КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

С.М. НИКОЛЬСКИЙ

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

с добавлением
Н. П. КОРНЕЙЧУКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1974

517.2
Н 64
УДК 517

Квадратурные формулы. С. М. Никольский, изд. 2-е, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974.

Книга С. М. Никольского «Квадратурные формулы» посвящена некоторым общим вопросам теории квадратурных формул: оценке приближений, выбору наилучшей формулы и др.

Основной текст книги рассчитан на широкие круги инженеров, научных работников и студентов, знакомых с математическим анализом в объеме программы технических вузов.

Дополнительные вопросы, чтение которых требует знания элементов функционального анализа, набраны петитом.

Второе, переработанное издание содержит добавление Н. П. Корнейчука.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», с изменениями, 1974.

$Н \frac{20204-136}{053(02)-74}$ 59-74

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание этой книги состоит из двух частей.

Первая часть есть некоторое улучшение первого издания. Существенных изменений здесь не произошло — исправлены лишь замеченные недочеты, в отдельных местах упрощены доказательства, уточнены числовые константы.

Вторая часть написана Н. П. Корнейчуком и представляет собой дополнение к первой. Она отражает наиболее важные результаты, непосредственно связанные с идеями, изложенными в первом издании, полученные в математической литературе уже после выхода в свет первого издания.

Самому Николаю Павловичу Корнейчуку и его ученикам — научным сотрудникам Днепропетровского государственного университета — принадлежит существенная доля среди этих результатов.

Я выражаю Николаю Павловичу свою глубокую благодарность за это дополнение, значительно повысившее актуальность книги.

В свою очередь мы оба выражаем благодарность А. М. Полосуеву за участие в улучшении книги.

Я благодарю также Е. Я. Ремеза, обратившего мое внимание на неполноту некоторых приведенных в книге числовых материалов, и Ю. Я. Доронина за помощь по их проверке и исправлению.

С. М. Никольский

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Пусть нам надо вычислить приближенно определенный интеграл от некоторой положительной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Очень простое приближенное выражение интеграла представляет собой величина площади прямоугольника, основанием которого служит отрезок $[a, b]$, а высотой ордината $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ графика $f(x)$ в средней точке $\frac{a+b}{2}$ этого отрезка (рис. 1).

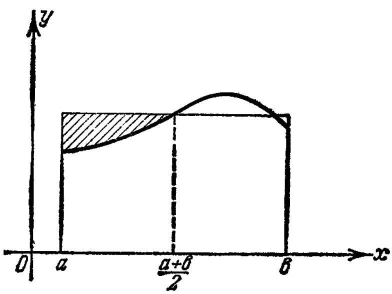

Рис. 1.

Мы получили, таким образом, приближенную квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad (1.1)$$

имеющую смысл для любой непрерывной функции, не обязательно положительной.

Левая часть здесь равна правой, если функция $f(x)$ есть произвольная линейная функция $Ax+B$, где A и B — постоянные. Мы будем говорить в связи с этим, что наша приближенная квадратурная формула точна для любой функции $f(x)$, представляющей собой произвольную линейную функцию.

Мы рассмотрели простейшую квадратурную формулу прямоугольников. Несколько более сложной является формула трапеций. В случае положительной функции $f(x)$ она сводится к тому, что определенный интеграл заменяется числом, равным площади трапеции, сторонами которой является отрезок $[a, b]$ оси Ox, отрезки прямых $x=a$ и $x=b$ и хорда AB графика функции (рис. 2).

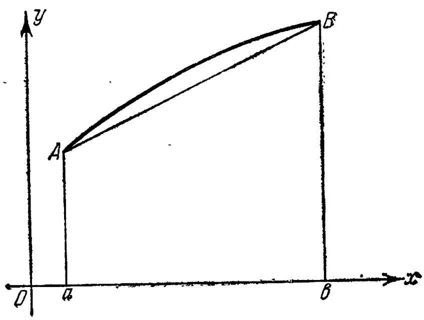

Рис. 2.

Таким образом, квадратурная формула трапеций представляет собой следующее приближенное выражение:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}(b-a)\,[f(a)+f(b)], \qquad (1.2)$$

имеющее смысл для произвольной непрерывной (не обязательно положительной) функции.

Квадратурная формула трапеций (1.2), так же как формула прямоугольников, точна для всех линейных функций, $y=Ax+B$, графики которых представляют собой всевозможные прямые.

Наконец, мы рассмотрим еще одну широко распространенную на практике квадратурную формулу —

формулу Симпсона. Она (в случае положительной функции) сводится к тому, что определенный интеграл приближенно выражается площадью фигуры, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и параболой второй степени, проходящей через точки графика функции $f(x)$, имеющие абсциссы a, $\frac{a+b}{2}$ и b (рис. 3).

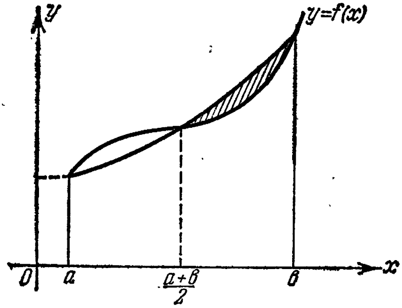

Рис. 3.

Эта формула имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}. \quad (1.3)$$

Из способа получения формулы Симпсона непосредственно вытекает, что она точна для всех многочленов

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (1.4)$$

второй степени. Графики этих многочленов представляют собой всевозможные параболы второй степени, оси которых направлены параллельно оси Oy.

Более того, хорошо известно, что формула Симпсона на самом деле является еще лучшей: она точна не только для многочленов второй степени, но и для всех многочленов

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

третьей степени.

В самом деле, мы можем представить многочлен P_3 в виде

$$P_3(x) = P_2(x) + a_3x^3,$$

где $P_2(x)$ определяется равенством (1.4). Тогда

$$\int_a^b P_3(x)\,dx = \int_a^b P_2(x)\,dx + a_3\int_a^b x^3\,dx =$$

$$= \int_a^b P_2(x)\,dx + \frac{a_3}{4}(b^4 - a^4).$$

Но уже известно, что

$$\int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left\{P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b)\right\}.$$

С другой стороны, величину $\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4)$ можно формально записать в виде

$$\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{6}\left[(a_3x^3)_{x=a} + 4(a_3x^3)_{x=\frac{a+b}{2}} + (a_3x^3)_{x=b}\right].$$

Отсюда следует равенство

$$\int_a^b P_3(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[P_3(a) + 4P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_3(b)\right].$$

Мы рассмотрели три квадратурные формулы. Первые две из них — формулы прямоугольников и трапеций — точны для многочленов первой степени. Третья — формула Симпсона — точна для многочленов третьей степени.

Этими конкретными примерами мы ограничимся. Скажем только, что можно построить бесчисленное множество квадратурных формул, точных для всех многочленов

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$$

любой наперед заданной степени m. Источником получения таких формул могут служить классические *интерполяционные многочлены Лагранжа.*

Зададим на отрезке $[a, b]$ произвольную систему из $m+1$ точек:

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leqslant b,$$

которые мы будем называть *узлами*, и поставим задачу: требуется построить многочлен $P_m(x)$ степени m, совпадающий с заданной функцией $f(x)$ в этих

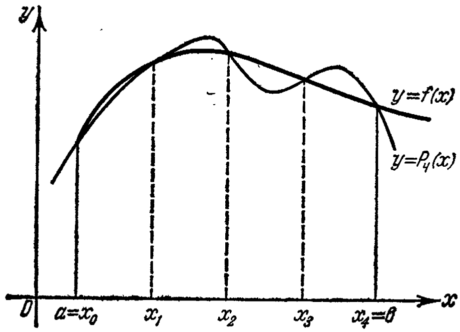

Рис. 4.

точках. Требуется, таким образом, чтобы одновременно выполнялись равенства

$$f(x_k) = P_m(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

Как известно, искомый многочлен, носящий название *многочлена Лагранжа*, будет единственным и выражается следующей формулой:

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} Q_m^{(k)}(x) f(x_k),$$

где $Q_m^{(k)}$ представляет собой многочлены степени m, определяемые равенствами

$$Q_m^k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_m)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_m)}.$$
$$(k = 0, 1, \ldots, m).$$

На рис. 4 мы схематически изобразили графики функции $f(x)$ и ее интерполяционного многочлена Лагранжа четвертой степени, совпадающего с $f(x)$ в пяти равноотстоящих точках отрезка $[a, b]$.

Интерполяционным многочленом Лагранжа можно воспользоваться для получения квадратурной формулы, точной для многочленов степени m. Действительно, в качестве приближенного выражения определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно взять определенный интеграл на этом отрезке от интерполирующего функцию $f(x)$ многочлена $P_m(x)$. В результате мы получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_m(x)\,dx = \sum_0^m f(x_k) \int_a^b Q_m^{(k)}(x)\,dx$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_0^m p_k f(x_k), \tag{1.5}$$

где

$$p_k = \int_a^b Q_m^{(k)}(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, m). \tag{1.6}$$

Приближенное равенство (1.5) определяет некоторую квадратурную формулу, точную для многочленов степени m.

Многие классические квадратурные формулы имеют такое происхождение.

Например, формулу Симпсона мы получим, если в (1.5) и (1.6) положим $m = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$.

Нетрудно видеть, что, наоборот, если при помощи заданных различных между собой точек x_k отрезка $[a, b]$ и чисел p'_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ получена квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_0^m p'_k f(x_k), \tag{1.7}$$

точная для всех многочленов $P_m(x)$ степени m, то эта формула вытекает, как было показано выше, из соответствующей интерполяционной формулы Лагранжа

$$f(x) \approx \sum_0^m Q_m^{(k)}(x)\, f(x_k),$$

построенной по узлам x_k.

В самом деле, наряду с формулой (1.7) рассмотрим квадратурную формулу (1.5), где числа p_k определяются при помощи равенств (1.6). Обе формулы определяются одной и той же системой узлов x_k ($k = 0, 1, \ldots, m$), и обе они точны для многочленов степени m *), в частности, для функций x^l ($l=0, 1, \ldots, m$). Отсюда следует, что должны выполняться равенства

$$\sum_0^m (p_k - p'_k) x_k^l = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots, m). \tag{1.8}$$

Определитель системы (1.8)

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & \ldots & x_m \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_0^m & \ldots & x_m^m \end{vmatrix},$$

представляющий собой определитель Вандермонда для системы различных точек x_k ($k = 0, 1, \ldots, m$) не равен нулю, а это возможно, лишь если

$$p_k = p'_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

Наряду с формулой (1.5) введем другую квадратурную формулу

$$\int_c^d F(u)\,du \approx \sum_0^m p_k^* F(x_k^*) \tag{1.5'}$$

со следующими свойствами:

а) $p_k^* : p_k = (d-c) : (b-a) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$;

б) узлы $x_0^* < x_1^* < \ldots < x_m^*$ принадлежат к отрезку $[c, d]$ и делят его в том же отношении, как узлы x_k делят $[a, b]$:

$$(x_0^* - c) : (x_1^* - c) : \ldots : (x_m^* - c) = \\ = (x_0 - a) : (x_1 - a) : \ldots : (x_m - a).$$

Формулу (1.5′) мы будем называть *подобной* формуле (1.5).

---

*) Мы называем многочленом степени m функцию $a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$, где a_k ($k = 0, 1, \ldots, m$) — произвольные (в том числе и равные нулю) коэффициенты.

Покажем, что подобные формулы (1.5) и (1.5′) одновременно точны для многочленов степени m. В самом деле, если $R(u)$ — многочлен степени m, то и

$$R\left(c+\frac{d-c}{b-a}(x-a)\right)$$

— многочлен степени m. Поэтому

$$\int_c^d R(u)\,du=\frac{d-c}{b-a}\int_a^b R\left(c+\frac{d-c}{b-a}(x-a)\right)dx=$$

$$=\frac{d-c}{b-a}\sum_0^m p_k R\left(c+\frac{d-c}{b-a}(x_k-a)\right)=\sum_0^m p_k^* R(x_k^*).$$

Из сказанного выше и из единственности квадратурной формулы (1.5′), имеющей заданные узлы $x_0^*, \ldots, x_m^* \in [c, d]$ и точной для многочленов степени m, следует, что если эти узлы удовлетворяют условиям б), то они удовлетворяют и а), т. е. веса формулы (1.5′) получаются из весов p_k умножением на $\frac{d-c}{b-a}$.

Формулу

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \approx \sum_0^m p_k f(x_k), \qquad x_k \in [-a, a],$$

мы будем называть *симметрической*, если выполняются условия

$$p_k=p_{m-k}, \quad x_k=-x_{m-k} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m).$$

Отметим, что, если в выведенной выше формуле (1.5) отрезок $[a, b]$ на самом деле имеет вид $[-a, a]$ и узлы $x_k \in [-a, a]$ удовлетворяют условию симметрии: $x_k=-x_{m-k}$, то отсюда автоматически следует, что $p_k=p_{m-k}$, т. е. формула (1.5) — симметрическая.

В самом деле, легко проверить, что из условий $x_k=-x_{m-k}$ следует, что

$$Q_m^{(k)}(-x)=Q_m^{(m-k)}(x) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$$

и тогда

$$p_{m-k}=\int_{-a}^{a} Q_m^{(m-k)}(x)\,dx=\int_{-a}^{a} Q_m^{(k)}(-x)\,dx=$$

$$=\int_{-a}^{a} Q_m^{(k)}(u)\,du=p_k.$$

Формула (1.5), точная для всех многочленов степени m, на самом деле может оказаться точной для многочленов степени, большей чем m, как это имеет место в случае формулы Симпсона. Наилучшими в этом смысле квадратурными формулами являются известные формулы Гаусса, соответствующие таким расположениям $m+1$ узлов $x_0, x_1, \ldots, x_m$, при которых квадратурная формула оказывается точной для всех многочленов степени $2m+1$. Что такие расположения узлов возможны, будет доказано в § 17. В § 5 приводятся частные случаи формулы Гаусса для отрезка $[-1, +1]$.

Отметим еще квадратурные формулы Чебышева, которые определяются из условия: при m узлах $x_1, \ldots, x_m$ формула должна быть точной для многочленов степени m и иметь равные множители при ординатах. В общем виде квадратурные формулы Чебышева для отрезка $[-1, +1]$ записываются следующим образом:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{2}{m}\sum_{1}^{m} f(x_k), \tag{1.9}$$

где узлы x_k подбираются согласно указанному выше условию. То обстоятельство, что множитель в правой части этой квадратурной формулы равен $2/m$, следует из того, что она должна быть точна для $f(x)\equiv 1$. В § 5 приводятся первые четыре квадратурные формулы Чебышева для отрезка $[-1, +1]$.

П. Л. Чебышев ([17], т. III, стр. 49—62) показал, что такие квадратурные формулы существуют для случаев $m=1, 2, \ldots, 7, 9$ и являются симметрическими. Вследствие этого последнего свойства при четных

$m=2, 4, 6$ они являются точными для функции x^{m+1}, следовательно, не только для многочленов степени m, но и $m+1$. Оказывается, что при $m=8$ и $m \geqslant 10$ формула (1.9) уже не существует (см. [3]).

Формула (1.5) может оказаться точной только для многочленов степени, меньшей, чем m, или неточной для каких бы то ни было многочленов.

Формула (1.5), точная для многочленов степени m, если она соответствует узлам $x_k = a + \frac{b-a}{m} k$ ($k = 0, 1, \ldots, m$), делящим отрезок $[a, b]$ на равные части, носит название квадратурной *формулы Котеса* *).

В дальнейшем условимся чисто формально всякое выражение вида

$$L(f) = \sum_{0}^{m-1} p_k f(x_k), \tag{1.10}$$

где p_k — произвольные числа и x_k — произвольные точки, принадлежащие отрезку $[a, b]$, независимо от происхождения чисел p_k и x_k, считать приближенным выражением определенного интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и в связи с этим *приближенное равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L(f) \tag{1.11}$$

называть квадратурной формулой, определяемой весами p_k и узлами x_k.

Заметим, что определенный интеграл удовлетворяет условиям аддитивности и однородности:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

$$C \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b Cf(x)\,dx,$$

*) Более полные сведения об упомянутых и других квадратурных формулах читатель может, например, найти в книгах В. Л. Гончарова [4], Ш. Е. Микеладзе [9], В. И. Крылова [8], И. С. Березина и Н. И. Жидкова [2], Н. С. Бахвалова [1].

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — интегрируемые на отрезке $[a, b]$ функции, а C — постоянная. Этим же свойствам аддитивности и однородности удовлетворяет функционал *) (1.10):

$$L(f+\varphi)=L(f)+L(\varphi), \qquad CL(f)=L(Cf).$$

§ 2. КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

Многообразие всех интегрируемых функций весьма обширно. Если рассматривается какой-либо вполне определенный метод приближенного интегрирования функций, то нет возможности указать заранее величину оценки приближения для всех вообще интегрируемых функций. Эта оценка просто равна ∞.

Обратимся, например, к методу трапеций. Можно, очевидно, построить функцию, равную нулю на концах отрезка $[a, b]$ и такую, что определенный интеграл от нее на этом отрезке будет больше любого наперед заданного числа. Ошибка приближения определенного интеграла такой функции по методу трапеций (1.2) равна самому этому интегралу и может, таким образом, быть как угодно большой.

Выход из положения находят в том, что оценки приближения получают для тех или иных достаточно узких классов интегрируемых функций. Такими весьма распространенными в современном анализе классами функций являются прежде всего классы дифференцируемых функций и классы функций, удовлетворяющих условиям Липшица.

Мы можем, например, рассматривать класс функций, который мы обозначаем через $W^{(1)}(M; a, b)$, непрерывных на некотором отрезке $[a, b]$ и имеющих на нем кусочно-непрерывную **) производную $f'(x)$,

---

*) Если каждой функции f из некоторого класса функций по некоторому закону приведено в соответствие число $L(f)$, то $L(f)$ называется *функционалом*, определенным на этом классе функций.

**) Если отрезок $[a, b]$ можно разбить точками $a<x_1<x_2<\ldots$ $\ldots<x_n<b$ на конечное число отрезков, в каждом из которых функция $f(x)$ имеет непрерывную производную, то говорят, что $f(x)$ имеет на $[a, b]$ *кусочно-непрерывную* производную. Здесь надо учесть, что в точках деления $x_1, x_2, \ldots, x_n$ предполагается только существование односторонних производных: правой и левой.

удовлетворяющую на этом отрезке неравенству

$$|f'(x)| \leqslant M.$$

Более хорошими дифференциальными свойствами обладает класс $W^{(2)}(M; a, b)$ функций, непрерывных на отрезке вместе со своими первыми производными и имеющих на нем вторую кусочно-непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству

$$|f''(x)| \leqslant M.$$

Обобщая эти классы, мы приходим к классу $W^{(r)}(M; a, b)$, где r — натуральное число. Класс $W^{(r)}(M; a, b)$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a, b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r-го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant M. \tag{2.1}$$

Можно еще ввести промежуточные классы. Например, если $0 < \alpha \leqslant 1$, то будем считать, что $H^{\alpha}(M; a, b) = W^{(0)}H^{\alpha}(M; a, b)$ обозначает класс функций $f(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющих для всех точек x и x' этого отрезка неравенству

$$|f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|^{\alpha}.$$

Вообще, если r — целое неотрицательное и $0 < \alpha \leqslant 1$, мы можем определить класс $W^{(r)}H^{(\alpha)}(M; a, b)$ функций $f(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$, имеющих на нем непрерывные производные порядка r, удовлетворяющие для всех x и x' из $[a, b]$ неравенству

$$\left|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x')\right| \leqslant M|x - x'|^{\alpha}.$$

Обозначим еще через $W^{(r)}H^{(\alpha)}(a, b)$ (без значка M) класс всех функций, каждая из которых принадлежит при некотором M к классу $W^{(r)}H^{(\alpha)}(M; a, b)$.

Введенные таким образом классы $W^{(r)}H^{(\alpha)}(a, b)$ составляют весьма детальную классификацию непрерывных и дифференцируемых функций. При увеличении $r + \alpha$ дифференциальные свойства функций, принадлежащих к $W^{(r)}H^{(\alpha)}(a, b)$, улучшаются. Если

$r_1 + \alpha_1 < r_2 + \alpha_2$, то класс $W^{(r_2)}H^{(\alpha_2)}(a, b)$ составляет часть класса $W^{(r_1)}H^{(\alpha_1)}(a, b)$.

Полезно иметь в виду следующее обобщение классов $W^{(r)}H^{(\alpha)}(a, b)$.

Вводится в рассмотрение непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $\omega(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\omega(0) = 0, \quad 0 \leqslant \omega(x_2) - \omega(x_1) \leqslant \omega(x_2 - x_1) \tag{2.2}$$

для всех x_1, x_2, для которых $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, по определению, принадлежит к классу $W^{(r)}H_\omega(a, b)$, если она имеет на этом отрезке производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, удовлетворяющую неравенству

$$|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \leqslant \omega(x_2 - x_1) \quad (a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b). \tag{2.3}$$

Класс $W^{(r)}H^{(\alpha)}(M;\ a,\ b)$ совпадает с классом $W^{(r)}H_\omega(a, b)$, если

$$\omega(x) = Mx^\alpha.$$

Неравенство (2.2) для функции Mx^α вытекает из результатов приведенного ниже в этом параграфе примера 3.

Если на отрезке $[a, b]$ задана произвольная непрерывная функция $\varphi(x)$, то *модулем ее непрерывности* на отрезке $[a, b]$, соответствующим данному положительному числу δ, называется величина $\omega(\delta)$, определяемая при помощи равенства

$$\omega(\delta) = \max_{|x''-x'| \leqslant \delta} |\varphi(x'') - \varphi(x')|,$$

где $a \leqslant x',\ x'' \leqslant b$.

Таким образом, $\omega(\delta)$ есть наибольшее среди чисел $|\varphi(x'') - \varphi(x')|$, соответствующих различным парам точек x' и x'' отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| \leqslant \delta$, $\omega(\delta)$ есть монотонно неубывающая функция от δ, так как если $0 \leqslant \delta' < \delta''$, то

$$\omega(\delta') = \max_{|x''-x'| \leqslant \delta'} |\varphi(x'') - \varphi(x')| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|x''-x'| \leqslant \delta''} |\varphi(x'') - \varphi(x')| = \omega(\delta'').$$

Из непрерывности $\varphi(x)$ на замкнутом отрезке $[a, b]$ следует свойство ее равномерной непрерывности на

$[a, b]$, которое эквивалентно, как легко видеть, следующему соотношению:

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0 = \omega(0). \tag{2.4}$$

Далее, если $\delta = \delta_1 + \delta_2$, где $\delta_1 \geqslant 0$ и $\delta_2 \geqslant 0$ и если x' и x'' — точки отрезка $[a, b]$, для которых имеет место $|x'' - x'| \leqslant \delta$, то, очевидно, на отрезке $[a, b]$ найдется такая точка x_0, что для нее одновременно выполняются неравенства $|x' - x_0| \leqslant \delta_1$, $|x'' - x_0| \leqslant \delta_2$. Отсюда следует:

$$\omega(\delta) = \max_{|x''-x'| \leqslant \delta} |\varphi(x'') - \varphi(x')| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\substack{|x'-x_0| \leqslant \delta_1 \\ |x''-x_0| \leqslant \delta_2}} \{|\varphi(x') - \varphi(x_0)| + |\varphi(x'') - \varphi(x_0)|\} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|x'-x_0| \leqslant \delta_1} |\varphi(x') - \varphi(x_0)| + \max_{|x''-x_0| \leqslant \delta_2} |\varphi(x'') - \varphi(x_0)| =$$
$$= \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2). \tag{2.5}$$

Свойство монотонности функции $\omega(\delta)$ и соотношение (2.5) можно объединить, очевидно, в следующие два неравенства:

$$0 \leqslant \omega(\delta'') - \omega(\delta') \leqslant \omega(\delta'' - \delta'), \tag{2.6}$$

которые должны иметь место для любых δ' и δ'', удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant \delta' \leqslant \delta''$.

Из (2.4) и (2.6), очевидно, следует непрерывность $\omega(\delta)$ для всех $\delta \geqslant 0$.

Заметим, что если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ имеет модуль непрерывности $\omega(\delta)$, то, очевидно, она принадлежит к определенному выше классу $H_\omega(a, b) = W^{(0)}H_\omega(a, b)$.

Еще лучшими свойствами, сравнительно с функциями классов $W^{(r)}H_\omega(a, b)$, обладают аналитические функции.

Возможны также некоторые видоизменения изложенной классификации. Можно ввести класс $W^{(r)}_{L_p}(M;\ a,\ b)$ функций, заданных на $[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, обладающую тем свойством, что

$$\left(\int_a^b |f^{(r)}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant M \qquad (p \geqslant 1),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Некоторые сведения, связанные с этими классами, мы будем приводить в дальнейшем мелким шрифтом. В этом случае мы будем предполагать знание у читателя простейших свойств функций, интегрируемых (суммируемых) по Лебегу в p-й степени (см., например [14] и [15]).

Заметим, что если функция $\varphi(x)$ измерима и ограничена на отрезке $[a, b]$, то имеет место равенство

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \operatorname*{supvrai}_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi(x)| = M, \tag{2.7}$$

правая часть которого есть так называемый существенный максимум *) $|\varphi(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

В самом деле,

$$\|\varphi\|_{L_p} = \left(\int_a^b |\varphi|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant M\,(b-a)^{1/p},$$

откуда

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\,\|\varphi\|_{L_p} \leqslant M. \tag{2.8}$$

С другой стороны, если E обозначает множество точек отрезка $[a, b]$, на котором

$$|\varphi(x)| > M - \varepsilon$$

(где $\varepsilon > 0$), а mE — меру E, то

$$\|\varphi\|_{L_p} \geqslant \left(\int_E (M-\varepsilon)^p\,dx\right)^{1/p} = (M-\varepsilon)\,(mE)^{1/p},$$

откуда

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\,\|\varphi\|_{L_p} \geqslant M - \varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\,\|\varphi\|_{L_p} \geqslant M. \tag{2.9}$$

---

*) Это есть наименьшее число M, обладающее тем свойством, что множество всех x из отрезка $[a, b]$, для которых $|\varphi(x)| > M$, имеет меру нуль.

Из (2.8) и (2.9) следует (2.7). Поэтому естественно считать, что

$$W^{(r)}(M;\ a,\ b) = W^{(r)}_{L_\infty}(M;\ a,\ b).$$

При $p=1$ будем писать $W^{(r)}_{L}(M;\ a,\ b)$ вместо $W^{(r)}_{L_1}(M;\ a,\ b)$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $|x|$ на отрезке $[-1, +1]$. Ее график изображен на рис. 5.

Она непрерывна на отрезке $[-1, +1]$ и имеет на нем кусочно-непрерывную производную. Действительно, на отрезке $[-1, 0]$ производная от $|x|$ непрерывна и равна всюду -1, считая, как обычно, что при $x=0$ производная берется левая, а при $x=-1$ — правая. На отрезке $[0, 1]$ производная также всюду непрерывна и равна $+1$. По абсолютной величине производная от $|x|$ на всем отрезке $[-1, +1]$ равна единице. Отсюда следует, что функция $|x|$ принадлежит к классу $W^{(1)}(1; -1, 1)$.

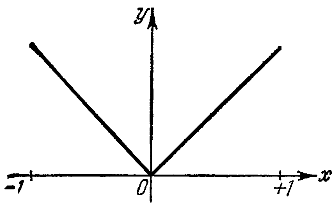

Рис. 5.

Однако наша функция не принадлежит к классу $W^{(2)}(M; -1, +1)$ ни при каких значениях постоянной M, так как тогда она необходимо должна была бы иметь всюду на отрезке $[-1, +1]$ первую непрерывную производную. Но в данном случае первая производная при $x=0$ разрывна.

Пример 2. Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, график которой изображен на рис. 6 (здесь $x_3 = b$).

Чтобы она была однозначной в точках x_0, x_1, x_2, можно в этих точках положить ее равной любому значению, например, среднему арифметическому из предельных правой и левой ординат графика.

Положим

$$\varphi_1(x) = \int_a^x \varphi(u)\,du + C_1.$$

Эта функция изображена на рис. 7. Она принадлежит к классу $W^{(1)}(M; a, b)$, где $M \geqslant |\varphi(x)|$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Рис. 6.

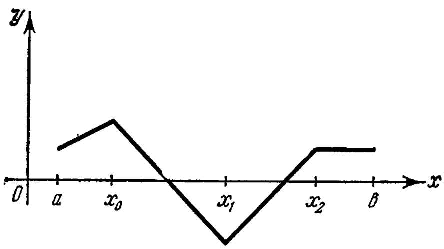

Рис. 7.

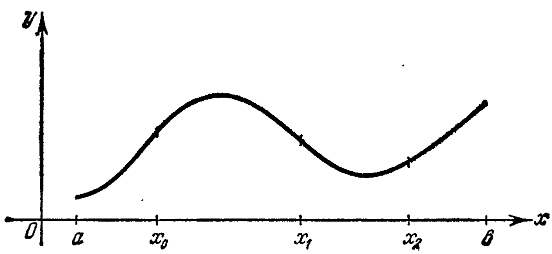

Рис. 8.

Если положить далее

$$\varphi_2(x) = \int_a^x \varphi_1(u)\,du + C_2,$$

то получим функцию, изображенную на рис. 8, принадлежащую к классу $W^{(2)}(M; a, b)$, но не принадлежащую, очевидно, к классу $W^{(3)}(a, b)$.

Повторив этот процесс интегрирования r раз, мы получим функцию класса $W^{(r)}(M; a, b)$, где r есть наперед заданное целое число.

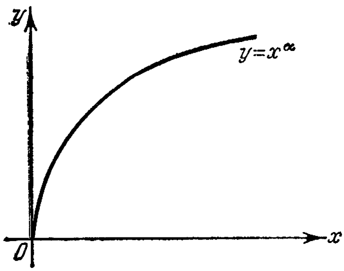

Рис. 9.

Пример 3. Рассмотрим функцию x^α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ на полупрямой $[0, \infty]$. Ее график (при некотором $\alpha < 1$) изображен на рис. 9.

Покажем, что она на полупрямой $[0, \infty]$ удовлетворяет условию Липшица степени α с константой $M = 1$. Иначе говоря, покажем, что для всех x и x_1, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x \leqslant x_1 < \infty$, имеет место

$$x_1^\alpha - x^\alpha \leqslant (x_1 - x)^\alpha. \tag{2.10}$$

В самом деле, при $x = 0$ и $x = x_1$ это очевидно. Пусть $0 < x < x_1$. Рассмотрим отношение

$$\frac{x_1^\alpha - x^\alpha}{(x_1 - x)^\alpha} = \frac{\left(\frac{x_1}{x}\right)^\alpha - 1}{\left(\frac{x_1}{x} - 1\right)^\alpha} = \frac{u^\alpha - 1}{(u-1)^\alpha} = \psi(u),$$

где $u = \frac{x_1}{x}$ и, следовательно, $1 < u < \infty$. Легко проверить, что функция $\psi(u)$ обладает следующими свойствами:

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 1, \quad \psi'(u) > 0 \qquad (1 < u < \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{x_1^\alpha - x^\alpha}{(x_1 - x)^\alpha} = \psi(u) < 1 \qquad (1 < u < \infty)$$

и неравенство (2.10) доказано. Таким образом, функция x^α принадлежит к классу $H^{(\alpha)}(1; 0, 1) = W^{(0)}H^{(\alpha)}(1; 0, 1)$. Если эту функцию умножить на число M и проинтегрировать r раз с любыми постоянными, выбираемыми совершенно произвольно, то получим функцию класса $W^{(r)}H^{(\alpha)}(M; 0, 1)$.

§ 3. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$, имеющую на нем непрерывные производные*) до $(r-1)$-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную порядка r. Она, таким образом, принадлежит к классу $W^{(r)}(M; a, b)$ с некоторой константой M.

Для такой функции при помощи последовательного применения метода интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(t)\Big|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{(r-2)!}\int_a^x (x-t)^{r-2} f^{(r-1)}(t)\,dt =$$

$$= -\frac{(x-a)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(a) + \frac{(x-t)^{r-2}}{(r-2)!} f^{(r-2)}(t)\Big|_{t=a}^{t=x} +$$

$$+ \frac{1}{(r-3)!}\int_a^x (x-t)^{r-3} f^{(r-2)}(t)\,dt =$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= -\frac{(x-a)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(a) - \frac{(x-a)^{r-2}}{(r-2)!} f^{(r-2)}(a) - \ldots$$

$$\ldots - f(a) + f(x).$$

---

*) Формула, которую мы здесь получим, справедлива также при более общем условии, именно при условии, что функция $f(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и, таким образом, почти всюду имеет суммируемую производную порядка r. Это замечание нужно иметь в виду при чтении частей книги, набранных петитом.

Отсюда получаем, что для всякой функции $f(x)$ класса $W^{(r)}(M; a, b)$ справедлива *формула Тейлора*

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(a) + R_r(x) \quad (3.1)$$

с остаточным членом в интегральной форме:

$$R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\, dt. \quad (3.2)$$

Введем в рассмотрение функцию $K_r(u)$, определяемую при помощи равенств

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1} & \text{для} \quad u \geqslant 0, \\ 0 & \text{для} \quad u < 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Тогда выражение для остаточного члена $R_r(x)$ можно записать еще в виде

$$R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b K_r(x-t) f^{(r)}(t)\, dt, \quad (3.4)$$

так как функция $K_r(x-t)$ при всяком фиксированном x при изменении t от x до b равна нулю.

Условимся еще через $W_a^{(r)}(M; c, d)$ обозначать класс функций $f \in W^{(r)}(M; c, d)$, удовлетворяющих условиям:

$$f(a) = f(a) = \ldots = f^{(r-1)}(a) = 0.$$

Очевидно, что для $f \in W_a^{(r)}(M; a, b)$

$$f(x) = R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b K_r(x-t) f^{(r)}(t)\, dt. \quad (3.5)$$

§ 4. ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим произвольную квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L(f), \tag{4.1}$$

$$L(f) = \sum_0^{m-1} p_k f(x_k), \tag{4.2}$$

определяемую заданными весами p_k $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ и узлами $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \leqslant b$. Будем предполагать, что эта формула точна для всех многочленов

$$P_{r-1}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{r-1} x^{r-1}$$

степени $r-1$ $(r \geqslant 1)$, т. е. для всех таких многочленов выполняется равенство

$$\int_a^b P_{r-1}(x)\,dx = L(P_{r-1}).$$

Дадим точное выражение для оценки приближения при помощи этой квадратурной формулы для функций класса $W^{(r)}(M; a, b)$.

Итак, зададим произвольную функцию $f(x)$, принадлежащую к классу $W^{(r)}(M; a, b)$. Она, таким образом, определена на отрезке $[a, b]$, имеет на нем непрерывные производные до порядка $r-1$ включительно и имеет кусочно-непрерывную производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, удовлетворяющую неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant M. \tag{4.3}$$

Разложим эту функцию по формуле Тейлора (см. § 3) по степеням $x-a$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ с остаточным членом в форме (3.4):

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= P_{r-1}(x) + R_r(x), \\ P_{r-1}(x) &= \sum_0^{r-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \\ R_r(x) &= \frac{1}{(r-1)!} \int_a^b K_r(x-t) f^{(r)}(t)\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

В силу того, что наша квадратурная формула точна для многочленов степени $r-1$, будем иметь:

$$\int_a^b f(x)\,dx - L(f) = \int_a^b P_{r-1}(x)\,dx - L(P_{r-1}) +$$

$$+ \int_a^b R_r(x)\,dx - L(R_r) = \int_a^b R_r(x)\,dx - L(R_r) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b \int_a^b K_r(x-t) f^{(r)}(t)\,dt\,dx -$$

$$- \frac{1}{(r-1)!}\sum_0^{m-1} p_k \int_a^b K_r(x_k - t) f^{(r)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\left[\int_a^b f^{(r)}(t) \int_a^b K_r(x-t)\,dx\,dt -\right.$$

$$\left. - \int_a^b \sum_0^{m-1} p_k f^{(r)}(t) K_r(x_k - t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b \left[\int_t^b (x-t)^{r-1}\,dx - \sum_0^{m-1} p_k K_r(x_k - t)\right] f^{(r)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b \left[\frac{(b-t)^r}{r} - \sum_0^{m-1} p_k K_r(x_k - t)\right] f^{(r)}(t)\,dt. \qquad (4.5)$$

Таким образом, если ввести в рассмотрение функцию

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(b-t)^r}{r} - \sum_0^{m-1} p_k K_r(x_k - t)\right], \qquad (4.6)$$

то получим следующее точное выражение ошибки приближения при помощи рассматриваемой квадратурной формулы для данной функции $f(x)$ класса $W^{(r)}(M;\, a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx - L(f) = \int_a^b F_r(t) f^{(r)}(t)\,dt. \qquad (4.7)$$

Для дальнейшего важно заметить, что функция $F_r(t)$ не зависит от отдельных функций f класса $W^{(r)}(a, b)$, в частности, не зависит от M. В то же время функция $F_r(t)$ определяется всем классом $W^{(r)}(a, b)$ (числом r и отрезком $[a, b]$).

Формула (4.7) дает точное выражение приближения квадратурной формулы (4.1) через производную порядка r от функции $f(x)$. Эта формула в дальнейшем будет служить исходной для получения различных оценок, связанных с приближениями квадратурных формул.

Если принять во внимание, что для функции f класса $W^{(r)}(M; a, b)$ должно выполняться неравенство (4.3), то будем иметь

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - L(f) \right| \leqslant M \int_a^b |F_r(t)|\, dt = Mc_r. \tag{4.8}$$

При этом в полученном неравенстве правую часть нельзя уменьшить, так как в классе $W^{(r)}(M; a, b)$ существуют функции f, для которых это неравенство превращается в равенство. Именно это обстоятельство имеет место для всякой функции f, производная r-го порядка от которой равна $\operatorname{sign} F_r(x)$, т. е. *)

$$f^{(r)}(x) = M \operatorname{sign} F_r(x). \tag{4.9}$$

Чтобы получить любую такую функцию эффективно, надо проинтегрировать r раз правую часть (4.9), каждый раз с произвольными постоянными интегрирования. Отсюда следует, что точная оценка приближения при помощи квадратурной формулы (4.1) для класса функций $W^{(r)}(M; a, b)$ равна числу

$$\mathscr{E}[W^{(r)}(M;\ a,\ b)] = \sup_{f \in W^{(r)}(M;\ a,\ b)} \left| \int_a^b f(x)\, dx - L(f) \right| =$$
$$= M \int_a^b |F_r(t)|\, dt = Mc_r, \tag{4.10}$$

---

*) $\operatorname{sign} u = \begin{cases} 1 & \text{для } u > 0, \\ 0 & \text{для } u = 0, \\ -1 & \text{для } u < 0. \end{cases}$

где $F_r(t)$ есть функция, определяемая по формуле (4.6).

Полученная оценка является точной в предположении, что мы ничего не знаем о функции, для которой приближенно вычисляется интеграл, кроме того, что она принадлежит к классу $W^{(r)}(M; a, b)$.

Константу c_r можно вычислить точно или с любой степенью точности приближенно, поскольку она задается при помощи известных для каждой конкретной квадратурной формулы весов p_k и узлов x_k. Трудности, связанные с вычислением константы c_r, сводятся к необходимости определить точки интеграла (a, b), в которых функция $F_r(t)$ меняет знак.

Замечание. В приведенных выше рассуждениях мы предполагали, что квадратурная формула (4.1) точна для всех многочленов P_{r-1} степени $r-1$. Допустим теперь, что это не имеет места, т. е. существует многочлен P^*_{r-1}, для которого

$$\int_a^b P^*_{r-1}\,dx - L(P^*_{r-1}) = \lambda \neq 0.$$

Но тогда для многочлена

$$P^{**}_{r-1}(x) = \frac{N}{\lambda} P^*_{r-1}(x),$$

где N — любое число, имеет место равенство

$$\int_a^b P^{**}_{r-1}\,dx - L(P^{**}_{r-1}) = N,$$

а это показывает, что каково бы ни было $N > 0$,

$$\sup_{f \in W^{(r)}(M;\, a,\, b)} \left| \int_a^b f(x)\,dx - L(f) \right| \geqslant$$
$$\geqslant \left| \int_a^b P^{**}_{r-1}\,dx - L(P^{**}_{r-1}) \right| \geqslant N$$

и, следовательно,

$$\mathscr{E}[W^{(r)}(M;\ a,\ b)] = \sup_{f \in W^{(r)}(M;\ a,\ b)} \left| \int_a^b f(x)\,dx - L(f) \right| = \infty.$$

Таким образом, *верхняя грань* $\mathscr{E}[W^{(r)}(M; a, b)]$ *может быть равна числу* c_r *или* ∞, *в зависимости от того, будет ли квадратурная формула* (4.1) *точна или неточна для многочленов* P_{r-1} *степени* $r-1$.

Это замечание высказано М. Левиным (см. добавление [23]).

Если функция f принадлежит к классу $W_{L_p}^{(r)}(M; a, b)$ функций, имеющих на $[a, b]$ абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, для которой выполняется неравенство

$$\| f^{(r)} \|_{L_p} = \left(\int_a^b | f^{(r)}(x) |^p\,dx \right)^{1/p} \leqslant M \qquad (p > 1), \qquad (4.11)$$

то легко проследить, что для нее все проведенные в этом параграфе выкладки, вплоть до равенства (4.7), остаются в силе.

Далее, для квадратурной формулы, точной для многочленов степени $r-1$, вместо неравенства (4.8) теперь можно написать согласно неравенству Гёльдера

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - L(f) \right| \leqslant \| f^{(r)} \|_{L_p} \| F_r \|_{L_q} \leqslant M \| F_r \|_{L_q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right), \qquad (4.12)$$

где

$$\| F_r \|_{L_q} = \left(\int_a^b | F_r(t) |^q\,dt \right)^{1/q}. \qquad (4.13)$$

При этом для класса функций $W_{L_p}^{(r)}(M; a, b)$ константу, стоящую в правой части (4.12), нельзя уменьшить, так как в силу известного свойства неравенства Гёльдера правая часть (4.12) достигается для функции

$$f^{(r)}(t) = \left(\int_a^b | F_r(t) |^q\,dt \right)^{-1/p} | F_r(t) |^{q-1} \operatorname{sign} F_r(t),$$

удовлетворяющей условию (4.11). Таким образом, правая часть (4.12) достигается для некоторой функции f, принадлежащей к классу $W^{(r)}L_p(M; a, b)$.

В случае $p=1$, т. е. если функция $f(x)$ принадлежит к классу $W_L^{(r)}(M; a, b)$, имеет место неравенство

$$\left|\int_a^b f\,dx - L(f)\right| = \left|\int_a^b F_r(t) f^{(r)}(t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} |F_r(t)| \int_a^b |f^{(r)}(t)|\,dt \leqslant M \max_{a\leqslant t\leqslant b} |F_r(t)|.$$

При этом правая часть этого неравенства есть наименьшее число, для которого оно выполняется для всех функций f рассматриваемого класса. Объединяя оба полученных результата, мы приходим к следующему равенству *), верному для квадратурной формулы, точной для многочленов степени $r-1$:

$$\sup_{f\in W_{L_p}^{(r)}(M;\,a,\,b)} \left|\int_a^b f\,dx - L(f)\right| = M\,\|F_r\|_{L_q} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right), \tag{4.14}$$

где при $p>1$ $\|F_r\|_q$ определяется равенством (4.13), а при $p=1$

$$\|F\|_{L_\infty} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |F_r(t)|. \tag{4.15}$$

Так же как для класса $W^{(r)}(M; a, b)$, доказывается, что если квадратурная формула (4.8) не точна для многочленов степени $r-1$, то рассматриваемая в (4.14) верхняя грань равна ∞.

§ 5. ЧИСЛЕННЫЕ КОНСТАНТЫ ДЛЯ ЧАСТНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

В случае, если $a=0$, $b=1$, имеем

$$\int_0^1 f\,dx - L(f) = \int_0^1 F_r(t) f^{(r)}(t)\,dt, \tag{5.1}$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_0^{m-1} p_k K_r(x_k - t)\right]. \tag{5.2}$$

Положим

$$c_r = \int_0^1 |F_r(t)|\,dt = \max_{f\in W^{(r)}(1;\,0,\,1)} \left|\int_0^1 f\,dx - L(f)\right|. \tag{5.3}$$

---

*) sup — знак точной верхней грани множества чисел, т. е. наименьшего числа, которого не превышают все числа, принадлежащие к множеству.

Надо иметь в виду, что

$$\max_{f \in W^{(r)}(M;\,0,\,1)} \left| \int_0^1 f\,dx - L(f) \right| = Mc_r.$$

Формула прямоугольников (см. рис. 1). Для нее $m = 1$, $p_0 = 1$, $x_0 = {}^1/_2$. Она точна для линейных функций — многочленов первой степени, поэтому изложенная теория применима к ней при $r = 1$, $r = 2$.

Для нее

$$c_1 = \int_0^1 \left|(1 - t) - K_1\left(\frac{1}{2} - t\right)\right| dt =$$

$$= \int_0^{1/2} |(1 - t) - 1|\,dt + \int_{1/2}^1 (1 - t)\,dt = \frac{1}{4},$$

$$c_2 = \int_0^{1/2} \left|\frac{(1 - t)^2}{2} - \left(\frac{1}{2} - t\right)\right| dt + \int_{1/2}^1 \frac{(1 - t)^2}{2}\,dt = \frac{1}{24}.$$

Формула трапеций. В этом случае $m = 2$, $p_0 = p_1 = {}^1/_2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Формула точна для многочленов первой степени, поэтому в данном случае теория применима при $r = 1$ и $r = 2$:

$$c_1 = \int_0^1 \left|(1 - t) - \frac{1}{2}K_1(-t) - \frac{1}{2}K_1(1 - t)\right| dt =$$

$$= \int_0^1 \left|1 - t - \frac{1}{2}\right| dt = \int_0^1 \left|\frac{1}{2} - t\right| dt =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - t\right) dt + \int_{1/2}^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{4},$$

$$c_2 = \int_0^1 \left|\frac{(1 - t)^2}{2} - \frac{1}{2}K_2(-t) - \frac{1}{2}K_2(1 - t)\right| dt =$$

$$= \int_0^1 \left|\frac{(1 - t)^2}{2} - \frac{1 - t}{2}\right| dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - t)\,t\,dt = \frac{1}{12}.$$

Формула Симпсона (см. рис. 3). Для этой формулы $m=3$, $p_0=p_2={}^1/_6$, $p_1={}^2/_3$, $x_0=0$, $x_1={}^1/_2$, $x_2=1$. Для нее можно вычислить c_1, c_2, c_3 и c_4.

Вычисления показывают, что в данном случае

$$c_1={}^5/_{36},\quad c_2={}^1/_{81},\quad c_3={}^1/_{576},\quad c_4={}^1/_{2880}.$$

Численная константа c_4 для формулы Симпсона хорошо известна в литературе.

Формула Котеса с четырьмя (равноотстоящими) узлами*) ($k=0, 1, 2, 3$):

$$p_0=p_3={}^1/_8,\quad p_1=p_2={}^3/_8,\quad x_k={}^k/_3.$$

Она точна для всех многочленов третьей степени, и поэтому для нее возможны константы c_k при $k=1, \ldots, 4$.

В данном случае $c_4=\frac{1}{6480}$ (см. **) [13]).

Формула Котеса с пятью узлами ($k=0, 1, 2, 3, 4$):

$$p_0=p_4={}^7/_{90},\quad p_1=p_3={}^{32}/_{90},\quad p_2={}^{12}/_{90},\quad x_k={}^k/_4$$

(точная для многочленов пятой степени). Для нее

$$c_5=\frac{1}{345\,600},\quad c_6=\frac{1}{1935360}\approx 517.10^{-9}.$$

Константу c_5 вычислил П. Пилика (см. [13]), а константу c_6 — Ю. Я. Доронин.

Положим еще

$$\left(\int_0^1 |F_r(t)|^q\,dt\right)^{1/q}=c_r^{(q)}. \tag{5.4}$$

Таким образом, $c_r^{(1)}=c_r$.

---

*) Квадратурная формула (1.5), где веса p_k определяются интегралами (1.6), называется формулой Котеса с $(m+1)$ узлами, если ее узлы $a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b$ делят отрезок $[a, b]$ на m равных частей. При $m+1$ нечетном она точна для многочленов не только m-й, но и $m+1$-й степени: если ее переписать для $[-1, 1]$, то она будет симметрической и, следовательно, точной для x^{m+1}.

**) Впрочем, в [13] эта константа приведена с опечаткой.

Ниже мы приводим численные значения констант $c_r^{(2)}$ для определенных выше формул прямоугольников, трапеций и формулы Симпсона. Эти константы вычислены Ю. Я. Дорониным.

Формула прямоугольников:

$$c_1^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,289.$$

Формула трапеций:

$$c_1^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,289; \quad c_2^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{30}} = 0,0914.$$

Формула Симпсона:

$$c_1^{(2)} = \frac{1}{6} = 0,167,$$

$$c_2^{(2)} = \frac{1}{12\sqrt{30}} = 0,0152,$$

$$c_3^{(2)} = \frac{1}{48\sqrt{105}} = 0,00203,$$

$$c_4^{(2)} = \frac{1}{576\sqrt{14}} = 0,000464.$$

Замечание*). Сделаем замечание, иногда упрощающее вычисление оценок.

Пусть квадратурная формула вида

$$\int_{-1}^{1} f\,dx \approx \sum_{-m}^{m} p_k f(x_k)$$

симметрическая, т. е. удовлетворяет условиям

$$-x_{-k} = x_k, \quad p_{-k} = p_k,$$

и точна для P_{r-1} (многочленов степени $r-1$).

*) Это замечание принадлежит Ю. Я. Доронину (см. [6]) Мы приводим здесь другое доказательство.

Тогда (пояснения ниже)

$$\mathcal{E}[W^{(r)}(M;\ -1,\ 1)] =$$

$$= \sup_{f \in W^{(r)}(M;\ -1,\ 1)} \left| \int_{-1}^{1} f\,dx - \sum_{-m}^{m} p_k f(x_k) \right| =$$

$$= \sup_{f \in W_0^{(r)}(M;\ -1,\ 1)} \left| \int_{-1}^{1} f\,dx - \sum_{-m}^{m} \right| =$$

$$= \sup_{f \in W_0^{(r)}(M;\ -1,\ 0)} \left| \int_{-1}^{0} f\,dx - \sum_{x_k < 0} \right| +$$

$$+ \sup_{f \in W_0^{(r)}(M;\ 0,\ 1)} \left| \int_{0}^{1} f\,dx - \sum_{x_k > 0} \right| =$$

$$= 2 \sup_{f \in W_0^{(r)}(M;\ 0,\ 1)} \left| \int_{0}^{1} f\,dx - \sum_{x_k > 0} \right| =$$

$$= \frac{2}{(r-1)!} \int_{0}^{1} \left| \frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{x_k > 0} P_k K_r (x_k - t) \right| dt. \qquad (5.5)$$

Здесь $W_0^{(r)}(M; c, d)$ обозначает класс функций $f \in W^{(r)}(M; c, d)$ таких, что $f(0) = f'(0) = \ldots$ $\ldots = f^{(r-1)}(0) = 0$. Второе равенство цепи верно потому, что рассматриваемая формула точна для всех P_{r-1} (см. конец § 3).

Третье равенство объясняется следующим образом. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[-1, +1]$, то можно определить с помощью нее две функции:

$$f_1(x) = f(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 0),$$
$$f_2(x) = f(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

При этом очевидно, что если $f \in W_0^{(r)}(M;\ -1,\ +1)$, то $f_1 \in W_0^{(r)}(M;\ -1,\ 0)$ и $f_2 \in W_0^{(r)}(M;\ 0,\ 1)$, и наоборот. Кроме того, надо учесть, что если A и B — множества действительных чисел таких, что из $\alpha \in A$ следует $-\alpha \in A$ и из $\beta \in B$ следует $-\beta \in B$, то имеет место равенство

$$\sup_{\alpha\in A,\ \beta\in B}|\alpha+\beta|=\sup_{\alpha\in A}|\alpha|+\sup_{\beta\in B}|\beta|.$$

Предпоследнее равенство цепи вытекает из следующих соображений. Если $f(x)\in W_0^{(r)}(M;\ -1,\ 0)$, то $\varphi(x)=f(-x)\in W_0^{(r)}(M;\ 0,\ 1)$, и наоборот. Кроме этого, в силу симметричности квадратурной формулы

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx-\sum_{k=-m}^{-1} p_k f(x_k)=\int_{0}^{1}\varphi(x)\,dx-\sum_{k=1}^{m} p_k\varphi(x_k).$$

Верхняя грань левой части этого равенства по классу $f\in W_0^{(r)}(M;\ -1,\ 0)$, очевидно, равна верхней грани правой его части по классу $\varphi\in W_0^{(r)}(M;0,\ 1)$. Отметим еще, что у рассматриваемой квадратурной формулы $x_0=0$, потому что $-x_0=x_0$, но тогда $p_0 f(0)=p_0\varphi(0)=0$, так как $f(0)=\varphi(0)=0$.

Наконец, последнее равенство цепи вытекает из равенств (4.6), (4.10) при $a=0$, $b=1$, во всяком случае верных для $f\in W_0^{(r)}(M;\ 0,\ 1)$.

Покажем для примера, как вычислялась верхняя грань $\mathscr{E}[W^{(r)}(1;-1,+1)]$ в случае квадратурной формулы Гаусса с тремя узлами:

$$x_{-1}=-a=-\sqrt{\frac{3}{5}},\quad x_0=0,\quad x_1=a=\sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$p_{-1}=p_1=\frac{5}{9},\quad p_0=\frac{8}{9}$$

при $r=2$.

Эта формула симметрическая и во всяком случае точна для многочленов первой степени. Поэтому к ней применимо равенство (5.5):

$$\mathscr{E}[W^{(2)}(1;\ -1,\ +1)]=2\int_0^1\left|\frac{(1-t)^2}{2}-\frac{5}{9}K_2(a-t)\right|dt=I.$$

Функция под интегралом, которую мы обозначим через $\psi(t)$, определяется формулами:

$$\psi(t)=\frac{(1-t)^2}{2}+\frac{5}{9}(t-a)\qquad(0\leqslant t\leqslant a),$$

$$\psi(t)=\frac{(1-t)^2}{2}\qquad(a\leqslant t\leqslant 1).$$

Формулы Чебышева для отрезка [—1, +1]

Число узлов	Вид формулы	Значе
		$r=1$
1	$\int\limits_{-1}^{+1} f\,dx \approx 2f(0)$	1
2	$\int\limits_{-1}^{+1} f\,dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{5-2\sqrt{3}}{3}=0{,}511966$
3	$\int\limits_{-1}^{+1} f\,dx \approx \frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$	$\frac{4}{9}(5-3\sqrt{2})=0{,}336604$
4	$\int\limits_{-1}^{+1} f\,dx \approx \frac{1}{2}[f(-b)+f(-a)+f(a)+f(b)]$, $a=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}}$ $b=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}$	$\frac{17}{6}-(a+3b)=0{,}261777$

*) Таблица вычислена Ю. Я. Дорониным. О формуле Чебышева см. [5]. зом [21], [22]. Там же он привел точные значения констант формулы Чебы

Четвертый ряд можно дополнить константой, соответствующей $r=6$,

Таблица 1*)

$$\mathscr{E}\left[W^{(r)}(1;\ -1,\ +1)\right]=\sup_{|f^{(r)}(x)|\leqslant 1}\left|\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx-L(f)\right|$$

ния $\mathscr{E}\left[W^{(r)}(1;\ -1,\ +1)\right]$

$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$
$\frac{1}{3}$	–	–	–
$\frac{4}{9\sqrt{3}}(2\sqrt{3}-3)^{3/2}=0{,}081128$	$\frac{9-4\sqrt{3}}{108}=0{,}0191833$	$\frac{1}{135}=0{,}0074074$	–
$\frac{16\sqrt{2}}{81}(3\sqrt{2}-4)^{3/2}=0{,}033389$	$\frac{1}{36}\left[(8\sqrt{2}-11)^{3/2}+\right.$ $\left.+58\sqrt{2}-82\right]=0{,}00555819$	$\frac{1}{360}=0{,}0027778$	–
$\frac{(4b-3)^{3/2}}{3}=0{,}0251626$	0,003358	0,0005719	0,0000879

Константа во втором ряду таблицы при $r=4$ впервые вычислена Е. Я. Ремешева для 3, 4, ... 9 узлов, соответственно когда $r=4$, 6, 6, 8, 8, 10, 10. равной $\frac{2}{42525}=0{,}000048$.

Формулы Гаусса для отрезка [−1, +1]

Число узлов	Вид формулы	Значения	
		$r=1$	$r=2$
1	$\int\limits_{-1}^{+1} f\,dx \approx 2f(0)$	1	$\frac{1}{3}$
2	$\int\limits_{-1}^{+1} f\,dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{5-2\sqrt{3}}{3}=$ $=0{,}511966$	$\frac{4}{9\sqrt{3}}\times$ $\times(2\sqrt{3}-3)^{3/2}=$ $=0{,}081128$
3	$\int\limits_{-1}^{1} f\,dx \approx \frac{1}{9}\left[5f(-\sqrt{0{,}6})+8f(0)+5f(\sqrt{0{,}6})\right]$	$\frac{1}{405}(1051-$ $-1170\sqrt{0{,}6})=$ $=0{,}357337$	$\frac{8}{2187}\times$ $\times(90\sqrt{0{,}6}-65)^{3/2}=$ $=0{,}040545$
4	$\int\limits_{-1}^{+1} f\,dx \approx \sum\limits_{-2}^{2} p_k f(x_k)\quad (p_0=0),$ $-x_{-1}=x_1=\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}};$ $p_{-1}=p_1=\frac{18+\sqrt{30}}{36},$ $-x_{-2}=x_2=\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}};$ $p_{-2}=p_2=\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	0,275993	0,021853

*) Таблица вычислена Ю. Я. Дорониным. О формуле Гаусса см. § 17.

Таблица 2*)

$$\mathscr{E}\left[W^{(r)}(1;\ -1,\ +1)\right]=\sup_{|f^{(r)}(x)|\leqslant 1}\left|\int_{-1}^{+1} f\,dx-L(f)\right|$$

$\mathscr{E}[W^{(r)}(1;\ -1,\ +1)]$					
$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$	$r=8$
—	—	—	—	—	—
$\frac{9-4\sqrt{3}}{108}=0{,}0191833$	$\frac{1}{135}=$ $=0{,}0074074$				
$\frac{1}{1458}\left[16\left(30\sqrt{0{,}6}-23\right)^{3/2}+1548\sqrt{0{,}6}-1198\right]=0{,}002011$	0,000909	$\frac{5-6\sqrt{0{,}6}}{1800}=$ $=0{,}0001958$	$\frac{1}{15750}=$ $=0{,}00006349$		
0,00236	0,00027	0,0000348	0,0000053	0,000001	0,0000003

Для двух узлов формулы Гаусса и Чебышева совпадают.

На интервале $(0, a)$ имеется всего два нуля функции $\psi(t)$, равные

$$c_1 = \frac{4+\sqrt{k}}{9}, \quad c_2 = \frac{4-\sqrt{k}}{9}, \qquad k = 90a - 65,$$

и при этом $\psi(t)$ отрицательна на интервале (c_2, c_1) и положительна вне его.

Заметим еще, что

$$c_1 + c_2 = \frac{8}{9}, \quad c_2 - c_1 = -\frac{2\sqrt{k}}{9},$$

$$c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2 = \frac{48+k}{81} = \frac{90a-17}{81}.$$

Поэтому имеем $(5a^2 = 3)$

$$\frac{1}{2}I = \int_0^{c_2}\left[\frac{(1-t)^2}{2} + \frac{5}{9}(t-a)\right]dt -$$
$$- \int_{c_2}^{c_1}\left[\frac{(1-t)^2}{2} + \frac{5}{9}(t-a)\right]dt +$$
$$+ \int_{c_1}^{a}\left[\frac{(1-t)^2}{2} + \frac{5}{9}(t-a)\right]dt + \int_a^1 \frac{(1-t)^2}{2}dt =$$
$$= \frac{1}{6}\left[-(1-t)^3\Big|_0^{c_2} + (1-t)^3\Big|_{c_2}^{c_1} - (1-t)^3\Big|_{c_1}^{a} - (1-t)^3\Big|_a^1\right] +$$
$$+ \frac{5}{18}\left[(t-a)^2\Big|_0^{c_2} - (t-a)^2\Big|_{c_2}^{c_1} + (t-a)^2\Big|_{c_1}^{a}\right] =$$
$$= \frac{1}{3}\left[-(1-c_2)^3 + (1-c_1)^3\right] +$$
$$+ \frac{5}{9}\left[(c_2-a)^2 - (c_1-a)^2\right] + \left[\frac{1}{6} - \frac{5}{18}a^2\right] =$$
$$= (c_2 - c_1)\left[1 - \frac{4}{9}(c_1+c_2) - \frac{10}{9}a + \frac{1}{3}(c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2)\right] =$$
$$= -\frac{2\sqrt{k}}{9}\left(1 - \frac{32}{81} - \frac{10}{9}a + \frac{90a-17}{243}\right) =$$
$$= \frac{4\sqrt{k}}{2187}(90a - 65) = \frac{4k^{3/2}}{2187},$$

и мы получили оценку

$$\mathscr{E}\left[W^{(r)}(1; -1, +1)\right] = \frac{8}{2187}\left(90\sqrt{\frac{3}{5}} - 65\right)^{3/2},$$

приведенную в таблице.

§ 6. УСЛОЖНЕННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ. ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЙ СВЕРХУ ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Зададим на отрезке [0, 1] систему точек (узлов)

$$0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \leqslant 1 \tag{6.1}$$

и чисел (весов)

$$p_0, p_1, \ldots, p_{m-1} \tag{6.2}$$

и составим линейный функционал

$$L(f) = L(0, 1; f) = \sum_0^{m-1} p_k f(x_k), \tag{6.3}$$

где f — произвольная непрерывная на отрезке [0, 1] функция.

Будем считать, что $L(f)$ есть приближенное выражение для интеграла от $f(x)$ на отрезке [0, 1]:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx L(f). \tag{6.4}$$

Таким образом, (6.4) есть (приближенная) квадратурная формула, определенная узлами (6.1) и весами (6.2).

Пусть теперь задан произвольный отрезок $[\alpha, \beta]$. Будем называть квадратурную формулу

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \approx L(\alpha, \beta; f), \tag{6.5}$$

где

$$L(\alpha, \beta; f) = \sum_0^{m-1} p'_k f(x'_k),$$

подобной формуле (6.4), а функционал $L(\alpha, \beta; f)$ — *подобным функционалу* $L(f)$, если система точек α, $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, β геометрически подобна системе $0, x'_0, x'_1, \ldots, x'_{m-1}, 1$, а веса p'_k относятся соответственно к весам p_k, как длина отрезка $[\alpha, \beta]$ к единице, иначе говоря, если выполняются соотношения

$$x'_k = \alpha + x_k(\beta - \alpha), \quad p'_k = p_k(\beta - \alpha)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, m - 1).$$

На практике, если требуется вычислить приближенно определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

обычно поступают следующим образом: выбирают ту или иную квадратурную формулу (6.4), например, формулу Симпсона, делят отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками

$$\xi_k = a + \frac{b-a}{n} k, \tag{6.6}$$

и к каждому отдельному частичному интервалу (ξ_k, ξ_{k+1}) $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ применяют квадратурную формулу, подобную формуле (6.4), соответствующую отрезку (ξ_k, ξ_{k+1}):

$$\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f(x)\,dx \approx L(\xi_k, \xi_{k+1}; f).$$

В результате, исходя из квадратурной формулы (6.4), которую мы будем называть *канонической*, мы получим *усложненную* квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f). \tag{6.7}$$

Например, усложненная квадратурная формула прямоугольников выглядит, очевидно, так:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_0^{n-1} f(x'_k),$$

где

$$x'_k = a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Усложненная квадратурная формула трапеций имеет такой вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{2n}[f(\xi_0)+2f(\xi_1)+2f(\xi_2)+\ldots+2f(\xi_{n-1})+f(\xi_n)],$$

где числа ξ_k определяются равенствами (6.6).

Усложненная формула Симпсона имеет такой вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\{f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots$$
$$\ldots+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\},$$

где

$$x_i = a + i\frac{b-a}{2n} \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n).$$

Легко видеть, что если квадратурная формула (6.4) точна для всех многочленов $P_\rho(x)$ степени ρ, т. е. если для всех $P_\rho(x)$ выполняется равенство

$$\int_0^1 P_\rho(x)\,dx = L(P_\rho), \tag{6.8}$$

то это же имеет место для соответствующей усложненной формулы (6.7).

В силу (4.7) имеем

$$\int_0^1 f\,dx - L(f) = \int_0^1 F_r(t)\,f^{(r)}(t)\,dt, \tag{6.9}$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_0^m p_k K_r(x_k - t)\right]. \tag{6.10}$$

Положим, как в § 5,

$$c_r = \max_{f \in W^{(r)}(1;\,0,\,1)} \left|\int_0^1 f\,dx - L(f)\right| = \int_0^1 |F_r(t)|\,dt. \tag{6.11}$$

Теорема 1. *Если квадратурная формула* (6.4) *точна для всех многочленов степени* $r-1$, *то для любой функции* f, *принадлежащей к классу* $W^{(r)}(M;a,b)$, *имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_0^{n-1}L(\xi_k,\xi_{k+1};f)\right|\leqslant\frac{(b-a)^{r+1}c_rM}{n^r}.\qquad(6.12)$$

Существует функция f_*, *зависящая от* n, *принадлежащая к классу* $W^{(r)}(M;a,b)$, *для которой неравенство* (6.12) *превращается в равенство.*

Доказательство. На основании свойств подобия функционала $L(\xi_k,\xi_{k+1};f)$ функционалу $L(f)$ и равенства (6.9) имеем (пояснения ниже)

$$\int_a^b f(x)\,dx-\sum_0^{n-1}L(\xi_k,\xi_{k+1};f)=$$

$$=\sum_0^{n-1}\left\{\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}f\,dx-L(\xi_k,\xi_{k+1};f)\right\}=$$

$$=h\sum_0^{n-1}\left\{\int_0^1 f(\xi_k+hu)\,du-L[f(\xi_k+hu)]\right\}=$$

$$=h^{r+1}\sum_0^{n-1}\int_0^1 F_r(u)f^{(r)}(\xi_k+hu)\,du\qquad\left(h=\frac{b-a}{n}\right).\qquad(6.13)$$

Символ $L[f(\xi_k+hu)]$ обозначает $L(F)$, где $F(u)=f(\xi_k+hu)$.

Если теперь функция f принадлежит к классу $W^{(r)}(M;a,b)$, то

$$\left|\int_a^b f\,dx-\sum_0^{n-1}L(\xi_k,\xi_{k+1};f)\right|\leqslant$$

$$\leqslant h^{r+1}\sum_0^{n-1}M\int_0^1|F_r(t)|\,dt=\frac{(b-a)^{r+1}c_rM}{n^r},\qquad(6.14)$$

что доказывает неравенство (6.12).

Нам остается показать возможность построения функции $f_* \in W^{(r)}(M; a, b)$, для которой неравенство (6.12) обращается в равенство. Пусть $f_k(x)$ есть некоторая функция, определенная на отрезке $[\xi_k, \xi_{k+1}]$, имеющая кусочно-непрерывную производную порядка r и удовлетворяющая условию

$$f_k^{(r)}(\xi_k + hu) = M \operatorname{sign} F_r(u) \tag{6.15}$$

$$(0 < u < 1, \quad k = 0, \ldots, n-1).$$

Положим $f_*(x) = f_0(x)$ на отрезке $[\xi_0, \xi_1]$. Если функция $f_*(x)$ уже определена на отрезке $[\xi_0, \xi_k]$ и имеет на его конце ξ_k производные*), равные

$$f_*(\xi_k) = \alpha_0, \quad f_*'(\xi_k) = \alpha_1, \ \ldots, \quad f_*^{(r-1)}(\xi_k) = \alpha_{r-1},$$

то положим

$$f_*(x) = f_k(x) + P_{r-1,\,k}(x) \tag{6.16}$$

на отрезке $[\xi_k, \xi_{k+1}]$, где $P_{r-1,\,k}(x)$ есть многочлен степени $r-1$, подобранный так, чтобы правая часть (6.16) в точке ξ_k имела производные до $(r-1)$-го порядка включительно, равные соответственно числам $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$.

Этим функция $f_*(x)$ полностью определена (по индукции) на отрезке $[a, b]$. Она, очевидно, принадлежит к классу $W^{(r)}(M; a, b)$. Подставим ее в (6.13) и примем во внимание, что

$$\frac{d^r}{dx^r} P_{r-1,\,k}(x) \equiv 0.$$

Тогда на основании (6.15) получим:

$$\int_a^b f_*\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f_*) =$$

$$= h^{r+1} \sum_0^{n-1} \int_0^1 F_r(u)\, M \operatorname{sign} F_r(u)\,du =$$

$$= M h^{r+1} n \int_0^1 |F_r(u)|\,du = \frac{(b-a)^{r+1} c_r M}{n^r},$$

и теорема полностью доказана.

*) Здесь и в дальнейшем считается, что производная нулевого порядка равна самой функции.

Если для функции $f(x)$, для которой мы хотим вычислить определенный интеграл, имеется возможность оценить ее несколько производных, т. е. если возможно узнать несколько констант M_1, M_2, ..., для которых имеют место на отрезке $[a, b]$ неравенства

$$|f'(x)| \leqslant M_1, \quad |f''(x)| \leqslant M_2, \ \ldots,$$

то знание численных величин c_r позволяет, пользуясь оценкой (6.12), выбрать среди соответствующих квадратурных формул ту, которая дает лучшее приближение.

Эта теорема может быть перенесена на класс $W_{L_p}^{(r)}(M; a, b)$ следующим образом.

Теорема 1'. *Для любой функции f, принадлежащей к классу $W_{L_p}^{(r)}(M; a, b)$, где $1 < p < \infty$, имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^{r+1-\frac{1}{p}} c_r^{(q)} M}{n^r},$$

$$c_r^{(q)} = \left(\int_0^1 |F_r(t)|^q\,dt\right)^{1/q}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right), \tag{6.17}$$

точное в том смысле, что существует функция f_*, принадлежащая к указанному классу, для которой это неравенство обращается в равенство.

Доказательство. Из (6.13) на основании неравенства Гёльдера следует:

$$\left|\int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)\right| =$$

$$= \left|h^{r+1} \sum_0^{n-1} \int_0^1 F_r(u) f^{(r)}(\xi_k + hu)\,du\right| \leqslant$$

$$\leqslant h^{r+1} \sum_0^{n-1} \left(\int_0^1 |F_r|^q\,dt\right)^{1/q} \left(\int_0^1 |f^{(r)}(\xi_k + hu)|^p\,du\right)^{1/p} =$$

$$= h^{r+1-\frac{1}{p}} c_r^{(q)} \sum_0^{n-1} \left(\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} | f^{(r)}(x) |^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant h^{r+1-\frac{1}{p}} c_r^{(q)} \left(\sum_0^{n-1} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} | f^{(r)} |^p \, dx \right)^{1/p} \left(\sum_0^{n-1} 1^q \right)^{1/q} =$$

$$= h^{r+1-\frac{1}{p}} n^{1/q} c_r^{(q)} \left(\int_a^b | f^{(r)} |^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant \frac{(b-a)^{r+1-\frac{1}{p}} c_r^{(q)} M}{n^r} \tag{6.18}$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

С другой стороны, если определить на отрезках $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ функции $f_k(x)$ так, чтобы их производные порядка r удовлетворяли равенствам

$$f_k^{(r)}(\xi_k + hu) = \frac{M \, | F_r(u) |^{q-1} \operatorname{sign} F_r(u)}{(b-a)^{1/p} \left(\int_0^1 | F_r |^q \, du \right)^{1/p}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

а затем построить функцию $f_*(x)$ с помощью функций $f_k(x)$, подобно тому как это было сделано выше, то полученная функция $f_*(x)$ будет, как нетрудно проверить, принадлежать к классу $W_{L_p}^{(r)}(M; a, b)$ и для нее неравенство (6.17) обратится в равенство.

Теорема 1″. *Для любой функции f класса* $W_L^{(r)}(M; a, b)$ *имеет место неравенство* (6.17), *где*

$$c_r^{(\infty)} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | F_r(t) |. \tag{6.19}$$

Правая часть этого неравенства не может быть уменьшена.

Доказательство. Соотношения (6.18) остаются в силе, если в них считать, что $c_r^{(\infty)}$ определяется равенством (6.19). Но теперь уже нельзя утверждать существование функции класса $W_L^{(r)}(M; a, b)$, для которой неравенство обращается в точное равенство.

Однако всегда можно построить на отрезках (ξ_k, ξ_{k+1}) функции $f_k(x)$ класса $W_L^{(r)}\left(\frac{M}{n}; \xi_k, \xi_{k+1}\right)$ так, чтобы левая часть неравенства

$$\left| \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f_k \, dx - L(\xi_k, \xi_{k+1}; f_k) \right| \leqslant \left(\frac{b-a}{n} \right)^{r+1} c_r^{(\infty)} M$$

была как угодно близка к правой. Далее при помощи функций $f_k(x)$ строим, как выше, функцию $f_*(x)$, для которой левая часть (6.18) как угодно мало отличается от правой.

Теорема 2. *Если квадратурная формула* (6.4) *точна для всех постоянных (многочленов нулевой степени), то для всякой функции* $f(x)$, *принадлежащей к классу* $H_\omega(a, b) = W^{(0)}H_\omega(a, b)$, *имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \sum_0^{m-1} |p_k|\right)(b-a)\,\omega\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Доказательство. Допустим пока, что функция f принадлежит к классу $H_\omega(0, 1)$ и пусть

$$f(x) = f(0) + \varphi(x).$$

Тогда (см. (2.1))

$$|\varphi(x)| = |f(x) - f(0)| \leqslant \omega(1)$$

и в силу того, что в данном случае квадратурная формула (6.4) точна для постоянных, будем иметь

$$\left|\int_0^1 f\,dx - L(f)\right| = \left|\int_0^1 \varphi\,dx - \sum_0^{m-1} p_k\varphi(x_k)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \omega(1)\left(1 + \sum_0^{m-1} |p_k|\right).$$

Если теперь функция f принадлежит к классу $H_\omega(a, b)$, то, приняв во внимание соотношение (6.13) (без последнего равенства) и учитывая, что

$$|f(\xi_k + hu'') - f(\xi_k + hu')| \leqslant \omega(h(u'' - u')) \leqslant \omega(h)$$
$$(0 \leqslant u' < u'' \leqslant 1),$$

получим

$$\left|\int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)\right| \leqslant$$

$$\leqslant h \sum_0^{n-1} \left| \int_0^1 f(\xi_k + hu)\,du - L[f(\xi_k + hu)] \right| \leqslant$$

$$\leqslant h \sum_0^{n-1} \omega(h) \left(1 + \sum_0^{m-1} |p_k|\right) =$$

$$= \left(1 + \sum_0^{m-1} |p_k|\right)(b-a)\,\omega\left(\frac{b-a}{n}\right) \qquad \left(h = \frac{b-a}{n}\right).$$

Теорема 3. *Если квадратурная формула* (6.4) *точна для многочленов степени r, то для всех функций f, принадлежащих к классу $W^{(r)}H_\omega(a, b)$, при $r \geqslant 1$ имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)\right| \leqslant (b-a)^{r+1} c_r \frac{\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)}{n^r}, \tag{6.20}$$

где c_r определяется формулой (6.11).

Доказательство. Если в равенство

$$\int_0^1 f\,dx - L(f) = \int_0^1 F_r(t) f^{(r)}(t)\,dt$$

(см. (5.1) и § 4), которое было выведено при условии, что квадратурная формула (6.4) точна для многочленов степени $r-1$, подставить в качестве $f(x)$ функцию x^r, то в силу того, что рассматриваемая в этой теореме квадратурная формула точна для многочленов степени r, получим

$$\int_0^1 F_r(t)\,dt = 0. \tag{6.21}$$

Пусть теперь функция f принадлежит к классу $W^{(r)}H_\omega(a, b)$. Применим к ней преобразование (6.13).

Тогда, учитывая (6.21), получим:

$$\left|\int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)\right| =$$

$$= h^{r+1}\left|\sum_0^{n-1}\int_0^1 F_r(u)\, f^{(r)}(\xi_k + hu)\,du\right| =$$

$$= h^{r+1}\left|\sum_0^{n-1}\int_0^1 F_r(u)\,[f^{(r)}(\xi_k + hu) - f^{(r)}\,\xi_k)]\,du\right| \leqslant$$

$$\leqslant h^{r+1}\sum_0^{n-1}\int_0^1 |F_r(u)|\,|f^{(r)}(\xi_k + hu) - f^{(r)}(\xi_k)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant h^{r+1}\sum_0^{n-1}\int_0^1 |F_r(u)|\,\omega(h)\,du = (b-a)^{r+1}\,c_r\,\frac{\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)}{n^r},$$

и теорема доказана.

Заметим, что в то время как оценки, полученные в теореме 1 (а также 1′ и 1″), абсолютно точны и не могут быть улучшены, оценки, полученные в теоремах 2 и 3, этим свойством не обладают. Их можно улучшать далее. Однако доказано (см. [13]), что в смысле порядка обе последние оценки улучшены быть не могут. Это значит, что если в неравенстве (6.20) заменить r на большее число r_1 или функцию $\omega(x)$ на другую $\omega_1(x)$, для которой

$$\lim_{x\to 0}\frac{\omega_1(x)}{\omega(x)} = 0,$$

то ни при какой константе A левая часть (6.20) не может быть меньшей $A\dfrac{\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)}{n^{r_1}}$ или, соответственно, $A\dfrac{\omega_1\left(\frac{b-a}{n}\right)}{n^r}$ для всех $f \in W^{(r)}H_\omega(a, b)$ и $n = 1, 2, \ldots$

Некоторые точные оценки для классов функций, удовлетворяющих условию Липшица, были получены А. Х. Турецким [16].

§ 7. ОЦЕНКИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ. ВЫБОР КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ

В силу теоремы 1 предыдущего параграфа, если к функции f, принадлежащей к классу $W^{(r)}(M; a, b)$, применить усложненную квадратурную формулу

$$\int_a^b f\,dx \approx \sum_0^{n-1} L(\xi_{k-1}, \xi_k; f), \tag{7.1}$$

точную для многочленов степени $r-1$, то порядок приближения *) при помощи этой формулы равен $O(n^{-r})$. Этот результат дает оценку приближения сверху для всего класса функций

$$W^{(r)}(M;\ a,\ b).$$

Теорема 1 утверждает также существование в классе $W^{(r)}(M; a, b)$ функции (зависящей от n), для которой порядок приближения при помощи формулы (7.1) достигается. В этом параграфе будет показано, что это явление в известном смысле имеет место для каждой (не зависящей от n) функции класса $W^{(r)}(M; a,b)$, если только она не является многочленом степени $r-1$ и если квадратурная формула не точна для многочленов степени r. Какова бы ни была функция f класса $W^{(r)}(M; a, b)$, если она не есть многочлен степени $r-1$, то порядок приближения, даваемого квадратурной формулой (7.1), в известном смысле строго равен $O(n^{-r})$.

---

*) Говорят, что порядок величины ε_n $(n = 1, 2, \ldots)$ есть $O(n^{-r})$ и пишут $\varepsilon_n = O(n^{-r})$, если существует положительная константа C, не зависящая от n, такая, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место

$$|\varepsilon_n| < \frac{C}{n^r}.$$

Величина ε_n имеет порядок, строго равный $O(n^{-r})$, если существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место

$$\frac{C_1}{n^r} < |\varepsilon_n| < \frac{C_2}{n^r}.$$

Мы начнем с того, что докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, $\xi_k = a + \frac{b-a}{n} k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, l — натуральное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < l \leqslant n$, $\omega(h)$ — модуль непрерывности функции $f^{(r)}(x)$ на отрезке $[a, b]$.*

Пусть, далее, квадратурная формула (7.1) является точной для многочленов степени $r-1$ и $\varkappa$ — константа, определяемая равенством (см. (6.10))

$$\varkappa = \int_0^1 F_r(t)\,dt. \tag{7.2}$$

Тогда имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\int_a^{\xi_l} f\,dx - \sum_0^{l-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) =$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right)^r \left\{\varkappa \int_a^{\xi_l} f^{(r)}(x)\,dx + O[\omega(h)]\right\} \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right), \tag{7.3}$$

где константу c, входящую в оценку $O[\omega(h)] \leqslant c\omega(h)$, можно взять не зависящей от l и модуля непрерывности ω функции $f^{(r)}(x)$.

Доказательство. Подобно (6.13) имеем

$$\int_a^{\xi_l} f\,dx - \sum_0^{l-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) = \sum_0^{l-1} \left\{\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f\,dx - L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)\right\} =$$

$$= h \sum_0^{l-1} \left\{\int_0^1 f(\xi_k + hu)\,du - L[f(\xi_k + hu)]\right\} =$$

$$= h^{r+1} \sum_0^{l-1} \int_0^1 F_r(u) f^{(r)}(\xi_k + hu)\,du = h^r(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{7.4}$$

$$\left(h = \frac{b-a}{n}\right),$$

где

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= h\sum_0^{l-1}\int_0^1 F_r(u)\, f^{(r)}(\xi_k)\, du = h\varkappa \sum_0^{l-1} f^{(r)}(\xi_k), \\ \sigma_2 &= h\sum_0^{l-1}\int_0^1 F_r(u)\,[f^{(r)}(\xi_k+hu) - f^{(r)}(\xi_k)]\, du. \end{aligned}\right\} \quad (7.5)$$

Но

$$\left|\int_0^{\xi_l} f^{(r)}\, dx - h\sum_0^{l-1} f^{(r)}(\xi_k)\right| \leqslant \sum_0^{l-1}\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} |f^{(r)}(x) - f^{(r)}(\xi_k)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_0^{l-1} h\omega(h) \leqslant \frac{l(b-a)}{n}\,\omega(h) \leqslant (b-a)\,\omega(h), \quad (7.6)$$

поэтому

$$\sigma_1 = \varkappa\int_0^{\xi_l} f^{(r)}(x)\, dx + O[\omega(h)]. \quad (7.7)$$

При этом в качестве константы, входящей в оценку $O[\omega(h)]$, можно взять число $|\varkappa|(b-a)$, т. е. величину, не зависящую от l и $f^{(r)}$.

Далее,

$$|\sigma_2| \leqslant h\sum_0^{l-1}\int_0^1 |F_r(u)|\,\omega(h)\, du \leqslant (b-a)\int_0^1 |F_r(u)|\, du\, \omega(h) =$$

$$= (b-a)\, c_r\omega(h) = O[\omega(h)]. \quad (7.8)$$

Здесь также константа, входящая в оценку $O[\omega(h)]$, не зависит от l и $f^{(r)}$.

Из (7.4), (7.5), (7.7) и (7.8) немедленно следует (7.3), причем константа, входящая в величину $O[\omega(h)]$, не зависит от l и $f^{(r)}$, так как этим свойством обладают соответствующие константы правых частей равенств (7.7) и (7.8).

Замечание 1. В доказанной теореме мы предположили, что производная $f^{(r)}(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Если предполагать, что функция $f^{(r)}(x)$ только интегрируема по Риману на $[a, b]$, то равенство (7.3) сохраняется в следующем виде:

$$\int_0^{\xi_l} f\,dx-\sum_0^{l-1}L(\xi_k,\xi_{k+1};f)=\left(\frac{b-a}{n}\right)^r\left\{\varkappa\int_0^{\xi_l}f^{(r)}(x)\,dx+\varepsilon_h\right\},\qquad(7.9)$$

где при $h\to0$ $\varepsilon_h\to0$ равномерно относительно l.

Действительно, обозначая через ω_k колебание функции $f^{(r)}(x)$ на отрезке $[\xi_k,\xi_{k+1}]$, т. е. разность между ее точными верхней и нижней гранями на этом отрезке, будем иметь вместо (7.6):

$$\left|\int_0^{\xi_l} f^{(r)}\,dx-h\sum_0^{l-1}f^{(r)}(\xi_k)\right|\leqslant\sum_0^{l-1}\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(\xi_k)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_0^{l-1}(\xi_{k+1}-\xi_k)\,\omega_k\leqslant\sum_0^{n-1}(\xi_{k+1}-\xi_k)\,\omega_k\to0\qquad(\text{при}\quad h\to0)$$

и вместо (7.8), имея в виду, что $\xi_{k+1}-\xi_k=h$,

$$|\sigma_2|\leqslant h\sum_0^{l-1}\int_0^1|F_r(u)|\,\omega_k\,du\leqslant c_r\sum_0^{n-1}(\xi_{k+1}-\xi_k)\,\omega_k\to0$$

$$(\text{при}\quad h\to0).$$

Это замечание принадлежит К. М. Кардашевскому.

Проанализируем полученную формулу (7.3). В ее правую часть входит константа $\varkappa$, определяемая равенством (7.2). Если рассматриваемая нами квадратурная формула, будучи точной для многочленов степени $r-1$, уже неточна для многочленов степени r, то она необходимо неточна для функции x^r. Поэтому на основании формулы (6.9) получим

$$\varkappa=\int_0^1 F_r(t)\,dt=\frac{1}{r!}\int_0^1 F_r(t)\frac{d^rt^r}{dt^r}\,dt=\frac{1}{r!}\left\{\int_0^1 t^r\,dt-L(t^r)\right\}\neq0.$$

Пусть теперь нам задана произвольная функция f, имеющая непрерывную производную порядка r и в то же время не являющаяся многочленом степени $r-1$. Очевидно, что производная $f^{(r)}(x)$ не равна тождественно нулю. Но тогда интеграл

$$\Phi(x)=\int_a^x f^{(r)}(t)\,dt$$

также не равен тождественно нулю на $[a, b]$. Пусть x_0 есть точка отрезка $[a, b]$ такая, что $\Phi(x_0) \neq 0$ и пусть l есть такое натуральное число, для которого выполняются неравенства

$$\xi_l \leqslant x_0 < \xi_{l+1}.$$

Таким образом, l есть функция от n. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_l = x_0$. Далее,

$$\int_a^{\xi_l} f^{(r)}(x)\,dx = \Phi(x_0) - \int_{\xi_l}^{x_0} f^{(r)}(x)\,dx = \Phi(x_0) + O(h), \quad (7.10)$$

так как

$$\left| \int_{\xi_l}^{x_0} f^{(r)}(x)\,dx \right| \leqslant M \,|\, x_0 - \xi_l \,| \leqslant Mh,$$

где

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\, f^{(r)}(x)\,|.$$

После подстановки (7.10) в формулу (7.3) получим

$$\int_a^{\xi_l} f\,dx - \sum_0^{l-1} L(\xi_k, \xi_{k+1};\ f) =$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right)^r \{\varkappa\Phi(x_0) + O(h) + O[\omega(h)]\} =$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right)^r \{\varkappa\Phi(x_0) + \varepsilon_h\} \qquad (\varepsilon_h \to 0 \ \text{ при } \ h \to 0). \quad (7.11)$$

Первое слагаемое суммы, стоящей в фигурных скобках, заведомо не равно нулю, а второе, ε_h, стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что левая часть (7.11) имеет порядок, строго равный $O(n^{-r})$.

Полученный нами результат приводит к следующему утверждению.

Теорема 5. *Если функция f имеет непрерывную, не равную тождественно нулю производную $f^{(r)}(x)$ порядка r и квадратурная формула (7.4) точна для многочленов степени $r-1$, но не точна для многочленов степени r, то существуют положительная* *константа c и точка x_0 на отрезке $[a, b]$ такие, что имеет место неравенство*

$$\left| \int_a^{\xi_l} f\,dx - \sum_0^{l-1} L(\xi_{k-1}, \xi_k; f) \right| > \frac{c}{n^r} \qquad (7.12)$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$, где l — наибольшее натуральное число, при котором $\xi_l \leqslant x_0$.

В частности, если

$$\int_a^b f^{(r)}(x)\,dx \neq 0,$$

то можно считать $l = n$ и, таким образом, $\xi_n = b$.

Если же

$$\int_a^b f^{(r)}(x)\,dx = 0,$$

то $x_0 < b$.

Теорема 5 является некоторым дополнением к теореме 1.

Формулировка теоремы 1 может быть усилена. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Если квадратурная формула (7.1) точна для всех многочленов степени $r - 1$, то для любой функции f, принадлежащей к классу $W^{(r)}(M; a, b)$, имеет место неравенство*

$$\sum_0^{n-1} \left| \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f\,dx - L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{r+1} c_r M}{n^r}. \qquad (7.13)$$

Чтобы убедиться в верности этого утверждения, нужно проследить еще раз выкладки (6.13) и (6.14), которые приводились при доказательстве теоремы 1.

Соответствующий аналог теоремы 5, представляющий в то же время следствие теоремы 5, выглядит так:

Теорема 7. *Если функция f имеет непрерывную, не равную тождественно нулю производную $f^{(r)}(x)$ порядка r и квадратурная формула (7.1) точна для многочленов степени $r - 1$, но не точна для многочленов степени r, то существует положительная* *константа с такая, что имеет место неравенство*

$$\sum_{0}^{n-1}\left|\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f\,dx - L(\xi_k, \xi_{k+1};\ f)\right| > \frac{c}{n^r}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$

Замечание 2. В теоремах 5 и 7 вместо непрерывности $f^{(r)}(x)$ можно предполагать интегрируемость $f^{(r)}(x)$ по Риману (см. замечание 1 в этом параграфе).

Таким образом, доказано, что для всех функций, имеющих непрерывную (или даже интегрируемую по Риману) на $[a, b]$ производную порядка r, исключая только многочлены P_{r-1} степени $r-1$, приближение при помощи квадратурной формулы (7.1) имеет порядок, строго равный $O(n^{-r})$. Следовательно, если функция $f(x)$ имеет производную более высокого порядка, чем r, — пусть она даже будет аналитической, — все равно при применении для вычисления ее определенного интеграла квадратурной формулы (7.1), точной только для многочленов P_{r-1} (но не для P_r), мы заведомо не сможем получить лучший эффект в смысле порядка приближения сравнительно с тем, который имеет место для функций, обладающих разрывной производной r-го порядка. Например, как бы ни была хороша функция, если только она не есть многочлен третьей степени, порядок приближения ее интеграла при применении усложненной формулы Симпсона заведомо не может быть лучшим, чем $O(n^{-4})$.

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$, скажем, пятую производную, то для того, чтобы это дифференциальное свойство функции могло дать полный эффект в смысле порядка приближения квадратурной формулы, необходимо взять квадратурную формулу, точную для всех многочленов четвертой степени, например, усложненную формулу Котеса с пятью узлами или усложненную формулу Гаусса с тремя узлами (см. § 5).

Мы рассматривали случай, когда определенный интеграл от функции класса $W^{(r)}(a, b)$ приближенно вычисляется при помощи усложненной квадратурной формулы, точной для многочленов степени $r-1$. Но может случиться, что функция принадлежит к классу $W^{(r)}(a, b)$, а квадратурная формула точна для многочленов степени $\rho - 1$, и при этом r и ρ независимы друг от друга. Если $r \geqslant \rho$, то, как мы уже выяснили, порядок приближения при помощи квадратурной формулы (7.1) равен $O(n^{-\rho})$, и этот порядок для всех функций $f \in W^r(a, b)$, за исключением многочленов степени $\rho - 1$, не может быть улучшен.

Попробуем отдать себе отчет в том, что будет, когда $r < \rho$. Из того, что квадратурная формула точна для многочленов степени $\rho - 1$, следует, что она точна для многочленов степени $r - 1$. Таким образом, на основании теоремы 6 мы можем утверждать, что для всего класса $W^{(r)}(M; a, b)$ функций имеет место оценка (7.13), дающая точный порядок $O(n^{-r})$ приближения квадратурной формулы. Однако для каждой отдельной функции f класса $W^{(r)}(M; a, b)$ этот порядок несколько лучше. Это видно из формулы (7.3), которая очевидно применима к рассматриваемому случаю. В этой формуле константа $\varkappa$

$$\varkappa = \int_0^1 F_r(t)\,dt = \frac{1}{r!}\int_0^1 F_r(t)\,\frac{d^r t^r}{dt^r}\,dt$$

равна нулю, что следует из основного равенства (6.9) и того обстоятельства, что по условию наша квадратурная формула точна для многочленов степени $\rho > r - 1$. Поэтому для каждой отдельной функции f класса $W^{(r)}(a, b)$ имеет место равенство

$$\int_0^{\xi_l} f\,dx - \sum_0^{l-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)^r \varepsilon_n = o(n^{-r}),$$

где $\varepsilon_n \to 0$ равномерно относительно l $(0 \leqslant l \leqslant n)$.

В некоторых случаях эта оценка может быть усилена. Например, если функция $f(x)$ класса $W^{(r)}(M; a, b)$ имеет разрывы производной $f^{(r)}(x)$ только в точках $a_1, a_2, \ldots, a_N$, принадлежащих к совокупности ξ_k, а на отрезках $[a, a_1]$, $[a_1, a_2], \ldots, [a_N, b]$ она имеет кусочно-непрерывные производные порядка ρ, то порядок приближения квадратурной формулы

(7.1) будет $o(n^{-\rho})$ *). Это обстоятельство непосредственно вытекает из неравенства (7.13), которое надо применить к каждому из конечного числа отрезков $[a, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_N, b]$.

Если же точки a_k разрыва $f^{(r)}$ будут оказываться строго внутри отрезков $[\xi_k, \xi_{k+1}]$, то, вообще говоря, порядок приближения для данной функции, даваемый квадратурной формулой (7.1), не будет $o(n^{-r})$.

Высказанные соображения следует иметь в виду при выборе той или иной квадратурной формулы, когда необходимо вычислить приближенно определенный интеграл от заданной конкретно функции.

Надо, впрочем, учесть, что мы здесь говорили о порядке приближения. Сам по себе порядок (без знания входящей в него постоянной) дает представление только о том, как ведет себя приближение, если увеличивать n до бесконечности. Но в практических вычислениях приходится довольствоваться определенными фиксированными значениями n. Для действительной оценки приближения при фиксированном n решающую роль играет знание не только порядка приближения, но и константы, входящей в порядок. Поясним это замечание на примере.

Если известно, что две рассматриваемые квадратурные формулы дают порядки приближения $O(n^{-2})$ и $O(n^{-4})$, то это значит только, что существуют две положительные константы C_1 и C_2 такие, что указанные приближения не превышают соответственно $C_1 n^{-2}$ и $C_2 n^{-4}$. Ясно, что вторая оценка при достаточно больших n лучше первой, т. е. существует такое достаточно большое n_0, что для всех $n > n_0$

$$C_1 n^{-2} > C_2 n^{-4}. \tag{7.14}$$

Но при малых n вопрос о том, какая из рассматриваемых величин меньше, зависит еще от того, чему равны C_1 и C_2. Например, если $C_1 = 0{,}001$ и $C_2 = 1$, то при $n \leqslant 10$ первая оценка лучше второй. Заметим, что и само число n_0, начиная с которого имеет место

*) Пишут $\alpha_n = o(\beta_n)$ $(n \to \infty)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$, и говорят, что α_n при $n \to \infty$ есть величина высшего порядка малости сравнительно с β_n.

неравенство (7.14), зависит от величин констант C_1 и C_2.

Из сказанного следует, что если нам нужно знать действительную численную оценку приближения данной квадратурной формулы, то мы не можем избежать вычисления соответствующей константы приближения. Мы знаем из предыдущего (см. неравенство (6.12)), что этот вопрос в рассмотренных нами случаях сводится к вычислению констант c_r, определяемых равенством (6.11).

К высказанным соображениям на практике примешиваются еще другие немаловажные обстоятельства. Более точная квадратурная формула часто оказывается и более сложной, более громоздкой. Таким образом, вычисление с ее помощью связано с затратой большего труда. Надо еще иметь в виду, что во многих случаях на практике нам известны не точные, а вычисленные с некоторыми ошибками приближенные значения $f(x_k)$ функции $f(x)$. Это обстоятельство приводит к тому, что суммы

$$L(f) = \sum_{0}^{m-1} p_k f(x_k)$$

или подобные им суммы для усложненных квадратурных формул также оказываются известными нам только с точностью до некоторых ошибок, которые, естественно, будут тем большими, чем более громоздки взятые квадратурные формулы.

§ 8. КОНСТАНТА $\varkappa$. УТОЧНЕНИЕ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ

В предыдущем параграфе была выявлена роль констант

$$\varkappa = \int_0^1 F_r(t)\,dt$$

в теоретических вопросах приближения квадратурными формулами. Ниже мы увидим, что константы $\varkappa$ также могут играть существенную роль при самом построении квадратурных формул.

Представим себе, что для вычисления определенного интеграла на отрезке $[a, b]$ от некоторой функции $f(x)$ мы воспользовались определенной усложненной квадратурной формулой

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f), \tag{8.1}$$

точной для всех многочленов степени $r-1$. Если функция имеет ограниченную производную порядка r, то, как мы знаем, порядок приближения формулы (8.1) равен $O(n^{-r})$. Мы знаем также, что если наша функция имеет на самом деле производную порядка $r+1$, то это обстоятельство в случае, если формула не точна для многочленов степени r, само по себе не вызывает улучшения порядка приближения. Однако мы сейчас увидим, что возможно добавить к правой части приближенного равенства (8.1) несложное выражение такое, что оно приведет к новой квадратурной формуле, дающей приближение уже порядка $O(n^{-r-1})$ для функций с непрерывной производной $f^{(r+1)}(x)$.

Будем для удобства рассуждений считать, что наша функция $f(x)$ задана и имеет непрерывную производную порядка $r+1$ на отрезке $[a, c]$, где $b < c$. Это не ограничивает общности, так как функцию, имеющую на $[a, b]$ непрерывную производную $f^{(r+1)}(x)$, можно всегда продолжить на $[a, c]$ с сохранением этого свойства.

Положим

$$\Delta_k f = f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k), \quad \Delta_k^2 f = \Delta_{k+1} f - \Delta_k f,$$
$$\Delta_k^3 f = \Delta_{k+1}^2 f - \Delta_k^2 f, \ \ldots$$

и покажем, что квадратурная формула

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) + h\varkappa\left(\Delta_n^{r-1} f - \Delta_0^{r-1} f\right) \\ &\qquad\qquad \left(h = \frac{b-a}{n}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

дает для всех функций $f(x)$, имеющих непрерывную производную порядка $r+1$, приближение порядка $O(n^{-r-1})$.

В самом деле, заметим, что

$$\sum_{0}^{n-1} \Delta_k^r f = \sum_{0}^{n-1} (\Delta_{k+1}^{r-1} f - \Delta_k^{r-1} f) = \Delta_n^{r-1} f - \Delta_0^{r-1} f.$$

Кроме этого, на основании теоремы о среднем имеет место равенство *)

$$\frac{\Delta_k^r f}{h^r} = f^{(r)}(\xi_k + rh\theta_k),$$

где θ_k удовлетворяет неравенству $0 < \theta_k < 1$.

Поэтому в силу равенства (6.13)

$$\left| \int_a^b f\,dx - \sum_{0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) - h\varkappa(\Delta_n^{r-1} f - \Delta_0^{r-1} f) \right| =$$

$$= \left| h^{r+1} \sum_{0}^{n-1} \int_0^1 F_r(u) f^{(r)}(\xi_k + hu)\,du - h^{r+1} \sum_{0}^{n-1} \int_0^1 F_r(u) \frac{\Delta_k^r f}{h^r}\,du \right| \leqslant$$

$$\leqslant h^{r+1} \sum_{0}^{n-1} \int_0^1 |F_r(u)| \left| f^{(r)}(\xi_k + hu) - \frac{\Delta_k^r f}{h^r} \right| du =$$

$$= h^{r+1} \sum_{0}^{n-1} \int_0^1 |F_r(u)|\,|f^{(r)}(\xi_k + hu) - f^{(r)}(\xi_k + rh\theta_k)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant h^{r+1} rhnc_r K_{r+1} = K_{r+1} r(b-a) c_r h^{r+1} = O(n^{-r-1}),$$

где

$$c_r = \int_0^1 |F_r(t)|\,dt, \qquad K_{r+1} = \max_{a \leqslant x \leqslant c} |f^{(r+1)}(x)|.$$

Наше утверждение доказано.

---

*) При $r = 1$ это обычная теорема о среднем. Допустим, что она верна для $r - 1$, тогда

$$\frac{\Delta_k^r f}{h^r} = \frac{\Delta_k^{r-1}[f(x_k + h) - f(x)]}{h^r} =$$

$$= \frac{f^{(r-1)}(\xi_k + (r-1)h\theta' + h) - f^{(r-1)}(\xi_k + (r-1)h\theta')}{h} =$$

$$= f^{(r)}(\xi_k + (r-1)h\theta' + h\theta'') = f^{(r)}(\xi_k + rh\theta_k).$$

Здесь $0 < \theta', \theta'', \theta_k < 1$.

При помощи формулы (8.2) можно в некоторых случаях уточнить результат, уже полученный по формуле (8.1). Представим себе, что после вычислений по формуле (8.1) обнаружилось, например, по характеру изменения $\Delta_k^r f$, что рассматриваемая функция $f(x)$ имеет малую производную порядка $r+1$. В этом случае добавление к правой части (8.1) выражения $h\varkappa(\Delta_n^{r-1}f - \Delta_0^{r-1}f)$ или более удобного (отличающегося от него на величину $O(n^{-r-1})$) выражения

$$h\varkappa(\Delta_{n-r+1}^{(r-1)}f - \Delta_0^{r-1}f) \tag{8.3}$$

может привести к дальнейшему уточнению полученного приближенного результата.

Вычисление точного значения $\varkappa$ не представляет никаких трудностей. Оно сводится к простому интегрированию функции $F_r(t)$, равной на отдельных частичных интервалах отрезка [0,1] некоторым известным алгебраическим многочленам степени r.

Пример. Для формулы Симпсона при $r = 4$ константа

$$\varkappa = \frac{1}{3!}\int_0^1 \left\{ \frac{(1-t)^4}{4} - \frac{2}{3}K_4\left(\frac{1}{2}-t\right) - \frac{1}{6}K_4(1-t)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{ \frac{1}{20} - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-t\right)^3 dt - \frac{1}{6}\int_0^1 (1-t)^3\, dt \right\} = \frac{-1}{2880}.$$

Таким образом, добавочное слагаемое (8.3) в этом случае выглядит так:

$$-\frac{h}{2880}(\Delta_{n-3}^3 f - \Delta_0^3 f).$$

§ 9. ОЦЕНКИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

При приближенном вычислении кратных интегралов вида

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$$

очень часто применяют квадратурные формулы, которые можно получить из одномерных квадратурных формул путем соответствующего их усложнения.

Возьмем в качестве исходных какие-либо две квадратурные формулы вида (4.1):

$$\int_0^1 f\,dx \approx L(f), \quad \int_0^1 f\,dy \approx L_1(f), \tag{9.1}$$

где

$$L(f) = \sum_0^{m-1} p_k f(x_k), \quad 0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \leqslant 1,$$

$$L_1(f) = \sum_0^{m_1-1} p'_k f(y_k), \quad 0 \leqslant y_0 < y_1 < \ldots < y_{m_1-1} \leqslant 1.$$

При этом мы во всяком случае будем предполагать, что формулы (9.1) точны для постоянных, т. е. что выполняются условия

$$\sum_0^{m-1} p_k = \sum_0^{m_1-1} p'_k = 1. \tag{9.2}$$

Если на квадрате $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ задана непрерывная функция $f(x, y)$, то мы можем для приближенного вычисления ее кратного интеграла на указанном квадрате применить следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\,dx\,dy \approx \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m_1-1} p_k p'_l f(x_k, y_l) = L(0{,}1;\ 0{,}1;\ f). \tag{9.3}$$

Пусть теперь мы имеем два класса непрерывных функций $\varphi = \varphi(x)$, заданных на отрезке $[0, 1]$: $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$.

Обозначим через c' верхнюю грань:

$$c' = \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}'} \left| \int_0^1 \varphi\,dx - L(\varphi) \right|, \tag{9.4}$$

распространенную на все функции φ класса $\mathfrak{M}'$. Иначе говоря, константа c' есть наименьшее число среди чисел λ, для которых выполняются неравенства

$$\left|\int_0^1 \varphi\, dx - L(\varphi)\right| \leqslant \lambda \tag{9.5}$$

для всех функций φ класса $\mathfrak{M}'$. Мы предполагаем, что такая конечная константа c' существует*) для данного множества $\mathfrak{M}'$ функций.

Аналогично, положим

$$c'' = \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}''} \left|\int_0^1 \varphi\, dy - L_1(\varphi)\right|. \tag{9.6}$$

Если функция $f(x, y)$, заданная на прямоугольнике $-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1$, обладает тем свойством, что для всякого фиксированного y как функция от x она принадлежит к $\mathfrak{M}'$ и для всякого фиксированного x как функция от y принадлежит к $\mathfrak{M}''$, то в силу (9.2), (9.4) и (9.6) приближение при помощи нашей двумерной формулы (9.3) будет удовлетворять неравенству

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy - \sum_0^{m-1}\sum_0^{m_1-1} p_k p_l' f(x_k\ y_l)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1\int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy - \int_0^1 \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k, y)\, dy + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{m-1} p_k \int_0^1 f(x_k, y)\, dy - \sum_0^{m-1}\sum_0^{m_1-1} p_k p_l' f(x_k, y_l)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left|\int_0^1 f(x, y)\, dx - \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k, y)\right| dy +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} |p_k| \left|\int_0^1 f(x_k, y)\, dy - \sum_{l=0}^{m_1-1} p_l' f(x_k, y_l)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c' + c'' \sum_{k=0}^{m-1} |p_k| \tag{9.7}$$

---

*) Из общей теоремы анализа о существовании верхней грани следует, что верхняя грань c' существует, если существует хотя бы одно число λ, для которого имеет место (9.5) для всех φ, принадлежащих к классу $\mathfrak{M}'$.

или неравенству

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x, y)\,dx\,dy - \sum_0^{m-1}\sum_0^{m_1-1} p_k p'_l f(x_k, y_l)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c'\sum_{l=0}^{m_1-1}|p'_l| + c'', \qquad (9.8)$$

которое получается аналогичным рассуждением.

Исходя из формулы (9.3), можно для произвольного прямоугольника $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ построить квадратурную формулу

$$\int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dx\,dy \approx L(a, b;\ c, d;\ f) =$$

$$= (b-a)(d-c)\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m_1-1} p_k p'_l f(a+(b-a)x_k,$$

$$c+(d-c)y_l),$$

которую естественно назвать подобной исходной формуле.

Наконец, мы можем данный прямоугольник разбить на $\mu\nu$ равных прямоугольников σ_{ij} ($\xi_i\leqslant x\leqslant\xi_{i+1}$; $\eta_j\leqslant y\leqslant\eta_{j+1}$) ($i=0, 1, \ldots, \mu-1$; $j=0, 1, \ldots, \nu-1$), где точки ξ_i и η_j делят соответственно отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ на равные части, а затем к каждому такому прямоугольнику применить соответствующую подобную формулу. В результате мы получим, исходя из формулы (9.3), усложненную, соответствующую прямоугольнику $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$, квадратурную формулу:

$$\int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1} L_{ij}(f),$$

$$L_{ij}(f) = (\xi_{i+1}-\xi_i)(\eta_{k+1}-\eta_k)\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m_1-1} p_k p'_l f(\xi_i +$$

$$+ (\xi_{i+1}-\xi_i)x_k,\ \eta_j + (\eta_{j+1}-\eta_j)y_l).$$

Ниже мы приводим несколько теорем, дающих оценки приближения построенных таким образом квадратурных формул.

Теорема 1'''. *Пусть функция $f(x, y)$ имеет частные производные по x порядка r и по y порядка s, удовлетворяющие на прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant \leqslant y \leqslant d$ неравенствам*

$$\left|\frac{\partial^r f}{\partial x^r}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial^s f}{\partial y^s}\right| \leqslant N.$$

Пусть, далее, квадратурные формулы (9.1), *определяемые функционалами $L(f)$ и $L_1(f)$, точны соответственно для многочленов степеней $r-1$ и $s-1$. Тогда*

$$\left|\int_a^b \int_c^d f\,dx\,dy - \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} L_{ij}(f)\right| \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)(d-c)\left[c_r M\left(\frac{b-a}{\mu}\right)^r + Nc_s \sum_0^m |p_k| \left(\frac{d-c}{\nu}\right)^s\right],$$

где c_r и c_s — константы, определяемые по формуле (5.3) *соответственно для $L(f)$ и $L_1(f)$.*

Доказательство. Положим $h = \frac{b-a}{\mu}$, $g = \frac{d-c}{\nu}$. Тогда будем иметь:

$$\int_a^b \int_c^d f\,dx\,dy - \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} L_{ij}(f) =$$

$$= \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} \left(\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} f\,dx\,dy - L_{ij}(f)\right) =$$

$$= hg \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 f(\xi_i + hu, \eta_j + gv)\,du\,dv - \right.$$

$$\left. - L(0,1;\, 0,1;\, f(\xi_i + hu, \eta_j + gv)) \right\}. \qquad (9.9)$$

Функция $f(\xi_i + hu, \eta_j + gv)$ имеет на квадрате $0 \leqslant u$, $v \leqslant 1$ по u частную производную порядка r, не превышающую по абсолютной величине Mh^r и по v — частную производную порядка s, не превышающую по абсолютной величине Ng^s. Таким образом, она принадлежит при любом фиксированном v как функция от u к классу $W^{(r)}(Mh^r; 0, 1)$ и при любом фиксированном u как функция от v к классу $W^{(s)}(Ng^s; 0, 1)$. Поэтому в силу неравенства (4.8) имеет место неравенство

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i+hu, \eta_k+gv)\,du - L_u(f(\xi_i+hu; \eta_k+gv))\right| \leqslant \\ \leqslant c_r Mh^r, \qquad (9.10)$$

где $L_u(\varphi)$ обозначает операцию L, которая применяется к функции φ, рассматриваемой как функция от u при фиксированных остальных переменных.

Аналогично,

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i+hu, \eta_k+gv)\,dv - L_v(f(\xi_i+hu, \eta_k+gv))\right| \leqslant \\ \leqslant c_s Ng^s. \qquad (9.11)$$

Надо иметь в виду, что применение неравенства (4.8) законно лишь при условии, что формулы (9.1) точны соответственно для многочленов степеней $r-1$ и $s-1$.

Из (9.9), (9.10) и (9.11) вследствие неравенства (9.7), где надо считать $c' = c_r Mh^r$, $c'' = c_s Ng^s$, получим:

$$\left|\int_a^b\int_c^d f\,dx\,dy - \sum_0^{\mu-1}\sum_0^{\nu-1} L_{ij}(f)\right| \leqslant \\ \leqslant hg\sum_0^{\mu-1}\sum_0^{\nu-1}\left|\int_0^1\int_0^1 f(\xi_i+hu, \eta_j+gv)\,du\,dv - \right. \\ \left. - L(0,1; 0,1; f(\xi_i+hu, \eta_j+gv)\right| \leqslant \\ \leqslant \mu\nu hg\left(c_r Mh^r + c_s Ng^s\sum_0^{m-1}|p_k|\right) = \\ = (b-a)(d-c)\left[c_r M\left(\frac{b-a}{\mu}\right)^r + c_s\sum_0^{m-1}|p_k|\,N\left(\frac{d-c}{\nu}\right)^s\right],$$

и теорема доказана.

Теорема 2'. *Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет на прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ условиям*

$$\left.\begin{array}{l} |f(x', y) - f(x, y)| \leqslant \omega_1(|x' - x|), \\ |f(x, y') - f(x, y)| \leqslant \omega_2(|y' - y|), \end{array}\right\}, \quad (9.12)$$

где ω_1 и ω_2 — функции, для которых выполняются неравенства (2.2), и, кроме того, квадратурные формулы (9.1) точны для произвольных констант.

Тогда имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b \int_c^d f\,dx\,dy - \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} L_{ij}(f) \right| \leqslant$$
$$\leqslant A\omega_1\left(\frac{b-a}{\mu}\right) + B\omega_2\left(\frac{d-c}{\nu}\right), \quad (9.13)$$

где A и B — константы (см. ниже, (9.14)).

Доказательство. Из неравенств (9.12) следует, что функция $f(\xi_i + hu, \eta_j + gv)$ от u и v на прямоугольнике $0 \leqslant u$, $v \leqslant 1$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(\xi_i + hu', \eta_j + gv) - f(\xi_i + hu, \eta_j + gv)| \leqslant$$
$$\leqslant \omega_1(h|u' - u|) = \omega_{1h}(|u' - u|),$$
$$|f(\xi_i + hu, \eta_j + gv') - f(\xi_i + hu, \eta_j + gv)| \leqslant$$
$$\leqslant \omega_2(g|v' - v|) = \omega_{2g}(|v' - v|).$$

Таким образом, эта функция по переменной u принадлежит к классу $H_{\omega_{1h}}(0, 1)$ при любом фиксированном v и по переменной v принадлежит к классу $H_{\omega_{2g}}(0, 1)$ при любом фиксированном u. Поэтому в силу теоремы 2 (§ 6), где надо считать $a = 0$, $b = 1$, $n = 1$, имеют место неравенства

$$\left| \int_0^1 f(\xi_i + hu, \eta_j + gv)\,du - L_u(f(\xi_i + hu, \eta_j + gv)) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \sum_0^{m-1} |p_k|\right) \omega_1(h),$$

$$\left| \int_0^1 f(\xi_i + hu, \eta_j + gv)\,dv - L_v(f(\xi_i + hu, \eta_j + gv)) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \sum_0^{m_1-1} |p'_l|\right) \omega_2(g),$$

и, следовательно, из (9.9) на основании неравенства (9.7), в котором надо считать

$$c'=\left(1+\sum_{0}^{m-1}|p_k|\right)\omega_1(h),\quad c''=\left(1+\sum_{0}^{m_1-1}|p'_l|\right)\omega_2(g),$$

получим

$$\left|\int_a^b\int_c^d f\,dx\,dy-\sum_0^{\mu-1}\sum_0^{\nu-1}L_{ij}(f)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\mu\nu hg\,(A_1\omega_1(h)+B_1\omega_2(g))=A\omega_1(h)+B\omega_2(g),$$

где

$$\left.\begin{aligned}A&=(b-a)(d-c)\left(1+\sum_0^{m-1}|p_k|\right),\\ B&=(b-a)(d-c)\left(1+\sum_0^{m_1-1}|p'_l|\right)\left(\sum_{k=0}^{m-1}|p_k|\right).\end{aligned}\right\}\tag{9.14}$$

Теорема 3′. *Пусть функция $f(x,y)$ имеет частные производные соответственно порядка r по x $(r\geqslant 1)$ и s по y $(s\geqslant 1)$, удовлетворяющие на прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ условиям*

$$|f_x^{(r)}(x',y)-f_x^{(r)}(x,y)|\leqslant\omega_1(|x'-x|),$$
$$|f_k^{(s)}(x,y')-f_y^{(s)}(x,y)|\leqslant\omega_2(|y'-y|),$$

где ω_1 и ω_2 — функции, подчиняющиеся неравенствам (2.2). *Пусть, кроме того, квадратурные формулы* (9.1) *точны соответственно для многочленов степеней r и s. Тогда*

$$\left|\int_a^b\int_c^d f\,dx\,dy-\sum_0^{\mu-1}\sum_0^{\nu-1}L_{ij}(f)\right|\leqslant$$
$$\leqslant(b-a)(d-c)\left[c_r\left(\frac{b-a}{\mu}\right)^r\omega_1\left(\frac{b-a}{\mu}\right)+\right.$$
$$\left.+c_s\sum_0^{m-1}|p_k|\left(\frac{d-c}{\nu}\right)^s\omega_2\left(\frac{d-c}{\nu}\right)\right].\tag{9.15}$$

Доказательство. Из условий, наложенных на функцию $f(x,y)$, следует, что функция $f(\xi_i+hu,$ $\eta_j+gv)$ на квадрате $0\leqslant u$, $v\leqslant 1$ принадлежит по переменной u при фиксированном v к классу $W^{(r)}H_{h^r\omega_{1h}}(a, b)$, где $\omega_{1h}(u)=\omega_1(hu)$, и по переменной v при фиксированном u — к классу $W^{(s)}H_{g^s\omega_{2g}}(c, d)$. Таким образом, по теореме 3 § 6, где надо считать $a=0$, $b=1$, $n=1$ и заменить $\omega_1(x)$ на $h^r\omega_1(hx)$, будем иметь

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i+hu, \eta_j+gv)\,du - L_u(f(\xi_i+hu, \eta_j+gv))\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_r h^r \omega_1(h).$$

Аналогично,

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i+hu, \eta_j+gv)\,dv - L_v(f(\xi_i+hu, \eta_j+gv))\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_s g^s \omega_2(g),$$

и, следовательно, из (9.9) на основании неравенства (9.7), полагая в нем $c'=c_r h^r\omega_1(h)$ и $c''=c_s g^s\omega_2(g)$, получим:

$$\left|\int_a^b\int_c^d f\,dx\,dy - \sum_0^{\mu-1}\sum_0^{\nu-1} L_{ij}(f)\right| \leqslant$$
$$\leqslant hg\sum_0^{\mu-1}\sum_0^{\nu-1}\left|\int_0^1\int_0^1 f(\xi_i+hu, \eta_j+gv)\,du\,dv -\right.$$
$$\left. - L(0,1;\, 0,1;\, f(\xi_i+hu, \eta_j+gv))\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mu\nu hg\left(c_r h^r\omega_1(h) + c_s g^s\omega_2(g)\sum_0^{m-1}|p_k|\right) =$$
$$= (b-a)(d-c)\left[c_r\left(\frac{b-a}{\mu}\right)^r\omega_1\left(\frac{b-a}{\mu}\right) + \right.$$
$$\left. + c_s\sum_0^{m-1}|p_k|\left(\frac{d-c}{\nu}\right)^s\omega_2\left(\frac{d-c}{\nu}\right)\right].$$

Этим теорема доказана.

Распространение изложенных результатов на случай трех и более переменных не представляет затруднений. Например, в случае трех переменных, кроме исходных двух квадратурных формул (9.1), возникает необходимость в третьей:

$$\int_0^1 f\,dx \approx L_2(f),$$

$$L_2(f) = \sum_0^{m_2-1} p''_k f(z_k), \quad 0 \leqslant z_0 < z_1 < \ldots < z_{m_2} \leqslant 1.$$

Тогда исходная трехкратная формула выглядит так:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \approx$$

$$\approx \sum_0^{m-1} \sum_0^{m_1-1} \sum_0^{m_2-1} p_k p'_l p''_t f(x_k, y_l, z_t) = L(0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ f).$$

Для получения неравенства, аналогичного (9.7), теперь уже мы должны исходить из условия, что функция $f(x, y, z)$ по каждой из переменных x, y, z в отдельности принадлежит соответственно к классам $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$.

Имеют место следующие неравенства:

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz - \right.$$

$$\left. - \sum_0^{m-1} \sum_0^{m_1-1} \sum_0^{m_2-1} p_k p'_l p''_t f(x_k, y_l, z_t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z)\,dx\,dy - \sum_0^{m-1} \sum_0^{m_1-1} p_k p'_l f(x_k, y_l, z) \right| dz +$$

$$+ \sum_0^{m-1} \sum_0^{m_1-1} |p_k p'_l| \left| \int_0^1 f(x_k, y_l, z)\,dz - \sum_{t=0}^{m_2-1} p''_t f(x_k, y_l, z_t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant c' + c'' \sum_0^{m-1} |p_k| + c''' \sum_0^{m-1} \sum_0^{m_1-1} |p_k p'_l|,$$

где константы c' и c'' по-прежнему определяются равенствами (9.4) и (9.6) и

$$c''' = \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}'''} \left| \int_0^1 \varphi\, dx - L_2(\varphi) \right|.$$

§ 10. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Многообразие различных квадратурных формул бесконечно. При этом, в зависимости от требований, предъявляемых к методу приближенного вычисления определенного интеграла, и в зависимости от класса функций, к которым этот метод применяется, та или иная квадратурная формула может иметь большее или меньшее преимущество перед другими.

В этом параграфе мы решим одну экстремальную задачу, приводящую при некоторых обстоятельствах к квадратурной формуле, дающей наилучшее приближение.

Общая проблема, охватывающая в себе как частный случай эту задачу, заключается в следующем.

Задан класс функций H, определенных на отрезке $[0, 1]$ *и задано натуральное число m. Требуется среди всех квадратурных формул*

$$\int_0^1 f\, dx \approx L(f), \tag{10.1}$$

где

$$L(f) = \sum_0^{m-1} p_k f(x_k), \quad 0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \leqslant 1, \tag{10.2}$$

определить такую, чтобы величина верхней грани

$$\sup_{f \in H} \left| \int_0^1 f\, dx - L(f) \right|, \tag{10.3}$$

распространенной на все функции f класса H, была наименьшей.

Таким образом, речь здесь идет о таком выборе на отрезке $[0, 1]$ узлов формулы $x_0, \ldots, x_{m-1}$ и весов $p_0, \ldots, p_{m-1}$, при котором приближение, даваемое квадратурной формулой для всего класса функций H, было бы наилучшим среди всех возможных приближений.

Ниже мы решаем эту проблему для класса функций f, имеющих ограниченную на отрезке вторую производную.

Можно получить различные видоизменения поставленной задачи, если искать наилучшую в указанном смысле квадратурную формулу среди формул, у которых узлы и веса не произвольны, а подчинены определенным, заранее наложенным связям.

Начнем с того, что введем в рассмотрение класс функций $W_\alpha^{(r)}(M; a, b)$, состоящий из всех функций класса $W^{(r)}(M; a, b)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0 \qquad (a \leqslant \alpha \leqslant b).$$

Всякая функция $f(x)$, принадлежащая к классу $W_0^{(r)}(M; 0,1)$, может быть записана в виде интеграла (см. § 3)

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 K_r(x-t) f^{(r)}(t)\,dt,$$

где

$$K_r(u) = \begin{cases} u^{r-1} & \text{для} \quad u \geqslant 0, \\ 0 & \text{для} \quad u < 0, \end{cases} \tag{10.4}$$

и потому, независимо от того, будет ли квадратурная формула (10.1) точна или неточна для многочленов тех или иных степеней, рассуждая так же, как при получении соотношений (4.5), где надо положить $P_{r-1}(x) \equiv 0$, приходим к равенству

$$\int_0^1 f\,dx - L(f) = \int_0^1 F_r(t) f^{(r)}(t)\,dt,$$

справедливому для всех функций f класса $W_0^{(r)}(M; 0,1)$, где

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_0^{m-1} p_k K_r(x_k - t) \right].$$

Отсюда

$$\sup_{f \in W_0^{(r)}(M;\,0,1)} \left| \int_0^1 f\,dx - L(f) \right| =$$

$$= \frac{M}{(r-1)!} \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^r}{r} - \sum_0^{m-1} p_k K_r(x_k - t) \right| dt =$$

$$= \frac{M}{(r-1)!} \int_0^1 \left| \frac{u^r}{r} - \sum_0^{m-1} \lambda_k K_r(u - u_k) \right| du, \qquad (10.5)$$

где положено

$$\lambda_k = p_{m-k-1}, \quad u_k = 1 - x_{m-k-1} \quad (u_k < u_{k+1}). \qquad (10.6)$$

Поставленная выше экстремальная задача в случае класса $W_0^{(r)}(M;\,a,\,b)$ сводится к нахождению минимума интеграла (10.5) среди всевозможных систем чисел λ_k и u_k $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$, где $0 \leqslant u_0 < < u_1 < \ldots < u_{m-1} \leqslant 1$ и m фиксировано.

Положим

$$\sigma_m^{(r)}(u) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k K_r(u - u_k)$$

и сконцентрируем наше внимание на случае $r = 2$. В этом случае, как это следует из равенства (10.4),

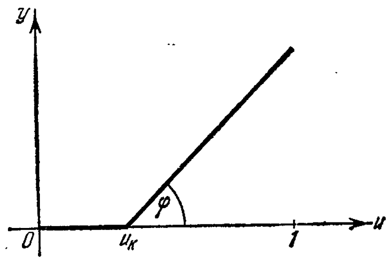

Рис. 10.

график функции $K_2(u - u_k)$ представляет собой ломаную, изображенную на рис. 10 с углом $\varphi = \pi/4$. График же функции $\lambda_k K_2(u - u_k)$ представляет собой подобную ломаную, где $\operatorname{tg}\varphi = \lambda_k$. Легко, далее, видеть, что график функции $\sigma_m^{(2)}(u)$ представляет собой ломаную (рис. 11), вершины которой имеют абсциссы $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$. Существенно еще отметить, что когда u изменяется на отрезке $[0, u_0]$, соответствующее звено ломаной лежит на оси u и что λ_k представляет собой скачок (приращение) углового коэффициента ломаной при переходе через вершину с абсциссой u_k.

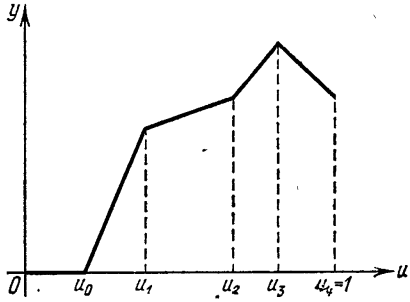

Рис. 11.

В остальном наша ломаная произвольна: каждой наперед заданной ломаной вида, изображенного на рис. 11, однозначно соответствует определенная система чисел λ_k (таким образом, и p_k) и определенное расположение на отрезке $[0, 1]$ абсцисс u_k ее вершин $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$.

Из сказанного следует, что в случае $r = 2$ наша экстремальная задача сводится к нахождению среди ломаных вида $\sigma_m^{(2)}(u)$ такой, для которой интеграл (10.5) при $r = 2$ достигает своего минимума. Употребляя язык теории приближений, можно сказать, что наша задача свелась к наилучшему приближению в среднем (в метрике $L(0, 1)$ суммируемых функций) параболы $y = \frac{u^2}{2}$ при помощи ломаных вида $\sigma_m^{(2)}(u)$ с наперед заданным количеством вершин.

Заметим, что минимум интеграла

$$\int_{a-h}^{a+h} \left| \frac{x^2}{2} - Ax - B \right| dx \qquad (h > 0)$$

среди многочленов второй степени $\frac{x^2}{2} - Ax - B$ с коэффициентом при x^2, равным $1/2$, и произвольными A и B, достигается для единственного многочлена:

$$\frac{1}{2} h^2 Q_2\left(\frac{x-a}{h}\right) = \frac{x^2}{2} - ax - \left(\frac{h^2}{8} - \frac{a^2}{2}\right), \quad Q_2(x) = x^2 - \frac{1}{4} \tag{10.7}$$

(доказательство см. в § 15). Этот минимум, таким образом, равен

$$\frac{1}{2} h^2 \int_{a-h}^{a+h} \left| Q_2\left(\frac{x-a}{h}\right)\right| dx = \frac{h^3}{2} \int_{-1}^{+1} \left| x^2 - \frac{1}{4} \right| dx = \frac{h^3}{4}. \tag{10.8}$$

Говорят, что многочлен $\frac{1}{2} h^2 Q_2\left(\frac{x-a}{h}\right)$ наименее уклоняется от нуля в среднем на интервале $(a-h, a+h)$ среди многочленов второй степени с коэффициентом при x^2, равным $1/2$. Говорят еще, что взятая с обратным знаком линейная часть

$$ax + \left(\frac{h^2}{8} - \frac{a^2}{2}\right) \tag{10.9}$$

многочлена $\frac{1}{2} h^2 Q_2\left(\frac{x-a}{h}\right)$ приближает наилучшим образом в среднем на отрезке $[a-h, a+h]$ функцию $x^2/2$ при помощи линейных функций (многочленов первой степени). Величину $h^3/4$ называют наилучшим приближением в среднем функции $x^2/2$ на отрезке $[a-h, a+h]$ при помощи линейных функций.

Рассмотрим два многочлена (10.7), наименее уклоняющиеся от нуля, соответствующие интервалам $(a-h, a+h)$ и $(b-h_1, b+h_1)$, где $a+h = b-h_1$. При $x = a+h = b-h_1$ оба они принимают соответственно значения

$$\frac{1}{2} h^2 Q_2(1) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} h_1^2 Q_2(-1).$$

Так как

$$Q_2(1) = Q_2(-1),$$

то значения эти совпадают тогда и только тогда, когда $h = h_1$. В этом случае угловые коэффициенты линейных частей обоих многочленов различаются на величину

$$b-a=2h. \qquad (10.10)$$

Зададим теперь некоторое положительное число u_0, и пусть $a-h=u_0$, где $h>0$. Подберем h таким, чтобы линейная функция A_0u+B_0, наилучшим образом приближающая в среднем параболу $y=\frac{u^2}{2}$ на интервале $(a-h, a+h)$, обращалась в нуль при $u=u_0$. Так как эта функция должна, как мы знаем, иметь вид (10.9), то искомое число h должно удовлетворять уравнению

$$(u_0+h)u_0+\frac{h^2}{8}-\frac{(u_0+h)^2}{2}=\frac{u_0^2}{2}-\frac{3}{8}h^2=0,$$

откуда следует

$$h=\frac{2}{\sqrt{3}}u_0, \quad a=u_0+h=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}u_0,$$

и соответствующая наилучшая линейная функция равна

$$A_0u+B_0=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}u_0(u-u_0). \qquad (10.11)$$

Пусть

$$u_k=u_0+2kh \qquad (k=0, 1, \ldots, m-1).$$

На каждом из интервалов (u_k, u_{k+1}) определим линейную функцию

$$A_ku+B_k,$$

приближающую наилучшим образом в среднем функцию $u^2/2$.

На основании сказанного выше функция A_0u+B_0 при $u=u_0$ обращается в нуль; кроме того, графики A_ku+B_k $(k=0, 1, \ldots, m-1)$ непрерывно продолжают друг друга в точках $u_1, \ldots, u_{m-1}$. Таким образом, все они вместе с отрезком $[0, u_0]$ оси u образуют непрерывную ломаную.

Подберем $u = u_0^*$ так, чтобы $u_m = 1$; отсюда находим:

$$\left.\begin{aligned} &u_0^* = \sqrt{3}\,\omega_m, \qquad \omega_m = \left(\sqrt{3} + 4m\right)^{-1}, \\ &u_k^* = \left(\sqrt{3} + 4k\right)\omega_m \quad (k = 0, 1, \ldots, m), \quad h^* = 2\omega_m. \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

Полученная таким образом ломаная $\sigma_{m*}^{(2)}(u)$ определена на отрезке $[0, 1]$ и является одной из ломаных $\sigma_m^{(2)}(u)$, которыми мы должны варьировать, чтобы найти минимум интеграла (10.5) при $r = 2$. Ниже мы докажем, что именно эта ломаная $\sigma_{m*}^{(2)}(u)$ обращает в минимум интеграл (10.5). При этом она есть единственная ломаная, обладающая этим свойством.

Величина нашего интеграла при подстановке в него $\sigma_{m*}^{(2)}(u)$ вследствие (10.8) и (10.12) равна

$$\int_0^1 \left| \frac{u^2}{2} - \sigma_{n*}^{(2)}(u) \right| du =$$

$$= \int_0^{u_0^*} \frac{u^2}{2}\,du + \sum_{k=0}^{m-1} \left| \int_{u_k^*}^{u_{k+1}^*} \frac{u^2}{2} - A_k^* u - B_k^* \right| du =$$

$$= \frac{u_0^{*3}}{6} + 2m\omega_m^3 = \frac{\omega_m^2}{2},$$

где $y_k = A_k^* u + B_k^*$ есть уравнение звена ломаной $\sigma_{m*}^{(2)}(u)$, соответствующего интервалу (u_k^*, u_{k+1}^*).

С другой стороны, пусть $\sigma_m^{(2)}(u)$ есть произвольная ломаная с абсциссами вершин u_k, где

$$0 \leqslant u_0 < u_1 < \ldots < u_{m-1} \leqslant u_m = 1,$$

и пусть $y = A_k u + B_k$ есть уравнение линейной функции, наилучшим образом в среднем приближающей $\frac{u^2}{2}$ на интервале (u_k, u_{k+1}). Тогда, принимая во внимание

(10.8), имеем:

$$\int_0^1 \left|\frac{u^2}{2} - \sigma_m^{(2)}(u)\right| du =$$

$$= \int_0^{u_0} \frac{u^2}{2}\, du + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left|\frac{u^2}{2} - \sigma_m^{(2)}(u)\right| du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{u_0^3}{6} + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left|\frac{u^2}{2} - A_k u - B_k\right| du =$$

$$= \frac{u_0^3}{6} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{2}\right)^3 = \frac{u_0^3}{6} + \frac{1}{32} \sum_{k=0}^{m-1} (u_{k+1} - u_k)^3. \tag{10.13}$$

При этом неравенство, имеющееся среди этих соотношений, превращается в строгое равенство, лишь если на каждом из интервалов (u_k, u_{k+1}) соответствующие звенья ломаной $\sigma_m^{(2)}(u)$ наилучшим образом в среднем приближают параболу $\frac{u^2}{2}$.

Чтобы оценить правую часть (10.13) снизу, мы должны найти ее минимум среди всевозможных u_0, $u_1 - u_0, \ldots, u_m - u_{m-1}$, удовлетворяющих равенству

$$u_0 + \sum_{k=0}^{m-1} (u_{k+1} - u_k) = 1. \tag{10.14}$$

Не представляющие никаких затруднений подсчеты, основанные на применении обычных методов решения задачи на относительный экстремум, показывают, что правая часть (10.13) достигает своего минимума при условии (10.14) для единственной системы значений $u_k = u_k^*$, определяемых равенствами (10.12).

Таким образом, мы доказали, что

$$\sigma_{m^*}^{(2)}(u) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k^* K_2(u - u_k^*)$$

есть единственная ломаная, которая обращает в минимум интеграл (10.5) среди других ломаных $\sigma_m^{(2)}(u)$.

При этом в силу (10.10) и (10.11)

$$\lambda_k^* = A_k^* - A_{k-1}^* = 2h^* = 4\omega_m \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1),$$

$$\lambda_0^* = A_0 = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} u_0^* = (2 + \sqrt{3})\,\omega_m.$$

Если принять, наконец, во внимание подстановки (10.6), то мы получили следующий результат:

Теорема 7. *Среди квадратурных формул вида* (10.1), *где m — заданное натуральное число, формула*

$$\int_0^1 f\,dx \approx L_*(f) = \sum_0^{m-1} p_k^* f(x_k^*),$$

определяемая узлами и весами

$$\left.\begin{aligned} x_k^* &= 4(k+1)\,\omega_m \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1), \\ &\qquad\qquad \omega_m = \left(\sqrt{3} + 4m\right)^{-1}, \\ p_k^* &= 4\omega_m \qquad\qquad (k = 0, 1, \ldots, m-2), \\ &\qquad\qquad p_{m-1}^* = (2 + \sqrt{3})\,\omega_m, \end{aligned}\right\} \qquad (10.15)$$

является единственной наилучшей для класса функций $W_0^{(2)}(M; 0,1)$. *Иначе говоря, имеет место равенство*

$$\min_{L(f)} \max_{f \in W_0^{(2)}(M;\,0,1)} \left| \int_0^1 f\,dx - L(f) \right| =$$

$$= \max_{f \in W_0^{(2)}(M;\,0,1)} \left| \int_0^1 f\,dx - L_*(f) \right| = \frac{M\omega_m^2}{2}. \qquad (10.16)$$

Мы получили наш результат для отрезка [0, 1]. При переходе от отрезка [0, 1] к произвольному отрезку $[\alpha, \beta]$ узлы x_k^*, очевидно, преобразуются подобным образом, веса p_k^* увеличатся в $l = \beta - \alpha$ раз, а точная оценка приближения для класса будет равна

$$\max_{f \in W_\alpha^{(2)}(M;\,\alpha,\beta)} \left| \int_\alpha^\beta f\,dx - L_*(f) \right| = \frac{Ml^3\omega_m^2}{2}, \qquad (10.17)$$

т. е. увеличится в l^3 раз (сравнить с (6.12)).

Полученная наилучшая квадратурная формула имеет, однако, тот недостаток, что она дает гарантированную указанную выше минимальную оценку $\frac{M\omega_m^2}{2}$ не для всех функций, имеющих ограниченную вторую производную, а только для тех из них, которые удовлетворяют начальному условию

$$f(0)=f'(0)=0. \qquad (10.18)$$

Таким образом, если бы мы пожелали воспользоваться полученной формулой в случае функции $f(x)$, не удовлетворяющей условию (10.18), мы должны были бы предварительно разложить $f(x)$ в окрестности $x=0$ по формуле Тейлора

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\varphi(x),$$

отдельно вычислить определенный интеграл от $f(0)+$ $+xf'(0)$ и затем уже применить нашу квадратурную формулу к $\varphi(x)$. Тогда только можно гаранитировать приближение с указанной выше оценкой $\frac{1}{2}M\omega_m^2$.

Некоторое видоизменение полученной квадратурной формулы приводит к новой формуле, лишенной указанного недостатка и в то же время в определенном смысле наилучшей для всего класса $W^{(2)}(M; 0, 1)$ функций. Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{+1} f\,dx \approx \sum_{-m}^{m} \mu_k f(\xi_k), \qquad (10.19)$$

где полагаем в силу (10.15)

$$\mu_k=\mu_{-k}=p_{k-1}^*, \quad -\xi_{-k}=\xi_k=x_{k-1}^* \qquad (k=1, \ldots, m),$$
$$\mu_0=4\omega_m, \quad \xi_0=0.$$

Таким образом, эта новая квадратурная формула, определенная теперь уже для отрезка $[-1, +1]$, получена путем симметризации старой и добавления одного узла $\xi_0=0$. При этом μ_0 мы подобрали так, чтобы

$$\sum_{-m}^{m} \mu_k = 2.$$

Благодаря этому и симметрии формула (10.19) точна для функций 1 и x, а следовательно, для любой линейной функции. Но, кроме этого, она обладает следующим замечательным свойством.

Теорема 8. *Среди всевозможных квадратурных формул*

$$\int_{-1}^{+1} f\,dx \approx \sum_{-m}^{m} p_k f(x_k) \qquad (10.20)$$

с $2m+1$ *узлами* *)

$$-1 \leqslant x_{-m} < \ldots < x_0 < \ldots < x_m \leqslant 1$$

и весами p_k, *где фиксировано только* m, *формула* (10.19) *является единственной наилучшей для класса* $W^{(2)}(M; -1, +1)$.

При этом

$$\sup_{f \in W^{(2)}(M;\, -1,\, +1)} \left| \int_{-1}^{+1} f\,dx - \sum_{-m}^{m} \mu_k f(\xi_k) \right| = M\omega_m^2.$$

Доказательство. Если квадратурная формула не является точной для всех P_1 (многочленов степени $r-1$), то для нее (см. § 4) рассматриваемая верхняя грань равна ∞. Поэтому достаточно рассмотреть всевозможные квадратурные формулы вида (10.20), точные для P_1.

Имеем ($f(0)=0$!)

$$\mathscr{E}\left[W^{(2)}(M; -1, +1)\right] = \mathscr{E}\left[W^{(2)}_{x_0}(M; -1, +1)\right] =$$

$$= \sup_{f \in W^{(2)}_{x_0}} \left| \int_{-1}^{1} f\,dx - \sum_{-m}^{m} p_k f(x_k) \right| =$$

$$= \sup_{f_1 \in W^{(2)}_{x_0}(M;\, -1,\, +x_0)} \left| \int_{-1}^{x_0} f_1\,dx - \sum_{-m}^{-1} p_k f_1(x_k) \right| +$$

$$+ \sup_{f_2 \in W^{(2)}_{x_0}(M;\, x_0,\, 1)} \left| \int_{x_0}^{1} f_2\,dx - \sum_{1}^{m} p_k f_2(x_k) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(x_0+1)^3 + (1-x_0)^3}{2} M\omega_m^2 \geqslant M\omega_m^2. \qquad (10.21)$$

---

*) Т. А. Шайдаева [17] обобщила этот результат на случай произвольного необязательного нечетного числа узлов.

Пояснения к первым трем соотношениям этой цепи (равенствам) вполне аналогичны тем, которые были приведены в связи с цепью (5.5). Предпоследнее соотношение (неравенство) верно в силу теоремы 7 и (10.17). Последнее соотношение обращается в равенство, очевидно, лишь при $x_0 = 0$. Если теперь положить $x_0 = 0$, то получим на основании теоремы 7, что предпоследнее соотношение обратится в равенство только для квадратурной формулы (10.19), где пока не определен только вес. Последний определяется из соотношения

$$\sum_{-m}^{m} p_k = 1,$$

которое должно иметь место, так как искомая квадратурная формула точна для $f(x) \equiv 1$. Теорема доказана.

В следующей теореме рассматривается четный случай*).

Теорема 8'. *Среди всевозможных квадратурных формул*

$$\int_{-1}^{1} f\,dx \approx \sum_{-m}^{m}{}' p_k f(x_m) \tag{10.22}$$

с $2m$ *узлами (штрих у* Σ *указывает, что слагаемое с индексом* $k = 0$ *опускается)*

$$-1 \leqslant x_m < \ldots < x_{-1} < x_1 < \ldots < x_m \leqslant 1$$

и весами p_k *при фиксированном* m *формула*

$$\int_{-1}^{1} f\,dx \approx \sum_{-m}^{m}{}' v_k f(\eta_k), \tag{10.23}$$

где

$$\left.\begin{aligned} -\eta_{-k} = \eta_k &= (4k-2)\varkappa_m \quad (k = 1, \ldots, m),\\ v_k &= 4\varkappa_m \qquad\qquad (k = 1, \ldots, m-1),\\ v_m &= (2+\sqrt{3})\varkappa_m \end{aligned}\right\} \tag{10.24}$$

является наилучшей для класса $W^{(2)}(M; -1, +1)$.

---

*) Эта теорема доказана Т. А. Шайдаевой [18], применившей для ее получения метод множителей Лагранжа.

При этом

$$\sup_{f\in W^{(2)}(M;\,-1,\,+1)}\left|\int_{-1}^{1} f\,dx-\sum_{-m}^{m}{}' v_k f(\eta_k)\right| = M\varkappa_m^2,$$
$$\varkappa_m = \left(\sqrt{3}+2(2m-1)\right)^{-1}. \tag{10.25}$$

Доказательство. Зададим произвольную квадратурную формулу вида (10.23), точную для всех многочленов P_1. Пусть

$$f_1(x)=f(x)\quad(-1\leqslant x\leqslant x_1),$$
$$f_2(x)=f(x)\quad(x_1\leqslant x\leqslant 1).$$

Рассуждая так же как при доказательстве теоремы 8, получим (пояснения ниже)

$$\sup_{f\in W^{(2)}(M;\,-1,\,1)}\left|\int_{-1}^{1} f\,dx-\sum_{-m}^{m}{}' p_k f(x_k)\right| =$$
$$= \sup_{f_1\in W^{(2)}_{x_1}(M;\,-1,\,x_1)}\left|\int_{-1}^{x_1} f_1\,dx-\sum_{-m}^{-1} p_k f_1(x_k)\right| +$$
$$+ \sup_{f_2\in W^{(2)}_{x_1}(M;\,x_1,\,1)}\left|\int_{x_1}^{1} f_2\,dx-\sum_{2}^{m} p_k f_2(x_k)\right| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{M}{2}(x_1+1)^3\omega_m^2+\frac{M}{2}(1-x_1)^3\omega_{m-1}^2=\psi(x_1)\geqslant M\varkappa_m^2. \tag{10.26}$$

Производная от ψ обращается в нуль, когда

$$(x_1+1)^2\omega_m^2-(1-x_1)^2\omega_{m-1}^2=0$$

или

$$(x_1+1)\,\omega_m=\pm(1-x_1)\,\omega_{m-1}.$$

Внутри отрезка $[-1, 1]$ это уравнение имеет единственное решение (соответствующее знаку $+$)

$$\eta_1=\frac{\omega_{m-1}-\omega_m}{\omega_{m-1}+\omega_m}=2\varkappa_m.$$

Для него $\psi''(\eta_1) > 0$, поэтому функция $\psi(x)$ достигает на отрезке $[-1, +1]$ своего единственного минимума в точке $x_1 = \eta_1$, равного

$$\psi(\eta_1) = M \frac{4\omega_{m-1}^2\omega_m^2}{(\omega_{m-1} + \omega_m)^2} = M\varkappa_m.$$

Таким образом, в цепи (10.26) последнее соотношение обращается в равенство только при $x_1 = \eta_1$.

Положив в рассматриваемой квадратурной формуле (10.22) $x_1 = \eta_1$, мы заключаем, что второе соотношение в цепи (10.26) обращается в равенство (см. теорему 7), только если точки $x_k = \eta_k$ $(k = 2, \ldots, m)$ делят отрезок $[\eta_1, 1]$ в том же отношении, в котором точки $4(k-1)\omega_{m-1}$ $(k = 2, \ldots, m)$ делят отрезок $[0, 1]$ и, кроме того, если точки $x_k = \eta_k$ $(k = -m, \ldots, -1)$ делят отрезок $[-1, \eta_1]$ в том же отношении, в каком точки $-4k\omega_m$ $(k = -m, \ldots, -1)$ делят отрезок $[-1, 0]$.

В результате мы получим единственную систему узлов

$$-1 \leqslant \eta_{-m} < \ldots < \eta_{-1} < \eta_1 < \ldots < \eta_m \leqslant 1$$

и единственную систему весов $v_{-m}, \ldots, v_{-1}, v_2, \ldots, v_m$, для которых все соотношения цепи (10.26) обращаются в равенство. После этого число v_1 тоже определяется единственно из соотношения

$$\sum_{-m}^{m}{}' v_m = 2,$$

которое должно иметь место, потому что наша квадратурная формула должна быть точной для линейных функций, в частности, для функции $f(x) \equiv 1$.

Вычисления показывают (см. (10.15)), что

$$\eta_k - \eta_{k-1} = 4\omega_{m-1}(1 - \eta_1) = 4\varkappa_m \qquad (k = 2, \ldots, m),$$

$$\eta_k - \eta_{k-1} = 4\omega_m(1 + \eta_1) = 4\varkappa_m$$
$$(k = -(m-1), \ldots, -1, 1);$$

учитывая, что $\eta_1 = 2\varkappa_m$, получаем первые равенства (10.25). Далее (см. (10.15)),

$$v_k = 4\omega_{m-1}(1-\eta_1) = 4\varkappa_m \quad (k = -(m-1), \ldots, -1),$$

$$v_k = 4\omega_m(1+\eta_1) = 4\varkappa_m \quad (k = 2, \ldots, m-1),$$

$$v_m = (2+\sqrt{3})\,\omega_{m-1}(1-\eta_1) = (2+\sqrt{3})\,\varkappa_m,$$

$$v_{-m} = (2+\sqrt{3})\,\omega_m(1+\eta_1) = (2+\sqrt{3})\,\varkappa_m,$$

$$v_1 = 2 - \sum_{-m}^{-1} v_k - \sum_{2}^{m} v_k = 4\varkappa_m.$$

Теорема доказана.

Пример. При $m = 1$ полученная симметричная квадратурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^{1} f\,dx \approx$$

$$\approx \omega_1\left\{(2+\sqrt{3})\,f(-4\omega_1) + 4f(0) + (2+\sqrt{3})\,f(4\omega_1)\right\}.$$

При этом мера приближения этой формулы для класса $W^{(2)}(M; -1, +1)$ равна

$$M\omega_1^2 = \frac{M}{(\sqrt{3}+4)^2} \approx 0{,}045M.$$

Для сравнения отметим, что мера приближения соответствующей отрезку $[-1, +1]$ формулы Симпсона

$$\int_{-1}^{+1} f\,dx \approx \frac{1}{3}\{f(-1) + 4f(0) + f(1)\}$$

для того же класса $W^{(2)}(M; -1, +1)$ равна $\frac{8}{81}M \approx$ $\approx 0{,}10M$ (константу $c_2 = {}^1/_{81}$ для отрезка $[0, 1]$ (см. § 5) надо умножить на 2^3).

Интересно еще полученный результат сравнить с усложненной формулой трапеций

$$\int_{-1}^{+1} f\,dx \approx \frac{1}{2}[f(-1) + 2f(0) + f(1)]$$

с тремя узлами. Она дает меру приближения для класса $W^{(2)}(M; -1, +1)$, равную ${}^1/_6$ (константу

$c_2 = {}^1/_{12}$ для простейшей формулы трапеций (см. § 5) надо удвоить).

Рассмотренная (при $r=2$) задача в случае произвольного $r > 2$ не решена.

При $r = 1$ вопрос сводится к нахождению минимума интеграла

$$\int_0^1 \left| u - \sum_0^{m-1} \lambda_k K_1(u - u_k) \right| du = \int_0^1 \left| u - \sigma_m^{(1)}(u) \right| du,$$

где

$$K_1(u) = \begin{cases} 1 & (u > 0), \\ 0 & (u < 0). \end{cases}$$

Таким образом, речь идет о наилучшем приближении в среднем на отрезке $[0, 1]$ функции при помощи ступенчатых функций $\sigma_m^{(1)}(u)$ с произвольными точками разрыва $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$, т. е. таких функций, которые на каждом из интервалов $(0, u_0)$, (u_0, u_1), ..., $(u_{m-1}, 1)$ принимают постоянное значение; при этом на интервале $(0, u_0)$ это постоянное значение равно нулю. Следовательно,

$$\sigma_m^{(1)}(u) = \begin{cases} 0 & (0 < u < u_0) \\ c_k & (u_k < u < u_{k+1}) \quad (k = 0, \ldots, m-1, \ u_m = 1), \end{cases}$$

где c_k и u_k $(0 \leqslant u_k \leqslant 1)$ — произвольные постоянные числа.

Очевидно, что

$$\int_0^1 \left| u - \sigma_m^{(1)}(u) \right| du = \int_0^{u_0} u\, du + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left| u - c_k \right| du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{u_0^2}{2} + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left| u - \frac{u_k + u_{k+1}}{2} \right| du =$$

$$= \frac{u_0^2}{2} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(u_{k+1} - u_k)^2}{4} \geqslant \frac{1}{2(2m+1)}.$$

Последнее неравенство вытекает из решения задачи на относительный минимум функции

$$\frac{u_0^2}{2}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(u_{k+1}-u_k)^2}{4}$$

при условии, что

$$u_0+\sum_{k=0}^{m-1}(u_{k+1}-u_k)=1.$$

Минимум соответствует значениям

$$u_k^*=\frac{2k+1}{2m+1} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$$

и экстремальная ступенчатая функция будет

$$\sigma_{m^*}^{(1)}(u)=\begin{cases} 0 & \left(0\leqslant u\leqslant\frac{1}{2m+1}\right), \\ \frac{2(k+1)}{2m+1} & (u_k^*\leqslant u\leqslant u_{k+1}^*). \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\lambda_k^*=\frac{2}{2m+1} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1)$$

и, наконец,

$$p_k^*=\frac{2}{2m+1} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-2,\ m-1),$$

$$x_k^*=\frac{2k+2}{2m+1} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1).$$

Мы получили, таким образом, квадратичную формулу

$$\int_0^1 f\,dx\approx\frac{2}{2m+1}\sum_{k=0}^{m-1}f\left(\frac{2k+2}{2m+1}\right), \qquad (10.27)$$

обладающую тем свойством, что она наилучшая для класса функций $W_0^{(1)}(M; 0, 1)$ при заданном натуральном m. Мера ее приближения для всего класса равна

$$\frac{M}{2(2m+1)}. \tag{10.28}$$

Как и в предыдущем случае, из этой формулы можно получить симметрическую квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{+1} f\,dx \approx \sum_{-m}^{m} \nu_k f(\xi_k), \tag{10.29}$$

полагая

$$\nu_k = \nu_{-k} = p^*_{k-1}, \quad -\xi_{-k} = \xi_k = x^*_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\nu_0 = \frac{4}{2m+1}, \quad \xi_0 = 0.$$

При этом величина ν_0 подобрана так, чтобы

$$\sum_{-m}^{m} \nu_k = 2.$$

Таким образом, квадратурная формула (10.29) точна для всех линейных функций. Она обладает следующим минимальным свойством.

Теорема 9. *Среди квадратурных формул вида*

$$\int_{-1}^{1} f\,dx \approx \sum_{-m}^{m} p_k f(x_k), \tag{10.30}$$

где m — заданное натуральное число, $-1 \leqslant x_{-m} < \ldots$ $\ldots < x_0 < \ldots < x_m \leqslant 1$, формула (10.29) *дает для класса $W^{(1)}(M; -1, 1)$ наилучшее приближение, равное $M/(2m+1)$.*

В самом деле, ограничимся рассмотрением квадратурных формул, точных для констант (многочленов нулевой степени) — для формул, не обладающих этим свойством, все равно соответствующие верхние грани равны ∞. Имеем (пояснения ниже)

$$\sup_{f \in W^{(1)}(M;\, -1,\, 1)} \left| \int_{-1}^{1} f\,dx - \sum_{-m}^{m} p_k f(x_k) \right| =$$

$$= \sup_{f \in W_{x_0}^{(1)}(M;\, -1,\, 1)} \left| \int_{-1}^{1} f\,dx - \sum_{-m}^{m} \right| =$$

$$= \sup_{f \in W_{x_0}^{(1)}(M;\, -1,\, x_0)} \left| \int_{-1}^{x_0} f\,dx - \sum_{-m}^{-1} \right| +$$

$$+ \sup_{f \in W_{x_0}^{(1)}(M;\, x_0,\, 1)} \left| \int_{x_0}^{1} f\,dx - \sum_{1}^{m} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{M}{2(2m+1)}\left[(x_0+1)^2 + (1-x_0)^2\right] \geqslant \frac{M}{2m+1}. \quad (10.31)$$

Первое равенство этой цепи верно, потому что рассматриваемая квадратурная формула точна для констант; второе объясняется как третье равенство в (5.5). Третье соотношение верно в силу того, что наилучшая для $W_{x_0}^{(1)}(M;\, x_0,\, 1)$ формула дает оценку $M/2(2m+1)$ (см. (10.28)), которую в случаях классов $W_{x_0}^{(1)}(M;\, -1,\, x_0)$, $W_{x_0}^{(1)}(M;\, x_0,\, 1)$ надо увеличить соответственно в $(x_0+1)^2$, $(1-x_0)^2$ раз.

Последнее неравенство цепи обращается в равенство лишь при $x_0 = 0$. Будем считать дальше $x_0 = 0$; тогда предпоследнее неравенство обращается в равенство лишь если (см. (19.30))

$$x_k = \xi_k, \quad p_k = \nu_k \qquad (k = -m,\, \ldots,\, -1,\, 1,\, \ldots,\, m).$$

Вес p_0 определяется из равенства

$$\sum_{-m}^{m} p_k = 2,$$

которое должно выполняться, потому что искомая квадратурная формула должна быть точной для $f(x) \equiv 1$.

Рассмотренная задача может быть поставлена в метрике L_p. Отметим относящийся к этому вопросу результат Т. А. Шайдаевой [18], получившей квадратурную формулу вида (10.1), наилучшую для класса $W^{(2)}_{L_p}(M; 0, 1)$ среди всевозможных таких формул, точных для всех линейных функций. Таким образом, принимая во внимание сказанное в § 4 (петит), мы получаем, что решение этой задачи состоит в нахождении минимума интеграла

$$\int_0^1 \left| \frac{(1-t)^2}{2} - \sum_0^{m-1} p_k K_r(x_k - t) \right|^q dt, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

при варьировании p_k, удовлетворяющих двум связям $\sum_0^{m-1} p_k = 1$ и $\sum_0^{m-1} p_k x_k = \frac{1}{2}$, с фиксированным числом m узлов x_k, принадлежащих отрезку [0; 1]. Решение этой задачи теперь основывается на привлечении свойств многочлена (в данном случае — второй степени), наименее уклоняющегося от нуля в метрике L_p (см. § 16).

В метрике L_2 подобная задача решена Ю. Я. Дорониным [5].

§ 11. НАИЛУЧШАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ КЛАССА $W^{(n+1)}_{L_2}(M; 0, m)$ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

Рассмотрим для данного натурального m квадратурную формулу

$$\int_0^m f(x)\,dx \approx \sum_0^m p_k f(k) \tag{11.1}$$

с узлами $x_k = k$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, делящими отрезок $[0, m]$ на равные части.

Будем предполагать на этот раз, что функции $f(x)$ принадлежат к классу $W^{(n+1)}_{L_2}(M; 0, m)$ (см. § 2 и 4).

Если квадратурная формула (11.1) точна для многочленов степени n, то на основании (4.14) имеет место следующая точная оценка:

$$\sup_{f \in W_{L_2}^{(n+1)}(M;\, 0,\, m)} \left| \int_0^m f\, dx - L(f) \right| =$$

$$= M \| F_{n+1} \|_{L_2(0,\, m)} = M \left(\int_0^m | F_{n+1}(t) |^2 dt \right)^{1/2}, \qquad (11.2)$$

где

$$F_{n+1}(t) = \frac{1}{n!} \left[\frac{(m-t)^{n+1}}{n+1} - \sum_0^m p_k K_{n+1}(k-t) \right],$$

и функция $K_{n+1}(u)$ определяется при помощи равенства (3.3).

Сард [20] исследовал задачу о нахождении минимума интеграла, стоящего в правой части (11.2), если варьировать весами p_k. Задача эта отличается от рассмотренных в § 10 экстремальных задач тем, что в ней задаются фиксированные, в данном случае равноотстоящие, узлы и подвергаются варьированию только веса p_k, которые удовлетворяют следующим связям, выражающим, что соответствующие варьируемые квадратурные формулы точны для многочленов $P_n(x)$ степени n:

$$\frac{m^{s+1}}{s+1} = \sum_{k=0}^m p_k k^s \qquad (s = 0, 1, \ldots, n). \qquad (11.3)$$

Сард показал, что при тех заданных натуральных m и n, при которых система (11.3) имеет решения (относительно p_k), поставленная экстремальная задача имеет единственное решение.

Таким образом, в указанном случае среди всевозможных систем чисел p_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$, удовлетворяющих уравнению (11.3), существует единственная система, для которой правая часть (11.2) достигает минимума. Естественно говорить, что эта система определяет наилучшую квадратурную формулу (11.1) для класса $W_{L_2}^{(n+1)}(M; 0, m)$ при фиксированных равноотстоящих узлах (делящих отрезок $[0, m]$ на m частей).

Таблица 3

Наилучшая формула для класса $W_{L_2}^{(n+1)}(M;\ 0,\ m)$ с равноотстоящими узлами на отрезке $[0,\ m]$

$$\mathscr{E}\left[W_{L_2}^{(n+1)}(1;\ 0,\ m)\right]=\sup_{\|f^{(n+1)}\|_{L_2(0,\ m)}\leqslant 1}\left|\int_0^m f\,dx-\sum_0^m p_k f(k)\right|=J_{mn},$$

$$p_0=c_0,\quad p_1=c_1,\ \ldots,\ p_m=c_m$$

m	$c_0\Delta$	$c_1\Delta$	$c_2\Delta$	$c_3\Delta$	Δ	J_{mn}
			$n=0$			
1	1				2	$\frac{1}{12}=0{,}083333$
2	1	2			2	$\frac{2}{12}=0{,}166667$
3	1	2			2	$\frac{3}{12}=0{,}25$
4	1	2	2		2	$\frac{4}{12}=0{,}333333$
5	1	2	2		2	$\frac{5}{12}=0{,}416667$
6	1	2	2	2	2	$\frac{6}{12}=0{,}5$
			$n=1$			
1	1				2	$\frac{1}{120}=0{,}008333$
2	3	10			8	$\frac{1}{160}=0{,}00625$
3	4	11			10	$\frac{1}{120}=0{,}008333$
4	11	32	26		28	$\frac{1}{105}=0{,}009524$
5	15	43	37		38	$\frac{5}{456}=0{,}010965$
6	41	118	100	106	104	$\frac{77}{6240}=0{,}012340$

m	$c_0\Delta$	$c_1\Delta$	$c_2\Delta$	$c_3\Delta$	Δ	J_{mn}
			$n=2$			
2	1	4			3	$\frac{1}{1890}=0{,}000529$
3	3	9			8	$\frac{11}{8960}=0{,}001228$
4	21	76	46		60	$\frac{11}{12600}=0{,}000873$
5	112	379	289		312	$\frac{73}{69888}=0{,}001045$
6	55	192	132	172	155	$\frac{11}{10850}=0{,}001014$
			$n=3$			
2	1	4			3	$\frac{1}{9072}=0{,}000110$
3	3	9			8	$\frac{13}{17920}=0{,}000725$
4	2349	9932	4430		7248	$\frac{6557}{36529920}=0{,}000179$
5	29392	110209	76819		86568	$\frac{61633}{193912320}=0{,}000318$
6	1082811	4409946	2225043	4304484	3290014	$\frac{210047}{921203920}=0{,}000228$

Сард, кроме того, разработал метод получения указанных чисел p_k, соответствующих экстремальному решению, позволяющий эффективно найти точные значения этих чисел для каждой конкретно заданной пары (m, n), если соответствующая задача имеет решение.

Мы ограничимся только тем, что приведем сводную таблицу окончательных численных результатов Сарда [20], сделав соответствующие разъяснения*).

*) Таблицы 3 и 4 взяты из статьи Сарда [20]. Более подробные таблицы этого рода см. в [19].

Таблица 4

Приближенная формула для класса $W_{L_2}^{(n+1)}(M;\ 0,\ m)$ с равноотстоящими узлами на отрезке $[0,\ m]$ (формула, приближающая данные таблицы 3)

$$\tilde{J}_{mn} \approx J_{mn}$$

m	$c_0\Delta$	$c_1\Delta$	$c_2\Delta$	$c_3\Delta$	Δ	$\tilde{J}_{mn}$	Отклонение $\tilde{J}_{mn}$ от J_{mn} в %
				$n=1$			
4	39	115	92		100	$\frac{143}{15\cdot 10^3}=0{,}009533$	0,10
5	40	112	98		100	$\frac{11}{10^3}=0{,}011$	0,32
6	40	112	98	100	100	$\frac{31}{25\cdot 10^2}=0{,}0124$	0,49
				$n=2$			
5	43	146	111		120	$\frac{79}{756\cdot 10^2}=0{,}001045$	0,04
6	355	1238	853	1108	1000	$\frac{7079}{7\cdot 10^6}=0{,}001014$	0,003
				$n=3$			
4	97	412	182		300	$\frac{10193}{567\cdot 10^5}=0{,}000180$	0,15
5	407	1529	1064		1200	$\frac{1154043}{36288\cdot 10^5}=0{,}000318$	0,06
6	329	1341	675	1310	1000	$\frac{31923}{14\cdot 10^7}=0{,}000228$	0,003
5	81	307	212		240	$\frac{46987}{145152\cdot 10^3}=0{,}000324$	1,85
6	33	134	67	132	100	$\frac{1487}{63\cdot 10^5}=0{,}000236$	3,52

При пользовании таблицами 3 и 4 надо иметь в виду, что числа p_k $(k=0, 1, \ldots, m)$ удовлетворяют симметрии

$$p_k = p_{m-k},$$

что можно было бы доказать в общем случае. Поэтому в таблицах для каждой данной пары (m, n) приводятся только значения $p_0, p_1, \ldots, p_{\frac{m+1}{2}}$, когда m нечетное, и значения $p_0, p_1, \ldots, p_{\frac{m}{2}+1}$, когда m четное.

Рассматриваемые значения p_k оказываются числами рациональными, но, вообще говоря, не целыми. Чтобы не загромождать таблицы дробными числами, для каждой пары (m, n) подбирается целое число Δ — общий наименьший знаменатель соответствующих этой паре чисел p_k и вместо дробных p_k приводятся целые числа $p_k\Delta$. Точные верхние грани приближений, даваемых рассматриваемыми квадратурными формулами, как видно из таблиц, также суть числа рациональные.

В таблице 4 числовые данные результатов (не всех) таблицы 3 несколько изменены (веса сдвинуты) в целях получения более удобных для практики формул. Последний столбец таблицы 4 показывает возникающие при этом ошибки приближения в процентах. В двух случаях в таблице 4 приведены два возможных варианта измененной квадратурной формулы.

Пример применения таблиц 3 и 4. Требуется написать наилучшую квадратурную формулу для класса $W_{L_2}^{(2)}(M; 0, 4)$ с равноотстоящими узлами в случае $m = 4$. В данном случае $n = 1$.

Из таблицы 3 находим, что искомая формула имеет следующий вид:

$$\int_0^4 f(x)\,dx \approx \frac{11}{28}[f(0) + f(4)] + \\ + \frac{32}{28}[f(1) + f(3)] + \frac{26}{28}f(2). \qquad (11.4)$$

При этом ошибка приближения для функции $f(x)$, имеющей на отрезке $[0, 4]$ производную $f''(x)$ второго порядка, удовлетворяющую неравенству

$$\left(\int_0^4 |f''(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant M, \qquad (11.5)$$

не превышает

$$\frac{M}{105} = M \cdot 0{,}009524. \qquad (11.6)$$

Вместо точной наилучшей (для класса $W_{L_2}^{(2)}(M; 0, 4)$) формулы (11.4) можно, воспользовавшись таблицей 4, написать близкую к наилучшей (для указанного класса) квадратурную формулу. Она имеет такой вид:

$$\int_0^4 f(x)\,dx \approx 0{,}39\,[f(0) + f(4)] + \\ + 1{,}15\,[f(1) + f(3)] + 0{,}92 f(2). \qquad (11.7)$$

Ошибка приближения, даваемого формулой (11.7) для функции $f(x)$, имеющей на отрезке $[0, 4]$ производную $f''(x)$, удовлетворяющую неравенству (11.5), уже оценивается несколько большей величиной $M \cdot 0{,}009533$, отличающейся, однако, от величины (11.6) всего лишь на $0{,}1\%$.

Приведенные таблицы 3 и 4 даны для отрезков $[0, m]$. Переход их на любой другой отрезок не представляет затруднений. Именно, легко видеть (см. § 6), что если формула (11.1) является наилучшей для класса $W_{L_2}^{(n+1)}(M;\ 0,\ m)$ среди формул, имеющих фиксированные узлы $x_k = k$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, то подобная ей формула

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_0^m c'_k f(x'_k) = L_1(f),$$

где

$$c'_k = \frac{(b-a)\,k}{m}, \quad x'_k = a + \frac{b-a}{m} k \qquad (k = 0, 1, \ldots, m),$$

является соответственно наилучшей для класса $W_{L_2}^{(n+1)}(M;\ a,\ b)$ с фиксированными узлами x'_k. При этом в силу неравенства (6.17), в котором надо положить $n=1$ (n имеет там другой смысл), оценка

$$\sup_{f\in W_{L_2}^{(n+1)}(M;\, a,\, b)} \left| \int_a^b f\,dx - L_1(f) \right| = M \| F_{n+1} \|_{L_2(a,\, b)}$$

связана с оценкой (11.2) следующим образом:

$$\| F_{n+1} \|_{L_2(a,\, b)} = \left(\frac{b-a}{m} \right)^{n+2-\frac{1}{2}} \| F_{n+1} \|_{L_2(0,\, m)}.$$

§ 12. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, В КОТОРЫЕ ВХОДЯТ ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ

До сих пор мы рассматривали квадратурные формулы, при помощи которых приближенно вычисляют определенный интеграл от функции, когда известны значения этой функции в отдельных точках — узлах квадратурной формулы. Но возможны более общие квадратурные формулы, в которые входят как значения функции, так и значения ее производных того или иного порядка.

Если нам известны не только значения функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_m$ отрезка $[0, 1]$, но и значения ее производных того или иного порядка, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных мы можем ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функции.

Квадратурная формула, в которую входят значения функции $f(x)$ и ее производных до порядка ρ включительно в точках $x_0, x_1, \ldots, x_m$, в общем виде выглядит так:

$$\int_0^1 f\,dx \approx \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) = L(f), \qquad (12.1)$$

где p_{kl} — заданные числа — веса, и x_k — заданные точки, удовлетворяющие условию

$$0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \leqslant 1.$$

Если формула (12.1) точна для многочленов $P_{r-1}(x)$ степени $r-1$, т. е. если для нее приближенное равенство обращается в точное при подстановке вместо f любого многочлена P_{r-1}, то для нее возможно получить точное значение ошибки, выраженное через производную $f^{(r)}(x)$ порядка $r > \rho$.

Нам будет удобнее с этой целью нашу формулу записать следующим образом:

$$\int_0^1 f\,dx \approx \frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho}\lambda_k^{(l)}(r-l-1)!\,f^{(l)}(x_k) = L(f), \quad (12.2)$$

полагая

$$p_{kl} = \frac{(r-l-1)!}{r!}\lambda_k^{(l)}.$$

Пусть задана функция $f(x)$, имеющая на отрезке $[0, 1]$ кусочно-непрерывную производную $f^{(r)}(x)$. Разложим ее по формуле Тейлора:

$$f(x) = \sum_0^{r-1}\frac{x^l}{l!}f^{(l)}(0) + R_r(x) = P_{r-1}(x) + R_r(x),$$

где (см. (3.4))

$$R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 K_r(x-t)\,f^{(r)}(t)\,dt.$$

Заметим, что производная порядка $l < r$ от остаточного члена может быть записана следующим образом:

$$R_r^{(l)}(x) = \frac{1}{(r-l-1)!}\int_0^1 K_{r-l}(x-t)\,f^{(r)}(t)\,dt.$$

Поэтому в силу того, что формула (12.2) точна для P_{r-1} (т. е. узлы x_k и веса $\lambda_k^{(l)}$ связаны условием точности),

$$\int_0^1 f\,dx - L(f) = \int_0^1 R_r\,dx - L(R_r) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1\int_0^1 K_r(x-t)\,f^{(r)}(t)\,dt\,dx -$$

$$- \frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho}\lambda_k^{(l)}\int_0^1 K_{r-l}(x_k-t)\,f^{(r)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1\int_t^1 (x-t)^{r-1}\,dx f^{(r-1)}(t)\,dt -$$

$$- \frac{1}{r!}\int_0^1\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho}\lambda_k^{(l)}K_{r-l}(x_k-t)\,f^{(r)}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 F_r(t)\,f^{(r)}(t)\,dt, \qquad (12.3)$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{r!}\left\{(1-t)^r - \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho}\lambda_k^{(l)}K_{r-l}(x_k-t)\right\}. \qquad (12.4)$$

Мы получили точное равенство, выражающее оценку приближения квадратурной формулы для данной функции $f(x)$, имеющей на $[0, 1]$ производную порядка r. Оно совершенно аналогично соответствующему равенству (4.7) и содержит его в себе как частный случай при $\rho = 0$, если принять во внимание, что $rp_{k0} = \lambda_k^{(0)}$. Это обстоятельство говорит о том, что и для рассматриваемой более общей квадратурной формулы можно получить результаты, аналогичные тем, которые были изложены в § 6 и 7.

Квадратурная формула

$$\int_a^b f\,dx \approx \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho} p'_{kl} f^{(l)}(x'_k) = L(a, b; f),$$

соответствующая отрезку $[a, b]$, подобная формуле (12.1), имеет узлы x'_k, расположенные на $[a, b]$ геометрически, подобно тому как расположены на отрезке $[0, 1]$ узлы x_k формулы (12.1). Что касается весов p'_{kl}, то они связаны с p_{kl} соотношениями

$$p'_{kl} = h^{l+1} p_{kl},$$

где $h = b - a$ — длина отрезка $[a, b]$. Это соотношение дает возможность ввести понятие усложненной квадратурной формулы

$$\int_a^b f\,dx \approx \sum_0^{m-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f), \qquad \left(\xi_k = a + \frac{b-a}{n} k\right), \quad (12.5)$$

в точности по тому же образцу, как это было сделано в § 6 для формулы (6.7).

Теорема 1 полностью сохраняется и для формулы (12.5), полученной из (12.2); нужно только, конечно, под $F_r(t)$ понимать функцию, определенную равенством (12.4). Ясно, что для формулы (12.5), полученной из (12.2), полностью сохраняются также теоремы 4—7 и все вытекающие из них сделанные в § 7 общие заключения.

§ 13. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЭРМИТА

Подобно тому как интерполяционная формула Лагранжа (см. § 1) служит источником квадратурных формул обычного вида (1.11), интерполяционная формула Эрмита может служить источником для квадратурных формул типа (12.1), содержащих в себе наряду с значениями интегрируемой функции значения ее производных того или иного порядка.

Зададим на отрезке $[a, b]$ точки

$$x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$$

и соответствующие им системы чисел

$$\begin{array}{llll} y_0, & y_0^{(1)}, & \ldots, & y_0^{(\rho_0)}, \\ y_1, & y_1^{(1)}, & \ldots, & y_1^{(\rho_1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{m-1}, & y_{m-1}^{(1)}, & \ldots, & y_{m-1}^{(\rho_{m-1})}, \end{array}$$

где $\rho_0, \ldots, \rho_{m-1}$ — заданные натуральные числа.

Поставим задачу: построить многочлен $P(x)$ степени $n=\rho_0+\ldots+\rho_{m-1}+m-1$, который обладал бы свойствами

$$P^{(l)}(x_k)=y_k^{(l)} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho_k).$$

Искомый многочлен единственный, так как если допустить, что существуют два таких многочлена, то их разность, которую мы обозначим через $Q(x)$, должна удовлетворять равенствам

$$Q^{(l)}(x_k)=0 \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho_k),$$

и, следовательно, точки x_k должны быть нулями $Q(x)$ соответственно кратностей ρ_k+1. Отсюда многочлен $Q(x)$ степени n должен делиться на многочлен

$$\prod_{k=0}^{m-1}(x-x_k)^{\rho_k+1}$$

степени $n+1$, что возможно, только если $Q(x)\equiv 0$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что решающий поставленную задачу многочлен $P(x)$ может быть записан следующим образом:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho_k} y_k^{(l)}P_{kl}(x), \tag{13.1}$$

где

$$P_{kl}(x)=\frac{A(x)}{l!\,(x-x_k)^{\rho_k+1-l}}\left\{\frac{(x-x_k)^{\rho_k+1}}{A(x)}\right\}_{(x_k)}^{(\rho_k-l)}, \tag{13.2}$$

$$A(x)=\prod_{0}^{m-1}(x-x_k)^{\rho_k+1}$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho_k),$$

и выражение $\{F(x)\}_{(a)}^{(\lambda)}$ обозначает сумму членов разложения функции $F(x)$ в ряд Тейлора в окрестности $x=a$, в которое $(x-a)$ входит в степенях, не превышающих натуральное число λ.

Чтобы убедиться в этом, надо принять во внимание, что многочлен $P_{kl}(x)$ подобран так, чтобы он имел степень n и удовлетворял условиям

$$P_{kl}^{(i)}(x_s) = \begin{cases} 1, \text{ если одновременно } k=s,\ l=i, \\ 0 \text{ в остальных случаях} \\ (k=0, 1, \ldots, m-1;\quad l=0, 1, \ldots, \rho_k). \end{cases} \tag{13.3}$$

Это следует из того, что

$$\varphi(x)\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\right\}_{(a)}^{(\mu)} = 1 + K(x-a)^{\mu+1} + \ldots, \tag{13.4}$$

так как μ-й отрезок разложения Тейлора функции (13.4), очевидно, совпадает с μ-м отрезком соответствующего разложения единицы:

$$1 = \varphi(x)\frac{1}{\varphi(x)}.$$

Формуле (13.1) соответствует общая приближенная интерполяционная *формула Эрмита*

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\rho_k} f^{(l)}(x_k)\,P_{kl}(x) = P(x), \tag{13.5}$$

которая приводит в соответствие заданной функции $f(x)$ многочлен $P(x)$ степени n, удовлетворяющий условиям

$$f^{(l)}(x_k) = P^{(l)}(x_k)$$
$$(k=0, 1, \ldots, m-1;\ l=0, 1, \ldots, \rho_k).$$

Если проинтегрировать левую и правую части приближенного равенства (13.5), то получим (приближенную) квадратурную формулу *)

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim L(f), \tag{13.6}$$

*) Эта формула имеет несколько более общий характер, чем рассмотренная в предыдущем параграфе формула, где было $\rho_0 = \ldots = \rho_{m-1} = \rho$.

где

$$L(f)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho_k} p_k^{(l)} f^{(l)}(x_k) \tag{13.7}$$

и

$$p_k^{(l)}=\int_a^b P_{kl}(x)\,dx. \tag{13.8}$$

Так как для всякого многочлена $P(x)$ степени $n=\rho_0+\ldots+\rho_{m-1}+m-1$ интерполяционная формула (13.5) Эрмита обращается в тождество, то квадратурная формула (13.6) точна для всех многочленов степени n.

Легко видеть, что, наоборот, если задана квадратурная формула

$$\int_a^b f\,dx \sim L_1(f),$$

где

$$L_1(f)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho_k} p_k'^{(l)} f^{(l)}(x_k),$$

о которой известно, что она точна для всех многочленов степени n, то определяющее ее коэффициенты $p_k'^{(l)}$ совпадают соответственно с выведенными выше числами $p_k^{(l)}$, определенными при помощи интегралов (13.8). Действительно, для любого многочлена $P(x)$ степени не выше n $L(P)=L_1(P)$.

В частности, если в качестве $P(x)$ взять многочлены $P_{kl}(x)$ вида (13.2), то вследствие их свойств (13.3) будем иметь

$$p_k^{(l)}=L(P_{kl})=L_1(P_{kl})=p_k'^{(l)}$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho_k),$$

что и требовалось доказать.

Квадратурная формула (13.7) содержит в себе как частный случай формулу (12.1) предыдущего параграфа при $\rho_1=\ldots=\rho_m=\rho$.

§ 14. ОБЩАЯ ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

В этом параграфе мы решим задачу для квадратурных формул вида

$$\int_0^1 f\,dx \approx \frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{r-2}\lambda_k^{(l)}(r-l-1)!\,f^{(l)}(x_k) = L(f), \quad (14.1)$$

представляющую собой обобщение экстремальной задачи, решенной в § 10.

Мы начнем с того, что найдем среди квадратурных формул (14.1) со всевозможными узлами x_k и весами $\lambda_k^{(l)}$, где

$$0 \leqslant x_0 < \ldots < x_{m-1} \leqslant 1,$$

такую, которая дает наилучшее приближение для класса функций $W_0^{(r)}(M;\, 0,\, 1)$. Здесь предполагается, что r и m — заданные натуральные числа. При этом r — четное число.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$ класса $W_0^{(r)}(M;\, 0,\, 1)$. Она, таким образом, удовлетворяет условиям

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(r-1)}(0),$$

и для нее при $\rho = r-2$, независимо от того, будет ли формула (14.1) точна или неточна для многочленов степени $r-1$,

$$\int_0^1 f\,dx - L(f) =$$

$$= \frac{1}{r!}\int_0^1 \left\{(1-t)^r - \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{r-2}\lambda_k^{(l)}K_{r-l}(x_k-t)\right\} f^{(r)}(t)\,dt. \quad (14.2)$$

Отсюда мера приближения нашей произвольной квадратурной формулы для класса $W_0^{(r)}(M;\, 0,\, 1)$ равна

$$\mathscr{E}_m^{(r)} = \sup_{f\in W_0^{(r)}(M;\,0,\,1)}\left\{\left|\int_0^1 f\,dx - L(f)\right|\right\} =$$

$$= \frac{M}{r!}\int_0^1\left|(1-t)^r - \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{r-2}\lambda_k^{(l)}K_{r-l}(x_k-t)\right|dt. \quad (14.3)$$

Полагая

$$1-t=u, \quad \theta_k=1-x_{m-k-1}, \quad \lambda_k^{(l)}=\mu_{m-k-1}^{(r-l-1)}, \tag{14.4}$$

получим

$$\mathscr{E}_m^{(r)}=\frac{M}{r!}\int_0^1\left|u^r-\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{r-1}\mu_k^{(l)}K_{l+1}(u-\theta_k)\right|du. \tag{14.5}$$

При произвольных числах $\mu_k^{(l)}$ сумма

$$\sum_{l=1}^{r-1}\mu_k^{(l)}K_{l+1}(u-\theta_k)$$

на отрезке $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ есть произвольный многочлен степени $r-1$, обращающийся в нуль при $u=\theta_k$ ($k=1, 2, \ldots, m-1$; $\theta_m=1$).

Таким образом, принимая во внимание, что $K_s(u-\theta_k)=0$ для $u\leqslant\theta_k$ и $s>1$, получаем, что двойная сумма

$$\sigma_m^{(r)}(u)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{r-1}\mu_k^{(l)}K_{l+1}(u-\theta_k) \tag{14.6}$$

представляет собой произвольную непрерывную на отрезке $[0, 1]$ функцию, равную тождественно нулю на отрезке $[0, \theta_0]$ и равную некоторому многочлену степени $r-1$ на отрезке $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ ($k=1, \ldots, m-1$).

Наша задача свелась к нахождению минимума интеграла (14.5) для фиксированного m при варьировании узлами θ_k, удовлетворяющими неравенствам

$$0\leqslant\theta<\theta_1<\ldots<\theta_{m-1}\leqslant 1,$$

и числами $\mu_k^{(l)}$ или, иначе говоря, при варьировании функциями $\sigma_m^{(r)}(u)$, обладающими указанными выше свойствами.

Введем в рассмотрение определенную на отрезке $[a-h, a+h]$ функцию

$$h^r Q_r\left(\frac{x-a}{h}\right), \tag{14.7}$$

где

$$Q_r(x)=\frac{\sin[(r+1)\arccos x]}{2^r\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

В § 15 и 16 будет дано полное доказательство следующих свойств этой функции.

Функция (14.7) есть алгебраический многочлен степени r

$$h^r Q_r\left(\frac{x-a}{h}\right)=x^r+a_{r-1}x^{r-1}+a_{r-2}x^{r-2}+\ldots+a_0$$

с коэффициентом при x^r, равным единице. Она является единственным многочленом, для которого интеграл

$$\int\limits_{a-h}^{a+h}|P_r(x)|dx$$

достигает своего минимума среди всевозможных алгебраических многочленов $P_r(x)$ степени r с коэффициентом при x^r, равным единице.

Указанные свойства, благодаря которым многочлен (14.7) называют многочленом степени r, наименее уклоняющимся от нуля в среднем на отрезке $[a-h,\ a+h]$, можно еще трактовать так.

Интеграл

$$\int\limits_{a-h}^{a+h}|x^r-P_{r-1}(x)|dx,$$

где $P_{r-1}(x)$ есть произвольный алгебраический многочлен степени $r-1$, достигает своего наименьшего значения для единственного многочлена $P^*_{r-1}(x)$, для которого

$$h^r Q_r\left(\frac{x-a}{h}\right)=x^r-P^*_{r-1}(x). \tag{14.8}$$

Многочлен $P^*_{r-1}(x)$ называют наилучшим многочленом степени $r-1$, приближающим в среднем на отрезке $[a-h,\ a+h]$ функцию x^r.

Заметим, что если r четное, как мы с самого начала предположили, то для того, чтобы два многочлена вида (14.7), наименее уклоняющиеся от нуля на отрезках $[a-h,\ a+h]$ и $[b-h_1,\ b+h_1]$, где $a+h=b-h_1$, совпадали в точке $a+h$, необходимо и достаточно выполнение условия $h=h_1$. Действительно, то обстоятельство, что они равны в точке

$a+h$, сводится к равенству

$$h^r Q_r(1) = h_1^r Q_r(-1),$$

которое эквивалентно равенству $h = h_1$, так как при r четном

$$Q_r(-1) = Q_r(1)$$

(см. § 16).

Зададим теперь положительное число θ_0, и пусть $a - h = \theta_0$, где $h > 0$. Подберем h таким, чтобы многочлен $P_{r-1}^{(0)}(u)$, наилучшим образом приближающий функцию u^r на отрезке $[a-h, a+h]$, где $a-h=\theta_0$, обращался в нуль при $u=\theta_0$. Таким образом, вследствие (14.8)

$$P_{r-1}^{(0)}(\theta_0) = \theta_0^r - h^r Q_r(-1) = \theta_0^r - h^r Q_r(1) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\theta_0 = \sqrt[r]{Q_r(1)}\, h, \tag{14.9}$$

и так как

$$Q_r(1) = \frac{r+1}{2^r},$$

то

$$\theta_0 = \frac{\sqrt[r]{r+1}}{2} h.$$

Пусть теперь

$$\theta_k = \theta_0 + 2kh = \theta_0 \frac{\sqrt[r]{r+1} + 4k}{\sqrt[r]{r+1}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m);$$

тогда, если мы на каждом из отрезков $\omega_k = [\theta_k, \theta_{k+1}]$ определим многочлены $P_{r-1,k}(u)$, наилучшим образом в среднем приближающие соответственно на них функцию u^r, то графики этих многочленов вместе с отрезком $[0, u_0]$, лежащим на оси u, образуют на отрезке $[0, \theta_m]$ непрерывную кривую.

В самом деле, мы уже убедились в том, что эта кривая непрерывна в точке θ_0. Пусть теперь a_k есть середина отрезка ω_k, т. е. $\theta_k = a_k - h$, $\theta_{k+1} = a_k + h$.

Тогда

$$u^r - P_{r-1,k}(u) = h^r Q_r\left(\frac{u-a_k}{h}\right) \quad \text{на} \quad \omega_k,$$

$$u^r - P_{r-1,k+1}(u) = h^r Q_r\left(\frac{u-a_{k+1}}{h}\right) \quad \text{на} \quad \omega_{k+1}.$$

Подставив в эти функции одно и то же значение $u = a_k + h = a_{k+1} - h$, получим равные числа $h^r Q_r(1) = h^r Q_r(-1)$, откуда

$$P_{r-1,k}(\theta_{k+1}) = P_{r-1,k+1}(\theta_{k+1}) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-2).$$

Подберем θ_0 так, чтобы $\theta_m = 1$; тогда

$$\left.\begin{aligned} \theta_k^* &= \frac{4k + \sqrt[r]{r+1}}{4m + \sqrt[r]{r+1}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1), \\ h_* &= \frac{2}{4m + \sqrt[r]{r+1}}, \end{aligned}\right\} \tag{14.10}$$

и соответствующая полученной системе точек θ_k^* кривая является одной из определенных выше кривых $\sigma_m^{(r)}(u)$. Обозначим эту кривую через $\sigma_{m_*}^{(r)}(u)$ и докажем, что именно для нее и только для нее интеграл (14.5) достигает своего минимума. Пусть

$$\bar{\theta}_k = \frac{\theta_k^* + \theta_{k+1}^*}{2} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Величина нашего интеграла при подстановке в него $\sigma_{m_*}^{(r)}(u)$ равна

$$\frac{1}{r!}\int_0^1 |u^r - \sigma_{m_*}^{(r)}(u)|\,du =$$

$$= \frac{1}{r!}\left\{\int_0^{\theta_0^*} u^r\,du + \sum_{k=0}^{m-1}\int_{\bar{\theta}_k - h_*}^{\bar{\theta}_k + h_*}\left|h_*^r Q_r\left(\frac{u-\bar{\theta}_k}{h_*}\right)\right|du\right\} =$$

$$= \frac{1}{r!}\left\{\frac{(\theta_0^*)^{r+1}}{r+1} + m h_*^{r+1}\int_{-1}^{+1}|Q_r(x)|\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{r!}\left\{\frac{(\theta_0^*)^{r+1}}{r+1} + \frac{m h_*^{r+1}}{2^{r-1}}\right\} = \frac{1}{r!\left(4m + \sqrt[r]{r+1}\right)^r}. \tag{14.11}$$

С другой стороны, если $\sigma_m^{(r)}(u)$ — произвольная определенная выше функция, то она имеет такой вид:

$$\sigma_m^{(r)}(u) = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant u \leqslant \theta_0) \\ P_{r-1,k}(u) & (\theta_k \leqslant u \leqslant \theta_{k+1}), \end{cases} \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1), \tag{14.12}$$

где $P_{r-1,k}(u)$ — многочлены степени $r-1$. Поэтому, полагая $2\theta'_k = \theta_k + \theta_{k+1}$, будем иметь:

$$\frac{1}{r!}\int_0^1 |u^r - \sigma_m^{(r)}(u)|\,du =$$

$$= \frac{1}{r!}\left\{\int_0^{\theta_0} u^r\,du + \sum_{k=0}^{m-1}\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} |u^r - P_{r-1,k}(u)|\,du\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{r!}\left\{\frac{\theta_0^{r+1}}{r+1} + \sum_{k=0}^{m-1}\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \left(\frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{2}\right)^r \left|Q_r\left(\frac{2(u-\theta'_k)}{\theta_{k+1}-\theta_k}\right)\right| du\right\} =$$

$$= \frac{1}{r!}\left\{\frac{\theta_0^{r+1}}{r+1} + \frac{1}{2^{r-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{2}\right)^{r+1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{r!}\left\{\frac{\theta_0^{r+1}}{r+1} + \frac{1}{2^{2r}}\sum_{k=0}^{m-1}(\theta_{k+1}-\theta_k)^{r+1}\right\}. \tag{14.13}$$

При этом неравенство, входящее в эти соотношения, превращается в строгое равенство лишь тогда, когда звенья кривой $\sigma_m^{(r)}(u)$, соответствующие изменениям u на отдельных отрезках $[\theta_k, \theta_{k+1}]$, представляют собой многочлены степени $r-1$, наилучшим образом в среднем приближающие параболу u^r.

Чтобы оценить правую часть (14.13) снизу, мы должны найти ее минимум среди всевозможных $\theta_0, \theta_1 - \theta_0, \ldots, \theta_m - \theta_{m-1}$, связанных соотношением

$$\theta_0 + \sum_{k=0}^{m-1}(\theta_{k+1} - \theta_k) = 1. \tag{14.14}$$

Решение этой задачи на относительный минимум приводит к тому, что правая часть (14.13) достигает минимума при условии (14.14) для единственной системы значений $\theta_k = \overset{*}{\theta}_k$, определяемых равенствами (14.10).

Перейдем теперь к вычислению коэффициентов $\mu_{k_*}^{(l)}$, соответствующих минимуму интеграла (14.5).

На отрезке $[\theta_0^*, \theta_1^*]$ функция, стоящая под знаком абсолютной величины в интервале (14.5), равна

$$u^r - \sum_{l=1}^{r-1} \mu_{0_*}^{(l)} (u - \theta_0^*)^l = h_*^r Q_r \left(-1 + \frac{u - \theta_0^*}{h^*}\right) =$$

$$= h_*^r \left\{ Q_r(-1) + \frac{u - \theta_0^*}{h^*} Q_r'(-1) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{(u - \theta_0^*)^r}{h_*^r r!} Q_r^{(r)}(-1) \right\}.$$

Отсюда, разлагая u^r по степеням $u - \theta_0^*$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим, принимая во внимание (14.9),

$$\mu_{0_*}^{(l)} = \frac{h_*^{r-l}}{l!} \left\{ \frac{r!}{(r-l)!} [Q_r(1)]^{\frac{r-l}{r}} - Q_r^{(l)}(-1) \right\} \tag{14.15}$$

$$(l = 1, \dots, r-1)$$

и, подставляя вместо $Q_r(1)$ его величину, получим

$$\mu_{0_*}^{(l)} = \frac{1}{l! \left(4m + \sqrt[r]{r+1}\right)^{r-l}} \left[\frac{r!}{(r-l)!} (r+1)^{\frac{r-l}{r}} - 2^{r-l} Q_r^{(l)}(-1) \right] \tag{14.16}$$

$$(l = 1, \dots, r-1).$$

Если учесть свойства функций $K_{l+1}(u - \theta_k)$, то нетрудно видеть, что на отрезке $[\theta_k^*, \theta_{k+1}^*]$ функция, стоящая под знаком абсолютной величины в интеграле (14.5), при $\mu_k^{(l)} = \mu_{k_*}^{(l)}$ равна

$$h_*^r Q_r \left(-1 + \frac{u - \theta_k^*}{h_*}\right) =$$

$$= h_*^r Q_r \left(-1 + \frac{u - \theta_{k-1}^*}{h^*}\right) - \sum_{l=1}^{r-1} \mu_{k_*}^{(l)} (u - \theta_k^*)^l.$$

Если принять теперь во внимание, что при четном r функция $Q_r(x)$ четная и, таким образом, $Q_r^{(l)}(-1) = (-1)^l Q_r^{(l)}(1)$, то

$$\sum_{l=1}^{r-1} \mu_{k_*}^{(l)} (u - \theta_k^*)^l =$$

$$= h_*^r \left\{ Q_r\left(-1 + \frac{u - \theta_{k-1}^*}{h_*}\right) - Q_r\left(-1 + \frac{u - \theta_k^*}{h_*}\right) \right\} =$$

$$= h_*^r \left\{ Q_r\left(1 + \frac{u - \theta_k^*}{h_*}\right) - Q_r\left(-1 + \frac{u - \theta_k^*}{h_*}\right) \right\} =$$

$$= 2h_*^r \left\{ \frac{u - \theta_k^*}{h_*} Q_r'(1) + \frac{(u - \theta_k^*)^3}{3!\, h_*^3} Q_r'''(1) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(u - \theta_k^*)^{r-1}}{(r-1)!\, h_*^{r-1}} Q_r^{(r-1)}(1) \right\}.$$

Таким образом, для $k = 1, \ldots, m-1$

$$\mu_{k_*}^{(2i)} = 0 \qquad \left(i = 1, \ldots, \frac{r-2}{2}\right),$$

$$\mu_{k_*}^{(2i+1)} = \frac{2h_*^{r-2i-1}}{(2i+1)!} Q_r^{(2i+1)}(1) \qquad \left(i = 0, 1, \ldots, \frac{r-2}{2}\right).$$

Пересчет на исходные узлы $\overset{\bullet}{x}_k$ и коэффициенты $\lambda_{k_*}^{(l)}$ (см. (14.4)) приводит к следующим результатам:

$$\left.\begin{aligned}
&x_k^* = 2(k+1)h_* \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1),\\
&\lambda_{k_*}^{2i+1} = 0\\
&\left(i = 0, 1, \ldots, \frac{r-4}{2};\ k = 0, 1, \ldots, m-2\right),\\
&\lambda_{k_*}^{(2i)} = \frac{2h_*^{2i+1}}{(r-2i-1)!} Q_r^{(r-2i-1)}(1)\\
&\left(i = 0, 1, \ldots, \frac{r-2}{2};\ k = 0, 1, \ldots, m-2\right),\\
&\lambda_{m-1_*}^{(l)} =\\
&= \frac{h_*^{l+1}}{(r-l-1)!} \left\{ \frac{r!}{(l+1)!} [Q_r(1)]^{\frac{l+1}{r}} - Q_r^{(r-l-1)}(-1) \right\}\\
&\qquad\qquad (l = 0, 1, \ldots, r-2),
\end{aligned}\right\} \quad (14.17)$$

где
$$h_* = \frac{2}{4m + \sqrt[r]{r+1}} = 2\omega_m. \qquad (14.18)$$

Мы пришли к следующему утверждению.

Теорема 10. *Среди квадратурных формул вида* (14.1), *определяемых при фиксированных m и r произвольными коэффициентами $\lambda_k^{(l)}$ и узлами x_k, где $0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \leqslant 1$, наилучшей для класса $W_0^{(r)}(M;\ 0,\ 1)$ является единственная формула*
$$\int_0^1 f\,dx \approx L_*(f)$$
с коэффициентами λ_{k_*} и узлами x_k^*, выражаемыми при помощи равенств (14.17), (14.18), *и с мерой уклонения, равной*
$$\sup_{f \in W_0^{(r)}(M;\ 0,\ 1)} \left\{ \int_0^1 f\,dx - L_*(f) \right\} = M\frac{\omega_m^r}{r!}. \qquad (14.19)$$

Оценка (14.19) непосредственно следует из (14.13), где в правой части надо положить $\theta_k = \theta_k^*$ (см. (14.10)).

Рассмотрим частный случай полученного результата при $r=4$. В этом случае наилучшая квадратурная формула имеет такой вид:
$$\int_0^1 f\,dx \approx \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_k f(x_k) + \beta_k f''(x_k)] + \gamma f'(x_{m-1}), \qquad (14.20)$$
где
$$x_k = 4(k+1)\,\omega_m \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1), \quad \omega_m = \left(4m + \sqrt[4]{5}\right)^{-1},$$
$$\alpha_k = \frac{2}{3}\omega_m, \qquad \beta_k = \frac{5\omega_m^3}{3} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-2),$$
$$\gamma = \frac{2\sqrt{5}-7}{8}\omega_m^2, \qquad \alpha_{m-1} = \frac{\omega_m}{6}\left(\sqrt[4]{5}+2\right),$$
$$\beta_{m-1} = \frac{1}{6}\left(1+\sqrt[4]{5}\right)\omega_m^3, \qquad \varepsilon_m^{(4)} = \frac{M\omega_m^4}{24}.$$

Формуле (14.20) можно привести в соответствие симметрическую квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} f\,dx \approx \sum_{k=-m}^{m} [a_k f(\xi_k) + b_k f''(\xi_k)] + \\ + \gamma[f'(\xi_m) + f'(\xi_m)] + \gamma_0 f'(0) + \delta_0 f'''(0), \quad (14.21)$$

где

$$-\xi_{-k} = \xi_k = x_{k-1}, \quad a_{-k} = a_k = \alpha_{k-1}, \\ b_{-k} = b_k = \beta_{k-1}, \quad \xi_0 = 0 \quad (k = 1, \ldots, m), \quad (14.22)$$

а a_0, b_0, γ_0, δ_0 подобраны так, чтобы полученная формула была точной для многочленов третьей степени.

Формула (14.21) замечательна тем, что она является наилучшей для класса функций, имеющих четвертую производную, удовлетворяющую неравенству $|f^{(\mathrm{IV})}(x)| \leqslant M$ на отрезке $[-1, +1]$, т. е. для класса $W^{(4)}(M; -1, +1)$ среди квадратурных формул вида

$$\int_{-1}^{1} f\,dx \approx \sum_{-m}^{m} [\lambda_k f(x_k) + \gamma_k f'(x_k) + \mu_k f''(x_k)] + \delta f'''(x_0), \\ -1 \leqslant x_{-m} < \ldots < x_0 < \ldots < x_m \leqslant 1, \quad (14.23)$$

где m фиксировано, а параметры λ_k, γ_k, μ_k, δ, x_k — произвольны.

Действительно, пусть $W_\alpha^{(4)}(M; c, d)$, как и раньше, обозначает класс функций, принадлежащих к $W^{(4)}(M; c, d)$ и таких, что $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = f'''(\alpha) = 0$. Тогда для произвольной квадратурной формулы вида (14.23), точной для многочленов третьей степени (см. начало доказательства теоремы 8), будем иметь

$$\sup_{f \in W_{x_0}^{(4)}(M; -1, +1)} \left| \int_{-1}^{1} f\,dx - \sum_{-m}^{m} [\lambda_k f(x_k) + \gamma_k f'(x_k) + \right. \\ \left. + \mu_k f''(x_k)] + \delta f'''(x_0) \right| = \sup_{f \in W_{x_0}^{(4)}(M; -1, +1)} \left| \int_{-1}^{1} f\,dx - \sum_{-m}^{m} \right| = \\ = \sup_{f \in W_{x_0}^{(4)}(M; -1, x_0)} \left| \int_{-1}^{x_0} f\,dx - \sum_{-m}^{-1} \right| + \sup_{f \in W_{x_0}^{(4)}(M; x_0, 1)} \left| \int_{x_0}^{1} - \sum_{1}^{m} \right| \geqslant \\ \geqslant \frac{\omega_m^4}{4!} [(x_0 + 1)^5 + (1 - x_0)^5] \geqslant \frac{\omega_m^4}{12}.$$

В этой цепи последнее соотношение обращается в равенство лишь при $x_0 = 0$, а предпоследнее соотношение на основании теоремы 10 обращается в равенство, лишь если (см. (14.21) и (14.22))

$$\lambda_{-k} = \lambda_k = a_k, \qquad \mu_{-k} = \mu_k = b_k \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

$$\gamma_{-k} = \gamma_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m-1), \qquad \gamma_{-m} = \gamma_m = \gamma,$$

$$x_{-k} = x_k = \xi_k \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Указанные узлы и веса, таким образом, определены однозначно. Но тогда однозначно также определяются веса $\lambda_0 = a_0$, $\mu_0 = b_0$, γ_0 и δ_0 из условия, выражающего, что искомая формула должна быть точной для функции 1, x, x^2, x^3.

Точность, которую дает приближение по формуле (14.21), очень велика. Например, при $m = 1$

$$M \frac{\omega_1^4}{12} < \frac{M}{12 \cdot 5^4}.$$

В этом случае формула (14.21) имеет такой вид:

$$\int_{-1}^{1} f\,dx = a\,[f(x_1) + f(x_{-1})] + a_0 f(0) + b\,[f''(x_1) + f''(x_{-1})] +$$
$$+ b f''(0) + \gamma\,[f'(x_1) + f'(x_{-1})] + \gamma_0 f'(0) + \delta_0 f'''(0);$$

$$x_1 = -x_{-1} = 4\omega_1, \quad a = \frac{2 + \sqrt[4]{5}}{6}\,\omega_1, \quad a_0 = \frac{22 + 5\sqrt[4]{5}}{3\left(4 + \sqrt[4]{5}\right)},$$

$$b = 4\left(5 + \left(\sqrt[4]{5}\right)^3\right)\omega_1^3,$$

$$b_0 = \frac{1}{3} - 8\omega_1^3\left[\frac{1}{3}\left(2 + \sqrt[4]{5}\right) - \left(5 + \sqrt[4]{5}\right)^3\right],$$

$$\gamma = \frac{2\sqrt{5} - 7}{8}\,\omega_1^2, \quad \gamma_0 = \frac{7 - 2\sqrt{5}}{4}\,\omega_1^2,$$

$$\delta_0 = 2\left(7 - 2\sqrt{5}\right)\omega_1^4, \quad \omega_1 = \left(4 + \sqrt[4]{5}\right)^{-1}.$$

Далее, при $m = 2$

$$\frac{M\omega_2^4}{12} < \frac{M}{12 \cdot 9^4}.$$

Теоретическое значение изложенных результатов заключается в том, что они дают точные оценки снизу приближений для любых квадратурных формул типа (14.1).

Замечательно, что при четном r наилучшие квадратурные формулы вида (14.1) содержат значения нечетных производных только для крайних узлов. Это обстоятельство следует иметь в виду при выборе той или иной квадратурной формулы, тем более, что оно упрощает формулу.

Непосредственное применение в практике вычислений выведенных квадратурных формул затруднено тем, что узлы и веса их выражаются иррациональными числами.

Однако вид выведенных экстремальных формул может послужить руководящим указанием для поисков более простых рациональных формул.

Ниже мы остановимся на результатах А. И. Киселева, который распространил изложенные выше исследования на класс функций $W_L^{(r)}(M;\ 0,\ 1)$ (см. § 2).

Обозначим через $W_{\alpha L}^{(r)}(M;\ 0,\ 1)$ совокупность функций $f(x)$ класса $W_L^{(r)}(M;\ 0,\ 1)$, удовлетворяющих условию

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\ldots=f^{(r-1)}(\alpha)=0.$$

Для всякой функции f, принадлежащей к $W_{0L}^{(r)}(M;\ 0,\ 1)$, имеет место равенство (14.2), где $L(f)$ определяется по-прежнему формулой (14.1). Отсюда на основании (4.14) и (4.15) получим

$$\mathscr{E}_{mL}^{(r)}=\sup_{f\in W_{0L}^{(r)}(M;\ 0,\ 1)}\left\{\int_0^1 f\,dx-L(f)\right\}=$$

$$=\frac{M}{r!}\max_{0\leqslant u\leqslant 1}\left|u^r-\sigma_m^{(r)}(u)\right|, \tag{14.24}$$

где $\sigma_m^{(r)}(u)$ по-прежнему определяется равенством (14.6).

Наилучшая квадратурная формула вида (14.1) для класса $W_{0L}^{(r)}(M;\ 0,\ 1)$ соответствует такой функции $\sigma_{m_*}^{(r)}(u)$, для которой величина $\mathscr{E}_{mL}^{(r)}$ достигает своего минимума.

В определении этой функции существенную роль играет на этот раз многочлен

$$T_r(x)=\frac{1}{2^{r-1}}\cos(r\arccos x)$$

Чебышева степени r, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, +1]$ в метрике непрерывных функций (см. §. 15). Соответствующий ему многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a-h, a+h]$, имеет такой вид:

$$h^r T_r\left(\frac{u-a}{h}\right).$$

Зададим θ_0 и подберем $h>0$ таким, чтобы многочлен $P_{r-1}^{(0)}(u)$, наилучшим образом приближающий x^n в метрике непрерывных функций на отрезке $[a-h, a+h]$, где $a-h=\theta_0$, обращался в нуль при $u=\theta_0$. Тогда при четном r (см. § 15)

$$0=P_{r-1}^{(0)}(\theta_0)=\theta_0^r-h^rT_r(-1)=\theta_0^r-h^r\frac{1}{2^{r-1}},$$

откуда

$$h=2^{\frac{r-1}{r}}\theta_0.$$

Положим теперь

$$\theta_k=\theta_0+2kh \qquad (k=0, 1, \ldots, m)$$

и подберем $\theta_0=\theta_0^*$ так, чтобы $\theta_m=\theta_m^*=1$; тогда

$$\theta_k^*=\frac{1+2^{\frac{2r-1}{r}}k}{1+2^{\frac{2r-1}{r}}m} \qquad (k=0, 1, \ldots, m-1).$$

Определим теперь функцию $\sigma_{m*}^{(r)}(u)$ при помощи равенства

$$u^r-\sigma_{m*}^{(r)}(u)=\begin{cases} u^r & 0\leqslant u\leqslant\theta_0^*, \\ h_*^rT_r\left(\dfrac{u-\bar\theta_k}{h_*}\right) & (k=0, 1, \ldots, m-1),\end{cases}$$

где

$$\bar\theta_k=\frac{\theta_k^*+\theta_{k+1}^*}{2}, \qquad h_*=\frac{2^{\frac{r-1}{r}}}{1+2^{\frac{2r-1}{r}}m}.$$

Рассуждениями, подобными изложенным выше, в которых только надо заменить Q_r на T_r, доказываем, что функция $\sigma_{m*}^{(r)}(u)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, равна нулю на $[0, \theta_0^*]$ и на каждом из отрезков $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ является многочленом степени $r-1$. Иначе говоря, эта функция одна из допустимых функций $\sigma_m^{(r)}(u)$ вида (14.6). Для функции $\sigma_{m*}^{(r)}(u)$

$$\mathscr{E}_{mL}^{*(r)}=\frac{M}{r!}\max_{0\leqslant u\leqslant 1}\left|u^r-\sigma_{m*}^{(r)}(u)\right|=\frac{M}{r!}\theta_0^{*r}=\frac{M}{r!\left(1+2^{\frac{2r-1}{r}}m\right)^r}. \tag{14.25}$$

С другой стороны, если $\sigma_m^{(r)}(u)$ — произвольная функция вида (14.6), то она, как мы знаем, определяется равенствами (14.12), где θ_k ($k=0, 1, \ldots, m-1$) — произвольные точки отрезка $[0, 1]$.

Если $\theta_0 > \theta_0^*$, то

$$\frac{M}{r!} \max_{0\leqslant u\leqslant 1} \left| u^r - \sigma_m^{(r)}(u) \right| \geqslant \frac{M}{r!}\theta_0^r > \frac{M}{r!}\theta^{*r} = \mathscr{E}_{mL}^{*(r)}.$$

Если же $\theta_0 \leqslant \theta_0^*$, то пусть отрезок $[\theta_{k_0}, \theta_{k_0+1}]$ имеет наибольшую длину среди m отрезков $[\theta_k, \theta_{k+1}]$. Очевидно, что

$$2h_0 = \theta_{k_0+1} - \theta_{k_0} \geqslant \theta_{k+1}^* - \theta_k^* = 2h_*.$$

При этом равенство возможно, лишь если $\theta_k = \theta_k^*$ для всех $k=0, 1, \ldots, m-1$. Тогда имеем

$$\frac{M}{r!} \max_{0\leqslant u\leqslant 1} \left| u^r - \sigma_m^{(r)}(u) \right| \geqslant \frac{M}{r!} \max_{\theta_{k_0}\leqslant u\leqslant \theta_{k_0+1}} \left| u^r - P_{r-1, k_0}(u) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{M}{r!} \max h_0^r \left| T_r\left(\frac{x-\bar{\theta}_{k_0}}{h_0}\right)\right| = \frac{Mh_0^r}{r!\,2^{r-1}} \geqslant \frac{M}{r!}\frac{h^r}{2^{r-1}} = \mathscr{E}_{mL}^{*(r)},$$

причем неравенства всюду обращаются в равенства лишь при

$$\sigma_m^{(r)}(u) \equiv \sigma_{m_*}^{(r)}(u).$$

Этим доказано, что $\sigma_{m^*}^{(r)}(u)$ есть единственная функция для которой величина $\mathscr{E}_{mL}^{(r)}$ достигает минимума.

Вычисление коэффициентов $\lambda_{k_*}^{(l)}$ наилучшей квадратурной формулы вида (14.1) в данном случае производится в точности так же, как было изложено выше, в случае класса $W_0^{(r)}(M; 0, 1)$. Нужно только всюду в рассуждениях заменить многочлен $Q_r(x)$ на $T_r(x)$. В результате мы придем снова к формулам (14.17), где надо заменить $Q_r(x)$ на $T_r(x)$ и положить

$$h_* = \frac{2^{\frac{r-1}{r}}}{1 + 2^{\frac{2r-1}{r}} m}. \tag{14.26}$$

Мы пришли к следующему результату.

Среди квадратурных формул вида (14.1), *определяемых при фиксированных* m *и* r *произвольными коэффициентами* $\lambda_k^{(l)}$ *и узлами* x_k, где $0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \leqslant 1$, *наилучшей для класса* $W_{0L}^{(r)}(M; 0, 1)$ *является единственная формула,*

$$\int_0^1 f\,dx \approx L_*(f).$$

с коэффициентами и узлами, выражаемыми при помощи равенств (14.17), *где надо заменить* $Q_r(x)$ *на многочлен* $T_r(x)$ *Чебышева и считать* h_* *определенным по формуле* (14.26).

Мера приближения $\mathscr{E}^{*(r)}_{mL}$ *этой наилучшей формулы определяется равенством* (14.25).

Полученная экстремальная квадратурная формула допускает симметризацию аналогично тому, как это имело место в случае соответствующей экстремальной формулы для класса $W_0^{(r)}(M;0,1)$.

§ 15. МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ

Рассмотрим две функции,

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \tag{15.1}$$

$$Q_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{2^n \sqrt{1-x^2}}, \tag{15.2}$$

заданные на отрезке $[-1, +1]$. Первая из них называется многочленом Чебышева степени n, наименее уклоняющимся от нуля в метрике непрерывных функций. Вторую, как мы увидим ниже, естественно называть многочленом степени n, наименее уклоняющимся от нуля в среднем (или в метрике L суммируемых функций).

С точностью до постоянного множителя функция $Q_n(x)$ есть производная от многочлена $T_{n+1}(x)$ Чебышева.

Сначала убедимся в том, что $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ действительно являются алгебраическими многочленами степени n с коэффициентами при x^n, равными единице, т. е. в том, что обе эти функции можно представить в виде

$$T_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0,$$
$$Q_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0,$$

где a_k и b_k — некоторые числа. Это обстоятельство проще всего получить по индукции от n к $(n+1)$.

В самом деле, наше утверждение верно при $n = 1$, так как очевидно, что

$$Q_1(x) = T_1(x) = x,$$

Если теперь допустить, что утверждение верно для $n-1$, то

$$T_n(x) = \frac{x\cos(n-1)\arccos x}{2^{n-1}} - \frac{\sqrt{1-x^2}\sin(n-1)\arccos x}{2^{n-1}} =$$

$$= \left(\frac{x^n}{2} + \ldots\right) - \frac{(1-x^2)\sin(n-1)\arccos x}{2^{n-1}\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left(\frac{x^n}{2} + \ldots\right) + \left(\frac{x^n}{2} + \ldots\right) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots,$$

$$Q_n(x) = \frac{x\sin n\arccos x}{2^n\sqrt{1-x^2}} + \frac{\cos n\arccos x}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{x^n}{2} + \ldots\right) + \left(\frac{x^n}{2} + \ldots\right) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots,$$

т. е. оно верно также для n.

Отметим, что многочлен $T_n(x)$ Чебышева обладает следующим очевидным свойством:

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

При этом максимум достигается в $n+1$ точках x_k отрезка $[-1, +1]$, определяемых равенствами

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{15.3}$$

и значения $T_n(x_k)$ многочлена в этих точках равны для $k = 0, 1, \ldots, n$, попеременно то числу $1/2^{n-1}$, то числу $-1/2^{n-1}$, т. е. последовательно меняют знак.

Из сказанного немедленно вытекает следующее важнейшее свойство многочлена Чебышева.

Среди многочленов

$$P_n(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_{n-2}x^{n-2} + \ldots + \alpha_0$$

степени n с коэффициентом при x^n, равным единице, многочлен $T_n(x)$ Чебышева единственный, для которого максимум модуля $P_n(x)$ на отрезке $[-1, +1]$ достигает своего минимума, т. е.

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P_n(x)| \geqslant \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

В самом деле, если алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени n с коэффициентом при x^n, равным единице, отличен от $T_n(x)$, то обязательно

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P_n(x)| > \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |T_n(x)|.$$

Если бы это было не так, то, представляя $P_n(x)$ в виде суммы

$$P_n(x) = T_n(x) + P_{n-1}(x),$$

мы бы получили, что $P_{n-1}(x)$ есть многочлен степени $n-1$, для которого в определенных выше равенствами (15.3) $(n+1)$ точках x_k выполняются неравенства

$$(-1)^{k+1}P_{n-1}(x_k) \geqslant 0 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Но тогда, применяя теорему Ролля, мы придем к следствию, что многочлен $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$ обращается в нуль в n точках и, следовательно, тождественно равен нулю, т. е. $P_n(x) \equiv T_n(x)$, что противоречит тому факту, что P_n и T_n отличны друг от друга. Доказанное свойство многочлена $T_n(x)$ и дало основание называть его многочленом, наименее уклоняющимся на отрезке $[-1, +1]$ от нуля в метрике непрерывных функций *).

Перейдем теперь к доказательству аналогичного свойства многочлена $Q_n(x)$. Оно гласит:

Среди многочленов $P_n(x)$ степени n с коэффициентом при x^n, равным единице, многочлен $Q_n(x)$ — единственный, для которого интеграл

$$\int_{-1}^{1} |P_n(x)|\,dx$$

*) В метрике непрерывных на $[-1, +1]$ функций каждой непрерывной на отрезке $[-1, +1]$ функции $f(x)$ приводится в соответствие ее норма

$$\|f\| = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|.$$

В метрике же L суммируемых на $[-1, +1]$ функций норма $\|f\|_L$ определяется как $\|f\|_L = \int_{-1}^{+1} |f(x)|\,dx.$

Расстояние между двумя функциями f_1 и f_2 определяется как норма их разности — $\|f_1 - f_2\|$.

достигает своего минимума, т. е.

$$\int_{-1}^{+1} | P_n(x) | dx \geqslant \int_{-1}^{+1} | Q_n(x) | dx =$$

$$= \frac{1}{2^n} \int_0^{\pi} | \sin(n+1)\theta | d\theta = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Это свойство многочлена $Q_n(x)$ можно установить, всецело базируясь на том факте, что функция *)

$$q(x) = \operatorname{sign} Q_n(x) = \operatorname{sign} \sin(n+1) \arccos x$$

ортогональна на отрезке $[-1, +1]$ ко всем многочленам степени $n-1$. Иначе говоря, для всех многочленов $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$ имеет место

$$\int_{-1}^{+1} q(x) P_{n-1}(x) dx = 0. \tag{15.4}$$

В самом деле, пусть $P_n(x)$ есть отличный от $Q_n(x)$ многочлен степени n с коэффициентом при x^n, равным единице. Тогда, если считать, что

$$Q_n(x) = x^n + q_{n-1}(x), \quad P_n(x) = x^n + p_{n-1}(x),$$

где q_{n-1} и p_{n-1} — некоторые многочлены степени $n-1$, то в силу (15.4)

$$\int_{-1}^{+1} | Q_n(x) | dx = \int_{-1}^{+1} Q_n(x) q(x) dx = \int_{-1}^{+1} x^n q(x) dx =$$

$$= \int_{-1}^{+1} P_n(x) q(x) dx < \int_{-1}^{+1} | P_n(x) | dx.$$

То обстоятельство, что в этих соотношениях стоит знак строгого неравенства, вытекает, во-первых, из того, что

$$| q(x) | = 1$$

для всех x, за исключением конечного числа точек, и, во-вторых, из того факта, что в силу предположенного

---

*) См. сноску на стр. 27.

различия многочленов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$, имеющих равные коэффициенты при x^n, знаки этих функций не могут совпадать на отрезке $[-1, +1]$ всюду *).

Нам осталось только доказать равенство (15.4).

Ряд Фурье функции $q(\cos\theta)$ имеет такой вид:

$$q(\cos\theta) = \operatorname{sign}\sin(n+1)\theta = \frac{4}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)(n+1)\theta}{2k+1}.$$

Отсюда для $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\int_{-1}^{+1} x^k q(x)\,dx = -\int_{0}^{\pi}\cos^k\theta\,\operatorname{sign}\sin(n+1)\theta\sin\theta\,d\theta = 0, \tag{15.5}$$

так как функция $\cos^k\theta\sin\theta$ есть нечетный тригонометрический полином порядка $k+1 \leqslant n$, т. е. она может быть представлена в следующем виде:

$$\cos^k\theta\sin\theta = \sum_{l=1}^{k+1}\alpha_l\sin l\theta \qquad (k+1 \leqslant n),$$

а разложение функции $\operatorname{sign}\sin(n+1)\theta$ в ряд Фурье содержит синусы только кратностей $l > n$. Надо иметь в виду, что

$$\int_0^{\pi}\sin l_1\theta\sin l_2\theta\,d\theta = 0 \qquad (l_1 \neq l_2)$$

для натуральных l_1 и l_2.

Из равенств (15.5), верных для $k = 0, 1, \ldots, n-1$ следует равенство (15.4) для всех многочленов степени $n-1$.

Ниже приводятся примеры многочленов Чебышева $T_n(x)$ и $Q_n(x)$, наименее уклоняющихся от нуля (в метриках C и L) на отрезке $[-1, +1]$ для малых n.

---

*) Если бы знаки $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ совпадали, то оба многочлена должны были бы иметь одни и те же n нулей, и так как коэффициенты при x^n у них равны, то, очевидно, было бы $P_n(x) \equiv Q_n(x)$.

Многочлены Чебышева $T_n(x)$:

$T_0(x) = 1,$

$T_1(x) = \cos\arccos x = x,$

$$T_2(x) = \frac{1}{2}\cos 2\arccos x = \frac{1}{2}(2x^2 - 1)$$

$$T_3(x) = \frac{1}{2^2}\cos 3\arccos x = \frac{1}{4}(4x^3 - 3x)$$

$$T_4(x) = \frac{1}{2^3}\cos 4\arccos x = \frac{1}{8}(8x^4 - 8x^2 + 1)$$

$$T_5(x) = \frac{1}{2^4}\cos 5\arccos x = \frac{1}{16}(16x^5 - 20x^3 + 5x).$$

Многочлены Чебышева $Q_n(x)$:

$$Q_0(x) = 1,$$

$$Q_1(x) = x,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(4x^2 - 1),$$

$$Q_3(x) = \frac{1}{2}(2x^3 - x),$$

$$Q_4(x) = \frac{1}{16}(16x^4 - 12x^2 + 1),$$

$$Q_5(x) = \frac{1}{16}(16x^5 - 16x^3 + 3x).$$

О некоторых свойствах многочленов Чебышева будет идти еще речь в следующем параграфе, посвященном многочленам, наименее уклоняющимися от нуля в метрике L_p.

§ 16. МНОГОЧЛЕНЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ В МЕТРИКЕ L_p

Более общим случаем является многочлен степени n, наименее уклоняющийся на отрезке $[-1, +1]$ в метрике L_p $(p \geqslant 1)$. Это есть такой многочлен

$$R_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

для которого интеграл

$$\int_{-1}^{+1} |P_n(x)|^p\, dx.$$

достигает своего минимума среди произвольных многочленов $P_n(x)$ степени n с коэффициентами при x^n, равными единице. Можно доказать, но мы на этом останавливаться не будем, что многочлен, наименее уклоняющийся от нуля в метрике L_p, существует и единствен. При $p = 1$ это было установлено нами выше *).

При четном n многочлен $R_n(x)$, наименее уклоняющийся от нуля, четный, т. е. содержит только четные степени x. Действительно, если в интеграле

$$\int_{-1}^{+1} | R_n (x) |^p \, dx = \int_{-1}^{+1} | x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_0 |^p \, dx \quad (16.1)$$

произвести замену переменной x на $-x$, то получим равный ему интеграл

$$\int_{-1}^{+1} | x^n - \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_0 |^p \, dx = \int_{-1}^{+1} | R_{1n} (x) |^p \, dx,$$

при этом $R_{1n}(x)$ есть многочлен степени n, отличающийся от $R_n(x)$ тем, что члены его при нечетных степенях противоположны по знаку соответствующим членам $R_n(x)$.

Так как

$$\int_{-1}^{+1} | R_n (x) |^p \, dx = \int_{-1}^{+1} | R_{1n} (x) |^p \, dx$$

и $R_{1n}(x)$, так же как $R_n(x)$, имеет коэффициент при x^n, равный единице, то $R_{1n}(x)$ есть, так же как $R_n(x)$, многочлен, наименее уклоняющийся от нуля. Но вследствие единственности такого многочлена

$$R_n (x) \equiv R_{1n} (x),$$

что возможно только тогда, когда все коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю.

Подобным образом доказывается, что при нечетном n многочлен, наименее уклоняющийся от нуля, нечетный, т. е. содержит только нечетные степени x.

Для $Q_n(x)$ эти свойства непосредственно следуют из равенств

$$\sin (n + 1) \arccos (-x) = \sin (n + 1) (\pi - \arccos x) = \\ = (-1)^n \sin (n + 1) \arccos x.$$

Подобными свойствами обладает и $T_n(x)$:

$$\cos n \arccos (-x) = \cos n (\pi - \arccos x) = (-1)^n \cos n \arccos x.$$

---

*) При $p > 1$ не только существование, но и единственность многочлена, наименее уклоняющегося от нуля, вытекает из общих свойств пространства функций L_p.

Отметим еще следующее важное свойство многочлена, наименее уклоняющегося от нуля.

Многочлен, наименее уклоняющийся от нуля, имеет n различных действительных нулей x_k ($k = 1, \ldots, n$), расположенных строго внутри отрезка $[-1, +1]$. *Таким образом,*

$$-1 < x_1 < \ldots < x_n < 1.$$

В самом деле, если бы это утверждение было неверно, то строго внутри отрезка $[-1, +1]$ наш многочлен $R_n(x)$ обращался бы в нуль с переменой знака не более чем в m точках, где $m < n$. Пусть эти точки будут

$$x_1, x_2, \ldots, x_m.$$

Определим многочлен

$$\lambda(x) = \pm (x - x_1) \ldots (x - x_m)$$

(при $m = 0$, $\lambda(x) = \pm 1$). Знак $+$ или $-$ подобран так, чтобы знак $\lambda(x)$ на отрезке $[-1, +1]$ совпадал со знаком $R_n(x)$.

Рассмотрим функцию

$$I(\varepsilon) = \int_{-1}^{+1} |R_n(x) + \varepsilon\lambda(x)|^p\,dx.$$

Так как $R_n(x)$ есть многочлен, наименее уклоняющийся от нуля, то

$$\min_{\varepsilon} I(\varepsilon) = I(0)$$

и, следовательно *),

$$I'(0) = p\int_{-1}^{+1} |R_n(x)|^{p-1}\,\mathrm{sign}\,R_n(x)\,\lambda(x)\,dx =$$

$$= p\int_{-1}^{+1} |R_n(x)|^{p-1}\,|\lambda(x)|\,dx = 0.$$

Но это равенство невозможно, так как многочлен $R_n(x)$, как имеющий коэффициент при x^n, равный единице, равен нулю только в конечном числе точек и $\lambda(x)$, очевидно, обладает тем же свойством.

Доказанное свойство в случае $p = 1$ непосредственно усматривается из рассмотрения эффективного выражения (15.2) для $Q_n(x)$. Оно очевидно имеет место и у $T_n(x)$.

---

*) Надо иметь в виду, что $\frac{d}{du}|u| = \mathrm{sign}\,u$. В данном случае под знаком абсолютной величины стоит функция, обращающаяся на отрезке $[-1, +1]$ в нуль только в конечном числе точек. Можно доказать, что при этом условии формальное дифференцирование под знаком интеграла и абсолютной величины законно.

Заметим, что линейная функция

$$\frac{y-a}{h}=x$$

преобразует отрезок $[-1, +1]$ точек x в отрезок $[a-h,\ a+h]$ точек y. Отсюда нетрудно видеть, что многочлен $S(x)$ степени n с коэффициентом при x^n, равным единице, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a-h,\ a+h]$ в метрике L_p, имеет вид

$$S(x)=h^n R_n\left(\frac{x-a}{h}\right). \tag{16.2}$$

Пусть $R^{(p)}(x)$ и $T(x)$ суть многочлены n-й степени с коэффициентом при x^n, равным единице, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-1, +1]$, соответственно в метрике L_p $(1\leqslant p<\infty)$ и метрике C непрерывных функций.

Положим

$$\|f\|_{L_p}=\left(\int_{-1}^{+1}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \qquad (1\leqslant p<\infty),$$

$$\|f\|_C=\|f\|_{L_\infty}=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Имеет место равенство*

$$\lim_{p\to p_0} R^p(x)=R^{(p_0)}(x) \qquad (1\leqslant p,\ p_0\leqslant\infty) \tag{16.3}$$

равномерно на $[-1, +1]$. *Оно влечет за собой равенство*

$$\lim_{p\to p_0}\|R^{(p)}\|_{L_p}=\|R^{(p_0)}\|_{L_{p_0}}. \tag{16.4}$$

Доказательство теоремы основано на следующей общей лемме.

Лемма. *Пусть задана последовательность многочленов*

$$\varphi_k(x)=a_0^{(k)}+a_1^{(k)}x+\ldots+a_n^{(k)}x^n \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

данной степени n *с нормами в метриках* L_{p_k}, *ограниченными константой*

$$\|\varphi\|_{L_{p_k}}\leqslant M \qquad (1\leqslant p_k\leqslant\infty), \tag{16.5}$$

не зависящей от k.

Из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_{k_l}(x)\}$, *равномерно сходящуюся на отрезке* $[-1, +1]$, *или, что все равно, подпоследовательность, для которой существуют пределы*

$$\lim_{l\to\infty} a_s^{(k_l)}=a_s \qquad (s=0, 1, \ldots, n), \tag{16.6}$$

где a_s — *некоторые числа.*

Доказательство. Пусть l — натуральное число, удовлетворяющее неравенству $1 \leqslant l \leqslant n$. Тогда из (16.5) в силу того, что на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ функция x^l не превышает единицы и на основании неравенства Гёльдера следует:

$$\left|\sum_{s=0}^{n} \frac{a_s^{(k)}}{1+s+l}\right| = \left|\int_0^1 \sum_0^n a_s^{(k)} x^{s+l}\, dx\right| = \left|\int_0^1 \varphi_k(x)\, x^l\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{+1} |\varphi_k(x)|\, dx \leqslant \left(\int_{-1}^{+1} |\varphi_k(x)|^{p_k}\, dx\right)^{1/p_k} \cdot 2^{1/q_k} \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\varphi_k\|_{L_{p_k}} \leqslant 2M \qquad \left(k = 1, 2, \ldots;\ \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1\right).$$

Отсюда для каждого k система линейных уравнений

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{a_s^{(k)}}{1+s+l} = \lambda_l^{(k)} \qquad (l = 0, 1, \ldots, n)$$

с неизвестными $a_s^{(k)}$ $(s = 0, 1, \ldots, n)$ имеет правые части, удовлетворяющие неравенству

$$\left|\lambda_l^{(k)}\right| \leqslant 2M,$$

и так как определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix}$$

не равен нулю и не зависит от k, то, очевидно, существует константа c, зависящая от n, но не от k, для которой имеют место неравенства

$$\left|a_s^{(k)}\right| \leqslant cM \qquad (s = 0, 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots). \qquad (16.7)$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$a_0^{(1)},\ a_0^{(2)},\ a_0^{(3)},\ \ldots$$

Она вследствие (16.7) ограничена, и потому из нее можно выбрать подпоследовательность

$$a_0^{\left(n_1^{(0)}\right)},\ a_0^{\left(n_2^{(0)}\right)},\ a_0^{\left(n_3^{(0)}\right)},\ \ldots,$$

сходящуюся к некоторому числу, которое мы обозначим через a_0. Подпоследовательность $a_1^{\left(n_1^{(0)}\right)}, a_1^{\left(n_2^{(0)}\right)}, a_1^{\left(n_3^{(0)}\right)}, \ldots$ также по (16.7) ограничена, и из нее можно выделить подпоследовательность

$$a_1^{\left(n_1^{(1)}\right)}, a_1^{\left(n_2^{(1)}\right)}, a_1^{\left(n_3^{(1)}\right)},$$

сходящуюся к некоторому числу, которое мы обозначим через a_1. Продолжая этот процесс n раз, мы, наконец, придем к подпоследовательности натуральных чисел

$$k_1 = n_1^{(n)}, \quad k_2 = n_2^{(n)}, \ldots,$$

для которой будут одновременно иметь место все $n+1$ равенств (16.6), а это все равно, что имеет место равенство

$$\lim_{l \to \infty} \varphi_{k_l}(x) = \varphi(x)$$

равномерно на [—1,1], где

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Переходим к доказательству равенства (16.3). Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p_0$, $1 \leqslant p_k \leqslant \infty$. Очевидно, что

$$\left\| R^{(p_k)} \right\|_{L_{p_k}} \leqslant \| x^n \|_{L_{p_k}} = \left(\int_{-1}^{1} |x|^{np_k} dx \right)^{1/p_k} \leqslant M,$$

где M — константа, не зависящая от $k = 1, 2, \ldots$

На основании доказанной леммы из взятой последовательности чисел $\{p_k\}$ можно выделить подпоследовательность, которую мы снова обозначим через $\{p_k\}$, такую, что

$$\lim_{p_k \to p_0} R^{(p_k)}(x) = R(x) \tag{16.8}$$

равномерно на [—1, 1], где $R(x)$ есть некоторый многочлен степени n с коэффициентом при x^n, равным единице. Поэтому

$$\lim_{p_k \to p_0} \left\| R^{(p_k)} \right\|_{L_{p_k}} = \| R \|_{L_{p_0}} \geqslant \left\| R^{(p_0)} \right\|_{L_{p_0}}. \tag{16.9}$$

Примем во внимание, что функция

$$\Phi(p) = \left(\int_{-1}^{+1} |f|^p dx \right)^{1/p},$$

когда $f(x)$ непрерывна на [—1, +1], есть непрерывная функция от p для $1 \leqslant p \leqslant \infty$. При $p = \infty$ этот факт следует из (2.7). Тогда для всякого p_0, удовлетворяющего неравенству $1 \leqslant p_0 <$

$< \infty$ и для $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что коль скоро

$$|p - p_0| < \delta, \tag{16.10}$$

то

$$\| R^{(p)} \|_{L_p} \leqslant \| R^{(p_0)} \|_{L_{p_0}} + \varepsilon. \tag{16.11}$$

При $p = \infty$ неравенство (16.11) также сохраняется, если вместо условия (16.10) считать, что p достаточно велико.

Отсюда для достаточно больших k

$$\left\| R^{(p_k)} \right\|_{L_{p_k}} \leqslant \left\| R^{(p_0)} \right\|_{L_{p_0}} + \varepsilon$$

и, переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\| R \|_{L_{p_0}} \leqslant \| R^{(p_0)} \|_{L_{p_0}} + \varepsilon,$$

или, так как ε произвольно,

$$\| R \|_{L_{p_0}} \leqslant \| R^{(p_0)} \|_{L_{p_0}}. \tag{16.12}$$

Из (16.9) и (16.12) следует, что

$$\lim_{p_k \to p_0} \left\| R^{(p_k)} \right\|_{L_{p_k}} = \| R \|_{L_{p_0}} = \left\| R^{(p_0)} \right\|_{L_{p_0}}, \tag{16.13}$$

и так как многочлен, наименее уклоняющийся от нуля в метрике $L_{p_0} \left(1 \leqslant p_0 \leqslant \infty\right)$, как мы знаем, единственный, то

$$R(x) \equiv R^{(p_0)}(x). \tag{16.14}$$

Мы доказали, что из любой последовательности чисел, сходящейся к p_0, можно выделить подпоследовательность $\{p_k\}$, для которой имеют место равенства (16.8) и (16.14). Так как правая часть (16.8) — одна и та же для любой исходной последовательности, то равенства (16.3) и (16.4) полностью доказаны.

Заметим, что равенства (16.3) и (16.4) при $p_0 = \infty$ лишний раз подтверждают, что метрику (C) непрерывных функций естественно рассматривать как частный случай метрики L_p при $p = \infty$.

Многочлен $R^{(p)}(x)$ степени n с коэффициентом при x^n, равным единице, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ в метрике L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, обладает тем свойством, что

$$R^{(p)}(1) > 0. \tag{16.15}$$

Это следует из того, что

$$R^{(p)}(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — нули $R^{(p)}(x)$, о которых мы знаем, что они все удовлетворяют неравенствам

$$-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1.$$

Перенесение этих свойств с отрезка $[-1, +1]$ на отрезок $[a, b]$ легко усматривается из формулы (16.2), дающей выражение для многочлена $R^{(p)}$, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[a-h, a+h]$, через многочлен R_n, наименее уклоняющийся от нуля на $[-1, +1]$. В нашем случае надо a и h заменить соответственно на $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{b-a}{2}$.

§ 17. МНОГОЧЛЕНЫ ЛЕЖАНДРА. КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ГАУССА

Случай $p=2$ является важнейшим частным случаем метрики L_p. О многочлене, наименее уклоняющемся от нуля в метрике L_2, говорят, что он наименее уклоняется от нуля в *смысле среднего квадратического*. Это есть хорошо известный в математике многочлен n-й степени Лежандра. Обозначим его через *) $l_n(x)$. Таким образом,

$$\int_{-1}^{+1} l_n^2(x)\,dx =$$

$$= \min_{a_k} \int_{-1}^{+1} [x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0]^2\,dx, \tag{17.1}$$

где минимум распространен на всевозможные коэффициенты a_k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$.

Из равенства (17.1) следует, что частная производная по коэффициентам a_k от интеграла, стоящего в его правой части, равна нулю, откуда получаем

$$\int_{-1}^{+1} x^k l_n(x)\,dx = 0 \qquad (k=0, 1, \ldots, n-1),$$

---

*) Многочленом Лежандра степени n называют часто функцию $cl_n(x)$, где c — постоянная, подобранная так, чтобы

$$\int_{-1}^{+1} [cl_n(x)]^2\,dx = 1,$$

или так, чтобы $cl_n(1) = 1$.

т. е. известное свойство ортогональности многочлена Лежандра n-й степени к многочленам низшей степени.

Покажем, что многочлен Лежандра $l_{m+1}(x)$ степени $m+1$ обладает тем замечательным свойством, что если

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_m \tag{17.2}$$

суть его нули, то квадратурная формула

$$\int_{-1}^{+1} f\,dx \approx \sum_{0}^{m} p_k f(x_k),$$

где веса p_k подобраны так, что она точна для всех многочленов степени m, на самом деле точна для всех многочленов степени $2m+1$. Это и есть квадратурная формула Гаусса, соответствующая $m+1$ узлам.

Из § 1 (см. (1.6)) мы знаем, что веса p_k нашей квадратурной формулы вычисляются при помощи равенства

$$p_k = \int_{-1}^{1} Q_m^{(k)}(x)\,dx,$$

где $Q_m^{(k)}(x)$ можно записать в виде

$$Q_m^{(k)}(x) = \frac{l_{m+1}(x)}{(x-x_k)\,l'_{m+1}(x_k)} = \frac{l_{m+1}(x) - l_{m+1}(x_k)}{(x-x_k)\,l'_{m+1}(x_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

Если $f(x)$ есть многочлен степени $2m+1$, то разность

$$f(x) - \sum_{k=0}^{m} f(x_k)\,\frac{l_{m+1}(x) - l_{m+1}(x_k)}{(x-x_k)\,l'_{m+1}(x_k)} = l_{m+1}(x)\,S(x), \tag{17.3}$$

где $S(x)$ есть многочлен степени не выше m.

Действительно, левая часть (17.3) обращается в нуль в точках (17.2) и представляет собой многочлен степени не выше $2m+1$. Таким образом, левая часть (17.3) делится на $l_{m+1}(x)$ и частное $S(x)$ есть многочлен степени не выше m. Если мы теперь проинтегрируем равенство (17.3) на отрезке $[-1, +1]$, то левая часть превратится в

$$\int_{-1}^{+1} f(dx) - \sum_{0}^{m} p_k f(x_k),$$

а правая будет равна нулю, так как многочлен Лежандра $l_{m+1}(x)$ ортогонален на $[-1, +1]$ ко всем многочленам низшей степени.

Ниже приводятся примеры многочленов $l_n(x)$ Лежандра для малых n:

$$l_0(x) = 1,$$
$$l_1(x) = x,$$
$$l_2(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 1),$$
$$l_3(x) = \frac{1}{5}(5x^3 - 3x),$$
$$l_4(x) = \frac{1}{35}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$l_5(x) = \frac{1}{63}(63x^5 - 70x^3 + 25x).$$

Нули многочлена $l_n(x)$ Лежандра являются узлами соответствующей квадратурной формулы Гаусса (с n узлами).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Численные методы, I, «Наука», 1973.
2. Березин И. С. и Жидков Н П., Методы вычислений, I, изд. 3-е, «Наука», 1966.
3. Бернштейн С. Н., Собр. сочинений, т. II. Изд-во АН СССР, М., 1954.
4. Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1954.
5. Доронин Ю. Я., К вопросу о формулах механических квадратур, Сборник научных трудов Днепропетровского инженерно-строительного института №№ 1—2, 1955, 210—217.
6. Доронин Ю. Я., Одна теорема из теории механических квадратур, Известия вузов № 12 (15), 1960, 88—92.
7. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962.
8. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, изд. 2-е, «Наука», 1967.

9. Микеладзе Ш. Е., Численные методы математического анализа, Гостехиздат, 1953.
10. Милн В. Э., Численный анализ, ИЛ, 1954.
11. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
12. Никольский С. М., К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами, Успехи матем. наук, т. V, вып. 2 (36), 1950, 165—177.
13. Никольский С. М., Квадратурные формулы, Известия АН СССР, серия матем., т. 16, 1952, 181—196.
14. Никольский С. М., Курс математического анализа, т. I, т. II, «Наука», 1973.
15. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, Гостехиздат, 1947.
16. Турецкий А. Х., Об оценках приближений квадратурными формулами для функций, удовлетворяющих условию Липшица, Успехи матем. наук, т. VI, вып. 5, 1951, 166—171.
17. Чебышев П. Л., Полное собрание сочинений, М., Изд-во АН СССР, 1948.
18. Шайдаева Т. А., Квадратурные формулы с наименьшей оценкой остатка для некоторых классов функций, Труды Матем. ин-та АН СССР, 53, 1959, 313—341.
19. Meyers F. and Sard A., Best approximate integration formulas. Journal of Mathematics and Physics, v. XXIX, 1950, 118—123.
20. Sard A., Best approximate integration formulas, best approximate formulas, American Journal of Mathematics, v. LXXI, 1949, 80—91.
21. Ремез Е. Я., Про деякі класи лінійних функціоналів у просторах C_p та про остаткові члени формул наближеного аналізу. Збірник праць Ін-ту математики АН УРСР, № 4, 1940.
22. Ремез Е. Я., Об остаточных членах некоторых формул приближенного анализа. Докл. АН СССР, XXVI, № 2 (1940), 130—134.

ДОБАВЛЕНИЕ

О НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ПО ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ КВАДРАТУР

Н. П. Корнейчук

Выход в свет в 1958 г. первого издания книги «Квадратурные формулы» С. М. Никольского привлек к поставленным в ней задачам внимание многих математиков как теоретического, так и прикладного направлений. За прошедшие 15 лет в математической печати появилось немало работ, так или иначе связанных с содержанием этой книги.

Особый интерес обнаружился к экстремальным задачам теории квадратур, которым в книге уделено значительное место. Следует отметить, что решение таких задач, т. е. отыскание наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и получение точной оценки ее остатка, требует, как правило, привлечения глубоких и тонких фактов теории функций и функционального анализа и сопряжено с преодолением значительных трудностей. И хотя за последние годы в этом направлении получен ряд существенных результатов, немало задач такого рода (особенно в многомерном случае) до настоящего времени не решены.

В этом добавлении изложены некоторые, на наш взгляд, наиболее важные результаты по экстремальным задачам теории квадратур, опубликованные после 1958 г. и непосредственно связанные с содержанием книги и поставленными в ней проблемами.

Автор добавления не ставил своей целью дать полный обзор того, что появилось в математической печати по оптимальным квадратурным формулам. Мы не коснулись глубоких исследований по теории кубатур С. Л. Соболева и его школы, — исследований, которые составили целое направление и, безусловно, должны составить содержание отдельной монографии. В добавлении не затронуты важные результаты Н. С. Бахвалова, а также другие интересные работы по приближенному интегрированию, непосредственно не связанные с содержанием этой книги. Отбирая материал для добавления, мы, будучи ограничены его объемом, включили лишь наиболее существенное, по нашему мнению, из того, что можно считать непосредственным продолжением содержащихся в книге исследований по экстремальным задачам теории квадратур.

Не все результаты, помещенные в добавлении, сопровождаются полными доказательствами; многие из них лишь сформулированы, — или потому, что методы их получения аналогичны уже изложенным, или в силу того, что исчерпывающие их доказательства далеко увели бы нас от круга идей, очерченного содержанием книги. В силу последнего обстоятельства, например, мы не без сожаления ограничились в § Д.2 лишь формулировкой недавно полученных интересных результатов В. П. Моторного, базирующихся на исследовании тонких свойств некоторых классов кусочно-полиномиальных функций.

Напомним постановку общей задачи для функций одной переменной. Рассматривается квадратурная формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) \equiv L(f) + R(f), \qquad \text{(A)}$$

($f^{(0)}(x) = f(x)$), задаваемая векторами узлов $X = \{x_k\}$ $(0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqslant 1)$ и коэффициентов $P = \{p_{kl}\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m;\ l = 0, 1, \ldots, \rho)$, т. е. $L(f) = L(f; X, P)$, $R(f) = R(f; X, P)$. При фиксированных целых $m \geqslant 1$ и $\rho \geqslant 0$ через $\mathscr{A}$ обозначим все множество векторов (X, P) либо некоторое его подмножество, определяемое теми или иными ограничениями на узлы и коэффициенты (например, требованием точности формулы (А) для многочленов заданной степени).

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс заданных на $[0, 1]$ и достаточное число раз дифференцируемых функций

$f(x)$, то положим

$$R[\mathfrak{M}] = R[\mathfrak{M};\ X,\ P] = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |R(f;\ X,\ P)|.$$

Требуется найти величину

$$\mathscr{E}_m^{\rho}[\mathfrak{M}] = \mathscr{E}_m^{\rho}[\mathfrak{M};\ \mathscr{A}] = \inf_{(X,\ P) \in \mathscr{A}} R[\mathfrak{M};\ X,\ P]$$

и указать вектор $(X^*,\ P^*)$ $\left(X^* = \{x_k^*\},\ P^* = \{p_{kl}^*\}\right)$ из множества $\mathscr{A}$, на котором достигается точная нижняя грань, т. е. выполняется равенство $\mathscr{E}_m^{\rho}[\mathfrak{M};\ \mathscr{A}] = R[\mathfrak{M};\ X^*,\ P^*]$.

Квадратурная формула (А) с узлами x_k^* и коэффициентами p_{kl}^* дает наименьшую на всем классе $\mathfrak{M}$ погрешность среди формул, задаваемых множеством $\mathscr{A}$ векторов (X, P), и в этом смысле является наилучшей для класса $\mathfrak{M}$.

Мы хотим отметить два метода решения сформулированной задачи, которые в ряде случаев привели к точным результатам.

1) Сведение к задаче минимизации нормы некоторой кусочно-полиномиальной функции и последующее исследование и решение этой задачи. Этот метод, разработанный С. М. Никольским в § 10 и 14, при некоторых значениях ρ позволил получить для ряда классов функций окончательные результаты.

2) Оценка остатка $R(f)$ на множестве функций $f \in \mathfrak{M}$, для которых квадратурная сумма $L(f; X, P)$ обращается в нуль. Оказывается, что в ряде случаев верхняя грань остатка наилучшей квадратурной формулы достигается именно на таких функциях, и это позволяет точно оценить величину $\mathscr{E}_m^{\rho}[\mathfrak{M}]$ снизу.

Содержание параграфов Д.1 и Д.2 добавления построено в соответствии с приведенной классификацией. В третьем параграфе изложены некоторые новые результаты по оптимальным квадратурным формулам с фиксированными узлами*), дополняющие содержание § 11.

---

*) При написании § Д.3 существенную помощь оказал В. Л. Великин, которому автор Добавления искренне благодарен.

Читатель должен будет обратить внимание на весьма тесную связь экстремальных задач теории квадратур с экстремальными свойствами кусочно-полиномиальных функций (сплайн-функций), которая четко прослеживается (хотя и в разных аспектах) на протяжении всех трех параграфов добавления. По-видимому, впервые эта связь обнаружена С. М. Никольским еще в 1950 г.

Мы приняли в каждом параграфе добавления автономную систему нумерации формул. При ссылках на формулы другого параграфа добавления вместе с номером формулы указывается и номер этого параграфа.

§ Д.1. МИНИМИЗАЦИЯ НОРМЫ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

1. **Переход к задаче кусочно-полиномиального приближения.** Этот пункт не содержит принципиально новых моментов по сравнению с основной частью книги и имеет целью лишь сделать более удобным дальнейшее изложение.

Рассматривая классы*) функций $W^rL_p(M; a, b)$, введенные в § 2, будем в этом параграфе полагать $M=1$, а также $[a, b]=[0, 1]$ — в соответствии с заданием квадратурной формулы (A). Это не уменьшит общности наших рассуждений и полученных результатов по экстремальным задачам. Действительно, пусть

$$\int_a^b g(t)\,dt=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{\rho} q_{kl}g^{(l)}(t_k)+R'(g) \qquad \text{(B)}$$

$$(a\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_m\leqslant b)$$

—квадратурная формула для функций $g\in W^rL_p(M; a, b)$. Замена $t=a+hx$, где $h=b-a$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями $g\in W^rL_p(M;\ a,\ b)$ и функциями $f(x)=g(a+hx)$ класса $W^rL_p\left(Mh^{r-\frac{1}{p}};\ 0,\ 1\right)$, а также между формулами (B) и квадратурными формулами вида (A)

*) Класс W^rL_p определен в § 2. Там он обозначен так: $W^r_{L_p}$.

с узлами $x_k = \frac{1}{h}(t_k - a)$, коэффициентами $p_{kl} = \frac{1}{h^{r+1}} q_{kl}$ и остатком $R(f) = \frac{1}{h} R'(g)$. Поэтому

$$\sup_{g \in W^r L_p(M;\, a,\, b)} | R'(g) | = M h^{r+1-\frac{1}{p}} \sup_{f \in W^r L_p(1;\, 0,\, 1)} | R(f) |,$$

причем наилучшей для класса $W^r L_p(M; a, b)$ формуле (B) соответствует наилучшая для класса $W^r L_p(1; 0, 1)$ формула (A).

Условимся еще вместо $W^r L_p(1; 0, 1)$ писать просто $W^r L_p$. Таким образом, $W^r L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ есть класс функций $f(x)$, заданных на отрезке $[0, 1]$, у которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и

$$\| f^{(r)} \|_{L_p} = \left(\int_0^1 | f(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 1 \qquad (1 \leqslant p < \infty),$$

$$\| f^{(r)} \|_{L_\infty} = \operatorname*{supvrai}_{0 \leqslant x \leqslant 1} | f^{(r)}(x) | \leqslant 1.$$

Наконец, вместо $W^r L_1$ будем писать $W^r L$, а вместо $W^r L_\infty$ — иногда просто W^r.

В предположении, что квадратурная формула (A) точна для многочленов степени $r-1$ и $\rho \leqslant r-1$, на стр. 101 *) получено интегральное представление остатка $R(f)$ для произвольной функции $f \in W^r L_p$:

$$R(f) = \frac{(-1)^r}{r!} \int_0^1 G_r(t) f^{(r)}(t)\, dt, \tag{1}$$

где

$$G_r(t) = \\ = (t-1)^r - (-1)^r \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} \frac{r!}{(r-l-1)!} p_{kl} K_{r-l}(x_k - t) \tag{2}$$

и

$$K_\nu(t) = \begin{cases} t^{\nu-1} & (t \geqslant 0), \\ 0 & (t < 0), \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

---

*) См. также сноску на стр. 23.

Используя при $1 < p < \infty$ неравенство Гёльдера, а при $p = 1$ или $p = \infty$ оценивая $R(f)$ по модулю и заменяя под знаком интеграла (1) $|G_r|$ или соответственно $|f^{(r)}|$ нормой в метрике L_∞, получим для любой $f \in W^rL_p$ (как и на стр. 30 при $\rho = 0$) оценку

$$|R(f)| \leqslant \frac{1}{r!} \| G_r \|_{L_q} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right), \tag{3}$$

которая точна на классе W^rL_p при каждом фиксированном векторе (X, P). Если $1 < p \leqslant \infty$, то в (3) знак равенства имеет место для функции $f \in W^rL_p$, у которой $f^{(r)}(x) = \| G_r \|_{L_q}^{1-q} | G_r(x) |^{q-1} \operatorname{sign} G_r(x)$ (в частности, при $p = \infty$ $(q = 1)$ $f^{(r)}(x) = \operatorname{sign} G_r(x)$). В классе W^rL нет функции, реализующей знак равенства в (3), однако для любого $\varepsilon > 0$ существует $f_\varepsilon \in W^rL$ такая, что

$$|R(f_\varepsilon)| > \frac{1}{r!} \| G_r \|_{L_\infty} - \varepsilon.$$

Таким образом, если квадратурная формула (A) точна для многочленов степени $r - 1$, то

$$R[W^rL_p] = \sup_{f \in W^rL_p} |R(f)| = \frac{1}{r!} \| G_r \|_{L_q} \tag{4}$$

$$(1 \leqslant p \leqslant \infty, \ 1/p + 1/q = 1).$$

Отметим некоторые свойства функции $G_r(t)$. Так как $K_{r-l}(x_k - t)$ разрывна в точке x_k при $l = r - 1$, непрерывна при $l = r - 2$ и имеет непрерывную производную порядка $r - l - 2$ при $l < r - 2$, то при произвольных значениях коэффициентов p_{kl} функция $G_r(t)$ разрывна в точках x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, если $\rho = r - 1$, непрерывна на $[0, 1]$ при $\rho = r - 2$ и имеет на $[0, 1]$ непрерывные производные до $(r - \rho - 2)$-го порядка включительно, если $\rho < r - 2$.

Выясним, как сказывается на виде функции $G_r(t)$ условие точности квадратурной формулы для многочленов степени $r - 1$. Если это условие выполнено, то тождественно по t

$$\int_0^1 (x - t)^{r-1} \, dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} \frac{(r-1)!}{(r-l-1)!} p_{kl} (x_k - t)^{r-l-1}; \tag{5}$$

а так как левая часть здесь равна

$$\frac{1}{r}[(1-t)^r-(-t)^r]=\frac{(-1)^r}{r}[(t-1)^r-t^r],$$

то

$$(t-1)^r-(-1)^r\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{\rho}\frac{r!}{(r-l-1)!}p_{kl}(x_k-t)^{r-l-1}\equiv t^r. \quad (6)$$

Из (2) видно, что значение $G_r(t)$ на промежутке $[0, x_1]$ в точности совпадает с левой частью тождества (6), следовательно,

$$G_r(t)=t^r \qquad (0\leqslant t\leqslant x_1). \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что и обратно: из соотношения (7) следует точность формулы (A) для любого многочлена степени $r-1$. Действительно, в силу (2) $G_r(t)$ на $[0, x_1]$ есть многочлен, записанный в левой части (6), а из совпадения двух многочленов на отрезке $[0, x_1]$ следует их совпадение на всей числовой оси, т. е. справедливо соотношение (6) и эквивалентное ему тождество (5). Дифференцируя (5) по t последовательно $r-1$ раз, получим тождества, характеризующие точность формулы (A) для всех многочленов степени $r-1$.

Из равенства (2), учитывая вид функций $K_{r-l}(x_k-t)$, легко усматривается, что для $x_m<t\leqslant 1$ $G_r(t)=(t-1)^r$. Что касается промежутков $x_k<t\leqslant \leqslant x_{k+1}$ ($k=1, 2, \ldots, m-1$), то на каждом из них $G_r(t)$ есть некоторый многочлен степени r со старшим коэффициентом, равным единице, остальные коэффициенты которого однозначно определяются заданием вектора (X, P) и числа ρ.

При фиксированных m, r и ρ ($0\leqslant\rho\leqslant r-1$) обозначим через $\mathcal{A}^{\rho}_{mr}$ множество кусочно-полиномиальных на $[0, 1]$ функций $\varphi(t)$ вида

$$\varphi(t)=\begin{cases} t^r\equiv P_{r0}(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant x_1), \\ t^r+\sum\limits_{l=0}^{r-1}a_{kl}t^l\equiv P_{rk}(t) \\ \qquad (x_k<t\leqslant x_{k+1}, \quad k=1, 2, \ldots\ m-1), \\ (t-1)^r\equiv P_{rm}(t) \qquad (x_m<t\leqslant 1), \\ \qquad\qquad (0\leqslant x_1<x_2<\ \ldots\ <x_m\leqslant 1), \end{cases} \quad (8)$$

удовлетворяющих при $\rho \leqslant r-2$ следующим условиям: в случае $\rho = r-2$ функции $\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{\rho}$ непрерывны на $[0, 1]$, а при $\rho < r-2$ — непрерывны на $[0, 1]$ вместе со своими производными до $(r-\rho-2)$-го порядка включительно. Узлы x_k кусочно-полиномиальной функции $\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{\rho}$ произвольны, а коэффициенты a_{ki} составляющих ее многочленов $P_{rk}(t)$ $(k=1, 2, \ldots \ldots, m-1)$ или тоже произвольны (при $\rho = r-1$), или связаны условиями непрерывности функции $\varphi(t)$ и ее производных. Легко проверить, что обеспечить нужную гладкость функции φ вида (8) можно лишь при условии $m \geqslant \frac{r}{\rho+2}$, а если заранее фиксировать узлы, то при условии $m \geqslant \frac{r}{\rho+1}$.

Из предыдущего следует, что каждой квадратурной формуле (A), точной для многочленов степени $r-1$, т. е. каждому вектору (X, P), координаты которого p_{kl} связаны этим условием точности, однозначно соответствует функция $\varphi(t) = G_r(t)$ из множества $\mathscr{A}_{mr}^{\rho}$.

Покажем, что и обратно: каждой функции $\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{\rho}$ можно однозначно сопоставить квадратурную формулу (A), точную для многочленов степени $r-1$, причем узлы x_k формулы (A) совпадают с узлами функции $\varphi(t)$, а коэффициенты p_{kl} вычисляются по формуле

$$p_{kl} = \frac{(-1)^l}{r!}\left[\varphi^{(r-l-1)}(x_k-0) - \varphi^{(r-l-1)}(x_k+0)\right] \tag{9}$$

$$(k=1, 2, \ldots, m; \quad l=0, 1, \ldots, \rho).$$

Пусть $\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{\rho}$. Для любой $f \in W^r L_p$, интегрируя по частям последовательно r раз на каждом промежутке (x_k, x_{k+1}) $(k=0, 1, \ldots, m)$, где $x_0=0$, $x_{m+1}=1$, будем иметь

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t) f^{(r)}(t)\,dt = \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^{\nu}\left[\varphi^{(\nu)}(x_{k+1}-0) f^{(r-\nu-1)}(x_{k+1}) - \right.$$

$$\left. - \varphi^{(\nu)}(x_k+0) f^{(r-\nu-1)}(x_k)\right] + (-1)^r r! \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt.$$

Суммируя по k от 0 до m и учитывая, что $\varphi^{(\nu)}(0)=\varphi^{(\nu)}(1)=0$ $(\nu=0, 1, \ldots, r-1)$, получим

$$\int_0^1 \varphi(t) f^{(r)}(t)\,dt=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^{\nu} f^{(r-\nu-1)}(x_k)\left[\varphi^{(\nu)}(x_k-0)-\right.$$

$$\left.-\varphi^{(\nu)}(x_k+0)\right]+(-1)^r r!\int_0^1 f(t)\,dt. \qquad (10)$$

Так как для $\varphi\in\mathscr{A}^{\rho}_{mr}$ при $\rho\leqslant r-2$ $\varphi^{(\nu)}(x_k-0)=\varphi^{(\nu)}(x_k+0)$ $(\nu=0, 1, \ldots, r-\rho-2)$, то (10) можно записать в виде

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{\rho}(-1)^{l}\left[\varphi^{(r-l-1)}(x_k-0)-\right.$$

$$\left.-\varphi^{(r-l-1)}(x_k+0)\right] f^{(l)}(x_k)+\frac{(-1)^r}{r!}\int_0^1 \varphi(t) f^{(r)}(t)\,dt. \qquad (11)$$

Мы пришли к квадратурной формуле вида (А) с коэффициентами (9) и остатком

$$R(f)=\frac{(-1)^r}{r!}\int_0^1 \varphi(t) f^{(r)}(t)\,dt. \qquad (12)$$

Точность формулы (11) для многочленов степени $r-1$ в силу приведенных выше рассуждений по этому поводу следует из сравнения (12) с (1) и того факта, что $\varphi(t)=t^r$ для $0\leqslant t\leqslant x_1$.

Из равенства (4) и сказанного выше вытекает, что при условии точности формулы (А) для многочленов степени $r-1$

$$\mathscr{E}^{\rho}_{m}\left[W^r L_p\right]=\frac{1}{r!}\inf_{\varphi\in\mathscr{A}^{\rho}_{mr}}\|\varphi\|_{L_q} \qquad (13)$$

$$\left(0\leqslant\rho\leqslant r-1;\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

Экстремальная функция $\varphi_*\in\mathscr{A}^{\rho}_{mr}$ с узлами x_k^* и коэффициентами a_{kl}^*, реализующая в (13) точную нижнюю грань *).

$$\|\varphi_*\|_{L_q} = \inf_{\varphi \in \overset{\rho}{\mathscr{A}}_{mr}} \|\varphi\|_{L_q},$$

однозначно определяет вектор (X^*, P^*) наилучшей квадратурной формулы для класса $W^r L_p$. При этом

$$\mathscr{E}_m^{\rho}[W^r L_p] = R[W^r L_p; X^*, P^*] = \frac{1}{r!}\|\varphi_*\|_{L_q}.$$

Итак, задача отыскания наилучшей квадратурной формулы (A) на классе $\overset{\rho}{W}{}^r L_p$ сведена к задаче (13) минимизации нормы в сопряженной метрике L_q на множестве $\overset{\rho}{\mathscr{A}}_{mr}$ кусочно-полиномиальных функций (сплайн-функций). Эта последняя задача представляет и самостоятельный интерес в связи с появившимися в последние годы многочисленными работами по использованию сплайн-функций в качестве аппарата приближения (см., в частности, книгу [3]).

Отметим, что в силу вида функций $\varphi \in \overset{\rho}{\mathscr{A}}_{mr}$ минимизация нормы $\|\varphi\|_{L_q}$ эквивалентна наилучшему приближению в метрике L_q функции t^r на отрезке $[0, 1]$ функцией, «склеенной» в точках x_k из многочленов степени $r-1$ (из которых в данном случае первый и последний фиксированы). Именно в такой постановке эта задача рассматривалась в основной части книги.

2. Оценка нормы кусочно-полиномиальной функции по схеме С. М. Никольского. Некоторые из точных результатов, которые мы намерены привести, получены по схеме рассуждений, разработанной в § 10 и 14 книги.

В силу включения $\overset{\rho}{\mathscr{A}}_{mr} \subset \overset{r-1}{\mathscr{A}}_{mr}$ $(0 \leqslant \rho \leqslant r-1)$

$$\inf_{\varphi \in \overset{\rho}{\mathscr{A}}_{mr}} \|\varphi\|_{L_q} \geqslant \inf_{\varphi \in \overset{r-1}{\mathscr{A}}_{mr}} \|\varphi\|_{L_q}. \tag{14}$$

Но для $\varphi \in \overset{r-1}{\mathscr{A}}_{mr}$ при $1 \leqslant q < \infty$

$$\|\varphi\|_{L_q}^q = \int_0^{x_1} t^{rq}\,dt + \int_{x_m}^1 (1-t)^{rq}\,dt + \sum_{k=1}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |P_{rk}(t)|^q\,dt \tag{15}$$

*) Существование и единственность экстремальной функции в рассматриваемых ниже случаях будет следовать из хода рассуждений.

и

$$\|\varphi\|_{L_\infty}=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|=$$

$$=\max\left\{x_1^r;\ (1-x_m)^r;\ \max_{1\leqslant k\leqslant m-1}\ \max_{x_k\leqslant t\leqslant x_{k+1}}|P_{rk}(t)|\right\};\qquad(16)$$

поэтому при любом фиксированном векторе узлов $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$

$$\|\varphi\|_{L_q}\geqslant\|\tilde{\varphi}_X\|_{L_q}\qquad(1\leqslant q\leqslant\infty),$$

где $\tilde{\varphi}_X(t)$ — функция из $\mathscr{A}_{mr}^{r-1}$ вида (8), у которой $P_{rk}(t)=\tilde{P}_{rk}(t)$ $(k=1, 2, \ldots, m-1)$ — многочлены, наименее уклоняющиеся в метрике L_q от нуля на соответствующих промежутках $[x_k, x_{k+1}]$ среди всех многочленов степени r со старшим коэффициентом, равным единице. Это значит, что

$$\inf_{\varphi\in\mathscr{A}_{mr}^{r-1}}\|\varphi\|_{L_q}\geqslant\inf_X\|\tilde{\varphi}_X\|_{L_q}\qquad(1\leqslant q\leqslant\infty),\qquad(17)$$

и дело сводится к минимизации по узлам x_k нормы $\|\tilde{\varphi}_X\|_{L_q}$.

В § 14 аналогичная задача решена для $q=1$ и $q=\infty$. В нашем случае идея рассуждений та же, но мы их приведем ради полноты изложения.

Пусть $1\leqslant q<\infty$. Нам потребуются некоторые свойства многочленов, наименее уклоняющихся от нуля в метрике L_q, дополняющие содержание § 16. Пусть $R_{rq}(a;\ h;\ x)$ — многочлен вида

$$x^r+\sum_{i=0}^{r-1}\alpha_i x^i$$

такой, что

$$\int_{a-h}^{a+h}|R_{rq}(a;\ h;\ x)|^q\,dx=\min_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1}}\int_{a-h}^{a+h}\left|x^r+\sum_{i=0}^{r-1}\alpha_i x^i\right|^q dx.$$

Из этого условия следует, что

$$\int_{a-h}^{a+h}x^k|R_{rq}(a;\ h;\ x)|^{q-1}\operatorname{sign}R_{rq}(a;\ h;\ x)\,dx=0\qquad(18)$$

$$(k=0,1,\ldots,r-1).$$

Многочлен $R_{rq}(0; 1; x)$, наименее уклоняющийся от нуля на $[-1, 1]$, будем обозначать просто $R_{rq}(x)$. Так как (см. § 16)

$$R_{rq}(a; h; x) = h^r R_{rq}\left(\frac{x-a}{h}\right), \tag{19}$$

то

$$\int_{a-h}^{a+h} | R_{rq}(a; h; x) |^q \, dx =$$

$$= h^{rq+1} \int_{-1}^{1} | R_{rq}(x) |^q \, dx \equiv h^{rq+1} N \tag{20}$$

и

$$R_{rq}(a; h; a+t) = (-1)^r R_{rq}(a; h; a-t), \tag{21}$$

ибо $R_{rq}(x)$ — четный многочлен при четном r и нечетный — при r нечетном.

Докажем еще, что

$$[R_{rq}(1)]^q = \frac{rq+1}{2} N = \frac{rq+1}{2} \int_{-1}^{1} | R_{rq}(x) |^q \, dx. \tag{22}$$

В самом деле, многочлен $R_{rq}(x)$ имеет на $(-1, 1)$ ровно r нулей β_i: $-1 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_r < 1$. Положим $\beta_0 = -1$, $\beta_{r+1} = 1$. Интегрируя по частям и учитывая, что $R_{rq}(1) > 0$ (§ 16), найдем

$$N = \int_{-1}^{1} | R_{rq}(x) |^q \, dx = \sum_{i=0}^{r} \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} | R_{rq}(x) |^q \, dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \Bigg\{ \beta_{i+1} | R_{rq}(\beta_{i+1}) |^q - \beta_i | R_{rq}(\beta_i) |^q -$$

$$- q \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} x | R_{rq}(x) |^{q-1} R'_{rq}(x) \operatorname{sign} R_{rq}(x) \, dx \Bigg\} =$$

$$= 2 [R_{rq}(1)]^q - q \int_{-1}^{1} x R'_{rq}(x) | R_{rq}(x) |^{q-1} \operatorname{sign} R_{rq}(x) \, dx.$$

Но $xR'_{rq}(x) = rR_{rq}(x) + Q_{r-1}(x)$, где $Q_{r-1}(x)$ — некоторый многочлен степени $r-1$. Поэтому последний интеграл, если учесть (18), равен rN, и мы получаем (22).

Вернемся к минимизации по x_k в (17) при $1 \leqslant q < \infty$. Так как на промежутках (x_k, x_{k+1}) $(k=1, 2, \ldots, m-1)$ функция $\tilde{\varphi}_X(t)$ задается многочленами $\tilde{P}_{rk}(t) = R_{rq}(a_k; h_k; t)$, где $a_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$, $h_k = \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)$, то, полагая еще $x_1 = 2h_0$, $1 - x_m = 2h_m$, мы придем, с учетом (15) и (20), к задаче отыскания минимума функции

$$\Phi(h_0, h_1, \ldots, h_m) = \|\tilde{\varphi}_X\|^q_{L_q} =$$

$$= \frac{1}{rq+1}(2h_0)^{rq+1} + \frac{1}{rq+1}(2h_m)^{rq+1} + N\sum_{k=1}^{m-1} h_k^{rq+1} \qquad (23)$$

при условиях:

$$h_0 \geqslant 0, \ h_m \geqslant 0, \ h_k > 0$$

$$(k=1, 2, \ldots, m-1), \qquad \sum_{k=0}^{m} h_k = \frac{1}{2}. \qquad (24)$$

Чтобы упростить выкладки, будем искать минимум функции

$$F(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m) = A(\gamma_0^\alpha + \gamma_m^\alpha) + B\sum_{k=1}^{m-1}\gamma_k^\alpha \quad (\alpha > 1)$$

на множестве $\mathcal{G}$, задаваемом соотношениями

$$\gamma_k \geqslant 0 \quad (k=0, 1, \ldots, m), \qquad \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_m = C,$$

причем A, B и C — положительные числа. Необходимые условия экстремума функции F приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} A\gamma_0^{\alpha-1} = A\gamma_m^{\alpha-1} = B\gamma_k^{\alpha-1} & (k=1, 2, \ldots, m-1), \\ \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_m = C. \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяет единственный вектор $(\gamma_0^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_m^*)$, определяемый равенствами

$$2\gamma_0^* = 2\gamma_m^* = \delta\gamma_k^* = \frac{C\delta}{\delta + m - 1} \qquad (k=1, 2, \ldots, m-1),$$

где

$$\delta = 2\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}};$$

при этом

$$F(\gamma_0^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_m^*) = BC^\alpha (\delta + m - 1)^{1-\alpha}. \qquad (25)$$

Это есть минимум, и притом единственный, функции F на множестве $\mathcal{G}$, ибо, как легко проверить, в любой граничной точке, т. е. если хотя бы одна из координат γ_k была бы равна нулю, функция F принимает значение большее, чем правая часть (25).

Применяя полученный факт к функции (23) и используя (22), находим, что $\Phi(h_0, h_1, \ldots, h_m)$ (при условиях (24)) имеет единственный минимум, если

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_{m-1} = h, \quad 2h_0 = 2h_m = [R_{rq}(1)]^{1/r} h,$$

где

$$h = \frac{1}{2(m - 1 + [R_{rq}(1)]^{1/r})}, \qquad (26)$$

причем

$$\Phi_{\min} = \frac{[R_{rq}(1)]^q}{rq + 1} h^{rq}. \qquad (27)$$

Это значит, что при $1 \leqslant q < \infty$ минимум в (17) имеет место для единственного вектора узлов x_k^*, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{gathered} x_2^* - x_1^* = x_3^* - x_2^* = \ldots = x_m^* - x_{m-1}^* = 2h, \\ x_1^* = 1 - x_m^* = h\left[R_{rq}(1)\right]^{1/r}, \end{gathered} \qquad (28)$$

где h определено равенством (26). При этом правая часть (17) равна правой части (27) в степени $1/q$.

Теперь о случае $q = \infty$. Найти минимум правой части (17) при $q = \infty$ можно, следуя соответствующим рассуждениям § 14. Здесь существенную роль играет тот факт, что если максимумы многочленов P_{r0}, $\bar{P}_{rk}$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ и P_{rm} на соответствующих промежутках не все равны между собой, то путем сдвига одного или нескольких узлов x_k норму $\|\bar{\Phi}_X\|_{L_\infty}$ можно уменьшить. Оказывается, что и в этом случае единственный минимум нормы $\|\tilde{\varphi}_X\|_{L_\infty}$ реализуется узлами x_k^*, определяемыми из (28), причем $R_{r\infty}(x) = T_r(x) = 2^{1-r}\cos(r\arccos x)$, $T_r(1) = 2^{1-r}$, а правая часть (17) равна $2^{1-r}h^r$.

Пусть при $1 \leqslant q \leqslant \infty$

$$\varphi_*(t) = \begin{cases} t^r = P_{r0}(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant x_1^*), \\ t^r + \sum\limits_{i=0}^{r-1} \tilde{a}_{ki} t^i \equiv \tilde{P}_{rk}(t) \\ \qquad\qquad (x_k^* < t \leqslant x_{k+1}^*, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1), \\ (t-1)^r = P_{rm}(t) \, (x_m^* < t \leqslant 1), \end{cases}$$

где узлы x_k^* определены из (28), а $\tilde{P}_{rk}(t)$ — многочлен, наименее уклоняющийся в метрике L_q от нуля на отрезке $[x_k^*, x_{k+1}^*]$. Как следует из предыдущих рассуждений, φ_* — единственная функция в множестве $\mathscr{A}_{mr}^{r-1}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{r-1}} \|\varphi\|_{L_q} = \inf_X \|\tilde{\varphi}_X\|_{L_q} = \|\varphi_*\|_{L_q}. \tag{29}$$

При этом в силу (23) и (27), а также сказанного выше относительно случая $q = \infty$,

$$\|\varphi_*\|_{L_q} = \begin{cases} \dfrac{R_{rq}(1)\, h^r}{\sqrt[q]{rq+1}} \qquad (1 \leqslant q < \infty), \\ 2^{1-r} h^r \qquad (q = \infty), \end{cases} \tag{30}$$

где h определено в (26).

Таким образом, задача минимизации в правой части (13) при $\rho = r-1$ полностью решена. Для остальных значений ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant r-2$, из (14) и (29) мы получаем лишь оценку снизу:

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{\rho}} \|\varphi\|_{L_q} \geqslant \|\varphi_*\|_{L_q} \qquad (1 \leqslant q \leqslant \infty), \tag{31}$$

которая, однако, оказывается точной еще в одном случае: $\rho = r-2$ и r — четное ($r = 2, 4, 6, \ldots$). Действительно, для четных r в силу (21) значения многочлена

P_{rk} $(k=1, 2, \ldots, m-1)$ на концах промежутка (x_k^*, x_{k+1}^*) равны, а так как равны и длины этих промежутков при $k=1, 2, \ldots, m-1$, то φ_* непрерывна в узлах $x_2^*, x_3^*, \ldots, x_{m-1}^*$. Далее, ввиду (19) и (28),

$$\varphi_*(x_1^*+0)=h^r R_{rq}(-1)=hR_{rq}(1)=(x_1^*)^r=\varphi_*(x_1^*-0);$$

аналогично проверяется непрерывность φ_* в узле x_m^*. Следовательно, $\varphi_* \in \mathscr{A}_{mr}^{r-2}$ и потому

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{r-2}} \|\varphi\|_{L_q}=\|\varphi_*\|_{L_q} \quad (r=2, 4, 6, \ldots; \ 1 \leqslant q \leqslant \infty). \tag{32}$$

Теперь из равенств (13), (29), (30) и (32) мы получаем точное значение $\mathscr{E}_m^\rho[W^r L_p]$ при $\rho=r-1$ $(r=1, 2, \ldots)$ и $\rho=r-2$ $(r=2, 4, 6, \ldots)$. Узлы наилучшей квадратурной формулы (A) в этих случаях совпадают с узлами функции φ_*, т. е. даются соотношениями (28), а коэффициенты p_{kl}^* легко вычислить по формуле (9), учитывая структуру функции φ_*. В результате мы придем к следующему утверждению.

Теорема Д.1. *Среди квадратурных формул вида* (A), *точных для многочленов степени* $r-1$, *наилучшей для класса* $W^r L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *при* $\rho=r-1$ $(r=1,2,3, \ldots)$, *а также при* $\rho=r-2$ $(r=2,4,6,\ldots)$, *является единственная формула, определяемая следующими узлами* x_k^* *и коэффициентами* p_{kl}^*:

$$x_k^*=h\left(2(k-1)+[R_{rq}(1)]^{1/r}\right) \qquad (k=1, 2, \ldots, m);$$

$$p_{1l}^*=(-1)^l p_{ml}^*=$$
$$=h^{l+1}\left\{\frac{(-1)^l}{(l+1)!}[R_{rq}(1)]^{\frac{l+1}{r}}+\frac{1}{r!}R_{rq}^{(r-l-1)}(1)\right\}$$
$$(l=0, 1, \ldots, \rho),$$

$$p_{k,2\nu}^*=\frac{2h^{2\nu+1}}{r!}R_{rq}^{(r-2\nu-1)}(1)$$

$$\left(k=2, 3, \ldots, m-1; \quad \nu=0, 1, \ldots, \left[\frac{r-1}{2}\right]\right)^{*)},$$

$$p_{k,2\nu+1}^*=0 \quad \left(k=2, 3, \ldots, m-1; \ \nu=0, 1, \ldots, \left[\frac{r-2}{2}\right]\right),$$

*) $[\alpha]$ — целая часть числа α.

где

$$h = 2^{-1}\left(m - 1 + [R_{rq}(1)]^{1/r}\right)^{-1},$$

а $R_{rq}(t)$ — *многочлен вида* $t^r + \sum_{i=0}^{r-1} \beta_i t^i$, *наименее уклоняющийся от нуля в метрике* L_q $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ *на отрезке* $[-1, 1]$. *При этом*

$$\mathscr{E}_m^\rho[W^r L_p] = R[W^r L_p;\ X^*,\ P^*] =$$

$$= \frac{R_{rq}(1)\, h^r}{r! \sqrt[q]{rq+1}} = \frac{R_{rq}(1)}{r! \sqrt[q]{rq+1}\, 2^r \left(m - 1 + [R_{rq}(1)]^{1/r}\right)^r}.$$

Отметим частные случаи. Если $p = 1$ $(q = \infty)$, то многочлен $R_{r\infty}(t)$ есть многочлен Чебышева $T_r(t) = 2^{1-r}\cos(r \arccos t)$ и тогда

$$h = [2^{1/r} + 2(m-1)]^{-1},$$

$$\mathscr{E}_m^\rho[W^r L] = \frac{1}{r!\,[2 + (m-1)\, 2^{2-1/r}]^r}.$$

Если $p = q = 2$, то $R_{r2}(t)$ есть многочлен Лежандра $l_r(t)$; при этом

$$h = \left[4 \sqrt[r]{\frac{(r!)^2}{(2r)!}} + 2(m-1)\right]^{-1},$$

$$\mathscr{E}_m^\rho[W^r L_2] = \frac{2}{r! \sqrt{2r+1}} \left[2 + (m-1) \sqrt[r]{\frac{(2r)!}{(r!)^2}}\right]^{-r}.$$

Наконец, в случае $p = \infty$ $(q = 1)$ $R_{r1}(t)$ есть многочлен Чебышева $Q_r(t)$ (второго рода) (стр. 120), и тогда

$$h = \left[2(m-1) + \sqrt[r]{r+1}\right]^{-1},$$

$$\mathscr{E}_m^\rho[W^r L_\infty] = \frac{1}{r! \left[4(m-1) + 2\sqrt[r]{r+1}\right]^r}.$$

Приведенные равенства справедливы для всех $r = 1, 2, 3, \ldots$, если $\rho = r - 1$, и для $r = 2, 4, 6, \ldots$, если $\rho = r - 2$.

Теорема Д.1 для $p = 1$, 2 и ∞ получена в 1965 г. И. И. Ибрагимовым и Р. М. Алиевым [12]; для всех

$1 \leqslant p \leqslant \infty$ в 1966 г. случай $\rho = r - 2$ $(r=2, 4, 6, \ldots)$ рассмотрели М. Б. Аксень и А. Х. Турецкий [1], а случай $\rho = r - 1$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ — Н. Е. Лушпай [26] (см. также [20, 27]). В 1970 г. теорема Д.1 была передоказана Каутским [42], который, в частности, привел соотношение (9).

Отметим, что частные случаи теоремы Д.1 ($\rho = 0$, $r = 1$ и 2), как указывалось в § 10, получены Ю. Я. Дорониным и Т. А. Шайдаевой еще в 50-х годах после первых работ С. М. Никольского по экстремальным задачам теории квадратур.

Замечание. Наилучшие квадратурные формулы для класса W^rL_p получены выше в предположении их точности для многочленов степени $r - 1$. Однако если класс $\mathfrak{M}$ содержит любой многочлен степени ν, то квадратурная формула (А), наилучшая для класса $\mathfrak{M}$, необходимо точна для всех многочленов степени ν. (Этот факт замечен М. Левиным [25] и уже отмечался в § 4.) Так как класс W^rL_p содержит любой многочлен степени $r - 1$, то теорема Д.1 остается справедливой, если в ее формулировке опустить условие точности квадратурной формулы для многочленов степени $r - 1$.

В § 10 и 14 рассматривались классы $W_0^rL_p$ функций $f \in W^rL_p$ таких, что

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(r-1)}(0) = 0.$$

Задача о наилучшей квадратурной формуле (А) для этих классов сводится к минимизации нормы $\|\varphi\|_{L_q}$ функций $\varphi(t)$ вида

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^r + \sum\limits_{i=0}^{r-1} a_{ki} t^i \\ (x_k < t \leqslant x_{k+1}, \ k = 0, 1, \ldots, m-1; \ x_0 = 0), \\ (t-1)^r \qquad (x_m < t \leqslant 1), \end{cases}$$

непрерывных при $\rho \leqslant r - 2$ на $[0, 1]$ вместе со своими производными до $(r - \rho - 2)$-го порядка включительно.

При $\rho = 0$ и $r = 1$ и 2, а также при $\rho = r - 2$ $(r = 2, 4, 6, \ldots)$ эта задача для $p = \infty$ решена еще в 1950 г. С. М. Никольским, а для $p = 1$ — А. И. Киселёвым (§ 14). Общий случай $1 \leqslant p \leqslant \infty$ на классе $W_0^r L_p$ при тех же предположениях относительно ρ и r, что и в теореме Д.1, рассмотрен в [1], [26], [20] и [27].

Отметим еще, что в работе М. Левина [24] рассматривается класс $W_{01}^{2r} L_p$ функций $f \in W^{2r} L_p$, у которых

$$f^{(l)}(0) = f^{(l)}(1) = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots, r-1),$$

и методом, аналогичным описанному в этом пункте, получена для этого класса наилучшая квадратурная формула вида (А) с $\rho = 2r - 2$.

3. Случаи, когда оценка (31) не является точной. Вернемся к оценке (31). Если $r > 2$ нечетно ($r = 3, 5, 7, \ldots$), то многочлены $\tilde{P}_{rk}(t)$ ($k = 1, 2, \ldots \ldots, m-1$) на концах промежутков (x_k^*, x_{k+1}^*) принимают значения противоположного знака и φ_* разрывна в каждом из узлов x_k^* ($k = 1, 2, \ldots, m-1$), т. е. $\varphi_* \notin \mathscr{A}_{mr}^{\rho}$ при $\rho \leqslant r-2$. Пусть

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{\rho}} \|\varphi\|_{L_q} = \|\varphi_0\|_{L_q}, \quad \varphi_0 \in \mathscr{A}_{mr}^{\rho}$$
$$(\rho \leqslant r-2;\ r = 3, 5, 7, \ldots).$$

Легко понять, что $\|\varphi_0\|_{L_q} > \|\varphi_*\|_{L_q}$. Действительно, так как $\varphi_0 \in \mathscr{A}_{mr}^{r-2} \subset \mathscr{A}_{mr}^{r-1}$, то равенство $\|\varphi_0\|_{L_q} = \|\varphi_*\|_{L_q}$ означало бы, что две различные функции из $\mathscr{A}_{mr}^{r-1}$ реализуют минимум в правой части (14), что невозможно. Таким образом, при $\rho \leqslant r-2$ и $r = 3, 5, 7, \ldots$ неравенство (31) не дает точной оценки снизу для величины $\mathscr{E}_m^{\rho}[W^r L_p]$.

Аналогичная ситуация возникает при $\rho \leqslant r-3$ и $r \geqslant 4$ четных, так как в этом случае каждая функция $\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{\rho}$ имеет на $[0, 1]$ по крайней мере непрерывную производную, в то время как функция φ_*, хотя и непрерывна, но в узлах x_k^* не дифференцируема и, следовательно, $\varphi_* \notin \mathscr{A}_{mr}^{\rho}$.

Итак, при $\rho = r-2$ ($r = 3, 5, 7, \ldots$) и при $\rho \leqslant \leqslant r-3$ ($r \geqslant 3$) оценка (31) явно занижена, и решение задачи о минимизации нормы $\|\varphi\|_{L_q}$ на множестве

$\mathcal{A}^{\rho}_{mr}$ требует более тонких рассуждений. В общем виде эта задача пока не решена. Получено решение лишь в нескольких частных случаях, на одном из которых мы остановимся подробнее, чтобы составить представление о возникающих здесь трудностях и возможных путях их преодоления.

Пусть $\rho = r-2$, $r = 3, 5, 7, \ldots$, $p = 1$ и, значит, $q = \infty$. Требуется минимизировать норму $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{L_\infty}$ кусочно-полиномиальной функции $\varphi(t)$ вида (8) по узлам x_k и коэффициентам a_{kl}, обеспечивающим непрерывность $\varphi(t)$, и указать функцию $\varphi_0 \in \mathcal{A}^{r-2}_{mr}$, для которой

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{A}^{r-2}_{mr}} \|\varphi\| = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}^{r-2}_{mr}} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\varphi(t)| = \|\varphi_0\| \equiv M. \quad (33)$$

Идея рассуждений состоит в том, чтобы найти характеристические свойства экстремальной функции φ_0. Эти свойства выражаются, во-первых, через характер склеивания многочленов P_{rk} в узлах x_k и, во-вторых, через количество точек, в которых каждый из «внутренних» многочленов P_{rk} $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ принимает значения, по абсолютной величине равные M, но с чередующимся знаком. Реализация этой идеи в отдельных местах (леммы Д.3 и Д.4) напоминает доказательство теоремы Чебышева о характеристических свойствах многочлена наилучшего равномерного приближения (см., например, [11], стр. 224). При этом мы существенно будем использовать тот факт, что алгебраический многочлен степени r имеет не более r нулей (с учетом их кратности) и что между двумя нулями многочлена всегда есть нуль его производной.

Основной результат этого пункта базируется на следующей теореме, которая дает решение одной задачи о сплайне, наименее уклоняющемся от нуля, и может представить самостоятельный интерес.

Теорема Д.2 [18]. *Экстремальная функция* $\varphi_0 \in \mathcal{A}^{r-2}_{mr}$ $(r = 3, 5, 7, \ldots)$, *удовлетворяющая соотношению* (33), *однозначно определяется следующими свойствами*:

1) *В каждом узле* x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ *многочлены* $P_{r,k-1}$ *и* P_{rk} *склеены гладко, т. е.* $P'_{r,k-1}(x_k) =$

$=P'_{rk}(x_k)$, *причем* $\varphi_0(x_k)=0$ $(k=2, 3, \ldots, m-1)$, $\varphi_0(x_1)=-\varphi_0(x_m)$.

2) *Каждый из многочленов* $P_{rk}(t)$ $(k=1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1)$ *есть многочлен Чебышева первого рода, наименее уклоняющийся от нуля в метрике* L_∞ *на некотором отрезке* $[a_k-h, a_k+h]$, *содержащем промежуток* $[x_k, x_{k+1}]$, *причем* $P_{rk}(t)$ *внутри* (x_k, x_{k+1}) $r-1$ *раз принимает значения* $\pm M$ *с чередующимся знаком.*

Рассуждать будем от противного, т. е. покажем, что если функция $\varphi\in\mathcal{A}_{mr}^{r-2}$ не удовлетворяет хотя бы одному из условий теоремы, то найдется в множестве $\mathcal{A}_{mr}^{r-2}$ функция с меньшей нормой и, значит, φ не может быть экстремальной.

Лемма Д.1. *Если для функции* $\varphi\in\mathcal{A}_{mr}^{r-2}$ $(r=3, 5, 7, \ldots)$ *хотя бы в одном из узлов* x_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ *одновременно имеют место соотношения*

$$|\varphi(x_k)|<\|\varphi\|, \quad P'_{r,\,k-1}(x_k)\neq P'_{rk}(x_k), \tag{34}$$

то $\varphi(t)$ *не является экстремальной.*

Доказательство. Пусть в некотором узле x_k $(1\leqslant k\leqslant m)$ выполнены соотношения (34). Положим

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\varphi(t) & (0\leqslant t\leqslant x_k),\\ P_{r,\,k-1}(t) & (x_k\leqslant t\leqslant 1);\end{cases}$$

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}P_{rk}(t) & (0\leqslant t\leqslant x_k),\\ \varphi(t) & (x_k\leqslant t\leqslant 1),\end{cases}$$

причем в случае $k=1$ полагаем $\varphi_1(t)\equiv P_{r0}(t)$, а в случае $k=m$ $\varphi_2(t)\equiv P_{rm}(t)$. Для $0<\lambda\leqslant 1$ пусть

$$\psi_1(\lambda, t)=\lambda^r\varphi_1\left(\frac{t}{\lambda}\right), \quad \psi_2(\lambda, t)=\lambda^r\varphi_2\left(1-\frac{1-t}{\lambda}\right).$$

Функции $\psi_1(\lambda, t)$ и $\psi_2(\lambda, t)$ непрерывны по параметру λ. Графики их при $\lambda=1$ в силу (34) пересекаются без касания в точке x_k, причем

$$|\psi_1(1, x_k)|=|\psi_2(1, x_k)|=|\varphi(x_k)|<\|\varphi\|.$$

Из соображений непрерывности следует, что при значениях $\lambda<1$, но достаточно близких к 1, в окрестности узла x_k найдется точка τ, $x_{k-1}<\tau<x_{k+1}$, в кото-

рой пересекаются графики ψ_1 и ψ_2, причем при $\lambda \to 1$ $\tau \to x_k$. Выберем $\lambda_0 < 1$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} |\psi_1(\lambda_0, t)| < \|\varphi\|, \qquad \max_{\tau \leqslant t \leqslant 1} |\psi_2(\lambda_0, t)| < \|\varphi\|, \tag{35}$$

и положим

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_1(\lambda_0, t) & (0 \leqslant t \leqslant \tau), \\ \psi_2(\lambda_0, t) & (\tau \leqslant t \leqslant 1). \end{cases} \tag{36}$$

Функция $\psi(t)$ непрерывна на $[0, 1]$, кусочно-полиномиальна и имеет ту же структуру, что и $\varphi(t)$, но с узлами в точках

$$\lambda_0 x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1), \ \tau,$$
$$1 - \lambda_0(1 - x_i)\,(i = k+1, \ldots, m).$$

Значит, $\psi \in \mathscr{A}_{mr}^{r-2}$ и так как в силу (35) и (36) $\|\psi\| < \|\varphi\|$, то φ не экстремальна.

Лемма Д.2. *Пусть* $\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{r-2}$ $(r = 3, 5, 7, \ldots)$ *и*

$$M_k = \max_{x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}} |\varphi(t)| = \max_{x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}} |P_{rk}(t)|$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Если хотя бы для одного k $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ $M_k < \|\varphi\|$, *то* $\varphi(t)$ *не экстремальна.*

Доказательство. Пусть $M_k < \|\varphi\|$. Положим в случае $2 \leqslant k \leqslant m-1$

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi(t) & (0 \leqslant t \leqslant x_k), \\ P_{r,k-1}(t) & (x_k \leqslant t \leqslant 1); \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} P_{r,k+1}(t) & (0 \leqslant t \leqslant x_{k+1}), \\ \varphi(t) & (x_{k+1} \leqslant t \leqslant 1). \end{cases}$$

Если $k = 1$, то $\varphi_1 \equiv P_{r0}$, а если $k = m$, то $\varphi_2 \equiv P_{rm}$. Пусть при $0 < \lambda \leqslant 1$

$$\psi_1(\lambda, t) = \lambda^r \varphi_1\left(\frac{t}{\lambda}\right), \quad \psi_2(\lambda, t) = \lambda^r \varphi_2\left(1 - \frac{1-t}{\lambda}\right).$$

Заметим, что

$$|\psi_1(1, x_k)| = |\varphi(x_k)| \leqslant M_k < \|\varphi\|,$$
$$|\psi_2(1, x_{k+1})| = |\varphi(x_{k+1})| \leqslant M_k < \|\varphi\|,$$

и потому в силу непрерывности найдется число $\lambda_0 < 1$ такое, что для всех $\lambda_0 \leqslant \lambda < 1$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant x_k} |\psi_1(\lambda, t)| < \|\varphi\|, \quad \max_{x_{k+1} \leqslant t \leqslant 1} |\psi_2(\lambda, t)| < \|\varphi\|. \tag{37}$$

Рассмотрим многочлен

$$P_{rk}(\lambda, t) = P_{rk}(t) + \alpha t + \beta,$$

где при каждом фиксированном λ, $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, числа $\alpha = \alpha(\lambda)$ и $\beta = \beta(\lambda)$ выбраны так, что выполняются равенства

$$P_{rk}(\lambda, x_k) = \psi_1(\lambda, x_k), \quad P_{rk}(\lambda, x_{k+1}) = \psi_2(\lambda, x_{k+1}).$$

Ясно, что при $\lambda \to 1$ $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$. Так как на промежутке $x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}$ $|P_{rk}(1, t)| = |P_{rk}(t)| < \|\varphi\|$, то для λ, достаточно близких к единице, также будет

$$|P_{rk}(\lambda, t)| < \|\varphi\| \qquad (x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}). \tag{38}$$

Следовательно, существует число λ_1, $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 < 1$, такое, что при $\lambda = \lambda_1$ выполняются (37) и (38). Положим

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_1(\lambda_1, t) & (0 \leqslant t \leqslant x_k), \\ P_{rk}(\lambda_1, t) & (x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}), \\ \psi_2(\lambda_1, t) & (x_{k+1} \leqslant t \leqslant 1). \end{cases}$$

Ясно, что $\psi \in \mathscr{A}_{mr}^{r-2}$ и $\|\psi\| < \|\varphi\|$. Этим лемма Д.2 доказана.

Лемма Д.3. *Если для* $\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{r-2}$ $(r = 3, 5, 7, \ldots)$ *хотя бы в одном узле* x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ *выполнено соотношение*

$$|\varphi(x_k)| = \|\varphi\|, \tag{39}$$

то $\varphi(t)$ — *не экстремальная функция*.

Доказательство. Пусть для некоторого $k = 1, 2, \ldots, m$ $\varphi(x_k) = \|\varphi\|$. Рассмотрим два случая.

1) $P'_{rk}(x_k) \neq P'_{r,\,k-1}(x_k)$, т. е. в узле x_k многочлены $P_{r,\,k-1}$ и P_{rk} склеены не гладко. Из равенства $\varphi(x_k) = \|\varphi\|$ следует, что $P_{rk}(t)$ убывает в правой окрестности точки x_k, а $P_{r,\,k-1}(t)$ возрастает в левой окрестности этой точки. Так как $P_{rk}(t)$ — многочлен нечетной степени, то он имеет по меньшей мере один нуль левее точки x_k, а значит, на интервале (x_k, x_{k+1})

$P_{rk}(t)$ меняет знак не более, чем в $(r-1)$-й точке. Пусть это точки $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{s-1} < \tau_s$, где $\tau_1 > x_k$, $\tau_s < x_{k+1}$. Предположим сначала, что $s = r-1$. Тогда, очевидно, $P'_{rk}(t) > 0$ для всех $\tau_s \leqslant t \leqslant x_{k+1}$. Положим

$$\mu(t) = \mu(\lambda, t) = \lambda(t-\tau_1)(t-\tau_2)\ldots(t-\tau_{s-1})(t-x_{k+1}),$$

где $\lambda < 0$, и потому на интервалах (x_k, τ_1), $(\tau_1, \tau_2), \ldots$ $\ldots, (\tau_{s-1}, \tau_s)$ $\mu(t)$ и $P_{rk}(t)$ имеют противоположные знаки. $\mu(t)$ есть многочлен степени $r-1$. Ясно, что при достаточно малом по абсолютной величине $\lambda = \lambda_0$ для многочлена $Q(\lambda_0, t) = P_{rk}(t) + \mu(\lambda_0, t)$ выполнено неравенство $|Q(\lambda_0, t)| < \|\varphi\|$ для всех $x_k < t < x_{k+1}$, и найдется точка $\bar{x}_k$ $(x_{k-1} < \bar{x}_k < x_k)$ такая, что $Q(\lambda_0, \bar{x}_k) = P_{r,k-1}(\bar{x}_k)$, $Q'(\lambda_0, \bar{x}_k) \neq P'_{r,k-1}(\bar{x}_k)$, $|Q(\lambda_0, \bar{x}_k)| < \|\varphi\|$ и $|Q(\lambda_0, t)| \leqslant \|\varphi\|$ для всех $\bar{x}_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}$. Функция

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & (0 \leqslant t \leqslant \bar{x}_k, \quad x_{k+1} \leqslant t \leqslant 1), \\ Q(\lambda_0, t) & (\bar{x}_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}), \end{cases}$$

очевидно, принадлежит множеству $\mathscr{A}_{mr}^{r-2}$, причем $\|\psi\| \leqslant \|\varphi\|$. Но для $\psi(t)$ выполнены условия леммы Д.1 и, следовательно, $\psi(t)$, а значит, и $\varphi(t)$, не являются экстремальными функциями.

Теперь пусть $s \leqslant r-2$. Полагаем

$$\mu(t) = \mu(\lambda, t) = \lambda(t-\tau_1)(t-\tau_2)\ldots(t-\tau_s)(t-x_{k+1}),$$

и знак λ выберем так, чтобы на $[x_k, x_{k+1}]$ выполнялось соотношение $\operatorname{sign}\mu(t) = -\operatorname{sign} P_{rk}(t)$. При достаточно близком к нулю $\lambda = \lambda_0$ найдется точка $\bar{x}_k$ $(x_{k-1} < \bar{x}_k < x_k)$ такая, что для многочлена $Q(\lambda_0, t) = P_{rk}(t) + \mu(\lambda_0, t)$ выполнены в точке $\bar{x}_k$ и на промежутке $[\bar{x}_k, x_{k+1}]$ те же соотношения, что и в рассмотренном случае $s = r-1$. Остальное — как выше.

2) $P'_{r,k-1}(x_k) = P'_{rk}(x_k) = 0$, т. е. многочлены в точке x_k склеены гладко. Заметим сначала, что при условии (39) это возможно только для $2 \leqslant k \leqslant m-1$. В силу нечетности r многочлен $P_{r,k-1}$ на интервале (x_{k-1}, x_k) может иметь не более $r-2$ перемен знака в некоторых точках $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_s$.

Если $s = r-2$, то на отрезке $[x_{k-1}, \tau_1]$ многочлен $P_{r,k-1}$ строго возрастает. Поэтому, положив

$$\mu(\lambda, t) = \lambda(t-x_{k-1})(t-\tau_2)\ldots(t-\tau_s)(t-x_k),$$

можно выбрать $\lambda=\lambda_0\neq 0$ таким образом, что будет $|P_{r,k-1}(t)+\mu(\lambda_0,t)|\leqslant\|\varphi\|$ для $x_{k-1}\leqslant t\leqslant x_k$. Для функции

$$\psi(t)=\begin{cases}\varphi(t) & (0\leqslant t\leqslant x_{k-1},\ x_k\leqslant t\leqslant 1),\\ P_{r,k-1}(t)+\mu(\lambda_0,t) & (x_{k-1}\leqslant t\leqslant x_k),\end{cases}$$

принадлежащей, очевидно, множеству $\mathscr{A}_{mr}^{r-2}$, выполнено условие $\psi(x_k)=\|\psi\|=\|\varphi\|$, и так как $\mu'(\lambda_0,x_k)>0$, то в точке x_k склеивание негладкое. Как показано в случае 1), ψ, а значит, и φ — не являются экстремальными функциями.

Если $s\leqslant r-3$, то к такому же выводу придем с помощью поправки

$$\mu(\lambda,t)=\lambda(t-x_{k-1})(t-\tau_1)\ldots(t-\tau_s)(t-x_k)$$

при соответствующем выборе λ.

Наконец, в случае $\varphi(x_k)=-M$ рассуждения совершенно аналогичны, только при негладком склеивании вводим поправку к $P_{r,k-1}$, а при гладком — к P_{rk}. Лемма Д.3 доказана.

Из лемм Д.1 и Д.3 следует, что в узлах x_k многочлены экстремальной функции склеены гладко.

Лемма Д.4. *Если внутри хотя бы одного из интервалов* (x_k,x_{k+1}) $(k=1,2,\ldots,m-1)$ *многочлен* P_{rk} *принимает значения* $\pm\|\varphi\|$ *с чередующимися знаками менее, чем* $r-1$ *раз, то* φ *— не экстремальная функция.*

Доказательство. Будем называть точку $x\in[0,1]$ точкой максимального уклонения (т. м. укл.) для φ, если $|\varphi(x)|=\|\varphi\|$, причем, если $\varphi(x)=\|\varphi\|$, то будем говорить, что x — т. м. укл. положительного знака, а если $\varphi(x)=-\|\varphi\|$, то x — т. м. укл. отрицательного знака. Выберем точки $z_i=z_i^{(k)}$,

$$x_k=z_0<z_1<\ldots<z_{s-1}<z_s=x_{k+1},$$

из условий: а) $P_{rk}(z_i)=0$ $(i=1,2,\ldots,s-1)$ и б) на каждом из отрезков $[z_i,z_{i+1}]$ $(i=0,1,\ldots,s-1)$ есть т. м. укл., причем только одного знака, а знаки т. м. укл. на соседних отрезках противоположны. (Если внутри (x_k,x_{k+1}) нет т. м. укл., то φ не экстремальна уже в силу леммы Д.2.)

Пусть $\varphi \in \mathscr{A}_{mr}^{r-2}$ и внутри (x_k, x_{k+1}) φ принимает значения $\pm\|\varphi\|$ с чередующимися знаками не более, чем $r-2$ раза. Так как по лемме Д.3 точки x_k и x_{k+1} не могут быть т. м. укл., то $s \leqslant r-2$. Положим

$$\mu(\lambda, t) = \lambda(t-z_0)(t-z_1)\ldots(t-z_s)$$

и знак λ выберем так, чтобы на каждом интервале (z_i, z_{i+1}) знак содержащейся там т. м. укл. был противоположен знаку $\mu(\lambda, t)$. При λ, достаточно близком к нулю, очевидно, будет

$$|P_{rk}(t) + \mu(\lambda, t)| < \|\varphi\| \qquad (x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}),$$

поэтому в силу леммы Д.2 функция $\psi(t)$, совпадающая с $P_{rk}(t) + \mu(\lambda, t)$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ и с $\varphi(t)$ вне его, не экстремальна. А так как $\|\varphi\| \geqslant \|\psi\|$, то лемма Д.4 доказана.

Теперь нетрудно завершить доказательство необходимости условий 1) и 2) теоремы Д.2. Пусть φ_0 — экстремальная функция из $\mathscr{A}_{mr}^{r-2}$ вида (8). По лемме Д.4 каждый многочлен $P_{rk}(t)$ $(k=1, 2, \ldots, m-1)$ внутри промежутка (x_k, x_{k+1}) принимает $r-1$ раз значения $\pm M$ $(M = \|\varphi_0\|)$ с чередующимися знаками. В этих точках, очевидно, $P'_{rk}(t) = 0$. Ввиду нечетности r существуют точки $\alpha_k < x_k$ и $\beta_k > x_{k+1}$ такие, что $P_{rk}(\alpha_k) = -M$, $P_{rk}(\beta_k) = M = \max\limits_{\alpha_k \leqslant t \leqslant \beta_k} |P_{rk}(t)|$. Следовательно, $P_{rk}(t)$ на отрезке $[\alpha_k, \beta_k]$ принимает значения $\pm M$ с чередующимися знаками $r+1$ раз, а таким свойством обладает (см. § 15) только многочлен Чебышева I рода, т. е.

$$P_{rk}(t) = h_k^r T_r\left(\frac{t-a_k}{h_k}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1),$$

где $T_r(u) = 2^{1-r}\cos(r \arccos u)$, $2h_k = \beta_k - \alpha_k$ и $2a_k = \alpha_k + \beta_k$.

Так как максимум каждого многочлена P_{rk} $(k=1, \ldots, m-1)$ на промежутке $[a_k - h_k, a_k + h_k]$ равен M, то все h_k равны между собой: $h_k = h$ $(k=1, 2, \ldots, m-1)$ и графики $P_{rk}(t)$ отличаются друг от друга только сдвигом вдоль оси t.

Теперь учтем, что если τ'_k и τ''_k — соответственно самая левая и самая правая точки экстремума $P_{rk}(t)$, то производная $P'_{rk}(t)$ строго монотонна при $t \leqslant \tau'_k$ и при $t \geqslant \tau''_k$. При этом для всех $u \geqslant 0$

$$P'_{r1}(\tau'_1 - u) = P'_{r1}(\tau''_1 + u) = P'_{r2}(\tau'_2 - u) = P'_{r2}(\tau''_2 + u) = \\ = \ldots = P'_{r,\,m-1}(\tau'_{m-1} - u) = P'_{r,\,m-1}(\tau''_{m-1} + u).$$

Отсюда следует, что гладкое склеивание в точках $x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}$ возможно лишь при условии $\varphi_0(x_k) = 0$ $(k = 2, 3, \ldots, m-1)$.

Что касается точек x_1 и x_m, то в них условие гладкого склеивания определяется равенствами

$$P_{r1}(x_1) = x_1^r = -(1 - x_m)^r = -P_{r,\,m-1}(x_m),$$
$$P'_{r1}(x_1) = r x_1^{r-1} = r(1 - x_m)^{r-1} = P'_{r,\,m-1}(x_m).$$

Остается доказать, что условиями 1) и 2) теоремы Д.2 экстремальная функция $\varphi_0(t)$ определяется однозначно. Так как

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} t^r & (0 \leqslant t \leqslant x_1), \\ h^r T_r\left(\dfrac{t - a_k}{h}\right) & \\ (x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}, & k = 1, 2, \ldots, m-1), \\ (t-1)^r & (x_m \leqslant t \leqslant 1), \end{cases} \tag{40}$$

то однозначность экстремальной функции будет следовать из однозначности определения числа h и точек a_k $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ или x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Для их определения условия 1) и 2) теоремы Д.2 дают следующие уравнения:

$$\begin{gathered} P_{r1}(x_1) = x_1^r, \quad P'_{r1}(x_1) = r x_1^{r-1}, \\ P_{r,\,m-1}(x_m) = (x_{m-1} - 1)^r = -x_1^r, \\ P'_{r,\,m-1}(x_m) = r(x_m - 1)^{r-1} = r x_1^{r-1}, \end{gathered} \tag{41}$$

$$x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \ldots = x_{m-1} - x_{m-2} = 2h \cos\frac{\pi}{2r},$$
$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots \\ \ldots + (x_m - x_{m-1}) + (1 - x_m) = 1.$$

Первые из этих уравнений с учетом (40) позволяют найти x_1 и x_m:

$$x_1 = 1 - x_m = h\,[T_r(z_0)]^{1/r}, \tag{42}$$

где z_0 ($z_0 < 0$) — наименьший корень уравнения

$$T_r'(z) = r\,[T_r(z)]^{1-1/r}. \tag{43}$$

Так как, далее, x_2 есть наибольший нуль многочлена $P_{r1}(t)$, то $x_2 - a_1 = h\cos\frac{\pi}{2r}$, а с учетом того, что $a_1 - x_1 = hz_0$, получаем

$$x_2 - x_1 = h\left(\cos\frac{\pi}{2r} - z_0\right), \tag{44}$$

и в силу (42) и (44)

$$x_2 = 1 - x_{m-1} = h\left([T_r(z_0)]^{1/r} + \cos\frac{\pi}{2r} - z_0\right). \tag{45}$$

Эти равенства вместе с последними уравнениями (41) легко позволяют однозначно определить остальные узлы x_k экстремальной функции и число h:

$$x_k = h\left([T_r(z_0)]^{1/r} - z_0 + (2k-3)\cos\frac{\pi}{2r}\right) \tag{46}$$

$$(k = 3,\ 4,\ \ldots,\ m-2),$$

$$h = \frac{1}{2}\left([T_r(z_0)]^{1/r} + (m-2)\cos\frac{\pi}{2r} - z_0\right)^{-1}. \tag{47}$$

Итак, функция $\varphi_0(t)$ вида (8), определяемая условиями теоремы Д.2 и соотношениями (40)—(47), дает единственное решение в задаче (33) минимизации нормы $\|\varphi\|$ на множестве $\mathcal{A}_{mr}^{r-2}$. Но из условий теоремы Д.2 следует также, что $\varphi_0(t)$ имеет непрерывную производную на $[0, 1]$, т. е. $\varphi_0 \in \mathcal{A}_{mr}^{r-3}$. Так как $\mathcal{A}_{mr}^{r-3} \subset \mathcal{A}_{mr}^{r-2}$, то

$$\|\varphi_0\| \geqslant \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_{mr}^{r-3}} \|\varphi\| \geqslant \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_{mr}^{r-2}} \|\varphi\|$$

и, с учетом (33), получаем, что

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{A}_{mr}^{r-3}} \|\varphi\| = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_{mr}^{r-2}} \|\varphi\| = \|\varphi_0\|,$$

т. е. функция $\varphi_0(t)$ дает решение экстремальной задачи и на множестве $\mathscr{A}_{mr}^{r-3}$ $(r=3,\ 5,\ 7,\ \ldots)$.

Вид составляющих $\varphi_0(t)$ многочленов $P_{rk}(t)$ позволяет легко найти по формуле (9) коэффициенты p_{kl} наилучшей квадратурной формулы. В результате получаем следующую теорему [18].

Теорема Д.3. *Среди квадратурных формул вида* (А) *при* $\rho=r-2$ *и* $\rho=r-3$, *точных для всех многочленов степени не выше* $r-1$, *наилучшей для класса* W^rL *при* $r=3,\ 5,\ 7,\ \ldots$ *является единственная формула, определяемая следующими узлами* x_k^* *и коэффициентами* p_{kl}^*:

$$x_1^*=1-x_m^*=h\left[T_r(z_0)\right]^{1/r},\quad x_2^*=x_1^*+h\left(\cos\frac{\pi}{2r}-z_0\right),$$

$$x_k^*=x_2^*+2(k-2)h\cos\frac{\pi}{2r}\qquad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ m-1);$$

$$p_{1l}^*=(-1)^l p_{ml}^*=$$

$$=\frac{h^{l+1}}{r!}\left\{\frac{(-1)^l\, r!}{(l+1)!}\left[T_r(z_0)\right]^{\frac{l+1}{r}}+T_r^{(r-l-1)}(-z_0)\right\}$$

$$(l=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho),$$

$$p_{k,\,2i}^*=\frac{2h^{2i+1}}{r!}\,T_r^{(r-2i-1)}\left(\cos\frac{\pi}{2r}\right)$$

$$\left(k=2,\ 3,\ \ldots,\ m-1;\ \ i=0,\ 1,\ \ldots,\ \left[\frac{\rho}{2}\right]\right),$$

$$p_{k,\,2i+1}^*=0\quad\left(k=2,\ 3,\ldots,\ m-1;\ \ i=0,\ 1,\ldots,\ \left[\frac{\rho-1}{2}\right]\right),$$

где $T_r(u)=2^{1-r}\cos(r\arccos u)$, z_0 — *наименьший корень уравнения* (43) *и* h *определяется равенством* (47). *При этом*

$$\mathscr{E}_m^{r-2}[W^rL]=\mathscr{E}_m^{r-3}[W^rL]=$$

$$=2^{1-2r}(r!)^{-r}\left\{\left[T_r(z_0)\right]^{1/r}-z_0+(m-2)\cos\frac{\pi}{2r}\right\}^{-r}.$$

Примечание. Условие точности квадратурных формул для многочленов степени $r-1$ в формулировке теоремы Д.3 можно снять (см. замечание к теореме Д.1).

Отметим, что аналогичный теореме Д.3 результат получен в [18] также для классов W_0^rL.

Естественно было бы попытаться применить изложенный в этом пункте метод к решению задачи минимизации нормы $\|\varphi\|$ на множестве $\mathcal{A}^{\rho}_{mr}$ при $\rho < r-3$. Однако здесь возникают существенные трудности, связанные с необходимостью обеспечить более высокую гладкость экстремальной функции. Еще сложнее обстоит дело с минимизацией нормы $\|\varphi\|_{L_q}$ при $1 \leqslant q < \infty$, ввиду особенностей интегральной метрики, затрудняющих доказательство утверждения, аналогичного теореме Д.2. Лишь при $q=2$ в периодическом случае получено некоторое продвижение в этом направлении, о чем будет сказано в п. 5 этого параграфа.

4. Квадратурные формулы с фиксированными узлами на концах промежутка. Узлы и коэффициенты наилучших квадратурных формул, полученных в пп. 2 и 3, выражающиеся через значения многочленов, наименее уклоняющихся от нуля, имеют несколько громоздкий вид, что затрудняет использование этих формул в практике вычислений. Более простой вид получит наилучшая квадратурная формула в тех же случаях, если заранее зафиксировать в качестве узлов концы промежутка: $x_0=0$, $x_m=1$, а узлы $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ и коэффициенты выбрать оптимальным образом. (Такие формулы впервые изучались А. А. Марковым.)

Итак, считая, что $0=x_0<x_1<\ldots<x_m=1$, рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\rho_k} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f). \tag{48}$$

Формула Тейлора (3.1), записанная для $a=0$ и $a=1$, позволяет функцию $f \in W^r L_p$ представить так:

$$f(x) = P_{r-1}(t) + \frac{1}{2(r-1)!}\left[\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_x^1 (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt\right],$$

где $P_{r-1}(t)$ — многочлен степени $r-1$. Если формула (48) с $\rho_k \leqslant r-1$ точна для таких многочленов, то ее остаток $R(f)$ запишется в виде (1), где

$$G_r(t) = \frac{1}{2}[t^r + (t-1)^r] - \\ - \frac{(-1)^r}{2} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\rho_k} \frac{r!\, p_{kl}}{(r-l-1)!} [K_{r-l}(x_k - t) + \\ + (-1)^{r+l} K_{r-l}(t - x_k)].$$

При $\rho_k = r-1$ $G_r(t)$ на каждом промежутке (x_k, x_{k+1}) $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ есть произвольный многочлен степени r со старшим коэффициентом, равным единице. Из точности формулы (48) для многочленов степени $r-1$ следует, что при $\rho_k \leqslant r-2$ $G_r(0) = G_r(1) = 0$.

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые использованы при доказательстве теоремы Д.1, В. М. Алхимова получила следующий результат [4] (см. также [41]).

Теорема Д.4. *Среди квадратурных формул вида* (48) *при* $\rho_k = r-1$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ и $r = 1, 2, 3, \ldots$, *а также при* $\rho_0 = \rho_m = r-1$, $\rho_k = r-2$ $(k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1)$ *и* $r = 2, 4, 6, \ldots$, *наилучшей на классе* $W^r L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *является единственная формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{r!} \sum_{l=0}^{r-1} \frac{R_{rq}^{(r-l-1)}(1)}{(2m)^{l+1}} [f^{(l)}(0) + (-1)^l f^{(l)}(1)] + \\ + \frac{2}{r!} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=0}^{[\rho_k/2]} \frac{R_{rq}^{(r-2l-1)}(1)}{(2m)^{2l+1}} f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right) + R(f),$$

верхняя грань остатка которой на классе $W^r L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *в точности равна*

$$\frac{R_{rq}(1)}{2^r r! \sqrt[q]{rq+1}\, m^r} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Таким образом, наилучшая формула (48) в этом случае имеет равноотстоящие узлы. Этот же факт имеет место для наилучшей формулы вида (48) на классах $W^r L$ и $W^r L_2$ при $\rho_0 = \rho_m = r-2$, $\rho_k = r-2$ или $r-3$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ и нечетных $r \geqslant 3$ [4].

Отметим, что при $r=2$ и $\rho_k=0$ теорема Д.4 получена ранее в работе [23]. Для класса W^rL при $\rho_0 = \rho_m = r-1$ и $r-2$, $\rho_k = r-3$ и $r-4$ ($k=1, 2, \ldots, m-1$), $r=4, 6, 8, \ldots$ наилучшие формулы вида (48) указаны в [32].

5. Периодический случай. Отдельно рассмотрим задачу о наилучшей квадратурной формуле (A) для классов периодических функций. Вместо формулы Тейлора здесь удобнее воспользоваться представлением функции через ее r-ю производную, учитывающим периодичность.

Пусть $f(x)$ — заданная на всей числовой оси, периода 2π функция, имеющая абсолютно непрерывную на всей оси производную $(r-1)$-го порядка и, следовательно, интегрируемую на $(0, 2\pi)$ по Лебегу производную $f^{(r)}(x)$. Разложим $f(x)$ в ряд Фурье по тригонометрической системе:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{49}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt\, dt \qquad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt\, dt \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Так как

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos k(t-x)\, dt,$$

то, интегрируя по частям последовательно r раз и учитывая периодичность функции f, найдем

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx =$$

$$= \frac{1}{\pi k^r} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) \cos\left[k(t-x) + \frac{r\pi}{2}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi k^r} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) \cos\left[k(x-t) - \frac{\pi r}{2}\right] dt.$$

Подставляя в (49), представим функцию f в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_r(x-t)\,f^{(r)}(t)\,dt, \tag{50}$$

где $D_r(u)$ — 2π-периодическая функция, определенная равенством

$$D_r(u)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(ku-\frac{\pi r}{2}\right)}{k^r} \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots). \tag{51}$$

Ряд (51) мажорируется числовым рядом $1+2^{-r}+$ $+3^{-r}+\ldots$, поэтому функция $D_r(u)$ непрерывна при $r\geqslant 2$, а при $r\geqslant 3$ имеет на всей оси непрерывные производные до $(r-2)$-го порядка включительно. При этом $D_2'(u)=D_1(u)$ для $0<u<2\pi$, $D_r'(u)=$ $=D_{r-1}(u)\,(r=3,\ 4,\ 5,\ \ldots)$ для всех $|u|<\infty$ и

$$D_r(u)=\int_{\beta_r}^{u} D_{r-1}(t)\,dt \qquad (r=2,\ 3,\ 4,\ \ldots), \tag{52}$$

где константа β_r определена условием

$$\int_0^{2\pi} D_r(t)\,dt=0.$$

Для $D_1(u)$ имеют место равенства

$$D_1(u)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin ku}{k}=\begin{cases}\dfrac{\pi-u}{2} & (0<u<2\pi),\\ 0 & (u=0),\end{cases} \tag{53}$$

которые легко получить, разлагая стоящую справа функцию в ряд Фурье. Из (53) и (52) следует, что на интервале $(0,2\pi)$ $D_r(u)$ есть алгебраический многочлен степени r. Заметим, что функция $D_r(u)$ четна при r четном и нечетна при r нечетном.

Чтобы сделать более удобным сравнение с результатами пп. 2 и 3, мы перейдем к функциям периода 1 и будем рассматривать задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы (А) для класса $\tilde{W}^rL_p$ 1-периодических функций $f(x)$, имеющих на всей оси абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка и таких, что $\|f^{(r)}\|_{L_p} \leqslant 1$. Так как класс $\tilde{W}^r L_p$ содержит любую тождественную константу, то наилучшая для этого класса формула (A) необходимо должна быть точна для константы. Поэтому поставленную задачу можно решать на классе $\tilde{W}^r_* L_p$ функций f из $\tilde{W}^r L_p$ таких, что

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0. \tag{54}$$

Заменяя в (50) переменную, для функции $f \in \tilde{W}^r_* L_p$ получим, с учетом (54), представление

$$f(x) = \frac{1}{2^{r-1}\pi^r} \int_0^1 D_r[2\pi(x-t)]\, f^{(r)}(t)\,dt. \tag{55}$$

Пусть

$$B_r^*(t) = -\frac{r!}{2^{r-1}\pi^r} D_r(2\pi t) \qquad (r = 2, 3, 4, \ldots, |t| < \infty);$$

$$B_1^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} D_1(2\pi t) & (0 < t < 1), \\ -\frac{1}{\pi} D_1(0+0) = -\frac{1}{2} & (t = 0); \end{cases} \tag{56}$$

$$B_1^*(t+1) = B_1^*(t).$$

Из (56) и отмеченных выше свойств функции $D_r(u)$ следует, что $B_r^*(t)$ на промежутке $0 \leqslant t < 1$ есть некоторый алгебраический многочлен $B_r(t)$ степени r. (В математической литературе этот многочлен известен как многочлен Бернулли (см., например, [21], гл. I). Так как

$$D_1(2\pi u) = -\pi\left(u - \frac{1}{2}\right) \qquad (0 < u < 1),$$

$$D_r(2\pi u) = 2\pi \int_{c_r}^{u} D_{r-1}(2\pi t)\,dt \qquad (r = 2, 3, \ldots),$$

то последовательно интегрируя, легко убедиться в том, что старший коэффициент многочлена $B_r(t)$ равен единице:

$$B_r(t) = t^r + \sum_{\nu=0}^{r-1} \alpha_\nu t^\nu. \tag{57}$$

Отметим еще, что

$$\begin{aligned} &B_1^*(-t) = -B_1^*(t) \qquad (t \neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \\ &B_r^*(-t) = (-1)^r B_r^*(t) \qquad (|t| < \infty,\ r = 2,\ 3,\ \ldots). \end{aligned} \tag{58}$$

Виду (56) представление (55) запишем в виде

$$f(x) = -\frac{1}{r!}\int_0^1 B_r^*(x-t)\, f^{(r)}(t)\, dt. \tag{59}$$

Если $f \in \widetilde{W}^r L_p$, то $f^{(l)} \in \widetilde{W}_*^{r-l} L_p$ $(l = 1, 2, \ldots, r-1)$, а так как представление (59) справедливо для $f \in \widetilde{W}_*^r L_p$ при каждом $r = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, то для любой $f \in \widetilde{W}_*^r L_p$

$$f^{(l)}(x) = -\frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 B_{r-l}^*(x-t)\, f^{(r)}(t)\, dt \tag{60}$$

$$(l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1).$$

Подставив (60) в формулу (A), получим, учитывая (54), выражение для остатка функции $f \in \widetilde{W}_*^r L_p$:

$$R(f) = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} \frac{p_{kl}}{(r-l)!} B_{r-l}^*(x_k - t)\right] f^{(r)}(t)\, dt.$$

Это выражение нам будет удобно, с учетом (58), записать так:

$$R(f) = \frac{(-1)^r}{r!}\int_0^1 \widetilde{G}_r(t)\, f^{(r)}(t)\, dt, \tag{61}$$

где

$$\widetilde{G}_r(t) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} \frac{(-1)^l r!}{(r-l)!} p_{kl} B_{r-l}^*(t - x_k) + C_r, \tag{62}$$

а C_r — произвольная константа, не влияющая на значение $R(f)$, ибо $f^{(r)}(x)$ — производная периодической функции и потому

$$\int_0^1 f^{(r)}(x)\,dx=0.$$

Выберем константу C_r из условия минимума нормы $\|\widetilde{G}_r\|_{L_q}$, что при $1\leqslant q<\infty$ равносильно соотношению

$$\int_0^1 |\widetilde{G}_r(x)|^{q-1}\operatorname{sign}\widetilde{G}_r(x)\,dx=0,$$

а при $q=\infty$

$$\sup_x \widetilde{G}_r(x)=-\inf_x \widetilde{G}_r(x).$$

Для любой $f\in\widetilde{W}^r_*L_p$, применяя к интегралу в (61) неравенство Гёльдера или оценивая его по модулю, получим

$$|R(f)|\leqslant\frac{1}{r!}\|\widetilde{G}_r\|_{L_q}\qquad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right). \tag{63}$$

Эта оценка на классе $\widetilde{W}^r_*L_p$ точна. При $1<p\leqslant\infty$ знак равенства в (63) реализует функция $f_0\in\widetilde{W}^r_*L_p$ $(1<p\leqslant\infty)$, у которой

$$f_0^{(r)}(x)=\|\widetilde{G}_r\|^{1-q}|\widetilde{G}_r(x)|^{q-1}\operatorname{sign}G_r(x). \tag{64}$$

Здесь существенно, что в силу выбора C_r среднее значение $f_0^{(r)}$ на периоде равно нулю и потому функция f_0 равенствами (64) и (54) определена корректно и однозначно: $f_0(x)$ есть r-й периодический интеграл от $f_0^{(r)}$ со средним значением на периоде, равным нулю.

В случае $p=1$ $(q=\infty)$ для любого $\varepsilon>0$ можно построить функцию $f_\varepsilon\in\widetilde{W}^r_*L$, для которой

$$|R(f_\varepsilon)|>\frac{1}{r!}\|\widetilde{G}_r\|_{L_q}-\varepsilon. \tag{65}$$

Для этого надо определить $f_\varepsilon^{(r)}(x)$ равной нулю везде на периоде, кроме двух промежутков $(t_0,\ t_0+\delta)$ и и $(t_1,\ t_1+\delta)$, таких, что

$$\sup_x \widetilde{G}_r(x)=\sup_{t_0<x<t_0+\delta}\widetilde{G}_r(x)=$$
$$=-\inf_x\widetilde{G}_r(x)=-\inf_{t_1<x<t_1+\delta}\widetilde{G}_r(x).$$

На этих промежутках надо задать $f_\varepsilon^{(r)}(x)$ равной $1/2\delta$ и $-1/2\delta$ соответственно, причем число $\delta=\delta(\varepsilon)$ можно выбрать так, что будет выполнено (65).

Таким образом, для любой квадратурной формулы (A), точной для константы,

$$R[\widetilde{W}^r L_p] = R[\widetilde{W}_*^r L_p] = \frac{1}{r!}\|\widetilde{G}_r\|_{L_q} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right). \tag{66}$$

Теперь заметим, что если $f \in \widetilde{W}^r L_p$, то функция $f(x+\alpha)$, где α — любое число, также принадлежит этому классу. Поэтому сдвиг всей сетки узлов x_k на одну и ту же величину не меняет значения левой части (66), и мы можем считать, что в формуле (A) узел x_1 фиксирован: $x_1=0$, а произвольными остаются узлы $0<x_2<x_3<\ldots<x_m<1$.

Отметим некоторые свойства функции $\widetilde{G}_r(t)$, вытекающие из равенства (62) и свойств функций B_r^*:

1) $G_r(t)$ имеет период 1.

2) На каждом промежутке (x_i, x_{i+1}) $(i=1, 2, \ldots, m;$ $x_{m+1}=1)$ $\widetilde{G}_r(t)$ есть многочлен вида

$$Q_{ri}(t) = t^r + \sum_{\nu=0}^{r-1} \alpha_{i\nu} t^\nu.$$

В самом деле, на интервале $x_i < t < x_{i+1}$

$$B_{r-l}^*(t-x_k) = \begin{cases} B_{r-l}(t-x_k) & (1 \leqslant k \leqslant i), \\ B_{r-l}(t-x_k+1) & (i+1 \leqslant k \leqslant m) \end{cases} \tag{67}$$

и, следовательно, $\widetilde{G}_r(t)$, как линейная комбинация многочленов степени $r-l$ $(l=0, 1, \ldots, r-1)$, на (x_i, x_{i+1}) есть многочлен $Q_{ri}(t)$ степени r. Точность формулы (A) для константы равносильна соотношению

$$\sum_{k=1}^{m} p_{k0} = 1, \tag{68}$$

поэтому, записав $\widetilde{G}_r(t)$ в виде

$$\widetilde{G}_r(t) = \sum_{k=1}^{m} p_{k0} B_r^*(t-x_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{\rho} \frac{(-1)^l r!}{(r-l)!} p_{kl} B_{r-l}^*(t-x_k) + C_r$$

и учитывая (67) при $l=0$, (57) и (58), заключаем, что старший коэффициент многочлена $Q_{rl}(t)$ равен единице.

3) Если $\rho=r-1$, то $\tilde{G}(t)$ разрывна в каждом узле x_l, так как одна из входящих в сумму (62) функций, а именно $B_1^*(t-x_l)$, разрывна в точке x_l. При $\rho=r-2$ все функции $B_{r-l}^*(t-x_k)$ ($l=0, 1, \ldots, \rho$), а значит, и $\tilde{G}_r(t)$, непрерывны. Если же $\rho\leqslant r-3$, то $\tilde{G}_r(t)$ непрерывно дифференцируема на всей оси $r-\rho-2$ раза.

Пусть $\tilde{\mathscr{A}}^{\rho}_{mr}$ ($0\leqslant\rho\leqslant r-1$; $r=1, 2, \ldots$) — множество заданных на всей оси кусочно-полиномиальных функций $\varphi(t)$ периода 1 с узлами

$$0=x_1<x_2< \ldots <x_m<x_{m+1}=1 \qquad (69)$$

таких, что

$$\varphi(t)=t^r+\sum_{\nu=0}^{r-1}\alpha_{k\nu}t^{\nu} \quad (x_k\leqslant t<x_{k+1}, \quad k=1, 2, \ldots, m),$$

причем при $\rho=r-1$ $\varphi(t)$, вообще говоря, разрывны, а при $\rho\leqslant r-2$ непрерывны вместе с производными $(r-\rho-2)$-го порядка включительно. Из свойств 1)—3) функции $\tilde{G}_r$ следует, что $\tilde{G}_r\in\tilde{\mathscr{A}}^{\rho}_{mr}$, т. е. каждой квадратурной формуле (А) с фиксированным узлом $x_1=0$ однозначно соответствует некоторая функция $\varphi(t)=\tilde{G}_r(t)$ из множества $\tilde{\mathscr{A}}^{\rho}_{mr}$.

То, что каждой функции $\varphi\in\tilde{\mathscr{A}}^{\rho}_{mr}$ можно однозначно сопоставить заданную на классе $\tilde{W}^rL_p$ квадратурную формулу (А), точную для константы, доказывается так же, как аналогичный факт в непериодическом случае — интегрированием r раз по частям в интегралах

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(t)f^{(r)}(t)\,dt \qquad (k=1, 2, \ldots, m),$$

где $f\in\tilde{W}^rL_p$. Суммируя по k полученные результаты, надо в данном случае учесть, что в силу периодичности

$$\varphi^{(\nu)}(x_{m+1}-0)=\varphi^{(\nu)}(x_1-0), \quad f^{(\nu)}(x_{m+1})=f^{(\nu)}(x_1)$$
$$(\nu=0, 1, \ldots, r-1).$$

В результате придем к квадратурной формуле вида (А) с узлами (69), коэффициенты p_{kl} которой даются соотношениями (9), а остаток $R(f)$ — равенством (12). Точность полученной формулы для константы следует из того, что $R(1)=0$. Интересно заметить, что квадратурная формула, соответствующая функции $\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}^{\rho}_{mr}$, записывается в точности так же, как и формула (11), соответствующая $\varphi \in \mathscr{A}^{\rho}_{mr}$ в непериодическом случае. Таким образом, множество функций $\tilde{G}_r(t)$, определяемых точными для константы формулами (А) с узлами (69), совпадает с множеством $\tilde{\mathscr{A}}^{\rho}_{mr}$. Поэтому, ввиду (66),

$$\mathscr{E}^{\rho}_m[\tilde{W}^r L_p] = \frac{1}{r!} \inf_{\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}^{\rho}_{mr}} \|\varphi\|_{L_q} \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right). \tag{70}$$

Если $\rho = r-1$ $(r=1,2,\ldots)$ или $\rho=r-2$ $(r=2, 4, 6, \ldots)$, то, как и в непериодическом случае, переходя на каждом промежутке $x_k \leqslant t < x_{k+1}$ к многочленам, наименее уклоняющимся от нуля, а затем минимизируя норму $\|\varphi\|_{L_q}$ по узлам, получим следующий результат [28].

Теорема Д.5. *Среди всех квадратурных формул* (А) *при* $\rho=r-1$ $(r=1, 2, \ldots)$ *и* $\rho=r-2$ $(r=2,4,6,\ldots)$ *наилучшей для класса* $\tilde{W}^r L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *является формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{r!} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{[\rho/2]} \frac{R_{rq}^{(r-2l-1)}(1)}{(2m)^{2l+1}} f^{(2l)}\left(\frac{k-1}{m}\right) + R(f), \tag{71}$$

где $R_{rq}(t)$ — *тот же многочлен, что и в теореме* Д. 1. *При этом*

$$\mathscr{E}^{\rho}_m[\tilde{W}^r L_p] = \frac{R_{rq}(1)}{r! \sqrt[q]{rq+1}\,(2m)^r}.$$

В случае $\rho=r-2$, $r-3$ $(r=3, 5, 7, \ldots)$ решение задачи на классе $\tilde{W}^r L$ можно получить рассуждениями, аналогичными приведенным в п. 3. Имеет место [18].

Теорема Д. 6. *Экстремальная функция* φ_0, *удовлетворяющая соотношению*

$$\inf_{\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}^{r-2}_{mr}} \|\varphi\| = \inf_{\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}^{r-2}_{mr}} \max_t |\varphi(t)| = \|\varphi_0\| \quad (r=3, 5, 7, \ldots),$$

принадлежит множеству $\tilde{\mathscr{A}}_{mr}^{r-3}$ *и однозначно определяется следующими условиями:*

1) $\varphi_0(x_k)=0,\ \varphi_0'(x_k-0)=\varphi_0'(x_k+0)\quad (k=1, 2, \ldots, m)$;

2) *на каждом из промежутков* $x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}$ $\varphi_0(t)$ *есть многочлен Чебышева, наименее уклоняющийся от нуля в метрике* L_∞ *на отрезке* $[a_k-h,\ a_k+h]$, *содержащем* $[x_k,\ x_{k+1}]$, *и принимающий внутри интервала* $x_k < t < x_{k+1}$ $r-1$ *раз значения* $\pm\|\varphi_0\|$ *с чередующимся знаком.*

Доказательство теоремы Д.6 можно провести методом от противного, следуя рассуждениям, доказывающим леммы Д.1—Д.4, но с учетом периодичности. При этом можно считать, что точка x_k или промежуток (x_k, x_{k+1}), к которым относятся предположения той или иной леммы, лежат внутри интервала $(0, 1)$, ибо в силу периодичности вместо $(0, 1)$ можно рассматривать любой интервал (x_k, x_k+1) $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Из теоремы Д.6 следует, что экстремальная функция φ_0 имеет равноотстоящие узлы: $x_k=(k-1)/m$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, которые являются крайними нулями многочленов Чебышева, из которых она склеена. Вычисление производных этих многочленов в точках x_k позволяет по формулам (9) найти коэффициенты p_{kl}, и мы придем к такому результату [18]:

Теорема Д.7. *Среди всех квадратурных формул* (А) *при* $\rho=r-2$ *и* $\rho=r-3$ *наилучшей для класса* $\tilde{W}^rL$ *при* $r=3, 5, 7, \ldots$ *является формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx=$$

$$=\frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{\frac{r-3}{2}}\frac{T_r^{(r-2l-1)}\left(\cos\frac{\pi}{2r}\right)}{\left(2m\cos\frac{\pi}{2r}\right)^{2l+1}}f^{(2l)}\left(\frac{k-1}{m}\right)+R(f),\quad (72)$$

где $T_r(x)=2^{1-r}\cos(r\arccos x)$. *При этом*

$$\mathscr{E}_m^{\rho}\left[\tilde{W}^rL\right]=\frac{1}{2^{2r-1}r!\,m^r(\cos\pi/2r)^r}.$$

Отметим, что доказательства теорем Д.2 и Д.6 базировались на особенностях равномерной метрики L_∞

и свойствах многочленов $T_r(x)$, наименее уклоняющихся от нуля в этой метрике. Поэтому приведенные там рассуждения не могут быть непосредственно перенесены на случай $1 \leqslant q < \infty$. Используя ту же общую идею (выяснение характеристических свойств экстремальной функции), но с помощью рассуждений, существенно учитывающих особенности метрики L_2, Н. Е. Лушпай получил решение задачи о минимизации нормы $\|\varphi\|_{L_2}$ на множестве $\tilde{\mathscr{A}}^{\rho}_{mr}$ при $\rho = r-2$ и $\rho = r-3$ ($r = 3, 5, 7, \ldots$) [30], а также при $\rho = r-4$ ($r = 4, 6, 8, \ldots$) [33]. Это привело к точным результатам в соответствующих вариантах задачи о наилучшей квадратурной формуле (A) на классах $\tilde{W}^r L_2$. В частности, Н. Е. Лушпаем доказана следующая теорема [29, 30]:

Теорема Д.8. *Наилучшая на классе $\tilde{W}^r L_2$ квадратурная формула* (A) *при* $\rho = r-2$ и $\rho = r-3$ ($r = 3, 5, 7, \ldots$) *имеет вид*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{r!} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\frac{r-3}{2}} \frac{1}{(2m)^{2l+1}} \Big[l_r^{(r-2l-1)}(1) - \\ - \frac{2}{(2r-1)(r-1)} l_{r-1}^{(r-2l-1)}(1) \Big] f^{(2l)}\left(\frac{k-1}{m}\right) + R(f), \quad (73)$$

где $l_r(t)$ — многочлен Лежандра степени r. При этом

$$\mathscr{E}^{\rho}_m \left[\tilde{W}^r L_2\right] = \frac{r!}{(2r)!} \sqrt{\frac{(r+1)(r+2)}{r(r-1)(2r+1)}} \, \frac{1}{m^r}.$$

Примечание 1. В силу периодичности наилучшие квадратурные формулы в теоремах Д.5, Д.7 и Д.8 единственны только с точностью до жесткого сдвига всех узлов x_k на одну и ту же величину, не влияющего на значение $\mathscr{E}^{\rho}_m \left[\tilde{W}^r L_p\right]$.

Примечание 2. Легко проверить, что квадратурные формулы (71)—(73) в силу равномерного распределения узлов точны для тригонометрических полиномов порядка $\leqslant m-1$ (см., [21], стр. 161).

6. О квадратурных формулах, не содержащих значений производных. В практике приближенного интегрирования наиболее употребительны квадратурные формулы, в которые входят значения в узлах только самой функции f:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k) + R(f), \tag{74}$$

т. е. формулы вида (А) при $\rho = 0$. Решение одной из экстремальных задач для формулы (74) изложено в § 10.

В общем случае задача о наилучшей квадратурной формуле вида (74) для классов $W^r L_p$ и $\widetilde{W}^r L_p$ сводится, как это видно из (13) и (70), к минимизации нормы $\|\varphi\|_{L_q}$ на множествах $\overset{0}{\mathscr{A}}_{mr}$, соответственно $\overset{0}{\widetilde{\mathscr{A}}}_{mr}$, кусочно-полиномиальных функций $\varphi(t)$, непрерывных вместе с $(r-2)$-й производной. Некоторые окончательные результаты для малых значений r содержатся уже в доказанных выше теоремах. Так, теоремы Д.1 и Д.5 дают наилучшие квадратурные формулы вида (74) для классов $W^r L_p$ и $\widetilde{W}^r L_p$ при $r = 1$ и $r = 2$, теоремы Д.3, Д.7 и Д.8 — для классов $W^3 L$, $\widetilde{W}^3 L$ и $\widetilde{W}^3 L_2$.

В частности, из теорем Д.5, Д.7 и Д.8 следует, что для классов $\widetilde{W}^r L_p$ при $r = 1$ и $r = 2$, а также для классов $\widetilde{W}^3 L$ и $\widetilde{W}^3 L_2$ наилучшая квадратурная формула (74) имеет вид

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{k-1}{m}\right) + R(f);$$

при этом

$$\mathscr{E}_m^0[\widetilde{W}^1 L_p] = \frac{1}{2\sqrt[q]{q+1}\; m}; \qquad \mathscr{E}_m^0[\widetilde{W}^2 L_p] = \frac{1}{8\sqrt[q]{2q+1}\; m^2};$$

$$\mathscr{E}_m^0[\widetilde{W}^3 L] = \frac{1}{72\sqrt{3}\; m^3}; \qquad \mathscr{E}_m^0[\widetilde{W}^3 L_2] = \frac{1}{12\sqrt{210}\; m^3}.$$

Оптимальная формула (74) для класса $W^1 L_p$ записывается в виде ([21], стр. 216)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{2k-1}{2m}\right) + R(f),$$

причем

$$\mathscr{E}^0_m[W^1L_p] = \frac{1}{2\sqrt[q]{q+1}\,m}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

Узлы x^*_k и коэффициенты p^*_k наилучшей для класса W^2L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ квадратурной формулы (74), а также ее максимальная погрешность определяются равенствами:

$$x^*_k = \frac{2(k-1)+\sqrt{R_{2q}(1)}}{2\left[m-1+\sqrt{R_{2q}(1)}\right]} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m);$$

$$p^*_1 = p^*_m = \frac{1+\sqrt{R_{2q}(1)}}{2\left[m-1+\sqrt{R_{2q}(1)}\right]},$$

$$p^*_k = \frac{1}{m-1+\sqrt{R_{2q}(1)}} \qquad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ m-1);$$

$$\mathscr{E}^0_m[W^2L_p] = \frac{R_{2q}(1)}{8\sqrt[q]{2q+1}\left[m-1+\sqrt{R_{2q}(1)}\right]^2}.$$

Отметим к этому, что

$$R_{21}(1) = {}^3/_4, \quad R_{22}(1) = {}^2/_3, \quad R_{2\infty}(1) = {}^1/_2.$$

Ряд точных результатов по оптимизации квадратурной формулы (74), полученных иным путем, будет приведен в § 2 Добавления.

7. Некоторые двумерные аналоги. В заключение этого параграфа отметим некоторые результаты по оптимизации двумерных квадратур, полученные по той же схеме —сведéнием к задаче минимизации нормы сплайн-функции, в данном случае — двух переменных.

Рассмотрим квадратурную (кубатурную) формулу

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{\rho}\sum_{j=0}^{\mu} p^{(lj)}_{ki} f^{(l+j)}(x_k,\ y_i) + R(f), \tag{75}$$

где $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqslant 1$, $0 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_n \leqslant 1$, $p_{ki}^{(lj)}$ — числовые коэффициенты и

$$f^{(l+j)}(x, y) = \frac{\partial^{(l+j)} f}{\partial x^l \, dy^j}, \quad f^{(0+j)} = \frac{\partial^j f}{\partial y^j},$$

$$f^{(l+0)} = \frac{\partial^l f}{\partial x^l}, \quad f^{(0+0)} = f.$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс заданных на квадрате $Q = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ функций $f(x, y)$, для которых формула (75) имеет смысл, то, как и в одномерном случае, задача состоит в отыскании величины

$$\mathscr{E}_{mn}^{\rho\mu}[\mathfrak{M}] = \inf_{x_k,\, y_i;\, p_{ki}^{(lj)}} R[\mathfrak{M}], \tag{76}$$

где

$$R[\mathfrak{M}] = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |R(f)|,$$

и в указании узлов $(\bar{x}_k, \bar{y}_i)$ и коэффициентов $\bar{p}_{ki}^{(lj)}$, реализующих в (76) точную нижнюю грань.

Пусть $W^{rs}L_p(Q)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — класс заданных на квадрате Q функций $f(x, y)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $$\| f^{(r+s)}(x, y) \|_{L_p(Q)} = \left(\int_0^1 \int_0^1 | f^{(r+s)}(x, y) |^p \, dx \, dy \right)^{1/p} \leqslant 1,$$

2) $\| f^{(r+j)}(x, 0) \|_{L_p(Q)} \leqslant 1 \quad (j = 0, 1, \ldots, s-1)$,

3) $\| f^{(l+s)}(0, y) \|_{L_p(Q)} \leqslant 1 \quad (l = 0, 1, \ldots, r-1)$,

в предположении, что выписанные частные производные существуют и кусочно-непрерывны. (Можно было бы это определение несколько расширить, вводя, как и в одномерном случае, понятие абсолютно непрерывной функции.)

Через $W_0^{rs}L_p(Q)$ будем еще обозначать множество функций $f \in W^{rs}L_p(Q)$, удовлетворяющих условию 1) и таких, что

$$f^{(l+0)}(0, y) \equiv f^{(0+j)}(x, 0) \equiv 0$$
$$(l = 0, 1, \ldots, r-1;\ j = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Так как класс $W^{rs}L_p(Q)$ содержит любой многочлен степени $r-1$ по x и степени $s-1$ по y, то при вычислении верхней грани остатка $R(f)$ на этом классе можно считать, что квадратурная формула (75) точна для всех таких многочленов. При этом предположении, используя формулу Тейлора, остаток $R(f)$ для $f \in W^{rs}L_p(Q)$ можно представить в виде

$$R(f) = \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{(j+1)!} \int_0^1 g_{rj}(u)\, f^{(r+j)}(u,\ 0)\, du + \\ + \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{l=0}^{r-1} \frac{1}{(l+1)!} \int_0^1 g_{sl}(v)\, f^{(l+s)}(0,\ v)\, dv + \\ + \frac{(-1)^{r+s}}{r!\, s!} \int_0^1 \int_0^1 G_{rs}(u,\ v)\, f^{(r+s)}(u,\ v)\, du\, dv. \qquad (77)$$

Здесь $g_{rj}(u)$ и $g_{sl}(v)$ — одномерные сплайн-функции (типа функции $G_r(t)$ в (1)) с узлами соответственно в точках x_k и y_i, гладкость которых определяется значениями ρ и μ. Отметим, что коэффициенты многочленов, из которых «склеены» g_{rj} и g_{sl}, зависят соответственно от j и l. Что касается $G_{rs}(u, v)$, то эта функция на каждом из прямоугольников $\{x_k < x \leqslant x_{k+1},\ y_i < y \leqslant y_{i+1}\}$ совпадает с некоторым многочленом $P_{rs}(u, v)$ степени r по u и степени s по v, начинающимся с члена $u^r v^s$.

Оценивая каждый из интервалов в правой части (77) с помощью обычных в таких случаях неравенств и учитывая условия 1)—3), задающие класс $W^{rs}L_p(Q)$, придем к соотношению

$$R[W^{rs}L_p(Q)] = \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{(j+1)!} \| g_{rj} \|_{L_q} + \\ + \frac{1}{s!} \sum_{l=0}^{r-1} \frac{1}{(l+1)!} \| g_{sl} \|_{L_q} + \frac{1}{r!\, s!} \| G_{rs} \|_{L_q(Q)} \qquad (78)$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Если $f \in \overset{\circ}{W}{}^{rs}_0 L_p(Q)$, то в представлении (77) все слагаемые, кроме последнего, равны нулю и потому

$$R\left[W_0^{rs} L_p(Q)\right] = \frac{1}{r!\,s!} \| G_{rs} \|_{L_q(Q)}. \tag{79}$$

Таким образом, вычисление величин $\mathscr{E}_{mn}^{\rho\mu}\left[W^{rs} L_p(Q)\right]$ и $\mathscr{E}_{mn}^{\rho\mu}\left[W_0^{rs} L_p(Q)\right]$ сводится к отысканию минимума по узлам и коэффициентам правых частей (78) и (79). Точное решение здесь получено лишь при $p = q = 2$ в случае $\rho = r - 1$, $\mu = s - 1$ $(r, s = 1, 2, \ldots)$ и $\rho = r - 2$, $\mu = s - 2$ $(r, s = 2, 4, 6, \ldots)$. Это как раз те случаи, когда, минимизируя норму сплайнов по коэффициентам при фиксированных узлах, мы можем, не загрубляя оценки, перейти, как в аналогичном случае в одномерном варианте, к многочленам, наименее уклоняющимся от нуля. Укажем некоторые результаты, полученные в этом направлении.

М. Левин [22] в 1963 г. нашел, что для класса $W_0^{11} L_2(Q)$ наилучшая квадратурная формула (75) при $\rho = \mu = 0$ определяется узлами $\bar{x}_k = 2k/(2m + 1)$ $\bar{y}_l = 2l/(2n + 1)$ и коэффициентами $\bar{p}_{kl}^{(00)} = \frac{4}{(2m + 1)(2n + 1)}$, причем

$$\mathscr{E}_{mn}^{00}\left[W_0^{11} L_2(Q)\right] = \frac{\sqrt{4(m^2 + n^2 + m + n) + 1}}{3(2m + 1)(2n + 1)}.$$

В работе Э. М. Шаца [38] получена наилучшая квадратурная формула (75) с $\rho = r - 2$, $\mu = s - 2$ для классов $W_0^{rs} L_2(Q)$ при r и s четных.

На классах $W^{rs} L_q(Q)$ получено несколько точных результатов при фиксированных узлах на сторонах квадрата Q. Рассматривая формулу (75) с $\rho = \mu = 0$, коэффициентами вида

$$p_{kl}^{(00)} = a_k b_l, \qquad \sum_{k=0}^{m} a_k = \sum_{l=0}^{n} b_l = 1$$

и решеткой узлов (x_k, y_l), где

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1, \; 0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 1. \tag{79'}$$

И. И. Ибрагимов и Р. М. Алиев в 1967 г. доказали [13], что для класса $W^{11} L_2(Q)$ оптимальными являются узлы $(k/m,\ i/n)$ и коэффициенты $\bar{a}_k\bar{b}_i$, где $\bar{a}_0=\bar{a}_m=1/2m$, $\bar{a}_k=1/m$ $(k=1, 2, \ldots, m-1)$, $\bar{b}_0=\bar{b}_n=1/2n$, $\bar{b}_i=1/n$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, причем

$$\mathscr{E}_{mn}^{(00)}\left[W^{11}L_2(Q)\right]=\frac{1}{2m\sqrt{3}}+\frac{1}{2n\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{4m^2+4n^2+1}}{12mn}.$$

При $\rho=\mu=0$ и узлах (79′), но при иных ограничениях на коэффициенты $p_{kl}^{(00)}$, Г. Коман получил соответствующий результат [15] для класса $W^{rs}L_2(Q)$, где r и s принимают значения 1 или 2.

Более общие результаты содержатся в работах Г. Комана и Г. Микулы [40], а также Н. Е. Лушпая [31]. В статье [31] рассматривается квадратурная формула

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)\,dx\,dy=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{\rho_k}\sum_{j=0}^{\mu_i}p_{ki}^{(l)}f^{(l+j)}(x_k,\ y_i)+R(f) \tag{80}$$

с решеткой узлов (79′). Среди формул вида (80), где $\rho_k=\rho=r-1$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ при $r=1, 2, 3, \ldots$ или $\rho_0=\rho_m=r-1$, $\rho_k=\rho=r-2$ $(k=1, 2, \ldots, m-1)$ при $r=2, 4, 6, \ldots$, а также $\mu_i=\mu=s-1$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ при $s=1, 2, 3, \ldots$, или $\mu_0=\mu_n=s-1$, $\mu_i=\mu=s-2$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ при $s=2, 4, 6, \ldots$, наилучшей для класса $W^{rs}L_2(Q)$ является квадратурная формула

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{r!\,s!}\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{2^{-(j+l+2)}}{m^{l+1}n^{j+1}}\,l_r^{(r-l-1)}(1)\,l_s^{(s-j-1)}(1)\times$$

$$\times\left[f^{(l+j)}(0,\ 0)+(-1)^{l+j}f^{(l+j)}(1,\ 1)\right]+$$

$$+\frac{1}{r!\,s!}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{[\rho/2]}\sum_{j=0}^{[\mu/2]}\frac{2^{-2\,(l+j)}}{m^{2l+1}n^{2j+1}}\times$$

$$\times l_r^{(r-2l-1)}(1)\,l_s^{(s-2j-1)}(1)\,f^{(2l+2j)}\left(\frac{k}{m},\ \frac{i}{n}\right)+R(f). \tag{81}$$

Здесь $l_r(t)$ — многочлен Лежандра.

Погрешность этой формулы на классах $W^{rs}L_2(Q)$ в точности равна

$$\frac{1}{r!}\frac{l_r(1)}{\sqrt{2r+1}}\frac{1}{(2m)^r}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{1}{(j+1)!}+$$

$$+\frac{1}{s!}\frac{l_s(1)}{\sqrt{2s+1}}\frac{1}{(2n)^s}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{1}{(l+1)!}+\frac{1}{r!\,s!\,\sqrt{(2r+1)(2s+1)}}\times$$

$$\times\left\{\frac{[l_r(1)]^2}{(2m)^{2r}}+\frac{[l_s(1)]^2}{(2n)^{2s}}-\frac{[l_r(1)\cdot l_s(1)]^2}{(2m)^{2r}(2n)^{2s}}\right\}^{1/2}.$$

§ Д.2. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ ПУТЕМ ОЦЕНКИ ОСТАТКА НА ФУНКЦИЯХ, ОБРАЩАЮЩИХ В НУЛЬ КВАДРАТУРНУЮ СУММУ

1. Некоторые соображения общего характера. Будем рассматривать задачу об отыскании наилучшей для класса $\mathfrak{M}$ квадратурной формулы вида

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{m}p_kf(x_k)+R(f), \tag{1}$$

задаваемой вектором $(X,\ P)$ узлов x_k,

$$a\leqslant x_1<x_2<\ \dots\ <x_m\leqslant b$$

и коэффициентов p_k. (Это частный случай формулы (А) при $\rho=0$.) Ясно, что $R(f)=R(f;X,P)$. Полагаем

$$R[\mathfrak{M}]=R[\mathfrak{M};\ X,\ P]=\sup_{f\in\mathfrak{M}}|R(f;\ X,\ P)|,$$

$$\mathcal{E}_m[\mathfrak{M}]=\inf_{(X,\ P)}R[\mathfrak{M};\ X,\ P].$$

Оценку снизу для величины $\mathcal{E}_m[\mathfrak{M}]$, причем в ряде случаев, как мы увидим ниже, неулучшаемую, можно получить с помощью следующих простых соображений общего характера. При каждом фиксированном векторе узлов $X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ через $\mathfrak{M}_X$ обозначим множество функций $f\in\mathfrak{M}$ таких, что $f(x_k)=0$ $(k=$

$= 1, 2, \ldots, m$). Если $f \in \mathfrak{M}_X$, то $R(f)$ не зависит от p_k и

$$R(f) = R(f;\ X) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

В силу включения $\mathfrak{M}_X \subset \mathfrak{M}$ для каждого вектора (X, P)

$$R[\mathfrak{M}_X] = \sup_{f \in \mathfrak{M}_X} |R(f)| \leqslant R[\mathfrak{M};\ X,\ P] \tag{2}$$

и, следовательно,

$$\mathscr{E}_m\,]\mathfrak{M}] \geqslant \inf_X R[\mathfrak{M}_X] = \inf_X \sup_{f \in \mathfrak{M}_X} \int_a^b f(x)\, dx. \tag{3}$$

В (3) заведомо будет знак равенства, если при любом векторе (X, P) равенство осуществляется в (2), а последнее будет, в частности, иметь место, если экстремальная в классе $\mathfrak{M}$ функция принадлежит множеству $\mathfrak{M}_X$. Можно заранее предположить, что проверка этого факта окажется далеко не всегда легко выполнимой задачей, и мы, в общем случае, должны довольствоваться тем, что имеем в неравенстве (3) некоторую оценку снизу для $\mathscr{E}_m[\mathfrak{M}]$.

Более обнадеживающая ситуация возникает, если у нас есть соображения, позволяющие относительно некоторого вектора (X^0, P^0) предполагать, что именно он определяет наилучшую для класса $\mathfrak{M}$ квадратурную формулу, т. е. что $R[\mathfrak{M}; X^0, P^0] = \mathscr{E}_m[\mathfrak{M}]$. Если нам удастся установить, что для любого вектора узлов X

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}_X} \int_a^b f(x)\, dx \geqslant R[\mathfrak{M};\ X^0,\ P^0],$$

или, что то же самое, доказать, что для каждого X существует функция $f_X \in \mathfrak{M}_X$ такая, что

$$\int_a^b f_X(x)\, dx \geqslant R[\mathfrak{M};\ X^0,\ P^0],$$

то гипотеза относительно оптимальности вектора (X^0, P^0) подтвердится и задача будет решена.

Очевидно, что изложенные соображения применимы и в многомерном случае. Они применимы также для квадратурных формул вида (А), содержащих значения в узлах производных функции f, если в качестве $\mathfrak{M}_X$ взять множество функций $f \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$f(x_k) = f'(x_k) = \ldots = f^{(\rho)}(x_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Ниже мы рассмотрим применение описанного здесь метода к решению задач по оптимизации квадратурных формул для некоторых классов функций.

2. Оптимальные квадратурные формулы для классов, задаваемых модулем непрерывности. Ограничиваясь двумерным случаем (хотя все рассуждения этого пункта тривиальным образом переносятся на случай функций любого конечного числа переменных), рассмотрим для функции $f(x, y)$, заданных на прямоугольнике

$$D = \{a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d\},$$

квадратурную формулу

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ki} f(x_k, y_i) + R(f), \tag{4}$$

определяемую вектором $(X, Y; P)$ узлов

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqslant b, \quad c \leqslant y_1 < y_2 < \ldots < y_n \leqslant d$$

и коэффициентов p_{ki}. Для краткости точки прямоугольника D будем иногда обозначать через M ($M = M(x, y)$), а узлы — M_{ki} ($M_{ki} = M(x_k, y_i)$). Положим

$$\mathcal{E}_{mn}[\mathfrak{M}] = \inf_{(X, Y; P)} R[\mathfrak{M}; X, Y; P] = \inf_{M_{ki}, p_{ki}} \sup_{f \in \mathfrak{M}} |R(f)|,$$

где $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций $f(x, y)$.

Обозначим через $H^{\omega_1, \omega_2}(D)$ класс определенных на D функций $f(x, y)$ таких, что для любых точек (x', y') и (x'', y'') из D

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \leqslant \omega_1(|x' - x''|) + \omega_2(|y' - y''|), \tag{5}$$

где $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$ — заданные модули непрерывности (§ 2), т. е. непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$0 \leqslant \omega_1(\delta'') - \omega_1(\delta') \leqslant \omega_1(\delta'' - \delta')$$
$$(0 \leqslant \delta' \leqslant \delta'' \leqslant b - a), \quad \omega_1(0) = 0;$$
$$0 \leqslant \omega_2(\delta'') - \omega_2(\delta') \leqslant \omega_2(\delta'' - \delta')$$
$$(0 \leqslant \delta' \leqslant \delta'' \leqslant d - c), \quad \omega_2(0) = 0.$$

Легко проверить, что неравенство (5) эквивалентно системе неравенств

$$|f(x', y) - f(x'', y)| \leqslant \omega_1(|x' - x''|) \qquad (c \leqslant y \leqslant d),$$
$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leqslant \omega_2(|y' - y''|) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Параллельно будем рассматривать класс $H^{\omega}(D)$ функций $f(x, y)$, заданных на D и таких, что

$$|f(M') - f(M'')| \leqslant \omega[\rho(M', M'')],$$

где $\rho(M', M'')$ — расстояние между точками $M'(x', y')$ и $M''(x'', y'')$, т. е. $\rho(M', M'') = \sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2}$, а $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности.

Теорема Д.10 [17]. *Среди квадратурных формул* (4) *наилучшей для классов* $H^{\omega_1, \omega_2}(D)$ *и* $H^{\omega}(D)$ *является формула*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy =$$
$$= 4hq \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f[a + (2k-1)h,\ c + (2i-1)q] + R(f), \qquad (6)$$

где $h = \dfrac{b-a}{2m}$, $q = \dfrac{d-c}{2n}$. *При этом*

$$\mathscr{E}_{mn}[H^{\omega_1, \omega_2}(D)] = 4mn\left[q\int_0^h \omega_1(t)\, dt + h\int_0^q \omega_2(t)\, dt\right]; \qquad (7)$$

$$\mathscr{E}_{mn}[H^{\omega}(D)] = 4mn \int_0^q \int_0^h \omega\left(\sqrt{t^2 + \tau^2}\right) dt\, d\tau. \qquad (8)$$

Доказательство теоремы Д.10 будет базироваться на двух довольно простых леммах.

Лемма Д.5. *Пусть в области* D (*двумерного или, вообще, конечномерного пространства*) *фиксирована* *произвольная система точек* $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ *и функция* $g(M)$ *определена равенством*

$$g(M) = \min_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \varphi[\rho(M, M_j)] \qquad (M \in D),$$

где $\varphi(t)$ — *неубывающая и полуаддитивная, т. е. удовлетворяющая соотношениям*

$$0 \leqslant \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leqslant \varphi(t_2 - t_1) \qquad (0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \theta) \quad (9)$$

(θ — *диаметр области* D) *функция, а* $\rho(M, M_j)$ — *расстояние между точками* M *и* M_j. *Тогда для любых точек* M' *и* M'' *из* D

$$|g(M') - g(M'')| \leqslant \varphi[\rho(M', M'')].$$

Действительно, считая для определенности, что $g(M') \geqslant g(M'') = \varphi[\rho(M'', M_k)]$, с учетом (9) будем иметь

$$|g(M') - g(M'')| = \min_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \varphi[\rho(M', M_j)] - \varphi[\rho(M'', M_k)] \leqslant$$
$$\leqslant \varphi[\rho(M', M_k)] - \varphi[\rho(M'', M_k)] \leqslant$$
$$\leqslant \varphi[\rho(M', M_k) - \rho(M'', M_k)] \leqslant \varphi[\rho(M', M'')].$$

Лемма Д.6. *Пусть* $\varphi(u)$ — *неубывающая для* $0 \leqslant u \leqslant b - a$ *функция. При фиксированном* $m = 1, 2, \ldots$ *каждому вектору* $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ $(a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leqslant b)$ *сопоставим функцию*

$$g(T; t) = \min_{1 \leqslant k \leqslant m} \varphi(|t - t_k|) + C \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

где C — *некоторая постоянная. Тогда, если* $T_0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0)$, *где* $t_k^0 = a + \frac{2k-1}{m} h$, $h = \frac{b-a}{2m}$, *то для любого вектора* T

$$\int_a^b g(T; t)\, dt \geqslant \int_a^b g(T_0; t)\, dt.$$

Доказательство. Если положить $z_0 = a$, $z_k = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$, $z_m = b$, то в силу монотонности φ

$$g(T; t) = \varphi(|t - t_k|) \quad (z_{k-1} \leqslant t \leqslant z_k,\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

Поэтому

$$\int_a^b g(T;\ t)\,dt=\sum_{k=1}^{m}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\varphi(|t-t_k|)\,dt=\sum_{\nu=1}^{2m}\int_0^{\alpha_\nu}\varphi(u)\,du,$$

где $\alpha_1=t_1-z_0$, $\alpha_2=z_1-t_1$, $\alpha_3=t_2-z_1$, ..., $\alpha_{2m}=$ $=z_m-t_m$. Теперь имеем

$$\int_a^b [g(T;\ t)-g(T_0;\ t)]\,dt=\sum_{\nu=1}^{2m}\left(\int_0^{\alpha_\nu}\varphi(u)\,du-\int_0^{h}\varphi(u)\,du\right)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{2m}\int_h^{\alpha_\nu}\varphi(u)\,du=\sum\nolimits_1\int_h^{\alpha'_\nu}\varphi(u)\,du-\sum\nolimits_2\int_{\alpha''_\nu}^{h}\varphi(u)\,du,$$

причем в сумму $\sum_1$ вошли те интегралы, у которых $\alpha_\nu=\alpha'_\nu\geqslant h$, а в сумму $\sum_2$ — те, у которых $\alpha_\nu=\alpha''_\nu<h$. Но так как $\varphi(u)$ не убывает, то

$$\int_h^{\alpha'_\nu}\varphi(u)\,du\geqslant\varphi(h)(\alpha'_\nu-h),\quad \int_{\alpha''_\nu}^{h}\varphi(u)\,du\leqslant\varphi(h)(h-\alpha''_\nu).$$

Поэтому

$$\int_a^b [g(T;\ t)-g(T_0;\ t)]\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\varphi(h)\left[\sum\nolimits_1(\alpha'_\nu-h)-\sum\nolimits_2(h-\alpha''_\nu)\right]=\varphi(h)\left(\sum_{\nu=1}^{2m}\alpha_\nu-2mh\right)=0.$$

Следуя идее п. 1 этого параграфа, каждому вектору (X, Y), задающему решетку узлов $M_{ki}=M(x_k,\ y_i)$, сопоставим множество $H_{X,Y}^{\omega_1,\omega_2}(D)$ функций $f\in H^{\omega_1,\omega_2}(D)$ таких, что $f(M_{ki})=0$ $(k=1, 2, \ldots, m;\ i=1, 2, \ldots, n)$. Фиксируем произвольный вектор (X, Y). Если $f\in$ $\in H_{X,Y}^{\omega_1,\omega_2}(D)$, то для любой точки $M(x, y)\in D$ и любого узла M_{ki} будем иметь

$$|f(M)|=|f(M)-f(M_{ki})|\leqslant\omega_1(|x-x_k|)+\omega_2(|y-y_i|)$$

и, следовательно,

$$|f(M)|\leqslant\min_{x_k,\ y_i}\{\omega_1(|x-x_k|)+\omega_2(|y-y_i|)\}\equiv\psi(M). \quad (10)$$

Функцию $\psi(M)=\psi_{X,Y}(M)$, определенную последним равенством, в силу решетчатого расположения узлов, а также монотонности $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$, можно записать
$$\psi(M)=\psi_{X,Y}(x,\ y)=\omega_1(\min_k|x-x_k|)+\omega_2(\min_i|y-y_i|).$$

При любом $y\in[c,\ d]$, применяя лемму Д.5 в одномерном варианте, получим
$$|\psi(x',\ y)-\psi(x'',\ y)|=$$
$$=|\omega_1(\min_k|x'-x_k|)-\omega_1(\min_k|x''-x_k|)|\leqslant\omega_1(|x'-x''|),$$

и, аналогично, для всех $x\in[a,\ b]$
$$|\psi(x,\ y')-\psi(x,\ y'')|\leqslant\omega_2(|y'-y''|).$$

Так как, кроме того, $\psi(M_{ki})=0$, то $\psi\in H^{\omega_1,\omega_2}_{X,Y}(D)$. Это, с учетом (10), приводит к соотношению
$$\sup_{f\in H^{\omega_1,\omega_2}_{X,Y}(D)}|R(f;\ X,\ Y)|=\sup_{f\in H^{\omega_1,\omega_2}_{X,Y}(D)}\left|\iint_D f\,dx\,dy\right|=$$
$$=\iint_D \psi_{X,Y}(x,\ y)\,dx\,dy=R(\psi_{X,Y}). \qquad (11)$$

Докажем, что $R(\psi_{X,Y})\geqslant R(\psi_{X^0,Y^0})$, где $(X^0,\ Y^0)$ — вектор, задаваемый равенствами
$$\left.\begin{aligned} &x_k^0=a+(2k-1)h\quad (k=1,2,\ldots,m),\ h=\frac{b-a}{2m};\\ &y_i^0=c+(2i-1)q\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\ q=\frac{d-c}{2n}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Фиксируем $(X,\ Y)$. При каждом y, $c\leqslant y\leqslant d$, функция
$$g(X;x)=\psi_{X,Y}(x,y)=\min_k\omega_1(|x-x_k|)+\min_i\omega_2(|y-y_i|)$$

удовлетворяет условиям леммы Д.6, поэтому
$$\int_a^b \psi_{X,Y}(x,\ y)\,dx\geqslant\int_a^b \psi_{X^0,Y}(x,\ y)\,dx \qquad (c\leqslant y\leqslant d),$$

и, значит, $R(\psi_{X,Y})\geqslant R(\psi_{X^0,Y})$. Аналогично, с помощью леммы Д.6 доказывается, что $R(\psi_{X^0,Y})\geqslant R(\psi_{X^0,Y^0})$.

Таким образом, учитывая (11) и рассуждения п. 1, получаем

$$\mathscr{E}_{mn}[H^{\omega_1,\omega_2}(D)] \geqslant \inf_{X,Y} R(\psi_{X,Y}) =$$

$$= R(\psi_{X^0,Y^0}) = \iint_D \psi_{X^0,Y^0}(x, y)\,dx\,dy. \qquad (13)$$

Рассмотрим квадратурную формулу (6), заданную вектором (X^0, Y^0, P^0) узлов (12) и коэффициентов $p_{ki}^0 = 4hg$. Ясно, что p_{ki}^0 есть площадь прямоугольника

$$d_{ki}^0 = \{a + 2(k-1)h < x < a + 2kh;$$

$$c + 2(i-1)q < y < c + 2iq\}$$

с центром в узле $M(x_k^0, y_i^0)$. Поэтому для $f \in H^{\omega_1,\omega_2}(D)$

$$|R(f;\ X^0,\ Y^0;\ P^0)| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \iint_{d_{ki}^0} [f(x, y) - f(x_k^0, y_i^0)]\,dx\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \iint_{d_{ki}^0} [\omega_1(|x - x_k^0|) + \omega_2(|y - y_i^0|)]\,dx\,dy. \qquad (14)$$

Но если $(x, y) \in d_{ki}^0$, то

$$\omega_1(|x - x_k^0|) =$$

$$= \min_{1 \leqslant \nu \leqslant m} \omega_1(|x - x_\nu^0|),\quad \omega_2(|y - y_i^0|) = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \omega_2(|y - y_j^0|).$$

Подставляя в (14), находим, что

$$|R(f;\ X^0,\ Y^0;\ P^0)| \leqslant \iint_D \psi_{X^0,Y^0}(x, y)\,dx\,dy = R(\psi_{X^0,Y^0}).$$

Так как это справедливо для любой $f \in H^{\omega_1,\omega_2}(D)$, то

$$R[H^{\omega_1,\omega_2}(D);\ X^0,\ Y^0;\ P^0] = R(\psi_{X^0,Y^0}), \qquad (15)$$

и, значит,

$$\mathscr{E}_{mn}[H^{\omega_1,\omega_2}(D)] \leqslant R(\psi_{X^0,Y^0}). \qquad (16)$$

Сравнение (13), (15) и (16) приводит к равенствам

$$\mathcal{E}_{mn}\left[H^{\omega_1, \omega_2}(D)\right] = R\left[H^{\omega_1, \omega_2}(D);\ X^0,\ Y^0;\ P^0\right] =$$

$$= R\left(\psi_{X^0, Y^0}\right) = \iint\limits_D \psi_{X^0, Y^0}(x,\ y)\,dx\,dy =$$

$$= 4mn \int\limits_0^q \left\{ \int\limits_0^h [\omega_1(x) + \omega_2(y)]\,dx \right\} dy,$$

что дает утверждение теоремы Д.9 для класса $H^{\omega_1, \omega_2}(D)$. Если, в частности, $\omega_1(\delta) = K_1\delta^{\alpha_1}$, $\omega_2(\delta) = K_2\delta^{\alpha_2}$ $(0 < \alpha_1,\ \alpha_2 \leqslant 1)$, то правая часть (7) равна

$$(b-a)(d-c)\left(\frac{K_1}{\alpha_1+1}\,h^{\alpha_1} + \frac{K_2}{\alpha_2+1}\,q^{\alpha_2}\right).$$

Для класса $H^{\omega}(D)$ доказательство проводится по той же схеме. Пусть $H^{\omega}_{X, Y}(D)$ — множество функций $f \in H^{\omega}(D)$, обращающихся в нуль в узлах M_{kl} решетки, задаваемой вектором (X, Y). Если $f \in H^{\omega}_{X, Y}(D)$, то

$$f(M) \leqslant \min_{M_{kl}} \omega\left[\rho(M,\ M_{kl})\right] \equiv \eta(M) = \eta_{X, Y}(x,\ y),$$

причем в силу леммы Д.5 $\eta_{X, Y} \in H^{\omega}_{X, Y}(D)$ и

$$\eta_{X, Y}(x,\ y) = \min_{x_k,\ y_l} \omega\left(\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_l)^2}\right) =$$

$$= \omega\left(\sqrt{\min_k (x-x_k)^2 + \min_l (y-y_l)^2}\right).$$

Таким образом,

$$R\left[H^{\omega}_{X, Y}(D);\ X,\ Y\right] = \iint\limits_D \eta_{X, Y}(x,\ y)\,dx\,dy = R\left(\eta_{X, Y}\right).$$

Если фиксировать произвольный вектор $(X,\ Y)$, то при любом $y \in [c,\ d]$ функция

$$g(X;\ x) = \eta_{X, Y}(x,\ y) = \min_k \omega\left(\sqrt{(x-x_k)^2 + \gamma}\right),$$

где $\gamma = \min_i (y - y_i)^2$, удовлетворяет условиям леммы Д.6, применение которой приводит к неравенству

$$R(\eta_{X,Y}) = \int_c^d dy \int_a^b \eta_{X,Y}(x, y)\, dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_c^d dy \int_a^b \eta_{X^0,Y}(x, y)\, dx = R(\eta_{X^0,Y}).$$

Аналогично, применяя при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ лемму Д.6 к функции $g(Y; y) = \eta_{X^0,Y}(x, y)$, найдем, что $R(\eta_{X^0,Y}) \geqslant R(\eta_{X^0,Y^0})$. Следовательно,

$$\mathscr{E}_{mn}[H^{\omega}(D)] \geqslant \inf_{X,Y} R(\eta_{X,Y}) = R(\eta_{X^0,Y^0}).$$

С другой стороны, так же как и для класса $H^{\omega_1,\omega_2}(D)$, легко проверить, что для любой $f \in H^{\omega}(D)$

$$|R(f;\ X^0,\ Y^0,\ P^0)| \leqslant \iint_D \eta_{X^0,Y^0}(x, y)\, dx\, dy = R(\eta_{X^0,Y^0}).$$

Из этих оценок вытекают соотношения

$$\mathscr{E}_{mn}[H^{\omega}(D)] = R[H^{\omega}(D);\ X^0,\ Y^0;\ P^0] =$$
$$= \iint_D \eta_{X^0,Y^0}(x, y)\, dx\, dy = 4mn \int_0^q \int_0^h \omega\left(\sqrt{t^2 + \tau^2}\right) dt\, d\tau,$$

доказывающие теорему Д.9 для класса $H^{\omega}(D)$.

Заметим, что утверждение теоремы Д.9 справедливо на классах функций $f(x, y)$, для которых в каждой точке $(x, y) \in D$ выражение

$$|f(x+t,\ y+\tau) + f(x+t,\ y-\tau) + f(x-t,\ y+\tau) +$$
$$+ f(x-t,\ y-\tau) - 4f(x, y)|$$
$$((x \pm t,\ y \pm \tau) \in D)$$

не превосходит $4[\omega_1(|t|) + \omega_2(|\tau|)]$ или $4\omega\left(\sqrt{t^2 + \tau^2}\right)$. Нетрудно проверить, что эти классы шире, чем соответственно классы $H^{\omega_1,\omega_2}(D)$ и $H^{\omega}(D)$.

Как мы уже отмечали, утверждение, аналогичное теореме Д.9, справедливо для функций любого конечного числа переменных. В одномерном случае это означает, что для класса $H^{\omega}[a, b]$ функций $f(x)$ таких, что $|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega(|x' - x''|)$, наилучшей квадратурной формулой вида (1) является формула прямоугольников с узлами $x_k^0 = a + (2k - 1)h$ и коэффициентами $p_k = 2h$, где $h = \frac{b-a}{2m}$.

Задачу о наилучшей квадратурной формуле (4) можно рассматривать в несколько более общей форме, если считать фиксированными не каждое из чисел m и n, а только их произведение $N = mn$, т. е. общее количество узлов. Минимизируя правые части (7) и (8) по m и n при условии $mn = N$, находим, что оптимальный их выбор определяется для класса $H^{\omega}(D)$ равенством $h = q$, а для класса $H^{\omega_1, \omega_2}(D)$ — соотношением

$$\omega_1(h) - \frac{1}{h}\int_0^h \omega_1(t)\,dt = \omega_2(q) - \frac{1}{q}\int_0^q \omega_2(t)\,dt,$$

которое в частном случае $\omega_1(\delta) = K_1\delta^{\alpha_1}$, $\omega_2(\delta) = K_2\delta^{\alpha_2}$ запишется в виде

$$\frac{\alpha_1 K_1 h^{\alpha_1}}{\alpha_1 + 1} = \frac{\alpha_2 K_2 q^{\alpha_2}}{\alpha_2 + 1}.$$

3. Квадратурная формула с равноотстоящими узлами. В § Д. 1 получено несколько точных результатов по оптимизации квадратурной формулы (А) при ρ, близких к r на некоторых классах периодических функций, причем на этих классах наилучшая формула имеет равноотстоящие узлы и равные коэффициенты (при значениях производных одного порядка).

Метод, описанный в п. 1 этого параграфа, позволил получить полное решение задачи на ряде классов дифференцируемых периодических функций в случае, когда в формуле (А) $\rho = 0$ и $\rho = 1$. И здесь оказалось, что оптимальной для таких классов является формула, имеющая равные коэффициенты и равноотстоящие узлы. Поскольку нам удобно будет в дальнейшем рассматривать функции периода 2π, то запишем эту формулу в виде

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{2\pi}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + R^0(f) = L^0(f) + R^0(f). \quad (17)$$

Оптимальность такой формулы для классов $\mathfrak{M}$ периодических функций можно предугадать, поэтому естественно искать оценку сверху для $\mathscr{E}_m^0[\mathfrak{M}]$, вычисляя верхнюю грань ее остатка, т. е. величину

$$R^0[\mathfrak{M}] = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |R^0(f)|.$$

Впрочем, даже независимо от решения задачи на оптимизацию, ввиду простоты формулы (17) и удобства ее для вычислений, представляется целесообразным вычисление верхней грани остатка $R^0[\mathfrak{M}]$ на тех или иных классах периодических функций.

Один точный результат в этом направлении можно получить при весьма общих предположениях относительно класса $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathscr{H}$ — класс непрерывных на всей оси 2π-периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям:

1) Если $f_1 \in \mathscr{H}$ и $f_2 \in \mathscr{H}$, то при любом $0 < \alpha < 1$ функция $g(x) = \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x)$ также принадлежит $\mathscr{H}$.

2) Если $f \in \mathscr{H}$, то функции $-f(x)$, $f(x) + C$, $f(x+a)$, где C и a — любые константы, также принадлежат классу $\mathscr{H}$.

Легко проверить, что эти условия выполнены, в частности, для класса $\mathscr{W}^r L_p(M; 0, 2\pi)$ $(r = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ функций $f(x)$ периода 2π с $(r-1)$-й абсолютно непрерывной на всей оси производной и с r-й производной, ограниченной в метрике $L_p(0, 2\pi)$ числом M.

Обозначим, далее, через $\mathscr{H}_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ множество функций f из $\mathscr{H}$ периода $2\pi/m$, у которых среднее значение на периоде равно нулю, т. е. $\int_0^{\frac{2\pi}{m}} f(x)\,dx = 0$, и положим

$$\mu_m[\mathscr{H}] = \sup_{f \in \mathscr{H}_m} \max_x |f(x)| = \sup_{f \in \mathscr{H}_m} f(0).$$

Имеет место следующий факт, указанный В. П. Моторным:

Лемма Д.7. *Для верхней грани остатка $R^0(f)$ формулы* (17) *на классе $\mathscr{H}$ справедливо равенство*

$$R^0[\mathscr{H}] = \sup_{f \in \mathscr{H}} |R^0(f)| = 2\pi\mu_m[\mathscr{H}].$$

Доказательство. Так как формула (17) точна для константы, то $R^0[\mathscr{H}] = R^0[\mathscr{H}_1]$, т. е. при вычислении верхней грани можно рассматривать только функции $f \in \mathscr{H}$, имеющие среднее значение на периоде $(0, 2\pi)$, равное нулю. Пусть $f \in \mathscr{H}$ и

$$g(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(x + \frac{2\pi i}{m}\right).$$

Из 2π-периодичности функции f следует, что $g\left(x + \frac{2\pi}{m}\right) = g(x)$, а так как в силу условий 1) и 2), определяющих класс $\mathscr{H}$, g вместе с f принадлежит $\mathscr{H}_1$, то $g \in \mathscr{H}_m$. Далее,

$$L^0(g) = \frac{2\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} g\left(\frac{2k\pi}{m}\right) = \frac{2\pi}{m^2} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(\frac{2\pi(k+i)}{m}\right).$$

Но при каждом фиксированном $k = 0, 1, \ldots, m-1$, опять же в силу периодичности $f(x)$,

$$\sum_{i=0}^{m-1} f\left(\frac{2\pi(k+i)}{m}\right) = \sum_{\nu=k}^{k+m-1} f\left(\frac{2\nu\pi}{m}\right) = \sum_{\nu=0}^{m-1} f\left(\frac{2\nu\pi}{m}\right),$$

поэтому

$$L^0(g) = \frac{2\pi}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} f\left(\frac{2\nu\pi}{m}\right) = L^0(f),$$

и, следовательно, $R^0(g) = R^0(f)$, ибо

$$\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Таким образом, каждой функции $f \in \mathcal{H}_1$ поставлена в соответствие функция $g \in \mathcal{H}_m$, причем $R^0(f) = R^0(g)$. Если учесть, что $\mathcal{H}_m \subset \mathcal{H}_1$, то, переходя к верхним граням, получим, что $R^0[\mathcal{H}_1] = R^0[\mathcal{H}_m]$ и, следовательно,

$$R^0[\mathcal{H}] = R^0[\mathcal{H}_m] = \sup_{g \in \mathcal{H}_m} \frac{2\pi}{m} \left| \sum_{k=0}^{m-1} g\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \right|.$$

Учитывая свойства класса $\mathcal{H}_m$, при вычислении последней верхней грани можно рассматривать лишь те функции g из $\mathcal{H}_m$, для которых

$$g\left(\frac{2k\pi}{m}\right) = \max_x |g(x)| \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1).$$

Поэтому

$$R^0[\mathcal{H}] = 2\pi \sup_{g \in \mathcal{H}_m} \max_x |g(x)| = 2\pi\mu_m[\mathcal{H}],$$

и лемма Д.7 доказана.

Величины $\mu_m[\mathcal{H}]$ для различных классов $\mathcal{H}$ вычислялись или оценивались в ряде работ по теории функций, например, в работе С. Н. Бернштейна [6], дополнении С. Б. Стечкина к книге [37], а также в [16].

Рассматривая в качестве $\mathcal{H}$ класс $\tilde{W}^r L_p(0, 2\pi) = \tilde{W}^r L_p(1;\ 0, 2\pi)$, выделим из него при каждом $m = 1, 2, \ldots$ множество $\tilde{W}^r_* L_p(0, 2\pi/m)$ функций с периодом $2\pi/m$ и средним значением на периоде, равным нулю. Разложив функцию $f \in \tilde{W}^r_* L_p(0, 2\pi/m)$ в ряд Фурье на промежутке $(0, 2\pi/m)$, с помощью выкладок, совершенно аналогичных тем, которые мы применяли в начале п. 5 § Д.1, получим представление

$$f(x) = \frac{1}{\pi m^{r-1}} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} D_r[m(x-t)]\, f^{(r)}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi m^r} \int_0^{2\pi} \bar{D}_r[m(x-t)]\, f^{(r)}(t)\, dt,$$

где

$$D_r(u)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(ku-\frac{\pi r}{2}\right)}{k^r},\quad \bar{D}_r(u)=D_r(u)+\gamma_r \tag{18}$$

и константа $\gamma_r=\gamma_r(q)$ выбрана из условия минимума нормы

$$\|\bar{D}_r\|_{L_q(0,\,2\pi)}\quad (1/p+1/q=1). \tag{19}$$

С помощью обычных в таких случаях приемов оценки интеграла от произведения двух функций найдем

$$\mu_m[\tilde{W}^r L_p(0,\,2\pi)]=\sup_{f\in\tilde{W}^r_* L_p\left(0,\,\frac{2\pi}{m}\right)}|f(0)|=$$

$$=\frac{1}{\pi m^r}\sup_{f\in\tilde{W}^r_* L_p\left(0,\,\frac{\pi}{2m}\right)}\left|\int_0^{2\pi}\bar{D}_r(mt)\,f^{(r)}(t)\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi m^r}\|\bar{D}_r(mt)\|_{L_q(0,\,2\pi)}=\frac{1}{\pi m^r}\|\bar{D}_r(t)\|_{L_q(0,\,2\pi)}.$$

Таким образом,

$$\mu_m[\tilde{W}^r L_p(0,\,2\pi)]=$$

$$=\frac{1}{m^r}\mu_1[\tilde{W}^r L_p(0,\,2\pi)]=\frac{1}{\pi m^r}\|\bar{D}_r\|_{L_q(0,\,2\pi)}. \tag{20}$$

Для отдельных значений q норма $\|\bar{D}_r\|_{L_q(0,\,2\pi)}$ может быть выражена через сумму некоторых числовых рядов. Если $q=2$, то $\bar{D}_r(u)=D_r(u)$ (т. е. $\gamma_r=0$), ибо минимум нормы (19) в этом случае имеет место, если среднее значение $\bar{D}_r(u)$ на периоде равно нулю, а этим свойством обладает сама функция $D_r(u)$. Так как ряд в (18) есть ряд Фурье функции $D_r(u)$, то по равенству Парсеваля

$$\|D_r\|^2_{L_2(0,\,2\pi)}=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2r}}$$

и, следовательно, ([37], стр. 385)

$$\mu_m[\tilde{W}^r L_2(0,\,2\pi)]=\frac{1}{m^r}\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2r}}\right)^{1/2}.$$

Отсюда и из леммы Д.7 получаем

$$R^0[\widetilde{W}^r L_2(0, 2\pi)] = \frac{2\sqrt{\pi}}{m^r}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2r}}\right)^{1/2}.$$

Чтобы вычислить значение нормы (19) при $q=1$, нам потребуется следующее свойство функций $D_r(u)$, непосредственно вытекающее из соотношений (52) и (53) § Д.1: при каждом $r=2, 3, \ldots$ функция $D_r(u)$ имеет на периоде $[0, 2\pi)$ в точности два нуля, проходя через которые она меняет знак, и в точности два экстремума (максимум и минимум).

Условие минимальности нормы $\|\overline{D}_r\|_{L(0, 2\pi)}$ равносильно соотношению

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sign} \overline{D}_r(u)\, du = 0. \tag{21}$$

Если r нечетно, $r=2\nu-1$ $(\nu=1, 2, \ldots)$, то

$$D_r(u) = D_{2\nu-1}(u) = (-1)^{\nu-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin ku}{k^{2\nu-1}} \tag{22}$$

и, значит, $D_{2\nu-1}(u)$ меняет знак только в точках $n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Но тогда условие (21) выполнено при $\gamma_{2\nu-1}=0$, т. е. $\overline{D}_{2\nu-1}(u) = D_{2\nu-1}(u)$ и

$$\operatorname{sign} \overline{D}_{2\nu-1}(u) = \operatorname{sign} D_{2\nu-1}(u) = (-1)^{\nu-1} \operatorname{sign} \sin u.$$

Если же r четно, $r=2\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots)$, то

$$D_r(u) = D_{2\nu}(u) = (-1)^{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos ku}{k^{2\nu}}, \tag{23}$$

т. е. $D_{2\nu}(u)$ — четная функция, принимающая в точке $u=0$ максимальное по абсолютной величине значение. Нули $D_{2\nu}(u)$ расположены симметрично относительно начала координат и потому равенство (21) возможно лишь при условии, что

$$\operatorname{sign} \overline{D}_{2\nu}(u) = (-1)^{\nu} \operatorname{sign} \cos u.$$

Таким образом,

$$\| \bar{D}_{2\nu-1} \|_{L(0,\,2\pi)} = \int_0^{2\pi} | D_{2\nu-1}(t) |\, dt = (-1)^{\nu-1} \int_0^{2\pi} D_{2\nu-1}(t) \operatorname{sign} \sin t\, dt,$$

$$\| \bar{D}_{2\nu} \|_{L(0,\,2\pi)} = \int_0^{2\pi} | \bar{D}_{2\nu}(t) |\, dt = (-1)^{\nu} \int_0^{2\pi} \bar{D}_{2\nu}(t) \operatorname{sign} \cos t\, dt = (-1)^{\nu} \int_0^{2\pi} D_{2\nu}(t) \operatorname{sign} \cos t\, dt \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Интегралы в правых частях этих соотношений проще всего вычислить, если заменить стоящие там функции их рядами Фурье и затем почленно проинтегрировать произведение рядов, учитывая ортогональность тригонометрической системы. Ряды Фурье функций $D_{2\nu-1}(u)$ и $D_{2\nu}(u)$ даны равенствами (22) и (23); обычными подсчетами находим также, что

$$\operatorname{sign} \sin t = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1) t}{2k+1},$$

$$\operatorname{sign} \cos t = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos (2k+1) t}{2k+1}.$$

Выполнив несложные вычисления, придем к равенству

$$\| \bar{D}_r \|_{L(0,\,2\pi)} = \int_0^{2\pi} | \bar{D}_r(t) |\, dt = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}} = \pi K_r \qquad (24)$$

$$(r = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где полагаем

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}. \qquad (25)$$

С константами K_r связаны результаты решения многих экстремальных задач теории функций (см., например, работу А. Н. Колмогорова [14] и монографию Н. И. Ахиезера [5]). Нетрудно подсчитать, что $K_0=1$, $K_1=\pi/2$, $K_2=\pi^2/8$, $K_3=\pi^3/24, \ldots,$ причем

$$1=K_0<K_2<K_4<\ldots<4/\pi<\ldots<K_3<K_1=\pi/2.$$

Таким образом, из (20) и (24) находим, что [6]

$$\mu_m[\tilde{W}^r(0,\ 2\pi)]=K_r/m^r \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots),$$

а с учетом леммы Д.7 получаем значение верхней грани остатка $R^0(f)$ формулы (17) на классе $\tilde{W}^r(0, 2\pi)=$ $=\tilde{W}^rL_\infty(0,\ 2\pi)$:

$$R^0[\tilde{W}^r(0,\ 2\pi)]=2\pi K_r/m^r \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots), \qquad (26)$$

где K_r определены в (25). Отметим, что равенство (26) непосредственными вычислениями получено в работе В. Н. Малоземова [34].

Пусть теперь в (20) $q=\infty$ ($p=1$). Минимум нормы

$$\|\bar{D}_r\|_{L_\infty(0,\ 2\pi)}=\max_u|\bar{D}_r(u)| \qquad (r=2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$$

обеспечивается таким выбором γ_r, когда

$$\max_u \bar{D}_r(u)=-\min_u \bar{D}_r(u). \qquad (27)$$

Если r четно, то $r-1$ нечетно и, значит, $\bar{D}_{r-1}(u)=$ $=D_{r-1}(u)$. Учитывая монотонность функции $\bar{D}_r(u)=$ $=\bar{D}_{2\nu}(u)$ на каждом из промежутков $(0,\ \pi)$ и $(\pi,\ 2\pi)$, а также равенство (27) и соотношение (52) § Д.1, можем написать

$$\|\bar{D}_r\|_{L_\infty(0,\ 2\pi)}=|\bar{D}_r(0)|=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}|D_{r-1}(t)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}|\bar{D}_{r-1}(t)|\,dt=\frac{\pi}{4}K_{r-1} \qquad (r=2,\ 4,\ 6,\ \ldots).$$

Подставив в (20), получим равенства ([37], стр. 385)

$$\mu_m[\tilde{W}^rL(0,\ 2\pi)]=\frac{K_{r-1}}{4m^r} \qquad (r=2,\ 4,\ 6,\ \ldots),$$

которые вместе с леммой Д.7 дают следующий результат:

$$R^0[\widetilde{W}^r L(0, 2\pi)] = \frac{\pi K_{r-1}}{2m^r} \qquad (r = 2, 4, 6, \ldots).$$

Отметим еще, что верхняя грань остатка $R^0(f)$ на классах $\widetilde{W}^r H_\omega(0, 2\pi)$ при выпуклом вверх модуле непрерывности $\omega(\delta)$ вычислена в [34] и [35].

4. Результаты оптимизации на классах дифференцируемых периодических функций. Рассмотрим квадратурные формулы

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k) + R(f), \tag{28}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m-1} [p_k f(x_k) + p'_k f'(x_k)] + R_1(f), \tag{29}$$

задаваемые вектором (X, P) узлов $0 = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_m < 2\pi$ и коэффициентов p_k $(k=0, 1, \ldots, m-1)$ для формулы (28), p_k и p'_k $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ — для формулы (29). Заметим, что формулы (28) и (29) соответствуют наиболее важным с практической точки зрения частным случаям формулы (A) при $\rho = 0$ и $\rho = 1$.

Здесь мы приведем ряд точных результатов по оптимизации формул (28) и (29) на некоторых классах дифференцируемых периодических функций, полученных применением приема, описанного в общих чертах в п. 1. Мы ограничимся лишь формулировкой основных фактов, а также некоторых вспомогательных предложений, на которых они существенно базируются. Полное доказательство потребовало бы значительного увеличения объема Добавления, а главное, привлечения совершенно новых идей и понятий из современных областей теории функций.

Отметим, что как в периодическом, так и в непериодическом случаях решение задачи о наилучшей квадратурной формуле (A) с $\rho = 0$ и $\rho = 1$ для классов W^r и $\widetilde{W}^r$ при $r = 1, 2$, а также для классов $W^r L$ и и $\widetilde{W}^r L$ при $r = 1, 2, 3$ получено в § Д.1 (см. также

§ 10) сведе́нием к задаче минимизации нормы кусочно-полиномиальной функции. Что касается метода п. 1 этого параграфа, то он позволяет без труда получить нужный результат на тех же классах при $r=1$ и 2. Но уже при $r=3$ применение этого приема наталкивается на серьезные трудности, причем не только технического, но и принципиального характера.

Возвращаясь к формулам (28) и (29), где $R(f)=R(f;X,P)$ и $R_1(f)=R_1(f;X,P)$, по аналогии с ранее вводимыми обозначениями положим

$$\mathscr{E}_m[\mathfrak{M}]=\inf_{(X,P)}\sup_{f\in\mathfrak{M}}|R(f;\ X,\ P)|,$$

$$\mathscr{E}_m^1[\mathfrak{M}]=\inf_{(X,P)}\sup_{f\in\mathfrak{M}}|R_1(f;\ X,\ P)|,$$

где $\mathfrak{M}$ — некоторый класс 2π-периодических непрерывно дифференцируемых на всей оси функций.

Через $\mathfrak{M}_X$ будем здесь обозначать множество функций $f\in\mathfrak{M}$ таких, что

$$f(x_k)=f'(x_k)=0\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1).$$

Так как формула (28) есть частный случай формулы (29) (при $p_k'=0$), то с учетом сказанного в п. 1 получаем цепь неравенств

$$\inf_X\sup_{f\in\mathfrak{M}_X}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx\leqslant\mathscr{E}_m^1[\mathfrak{M}]\leqslant\mathscr{E}_m[\mathfrak{M}]\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{f\in\mathfrak{M}}|R(f;\ X^0,\ P^0)|,\qquad(30)$$

где $(X^0,\ P^0)$ — вектор узлов $x_k^0=\dfrac{2k\pi}{m}$ и коэффициентов $p_k^0=2\pi/m$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$, задающий квадратурную формулу (17) $(R(f;\ X^0,\ P^0)=R^0(f))$.

Пусть $\mathfrak{M}=\widetilde{W}^r(0,\ 2\pi)=\widetilde{W}^rL_\infty(0,\ 2\pi)$ $(r=1,\ 2,\ \ldots)$ и $\widetilde{W}_X^r(0,\ 2\pi)=\mathfrak{M}_X$. Как уже отмечалось, задача оптимизации формул (28) и (29) на классе $\widetilde{W}^r(0,\ 2\pi)$ при $r=1$ и 2 решена иным путем (§ 10 и § Д1). Исследуя случай $r=3$, Т. Н. Бусарова с помощью довольно сложных построений показала (см. [7] и [9]), что

$$\inf_X \sup_{f\in \widetilde{W}^3_X(0,2\pi)} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sup_{f\in \widetilde{W}^3_{X^0}(0,2\pi)} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} f_*(x)\,dx = \frac{\pi^4}{12m^3} = \frac{2\pi K_3}{m^3}, \qquad (31)$$

где X^0 — вектор равноотстоящих узлов $x_k^0 = \frac{2k\pi}{m}$, а $f_*(x)$ — сплайн-функция периода $2\pi/m$, определяемая равенством [7, 9]

$$f_*(x) = -\int_0^x \left[\int_0^z \left(\int_{\frac{\pi}{2m}}^u \operatorname{sign}\sin mt\,dt\right) du\right] dz.$$

Сопоставление соотношений (26), (30) и (31) приводит к равенствам

$$\mathscr{E}_m[\widetilde{W}^3(0,\,2\pi)] = \mathscr{E}^1_m[\widetilde{W}^3(0,\,2\pi)] =$$

$$= \sup_{f\in \widetilde{W}^3(0,\,2\pi)} |R^0(f)| = \frac{2\pi K_3}{m^3} = \frac{\pi^4}{12m^3}.$$

Решение задачи на классах $\widetilde{W}^r(0,2\pi)$ при всех $r > 3$ получил В. П. Моторный [36], которому принадлежит также ряд других существенных результатов в этом направлении. По причине, о которой говорилось выше, здесь приводятся лишь формулировки полученных В. П. Моторным основных экстремальных теорем.

Теорема Д.10 [36]. *Для класса* $\widetilde{W}^r(0,2\pi)$ *при любых натуральных* r *наилучшей квадратурной формулой вида* (28) *или* (29) *является формула* (17) *с равноотстоящими узлами и равными коэффициентами. При этом*

$$\mathscr{E}_m[\widetilde{W}^r(0,\,2\pi)] = \mathscr{E}^1_m[\widetilde{W}^r(0,\,2\pi)] =$$

$$= \sup_{f\in \widetilde{W}^r(0,\,2\pi)} |R^0(f)| = \frac{2\pi K_r}{m^r},$$

где константа K_r *определена равенством* (25).

Узловым моментом доказательства теоремы Д.10 является следующее утверждение, выясняющее экстремальные свойства определенного класса сплайн-функций и представляющее поэтому и самостоятельный интерес.

Лемма Д.8 [36]. *Пусть при* $r = 1, 2, \ldots$ M_m^r *есть множество функций* $f \in \widetilde{W}^r(0, 2\pi)$, *имеющих* $2m$ *экстремумов на периоде* $[0, 2\pi)$, *производная которых* $f^{(r)}(x)$ *меняет знак на периоде* $2m$ *раз, принимая попеременно значения* $+1$ *или* -1. *Тогда для любой системы точек* $X = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < 2\pi\}$ *существует функция* $f_X \in M_m^r$ *такая, что*

$$\min_t f_X(t) = f_X(x_k) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

и

$$\int_0^{2\pi} f_X(t)\,dt \geqslant \frac{2\pi K_r}{m^r}.$$

Из леммы Д.8 сразу следует, что

$$\inf_X \sup_{f \in \widetilde{W}_X^r(0, 2\pi)} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx \geqslant \frac{2\pi K_r}{m^r},$$

откуда, в связи с (26) и (30), следует теорема Д.10.

Отметим, что в доказательстве леммы Д.8 как раз и сосредоточены трудности, препятствовавшие длительное время получению результата, сформулированного в теореме Д.10.

Для классов $\widetilde{W}^r L(0, 2\pi)$ та же схема рассуждений позволила получить точный результат [36] только для четных r. И в этом случае наилучшей среди формул (28) и (29) является формула (17), причем

$$\mathscr{E}_m[\widetilde{W}^r L(0, 2\pi)] = \mathscr{E}_m^1[\widetilde{W}^r L(0, 2\pi)] =$$
$$= \sup_{f \in \widetilde{W}^r L(0, 2\pi)} |R^0(f)| = \frac{\pi K_{r-1}}{2m^r} \quad (r = 2, 4, 6, \ldots). \qquad (32)$$

Уже отмечалось, что для $r = 1, 2, 3$ решение задачи на этих классах дано в § Д.1 с помощью совершенно иных рассуждений.

Пусть $\omega(\delta)$ — некоторый заданный модуль непрерывности и $\tilde{W}^r H_\omega(0, 2\pi)$ — класс 2π-периодических функций $f(x)$, у которых

$$| f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x'') | \leqslant \omega(| x' - x'' |).$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема Д.11 [36]. *Если $\omega(\delta)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то для класса $\tilde{W}^r H_\omega(0, 2\pi)$ при всех нечетных $r = 1, 3, 5, \ldots$ наилучшей среди формул* (28) *и* (29) *является квадратурная формула* (17). *При этом*

$$\mathscr{E}_m[\tilde{W}^r H_\omega(0, 2\pi)] = \mathscr{E}_m^1[\tilde{W}^r H_\omega(0, 2\pi)] =$$
$$= 2\pi \max_t | f_{mr}(t) | \qquad (r = 1, 3, 5, \ldots),$$

где $f_{mr}(t) = f_{mr}(\omega; t)$ — функция из класса $\tilde{W}^r H_\omega(0, 2\pi)$ с периодом $2\pi/m$ и средним значением на периоде, равным нулю, у которой r-я производная нечетна и определяется равенствами

$$f_{mr}^{(r)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2t) & (0 \leqslant t \leqslant \pi/2m), \\ \frac{1}{2}\omega(2\pi/m - 2t) & (\pi/2m \leqslant t \leqslant \pi/m). \end{cases}$$

Функции $f_{mr}(t)$ являются экстремальными в ряде задач теории приближения (см., например, [19]) и, как нетрудно подсчитать, разлагая f_{mr} в ряд Фурье,

$$\max_t | f_{mr}(t) | = \frac{1}{m^r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)} b_{2\nu+1}^{(m)}}{(2\nu+1)^r}$$
$$(m = 1, 2, \ldots; \ r = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$b_{2\nu+1}^{(m)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{m}\right) \sin(2\nu+1) t \, dt.$$

Если $\omega(\delta) = \delta$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$, то класс $\tilde{W}^r H_\omega(0, 2\pi)$ совпадает с классом $\tilde{W}^{r+1}(0, 2\pi)$, так что теорема Д.10 при r четных содержится в теореме Д.11.

Центральную часть доказательства теоремы Д.11 составляет получение утверждения, аналогичного лемме Д.8. При фиксированном выпуклом вверх модуле непрерывности $\omega(\delta)$ вводится множество $M_m^r(\omega)$ функций $f \in \widetilde{W}^r H_\omega(0, 2\pi)$, имеющих в точности $2m$ экстремумов на периоде, производная которых $f^{(r)}(x)$ везде непрерывна, меняет знак на периоде в точности $2m$ раз в некоторых точках $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{2m} < \xi_{2m+1} = \xi_1 + 2\pi$, причем на каждом из промежутков (ξ_k, ξ_{k+1}) $(k = 1, 2, \ldots, 2m)$

$$f^{(r)}(t) = \pm \frac{1}{2} \min \{\omega(2|t - \xi_k|), \omega(2|t - \xi_{k+1}|)\}.$$

Тогда при $r = 1, 2, 3, \ldots$ для любой системы точек $X = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < 2\pi\}$ существует функция $f_X \in M_m^r(\omega)$ такая, что

$$\min_t f_X(t) = f_X(x_k) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m - 1)$$

и

$$\int_0^{2\pi} f_X(t)\, dt \geqslant 2\pi \max_t |f_{mr}(t)|.$$

Это дает для $\mathscr{E}_m[\widetilde{W}^r H_\omega(0, 2\pi)]$ и $\mathscr{E}_m^1[\widetilde{W}^r H_\omega(0, 2\pi)]$ оценку снизу. Точность этой оценки при нечетных r следует из леммы Д.7 с учетом того, что

$$\mu_m[\widetilde{W}^r H_\omega(0, 2\pi)] = \max_t |f_{mr}(t)|.$$

Последнее равенство получено в [16] для $m = 1$; обобщение на случай произвольного натурального m не представляет затруднений.

Отметим некоторые следствия для сплайн-функций, наименее уклоняющихся от нуля. В § Д.1 было установлено, что задача оптимизации остатка квадратурной формулы (А) на классах $W^r L_p$ и $\widetilde{W}^r L_p$ эквивалентна задаче минимизации нормы в сопряженной метрике L_q кусочно-полиномиальных функций из множества $\overset{0}{\mathscr{A}}_{mr}$ или $\overset{0}{\widetilde{\mathscr{A}}}_{mr}$. Результаты § Д.1 получены решением именно второй задачи; решение первой задачи — о наилучших квадратурных формулах — получалось как следствие. Здесь же мы можем, наоборот, из приведенных выше результатов по оптимальным квадратурным формулам вида (28) и (29) для классов $\widetilde{W}^r(0, 2\pi)$ и $\widetilde{W}^r L(0, 2\pi)$ вывести, как следствие, соответствующие утверждения о сплайнах, наименее уклоняющихся от нуля.

Считая $r \geqslant 3$, обозначим через $\tilde{\mathscr{A}}_{mr}(0, 2\pi)$ и $\tilde{\mathscr{A}}^1_{mr}(0, 2\pi)$ множества 2π-периодических непрерывных на всей оси вместе с производными до $(r-2)$-го, соответственно $(r-3)$-го порядка, сплайнов $\varphi(t)$ с узлами $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < 2\pi$, совпадающих на каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ с некоторым многочленом $t^r + \sum\limits_{i=0}^{r-1} \alpha_i t^i$. Из соотношения (70) § Д.1 и теоремы Д.10 следует, что для всех $r \geqslant 3$ [36]

$$\inf_{\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}_{mr}(0, 2\pi)} \|\varphi\|_{L(0, 2\pi)} = \inf_{\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}^1_{mr}(0, 2\pi)} \|\varphi\|_{L(0, 2\pi)} =$$

$$= \|\varphi_*\|_{L(0, 2\pi)} = \frac{2\pi r!\, K_r}{m^r},$$

причем точную нижнюю грань реализует сплайн $\varphi_* \in \tilde{\mathscr{A}}_{mr}(0, 2\pi)$ с периодом $2\pi/m$ и узлами $x_k^0 = 2k\pi/m$ который можно записать в виде

$$\varphi_*(t) = -\frac{2r!}{m^r}[D_r(mt) + \gamma_r],$$

где γ_r выбрано из условия $\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sign}[D_r(u) + \gamma_r]\, du = 0.$

При $r = 3$ этот результат получен в [7] и [9]. Аналогично, из (32) и соотношения (70) § Д.1 вытекает, что для четных r $(r = 2, 4, 6, \ldots)$

$$\inf_{\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}_{mr}(0, 2\pi)} \max_t |\varphi(t)| = \inf_{\varphi \in \tilde{\mathscr{A}}^1_{mr}(0, 2\pi)} \max_t |\varphi(t)| =$$

$$= \max_t |\varphi_0(t)| = \frac{\pi r!\, K_{r-1}}{2m^r},$$

где

$$\varphi_0(t) = -\frac{2r!}{m^r}(D_r(mt) + \beta_r)$$

и константа β_r выбрана так, чтобы было

$$\max_t [D_r(t) + \beta_r] = -\min_t [D_r(t) + \beta_r].$$

В заключение этого параграфа сделаем одно замечание об асимптотике остатка квадратурной формулы (17) для индивидуальных функций класса $\tilde{W}^r(0, 2\pi)$, дополняющее содержание § 7.

При каждом $m=1,2,\ldots$ верхняя грань остатка $R^0(f)=R^0_m(f)$ формулы (17) на классе $\tilde{W}^r(0,2\pi)$ достигается для функции $f(x)=f_m(x)$ из $\tilde{W}^r(0,2\pi)$ с периодом $2\pi/m$ такой, что

$$f^{(r)}_m(x)=\operatorname{sign}\left[D_r(mt)+C\right],$$

где C — некоторая константа; при этом

$$\sup_{f\in\tilde{W}^r(0,\,2\pi)}|R^0_m(f)|=|R^0_m(f_m)|=\frac{2\pi K_r}{m^r}.$$

Таким образом, экстремальная функция существенно зависит от m. Если, однако, с самого начала фиксировать любую функцию $f\in\tilde{W}^r(0,2\pi)$, то при неограниченном возрастании количества узлов остаток $R^0_m(f)$ стремится к нулю существенно быстрее, чем его верхняя грань на всем классе. А именно, для любой $f\in\in\tilde{W}^r(0,2\pi)$ имеет место соотношение [8]

$$\lim_{m\to\infty}m^rR^0_m(f)=0.$$

Более точные выводы о поведении остатка $R^0_m(f)$ для индивидуальной функции $f\in\tilde{W}^r(0,2\pi)$ можно сделать, если нам, например, известно, что $f^{(r)}(x)$ монотонна и ограничена на каком-нибудь интервале $(a,a+2\pi)$ с длиной 2π. Тогда для всех $m=1,2,3,\ldots$

$$|R^0_m(f)|\leqslant\frac{B_r}{m^{r+1}}\Big[\sup_{a<x<a+2\pi}f^{(r)}(x)-\inf_{a<x<a+2\pi}f^{(r)}(x)\Big],$$

где

$$B_r=\int_0^{2\pi}|D_r(t)|\,dt.$$

§ Д.3. ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ КЛАССА W^rL_2

В § 11 приведены результаты Сарда, связанные с оптимизацией по коэффициентам p_k квадратурной формулы

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=0}^m p_kf(x_k)+R(f)$$

с равноотстоящими узлами $x_k = k/m$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ на классах $W^r L_2$ $(r = 1, 2, \ldots)$. В 1964 г. Шёнберг [43] решил эту задачу на тех же классах в случае произвольных фиксированных узлов x_k (если только $x_0 = 0$, $x_m = 1$).

Наиболее общий результат в этом направлении получен в 1966 г. Албергом и Нильсоном в работе [39], где указаны оптимальные на классе $W^r L_2$ коэффициенты p_{kl} в квадратурной формуле

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) =$$
$$= L(f) + R(f) \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant r-1) \quad (1)$$

с фиксированными узлами

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = 1.$$

Этот результат содержится также в книге [3], гл. V, где он вытекает как следствие из более общих теорем о приближении линейных функционалов, полученных на базе общей теории сплайнов. Мы сочли целесообразным включить в Добавление результат Алберга и Нильсона с более элементарным доказательством, в котором следуем в основном схеме рассуждений работы Шёнберга [43].

Как и выше в таких случаях, мы можем считать, что квадратурная формула (1) точна для всех многочленов степени $r-1$, т. е. что коэффициенты p_{kl} связаны соотношениями

$$L(x^\nu) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\mu} p_{kl} \frac{\nu!}{(\nu-l)!} x_k^{\nu-l} = I(x^\nu) \qquad (2)$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots, r-1),$$

где $\mu = \min\{\nu, \rho\}$. При этом предположении остаток $R(f)$ формулы (1) для $f \in W^r L_2$ можно записать в виде (см. § 12)

$$R(f) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 N_r(t) f^{(r)}(t)\,dt, \qquad (3)$$

где

$N_r(t) = N_r(p_{kl};\ t) =$

$$= \frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} \frac{(r-1)!}{(r-l-1)!} p_{kl} K_{r-l}(x_k - t)$$

и $K_\nu(u) = u^{\nu-1}$ при $u \geqslant 0$, $K_\nu(u) = 0$ при $u < 0$. Непосредственно проверяется, что

$$N_r(t) = R[K_r(x-t)] = I[K_r(x-t)] - L[K_r(x-t)],$$

если иметь в виду, что линейные функционалы R, I и L вычисляются от $K_r(x-t)$ как функции от x при фиксированном t. Из (3), как и выше в аналогичных случаях, выводим, что

$$\sup_{f \in W^r L_2} |R(f)| = \frac{1}{(r-1)!} \|N_r\|_{L_2} = \frac{1}{(r-1)!} \sqrt{J}, \tag{4}$$

где

$$J = J(p_{kl}) = \int_0^1 N_r^2(t)\, dt. \tag{5}$$

Мы должны найти минимум функции $J(p_{kl})$ при условии, что числа p_{kl} удовлетворяют соотношениям (2). Для решения этой задачи нам придется привлечь некоторые понятия и факты из теории сплайн-приближений. Здесь мы снова, но уже в другом аспекте, наблюдаем тесную связь экстремальных задач теории квадратур с теорией сплайнов.

Пусть $C^n[a,b]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — множество функций $f(x)$, непрерывных на $[a,b]$ вместе со своими производными до n-го порядка включительно $(f^0 = f)$. Множество функций $f(x)$, удовлетворяющих этому условию на всей оси, будем обозначать C_∞^n.

Считая, как и выше, узлы $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$ фиксированными, введем в рассмотрение класс S_{mr}^ρ $(0 \leqslant \rho \leqslant r-1)$ заданных на всей оси кусочно-полиномиальных функций $s(x)$ таких, что

1) $s(x) \in C_\infty^{2r-\rho-2}$;

2) на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ $s(x)$ есть алгебраический многочлен степени $2r-1$;

3) на каждом из промежутков $(-\infty, 0]$ и $[1, \infty)$ $s(x)$ есть алгебраический многочлен степени $r-1$.

Функции $s(x) \in S_{mr}^{\rho}$ называют [3] сплайнами порядка $2r-1$ и дефекта $\rho+1$. Мы их в дальнейшем будем называть просто сплайнами.

Если для функции $f \in C^{\rho}[0, 1]$ и сплайна $s(x) = s(f; x)$ из S_{mr}^{ρ} удовлетворяются соотношения

$$s^{(l)}(f; x_k) = f^{(l)}(x_k) \tag{6}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m;\ l = 0, 1, \ldots, \rho),$$

то $s(f; x)$ будем называть интерполяционным сплайном для $f(x)$.

Нам потребуются два фундаментальных утверждения теории сплайнов [3], которые здесь будут играть вспомогательную роль и поэтому формулируются в виде лемм.

Лемма Д.9. *Если $f(x)$ имеет на $[0, 1]$ абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка и $s(f; x)$ — интерполяционный сплайн для f, то*

$$\int_0^1 [f^{(r)}(x) - s^{(r)}(f; x)]^2\, dx = \int_0^1 [f^{(r)}(x)]^2\, dx - \int_0^1 [s^{(r)}(f; x)]^2\, dx.$$

Действительно,

$$\int_0^1 [f^{(r)} - s^{(r)}]^2\, dx = \int_0^1 [f^{(r)}]^2\, dx - \int_0^1 [s^{(r)}]^2\, dx - 2\int_0^1 s^{(r)}[f^{(r)} - s^{(r)}]\, dx,$$

и надо лишь доказать, что последний интеграл равен нулю. Разбив его на сумму интегралов по промежуткам (x_k, x_{k+1}) и интегрируя на каждом из них $r-1$ раз по частям, получим, положив для краткости $\Delta(x)=f(x)-s(f;\ x)$,

$$\int_0^1 s^{(r)}\left[f^{(r)}-s^{(r)}\right]dx=\sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} s^{(r)}(f;\ x)\,\Delta^{(r)}(x)\,dx=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu+1}\sum_{k=0}^{m-1} s^{(r+\nu-1)}(f;\ x)\,\Delta^{(r-\nu)}(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}.$$

Но числа

$$\alpha_\nu=\sum_{k=0}^{m-1} s^{(r+\nu-1)}(f;\ x)\,\Delta^{(r-\nu)}(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}\qquad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

равны нулю. В самом деле, если $r-\rho\leqslant\nu\leqslant r$, то $\Delta^{(r-\nu)}(x_k)=0$ ($k=0,\ 1,\ \ldots,\ m$) в силу (6), и в случае $\rho=r-1$ все доказано. Если же $\rho<r-1$, то при $1\leqslant\nu\leqslant r-\rho-1$ функция $s^{(r+\nu-1)}(f;\ x)$ непрерывна на всей оси (ибо $s\in C_\infty^{2r-\rho-2}$), причем так как $r+\nu-1\geqslant r$, а $s(f;\ x)$ на $(-\infty,\ 0]$ и $[1,\ \infty)$ совпадает с многочленами степени $r-1$, то $s^{(r+\nu-1)}(f;\ 0)=$ $=s^{(r+\nu-1)}(f;\ 1)=0$. Поэтому

$$\alpha_\nu=-s^{(r+\nu-1)}(f;\ x_0+0)\,\Delta^{(r-\nu)}(x_0)+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\Delta^{(r-\nu)}(x_k)\left[s^{(r+\nu-1)}(f;\ x_k-0)-s^{(r+\nu-1)}(f;\ x_k+0)\right]+$$
$$+s^{(r+\nu-1)}(f;\ x_m-0)\,\Delta^{(r-\nu)}(x_m)=0.$$

Лемма Д.10. *В классе* S_{mr}^{ρ} ($0\leqslant\rho\leqslant r-1$; $m\geqslant r$) *для любой функции* $f\in C^{\rho}$ $[0,\ 1]$ *существует, и притом единственный, интерполяционный сплайн* $s(f;\ x)$.

Сначала докажем, что если для функции $f\in C^{\rho}[0,\ 1]$ интерполяционный сплайн $s(f;\ x)\in S_{mr}^{\rho}$ существует, то он единствен. Пусть $s_1(f;\ x)$ — тоже интерполяционный сплайн для f. Тогда, очевидно, функция $s_0(x)=s(f;\ x)-s_1(f;\ x)$ принадлежит классу S_{mr}^{ρ} и является интерполяционным сплайном для $f_0(x)\equiv 0$. Применяя к этому случаю лемму Д.9, получим, что

$$\int_0^1 \left[s_0^{(r)}(x)\right]^2 dx=-\int_0^1 \left[s_0^{(r)}(x)\right]^2 dx,$$

т. е. $s_0^{(r)}(x) \equiv 0$, а поэтому $s_0(x)$ может быть только многочленом степени $\leqslant r-1$. Но так как $s_0(x_k) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ и $m \geqslant r$, то $s_0(x) \equiv 0$, т. е. $s_1(f; x) \equiv s(f; x)$. Чтобы установить существование интерполяционного сплайна для любой $f \in C^\rho[a, b]$, введем в рассмотрение функции

$$\sigma(x) = \sigma(q_{ij}; \beta_\nu; x) =$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\rho} \frac{(-1)^j q_{ij}}{(2r-j-1)!} K_{2r-j}(x - x_i) + \sum_{\nu=0}^{r-1} \beta_\nu x^\nu, \qquad (7)$$

в предположении, что на числа q_{ij} наложено r уравнений связи:

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\mu} q_{ij} \frac{\nu!}{(\nu-j)!} x_i^{\nu-j} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, r-1), \qquad (8)$$

где, как и выше, $\mu = \min\{\nu, \rho\}$. Ясно, что $\sigma(x) \in C_\infty^{2r-\rho-2}$ и что на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ $\sigma(x)$ есть алгебраический многочлен степени $2r-1$. Так как для $x \leqslant x_0 = 0$ $K_{2r-j}(x - x_i) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, то на $(-\infty, 0]$ $\sigma(x)$ совпадает с алгебраическим многочленом $\sum_{\nu=0}^{r-1} \beta_\nu x^\nu$ степени $r-1$. Далее, для $x \geqslant x_m = 1$

$$\sigma(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\rho} \frac{(-1)^j q_{ij}}{(2r-j-1)!} (x - x_i)^{2r-j-1} + \sum_{\nu=0}^{r-1} \beta_\nu x^\nu =$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\rho} (-1)^j q_{ij} \sum_{s=0}^{2r-j-1} \frac{(-1)^{s+1}}{s!\,(2r-j-s-1)!} x_i^{2r-j-s-1} x^s +$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{r-1} \beta_\nu x^\nu.$$

Если выписать коэффициенты при x^s для $s = r$, $r+1, \ldots, 2r-1$, то сразу обнаружим, что они равны нулю в силу (8) — надо лишь положить $2r - s - 1 = \nu$. Следовательно, и на промежутке $[1, \infty)$ $\sigma(x)$ есть многочлен степени $r-1$, т. е. доказано, что $\sigma(x) \in$

$\in S^{\rho}_{mr}$. Обозначим подмножество сплайнов вида (7) при условиях (8) через $\bar{S}^{\rho}_{mr}$.

Теперь заметим, что сплайн $\sigma(x)$ из $\bar{S}^{\rho}_{mr}$, у которого $q_{ij} = \beta_\nu = 0$ (т. е. сплайн $\sigma(x) \equiv 0$) и, в силу доказанного выше, только он один является интерполяционным для $f_0(x) \equiv 0$. Условия (6) в этом случае запишутся в виде

$$\sigma^{(l)}(x_k) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\rho} \frac{(-1)^j q_{ij}}{(2r-j-l-1)!} K_{2r-j-l}(x_k - x_i) + \\ + \sum_{\nu=l}^{r-1} \beta_\nu \frac{\nu!}{(\nu-l)!} x_k^{\nu-l} = 0 \qquad (9)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m;\ l = 0, 1, \ldots, \rho).$$

Из наших рассуждений следует, что однородная система уравнений $\{(8), (9)\}$ имеет только нулевое решение:

$$q_{ij} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, \rho),$$
$$\beta_\nu = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, r-1),$$

и поэтому ее определитель не равен нулю. Если теперь $f(x)$ — произвольная функция из $C^{\rho}[0, 1]$, то условия интерполяции $\sigma^{(l)}(x_k) = f^{(l)}(x_k)$ вместе с (8) дадут систему, вообще говоря, неоднородную, но с тем же, отличным от нуля, определителем, а потому имеющую единственное решение. Это решение и определяет интерполяционный сплайн $\sigma(f; x)$ для f. Лемма Д.10 доказана.

Отметим, хотя для дальнейшего это и несущественно, что из единственности интерполяционного сплайна вытекает совпадение классов $\bar{S}^{\rho}_{mr}$ и S^{ρ}_{mr}.

Вернемся к задаче отыскания минимума величины (5) при уравнениях связи (2). Следуя обычным в таких случаях рассуждениям, рассмотрим функцию

$$E(p_{kl}, \lambda_\nu) = \frac{1}{2} J + \sum_{\nu=0}^{r-1} \lambda_\nu \left[\sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\mu} \frac{\nu!}{(\nu-l)!} p_{kl} x_k^{\nu-l} - I(x^\nu) \right].$$

Приравняв нулю частные производные E по p_{kl} и λ_ν, получим систему:

$$\frac{\partial E}{\partial p_{kl}}=\int_0^1 N_r(t)\frac{\partial N_r}{\partial p_{kl}}dt+\sum_{\nu=l}^{r-1}\lambda_\nu\frac{\nu!}{(\nu-l)!}x_k^{\nu-l}=0 \qquad (10)$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m;\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho),$$

$$\frac{\partial E}{\partial\lambda_\nu}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\mu}\frac{\nu!}{(\nu-l)!}p_{kl}x_k^{\nu-l}-I(x^\nu)=0 \qquad (10')$$

$$(\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1)$$

относительно неизвестных p_{kl} и λ_ν.

Если учесть легко проверяемое тождество

$$K_\nu(u)=u^{\nu-1}+(-1)^\nu K_\nu(-u),$$

а также тот факт, что в силу (2), тождественно по t, $R\left[(x-t)^{r-1}\right]=0$, то будем иметь

$$\begin{aligned}N_r(t)&=R[K_r(x-t)]=\\&=R\left[(x-t)^{r-1}\right]+(-1)^r R[K_r(t-x)]=\\&=(-1)^r R[K_r(t-x)]=(-1)^r\Bigg\{I[K_r(t-x)]-\\&\qquad-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\rho}(-1)^j p_{ij}\frac{(r-1)!}{(r-j-1)!}K_{r-j}(t-x_i)\Bigg\}.\end{aligned}$$

Так как, кроме того,

$$\frac{\partial N_r}{\partial p_{kl}}=-\frac{(r-1)!}{(r-l-1)!}K_{r-l}(x_k-t),$$

то система (10) примет вид

$$\begin{aligned}&(-1)^r\int_0^1\Bigg\{-I[K_r(t-x)]+\\&\qquad+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\rho}(-1)^j p_{ij}\frac{(r-1)!}{(r-j-1)!}K_{r-j}(t-x_i)\Bigg\}\times\\&\times\frac{(r-1)!}{(r-l-1)!}K_{r-l}(x_k-t)\,dt+\sum_{\nu=l}^{r-1}\lambda_\nu\frac{\nu!}{(\nu-l)!}x_k^{\nu-l}=0 \qquad (11)\end{aligned}$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ m;\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho).$$

При подсчете стоящих в левых частях интегралов воспользуемся тем, что при любых фиксированных y и z из $[0, 1]$

$$\int_0^1 K_\nu(t-y)\, K_s(z-t)\, dt = \frac{(\nu-1)!\,(s-1)!}{(\nu+s-1)!} K_{\nu+s}(z-y). \quad (12)$$

Действительно, если $0 \leqslant z \leqslant y \leqslant 1$, то $K_\nu(t-y) \times$ $\times K_s(z-t) \equiv 0$, если же $0 \leqslant y < z \leqslant 1$, то

$$\int_0^1 K_\nu(t-y)\, K_s(z-t)\, dt = \int_y^z (t-y)^{\nu-1} (z-t)^{s-1}\, dt,$$

и последовательным интегрированием по частям получаем (12).

С учетом (12) систему (10) перепишем следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\rho} (-1)^j p_{ij} \frac{(r-1)!\,(r-1)!}{(2r-l-j-1)!} K_{2r-j-l}(x_k - x_i) +$$
$$+ (-1)^r \sum_{\nu=l}^{r-1} \lambda_\nu \frac{\nu!}{(\nu-l)!} x_k^{\nu-l} =$$
$$= \frac{(r-1)!\,(r-1)!}{(2r-l-1)!} I\,[K_{2r-l}(x_k - x)]$$
$$(k = 0, 1, \ldots, m;\ l = 0, 1, \ldots, \rho).$$

Если умножить каждое из этих уравнений на $\frac{1}{(r-1)!\,(r-1)!}$ и присоединить уравнения (11), то получим систему

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\rho} \frac{(-1)^j p_{ij}}{(2r-l-j-1)!} K_{2r-j-l}(x_k - x_i) + \\ \displaystyle + \sum_{\nu=l}^{r-1} \lambda'_\nu \frac{\nu!}{(\nu-l)!} x_k^{\nu-l} = \frac{1}{(2r-l-1)!} I\,[K_{2r-l}(x_k - x)] \\ \qquad (k = 0, 1, \ldots, m;\ l = 0, 1, \ldots, \rho), \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\mu} p_{ij} \frac{\nu!}{(\nu-j)!} x_i^{\nu-j} = I\,(x^\nu) \quad (\nu = 0, 1, \ldots, r-1) \end{array}\right. \quad (13)$$

относительно неизвестных p_{ij} и $\lambda'_\nu = (-1)^r [(r-1)!]^{-2} \lambda_\nu$.

Определить системы (13) в точности совпадает с определителем системы {(8), (9)} и, как мы установили при доказательстве леммы Д.10, этот определитель отличен от нуля. Следовательно, неоднородная система (13) имеет единственное ненулевое решение:

$$p_{ij} = p_{ij}^* \quad (i = 0, 1, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, \rho),$$
$$\lambda'_\nu = \lambda_\nu^* \quad (\nu = 0, 1, \ldots, r-1).$$

Из общих соображений ясно, что числа p_{ij}^* реализуют минимум, причем единственный, функции (5) при условиях (2).

Остается указать значения оптимальных коэффициентов p_{ij}^*.

Введем в рассмотрение так называемые фундаментальные сплайны $c_{ij}(x)$ из класса S_{mr}^{ρ}, которые однозначно определяются соотношениями

$$c_{ij}^{(l)}(x_k) = \delta_{ki} \cdot \delta_{lj} \tag{14}$$
$$(i, k = 0, 1, \ldots, m;\ j, l = 0, 1, \ldots, \rho),$$

где $\delta_{ki} = 1$ при $k = i$ и $\delta_{ki} = 0$ при $k \neq i$; δ_{lj} определяется аналогично. Для любой $f \in C^{\rho}$ интерполяционный сплайн $s(f;\ x)$ можно записать в виде

$$s(f;\ x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\rho} f^{(j)}(x_i)\, c_{ij}(x). \tag{15}$$

Покажем, что системе (13) удовлетворяют числа

$$p_{ij}^* = I[c_{ij}(x)] = \int_0^1 c_{ij}(x)\, dx, \tag{16}$$

и, следовательно, равенство (16) есть формула для вычисления оптимальных коэффициентов. С этой целью рассмотрим квадратурную формулу, задаваемую коэффициентами (16):

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\rho} p_{ij}^* f^{(j)}(x_i) + R^*(f) = L^*(f) + R^*(f).$$

В силу (15) и (16) для любого сплайна $s(x) \in S_{mr}^{\rho}$

$$R^*(s) = \int_0^1 s(x)\,dx - \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\rho} p_{ij}^* s^{(j)}(x_i) =$$

$$= \int_0^1 \left[s(x) - \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\rho} s^{(j)}(x_i)\, c_{ij}(x) \right] dx = 0.$$

В частности, если

$$\bar{s}(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} \frac{q_{kl}}{(2r-l-1)!} K_{2r-l}(x_k - x),$$

где q_{ij} связаны соотношениями (8), то, как нетрудно проверить, $\bar{s}(x) \in S_{mr}^{\rho}$ и, следовательно, $R^*(\bar{s}) = 0$. Так как $R^*(\bar{s}) = I(\bar{s}) - L^*(\bar{s})$, то этот факт можно записать в следующем виде:

$$R^*(\bar{s}) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} q_{kl}\eta_{kl} = 0, \tag{17}$$

где

$$\eta_{kl} = \frac{1}{(2r-l-1)!} I[K_{2r-l}(x_k - x)] -$$

$$- \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\rho} \frac{(-1)^j p_{ij}^*}{(2r-l-k-1)!} K_{2r-l-k}(x_k - x_i) \tag{18}$$

и q_{ij} удовлетворяют (8).

Здесь нам потребуются некоторые соображения из теории конечномерных евклидовых пространств. Каждый набор чисел $\{q_{ij}\}$ $(i = 0, 1, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, \rho)$ можно рассматривать как вектор евклидова пространства H размерности $(m+1)(\rho+1)$. Множество векторов $\{q_{ij}\} \in H$, удовлетворяющих уравнениям (8), образует в H подпространство H_0 размерности $(m+1)(\rho+1) - r$. Условия (8) означают, что каждый вектор $\{q_{ij}\} \in H_0$ ортогонален векторам

$$\{q_{ij}^{(\nu)}\} = \left\{ \frac{\nu!}{(\nu-j)!} x_i^{\nu-j} \right\} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, r-1), \tag{19}$$

координаты которых с $j < \nu$ заменены нулями.

Векторы (19) линейно независимы, и множество их линейных комбинаций образует в H подпространство $H_0^{\perp}$ размерности r — ортогональное дополнение подпространства H_0. Любой вектор из H, ортогональный каждому вектору подпространства H_0, есть линейная комбинация векторов (19). В частности, это выполняется в силу (17) для вектора $\{\eta_{kl}\}$, координаты которого заданы равенством (18). Следовательно, найдутся числа λ_ν^* ($\nu = 0, 1, \ldots, r-1$) такие, что

$$\eta_{kl} = \sum_{\nu=0}^{r-1} \lambda_\nu^* q_{kl}^{(\nu)} = \sum_{\nu=l}^{r-1} \lambda_\nu^* \frac{\nu!}{(\nu-l)!} x_k^{\nu-l}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m;\ l = 0, 1, \ldots, \rho).$$

Эти равенства, с учетом (18), как раз и означают, что p_{ij}^* и λ_ν^* удовлетворяют первым $(m+1)(\rho+1)$ уравнениям системы (13).

Далее, функции $s_\nu(x) = x^\nu$ ($\nu = 0, 1, \ldots, r-1$) удовлетворяют всем условиям, которыми задан класс сплайнов S_{mr}^ρ, т. е. $s_\nu(x) \in S_{mr}^\rho$. Поэтому

$$R^*(x^\nu) = I(x^\nu) - L^*(x^\nu) =$$

$$= I(x^\nu) - \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\mu} p_{ij}^* \frac{\nu!}{(\nu-j)!} x_i^{\nu-j} = 0$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, r-1),$$

где $\mu = \min\{\nu, \rho\}$, т. е. p_{ij}^* удовлетворяют и остальным уравнениям системы (13).

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема Д.12 [39]. *Среди всех квадратурных формул* (1) *с фиксированными узлами* $0 = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_m = 1$ *наилучшей для класса* $W^r L_2$ ($r = 1, 2, \ldots$) *является единственная формула, задаваемая коэффициентами*

$$p_{kl}^* = \int_0^1 c_{kl}(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, m;\ l = 0, 1, \ldots, \rho),$$

где $c_{kl}(x)$ — *фундаментальные сплайны, определяемые равенствами* (14).

Отметим, что аналогичными рассуждениями можно получить соответствующий результат и в периодическом случае, — для классов $\widetilde{W}^r L_2$. В этом случае оптимальные коэффициенты в формуле (1) определяются равенствами

$$p_{kl}^* = \int_0^1 \tilde{c}_{kl}(x)\,dx \quad (k=0, 1, \ldots, m-1;\ l=0, 1, \ldots, \rho),$$

где $\tilde{c}_{kl}(x)$ — 1-периодические фундаментальные сплайны из $C_\infty^{2r-\rho-2}$, совпадающие на каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0, 1, \ldots, m-1)$ с многочленом степени $2r-1$ и такие, что

$$\tilde{c}_{ij}^{(l)}(x_k) = \delta_{ki}\delta_{lj} \quad (i, k=0, 1, \ldots, m-1;\ j, l=0, 1, \ldots, \rho).$$

Исходя из определения фундаментальных сплайнов, как в периодическом, так и в непериодическом случаях можно построить алгоритмы приближенного вычисления оптимальных коэффициентов p_{kl}^*.

Для случая $\rho = r-1$ $(r=1, 2, \ldots)$ В. Л. Великин получил [10] простые формулы, дающие точные значения этих коэффициентов. Положим при $\rho \geqslant 0$

$$\begin{gathered}\bar{p}_{0l} = b_l h_1^{l+1},\quad \bar{p}_{ml} = (-1)^l b_l h_m^{l+1} \quad (l=0, 1, \ldots, \rho),\\ \bar{p}_{kl} = b_l\left[h_{k+1}^{l+1} - (-1)^l h_k^{l+1}\right] \\ (k=1, 2, \ldots, m-1;\ l=0, 1, \ldots, \rho),\end{gathered} \tag{20}$$

где $h_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$b_l = \frac{\rho+1}{l!}\sum_{s=0}^{\rho-l}\frac{(\rho+s)!\,(l+s)!}{s!\,(\rho+l+s+2)!}.$$

Оказывается, что при $\rho = r-1$ числа $\bar{p}_{kl}$ совпадают с оптимальными для класса $W^r L_2$ коэффициентами p_{kl}^* формулы (1). В. Л. Великин рассмотрел квадратурные формулы

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\rho}\bar{p}_{kl} f^{(l)}(x_k) + \bar{R}(f) \quad (\rho=0, 1, \ldots),$$

где $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$, а коэффициенты $\bar{p}_{kl} = \bar{p}_{kl}(X)$, заданные равенствами (20), определяются выбором вектора X узлов x_k (из которых $x_0 = 0$ и $x_m = 1$ закреплены). Таким образом, $\bar{R}(f) = \bar{R}_\rho(f; X)$. Пусть X^0 — вектор равноотстоящих узлов $x_k = k/m$. Тогда для класса $W^r L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty,\ r = 1, 2, \ldots)$ и для $\rho = \left[\frac{r-1}{2}\right], \left[\frac{r-1}{2}\right] + 1, \ldots, r-1$ имеют место соотношения [10]

$$\inf_X \sup_{f \in W^r L_p} \bar{R}_\rho(f; X) = \sup_{f \in W^r L_p} \bar{R}_\rho(f; X^0) =$$

$$= \frac{1}{m^r} \frac{1}{(2\rho + 2)!} \left\| \frac{d^{2\rho+2-r}}{dt^{2\rho+2-r}} \left([t(1-t)]^{\rho+1}\right) \right\|_{L_q} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

ЛИТЕРАТУРА К ДОБАВЛЕНИЮ

1. Аксень М. Б., Турецкий А. Х., О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов функций, Докл. АН СССР, **166**, № 5 (1966), 1019—1021.
2. Аксень М. Б., Турецкий А. Х., Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций, Изв. АН БССР, серия физ.-матем. наук, № 1 (1966), 14—27.
3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, «Мир», 1972.
4. Алхимова В. М., Наилучшие квадратурные формулы с равноотстоящими узлами, Докл. АН СССР **204**, № 2 (1972), 263—266.
5. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, «Наука», 1965.
6. Бернштейн С. Н., О некоторых экстремальных свойствах последовательных интегралов, Собр. соч., Изд-во АН СССР, 1954, т. II, 170—172.
7. Бусарова Т. Н., Квадратуры с наименьшей оценкой остатка для одного класса периодических функций, Исслед. по совр. проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям, Днепропетровск (1972), 16—19.
8. Бусарова Т. Н., О порядке остатка формулы прямоугольников для фиксированных функций, Исслед. по совр. проблемам суммирования и приближ. функций и их приложениям, Днепропетровск (1973).
9. Бусарова Т. Н., Наилучшие квадратурные формулы для одного класса дифференцируемых периодических функций, Укр. Матем. журнал **25**, № 3 (1973), 291—301.
10. Великин В. Л., О квадратурных формулах, связанных с эрмитовыми интерполяционными сплайнами, Иссл. по совр. проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям, Днепропетровск (1973).
11. Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, М., (1954).

12. Ибрагимов И. И., Алиев Р. М., Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций, Докл. АН СССР **162**, № 1 (1965), 23—25.
13. Ибрагимов И. И., Алиев Р. М., О некоторых наилучших кубатурных формулах, Изв. АН Аз. ССР, № 3—4 (1967), 154—161.
14. Колмогоров А. Н., О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале, Уч. зап. Моск. ун-та, вып. 30, «Математика», 3 (1939), 3—13.
15. Коман Г., Кубатурно-оптимальные формулы для некоторых классов функций, Rev. roum. math. pures et appl. **17**, № 7 (1972), 1025—1036.
16. Корнейчук Н. П., Об экстремальных свойствах периодических функций, Докл. АН УССР, серия А, № 8 (1962), 993—998.
17. Корнейчук Н. П., Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных, Матем. заметки **3**, вып. 5 (1968), 565—576.
18. Корнейчук Н. П., Лушпай Н. Е., Наилучшие квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций и кусочно-полиномиальное приближение, Изв. АН СССР, серия матем. **33**, № 6 (1969), 1416—1437.
19. Корнейчук Н. П., Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций, Изв. АН СССР, серия матем. **35**, № 1 (1971), 93—124.
20. Косюк С. Д., Нгуен Суан Нгует, К вопросу о наилучших квадратурных формулах для некоторых классов функций, Научные тр. Ташкентского ун-та, вып. 320 (1968), 58—72.
21. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, «Наука», 1967.
22. Левин М., Экстремальная задача для одного класса функций, Изв. АН Эст. ССР, серия технич. и физ.-матем. **12**, № 2 (1963), 141—145.
23. Левин М. И., Одна экстремальная задача для квадратурной формулы Маркова, Изв. АН Эст. ССР, серия технич. и физ.-матем. **18**, № 2 (1969), 249—252.
24. Левин М., Экстремальные задачи для квадратурных формул на некоторых множествах функций, Изв. АН Эст. ССР серия технич. и физ.-матем. **19**, № 4 (1970), 407—413.
25. Левин М., Одно свойство наилучших формул численного интегрирования, Изв. АН Эст. ССР серия технич. и физ.-матем. **20**, № 1 (1971), 90—91.
26. Лушпай Н. Е., Наилучшие квадратурные формулы на некоторых классах функций, «Материалы межвузовской конференции молодых ученых-математиков», Харьков (1966), 58—62.
27. Лушпай Н. Е., Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций, Изв. вузов, матем., № 12 (1969), 53—59.
28. Лушпай Н. Е., Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций, Матем. заметки **6**, вып. 4 (1969), 475—480.

29. Лушпай Н. Е., О точной оценке погрешности квадратурной формулы С. М. Никольского для дифференцируемых периодических функций, «Научные записки», Сб. работ асп. ДГУ (механ., матем.), Днепропетровск (1970), 138—144.
30. Лушпай Н. Е., Оптимальные квадратурные формулы для дифференцируемых периодических функций, Иссл. по совр. проблемам суммирования и приближения функций и их приложения, Днепропетровск (1972), 53—55.
31. Лушпай Н. Е., О наилучших кубатурных формулах для одного класса дифференцируемых функций двух переменных, Сб. работ асп. ДГУ (матем. и механика), Днепропетровск (1972), 35—39.
32. Лушпай Н. Е., Квадратурные формулы типа формулы Маркова с наименьшей оценкой остатка, Исследов. по соврем. проблемам суммиров. и приближ. функций и их приложениям, Днепропетровск (1973).
33. Лушпай Н. Е., Об одной оптимальной квадратуре для класса дифференцируемых периодических функций, Изв. вузов, матем., № 4 (131) (1973), 57—62.
34. Малоземов В. Н., Оценка точности одной квадратурной формулы для периодических функций, Вестник ЛГУ, № 1, Математика, механика, астрономия, вып. 1 (1967), 52—59.
35. Малоземов В. Н., О точности квадратурной формулы прямоугольников, Матем. заметки **2**, вып. 4 (1967), 357—360.
36. Моторный В. П., О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций, Докл. АН СССР **211**, № 5 (1973), 1060—1062.
37. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, М., 1948.
38. Шац Э. М., Об одной наилучшей кубатурной формуле, содержащей частные производные от функции, Изв. АН БССР, серия физ.-матем., № 3 (1970), 68—72.
39. Ahlberg J. H., Nilson E. N., The approximation of linear functionals, J. Soc. Ind. Appl. Math., Numer. Analysis ser. B **3** (1966), 173—182.
40. Coman Gh., Micula Gh., Optimal cubature formulae, «Rend. mat.» **4**, № 2 (1971), 303—311.
41. Coman Gh., Monosplines and optimal quadrature formulae in L_p, «Rend. mat.» **5**, № 3 (1972), 567—577.
42. Kautsky J., Optimal quadrature formulae and minimal monosplines in L_q, Jour. Austr. Math. Soc. **21**, № 1 (1970), 48—56.
43. Schoenberg I. J., Spline interpolation and best quadrature formulae, Bull. Amer. Math., Soc. **70** (1964), 143—148.

Никольский Сергей Михайлович

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

издание второе

с добавлением *Н. П. Корнейчука*

М., 1974 г., 224 стр. с илл.

Редактор *А. М. Полосуев*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*

Корректор *Е. В. Сидоркина*

Сдано в набор 24/IV 1974 г. Подписано к печати 10/X 1974 г.
Бумага 84×108$^1/_{32}$. Физ. печ. л. 7. Бум. маш. мел.

Условн. печ. л. 11,76. Уч.-изд. л. 11,23. Тираж 8000 экз. Т-16678.
Цена книги 71 коп. Заказ № 180

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

71 к.