3. а) $-2-\sqrt{3}$; б) $2+\sqrt{3}$.

П. 3. 1. а) $\sqrt{2}\cos 25°$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\cos 5°$.

П. 4. 1. $\sin 2\alpha = -\frac{4}{9}\sqrt{2}$.

§ 33

П. 2. 1. С недостатком: а) 37,578; б) 0,002; в) $-117{,}010$; г) 0,399; д) $-31{,}722$; е) 0,000; ж) 32,100; з) $-2{,}379$; с избытком: а) 37,579; б) 0,003; в) $-117{,}009$; г) 0,400; д) $-37{,}721$; е) 0,001; ж) 32,101; з) $-2{,}378$. 2. а) 37,579; б) 0,003; в) $-117{,}010$; г) 0,400; д) $-37{,}721$; е) 0,000; ж) 32,100; з) $-2{,}379$.

П. 3. 1. а) 0,1; б) 0,1; в) 1; г) 1. 2. а) $71\,523 \approx 71\,500$; абсолютная погрешность не больше 100; относительная погрешность не больше 0,01; б) $0{,}568 \approx 0{,}5$; абсолютная погрешность не больше 0,1; относительная погрешность не больше 1; в) $0{,}00328 \approx 0{,}003$; абсолютная погрешность не больше 0,001; относительная погрешность не больше 1.

П. 4. 1. а) $\alpha + \beta \approx 19{,}346$ и $\alpha - \beta \approx 5{,}370$; б) $\alpha + \beta \approx 7{,}991$ и $\alpha - \beta \approx 6{,}353$; в) $\alpha + \beta \approx 14{,}430$ и $\alpha - \beta \approx 7{,}856$; г) $\alpha + \beta \approx 4{,}352$ и $\alpha - \beta \approx 1{,}894$; д) $\alpha + \beta \approx -3{,}902$ и $\alpha - \beta \approx 38{,}370$. Погрешность приближения 0,001. 2. а) $\alpha + \beta \approx 5{,}25$; $\alpha - \beta \approx 1{,}07$; б) $\alpha + \beta \approx 14{,}34$; $\alpha - \beta \approx 20{,}31$; в) $\alpha + \beta \approx -9{,}98$; $\alpha - \beta \approx 4{,}02$. 3. $a \cdot b \approx 0{,}343$, $a : b \approx 0{,}0444$. 4. $a \cdot b \approx 9{,}774$, $a : b \approx 6{,}413$.

§ 34

П. 1. 1. 8,5. 2. $0{,}38 + 3{,}79 + 7{,}18 + 11{,}53 + 2{,}24 + 4{,}25 + 9{,}10 = 38{,}47$. 3. Погрешность не превышает 0,0035.

П. 2. 1. 0,343. 2. 9,774.

П. 3. 1. 0,0444. 2. 6,413.

§ 35

П. 1. 1. а) 10; б) 100; в) 1000; г) 10 000; д) 100 000. 2. а) 5; б) 32; в) 48; г) 7.

П. 2. а) 10 111; б) 111 110; в) 11 101 000; г) 110 100 101.

П. 3. 1. а) 1110; б) 11; в) 100; г) 101. 2. а) 10; б) 10; в) 1110; 3. а) 1111; б) 100 011; в) 11 110.

Учебное издание

НИКОЛЬСКИЙ Сергей Михайлович
ПОТАПОВ Михаил Константинович

АЛГЕБРА

Пособие для самообразования

Зав. редакцией *С.И. Зеленский*
Редактор *Т.А. Панькова*
Художественный редактор *Г.М. Коровина*
Технические редакторы *С.В. Геворкян, С.Н. Баронина*
Корректоры *Н.П. Круглова, Т.В. Обод, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 41045

Сдано в набор 01.11.89. Подписано к печати 23.01.90
Формат 60 X 88/16. Бумага книжно-журнальная
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 25,48. Усл.кр.-отт. 25,48. Уч.-изд.л. 23,74
Тираж 400000 (1-й завод 1–100000)
Тип. зак. 145. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Типография им. Котлякова
издательства "Финансы и статистика"
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
195273 Ленинград, ул. Руставели, 13