С. М. НИКОЛЬСКИЙ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2001

УДК 517(075.8)
ББК 22.161
Н 64

Никольский С. М. **Курс математического анализа:** Учеб. для вузов — 6-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 592 с. — ISBN 978-5-9221-0160-8.

Учебник для студентов физических и механико-математических специальностей вузов написан на основе курса лекций, читаемого автором в Московском физико-техническом институте. Фактически принят как учебное пособие в некоторых втузах с повышенной программой по математике.

Книга содержит дифференциальное и интегральное исчисления функций одной и многих переменных, теорию поля, ряды и интегралы Фурье.

Учебник исчерпывает соответствующую часть программы по математике на получение звания бакалавра.

ISBN 978-5-9221-0160-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой улучшенное сокращение четвертого издания книги “Курс математического анализа”, вышедшей в 1990 г. в издательстве “Наука” в двух томах.

Изменению подверглись главы 2 и 6, а также § 7.22 о локальном относительном экстремуме. Добавлено рассмотрение вопросов линеаризации решений нелинейных уравнений и нелинейных систем уравнений.

Этот учебник соответствует, если не считать некоторых добавлений, программе курса математического анализа, читанного мною на протяжении 50 лет в Московском физико-техническом институте (МФТИ).

Я придерживаюсь точки зрения, впрочем, традиционной, что основные факты математического анализа сначала должны быть изложены для функций одной переменной, а затем уже для функций многих переменных. Здесь неизбежны повторения, но они незначительны. С другой стороны, для такой аудитории, какой являются студенты мехматов, физматов и физтехов, вполне можно переходить от одной переменной не к двум и не к трем, а сразу же к n переменным. Весь вопрос тут только в удачных обозначениях. Но они уже выработаны в журнальной и монографической литературе, целесообразность их уже проверена, и теперь они должны стать достоянием наших учебников. Такой подход обеспечивает правильную перспективу. Ведь во второй половине курса (в таких разделах, как ряды Фурье, интеграл Фурье) читателю придется овладевать представлением о бесконечномерности функциональных пространств.

В своем изложении я достаточно рано ввожу понятия n-мерного евклидова пространства, пространства со скалярным произведением, банахова пространства и широко пользуюсь этими понятиями, однако в меру необходимости выполнения программы.

Как и требуется программой, изложение курса ведется на основе интеграла Римана. Я старался аналогичные проблемы в одномерном и многомерных случаях доказывать аналогично, чтобы сэкономить силы читателя для других вопросов.

Очень деликатный вопрос: как быть с полнотой пространств L и L_2? Чтобы решить этот вопрос, я не строю абстрактные элементы, заменяющие функции, интегрируемые по Лебегу, и в основном тексте ограничиваюсь только разъяснениями о том, как соответствующий факт выглядел бы в терминах интеграла Лебега.

Я хочу отметить книги, оказавшие на меня большое влияние.

Во-первых, это “Курс анализа бесконечно малых” Ш. Ж. де ла Валле Пуссена. Двухтомник Валле Пуссена, память которого я хочу здесь почтить, я старательно изучал, будучи студентом, а теперь он служит мне настольной книгой.

Во-вторых, это книга “Введение в теорию функций действительного переменного” П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, которую я тоже в свое время старательно изучил и, следуя ей, читал свои курсы в Днепропетровском университете. Но я, кроме того, неоднократно слушал лекции этих двух выдающихся авторов, один из них — А. Н. Колмогоров — мой научный учитель.

Конечно, в улучшении этой книги участвовали коллеги по кафедре высшей математики МФТИ и вообще многие читатели. К моим благодарностям за это, выраженным в предисловиях предыдущих четырех изданиях этой книги, я хочу выразить благодарность моим коллегам по МФТИ профессору М. И. Шабунину и профессору Г. Н. Яковлеву, оказавшим мне организационную помощь в создании настоящего, пятого издания, и сотруднику кафедры высшей математики МФТИ Т. А. Петровой за самоотверженный труд по технической подготовке рукописи данного издания.

Я благодарю также Н. И. Воронину за высококвалифицированную работу по редакционной подготовке к печати этой книги.

Данная книга переведена на английский язык и выдержала уже несколько изданий в издательстве “Мир” (Москва), на испанский язык — в издательстве URMO и издательстве университета г. Бильбао, а также на латышский язык – в издательстве “Зинатне” (г. Рига).

В данный, сокращенный курс не вошли главы 17–20 предыдущих изданий как выходящие за пределы программы, хотя эти главы, безусловно, существенны для общего математического образования.

2000 г. *С. М. Никольский*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Вступление

Название “Математический анализ” представляет собой сокращенное видоизменение старого названия “Анализ бесконечно малых”. Последнее больше говорит, но оно тоже сокращенное. Название “Анализ посредством бесконечно малых” характеризовало бы предмет более точно.

Было бы лучше, если бы название отражало те объекты, которые подвергаются анализу (изучению). В классическом математическом анализе такими объектами являются прежде всего функции, т.е. переменные величины, зависящие от других переменных величин.

Мы говорим “прежде всего”, потому что дальнейшее развитие математического анализа привело к возможности изучения его методами более сложных образований, чем функции (функционалов, операторов и т.д.). Но об этом говорить пока рано. Ближайшей нашей задачей является изучение достаточно общих, встречающихся на практике функций методами бесконечно малых, или, что все равно, методами пределов. В чем заключаются эти методы — это постепенно будет разворачиваться перед читателем в дальнейшем. Скажем пока, что эти методы, в частности, приводят к очень важным операциям над функциями — дифференцирования и интегрирования.

Параграфы 1.2, 1.3 посвящены понятиям множества и функции.

Следующие три параграфа, 1.4–1.6, носят чисто вводный характер. Из них читатель получит представление об основных понятиях математического анализа, которые будут подробно в развернутом виде изучаться в этой книге, — непрерывности, производной, неопределенного и определенного интегралов. Понятием предела мы, конечно, здесь пользуемся, но вовсе его пока не определяем и не разъясняем, всецело полагаясь на интуицию читателя. Возможен и такой способ чтения книги, при котором параграфы 1.4–1.6 выпускаются, с тем чтобы впоследствии возвратиться к ним по мере ссылок на них.

§ 1.2. Множество. Интервал, отрезок

Любое собрание или совокупность каких-либо предметов называют в математике *множеством*. Например, можно говорить о множестве всех деревьев, находящихся на данной поляне, или о множестве гусей, пасущихся на ней, или о множестве всех целых чисел. Если A обозначает некоторое заданное множество предметов, а x — один из этих предметов, то говорят, что x есть *элемент* множества A, и записывают этот факт так: $x \in A$.

Если x не есть элемент A, то это записывают так: $x \bar{\in} A$ или $x \notin A$.

Если одно и то же множество оказалось обозначенным двумя буквами, A и B, пишут $A = B$, подчеркивая в случае необходимости, что здесь идет речь о теоретико-множественном равенстве, которое не надо смешивать с равенством между числами.

Если из того, что $x \in A$, всякий раз следует, что $x \in B$, то пишут $A \subset B$ и говорят,что A *входит* в B или A *есть подмножество* или *часть* B. Отдадим себе отчет в том, что при таком определении случай $A = B$ есть частный случай $A \subset B$. Ведь если не только $A \subset B$, но и $B \subset A$, то $A = B$, и наоборот.

Если множество состоит только из одного элемента x, то лучше его обозначить другой буквой, например A, потому что надо отличать логически множество, состоящее из одного элемента, от самого этого элемента. Необходимо еще формально ввести *пустое множество*, не содержащее в себе никаких элементов, которое обозначают так: $\varnothing$ (или O). По определению $O \subset A$, каково бы ни было множество A.

Из школьного курса математики мы знаем, что между действительными числами и точками прямой можно ввести взаимно однозначное соответствие *) при помощи следующего правила. Числу 0 приводится во взаимно однозначное соответствие произвольно выбранная на прямой точка O — нулевая точка. Длина некоторого определенного отрезка принимается за единицу. Каждому действительному числу $\pm a$ $(a > 0)$ приводится в соответствие точка прямой, отстоящая от нулевой точки на расстоянии, равном a, и лежащая правее или левее O, в зависимости от того, стоит ли перед a знак "+" или "−". Наоборот, если A есть какая-либо точка нашей прямой, отстоящая от O на расстоянии a, то ей приводится в соответствие число $+a$ или $-a$, в зависимости от того, лежит ли A правее или левее O.

Прямая, все точки которой описанным выше образом приведены в соответствие со всеми действительными числами, называется *числовой прямой* или *действительной осью*. Точки ее называются *числами*, которые они представляют. Таким образом, можно говорить о точке $0, 1, 1{,}2, \sqrt{2}$ и т.д. Мы будем позволять себе числа называть *точками* (*числовой прямой*) и, наоборот, точки *числами*.

Пусть числа (точки) a и b удовлетворяют неравенству $a < b$.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* (с концами a, b) или *сегментом* и обозначается так: $[a, b]$.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *интервалом* (с концами a, b) или *открытым отрезком* и обозначается так: (a, b).

Множества чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, обозначаются соответственно $[a, b)$, $(a, b]$ и называются *полуоткрытыми отрезками* или *полуинтервалами*. Первый, например, *закрыт* слева и *открыт* справа.

Часто рассматривают еще множества, называемые *бесконечными интервалами* или *полуинтервалами*: 1) $(-\infty, \infty)$; 2) $(-\infty, a]$; 3) $(-\infty, a)$; 4) (a, ∞); 5) $[a, \infty)$.

---

*) По этому поводу см. дальше § 2.5.

Первое из них есть множество всех действительных чисел (действительная прямая); остальные состоят из всех чисел, для которых соответственно: 2) $x \leqslant a$, 3) $x < a$, 4) $a < x$, 5) $a \leqslant x$.

В связи с этой терминологией удобно употреблять слова *конечное* или *бесконечное число*. Конечное число — это просто число. Бесконечное же число на самом деле не есть число — это символ $+\infty$ или $-\infty$.

Отметим, что у отрезка $[a, b]$ концы всегда конечны. У интервала же (a, b) "концы" могут быть конечными и бесконечными числами.

Пишут еще

$$[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}, \qquad (a, b) = \{x : a < x < b\}.$$

Например, правая часть первого из этих множественных равенств читается так: множество всех чисел (точек) x, для которых выполняются неравенства $a \leqslant x \leqslant b$.

Пусть A и B — два множества любой природы. *Суммой* или *объединением* A и B называется множество, обозначаемое через $A + B$ или $A \cup B$, представляющее собой совокупность всех элементов A и B.

Разностью A и B называется множество, обозначаемое через $A \setminus B$ или $A - B$, представляющее собой совокупность всех элементов A, не принадлежащих B.

Пересечением A и B называется множество, обозначаемое через AB или $A \cap B$, представляющее собой совокупность всех элементов, каждый из которых принадлежит как A, так и B.

Справедливо *теоретико-множественное равенство*

$$(A \pm B)C = AC \pm BC, \tag{1}$$

где A, B, C — произвольные множества. Например, в случае "+" оно доказывается так. Если элемент x принадлежит левой части (1), то он принадлежит одновременно как $A + B$, так и C. Но тогда x обязательно принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Пусть для определенности $x \in A$; тогда $x \in AC$, а следовательно, и правой части (1). Наоборот, пусть x принадлежит правой части равенства; тогда x принадлежит одному из множеств AC или BC. Пусть для определенности $x \in AC$; тогда x принадлежит как A, так и C, следовательно, x принадлежит как $A + B$, так и C, т.е. левой части (1).

Понятие суммы множеств естественно распространяется на любое конечное и даже бесконечное число слагаемых (множеств).

Выражения

$$\bigcup_{k=1}^{N} A_k = A_1 + \ldots + A_N, \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + A_2 + \ldots$$

обозначают объединения всех элементов множеств $A_1, \ldots, A_N$, соответственно $A_1, A_2, \ldots$, и называются *суммами* или *объединениями* указанных множеств.

Справедливы равенства

$$C\bigcup_{k=1}^{N} A_k = \bigcup_{k=1}^{N} CA_k, \qquad C\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} CA_k \tag{2}$$

(аналогичные (1) в случае “+”), где C — произвольное множество.

Примеры.

1) $[0,2]+[1,3]=[0,3]$; 2) $[0,2]-[1,3]=[0,1)$;

3) $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} [k, k+1] = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} [k, k+1) = \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел.

§ 1.3. Функция

Пусть E — множество чисел, и пусть в силу некоторого вполне определенного закона каждому числу x из E приведено в соответствие (одно) число y; тогда говорят, что на E задана *функция* (однозначная), которую записывают так:

$$y = f(x), \qquad x \in E. \tag{1}$$

Это определение функции предложено Н. И. Лобачевским и Л. Дирихле *). Множество E называют *областью задания* или *определения функции* $f(x)$. Говорят также, что задана *независимая переменная* x, которая может принимать частные значения x из множества E, и каждому $x \in E$ в силу упомянутого закона приведено в соответствие определенное значение (число) другой переменной y, называемой *функцией* или *зависимой переменной*. Независимую переменную называют *аргументом*.

Для выражения понятия функции употребляют геометрический язык. Говорят, что заданы множество E точек x действительной прямой — область определения или задания функции, и закон, в силу которого каждой точке $x \in E$ приводится в соответствие число $y = f(x)$.

Если мы хотим говорить о функции как о некотором законе, приводящем в соответствие каждому числу $x \in E$ некоторое число y, то достаточно ее обозначить одной буквой f. Символ $f(x)$ обозначает число y, которое в силу закона f соответствует значению $x \in E$. Если, например, число 1 принадлежит области E задания функции f, то $f(1)$ есть *значение функции* f в точке $x = 1$. Если 1 не принадлежит E ($1 \,\bar{\in}\, E$), то говорят, что функция f *не определена* в точке $x = 1$.

Множество E_1 всех значений $y = f(x)$, где $x \in E$, называется *образом* множества E при помощи функции f. Иногда пишут в таком случае $E_1 = f(E)$. Но это обозначение надо употреблять с осторожностью, по

*) Н. И. Лобачевский (1792–1856) — великий русский математик, создатель неевклидовой геометрии. Л. Дирихле (1805–1859) — немецкий математик.

В сущности это определение функции дано в трудах великого математика Л. Эйлера (1707–1783) — академика Российской академии наук.

возможности разъясняя его всякий раз, когда оно употребляется, чтобы не было путаницы с обозначением $y = f(x)$, где x есть произвольная точка (число), принадлежащая множеству E, а y — соответствующая ей при помощи функции (закона f) точка множества E_1. Говорят еще, что функция f *отображает* множество E *на* множество E_1.

Если образ $E_1 = f(E) \subset A$, где A — множество чисел, вообще, не совпадающее с E_1, то говорят, что функция f *отображает* E *в* A.

Для функций f и φ, заданных на одном и том же множестве E, определяются *сумма* $f+\varphi$, *разность* $f-\varphi$, *произведение* $f\varphi$, *частное* f/φ. Это новые функции, значения которых выражаются соответственно формулами

$$f(x)+\varphi(x), \qquad f(x)-\varphi(x), \qquad f(x)\varphi(x), \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \qquad x \in E, \tag{2}$$

где в случае частного предполагается, что $\varphi(x) \neq 0$ на E.

Для обозначения функции употребляют и любые другие буквы, F, Φ, $\Psi, \ldots$, так же как вместо x, y можно писать z, u, v, $w, \ldots$

Если функция f отображает множество E в E_1, а функция F отображает множество E_1 во множество E_2, то функцию $z = F(f(x))$ называют *функцией от функции*, или *сложной функцией*, или *суперпозицией* f и F. Она определена на множестве E и отображает E в E_2.

Возможна сложная функция, в образовании которой участвует n функций: $z = F_1(F_2(F_3 \ldots (F_n(x)) \ldots))$.

Практика доставляет нам много примеров функций. Например, площадь S круга есть функция его радиуса r, выражаемая формулой $S = \pi r^2$. Эта функция определена, очевидно, на множестве всех положительных чисел r.

Можно, не связывая вопрос с площадью круга, говорить о зависимости между переменными S и r, выраженной формулой $S = \pi r^2$. Функция $S = \varphi(r)$, заданная этой формулой, определена на всей действительной оси, т.е. для всех действительных чисел r — не обязательно только положительных.

Ниже приводятся примеры функций, заданных формулами: 1) $y = \sqrt{1-x^2}$; 2) $y = \lg(1+x)$; 3) $y = x-1$; 4) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$; 5) $y = \arcsin x$. Мы имеем в виду действительные функции, принимающие действительные значения y для действительных значений аргумента x. Нетрудно видеть, что областями определения приведенных функций являются соответственно: 1) отрезок $[-1, 1] = \{-1 \leqslant x \leqslant 1\}$; 2) множество $x > -1$; 3) вся действительная ось; 4) вся действительная ось, из которой исключена точка $x = 1$; 5) отрезок $[-1, +1]$.

Функции, определяемые в примерах 1) и 2), можно рассматривать как функции от функции: 1) $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - v$, $v = x^2$; 2) $y = \lg u$, $u = 1 + x$.

Важным средством задания функции является график. Зададим прямоугольную систему координат x, y (рис. 1.1), на оси x отметим отрезок

$[a, b]$ и изобразим любую кривую Γ, обладающую следующим свойством: какова бы ни была точка $x \in [a, b]$, прямая, проходящая через нее параллельно оси y, пересекает кривую Γ в одной точке A. Такую заданную в прямоугольной (декартовой) системе координат кривую Γ мы будем называть *графиком*. График определяет функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следующим образом. Если x есть произвольная точка отрезка $[a, b]$, то соответствующее значение $y = f(x)$ определяется как ордината точки A (см. рис. 1.1). Следовательно, при помощи графика дается вполне определенный закон соответствия между x и $y = f(x)$.

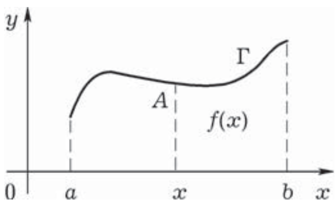

Рис. 1.1

Мы задали функцию при помощи графика на множестве E, являющемся отрезком $[a, b]$. В других случаях E может быть интервалом, полуинтервалом, всей действительной осью, множеством рациональных точек, принадлежащих данному интервалу, и т. д.

Зададим на некотором интервале (a, b) функцию $f(x)$ и произвольное (постоянное) число $\alpha \neq 0$. С помощью α и f можно сконструировать ряд других функций: 1) $\alpha f(x)$; 2) $f(x) + \alpha$; 3) $f(x - \alpha)$; 4) $f(\alpha x)$. Функции 1) и 2) определены на том же интервале (a, b). Ординаты графика функции 1) увеличены в α раз сравнительно с соответствующими ординатами $f(x)$. График функции 2) получается из графика f поднятием последнего на величину α *); график же функции 3) получается из графика f путем сдвига последнего вправо на величину α. Наконец, функция 4) при $\alpha > 0$ определена, очевидно, на интервале $(a/\alpha, b/\alpha)$; график ее получается из графика f путем равномерного его сжатия в α раз.

Функцию f называют *четной* или *нечетной*, если она определена на множестве, симметричном относительно нулевой точки, и обладает на нем свойством $f(-x) = f(x)$ или свойством $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции, очевидно, симметричен относительно оси y, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Например, x^{2k} (k натуральное), $\cos x$, $\ln|x|$, $\sqrt{1+x^2}$, $f(|x|)$ — четные функции, а x^{2k+1} ($k \geqslant 0$ целое), $\sin x$, $x\sqrt{1+x^2}$, $xf(|kx|)$ — нечетные функции.

Нетрудно видеть, что произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция.

Конечно, большинство функций не четны и не нечетны.

Функция на различных частях области ее определения может быть задана различными формулами. Например, пусть поезд, вышедший из пункта A в момент $t = 0$, шел в течение двух часов со скоростью 100 *км* в час и, прибыв в пункт B, стоял там один час, а затем шел дальше в

*) Конечно, при $\alpha < 0$ поднятие или сдвиг вправо на величину α надо понимать как соответственно опускание или сдвиг влево на величину $|\alpha|$.

течение трех часов со скоростью 80 *км* в час. Тогда функция $s = f(t)$, выражающая расстояние (в километрах) от поезда до A в момент времени t, очевидно, будет определяться следующими тремя формулами:

$$f(t) = \begin{cases} 100t, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ 200, & 2 \leqslant t \leqslant 3, \\ 200 + 80(t-3), & 3 \leqslant t \leqslant 6. \end{cases}$$

Функция может быть задана в виде таблицы. Например, мы могли бы измерять температуру T воздуха через каждый час. Тогда каждому моменту времени $t = 0, 1, 2, \dots, 24$ соответствовало бы определенное число T в виде таблицы:

t	0	1	2	3	...
T	T_0	T_1	T_2	T_3	...

Таким образом, мы получили бы функцию $T = f(t)$, определенную на множестве E целых чисел от 0 до 24, заданную таблицей.

Если функция $y = f(x)$ задана на некотором множестве E формулой, то всегда можно считать, что ей соответствует вполне определенный график, определяющий геометрически эту функцию. Обратное совсем не ясно: если функция задана произвольным графиком, то может ли она быть выраженной некоторой формулой? Это очень сложный вопрос. Чтобы ответить на него, надо отдать себе отчет в том, какой смысл мы вкладываем в слово “формула”. Выше, когда мы говорили, что данная функция $y = f(x)$ выражается формулой, мы молчаливо считали, что при этом y получается из x при помощи конечного числа таких операций, как сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня той или иной степени, логарифмирование, взятие операций $\sin$, $\cos$, $\arcsin$ и других алгебраических и тригонометрических операций.

Математический анализ дает средства для значительного расширения понятия формулы. Весьма важным таким средством является разложение функции в бесконечный ряд по элементарным функциям.

Многие, а может быть и все, встречающиеся на практике функции могут быть изображены формулой, представляющей собой некоторый бесконечный ряд, членами которого являются элементарные функции, которые будут определены ниже. Но сейчас об этом говорить не время. Мы еще не готовы к этому.

Так или иначе, задана ли функция $f(x)$ формулой или же она задана другим каким-либо способом, например при помощи графика, она уже может служить объектом изучения средствами математического анализа, если она удовлетворяет некоторым дополнительным общим свойствам, таким как непрерывность, монотонность, выпуклость, дифференцируемость и др. Но об этом будет идти речь дальше.

Важнейшим средством изучения функции является понятие предела, являющееся основным понятием математического анализа. Следующая глава посвящена этому понятию.

Если каждому числу x, принадлежащему данному множеству E чисел, в силу некоторого закона соответствует определенное множество e_x чисел y, то говорят, что этим законом определена *многозначная функция* $y = f(x)$. Если окажется, что e_x для каждого $x \in E$ состоит только из одного числа y, то мы получим однозначную функцию.

Однозначную функцию называют просто "функцией" без добавления прилагательного "однозначная", если только это не приводит к недоразумениям.

Алгебра и тригонометрия доставляют нам примеры многозначных функций; такими являются функции: $\sqrt{x}$, $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arctg} x$, ...

Функция $\sqrt{x}$ определена для $x \geqslant 0$. Она двузначна *) для $x > 0$: каждому положительному x соответствуют два действительных числа, отличающихся между собой знаками, квадраты которых равны x. Что же касается функции $\operatorname{Arcsin} x$, то она бесконечнозначна. Она приводит в соответствие каждому значению x из отрезка $[-1, +1]$ бесконечное множество значений y, которые могут быть записаны по формуле

$$y = (-1)^k \arcsin x + k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Выше мы говорили о функциях от одной переменной. Но можно говорить также о функциях двух, трех и, вообще, n переменных.

Функция от двух переменных определяется следующим образом. Рассматривается множество E пар чисел (x, y). При этом имеются в виду *упорядоченные* пары. Это значит, что две пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными (совпадающими) тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Если в силу некоторого закона каждой паре $(x, y) \in E$ приведено в соответствие число z, то говорят, что этим определена на множестве E *функция* $z = f(x, y)$ *от двух переменных*, x и y.

Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует на плоскости, где введена декартова система координат, точка с абсциссой x и ординатой y и, наоборот, каждой точке таким образом соответствует пара (x, y), то можно говорить, что наша функция $f(x, y)$ задана на множестве E точек плоскости.

Функции $z = f(x, y)$ от двух переменных изображают в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат x, y, z, в виде геометрического места точек $(x, y, f(x, y))$, проекции которых на плоскость x, y принадлежат множеству E определения f.

Например, таким геометрическим местом для функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

*) Символ $\sqrt[k]{x}$, $k = 2, 3, \ldots$, мы будем понимать всюду, если это не оговорено особо, как арифметическое значение корня k-й степени из $x \geqslant 0$, т.е. как неотрицательное число, k-я степень которого равна x.

является верхняя половина шаровой поверхности радиуса 1 с центром в нулевой точке.

В этом же духе можно определить функцию трех переменных. Областью ее определения может теперь служить некоторое множество E упорядоченных троек чисел (x, y, z), или, что все равно, им соответствующих точек трехмерного пространства, где введена декартова система координат.

Если каждой тройке чисел (точке трехмерного пространства) $(x, y, z) \in E$ в силу некоторого закона соответствует число u, то говорят, что этим определена на E функция $u = F(x, y, z)$.

Аналогично можно рассматривать множество E упорядоченных систем $(x_1, \ldots, x_n)$ из n чисел, где n — заданное натуральное число. Опять, если каждой такой системе, принадлежащей E, соответствует в силу некоторого закона число z, то говорят, что z есть *функция от переменных* $x_1, \ldots, x_n$, определенная на множестве E, и записывают эту функцию в виде $z = F(x_1, \ldots, x_n)$.

В случае $n > 3$ в нашем распоряжении уже нет реального n-мерного пространства, чтобы использовать его для изображения систем $(x_1, \ldots \ldots, x_n)$ в виде принадлежащих ему точек. Но математики выдумали n-мерное пространство, и оно им благополучно служит, и притом не хуже, чем реальное трехмерное пространство. Именно, *n-мерным пространством* называется множество всевозможных систем n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ (см. § 6.1).

Если две функции, f и φ, от n переменных заданы на одном и том же множестве E систем $(x_1, \ldots, x_n)$ — точек n-мерного пространства, то можно определить сумму $f + \varphi$, разность $f - \varphi$, произведение $f\varphi$ и частное f/φ как функции, определенные на E при помощи равенств, аналогичных равенствам (2), где надо только числа x заменить системами $(x_1, \ldots, x_n)$. Естественным образом определяются также сложные функции, такие как $f(\varphi(x, y),\ \psi(x, y, z)) = F(x, y, z)$, где (x, y, z) — тройки чисел, принадлежащие некоторому множеству троек.

Ниже приводится несколько примеров функций многих переменных, заданных посредством элементарных формул.

Пример 1. $u = Ax + By + Cz + D$, где A, B, C, D — заданные постоянные действительные числа, есть линейная функция от трех переменных x, y, z. Она задана на всем трехмерном пространстве. Более общая линейная функция от n переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ задается формулой $u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$, где $a_1, \ldots, a_n, b$ — заданные постоянные числа. Эта формула определена в любой точке $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства, или, как еще говорят, на всем n-мерном пространстве.

Пример 2. $z = \lg \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Эта действительная функция задана на области, представляющей собой круг радиуса 1 с центром в $(0, 0)$, из которого удалены все граничные точки, т.е. точки окружности радиуса 1 с центром $(0, 0)$. Для этих точек наша функция не определена, потому что $\lg 0$ не имеет смысла.

Пример 3. Функция

$$z = f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad y \geqslant 0, \\ 1 & \text{для} \quad y < 0 \end{cases}$$

геометрически изображается двумя параллельными плоскостями, не связанными между собой. Расположение их по отношению к системе координат x, y, z очевидно.

Функция от одной переменной может быть задана неявным образом при помощи равенства

$$F(x, y) = 0, \tag{3}$$

где F есть функция от двух переменных x и y.

Пусть на некотором множестве G точек (x, y) задана функция F. Равенство (3) определяет некоторое подмножество Ω множества G, на котором функция F равна нулю. Конечно, в частности, Ω может быть пустым множеством. Пусть Ω — непустое множество, и пусть E есть множество (очевидно, непустое) таких значений x (чисел), которым соответствует хотя бы один y так, что пара (x, y) принадлежит Ω. Таким образом, E есть множество всех чисел x, каждому из которых соответствует непустое множество e_x чисел y так, что $(x, y) \in \Omega$, или, что все равно, так, что для указанной пары (x, y) выполняется равенство (3). Этим определена на множестве E некоторая функция $y = \varphi(x)$ от x, вообще говоря, многозначная. В этом случае говорят, что функция φ *определена неявно* при помощи равенства (3). Для нее, очевидно, выполняется тождество

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad x \in E.$$

По аналогии можно также определить функцию $x = \psi(y)$ от переменной y, определяемую неявно при помощи равенства (3). Для нее выполняется тождество

$$F(\psi(y), y) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad y \in E_1,$$

где E_1 есть некоторое множество чисел. Говорят еще, что функция $y = \varphi(x)$ (или $x = \psi(y)$) *удовлетворяет уравнению* (3).

Функцию $x = \psi(y)$ называют *обратной* по отношению к функции $y = \varphi(x)$.

Пример 4. Уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{4}$$

где $r > 0$, неявно определяет двузначную функцию от одной переменной

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \qquad -r \leqslant x \leqslant r;$$

впрочем, при $x = \pm r$ она однозначна.

Естественно считать, что эта двузначная функция распределяется на две непрерывные однозначные функции $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$. Графики их (полуокружности) в совокупности дают окружность радиуса r с центром в начале координат. Эта окружность есть геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению (4).

Перейдем к более общему n-мерному случаю. Пусть на некотором множестве G точек $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства задана функция $F(x_1, \ldots, x_n)$. Равенство

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{5}$$

определяет некоторое подмножество Ω множества G, на котором функция F равна нулю. Пусть Ω — непустое множество, и пусть E — множество (непустое!) таких систем $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, которым соответствует хотя бы одно значение x_n такое, что точка $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит Ω.Таким образом, E есть множество всех систем $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, каждой из которых соответствует непустое множество $e_{x_1, \ldots, x_{n-1}}$ чисел x_n таких, что $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, или, что все равно, таких, что для $(x_1, \ldots, x_n)$ выполняется равенство (5). Этим определена на множестве E некоторая функция $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ от $x_1, \ldots, x_{n-1}$, вообще говоря, многозначная. Говорят, что функция φ определена неявно при помощи равенства (5). Для нее, очевидно, выполняется тождество

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) \equiv 0, \qquad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E.$$

Элементарные функции.

1. *Постоянная функция* C. Каждому действительному числу x соответствует y, равный одному и тому же числу C. График этой функции (в прямоугольной системе координат) есть прямая, параллельная оси x, находящаяся на расстоянии $|C|$ от оси x и расположенная выше оси x, если $C > 0$, и ниже оси x, если $C < 0$.

2. *Степенная функция* x^n $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$. При положительном целом n функция x^n определена на всей действительной оси. При отрицательных целых n она определена на всей действительной оси, за исключением точки $x = 0$. Неудобно во всех случаях считать 0^0 вполне определенным числом (см. далее § 5.14). Конечно, например, при рассмотрении функции $y = x^0$ может оказаться удобным формально считать, что $0^0 = 1$. Ведь тогда эта функция будет иметь непрерывный график (прямую, параллельную оси x) для всех значений x.

На рис. 1.2 приведены графики функций $y = x$, x^2, x^3, x^4.

3. *Многочленом степени* n называется функция вида

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — *постоянные коэффициенты* и n есть заданное натуральное число. Многочлен степени n получается из постоянных a_k, $k = 0, \ldots, n$, и функций $x, x^2, \ldots, x^n$ при помощи конечного числа арифметических действий: сложения, вычитания и умножения.

Многочлен называют также *целой рациональной функцией* (*степени* n). Областью его определения является вся действительная ось.

4. *Рациональной функцией* называется функция вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ — некоторые многочлены ($b_m \neq 0$).

Рациональная функция определена для всех x действительной оси, кроме нулей многочлена Q, т.е. точек x, для которых $Q(x) = 0$. Количество таких точек не превышает m.

Рациональная функция получается из некоторых постоянных и функций вида x^k (k натуральное) путем применения к ним арифметических действий (в конечном числе): сложения, вычитания, умножения и деления.

5. *Степенная функция* x^a (a — постоянное число) изучается в школьном курсе алгебры. Однако не все, связанное с этой функцией, полностью обосновывается в обычном школьном курсе. Например, определение x^a, когда a есть иррациональное число, основано на достаточно

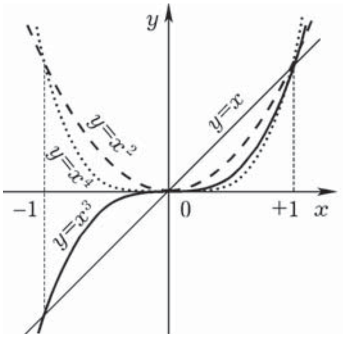

Рис. 1.2

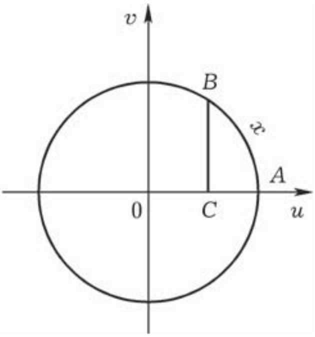

Рис. 1.3

тонких понятиях из теории пределов. После того как будет изложена теория пределов, мы вернемся к функции x^a, дадим ее исчерпывающее определение и докажем ее свойства.

6. *Показательная функция* a^x ($a > 0$). Эта функция также известна из школьного курса алгебры. Однако про нее, так же как и про степенную функцию, можно сказать, что связанные с нею определения и свойства обычно не полностью получают обоснование в школьном курсе. Поэтому к функции a^x мы еще вернемся. Обратная функция к a^x есть функция $\log_a x$.

7. *Функция* $\sin x$ известна читателю из курса тригонометрии. Она определяется там из геометрических соображений. Напомним определение $\sin x$. Зададим число x. Отложим на окружности радиуса 1 от начальной точки A (рис. 1.3) дугу длины $|x|$ в направлении, противоположном движению часовой стрелки, если $x > 0$, или в направлении движения часовой стрелки, если $x < 0$. Длина дуги исчисляется в радианах. Пусть B есть конец дуги. Тогда ордината точки B есть $\sin x$.

В этом же известном читателю духе определяются функции $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ и устанавливаются их свойства.

Затем определяются обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, ...

Все перечисленные в пп. 1–7 функции могут быть названы *простейшими элементарными функциями.* Всякая функция, составленная из

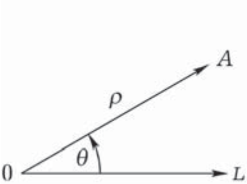

Рис. 1.4

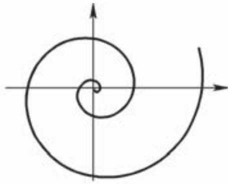

Рис. 1.5

простейших элементарных функций с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и функции от функции, если количество примененных при этом указанных операций конечно, называется *элементарной функцией.* Такую функцию мы и называем *функцией, заданной формулой.*

Примеры элементарных функций: $\sin x^2$, $(\sin x)^2$, $\operatorname{tg} \lg \sqrt{1-x^2}$, $\cos n \arccos x$, $x^x = a^{x \log_a x}$ $(a > 0)$.

П о л я р н а я с и с т е м а к о о р д и н а т. В плоскости зададим луч OL (*полярную ось*), выходящий из точки O — *полюса полярной системы координат* (рис. 1.4).

Произвольная точка A плоскости определяется парой чисел (ρ, θ) — ее *полярными координатами*, где ρ — расстояние A до O, а θ — выраженный в радианах угол между OL и OA. Точка O исключительная. Она определяется парой $(0, \theta)$, где θ — произвольное число. Угол θ

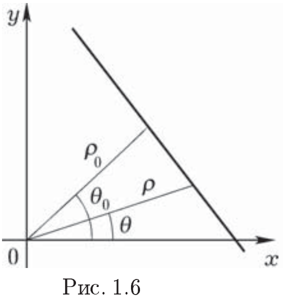

Рис. 1.6

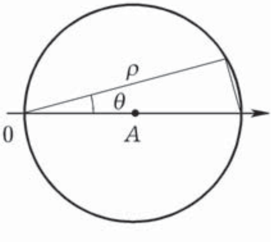

Рис. 1.7

отсчитывается против часовой стрелки. Функцию $\rho = f(\theta)$, заданную на интервале (отрезке или произвольном множестве E значений θ), можно интерпретировать как множество точек (ρ, θ) плоскости, где $\theta \in E$, $\rho = f(\theta)$. Многие кривые на плоскости могут быть описаны в полярных координатах соответствующими функциями $\rho = f(\theta)$ (многозначными или однозначными). Например, 1) функция $\rho = a^\theta$, $a > 0$,

$-\infty < \theta < \infty$, описывает в полярных координатах спираль Архимеда (рис. 1.5); 2) функция

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos(\theta - \theta_0)}, \qquad \theta \in \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2},\ \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \rho_0 > 0,$$

описывает такую прямую, что опущенный на нее из полюса O перпендикуляр имеет длину ρ_0 и образует с полярной осью угол θ_0 (рис. 1.6); 3) функция $\rho = 2\cos\theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, описывает окружность радиуса 1 с центром в точке $A(1, 0)$ (рис. 1.7).

§ 1.4. Понятие непрерывности функции

На рис. 1.8 изображен график функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Его естественно назвать *непрерывным графиком*, потому что он может быть нарисован одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги. Зададим произвольную точку (число) $x \in [a, b]$. Близкая к ней

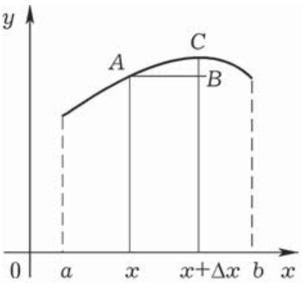

Рис. 1.8

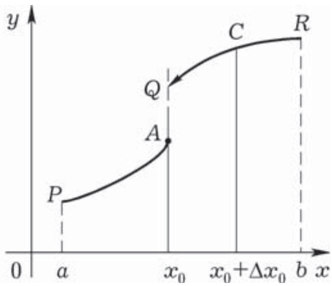

Рис. 1.9

другая точка $x' \in [a, b]$ может быть записана в виде $x' = x + \Delta x$, где Δx есть число, положительное или отрицательное, называемое *приращением* x. Разность

$$\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением функции* f в точке x, соответствующим приращению Δx. На рис. 1.8 Δy равно длине отрезка BC.

Будем стремить Δx непрерывно к нулю; тогда для рассматриваемой функции, очевидно, и Δy будет стремиться к нулю:

$$\Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь график, изображенный на рис. 1.9. Он состоит из двух непрерывных кусков PA и QR. Однако эти куски не соединены непрерывно, и потому график естественно назвать *разрывным*. Чтобы график изображал однозначную функцию $y = F(x)$ в точке x_0, условимся, что $F(x_0)$ равно длине отрезка, соединяющего A и x_0; в знак этого точка A изображена на графике жирно, в то время как у точки Q нарисована стрелка, указывающая, что Q не принадлежит графику. Если бы точка Q принадлежала графику, то функция f была бы двузначной в точке x_0.

Придадим теперь x_0 приращение Δx_0 и определим соответствующее приращение функции:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0).$$

Если мы будем Δx_0 стремить непрерывно к нулю, то уже нельзя будет сказать, что ΔF стремится к нулю. Для отрицательных Δx_0, стремящихся к нулю, это так, но для положительных вовсе не так: из рисунка видно, что если Δx_0, оставаясь положительным, стремится к нулю, то соответствующее приращение ΔF при этом стремится к положительному числу, равному длине отрезка AQ.

После этих рассмотрений естественно ввести следующее определение (принадлежащее Коши). Функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *непрерывной в точке* x этого отрезка, если приращение ее в этой точке, соответствующее приращению Δx *), стремится к нулю при любом способе стремления Δx к нулю. Это свойство (непрерывности в x) записывается в виде соотношения (1), или еще так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{2}$$

Запись (2) читается так: предел Δy равен нулю, когда Δx стремится к нулю по любому закону. Впрочем, выражение “по любому закону” обычно опускают, подразумевая его.

Если определенная на $[a, b]$ функция f не является непрерывной в точке $x \in [a, b]$, т.е. если для нее не выполняется свойство (2) хотя бы при одном способе стремления Δx к нулю, то она называется *разрывной в точке* x.

Функция, изображенная на рис. 1.8, непрерывна в любой точке $x \in$ $\in [a, b]$, функция же, изображенная на рис. 1.9, очевидно, непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$, за исключением точки x_0, потому что для последней соотношение (2) не выполняется, когда $\Delta x_0 \to 0$, оставаясь положительным.

Данное определение непрерывности функции в точке, само по себе совершенно корректное, базируется пока на интуитивном понимании понятия предела. После того как будет изложена теория пределов, это определение, которое может быть расширено и на случай функций многих переменных, получит полное обоснование.

Функция, непрерывная в любой точке отрезка (интервала), называется *непрерывной* на нем.

Непрерывная функция математически выражает свойство, с которым нам приходится часто встречаться на практике, заключающееся в том, что малому приращению независимой переменной соответствует малое приращение зависимой от нее переменной (функции).

*) Здесь имеется в виду Δx такое, что $x + \Delta x \in [a, b]$.

Прекрасными примерами непрерывной функции могут служить различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимости пути s, пройденного телом, от времени t. Время и пространство непрерывны, при этом тот или иной закон движения $s = f(t)$ устанавливает между ними определенную непрерывную связь, характеризующуюся тем, что малому приращению времени соответствует малое приращение пути.

К абстракции непрерывности человек пришел, наблюдая окружающие его так называемые сплошные среды: твердые, жидкие или газообразные, например металлы, воду, воздух. На самом деле, всякая физическая среда представляет собой скопление большого числа отделенных друг от друга движущихся частиц. Однако эти частицы и расстояния между ними настолько малы по сравнению с объемами сред, с которыми приходится иметь дело в макроскопических физических явлениях, что многие такие явления можно достаточно хорошо изучать, если считать приближенно массу изучаемой среды непрерывно распределенной без всяких просветов в занятом ею пространстве. На таком допущении базируются многие физические дисциплины, например гидродинамика, аэродинамика, теория упругости. Математическое понятие непрерывности, естественно, играет в этих дисциплинах, как и во многих других, большую роль.

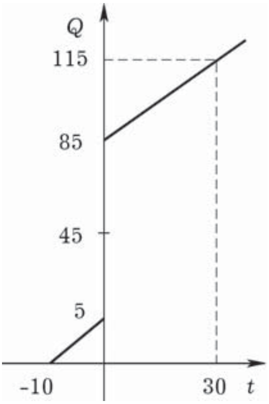

Рис. 1.10

Непрерывные функции образуют основной класс функций, с которым оперирует математический анализ.

Примерами непрерывных функций могут служить элементарные функции, определенные в § 1.3. Они непрерывны на интервалах изменения x, где они определены.

Разрывные функции в математике отражают скачкообразные процессы, встречающиеся в природе. При ударе, например, величина скорости тела меняется скачкообразно. Многие качественные переходы сопровождаются скачками. Например, зависимость $Q = f(t)$ между температурой t одного грамма воды (льда) и количеством Q калорий находящегося в ней тепла, когда t изменяется между -10° и $+10^\circ$, если принять условно, что при -10° величина Q равна нулю, выражается следующими формулами:

$$Q(t) = \begin{cases} 0{,}5t + 5, & -10 \leqslant t < 0, \\ t + 85, & \quad 0 < t < 30. \end{cases}$$

Мы считаем, что теплоемкость льда равна 0,5. При $t = 0$ эта функция оказывается неопределенной — многозначной; можно для удобства условиться, что при $t = 0$ она принимает вполне определенное значение, например $f(0) = 45$. Функция $Q = f(t)$, разрывная при $t = 0$, изображена на рис. 1.10.

§ 1.5. Производная

Понятие производной возникло как результат многовековых усилий, направленных на решение таких задач, как задача о проведении касательной к кривой или о вычислении скорости неравномерного движения. Подобные задачи и задача о вычислении площади криволинейной фигуры интересовали математиков с древних времен. В XVII веке в работах Ньютона и Лейбница эта деятельность получила определенное теоретическое завершение. Ньютон и Лейбниц создали общие методы дифференцирования и интегрирования функций и доказали важную теорему, носящую их имя, устанавливающую тесную связь между операциями дифференцирования и интегрирования. Надо, однако, иметь в виду, что современное изложение этих вопросов существенно отличается от того, как они излагались во времена Ньютона и Лейбница. В рассуждениях и понятиях, которыми оперировали в то время, с нашей точки зрения можно найти много неясного; да и сами математики того времени это сознавали, о чем свидетельствуют ожесточенные дискуссии, которые происходили по этим вопросам между ними.

Современный математический анализ базируется на понятии предела, которое выкристаллизовалось в четкую формулировку не так уж давно — в первой половине девятнадцатого столетия. Большая заслуга в этом принадлежит французскому математику Коши.

Понятие предела существенно используется в определениях понятий непрерывности функции, производной, интеграла.

Мгновенная скорость. Пусть точка движется по прямой и функция $s = f(t)$ выражает зависимость от времени $t \in (a, b)$ ее расстояния (с учетом знака *)) s до некоторой начальной точки O прямой. В момент времени $t \in (a, b)$ точка находится на расстоянии $s = f(t)$ от O. В момент же времени $t + \Delta t \in (a, b)$, $\Delta t \neq 0$, она находится на расстоянии $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ от O. Средняя скорость ее на промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Мгновенную или истинную скорость v точки в момент времени t естественно определить как предел, к которому стремится $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Касательная к кривой. Рассмотрим какую-нибудь непрерывную кривую **) Γ в плоскости или пространстве (рис. 1.11).

---

*) Точнее, s есть координата точки прямой, где заданы начальная точка O, единичный отрезок и положительное направление.

**) Строгое определение непрерывной кривой будет дано в § 6.5. Согласно этому определению произвольная точка $A \in \Gamma$ непрерывно зависит от параметра (числа) t, пробегающего интервал или отрезок. Если точки $A, A' \in \Gamma$ определяются соответственно значениями t, t' параметра и если t' стремится к t, то говорят, что A' стремится (неограниченно приближается) к A, двигаясь по Γ.

Пусть A — лежащая на ней точка и A' — другая лежащая на Γ точка. Прямую S, проходящую через A и A', будем называть *секущей* (кривую Γ). Будем теперь точку A' двигать непрерывно по Γ, неограниченно приближая к A. Тогда секущая S будет вращаться относительно A. Может случиться, что при этом S будет стремиться занять в пределе положение вполне определенной (проходящей, очевидно, через A) прямой, которую мы обозначили через T. Если это будет иметь место, то говорят, что кривая Γ имеет в точке A *касательную*. Именно прямую T называют касательной к Γ в точке A.

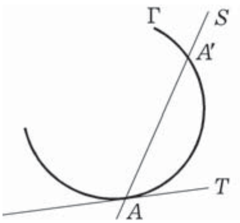

Рис. 1.11

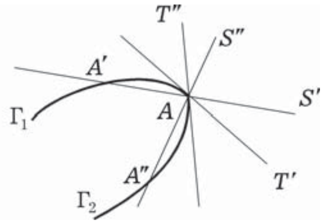

Рис. 1.12

Не всякая непрерывная кривая в любой ее точке имеет касательную. Тривиальным примером этого может служить кривая, изображенная на рис. 1.12. Она состоит из двух гладких *) кусков Γ_1 и Γ_2, соединенных в точке A "под углом". На рисунке на кривой отмечены две другие точки, A', A'', соответственно лежащие на Γ_1, Γ_2; через S' и S'' обозначены проходящие через A', A'' и A секущие.

Очевидно, что если A', A'', двигаясь соответственно по Γ_1, Γ_2, будут приближаться к A, то секущие S', S'' будут стремиться занять в пределе положение двух разных прямых T' и T''. Поэтому рассматриваемая кривая не имеет касательной в точке A. Впрочем, можно было бы, развивая введенное определение, сказать, что наша кривая имеет в точке A две односторонние касательные, но об этом речь сейчас не идет.

Пусть теперь кривая Γ есть график непрерывной на (a, b) функции (рис. 1.13) $y = f(x)$.

Зададим на Γ точку A, имеющую абсциссу x, и другую точку C, имеющую абсциссу $x+\Delta x$ $(\Delta x \neq 0)$. Через эти точки проведем прямую S — секущую. На ней отметим стрелкой положительное направление (соответствующее возрастанию x). Угол между этим направлением и положительной осью x обозначим через β. В данном случае $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Очевидно,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Будем Δx стремить к нулю; тогда вследствие непрерывности f будет также и Δy стремиться к нулю, и точка C, двигаясь по Γ, будет стремиться к точке A. Если окажется (этого может и не быть), что при этом

*) Строгое описание гладкого куска кривой дано в § 6.5.

отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится при любом способе стремления Δx к нулю к одному и тому же конечному пределу (числу) k:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to k \qquad (\Delta x \to 0),$$

то тогда и угол β будет стремиться к некоторому отличному от $\pi/2$ углу α. Вместе с β и секущая S, вращаясь около точки A, будет стремиться занять в пределе положение направленной прямой T, проходящей

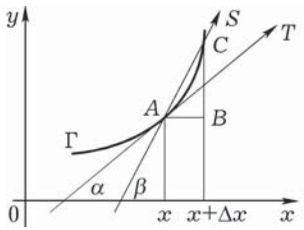

Рис. 1.13

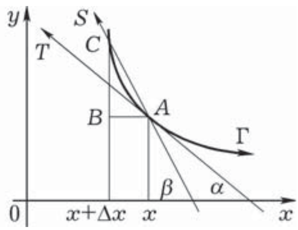

Рис. 1.14

через A под углом α с положительным направлением оси x. Но тогда T есть касательная к кривой Γ в точке A и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

В данном случае $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$. Но может быть случай, как на рис. 1.14, когда $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, $\beta < 0$, $\alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

Мы установили, что если отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к конечному пределу, то кривая Γ имеет в точке A касательную, тангенс угла которой с положительным направлением оси x равен этому пределу.

Сила тока. Допустим, что известна функция $Q = f(t)$, выражающая количество электричества, прошедшее через фиксированное сечение провода за время t. За период от t до $t + \Delta t$ через сечение протекает количество электричества $\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$. Средняя сила тока при этом равна

$$I_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ дает силу тока в момент t:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

П р о и з в о д н а я. Все три рассмотренные задачи, несмотря на то, что они относятся к различным областям человеческого знания: механике, геометрии, теории электричества, — привели к одной и той же математической операции, которую нужно произвести над некоторой функцией. Надо найти предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Мы могли бы как угодно увеличить число задач, решение которых приводится к подобной операции. К ней приводит задача о скорости химической реакции, о плотности неравномерно распределенной массы и др.

Естественно, что эта операция получила в математике специальное название. Она называется *операцией дифференцирования функции.* Результат ее называется *производной.*

Итак, *производной от функции* f, заданной на некотором интервале (a, b), в точке x этого интервала, называется предел, к которому стремится отношение приращения функции f в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Производную принято обозначать так *):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Но широко употребляются и другие обозначения: y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$. Удобство того или иного из них читатель впоследствии оценит сам.

Результаты рассмотренных примеров теперь можно сформулировать так:

Скорость в момент t движущейся по числовой прямой точки, координата которой s есть функция $s = f(t)$ от времени t, равна производной от этой функции $s' = f'(t)$.

Тангенс угла α между касательной к кривой, описываемой функцией $y = f(x)$, в точке, имеющей абсциссу x, и положительным направлением оси x равен производной $f'(x)$.

Сила тока I в проводе в момент t, если функция $Q = f(t)$ выражает количество электричества, прошедшее за время t через сечение провода, равна производной $I = Q' = f'(t)$.

Н е к о т о р ы е ф о р м у л ы. При натуральном $n = 1, 2, \ldots$

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}. \tag{1}$$

*) Предел $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где рассматриваются только $\Delta x > 0$ или только $\Delta x < 0$, называется соответственно *правой* или *левой* производной от f в точке x. Про функцию f, заданную на отрезке $[a, b]$, принято говорить, что она имеет на этом отрезке производную, если она имеет производную в любой точке интервала (a, b) и, кроме того, правую производную в точке a и левую — в точке b.

В самом деле, считая $\Delta x = h$, будем иметь

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}\right]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(x+h)^{n-1} + \lim_{h\to 0}(x+h)^{n-2}x + \ldots + \lim_{h\to 0}x^{n-1} = nx^{n-1},$$

где мы снова пользуемся элементарными свойствами пределов, которые будут обоснованы в дальнейшем (см. ниже замечание).

Справедливы также формулы:

$$(\sin ax)' = a\cos ax, \tag{2}$$
$$(\cos ax)' = -a\sin ax, \tag{3}$$

где a — константа. Докажем первое равенство, доказательство второго предоставляем читателю. При $a \neq 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin a(x+h) - \sin ax}{h} = \lim_{h\to 0}\left[a\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}}\cos\left(ax+\frac{h}{2}\right)\right] =$$
$$= a\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\left(ax+\frac{h}{2}\right) = a\cdot 1\cdot\cos ax = a\cos ax.$$

Мы воспользовались свойством $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ и тем фактом, что функция $\cos x$ непрерывна. Оба эти утверждения будут обоснованы далее (см. § 4.2 и § 4.9). При $a = 0$ равенства (2) и (3) выражают, что производная от постоянной равна нулю (см. ниже (4)).

Производная от функции $f(x)$ есть в свою очередь функция $f'(x)$. Если производная от $f'(x)$ существует, то она называется *второй производной* от $f(x)$ и обозначается так: $f''(x)$.

Подобным же образом определяются *высшие производные* $f^{(n)}(x)$ от $f(x)$ порядка n, где n — любое натуральное число.

Вторая производная от функции $s = f(t)$, выражающей закон движения точки на прямой, равна, очевидно, ускорению этой точки в момент времени t.

Уже из сказанного видно, что понятие производной имеет громадное значение в прикладных вопросах, но оно является фундаментальным и в самой математике. Это будет видно из дальнейшего.

Отметим, что *постоянное число* C, рассматриваемое как функция от x (см. § 1.3), имеет производную, *равную нулю тождественно* (т.е. равную нулю для всех x). В самом деле,

$$f(x) = C, \quad f(x+\Delta x) = C, \quad C' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}0 = 0. \tag{4}$$

Обратное утверждение также верно: *если о функции известно, что ее производная равна нулю тождественно*, $f'(x) \equiv 0$, *то она есть постоянная*. Это простое утверждение, чтобы его доказать строго математически, требует уже достаточно серьезного аппарата, с которым мы познакомимся позднее (см. § 5.8). С другой стороны, из механических соображений оно совершенно очевидно. В самом деле, пусть функция $s = f(t)$ выражает закон движения точки по прямой, причем ее скорость тождественно равна нулю: $v = f'(t) \equiv 0$. Тогда точка стоит на месте и расстояние s ее до начальной точки O равно постоянной при любом t. Тот факт, что в этом рассуждении мы x заменили на t, не имеет значения — время тоже можно обозначать через x.

Отметим еще, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некоторой точке x производную и A, B — постоянные числа, то функция

$$f(x) = Au(x) + Bv(x) \tag{5}$$

также имеет производную, равную

$$f'(x) = Au'(x) + Bv'(x). \tag{6}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \\ = \lim_{h\to 0} \frac{Au(x+h) + Bv(x+h) - [Au(x) + Bv(x)]}{h} &= \\ = \lim_{h\to 0}\left(A\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(B\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right) &= \\ = A\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + B\lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} &= \\ &= Au'(x) + Bv'(x).\end{aligned} \tag{7}$$

Во втором равенстве в этой цепочке равенств мы воспользовались тем фактом, что предел суммы равен сумме пределов, и в третьем, — что постоянную законно вынести за знак предела.

По индукции можно доказать более общее утверждение *):

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j'(x),$$

*) Надо иметь в виду обозначение

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{1}^{n} \alpha_j.$$

где a_j — постоянные числа, а о функциях $u_j(x)$ предполагается, что они имеют производные.

В частности, получим производную от многочлена:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

(a_k — постоянные).

Замечание. Формулу $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, можно доказать по индукции. При $n = 1$ имеем

$$x' = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1 = x^0.$$

Если теперь допустить, что формула $\left(x^{n-1}\right)' = (n-1)x^{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$, верна, то получим (см. § 5.1, (5))

$$\left(x^n\right)' = \left(xx^{n-1}\right)' = x'x^{n-1} + x\left(x^{n-1}\right)' = nx^{n-1}.$$

Отметим формулы (4)–(9) § 5.1 и таблицу § 5.5, которые могут оказаться полезными читателю еще до того, как он дойдет до них, изучая предмет систематически.

§ 1.6. Первообразная. Неопределенный интеграл

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная функция f. По определению функция F называется *первообразной функцией* для f на интервале (a, b) *), если на нем производная от F равна f:

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in (a, b).$$

Очевидно, что если функция F есть первообразная для f на (a, b), а C — постоянная, то функция $F(x) + C$ есть также первообразная для f, потому что

$$\left(F(x) + C\right)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Обратно, если F и F_1 — первообразные для $f(x)$ на (a, b), то они необходимо отличаются друг от друга на всем интервале (a, b) на некоторую постоянную C:

$$F_1(x) = F(x) + C. \tag{1}$$

*) Аналогично определяется первообразная для f на отрезке $[a, b]$. Надо принять во внимание только сноску на с. 30.

В самом деле, $\big(F_1(x) - F(x)\big)' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$. Но тогда, как отмечалось в предыдущем параграфе, существует такое (постоянное) число C, что $F_1(x) - F(x) = C$ на (a, b). Отсюда следует (1).

Итак, мы установили, правда, пользуясь механическими соображениями, важный факт: *если F есть какая-либо первообразная от f на интервале (a, b), то всевозможные первообразные от f на этом интервале выражаются формулой $F(x) + C$, где вместо C можно подставить любое число.*

Дадим теперь следующее определение. *Неопределенным интегралом* от непрерывной на интервале (a, b) функции f называется некоторая ее первообразная функция. Неопределенный интеграл обозначается так:

$$\int f(x)\,dx.$$

Из сказанного следует, что *если F есть любая первообразная функция для f на интервале (a, b), то неопределенный интеграл от f на этом интервале равен*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

где C — соответствующим образом подобранная постоянная.

Если $f_1,\ f_2$ — непрерывные на интервале (a, b) функции и $A_1,\ A_2$ — постоянные, то имеет место следующее равенство, выражающее основное свойство неопределенного интеграла:

$$\int \big(A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)\big)\,dx = A_1 \int f_1(x)\,dx + A_2 \int f_2(x)\,dx + C, \tag{3}$$

где C есть некоторая постоянная.

В самом деле, по определению неопределенного интеграла слева в (3) стоит какая-то одна из первообразных функций от $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$. С другой стороны, имеет место равенство

$$\begin{gathered}\left(A_1 \int f_1(x)\,dx + A_2 \int f_2(x)\,dx\right)' = \\ = A_1\left(\int f_1(x)\,dx\right)' + A_2\left(\int f_2(x)\,dx\right)' = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x),\end{gathered} \tag{4}$$

потому что интегралы $\int f_1\,dx,\ \int f_2\,dx$ обозначают соответственно некоторые первообразные функции от f_1 и f_2. Поэтому правая часть (3) без последнего члена C есть также первообразная для $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$, но тогда она отличается от левой части (3) на некоторую постоянную.

Свойство (3) по индукции распространяется на любое конечное число непрерывных на (a, b) функций $f_1, \ldots, f_n$ и постоянных $A_1, \ldots, A_n$:

$$\int \left(\sum_{j=1}^{n} A_j f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^{n} A_j \int f_j(x)\, dx + C. \tag{5}$$

Как следствие при $A_1 = 1,\ A_2 = \pm 1,\ n = 2$ вытекает равенство

$$\int (f_1 \pm f_2)\, dx = \int f_1\, dx \pm \int f_2\, dx + C,$$

а при $A_1 = A$ и $A_2 = 0,\ f_1 = f$ — равенство

$$\int Af\, dx = A \int f\, dx + C.$$

П р и м е р ы.

$$\int x^{n-1}\, dx = \frac{x^n}{n} + C, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + C, \qquad a \neq 0, \tag{7}$$

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + C, \qquad a \neq 0. \tag{8}$$

В самом деле (см. § 1.5, (1)–(3)),

$$\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \frac{1}{n}\left(x^n\right)' = x^{n-1},$$

$$\left(\frac{\sin ax}{a}\right)' = \frac{1}{a}(\sin ax)' = \frac{1}{a}\, a \cos ax = \cos ax,$$

$$\left(-\frac{\cos ax}{a}\right)' = -\frac{1}{a}(\cos ax)' = \sin ax.$$

Из (5) и (6) следует, что неопределенный интеграл от многочлена $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ степени n (a_k — постоянные) равен

$$\int P_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

§ 1.7. Понятие определенного интеграла. Площадь криволинейной фигуры

Зададим на отрезке $[a, b]$ (a и b — конечные числа, $a < b$) неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. График ее изобразим на рис. 1.15. Поставим задачу: требуется разумно определить понятие площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x, прямыми $x = a$ и $x = b$, и вычислить эту площадь. Поставленную задачу естественно решить так. Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей точками

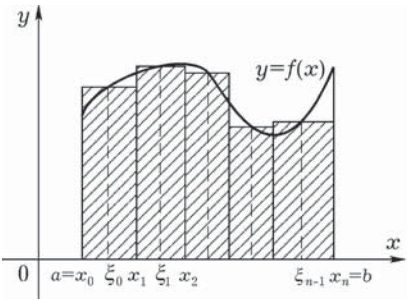

Рис. 1.15

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \qquad (1)$$

выберем на каждом из полученных частичных отрезков

$$[x_j, x_{j+1}], \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (2)$$

по произвольной точке $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$, определим значения $f(\xi_j)$ функции f в этих точках и составим сумму

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j, \qquad \Delta x_j = x_{j+1} - x_j, \qquad (3)$$

которую называют *интегральной суммой* и которая, очевидно, равна сумме площадей затушеванных прямоугольников (см. рис. 1.15).

Будем теперь стремить все Δx_j к нулю и притом так, чтобы максимальный (самый большой) частичный отрезок разбиения стремился к нулю. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S, не зависящему от способов разбиения (1) и выбора точек ξ_j на частичных отрезках, то естественно величину S называть *площадью нашей криволинейной фигуры*. Таким образом,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j. \qquad (4)$$

Итак, мы дали определение площади нашей криволинейной фигуры. Возникает вопрос, имеет ли каждая такая фигура площадь, иначе говоря, стремится ли на самом деле к конечному пределу ее интегральная сумма S_n, когда $\max \Delta x_j \to 0$? В дальнейшем будет доказано, что этот вопрос решается положительно: каждая определенная выше криволинейная фигура, соответствующая некоторой непрерывной функции $f(x)$, действительно имеет площадь в смысле сделанного определения, выражаемую, таким образом, зависящим от этой фигуры числом S.

Другой возникающий здесь вопрос, насколько естественно данное определение площади, как всегда в таких случаях, решается практикой. Мы скажем только, что практика полностью оправдала это определение. У нас будет много случаев убедиться в правильности сделанного определения.

Но обратим внимание на выражение (4). Отвлекаясь от задачи нахождения площади, мы можем на него смотреть как на некоторую операцию, при помощи которой по данной функции f, заданной на $[a, b]$, определяется число S. Она называется *операцией интегрирования* функции f на (конечном) отрезке $[a, b]$, а результат ее, если он существует, называется *определенным интегралом* от f на $[a, b]$ и записывается так:

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\, \Delta x_j = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{5}$$

Итак, по определению *определенным интегралом от функции f на отрезке* $[a, b]$ называется предел интегральной суммы (4), когда максимальный частичный отрезок разбиения (1) стремится к нулю.

В этом определении, которое теперь уже не связано с задачей о нахождении площади, функция f не обязательно непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Надо отметить, что это определение не утверждает существования определенного интеграла для всякой функции f, заданной на $[a, b]$, т.е. существования предела (5). Оно только говорит, что если этот предел существует для заданной на $[a, b]$ функции f, то он называется определенным интегралом от f на $[a, b]$.

Следует иметь в виду также, что когда говорят, что указанный предел S существует, то подразумевают, что он не зависит от способов разбиения отрезка $[a, b]$ на части и выбора на полученных частичных отрезках точек ξ_j. Например, если известно, что определенный интеграл $S = \int_0^1 f(x)\, dx$ от некоторой функции f на отрезке $[0, 1]$ существует, то он может быть получен, например, при помощи отыскания предела $S = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\big(\frac{j}{n}\big)$ интегральных сумм, соответствующих разбиению $[0, 1]$ на n равных частей точками $x_j = j/n$, $j = 0, 1, \ldots, n$, и выбору в качестве ξ_j левых концов частичных отрезков разбиения.

Но число S может быть получено также как предел

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\left(\frac{j+1}{n}\right)^2\right) \left[\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]$$

интегральных сумм, соответствующих разбиению $[0, 1]$ точками $x_j = (j/n)^2$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, и выбору в качестве ξ_j правых концов частичных отрезков разбиения. В этом случае длина j-го частичного отрезка удовлетворяет соотношениям

$$\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{j}{n}\right)^2 = \frac{2j+1}{n^2} \leqslant \frac{2(n-1)+1}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2} = \\ = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

показывающим, что максимальный из них (самый правый) имеет длину, стремящуюся к нулю вместе с неограниченным возрастанием n.

В теории определенного интеграла доказывается, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем, т.е. для нее предел (5) существует. Отсюда и следует упомянутый факт, что всякая фигура рассмотренного выше типа имеет площадь.

Пример 1. Площадь S (рис. 1.16), ограниченная параболой $y = x^2$, осью x и прямой $x = 1$, равна

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Мы показали, что интегральная сумма функции $y = x^2$, соответствующая разбиению $[0, 1]$ на равные части, стремится к числу $1/3$.

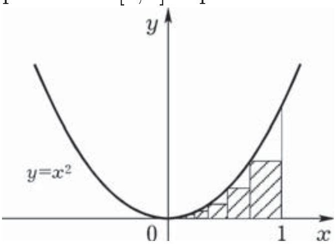

Рис. 1.16

Тот факт, что сумма $\sum_0^{n-1} (x_j)^2 \Delta x_j$, соответствующая произвольному разбиению $[0, 1]$, стремится к $1/3$, когда $\max \Delta x_j \to 0$, доказать непосредственно элементарными методами не так уж просто. Это, однако, следует из упомянутого утверждения, что определенный интеграл от непрерывной на (конечном) отрезке функции всегда существует.

Приведем другие примеры практических задач, решение которых сводится к вычислению определенных интегралов.

Работа. Пусть к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила $F = f(x)$, где $f(x)$ есть непрерывная функция от x — абсциссы движущейся точки. Работа силы F при передвижении точки от a до b равна

$$W = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\, \Delta x_j = \int_a^b f(x)\, dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$. В самом деле, в силу непрерывности f произведение $f(x_j)\Delta x_j$ близко к истинной работе на $[x_j, x_{j+1}]$, а сумма этих произведений близка к истинной работе на $[a, b]$ и притом тем ближе, чем меньше $\max\limits_j \Delta x_j$.

Масса стержня переменной плотности. Будем считать, что отрезок $[a, b]$ оси x имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x) \geqslant 0$, где $\rho(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Общая масса этого отрезка равна интегралу

$$M = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(x_j)\, \Delta x_j = \int_a^b \rho(x)\, dx, \tag{6}$$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \qquad \Delta x_j = x_{j+1} - x_j.$$

Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (5) связано с трудностями — интегральные суммы сколько-нибудь сложных функций имеют громоздкий вид и зачастую не легко преобразовывать их к виду, удобному для вычисления пределов. Во всяком случае, на этом пути не удалось создать общих методов. Интересно отметить, что впервые задачу этого рода решил Архимед. При помощи рассуждений, которые отдаленно напоминают современный метод пределов, он вычислил площадь сегмента параболы. В дальнейшем на протяжении веков многие математики решали задачи на вычисление площадей фигур и объемов тел. Все же еще в XVII веке постановка таких задач и методы их решения носили сугубо частный характер. Существенный сдвиг в этом вопросе сделали Ньютон и Лейбниц, указавшие общий метод решения таких задач. Они показали, что вычисление определенного интеграла от функции может быть сведено к отысканию ее первообразной.

Пусть задана непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$, и пусть $F(x)$ есть ее первообразная. Теорема Ньютона и Лейбница утверждает справедливость равенства

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a), \tag{7}$$

показывающего, что если для функции f известна ее первообразная F, то вычисление определенного интеграла от f на $[a, b]$ сводится к простой подстановке чисел a и b в F.

Эта теорема будет доказана в § 9.9, а сейчас мы дадим ее простое механическое толкование. Будем считать, что x есть время, а функция $y = F(x)$ выражает закон движения по прямой точки, т.е. y есть расстояние с соответствующим знаком в момент x движущейся точки до закрепленной нулевой точки.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $a \leqslant x \leqslant b$, очевидно, равен *)

$$\Lambda = F(b) - F(a). \tag{8}$$

---

*) Впрочем, термин "путь, пройденный точкой", не совсем точно выражает данное явление. Если, например, закон движения таков, что точка сначала продвинулась вправо, пройдя путь Λ_1, а затем влево, пройдя путь Λ_2, то $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$.

С другой стороны, он может быть вычислен интегрированием скорости $f(x) = F'(x)$ точки:

$$\Lambda = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\, \Delta x_j = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{9}$$

Ведь произведение $f(x_j)\, \Delta x_j$ приближенно выражает путь, пройденный точкой на отрезке времени $[x_j, x_{j+1}]$, где x_j определены, как в (1). Но тогда из (8) и (9) следует (7).

Примеры.

$$\int_a^b x^{n-1}\, dx = \frac{x^n}{n}\bigg|_a^b = \frac{1}{n}(b^n - a^n), \qquad n \neq 0,$$

$$\int_a^b \cos\alpha x\, dx = \frac{\sin\alpha x}{\alpha}\bigg|_a^b = \frac{1}{\alpha}(\sin\alpha b - \sin\alpha a), \qquad \alpha \neq 0.$$

При этом мы считаем, что $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Количество подобных примеров можно значительно увеличить после того, как читатель познакомится с § 5.1–5.5, где изложены основы техники дифференцирования элементарных функций.

Глава 10

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 10.1. Площадь в полярных координатах

Площадь S фигуры, ограниченной двумя выходящими из полярного полюса O лучами $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_*$ и кривой Γ, заданной в полярных координатах непрерывной функцией $\rho = f(\theta)$, может быть определена следующим образом (рис. 10.1).

Производим разбиение отрезка $[\theta_0, \theta_*]$ изменения θ:

$$\theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \theta_*.$$

Элемент площади фигуры, ограниченной кривой Γ и лучами $\theta = \theta_k$, $\theta = \theta_{k+1}$, приближенно выражаем площадью кругового сектора, огра-

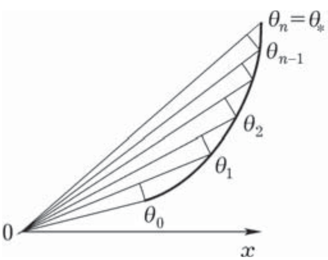

Рис. 10.1

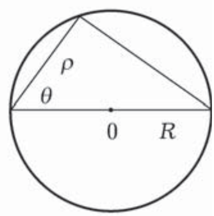

Рис. 10.2

ниченного теми же лучами и окружностью радиуса $\rho_k = f(\theta_k)$, равной $\rho_k^2 \Delta\theta_k / 2$, $\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$.

Естественно считать по определению

$$S = \lim_{\max \Delta\theta_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_*} \rho^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_*} f^2(\theta) \, d\theta. \qquad (1)$$

Мы получили формулу площади фигуры в полярных координатах. Для непрерывной функции $f(\theta)$ интеграл (1), как мы знаем, существует.

Конечно, возникает вопрос, будет ли определенная таким образом величина S равна тому же числу, как если бы мы вычислили площадь нашей фигуры в декартовых координатах. Этот вопрос положительно решается на основании общей теории меры по Жордану (см. § 12.4).

Пример 1. Изображенная на рис. 10.2 окружность в полярных координатах определяется уравнением $\rho = 2R\cos\theta$. В силу (1) ее площадь равна

$$S = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \pi R^2.$$

§ 10.2. Объем тела вращения

Пусть Γ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y непрерывной положительной функцией $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Вычислим объем V тела вращения, ограниченного плоскостями $x = a$, $x = b$ и поверхностью вращения кривой Γ вокруг оси x.

Производим разбиение отрезка $[a, b]$ на части $a = x_0 < x_1 < \ldots \ldots < x_n = b$ и считаем, что элемент ΔV объема тела, ограниченный плоскостями $x = x_k$, $x = x_{k+1}$, приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \sim \pi\, y_k^2 \Delta x_k = \pi f^2(x_k)\Delta x_k.$$

Величина $V_n = \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(x_k)\Delta x_k$ приближенно выражает V и

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(x_k)\Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{1}$$

Мы получили формулу объема тела вращения. Приведем еще другой вывод этой формулы, основанный на введении дифференциала объема. Обозначим через $V(x)$ объем части тела, заключенный между плоскостями, проходящими через точки a и x оси x, перпендикулярно к последней (рис. 10.3). Приращение $\Delta V(x)$, соответствующее приращению $\Delta x > 0$, есть объем части тела, заключенной между плоскостями, перпендикулярными к оси x, проходящими через точки x и $x + \Delta x$.

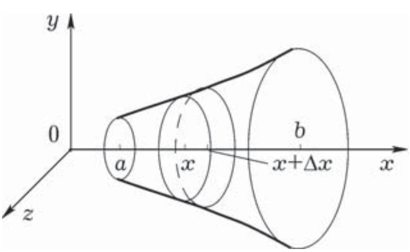

Рис. 10.3

Докажем, что имеет место равенство

$$\Delta V = \pi f^2(x)\, \Delta x + o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0. \tag{2}$$

В самом деле, пусть

$$m = \min_{x \leqslant \xi \leqslant x+\Delta x} f(\xi), \qquad M = \max_{x \leqslant \xi \leqslant x+\Delta x} f(\xi).$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{gathered}\pi m^2\Delta x \leqslant \Delta V(x) \leqslant \pi M^2\Delta x,\\ \pi m^2\Delta x \leqslant \pi f^2(x)\Delta x \leqslant \pi M^2\Delta x,\end{gathered} \tag{3}$$

и так как функция непрерывна, то $M-m \to 0$, $\Delta x \to 0$. Это показывает, что

$$\pi(M^2-m^2)\Delta x = o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0 \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует (2).

Равенство (2) говорит, что первое слагаемое его правой части есть дифференциал V:

$$dV = \pi f^2(x)\Delta x = \pi f^2(x)\, dx.$$

На основании формулы Ньютона–Лейбница искомый объем равен

$$V = V(b) = V(b) - V(a) = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Пример 1. Эллипсоид вращения (вокруг оси x)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$$

есть тело, ограниченное поверхностью вращения кривой

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \qquad -a \leqslant x \leqslant a,$$

вокруг оси x, поэтому на основании формулы (1) его объем равен

$$V = \pi b^2\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

§ 10.3. Длина дуги гладкой кривой

Пусть Γ есть гладкая кривая, определенная функциями (см. § 6.5)

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1}$$

имеющими на $[a,b]$ непрерывные производные. Введем разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и составим сумму (см. § 6.8)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2},$$

$$\begin{gathered}\Delta x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k), \qquad \Delta y_k = \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k),\\ \Delta z_k = \chi(t_{k+1}) - \chi(t_k), \qquad \delta = \max_k \Delta t_k, \qquad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k,\end{gathered}$$

представляющую собой длину ломаной, вписанной в Γ с вершинами в точках, соответствующих значениям t_k.

Имеем тогда $(t_k < \mu_k, \nu_k, \lambda_k < t_{k+1})$ при $\delta \to 0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\mu_k) + \psi'^2(\nu_k) + \chi'^2(\lambda_k)}\,\Delta t_k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(t_k) + \psi'^2(t_k) + \chi'^2(t_k)}\,\Delta t_k + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \Delta t_k \to$$
$$\to \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,dt.$$

В первом равенстве цепи мы воспользовались теоремой о среднем.

Чтобы обосновать, что $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \Delta t_k \to 0$ при $\delta \to 0$, введем вспомогательную функцию

$$\alpha(u, v, w) = \sqrt{\varphi'^2(u) + \psi'^2(v) + \chi'^2(w)}\,,$$

очевидно, непрерывную на кубе $\Delta = \{a \leqslant u, v, w \leqslant b\}$. Модуль ее непрерывности на Δ обозначим через $\omega(\delta)$. Так как расстояние между точками (t_k, t_k, t_k) и $(\mu_k, \nu_k, \lambda_k)$ нашего куба не превышает $\delta\sqrt{3}$, то

$$|\varepsilon_k| = \big|\alpha(t_k, t_k, t_k) - \alpha(\mu_k, \nu_k, \lambda_k)\big| \leqslant \omega\big(\delta\sqrt{3}\,\big),$$

и потому

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \Delta t_k\right| \leqslant \omega\big(\delta\sqrt{3}\,\big) \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = (b-a)\,\omega(\delta\sqrt{3}\,) \to 0, \qquad \delta \to 0.$$

Мы доказали, что длина гладкой кривой (1) существует и выражается формулой

$$S = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,dt. \tag{2}$$

При замене переменной при помощи непрерывно дифференцируемой функции $t = \lambda(\tau)$ $(\lambda'(\tau) > 0,\ c \leqslant \tau \leqslant d)$ получим, очевидно,

$$S = \int_c^d \sqrt{\varphi_1'^{\,2}(\tau) + \psi_1'^{\,2}(\tau) + \chi_1'^{\,2}(\tau)}\,d\tau, \tag{3}$$

где $\varphi_1(\tau) = \varphi(\lambda(\tau)), \ldots$, что показывает инвариантность формулы (1) длины дуги.

Если кривая (плоская) задана уравнением

$$y = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

где f имеет непрерывную производную на $[a, b]$, то, очевидно, ее длина дуги выражается формулой

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

(надо положить в (2) $t = x,\ y = f(x),\ z = 0$).

Пример 1. Длина дуги винтовой линии

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta, \qquad z = b\theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,$$

в силу (2) равна

$$S = \int_0^{\theta_0} \sqrt{a^2 + b^2}\, d\theta = \theta_0 \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

§ 10.4. Площадь поверхности тела вращения

Пусть Γ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y положительной функцией $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную.

Вычислим площадь S поверхности вращения Γ вокруг оси x. Для этого произведем разбиение $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

впишем в кривую Γ ломаную Γ_n с вершинами $(x_k, f(x_k))$ и вычислим площадь поверхности вращения последней вокруг оси x:

$$S_n = \pi \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_k) + f(x_{k+1})\big) \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}\,,$$
$$\Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k),$$

и перейдем к пределу при $\max_k \Delta x_k \to 0$.

В результате получим

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{2}$$

В самом деле, вынося из-под корня Δx_k $(\Delta x_k > 0)$ и применяя к Δy_k теорему о среднем, получим (пояснения ниже)

$$S_n = \pi \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_k) + f(x_{k+1})\big) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\, \Delta x_k = \\ = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\, \Delta x_k + \alpha \to \\ \to 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx, \qquad \max_k \Delta x_k \to 0, \quad x_k < \xi_k < x_{k+1},$$

где

$$\alpha = \pi \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f(\xi_k)\big) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\, \Delta x_k.$$

Доказательство того, что $\alpha \to 0$ при $\Delta x_k \to 0$, следует из соотношений

$$|\alpha| \leqslant \pi M \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f(\xi_k)|\, \Delta x_k < \\ < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon(b-a), \qquad \max_k \Delta x_k < \delta,$$

где

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \sqrt{1 + f'^2(x)},$$

и число $\delta > 0$, зависящее от $\varepsilon > 0$, настолько мало, что

$$|f(x_k) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2\pi M} \quad \text{при} \quad \Delta x_k < \delta.$$

Такое δ существует в силу равномерной непрерывности функции f на $[a, b]$.

Общее определение площади произвольной гладкой поверхности см. в § 12.19.

Пример 1. Площадь поверхности вращения куска параболы $y = x^2$ $(0 \leqslant \leqslant x \leqslant 1)$ вокруг оси x равна

$$S = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

§ 10.5. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и система точек

$$x_0, x_1, \ldots, x_n. \tag{1}$$

Поставим задачу: требуется найти многочлен *) $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$ $\ldots + a_n x^n$ степени n, совпадающий с $f(x)$ в указанных точках, т. е. чтобы выполнялись равенства

$$f(x_k) = P(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Чтобы решить эту задачу, введем многочлены

$$Q_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}, \tag{3}$$
$$k = 0, 1, \ldots, n.$$

Очевидно, что Q_k для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$ есть многочлен степени n, равный 1 в точке x_k и 0 в остальных точках системы (1): $Q_k(x_j) = \delta_{kj}$, $k, j = 0, 1, \ldots, n$.

Символ δ_{kj} (Кронекера) определяется равенством:

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Положим

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(x) f(x_k). \tag{4}$$

$P(x)$ есть многочлен степени n, обладающий свойствами

$$P(x_j) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(x_j) f(x_k) = Q_j(x_j) f(x_j) = f(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

т. е. он решает поставленную задачу, и притом единственным образом, потому что если допустить, что существует еще другой многочлен $P_1(x)$ степени n, решающий эту задачу, то разность $P(x) - P_1(x)$ была бы многочленом степени n, имеющим $n + 1$ корней. Но тогда $P(x) - P_1(x) \equiv 0$.

Отметим, что если исходная функция f сама есть многочлен степени n, то $f(x) \equiv P(x)$, потому что два многочлена, совпадающие в $n + 1$ различных точках, тождественно равны.

---

*) Коэффициенты многочлена могут быть любыми числами, в частности может быть $a_n = 0$.

§ 10.6. Квадратурные формулы прямоугольников

Пусть надо вычислить определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f. Если известна ее первообразная, то для этого естественно применить формулу Ньютона–Лейбница. Но далеко не всегда первообразная известна, и возникает задача о приближенном вычислении интеграла.

Простейший способ приближенного вычисления определенного интеграла вытекает из определения последнего. Делим отрезок $[a, b]$ на равные части точками

$$x_k = a + k\,\frac{b-a}{N}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{1}$$

и полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right), \tag{2}$$

где знак $\approx$ выражает приближенное равенство.

Выражение (2) называется *квадратурной формулой прямоугольников*. В случае рис. 10.4 искомая площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x и прямыми $x = a$, $x = b$, приближенно равна сумме площадей изображенных там прямоугольников.

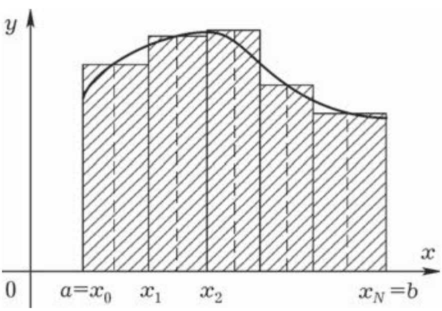

Рис. 10.4

Мы знаем, что для непрерывной на $[a, b]$ функции предел при $N \to \infty$ правой части приближенной формулы (2) точно равен левой, что дает основание считать, что при большом N ошибка квадратурной формулы (2), т.е. абсолютная величина разности правой и левой ее частей, мала.

Однако возникает вопрос об оценке ошибки. Ниже мы узнаем, как эту оценку получить, если потребовать, чтобы функция f, кроме непрерывности, удовлетворяла некоторым условиям гладкости.

Неравенство (см. 4-е издание этой книги, § 10.9)

$$|R_N| \leqslant \frac{1}{24}\,\frac{(b-a)^3}{N^2}\,M, \qquad |f''(x)| \leqslant M, \tag{3}$$

дает оценку приближения квадрата (2) квадратурной формулы прямоугольников для функций f, имеющих на $[a, b]$ непрерывную вторую производную. Здесь R_n — погрешность приближения — разность между левой и правой частью в (2).

З а м е ч а н и е. Нетрудно проверить, что для линейных функций $y = Ax + B$, т.е. функций степени $m = 1$, формула (2) точна, т.е. для них $R_N = 0$. Оказалось, что если функция f имеет производную порядка $2 = m + 1$, то приближение квадратурной формулы (1) тоже имеет порядок N^{-2}.

Этот факт носит общий характер (см. замечание в § 10.8).

§ 10.7. Формула Симпсона *)

В этом параграфе мы вводим важную в прикладном анализе *квадратурную формулу Симпсона*. Она очень проста и в то же время обладает замечательным свойством: она точна для всех многочленов третьей степени.

Начнем с того, что решим задачу: требуется найти числа A, B, C такие, чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx Af(-1) + Bf(0) + Cf(1) \tag{1}$$

была точна для функций $1, x, x^2$. Подставляя эти функции в (1) вместо f, получим систему уравнений

$$2 = A + B + C, \qquad 0 = -A + C, \qquad \frac{2}{3} = A + C,$$

откуда $A = C = 1/3$, $B = 4/3$. Но так как $A = C$, то легко проверяется, что полученная формула (1) точна и для функции x^3. Но тогда она точна для всех многочленов не выше третьей степени.

Более общая квадратурная формула имеет вид

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \tag{2}$$

Это — простейшая квадратурная формула Симпсона, соответствующая отрезку $[a, b]$. Она точна для функций 1, x, x^2, x^3, но тогда, как легко видеть, и для любого многочлена $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ степени $m = 3$.

Если разделить отрезок $[a, b]$ на $2N$ равных частей точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{2N}\,k, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2N, \tag{3}$$

*) Т. Симпсон (1710–1761) — английский математик.

и к отрезкам $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \ldots$ применить формулу (2), то в результате получим (усложненную) квадратурную формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6N}\big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+f(x_{2N})\big). \quad (4)$$

Оказывается, ошибка приближения по квадратурной формуле (4) оценивается так:

$$|R_N| \leqslant \frac{(b-a)^5 M}{2880N^4}, \qquad |f^{(4)}(x)| \leqslant M. \quad (5)$$

Замечание. Подтвердилось правило, высказанное в замечании в § 10.6: если m — степень многочленов, для которых квадратурная формула точна, то для функций f, имеющих на $[a, b]$ непрерывную производную порядка $(m+1)$, порядок приближения формулой равен $O(N^{-(m+1)})$. В данном случае $m = 3$.

Обоснование этой теории см. в 4-м издании этой книги, § 10.6–10.9.

С точки зрения практических вычислений, сложность вычислений по формуле Симпсона и по формуле прямоугольников одинакова. Но если функция f достаточно гладкая, то ошибка приближения по формуле Симпсона при больших N значительно меньше соответствующей ошибки при приближении методом прямоугольников.

Глава 11

РЯДЫ

§ 11.1. Понятие ряда

Выражение

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \tag{1}$$

где числа u_k (*члены ряда*), вообще комплексные, зависят от индексов $k = 0, 1, 2, \ldots$, называется *рядом.* Этому выражению мы не приписали никакого числа, потому что сложение бесконечного числа слагаемых не имеет смысла. Ряд (1) еще записывают так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{0}^{\infty} u_k. \tag{2}$$

Эта чисто формальная запись часто более удобна, чем запись (1).

Числа

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

называются *n-ми частичными суммами ряда* (1).

По определению ряд (1) сходится, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

В этом случае пишут

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \tag{3}$$

и называют S *суммой ряда*, т.е. выражениям (1) или (2) приписывают число S. Говорят еще, что ряд (3) сходится к S.

В силу условия Коши (верного и для комплексных чисел) *для того чтобы ряд* (1) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ нашлось такое N, чтобы для всех натуральных $n > N$ и любого натурального p выполнялось неравенство*

$$|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Отсюда, в частности (полагая $p = 1$), следует, что если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{4}$$

Но условие (4), будучи необходимым, не является достаточным для сходимости ряда, как это будет видно из дальнейших примеров.

Рассмотрим еще ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}. \tag{5}$$

Так как условие Коши сходимости рядов (1) и (5) формулируется совершенно одинаково, то они одновременно либо сходятся, либо расходятся (не сходятся). Если они сходятся, то сумма ряда (5) равна

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} u_{n+k} = \lim_{m\to\infty} (S_{n+m} - S_n) = S - S_n.$$

Если члены ряда (1) неотрицательны (таким образом, действительны), то его частичные суммы образуют неубывающую последовательность $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \ldots$, поэтому, если эта последовательность ограничена,

$$S_n \leqslant M, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

ряд сходится и его сумма удовлетворяет неравенству

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leqslant M.$$

Если же она неограничена, то ряд расходится:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

В этом случае пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty.$$

Пример 1. Ряд

$$1 + z + z^2 + \ldots \tag{6}$$

имеет (при $z \neq 1$) частичную сумму $S_n(z) = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$. Если $|z| < 1$, то $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$, т. е. $z^{n+1} \to 0$, $n \to \infty$; если $|z| > 1$, то $|z^{n+1}| \to \infty$, и, наконец, если $|z| = 1$, то ряд (6) расходится, потому что в этом случае его общий член, имеющий модуль, равный единице ($|z^{n+1}| = 1$), не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, ряд (6) сходится и имеет сумму, равную $(1-z)^{-1}$ на открытом круге $|z| < 1$, а для остальных точек z комплексной плоскости он расходится.

§ 11.2. Действия с рядами

Если ряды $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ *сходятся и* α *— число, то ряды* $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha u_k$, $\sum_{k=0}^{\infty}(u_k \pm v_k)$ *также сходятся и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha u_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} u_k, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(u_k \pm v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} v_k. \tag{2}$$

Действительно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha u_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} u_k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(u_k \pm v_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}(u_k \pm v_k) = \\ = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

Подчеркнем, что из сходимости ряда, стоящего слева в (2), вообще не следует сходимость каждого из рядов, стоящих справа в (2). Например, ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots \tag{3}$$

сходится (все его члены равны 0), но выражение $\sum_{k=0}^{\infty} 1 - \sum_{k=0}^{\infty} 1$ не имеет смысла, так как ряды, входящие в него, расходятся.

Если ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{4}$$

сходится и имеет сумму S, то члены его можно любым образом сгруппировать скобками (однако не переставляя их), например так:

$$u_0 + (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \ldots\,,$$

образуя новый ряд, члены которого равны суммам чисел, стоящих в скобках. Новый ряд будет сходящимся и притом к S, потому что его частичные суммы образуют подпоследовательность сходящейся последовательности частичных сумм ряда (4).

Наоборот, раскрывать скобки в ряду, вообще говоря, незаконно, например после раскрытия скобок в сходящемся ряду (3) получается расходящийся ряд $1-1+1-\ldots$ Впрочем, если внутри скобок всюду стоят только неотрицательные или неположительные числа, то раскрытие в таком ряду скобок не изменяет сходимости ряда и величины его суммы.

§ 11.3. Ряды с неотрицательными членами

Теорема 1 (признаки сравнения рядов). *Пусть даны два ряда:*

$$1)\quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k, \qquad 2)\quad \sum_{k=0}^{\infty} v_k,$$

с неотрицательными членами.

а) *Если* $u_k \leqslant v_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *то из сходимости ряда* 2) *следует сходимость ряда* 1), *а из расходимости ряда* 1) *следует расходимость ряда* 2).

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = A > 0, \tag{1}$$

то ряды 1) *и* 2) *одновременно сходятся или расходятся.*

Доказательство. Пусть ряд 2) сходится и S — его сумма. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant S, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

т. е. частичные суммы ряда 1) ограничены и ряд 1) сходится. Его сумма S' удовлетворяет неравенству $S' \leqslant S$.

Пусть теперь ряд 1) расходится; тогда (см. § 11.1) его частичная сумма неограниченно возрастает вместе с n, что в силу неравенства

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

влечет также неограниченное возрастание частичных сумм ряда 2), т. е. расходимость последнего.

Пусть теперь имеет место равенство (1). Тогда на самом деле $v_k > 0$, и для положительного $\varepsilon < A$ найдется N такое, что $A - \varepsilon < u_k/v_k < A + \varepsilon$, $k > N$, откуда

$$v_k(A - \varepsilon) < u_k < (A + \varepsilon)v_k. \tag{2}$$

Если ряд 2) сходится, то сходится также ряд $\sum_{N+1}^{\infty}(A + \varepsilon)v_k$. В силу второго неравенства (2) сходится также ряд $\sum_{N+1}^{\infty} u_k$, а вместе с ним и ряд 1). Если же ряд 2) расходится, то расходится также ряд $\sum_{N+1}^{\infty} v_k(A - \varepsilon)$, а вместе с ним ряд $\sum_{N+1}^{\infty} u_k$. Но тогда расходится также ряд (1). Теорема доказана.

Теорема 2 (признаки Даламбера). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \tag{3}$$

с положительными членами.

а) *Если*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

то ряд (3) *сходится*; *если же*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

то ряд расходится.

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = q, \tag{6}$$

то ряд (3) *при* $q < 1$ *сходится*, *а при* $1 < q \leqslant \infty$ *расходится*, *и его общий член* $u_k \to \infty$.

Доказательство. Имеем

$$u_n = u_0 \frac{u_1}{u_0} \frac{u_2}{u_1} \ldots \frac{u_n}{u_{n-1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Поэтому из (4) следует, что

$$u_n \leqslant u_0 q^n, \qquad q < 1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_0 q^n$ сходится, то вместе с ним и ряд (3). Из (5) следует, что

$$u_n \geqslant u_0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

следовательно, ряд (3) расходится.

Если теперь выполняется свойство (6) и $q < 1$, то для положительного ε такого, что $q + \varepsilon < 1$, $u_{k+1}/u_k < q + \varepsilon < 1$, $k \geqslant N$, где N достаточно велико. В силу признака (4) в таком случае ряд $\sum_N^{\infty} u_k$ сходится, а вместе с ним и ряд (3).

Если же $q > 1$, то возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $q - \varepsilon > 1$. Но $u_{k+1}/u_k > q - \varepsilon$, $k \geqslant N$ при достаточно большом N, поэтому для $N \leqslant n_0 < n$ получим

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \ldots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} u_{n_0} > (q - \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0} \to \infty, \qquad n \to \infty.$$

Это показывает, что $u_n \to \infty$ и ряд (3) расходится.

Теорема 3 (признаки Коши). *Пусть дан ряд* (3) *с положительными членами.*

а) *Если*

$$\sqrt[k]{u_k} < q < 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

то он сходится; если же

$$\sqrt[k]{u_k} \geqslant 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

то он расходится.

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = q, \qquad 0 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{9}$$

то при $q < 1$ ряд (3) сходится, а при $q > 1$ расходится, и при этом $u_k \to \infty$.

в) *Если верхний предел*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} = q, \qquad 0 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{9'}$$

то ряд (3) при $q < 1$ сходится, а при $q > 1$ расходится, и при этом общий член u_k ряда не ограничен.

Доказательство. Из неравенства (7) следует, что $u_k < q^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и так как в случае $q < 1$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ сходится, то сходится и ряд (3). Из неравенства же (8) следует, что $u_k \geqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots$, и так как ряд $1 + 1 + \ldots$ расходится, то расходится и ряд (3). Утверждение а) доказано.

Пусть $q < 1$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $q < q + \varepsilon < 1$. Из свойства (9) при $q < 1$ следует, что

$$\sqrt[k]{u_k} < q + \varepsilon < 1, \qquad k \geqslant N \tag{10}$$

при достаточно большом N, откуда

$$u_k < (q + \varepsilon)^k, \qquad k \geqslant N,$$

и так как ряд $\sum_N^{\infty} (q + \varepsilon)^k$ сходится, то сходится и ряд $\sum_N^{\infty} u_k$, а вместе с ним ряд (3). Если же $q > 1$, то можно указать q' такое, что $q > q' > 1$. Тогда из свойства (9) при $q > 1$ вытекает, что $u_k > (q')^k$, $k \geqslant N$ при достаточно большом N. Следовательно, $u_k \to \infty$ и ряд (3) расходится. Мы доказали б).

Из свойства (9′) так же, как из свойства (9) при $q < 1$, вытекает (10). Далее рассуждения ведутся как при доказательстве б) при $q < 1$. Если же $q > 1$, то берем q' такое, что $q > q' > 1$ и из (9′) заключаем, что $\sqrt[k_s]{u_{k_s}} > q'$ для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_k\}$. Но тогда

$$u_{k_s} > (q')^{k_s}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, \qquad u_{k_s} \to \infty, \qquad s \to \infty.$$

Это показывает, что ряд (3) расходится и его общий член не ограничен. Этим утверждение в) доказано.

З а м е ч а н и е 1. Ряд с общим членом $u_n = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ (см. § 9.15, (5) *)). При этом в обоих случаях

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \tag{11}$$

так же, как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1. \tag{12}$$

Таким образом, существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды с признаками (11) или (12).

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ называется *гармоническим рядом.*

П р и м е р ы.

$$1)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};\quad 2)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^\alpha},\quad \alpha > 0;\quad 3)\ \sum_{k=1}^{\infty} (e^{1/k} - 1);$$

$$4)\ \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right);\quad 5)\ \sum_{k=1}^{\infty} q^{k+\sqrt{k}},\quad q > 0.$$

Ряды 1), 2), очевидно, сходятся при $x = 0$. Но ряд 1) также сходится для любого $x > 0$, потому что тогда $u_{k+1}/u_k = x/(k+1) \to 0$, $k \to \infty$. Ряд же 2) сходится при $0 < x < 1$ и расходится для $x > 1$, потому что для него $u_{k+1}/u_k = x(k/(k+1))^\alpha \to x$, $k \to \infty$; при $x = 1$ см. выше замечание 1. Ряды 3) и 4) расходятся, потому что $e^{1/k} - 1 \approx 1/k$, $k \to \infty$, и $\ln(1 + (1/k)) \approx 1/k$, $k \to \infty$ ($\approx$ — знак асимптотического равенства, см. § 4.10), а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится. Ряд 5) сходится при $0 \leqslant q < 1$ и расходится при $q > 1$, потому что для него $\sqrt[k]{u_k} = q^{1+k^{-1/2}} \to q$, $k \to \infty$. При $q = 1$ он тоже расходится — общий его член в этом случае равен 1.

Т е о р е м а 4. *Пусть ряд*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{13}$$

с неотрицательными членами сходится и имеет сумму S. Тогда полученный в результате произвольной перестановки его членов новый (заново перенумерованный) ряд

$$u_0' + u_1' + u_2' + u_3' + \ldots \tag{14}$$

также сходится и имеет ту же сумму S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$S_n' = u_0' + u_1' + \ldots + u_n'$$

*) В § 9.15 мы воспользовались понятием ряда только в пределах сведений, изложенных в § 11.1.

— частичная сумма ряда (14). Члены ее находятся в ряде (13) под некоторыми номерами $k_0, \ldots, k_n$ Пусть N — наибольшее число среди них и S_N есть N-я частичная сумма ряда. Очевидно, $S'_n \leqslant S_N \leqslant S$, и так как n произвольно, то ряд (14) сходится и имеет сумму $S' \leqslant S$. Но теперь приведенное рассуждение можно провести еще раз, поменяв ряды (13) и (14) местами, и получить, что $S \leqslant S'$. Поэтому $S = S'$.

§ 11.4. Ряд Лейбница

Ряд вида

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots, \tag{1}$$

где числа $a_k > 0$, монотонно убывая, стремятся к нулю ($a_k \geqslant a_{k+1}$; $a_k \to 0,\ k \to \infty$), называется *рядом Лейбница.*

Покажем, что ряд Лейбница сходится и его сумма $S \leqslant a_0$.

В самом деле, частичная его сумма S_{2n+1} с нечетным номером $2n+1$ может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1},$$

откуда очевидно следует, что она ограничена сверху числом a_0:

$$S_{2n+1} \leqslant a_0.$$

С другой стороны, она может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

откуда следует, что она монотонно не убывает. Но в таком случае существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S \leqslant a_0.$$

Очевидно также, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - a_{2n+1}) = S - 0 = S.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ есть, очевидно, ряд Лейбница. Таким образом, он сходится и его сумма S не превышает 1 (на самом деле, $S = \ln 2$, см. § 5.11, (5)).

§ 11.5. Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд с комплексными членами

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots \tag{2}$$

модулей его членов.

Абсолютно сходящийся ряд сходится. В самом деле, пусть ряд (1) абсолютно сходится; тогда сходится ряд (2) и в силу признака Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $\varepsilon > |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|$ для всех значений p и $n > N$. Тем более, тогда $\varepsilon > |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}|$. Поэтому в силу критерия Коши ряд (1) сходится.

Сходящиеся ряды с неотрицательными членами тривиальным образом сходятся абсолютно. Ряд $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \ldots$, $\alpha > 0$, сходится, потому что он есть ряд Лейбница. Однако абсолютно он сходится только при $\alpha > 1$.

Теорема 1. *Если ряд абсолютно сходится, то при любой перестановке его членов абсолютная сходимость полученного нового ряда не нарушается и его сумма остается прежней.*

Доказательство. Сначала докажем теорему в случае, когда члены ряда u_k — действительные числа.

Положим (для действительных u_k)

$$u_k^+ = \begin{cases} u_k, & \text{если } u_k \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } u_k < 0, \end{cases} \qquad u_k^- = \begin{cases} -u_k, & \text{если } u_k \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } u_k > 0; \end{cases} \tag{3}$$

числа u_k^+ и u_k^-, очевидно, неотрицательные и

$$u_k = u_k^+ - u_k^-. \tag{4}$$

Наряду с рядом (1) будем рассматривать два ряда,

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^+ \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k^- \tag{5}$$

(с неотрицательными членами).

Пусть ряд (1) абсолютно сходится и члены его — действительные числа u_k. Тогда ряды (5) сходятся, потому что, очевидно, $u_k^+ \leqslant |u_k|$, $u_k^- \leqslant |u_k|$.

Пусть ряд, полученный после перестановки исходного ряда (1), имеет вид $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ Для его членов введем, как выше, числа v_k^+ и v_k^-. Тогда (пояснения ниже)

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^+ - \sum_{k=0}^{\infty} u_k^- =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v_k^+ - \sum_{k=0}^{\infty} v_k^- = \sum_{k=0}^{\infty} (v_k^+ - v_k^-) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

Первое равенство в этой цепи следует из (4), второе — из § 11.2, (2), если учесть, что ряды (5) сходятся, третье следует из того, что сходящиеся ряды с неотрицательными членами перестановочны, четвертое из § 11.2, (2) и, наконец, пятое — потому, что $v_k = v_k^+ - v_k^-$. Теорема для действительных u_k доказана.

Пусть теперь $u_k = \alpha_k + i\beta_k$ — комплексные числа, а числа v_k имеют прежний смысл. Так как $|\alpha_k| \leqslant |u_k|$, $|\beta_k| \leqslant |u_k|$, то ряды с (действительными членами) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ абсолютно сходятся и члены их, как было доказано, можно переставлять. Поэтому, считая, что $v_k = \gamma_k + i\delta_k$, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k + i\beta_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k + i\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k + i\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k = \sum_{k=0}^{\infty}(\gamma_k + i\delta_k) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

Теорема доказана полностью.

Теорема 2. *Пусть ряды* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *и* $\sum_{l=0}^{\infty} v_l$ *абсолютно сходятся и произведения* $u_k v_l$, $k, l = 0, 1, \ldots$, *перенумерованы каким-либо способом (при помощи одного индекса) и обозначены* $w_0, w_1, w_2, \ldots$ *Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \times \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{k=0}^{\infty} w_k,$$

где ряд справа абсолютно сходится.

Доказательство. Положим

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad \widetilde{s}_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|, \quad \sigma_n = \sum_{l=0}^{n} v_l, \quad \widetilde{\sigma}_n = \sum_{l=0}^{n} |v_l|.$$

Имеем (пояснения ниже)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \times \sum_{l=0}^{\infty} |v_l| = \lim_{n\to\infty} \widetilde{s}_n \cdot \lim_{n\to\infty} \widetilde{\sigma}_n = \lim_{n\to\infty} (\, \widetilde{s}_n \widetilde{\sigma}_n \,) = \\ = \widetilde{s}_0\widetilde{\sigma}_0 + (\, \widetilde{s}_1\widetilde{\sigma}_1 - \widetilde{s}_0\widetilde{\sigma}_0 \,) + (\, \widetilde{s}_2\widetilde{\sigma}_2 - \widetilde{s}_1\widetilde{\sigma}_1 \,) + \ldots = \\ = |u_0v_0| + (|u_0v_1| + |u_1v_1| + |u_1v_0|) + \\ + (|u_0v_2| + |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| + |u_2v_0|) + \ldots = \\ = |u_0v_0| + |u_0v_1| + |u_1v_1| + |u_1v_0| + |u_0v_2| + \\ + |u_1v_2| + \ldots = |w_0| + |w_1| + |w_2| + \ldots \tag{6}$$

Ряды с членами $|u_k|$, $|v_l|$ по условию сходятся, и потому первое равенство (6) имеет смысл. Так как пределы $\widetilde{s}_n$ и $\widetilde{\sigma}_n$ (при $n \to \infty$) существуют, то существует предел $\widetilde{s}_n\widetilde{\sigma}_n$ и равен их произведению — это выражено вторым равенством. В третьем предел $\widetilde{s}_n\widetilde{\sigma}_n$ заменен на сумму соответствующего ряда, членами которого являются выражения в скобках. В четвертом равенстве скобки формально раскрываются. При составлении этих сумм может помочь рис. 11.1 (в скобки попадают слагаемые $|u_k v_l|$, соответствующие целочисленным точкам (k, l), лежащим на непрерывных жирных линиях вида ABC). В силу того, что внутри скобок стоят суммы неотрицательных слагаемых, после их раскрытия полученный ряд продолжает сходиться к той же сумме. В последнем, шестом, равенстве в ряду с неотрицательными членами переставлены члены, что законно.

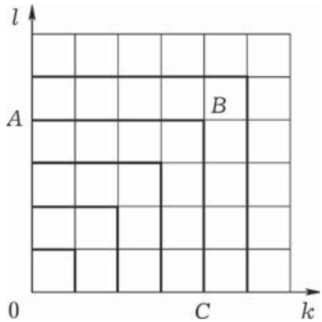

Рис. 11.1

Подобные преобразования сделаем для исходных рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \times \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \lim_{n\to\infty} s_n \cdot \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (s_n \sigma_n) =$$
$$= s_0\sigma_0 + (s_1\sigma_1 - s_0\sigma_0) + \ldots = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0) + \ldots =$$
$$= u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0 + u_0v_2 + \ldots =$$
$$= w_0 + w_1 + w_2 + \ldots \qquad (6')$$

В предпоследнем равенстве формальное раскрытие скобок законно, потому что получился сходящийся, даже абсолютно сходящийся, ряд, как это выяснено при рассмотрении (6). В последнем равенстве переставлены члены в абсолютно сходящемся ряде, что тоже законно.

Важный пример (пояснения ниже):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{v_l}{l!} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{v}{1} + \frac{z^2}{2!} + zv + \frac{v^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} +$$
$$+ \frac{z^2v}{2!} + \frac{zv^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \ldots = 1 + \frac{1}{1!}(z+v) + \frac{1}{2!}(z+v)^2 + \frac{1}{3!}(z+v)^3 + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+v)^k}{k!}.$$

Перемножаемые ряды абсолютно сходятся для любых комплексных z и v, поэтому их можно (на основании теоремы 2) перемножить, как если бы это были многочлены. При этом произведения $\frac{z^k v^l}{k!\,l!}$ можно расположить в любом порядке, составленный из них ряд абсолютно сходится.

В данном случае выгодно члены $\frac{z^k}{k!}\,\frac{v^l}{l!}$ сгруппировать так, чтобы в n-ю группу попали произведения, соответствующие целочисленным парам (k, l), где $k + l = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

§ 11.6. Условно и безусловно сходящиеся ряды с действительными членами

Пусть задан ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

с действительными членами. Определим для него, как в предыдущем параграфе, два ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^+ \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k^- \tag{2}$$

(с неотрицательными членами).

Если ряд (1) абсолютно сходится, то, как мы знаем, сходятся также ряды (2). Очевидно, и наоборот, — из сходимости двух рядов (2) следует абсолютная сходимость ряда (1), потому что

$$|u_k| = u_k^+ + u_k^-.$$

Таким образом, для того чтобы ряд (1) абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы порождаемые им ряды (2) сходились.

Пусть теперь ряд (1) сходится, но не абсолютно. Тогда один из рядов (2), пусть для определенности первый, расходится, т. е. $\sum_{k=0}^{\infty} u_k^+ = \infty$ (ведь $u_k^+ \geqslant 0$). Но

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^- = \sum_{k=0}^{n} u_k^+ - \sum_{k=0}^{n} u_k. \tag{3}$$

Первая сумма в правой части (3) неограниченно возрастает вместе с n, а вторая стремится к конечному пределу, потому что ряд (1) сходится, поэтому левая часть (3) неограничена при возрастании n. Таким образом, оба ряда (2) расходятся.

Заметим еще, что из сходимости ряда (1) следует, что $u_k \to 0$, а тогда, очевидно, и u_k^+, $u_k^- \to 0$.

Мы показали, что если ряд (1) сходится, но не абсолютно, то порождаемые им ряды (2) оба расходятся, но при этом u_k^+, $u_k^- \to 0$.

Это утверждение можно еще переформулировать так:

1) *Для того чтобы ряд был абсолютно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы ряды, составленные только из положительных и только из отрицательных его членов, были сходящимися.*

Впрочем, может оказаться, что один из этих рядов на самом деле есть конечная сумма или вообще отсутствует.

2) *Если ряд сходится не абсолютно, то ряды, составленные только из положительных и только из отрицательных его членов, расходятся, а их общие члены стремятся к нулю.*

Существует следующая терминология. Говорят, что ряд сходится *безусловно*, если он сходится и любая перестановка его членов не нарушает его сходимости, и ряд сходится *условно*, если он сходится, но существует перестановка его членов, нарушающая его сходимость, т. е. делающая переставленный ряд расходящимся.

Из доказанной в предыдущем параграфе теоремы о перестановочности абсолютно сходящегося ряда следует, что а) *абсолютно сходящийся ряд сходится безусловно.*

Из утверждения же 2) и теоремы, которую мы доказываем ниже, следует, что б) *сходящийся не абсолютно ряд сходится условно.*

Из утверждений а) и б) тогда следует, *что для того, чтобы ряд сходился безусловно, необходимо и достаточно, чтобы он был абсолютно сходящимся.*

После сказанного самому понятию безусловной сходимости можно дать другую, эквивалентную, формулировку: сходящийся ряд называется *безусловно сходящимся*, если ряд, полученный после любой перестановки его членов, продолжает сходиться и имеет прежнюю сумму.

Но перейдем к теореме, о которой шла речь.

Теорема 1 (Римана). *Пусть заданы два расходящихся ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ *с положительными членами, стремящимися к нулю при* $k \to \infty$ $(\alpha_k \to 0,\ \beta_k \to 0)$.

Тогда, каково бы ни было действительное число S, $-\infty \leqslant S \leqslant \infty$, *можно сконструировать ряд вида*

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{k_1} - \beta_0 - \ldots - \beta_{k_1'} + \alpha_{k_1+1} + \ldots \\ \ldots + \alpha_{k_2} - \beta_{k_1'+1} - \ldots - \beta_{k_2'} + \alpha_{k_2+1} + \ldots, \tag{4}$$

имеющий сумму S.

Таким образом, при $S = +\infty$ или $S = -\infty$ он будет расходиться. В этот ряд входят все α_k и β_k, и притом по одному разу.

Доказательство. Пусть для определенности S — положительное число, конечное. Числа $k_1 < k_2 < \ldots$, $k_1' < k_2' < \ldots$ подбираются как наименьшие натуральные числа, для которых выполняются последовательно неравенства:

$$\begin{array}{ll} 1)\ A_1 = \sum_0^{k_1} \alpha_j > S, & 2)\ A_2 = A_1 - \sum_0^{k_1'} \beta_j < S, \\ 3)\ A_3 = A_2 + \sum_{k_1+1}^{k_2} \alpha_j > S, & 4)\ A_4 = A_3 - \sum_{k_1'+1}^{k_2'} \beta_j < S. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Возможность подобрать такие числа k_l, k_l' каждый раз следует из расходимости рядов $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ и $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j$. Теперь тот факт, что ряд (4) сходится к S, следует из того, что $\alpha_k, \beta_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Чтобы получить теорему при $S = \infty$, можно в правых частях неравенств 1), 2), ... поставить вместо S соответственно числа $2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots$

§ 11.7. Последовательности и ряды функций. Равномерная сходимость

Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(\mathbf{x})\}$, определенных на некотором множестве E точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства. Они могут принимать комплексные значения ($f_n(\mathbf{x}) = \alpha_n(\mathbf{x}) + i\beta_n(\mathbf{x})$). Можно считать также, что $\mathbf{x}$ — комплексные точки ($\mathbf{x} = \xi + i\eta$), пробегающие множество E точек комплексной плоскости, и тогда $f_n(\mathbf{x})$ — функции комплексной переменной $\mathbf{x}$.

Пусть для каждого $\mathbf{x} \in E$ последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ стремится к числу $f(\mathbf{x})$ (функции от $\mathbf{x}$). Обозначим через

$$\rho_n = \sup_{\mathbf{x}\in E} |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \tag{1}$$

верхнюю грань модулей уклонений $f_n(\mathbf{x})$ от $f(\mathbf{x})$, распространенную на множество E. Будем предполагать, что ρ_n для каждого n конечно ($\rho_n < \infty$).

Говорят, что последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ *равномерно сходится на E к* $f(\mathbf{x})$, если $\rho_n \to 0$, $n \to \infty$.

Дадим второе эквивалентное определение: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ *равномерно сходится к $f(\mathbf{x})$ на E*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ выполняется неравенство

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in E. \tag{2}$$

Если выполняется первое определение, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что $\rho_n < \varepsilon$ для всех $n > N$. Но тогда

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \rho_n < \varepsilon \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x} \in E$ и $n > N$, т. е. выполняется второе определение. Если же выполняется второе определение, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ выполняется неравенство (2). Взяв верхнюю грань его левой части по $\mathbf{x} \in E$, получим $\rho_n \leqslant \varepsilon$, $n > N$, откуда $\rho_n \to 0$, т. е. выполняется первое определение.

Верно также третье (эквивалентное) определение: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ *равномерно сходится на E к* $f(\mathbf{x})$, если существует последовательность $\{\alpha_n\}$ положительных чисел (не зависящих от $\mathbf{x}$) такая, что $\alpha_n \to 0$ и $|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leqslant \alpha_n$ для всех $\mathbf{x} \in E$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

В самом деле, если верно первое определение, то, положив $\alpha_n = \rho_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), получим третье определение. Обратно, из третьего определения следует

$$\rho_n = \sup_{\mathbf{x}\in E} |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leqslant \alpha_n$$

и $\rho_n \to 0$, $n \to \infty$.

Например, пусть функции $f(x)$, $f_n(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$. График функции $y = f(x)$ изображен на чертеже (рис. 11.2). Кроме того, там изображена полоска Π_ε толщиной 2ε:

$$f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

состоящая из точек (x, y), удаленных от этого графика в направлении оси y на величину, меньшую, чем $\varepsilon > 0$.

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно на $[a, b]$ стремится к $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что все графики Γ_n функций $f_n(x)$ с $n > N$ попадут полностью в Π_ε.

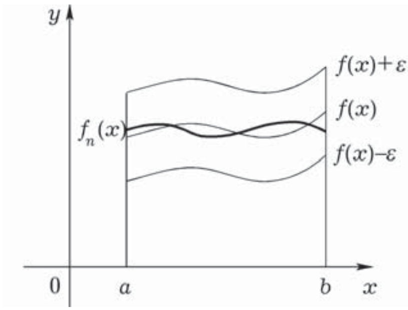

Рис. 11.2

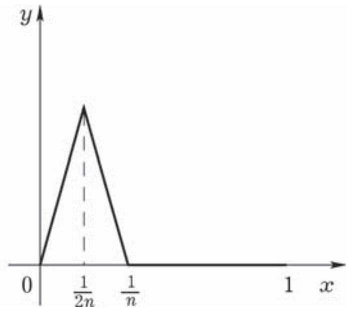

Рис. 11.3

Но могут быть такие последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящиеся к $f(x)$ для любого $x \in [a, b]$, что для некоторых $\varepsilon > 0$ не существует такое N, чтобы графики $f_n(x)$ с $n > N$ попадали полностью в Π_ε. В этом случае мы говорим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ на $[a, b]$ неравномерно (см. далее пример 2 и рис. 11.3).

Можно еще дать четвертое определение равномерной сходимости в духе Коши: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ *равномерно сходится на* E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon \tag{4}$$

при любых $n > N$ и натуральных $p > 0$ для всех $\mathbf{x} \in E$.

Из того, что последовательность равномерно сходится в смысле второго определения, следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ и любых p выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant |f_{n+p}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < 2\varepsilon$$

$$\text{для всех} \quad \mathbf{x} \in E,$$

т. е. выполняется четвертое определение. С другой стороны, пусть выполняется четвертое определение; тогда для каждого отдельного значения $\mathbf{x} \in E$ выполняется, очевидно, обычный признак Коши сходимости последовательности, поэтому она сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x})$. Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и подберем N так, как указано в четвертом определении. В неравенстве (4), где $n > N$ фиксировано, перейдем к пределу при $p \to \infty$; в результате получим

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon, \qquad \mathbf{x} \in E,$$

и так как $n > N$ можно взять любым, то выполняется второе определение.

Нетрудно видеть, что если α — число, а $\{f_k(\mathbf{x})\}$ и $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ — две последовательности функций, равномерно сходящиеся на E, то последовательности $\{\alpha f_k(\mathbf{x})\}$ и $\{f_k(\mathbf{x}) \pm \varphi_k(\mathbf{x})\}$ также равномерно сходятся на E. Нетрудно также видеть, что если последовательность функций равномерно сходится на E, то она равномерно сходится и на $E' \subset E$. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Заметим еще, что каждой последовательности функций $\{f_n(\mathbf{x})\}$ соответствует ряд

$$f_0(\mathbf{x}) + (f_1(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x})) + (f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})) + \ldots,$$

n-е частичные суммы которого соответственно равны $f_n(\mathbf{x})$.

Пусть теперь задан ряд

$$u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}) + \ldots, \tag{5}$$

члены которого, вообще говоря, комплексные функции от $\mathbf{x} \in E$, где E — по-прежнему некоторое множество точек n-мерного пространства или комплексной плоскости.

По определению *ряд* (5) *равномерно сходится на множестве* E *к функции* $S(\mathbf{x})$, если последовательность $\{S_k(\mathbf{x})\}$ его частичных сумм равномерно сходится на E к $S(\mathbf{x})$.

Определение равномерной сходимости ряда, очевидно, можно высказать и так: ряд (5) равномерно сходится на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$, $p > 0$ и всякого $\mathbf{x} \in E$ выполняется неравенство $|u_{n+1}(\mathbf{x}) + \ldots + u_{n+p}(\mathbf{x})| < \varepsilon$.

Следующая теорема дает важный критерий равномерной сходимости ряда.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Если члены ряда* (5) *удовлетворяют неравенствам*

$$|u_k(\mathbf{x})| \leqslant \alpha_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

где $\mathbf{x} \in E$, *а* α_k — *числа (не зависящие от* $\mathbf{x}$), *и если ряд с членами* α_k *сходится, то ряд* (5) *сходится на множестве* E *абсолютно и равномерно.*

В самом деле, из сходимости ряда с членами α_k и из (6) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при любых $n > N$ и $p > 0$ и произвольном $\mathbf{x} \in E$

$$\varepsilon > \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} \geqslant |u_{n+1}(\mathbf{x})| + \ldots + |u_{n+p}(\mathbf{x})| \geqslant \\ \geqslant |u_{n+1}(\mathbf{x}) + \ldots + u_{n+p}(\mathbf{x})|,$$

а это и значит, что ряд (5) равномерно сходится на E. Абсолютная его сходимость очевидна.

Теорема 2. *Если последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f и f_n непрерывны в точке $\mathbf{x}^0$ (относительно E), то f также непрерывна в $\mathbf{x}^0$.*

На языке рядов эта теорема гласит: сумма равномерно сходящегося на E ряда функций, непрерывных в точке $\mathbf{x}^0 \in E$, есть непрерывная функция в этой точке.

Доказательство. Составим разность

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \big(f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})\big) + \\ + \big(f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}^0)\big) + \big(f_n(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}^0)\big). \tag{7}$$

Зададим $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости f_n к f на E найдется n такое, что

$$|f(\mathbf{x})| - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon/3 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in E \tag{8}$$

и, в частности,

$$|f(\mathbf{x}^0) - f_n(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon/3. \tag{9}$$

Для найденного n функция f_n непрерывна в точке $\mathbf{x}^0$, поэтому найдется окрестность $U(\mathbf{x}^0)$ точки $\mathbf{x}^0$ такая, что

$$|f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon/3, \qquad \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0). \tag{10}$$

Теперь из (7)–(10) следует, что для точек $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0)$ выполняются неравенства

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

т. е. имеет место непрерывность f в точке $\mathbf{x}^0$. Теорема доказана.

Рассмотрим ряд

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots\,, \tag{11}$$

где α_k, β_k — функции от $\mathbf{x} \in E$ (или постоянные числа).

Положим $B_k = \beta_{n+1} + \beta_{n+2} + \ldots + \beta_{n+k}$ и к усеченной сумме ряда (8) применим *преобразование* (*Абеля*):

$$\alpha_{n+1}\beta_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}\beta_{n+p} =$$
$$= \alpha_{n+1}B_1 + \alpha_{n+2}(B_2 - B_1) + \ldots + \alpha_{n+p}(B_p - B_{p-1}) =$$
$$= (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})B_1 + (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})B_2 + \ldots$$
$$\ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})B_{p-1} + \alpha_{n+p}B_p =$$
$$= \sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1})B_k + \alpha_{n+p}B_p. \qquad (12)$$

Легко теперь установить следующие два критерия равномерной сходимости (в случае постоянных α_k, β_k — просто сходимости) ряда (11).

Т е о р е м а 3 (признак Дирихле равномерной сходимости ряда). *Если частные суммы ряда*

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots \qquad (13)$$

ограничены в совокупности, а действительная функция $\alpha_k(\mathbf{x})$ (*с возрастанием* k) *равномерно* (*относительно* $\mathbf{x}$) *на* E *стремится к нулю, убывая, то ряд* (11) *сходится равномерно.*

В самом деле, пусть константа M превышает модули частных сумм σ_n ряда (13). Тогда при любых n и k

$$|B_k| = |\sigma_{n+k} - \sigma_n| \leqslant |\sigma_{n+k}| + |\sigma_n| \leqslant 2M.$$

Поэтому в силу (12) и того факта, что α_s равномерно стремится к нулю, убывая, выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\alpha_{n+k}\beta_{n+k}\right| \leqslant 2M\sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) + \alpha_{n+p}2M = 2M\alpha_{n+1} < \varepsilon$$

для любых $n > N$ и p и любых $\mathbf{x} \in E$, если только N достаточно велико. Следовательно, ряд (11) равномерно сходится. Последнее неравенство в этой цепи верно для всех $\mathbf{x} \in E$ в силу равномерного стремления $\alpha_{n+1}(\mathbf{x})$ к нулю.

Т е о р е м а 4 (признак Абеля равномерной сходимости ряда). *Если действительные функции* α_k *монотонно убывают* (*с возрастанием* k) *и ограничены в совокупности, а ряд* (13) *равномерно сходится на* E, *то и ряд* (11) *сходится равномерно на* E.

В самом деле, пусть $M \geqslant |\alpha_k|$, $k = 0, 1, \ldots$ (функции α_k могут быть и отрицательными). В силу равномерной сходимости ряда (13) для любого

$\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что $|B_k| < \varepsilon$ для любых $n > N$ и k. Поэтому в силу (12) и монотонности α_s для любых $n > N$ и p

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) + \varepsilon|\alpha_{n+p}| =$$
$$= \varepsilon(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+p}) + \varepsilon|\alpha_{n+p}| \leqslant 3\varepsilon M,$$

т. е. ряд (11) равномерно сходится.

Пример 1. Ряд

$$1 + (x-1) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{14}$$

сходится на отрезке $[0, 1]$, но неравномерно. В самом деле, n-я его частичная сумма равна $S_n(x) = x^n$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Поэтому $\rho_n = \sup_{x\in[0,1]} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n| = 1$, и ρ_n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

С другой стороны, ряд (14) равномерно сходится на любом отрезке $[0, q]$, где $0 < q < 1$, так как в этом случае

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,q]} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x\in[0,q)} |x^n| = q^n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Сумма ряда (14) разрывна в точке $x = 1$, хотя члены ряда — непрерывные функции на $[0, 1]$. Это показывает, что сумма неравномерно сходящегося ряда непрерывных функций не обязательно есть непрерывная функция. Однако существуют неравномерно сходящиеся ряды (последовательности) непрерывных функций, сходящиеся к непрерывным же функциям, как показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть (рис. 11.3) функция

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0 \text{ и } 1/n \leqslant x \leqslant 1, \\ n & \text{при } x = 1/(2n) \end{cases} \tag{15}$$

линейна и непрерывна на $[0, 1/(2n)]$ и $[1/(2n), 1/n]$. Очевидно, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

С другой стороны, сходимость на отрезке $[0, 1]$ неравномерна, потому что $\rho_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = n \to \infty$. На всяком же отрезке $[\varepsilon, 1]$ сходимость равномерна, потому что $f_n(x) \equiv 0$ на $[\varepsilon, 1]$ при $2n > 1/\varepsilon$.

Пример 3. Ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \quad \alpha > 0, \tag{16}$$

при $\alpha > 1$ равномерно и абсолютно сходятся на всей действительной оси $(-\infty < x < \infty)$, потому что абсолютные величины их k-х членов не превышают $k^{-\alpha}$, а при $\alpha > 1$ ряд $\sum k^{-\alpha}$ сходится. В этом рассуждении мы применили признак Вейерштрасса. При $\alpha \leqslant 1$ он уже не применим, так как в этом случае ряд $\sum k^{-\alpha}$ расходится. Однако при $0 < \alpha \leqslant 1$ наши ряды равномерно сходятся на отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, каково бы ни было положительное ε, где $0 < \varepsilon < 2\pi - \varepsilon < 2\pi$. В самом деле, частные суммы рядов

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots, \qquad \sin x + \sin 2x + \ldots$$

соответственно равны (см. примеры в конце § 8.2)

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$K_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Они ограничены в совокупности на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$:

$$\left|D_n(x)\right| = \frac{1}{2\sin(\varepsilon/2)}, \qquad \left|K_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

кроме того, $n^{-\alpha} \geqslant (n+1)^{-\alpha}$ и $n^{-\alpha} \to 0$, поэтому по признаку Дирихле ряды (13) равномерно сходятся на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

§ 11.8. Интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов на отрезке

Теорема 1. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность $\{f_n\}$ (комплекснозначных) непрерывных функций, сходящаяся к функции f. Если сходимость равномерна на $[a, b]$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

равномерно на $[a, b]$. В частности (при $x = b$),

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \tag{2}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует (см. § 11.7, теорема 2), что предельная функция f непрерывна на $[a, b]$ и

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f(t)| = r_n \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Поэтому

$$\left| \int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \leqslant \int_a^b r_n\,dt = (b-a)r_n,$$

где правая часть не зависит от x и стремится при $n \to \infty$ к нулю, а это доказывает теорему.

Теорема 2. *Равномерно сходящийся на отрезке $[a, b]$ ряд (комплекснозначных) непрерывных функций*

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots \tag{3}$$

можно почленно интегрировать $(a \leqslant x_0,\ x \leqslant b)$:

$$\int_{x_0}^x S(t)\,dt = \int_{x_0}^x u_0(t)\,dt + \int_{x_0}^x u_1(t)\,dt + \ldots \tag{4}$$

Полученный при этом ряд (4) *равномерно сходится на* $[a, b]$.

В частности,

$$\int_a^b S(t)\,dt = \int_a^b u_0(t)\,dt + \int_a^b u_1(t)\,dt + \ldots \tag{5}$$

Доказательство. По условию сумма

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$$

равномерно сходится к $S(x)$ на $[a, b]$. Поэтому на основании теоремы 1 выполняется равенство

$$\int_{x_0}^x S(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^x S_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \int_{x_0}^x u_k(t)\,dt$$

равномерно относительно $x \in [a, b]$. Это показывает, что ряд (4) сходится равномерно относительно $x \in [a, b]$.

Теорема 3. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность (комплекснозначных) функций $\{f_n\}$, имеющих непрерывную* *производную. Если она сходится в точке* $x_0 \in [a,b]$ *и, кроме того, соответствующая последовательность производных* $\{f'_n\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[a,b]$ *к функции* φ, *то последовательность* $\{f_n\}$ *тоже сходится равномерно на этом отрезке к некоторой функции* f *и*

$$f'(x) = \varphi(x), \qquad x \in [a,b]. \tag{6}$$

Доказательство. Имеют место равенства

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \qquad x_0, x \in [a,b], \tag{7}$$

потому что функции f_n непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$.

По условию существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = A,$$

который мы обозначаем через A. Так как $f'_n(t) \to \varphi(t)$ при $n \to \infty$ равномерно на $[a,b]$ и функции $f'_n(t)$ непрерывны, то и $\varphi(t)$ непрерывна на $[a,b]$ (см.§ 11.7, теорему 2) и, кроме того (см. теорему 1),

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$$

равномерно на $[a,b]$. Но тогда правая часть (7) при $n \to \infty$ равномерно на $[a,b]$ стремится к некотрой функции $f(x)$, определяемой равенством

$$f(x) = A + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt, \qquad x_0, x \in [a,b]. \tag{8}$$

Таким образом, $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно на $[a,b]$. Если учесть, что $\varphi(t)$ непрерывна на $[a,b]$, то из равенства (8) следует, что (см.§ 9.9, (2)) $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a,b]$, равную $\varphi(x)$, т.е. выполняется равенство (6). Теорема доказана.

Отметим следствие из теоремы 3.

Следствие. *Если функции* $f_n(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[a,b]$, $n = 1,2,\ldots$, *и выполняются свойства* $f_n(x) \to f(x)$, $f'_n(x) \to \varphi(x)$, $n \to \infty$, *равномерно на* $[a,b]$, *то*

$$f'(x) = \varphi(x), \qquad x \in [a,b].$$

На языке рядов теорема 3 имеет следующий аналог:

Теорема 3$'$. *Пусть на отрезке* $[a,b]$ *задан ряд*

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots \tag{9}$$

(комплекснозначных) функций, имеющих непрерывную производную.

Если ряд (9) сходится в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$ и, кроме того, формально продифференцированный ряд

$$u_0'(x) + u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots \tag{10}$$

равномерно сходится на $[a,b]$, то ряд (9) равномерно сходится на $[a,b]$ и производная от его суммы $S(x)$ есть сумма ряда (10).

Таким образом,

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots, \tag{11}$$

$$S'(x) = u_0'(x) + u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $u_0(x) + \ldots + u_n(x) = S_n(x)$; тогда

$$u_0'(x) + \ldots + u_n'(x) = S_n'(x).$$

На языке сумм S_n и S_n' условие теоремы $3'$ гласит: существует предел $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0)$, и последовательность непрерывных производных $\{S_n'(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$. Но тогда по теореме 3 последовательность $\{S_n(x)\}$, а вместе с ней ряд (11), сходится равномерно на этом отрезке к некоторой дифференцируемой функции $S(x)$ и производная $S'(x) = \lim_{n\to\infty} S_n'(x)$, т. е. $S'(x)$ есть сумма ряда (12).

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\Lambda_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx + \dfrac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^\alpha}. \tag{13}$$

При четном α это — ряд вида

$$\text{а)} \quad \pm \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha},$$

а при нечетном α — вида

$$\text{б)} \quad \pm \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}.$$

Так как $\frac{d}{dx}\cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) = -k\cos\left(kx + (\alpha-1)\frac{\pi}{2}\right)$, то формально

$$\frac{d}{dx}\Lambda_\alpha(x) = -\Lambda_{\alpha-1}(x). \tag{14}$$

Но это равенство верно по существу и при $\alpha = 3, 4, \ldots$ для любого действительного x, а при $\alpha = 2$ — при любом действительном

$$x \neq 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{15}$$

что следует из теоремы 3 и разобранных в примере 3 § 11.7 свойств рядов а), б). При доказательстве равенств (14) при $\alpha = 2$ для какого-либо фиксированного x, удовлетворяющего неравенствам (15), берем отрезок $[a, b]$, содержащий строго внутри точку x, но не содержащий точки вида $2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. На $[a, b]$ оба ряда в (14) при $\alpha = 1, 2$ сходятся равномерно, что дает возможность применить теорему 3.

Пример 2. Пусть функция

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \quad \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \\ \alpha_n, & x = \dfrac{1}{2n}, \end{cases} \tag{16}$$

линейная и непрерывная на $[0, 1/(2n)]$ и $[1/(2n), 1/n]$, где α_n — любая последовательность чисел. Тогда, очевидно, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0, 1]$, а

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/(2n)} 2n\alpha_n x\,dx - \int_{1/(2n)}^{1/n} 2n\alpha_n\left(\frac{1}{n} - x\right)dx = \frac{\alpha_n}{2n}.$$

Очевидно, далее, что

$$r_n = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x) - 0| = \alpha_n.$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\alpha_n \to 0$. Равенство

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f(x) \equiv 0, \tag{17}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\frac{\alpha_k}{2n} \to 0$, $n \to \infty$.

Мы видим, что из равномерной сходимости f_n к $f = 0$ на $[0, 1]$ следует сходимость интегралов (17), что согласуется с теоремой 2. Но последовательность $\{f_n\}$ может сходиться неравномерно, в то время как свойство (17) все же соблюдается, например при $\alpha_n = 1$. Но уже, например, при $\alpha_n = n$ последовательность $\{f_n\}$ не только сходится к нулю неравномерно, но свойство (17) не соблюдается.

Пример 3. Из равенства $(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \ldots$, $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho < 1$, следует, что

$$\frac{1 + \rho e^{i\theta}}{2(1 - \rho e^{i\theta})} = \frac{1}{2} + \rho e^{i\theta} + \rho^2 e^{2i\theta} + \ldots,$$

и, отделяя действительную и мнимую части, получим

$$P_\rho(\theta) = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} = \frac{1}{2} + \rho\cos\theta + \rho^2\cos 2\theta + \ldots,$$

$$Q_\rho(\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} = \rho\sin\theta + \rho^2\sin 2\theta + \ldots$$

Функция $P_\rho(\theta)$ называется *ядром Пуассона*, а $Q_\rho(\theta)$ — ему *сопряженной функцией*.

Упражнение. Показать, что $P_\rho(\theta)$ и $Q_\rho(\theta)$ — гармонические функции (для $\rho < 1$), т.е. удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа ($\Delta u = 0$). Для этого проверить, что $\rho^n \cos n\theta$ при любых n и $\rho \geqslant 0$ — гармоническая функция, и применить теорему о почленном дифференцировании равномерно сходящихся рядов (то же для $\rho^n \sin n\theta$).

Пример 4. Будем исходить из равенства

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^3 - \dots, \qquad -1 < x < 1, \tag{18}$$

где ряд справа есть сумма убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $(-x)$.

На основании теоремы Вейерштрасса ряд (18) равномерно сходится на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, потому что на этом отрезке

$$\left|(-1)^k x^k\right| \leqslant q^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty.$$

Поэтому в силу теоремы 2 ряд (18) законно проинтегрировать на $[0, x]$, где $x \in [-q, q]$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \tag{19}$$

Так как положительное число $q < 1$ произвольно, то равенство (19) справедливо для всех $x \in (-1, 1)$.

При $x = -1$ обе части (19) не имеют смысла. Однако при $x = 1$ они имеют смысл: левая часть равна $\ln 2$, а правая есть сумма сходящегося ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ Возникает вопрос, верно ли равенство

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

и, таким образом, верно ли равенство (19) не только на интервале $(-1, 1)$, но и на полуинтервале $(-1, 1]$?

Покажем, что это так. Ряд (19) на самом деле равномерно сходится на всем отрезке $[0, 1]$. Это следует из признака равномерной сходимости Абеля (см. теорему 4 § 11.7).

Действительно, общий член ряда (19) можно записать в виде

$$(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = \alpha_k \beta_k, \qquad \alpha_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \qquad \beta_k = x^k, \qquad k = 0, 1, \dots$$

При этом числовой ряд $\sum \alpha_k$ сходится. Но его можно рассматривать как равномерно сходящийся ряд постоянных функций. С другой стороны, функции $\beta_k = x^k$ ограничены ($|x^k| \leqslant 1,\ x \in [0, 1]$) и образуют при $0 < x < 1$ и возрастании k монотонную последовательность.

Итак, ряд (19) равномерно сходится на $[0, 1]$. Его члены — непрерывные функции, поэтому его сумма есть некоторая непрерывная на $[0, 1]$ функция, которую мы обозначим через $\psi(x)$.

Возникла следующая ситуация. Функции $\psi(x)$ и $\ln(1+x)$ непрерывны на $[0,1]$ и совпадают на $[0,1)$. Тогда, очевидно, они совпадают при $x=1$ тоже, т.е. $\ln 2 = \psi(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$

Другое доказательствоэтих фактов было дано в § 5.10, 5.11.

§ 11.9. Кратные ряды. Перемножение абсолютно сходящихся рядов

Выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}, \tag{1}$$

где a_{kl} — числа (действительные или комплексные), зависящие от пар индексов $k, l = 0, 1, 2, \ldots$, называется *двойным* или *двукратным рядом.* Числа a_{kl} называются *членами*, а числа

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl}, \qquad m, n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

— *частичными суммами ряда* (1).

По определению ряд (1) сходится к числу S, называемому *суммой ряда* (1), если существует

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S, \tag{3}$$

т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$|S - S_{mn}| < \varepsilon$$

для всех $m, n > N$. В этом случае пишут

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}$$

Остановимся на случае, когда члены ряда (1) неотрицательны $(a_{kl} \geqslant 0)$. Положим

$$\Lambda = \sup_{m,n} S_{mn}. \tag{4}$$

Если $\Lambda < \infty$ — конечное число, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара m_0, n_0 такая, что $\Lambda - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leqslant \Lambda$, а вследствие неотрицательности a_{kl}

$$S_{m_0 n_0} \leqslant S_{mn}, \qquad m, n > N = \max(m_0, n_0).$$

Поэтому $\Lambda - \varepsilon < S_{mn} < \Lambda + \varepsilon$, $m, n > N$, и существует предел $\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S = \Lambda$.

Если же $\Lambda = \infty$, то, очевидно (при $a_{kl} \geqslant 0$), $\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S = \infty$. В этом случае пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \infty.$$

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} |a_{kl}|$. Как и в случае обычных рядов, доказывается (прибегая к условию Коши), что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Наряду с рядом (1) можно рассматривать еще выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right),$$

которому естественно приписать число A (если только оно существует), получаемое следующим образом: если для каждого $k = 0, 1, \ldots$ ряд, заключенный в скобки, сходится и имеет сумму A_k и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ сходится к числу A, то полагаем

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right). \tag{5}$$

Т е о р е м а 1. *Если ряд* (1) *абсолютно сходится, то имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right). \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим сначала, что a_{kl} неотрицательны. Пусть левая часть (6) (имеющая смысл!) равна числу S.

Для любых неотрицательных s и n при $s \leqslant m$

$$\sum_{l=0}^{n} a_{sl} \leqslant \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant S, \tag{7}$$

откуда ряды $\sum_{l=0}^{\infty} a_{sl}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, сходятся; поэтому, если во втором неравенстве зафиксировать m и перейти к пределу при $n \to \infty$, получим, что

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right) \leqslant S$$

для любого m, откуда следует существование числа A (см. (5)) и тот факт, что $A \leqslant S$.

С другой стороны, если число A конечно, то при любых m, n

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right) \leqslant A,$$

и потому

$$S = \sup_{m,n} S_{mn} \leqslant A.$$

Равенство (6) при $a_{kl} \geqslant 0$ доказано.

Пусть теперь a_{kl} действительны. Положим

$$a_{kl}^{+} = \begin{cases} a_{kl}, & a_{kl} \geqslant 0, \\ 0, & a_{kl} < 0, \end{cases} \qquad a_{kl}^{-} = \begin{cases} -a_{kl}, & a_{kl} \leqslant 0, \\ 0, & a_{kl} > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$a_{kl} = a_{kl}^{+} - a_{kl}^{-}, \qquad a_{kl}^{+} + a_{kl}^{-} = |a_{kl}|.$$

Поэтому из сходимости ряда $\sum\sum |a_{kl}|$ следует сходимость рядов $\sum\sum a_{kl}^{+}$, $\sum\sum a_{kl}^{-}$ с неотрицательными членами, и потому

$$\sum\sum a_{kl} = \sum\sum a_{kl}^{+} - \sum\sum a_{kl}^{-} = \\ = \sum_{k} \left(\sum_{l} a_{kl}^{+} \right) - \sum_{k} \left(\sum_{l} a_{kl}^{-} \right) = \sum_{k} \left(\sum_{l} a_{kl} \right).$$

Наконец, если $a_{kl} = \alpha_{kl} + i\beta_{kl}$ — комплексные числа и ряд $\sum\sum |a_{kl}|$ сходится, то сходятся также ряды $\sum\sum |\alpha_{kl}|$, $\sum\sum |\beta_{kl}|$, где α_{kl} и β_{kl} — действительные числа, поэтому

$$\sum\sum a_{kl} = \sum\sum \alpha_{kl} + i \sum\sum \beta_{kl} = \\ = \sum_{k} \left(\sum_{l} \alpha_{kl} \right) + i \sum_{k} \left(\sum_{l} \beta_{kl} \right) = \sum_{k} \left(\sum_{l} a_{kl} \right).$$

Теорема доказана полностью.

Рассмотрим еще новый вопрос. Пусть задан двойной ряд (1), сходящийся и притом абсолютно. Его сумму S так же, как сумму S' ряда, составленного из абсолютных величин его членов, можно записать в виде пределов последовательностей:

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} a_{kl} = \lim_{n \to \infty} S_{nn},$$

$$S' = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} |a_{kl}| = \lim_{n \to \infty} S'_{nn},$$

обычных, зависящих только от одного индекса n. Последовательностям $\{S_{nn}\}$, $\{S'_{nn}\}$ соответствуют сходящиеся ряды

$$S = a_{00} + (a_{10} + a_{11} + a_{01}) + \\ + (a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{12} + a_{02}) + (a_{30} + \ldots) + \ldots, \qquad (8)$$

$$|a_{00}| + (|a_{10}| + |a_{11}| + |a_{01}|) + \\ + (|a_{20}| + |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{12}| + |a_{02}|) + \ldots \qquad (9)$$

с членами, равными суммам чисел, стоящих в скобках. Но в скобках второго ряда стоят неотрицательные числа, поэтому сходимость его не изменится, если в нем скобки вычеркнуть:

$$|a_{00}| + |a_{10}| + |a_{01}| + |a_{20}| + \ldots \qquad (10)$$

Но тогда ряд

$$a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{20} + \ldots, \qquad (11)$$

полученный вычеркиванием в (8) всех скобок, абсолютно сходится, следовательно, сходится, очевидно, к S.

Мы доказали, что если двойной ряд (1) сходится к числу S и притом абсолютно, то полученный из него обычный (однократный) ряд (11) сходится тоже к S и тоже абсолютно. Но члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять как угодно, не нарушая его сходимости и не изменяя суммы.

Этим доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если члены двойного ряда* (1), *сходящегося к числу S и притом абсолютно, перенумеровать любым способом* $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ *при помощи одного индекса и составить ряд* $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$, *то последний будет сходиться к тому же числу S* (*абсолютно*).

В заключение заметим, что можно рассматривать трех-, четырех- и, вообще, n-кратные ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{klm}, \quad \ldots, \quad \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n}.$$

Для них могут быть доказаны теоремы, аналогичные теоремам 1, 2.

§ 11.10. Суммирование рядов и последовательностей методом средних арифметических

Пусть задан числовой ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \qquad (1)$$

Положим

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \qquad (2)$$

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

По определению ряд (1) (или последовательность $\{S_n\}$) суммируется методом средних арифметических к числу σ, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma. \tag{4}$$

Теорема. *Если ряд* (1) *сходится к числу* S, *то он суммируется методом средних арифметических и притом к тому же числу* S.

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится; тогда существует такое $M>0$, что

$$|S_j|\leqslant M,\qquad j=0,1,\ldots, \tag{5}$$

и такое достаточно большое натуральное n, которое мы будем считать фиксированным (а k и в дальнейшем p — переменными), что

$$|S_{n+k}-S|<\varepsilon,\qquad k=1,2,\ldots \tag{6}$$

Имеем, далее,

$$S-\sigma_{n+p}=\left(S-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}S_{n+k}\right)+\\ +\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p+1}\right)\sum_{k=1}^{p}S_{n+k}-\frac{1}{n+p+1}\sum_{k=1}^{n}S_k,$$

откуда, учитывая, что $\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p+1}=\frac{n+1}{p(n+p+1)}$, получим

$$|S-\sigma_{n+p}|<\varepsilon+\frac{n+1}{n+p+1}M+\frac{n+1}{n+p+1}M<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon,\quad p>p_0,$$

если p_0 достаточно велико. Следовательно, $\sigma_{n+p}\to S$ $(p\to\infty)$, или, что все равно, $\sigma_j\to S$ $(j\to\infty)$, т. е. теорема верна.

Пример 1. Ряд $1-1+1-\ldots$ расходится, но он суммируется к числу $1/2$ методом средних арифметических.

§ 11.11. Степенные ряды

Ряд вида

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots, \tag{1}$$

где a_k, $k=0,1,2,\ldots,$ — постоянные, вообще говоря, комплексные числа, а z — комплексная переменная, называется *степенным рядом* с коэффициентами a_k.

В теории степенных рядов центральное место занимает следующая основная теорема.

Теорема 1 (основная). *Для степенного ряда* (1) *существует неотрицательное число* R, *конечное или бесконечное* ($0 \leqslant R \leqslant \infty$), *обладающее следующими свойствами*:

1) *ряд сходится и притом абсолютно в открытом круге* $|z| < R$ *и расходится в точках* z *с* $|z| > R$;

2) *число* R *определяется по формуле*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2}$$

где в знаменателе стоит верхний предел (см. § 3.7).

Мы позволяем себе при этом считать, что $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$. Таким образом, если указанный верхний предел равен 0, то $R = \infty$, если же он равен ∞, то $R = 0$.

Открытый круг $|z| < R$ называется *кругом сходимости степенного ряда.* При $R = \infty$ он превращается во всю комплексную плоскость. При $R = 0$ степенной ряд имеет только одну точку сходимости, именно точку $z = 0$.

Замечание 1. Число R, удовлетворяющее утверждению 1) теоремы 1, очевидно, единственно.

Замечание 2. Если для степенного ряда (1) существует обычный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, то он равен верхнему пределу $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Поэтому в этом случае

$$R = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Читатель, не ознакомившийся с понятием верхнего предела, может проследить за ходом доказательства теоремы 1, предположив, что для рассматриваемого степенного ряда указанный предел существует. В этом случае всюду в проводимых ниже рассуждениях надо заменить $\overline{\lim}$ на $\lim$.

Доказательство теоремы 1. Пусть число R определяется по формуле (2). В точке $z = 0$ степенной ряд сходится, поэтому теорема при $z = 0$, $|z| = 0 < R$, верна.

Будем далее считать, что $|z| > 0$. Наряду с рядом (1) введем второй ряд, составленный из его модулей:

$$|a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2| + \ldots \tag{1'}$$

Общий член второго ряда обозначим через

$$u_n = |a_n z^n|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Согласно обобщенному признаку Коши сходимости ряда (см. § 11.3 теорема 3, в)) если $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, то ряд ($1'$) сходится, если же

$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, то ряд $(1')$ расходится и его общий член не ограничен. Но

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|z| \sqrt[n]{|a_n|}\right) = \\ = |z| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |z|/R.$$

Мы вынесли за знак верхнего предела конечное число $|z| > 0$, что очевидно.

Из сказанного следует:

Если $|z| < R$, т.е. $|z|/R < 1$, то ряд $(1')$ сходится, а вместе с ним сходится и притом абсолютно ряд (1).

Если же $|z| > R$, т.е. $|z|/R > 1$, то ряд $(1')$ расходится и его общий член $|a_n z^n|$ не ограничен, поэтому общий член ряда (1) $a_n z^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$ и для него не выполняется необходимый признак (см. § 11.1, (4)). Это показывает, что ряд (1) расходится.

Итак, мы доказали, что определяемое из равенства (2) число R обладает следующим свойством: если $|z| < R$, то ряд (1) сходится и при том абсолютно, если же $|z| > R$, то ряд (1) расходится.

Основная теорема доказана.

Будем в дальнейшем для краткости обозначать через σ_q замкнутый круг $|z| \leqslant q$ комплексной плоскости. Заметим, что наш степенной ряд сходится на открытом круге $|z| < R$, вообще говоря, неравномерно. Однако верна следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Степенной ряд* (1) *абсолютно и равномерно сходится на любом круге* $\sigma_q = \{z\colon |z| \leqslant q\}$, *где* $q < R$, *а* R — *радиус сходимости ряда* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть $q < R$; тогда q есть действительная, т.е. лежащая на оси x, точка, принадлежащая открытому кругу сходимости ряда (1). Поэтому в этой точке наш степенной ряд абсолютно сходится, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n q^n| < \infty$. С другой стороны,

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n q^n|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad z \in \sigma_q.$$

Так как правые части этих неравенств не зависят от $z \in \sigma_q$ и ряд, составленный из правых частей, сходится, то по признаку Вейерштрасса (см. § 11.7, теорема 1) степенной ряд (1) сходится на σ_q абсолютно и равномерно.

Из теоремы 2 как следствие вытекает

Т е о р е м а 3. *Сумма*

$$S(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

степенного ряда есть непрерывная функция на его открытом круге сходимости $|z| < R$.

В самом деле, члены нашего ряда — непрерывные функции от z, а сам ряд равномерно сходится на круге σ_q, $q < R$. Следовательно, по известной теореме из теории равномерно сходящихся рядов (см. § 11.7, теорема 2) сумма $S(z)$ ряда есть непрерывная функция на σ_q, но тогда и на всем круге $|z| < R$, потому что $q < R$ произвольно.

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда в нашем распоряжении имеется формула (2), но часто на практике при вычислении R удобно бывает воспользоваться признаком Даламбера.

Пусть существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \tag{4}$$

который мы пока обозначим через $1/R_1$. Тогда (см. (3))

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|}{R_1},$$

и согласно признаку Даламбера (§ 11.3, теорема 2) если $|z| < R_1$, то ряд (1′), а вместе с ним и ряд (1), сходится, если же $|z| > R_1$, то $|u_n| \to \infty$ и ряд (1) расходится.

Но число R с такими свойствами может быть единственным, поэтому $R_1 = R$ (см. теорему 1).

Итак, мы доказали, что *если существует предел* (4), *то он равен* $1/R$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}, \tag{5}$$

где R — радиус сходимости степенного ряда (1).

Заметим, что мы окольным путем доказали, что если предел (4) (конечный или бесконечный) существует, то он равен верхнему пределу $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. На самом деле имеет место более сильное утверждение (см. 4-е издание этой книги, § 11.3, замечание 2): *существование предела* (4) (*конечного или бесконечного*) *влечет за собой существование равного ему предела* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Замечание 3. В учебной литературе обычно начинают изложение степенных рядов с теоремы Абеля, которая гласит:

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* (1) *сходится в точке $z_0 \neq 0$ комплексной плоскости, то он сходится абсолютно и равномерно в замкнутом круге $|z| \leqslant q$, где q — любое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < q < |z_0|$.*

Доказательство. Эта теорема теперь уже является следствием из теорем 1 и 2. В самом деле, так как z_0 есть точка сходимости ряда (1), то $|z_0|$ не может быть бо́льшим, чем R. Поэтому $|z_0| \leqslant R$, $0 < q < |z_0| \leqslant \leqslant R$ и $q < R$. Но тогда по теореме 2 степенной ряд (1) сходится на круге $|z| \leqslant q$ абсолютно и равномерно.

Примеры.

$$1+z+z^2+\ldots, \tag{6}$$

$$1+\frac{z}{1^\alpha}+\frac{z^2}{2^\alpha}+\ldots, \qquad \alpha>0, \tag{7}$$

$$1+z+2!\,z^2+3!\,z^3+\ldots, \tag{8}$$

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots \tag{9}$$

С помощью формулы (2) заключаем, что радиус сходимости рядов (6) и (7) равен 1; для ряда (8) он равен 0 и для ряда (9) равен ∞.

Сумма ряда (6) (геометрической прогрессии) в открытом круге $|z|<1$ равна $(1-z)^{-1}$, а остаток

$$r_n(z)=\frac{z^{n+1}}{1-z}\to 0, \qquad n\to\infty.$$

Однако сходимость на указанном круге неравномерна. Неравномерность сходимости имеет место уже для положительных $z=x$ на интервале $0<x<1$; неравенство

$$\varepsilon>\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

при любом заданном n нельзя удовлетворить для всех указанных x.

Ряд (7) при $\alpha>1$ равномерно сходится на замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ его сходимости, так как

$$\frac{|z^k|}{k^\alpha}\leqslant k^{-\alpha} \quad \text{и} \quad \sum k^{-\alpha}<\infty, \qquad |z|\leqslant 1.$$

Если же $0<\alpha\leqslant 1$, то в точке $z=1$ ряд (7), очевидно, расходится. Остальные точки z с $|z|=1$ запишем следующим образом: $z=e^{i\theta}$, $0<\theta<2\pi$,

$$z^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

и

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^\alpha}=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}\right)+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}\,.$$

Оба полученные ряда (по косинусам и по синусам) для $0<\theta<2\pi$ сходятся (см. § 11.8, пример 3). Таким образом, ряд (7) сходится во всех точках окружности $|z|=1$, кроме $z=1$.

Ряд (8) сходится только в точке $z=0$, а ряд (9) сходится во всех точках z комплексной плоскости, притом равномерно на любом круге $|z|\leqslant q<\infty$.

§ 11.12. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 1. *Радиусы сходимости степенного ряда*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

и ряда, полученного из него формальным дифференцированием,

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots \tag{2}$$

совпадают.

Доказательство. Пусть R есть радиус сходимости ряда (1), а R_1 — радиус сходимости ряда (2). Тогда (см. § 3.7, теорема 6)

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|(n+1)a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sqrt[n]{n+1}\, \sqrt[n]{|a_n|} \right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

и $R = R_1$.

Теорема 2. *Степенной ряд*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \qquad |z| < R, \tag{3}$$

законно формально дифференцировать в пределах его (открытого) круга сходимости $|z| < R$, т. е. верна формула

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots, \qquad |z| < R. \tag{4}$$

Доказательство. Эту теорему мы докажем только в предположении, что $z = x$ есть действительная переменная; это даст нам возможность свести вопрос к хорошо известному факту из теории действительных рядов. Итак, степенной ряд (3) для действительной переменной $z = x$ имеет вид

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad -R < x < R. \tag{3'}$$

Этот ряд теперь уже имеет не круг, а интервал сходимости $(-R, R)$.

Соответствующий формально продифференцированный ряд имеет вид

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \tag{4'}$$

Его сумму мы пока обозначили через $\varphi(x)$. Он сходится на интервале $(-R, R)$ на основании предыдущей теоремы.

Оба ряда, как мы знаем, равномерно сходятся на отрезке $[-q, q]$, где $q < R$. При этом члены второго ряда непрерывны и являются производными от соответствующих членов первого. Но тогда на основании известной теоремы из теории равномерно сходящихся рядов (см. § 11.8, теорема 3) выполняется равенство

$$\varphi(x) = f'(x) \tag{5}$$

на отрезке $[-q, q]$, следовательно, и на интервале $(-R, R)$, потому что $q < R$ произвольно.

Отметим, что в силу теоремы 1 ряд (1) законно почленно дифференцировать сколько угодно раз. На k-м этапе мы получим равенство

$$f^{(k)}(z) = k!\, a_k + (k+1)k \dots 2a_{k+1}z + \dots, \tag{6}$$

справедливое для всех z с $|z| < R$. Если положить в нем $z = 0$, то получим $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$ или

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{7}$$

Отсюда, в частности, следует, что *разложение функции $f(z)$ в степенной ряд* (см. (1)) *в некотором круге $|z| < R$ (или в интервале $-R < x < R$, если речь идет о функции $f(x)$ действительного переменного x) единственно.*

Вопрос о почленном интегрировании степенных рядов по всей его полноте потребовал бы введения криволинейного интеграла от функции комплексной переменной. Мы ограничимся здесь рассмотрением этого вопроса только для степенны́х рядов

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \tag{8}$$

от действительной переменной x $(z = x)$.

Если по-прежнему $R = 1\Big/\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ и $R > 0$, то для всех x, принадлежащих интервалу $(-R, R)$, называемому *интервалом сходимости* степенного ряда (8), этот ряд сходится и притом абсолютно. Для всех же x с $|x| > R$ (при конечном R) общий член ряда не ограничен, и ряд расходится. Конечно, если $R = 0$, то ряд (8) имеет единственную точку сходимости $x = 0$.

Итак, пусть задан степенной ряд (8), сходящийся на интервале $-R < x < R$, где $0 < R \leqslant \infty$. Числа a_k могут быть действительными и комплексными. Зададим фиксированную точку $x_0 \in (-R, R)$ и переменную точку $x \in (-R, R)$ и подберем $q > 0$ так, чтобы $-R < -q < x_0$, $x < q < R$. Степенной ряд (8) равномерно сходится на отрезке $[-q, q]$, находящемся строго внутри интервала сходимости ряда. Но тогда его можно почленно интегрировать (§ 11.8, теорема 2) на отрезке, соединяющем x_0 с x:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}\left(x^2-x_0^2\right) + \frac{a_2}{3}\left(x^3-x_0^3\right) + \ldots, \qquad -R < x, x_0 < R. \tag{9}$$

В частности, при $x_0 = 0$ получим

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots, \qquad -R < x < R. \tag{10}$$

Пример 1.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{11}$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2!}\,\frac{x^5}{2^2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\,\frac{x^7}{2^3\cdot 7} + \ldots, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{12}$$

Для $x \in (-1,1)$ эти равенства получаются соответственно почленным интегрированием на отрезке, соединяющем 0 и x, известных равенств

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots,$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2!}\,\frac{x^4}{2^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\,\frac{x^6}{2^3} + \ldots \tag{13}$$

Ряд (11) при $x = 1, -1$ сходится по признаку Лейбница. Само же равенство (11) справедливо на основании доказываемой ниже второй теоремы Абеля.

Ряд (13) при $x = 1, -1$ не может сходиться, иначе его сумма по второй теореме Абеля была бы непрерывной функцией на $[-1,+1]$. Все же ряд (12) при $x = 1, -1$ сходится, потому что в этом случае абсолютная величина его общего члена равна (пояснения ниже)

$$|u_n| = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} = \frac{(2n-1)!!\,(2n)!!}{((2n)!!)^2\,(2n+1)} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2\,(2n+1)} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi}\,(2n)^{2n+(1/2)}\,e^{-2n}}{2^{2n}2\pi n^{2n+1}\,e^{-2n}(2n+1)} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{n}\,(2n+1)}, \qquad n \to \infty.$$

Мы пользуемся обозначениями, которые уже употреблялись в § 9.17. В четвертом соотношении ($\approx$) применена формула Стирлинга (§ 9.17, (3)). Ряд, общий член которого равен правой части нашей цепи, сходится, но тогда сходится и ряд $\sum u_n$ (см. § 11.3, (1)).

В силу второй теоремы Абеля сходимость ряда (12) при $x = \pm 1$ влечет непрерывность на $[-1,+1]$ его суммы $S(x)$. Но имеет место равенство $S(x) = \arcsin x$ на $(-1,+1)$, а $\arcsin x$ непрерывна на $[-1,+1]$, поэтому равенство верно и на $[-1,+1]$.

Вторая теорема Абеля. *Если степенной ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{14}$$

имеет радиус сходимости $R < \infty$ и сходится при $x = R$, то функция $f(x)$ непрерывна не только на интервале $(-R, R)$, но и на полуинтервале $(-R, R]$.

В самом деле, общий член ряда (14) можно записать в виде

$$a_n x^n = a_n R^n (x/R)^n,$$

где (постоянные) числа $a_n R^n$ можно рассматривать как члены сходящегося ряда, а функции $(x/R)^n$ образуют невозрастающую на $[0, R]$ ограниченную последовательность $(1 \geqslant (x/R)^n \geqslant (x/R)^{n+1},\ n = 0, 1, \ldots)$. Поэтому согласно признаку Абеля (см. § 11.7, теорема 4) ряд (14) непрерывных на отрезке $[0, R]$ функций сходится на нем равномерно и, следовательно, его сумма $f(x)$ есть непрерывная функция на $[0, R]$.

§ 11.13. Степенные ряды функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ комплексной переменной

Функции $e^z, \cos z, \sin z$ комплексной переменной z определяются как суммы рядов:

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \tag{1}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \tag{2}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \tag{3}$$

Эти ряды сходятся для любого комплексного z, потому что радиус сходимости каждого из них равен ∞. Таким образом, функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ определены на всей комплексной плоскости. Для действительных $z = x$ это определение приводит к известным действительным функциям e^x, $\cos x$, $\sin x$ (см. § 5.11).

Функция e^z обладает важным функциональным свойством:

$$e^{z+u} = e^z e^u \tag{4}$$

для любых комплексных z, u (см. пример в § 11.9).

Очевидно, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{5}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \tag{6}$$

для любого комплексного z.

Равенства (6) называются *формулами Эйлера*. Из (6) и (4) следуют обобщения известных тригонометрических формул:

$$\sin(z+u) = \sin z\,\cos u + \cos z\,\sin u,$$
$$\cos(z+u) = \cos z\,\cos u - \sin z\,\sin u,$$

теперь уже справедливых для комплексных z и u.

Наконец, из (4) следует, что при $z = x + iy$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^z(\cos y + i\sin y). \tag{7}$$

Функция $z = \ln w$ от комплексной переменной w определяется как обратная функция к функции

$$w = e^z. \tag{8}$$

Если записать $w \neq 0$ в показательной форме:

$$w = \rho e^{i\theta}, \qquad \rho = |w| > 0,$$

то равенство (8) запишется в виде

$$\rho e^{i\theta} = e^x e^{iy}, \qquad z = x + iy.$$

Поэтому

$$\begin{gathered} z = \ln w = \ln|w| + i\ \operatorname{Arg} w = \ln|w| + i\ \arg w + i\,2k\pi, \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\ln|w|$ $(|w| > 0)$ понимается в обычном смысле. Из (9) видно, что $\ln w$ $(w \neq 0)$ есть многозначная функция от w вместе с $\operatorname{Arg} w$, независимо от того, будет ли w действительным или комплексным.

Например, с точки зрения этой теории (функций комплексного переменного), $\ln 1$ равен одному из чисел

$$2k\pi i, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В действительном анализе для выражения $\ln 1$ выбирают среди этих чисел единственное действительное число 0.

Но мы не будем углубляться дальше в теорию функций комплексного переменного — это не наша задача. Сделаем только замечание по поводу формулы

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \qquad -1 < x \leqslant 1, \tag{10}$$

которая была выведена в § 5.11 для действительных x. Если подставить в ряд в правой части (10) вместо x комплексное z с $|z| < 1$, то ряд останется сходящимся. Можно сказать, что его сумма равна $\ln(1+z)$, так как мы его определили выше, точнее, равна одной из однозначных ветвей многозначной функции $\ln(1+z)$.

Функции комплексного переменного, разлагающиеся в степенные ряды (ряды Тейлора), называются *аналитическими функциями.* Они изучаются в разделе математики, называемом теорией аналитических функций или теорией функций комплексного переменного.

В заключение отметим, что если в степенном ряде (по степеням u)

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots \tag{11}$$

с кругом сходимости $|u| < R$ положить $u = z - z_0$, где z_0 — фиксированное число (вообще говоря, комплексное), то получим ряд

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots, \tag{12}$$

называемый *степенным рядом по степеням* $z - z_0$. Он сходится в круге (сходимости) $|z - z_0| < R$ и расходится для z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| > R$.

Глава 12

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 12.1. Введение

Пусть в трехмерном пространстве, в котором определена прямоугольная система координат x, y, z, задана непрерывная поверхность

$$z = f(Q) = f(x, y), \qquad Q = (x, y) \in \Omega,$$

где Ω есть некоторое ограниченное (двумерное) множество, для которого возможно определить понятие его площади (*двумерной меры* *)). В качестве Ω может быть взят круг, прямоугольник, эллипс и т. д. Будем считать, что функция $f(x, y)$ положительна, и поставим задачу: требуется определить объем тела, ограниченного сверху нашей поверхностью, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью, проходящей через границу γ плоского множества Ω, с образующей, параллельной оси z.

Искомый объем естественно определить следующим образом.

Разделим Ω на конечное число частей

$$\Omega_1, \ldots, \Omega_N, \tag{1}$$

перекрывающихся между собой разве что по своим границам. Однако эти части должны быть такими, чтобы можно было определить их площади (двумерные меры), которые мы обозначим соответственно через $m\Omega_1, \ldots, m\Omega_N$.

Введем понятие *диаметра множества* A — это есть точная верхняя грань

$$d(A) = \sup_{P', P'' \in A} |P' - P''|.$$

В каждой части Ω_j выберем по произвольной точке $Q_j = (\xi_j, \eta_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, и составим сумму

$$V_N = \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j, \tag{2}$$

которую естественно считать приближенным выражением объема V. Надо думать, что приближение $V \approx V_N$ будет тем более точным, чем мень-

*) См. далее § 12.2.

шими будут диаметры $d(\Omega_j)$ частей Ω_j. Поэтому естественно *объем* нашего тела определить как предел суммы (2):

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j, \tag{3}$$

когда максимальный диаметр частичных множеств разбиения (1) стремится к нулю, если, конечно, этот предел существует и равен одному и тому же числу независимо от способа последовательного разбиения Ω.

Можно отвлечься от задачи о нахождении объема тела и смотреть на выражение (3) как на некоторую операцию, которая производится над функцией f, определенной на Ω. Эта операция называется *операцией двойного интегрирования по Риману функции f на множестве* Ω, а ее результат — *определенным двойным интегралом* (*Римана*) *от f на* Ω, обозначаемым так:

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(Q_j)\, m\Omega_j = \\ = \iint_{\Omega} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\Omega} f(Q)\, dQ = \int_{\Omega} f\, d\Omega.$$

Пусть теперь в трехмерном пространстве, где определена прямоугольная система координат x, y, z, задано тело Ω (множество) с неравномерно распределенной в нем массой с плотностью распределения $\mu(x,y,z) = \mu(Q)$, $Q = (x,y,z) \in \Omega$. Требуется определить общую массу тела Ω.

Чтобы решить эту задачу, естественно произвести разбиение Ω на части $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$, объемы (трехмерные меры) которых (в предположении, что они существуют) пусть будут $m\Omega_1, \ldots, m\Omega_N$, выбрать произвольным образом в каждой части по точке ($Q_j = (x_j, y_j, z_j) \in \Omega_j$) и считать, что искомая масса равна

$$M = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} \mu(Q_j)\, m\Omega_j. \tag{4}$$

Снова на выражение (4) можно смотреть как на определенную операцию над функцией μ, заданной теперь на трехмерном множестве Ω. Эта операция на этот раз называется операцией *тройного интегрирования* (*по Риману*), а результат ее — *определенным тройным интегралом* (*Римана*), обозначаемым так:

$$M = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} \mu(Q_j)\, m\Omega_j = \\ = \int_{\Omega} \mu(Q)\, dQ = \iiint_{\Omega} \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

В этом же духе определяется понятие *n-кратного интеграла Римана.*

В связи с этим появляется необходимость в четком определении понятия меры множества и выяснении ее свойств. Поэтому мы начинаем эту главу с изложения теории меры по Жордану, органически связанной с теорией интеграла Римана. На основе этой теории затем излагается теория кратного интеграла. Важным методом в этой последней теории является тот факт, что вычисление кратных интегралов может быть сведено к вычислению однократных по каждой переменной в отдельности, что дает возможность применять во многих случаях теорему Ньютона–Лейбница.

§ 12.2. Мера Жордана

В евклидовом n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ мы будем рассматривать прямоугольники

$$\Delta = \{\mathbf{x}\colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^n$$

и называть *n-мерной мерой* Δ число

$$|\Delta| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Таким образом, Δ при $n = 2$ обозначает обычный прямоугольник со сторонами, параллельными осям прямоугольной системы координат, а $|\Delta|$ — его площадь; при $n = 3$ это есть обычный прямоугольный параллелепипед в пространстве с ребрами, параллельными осям прямоугольной системы координат, имеющий объем, равный $|\Delta|$.

Мы будем рассматривать такие множества $\sigma \subset \mathbb{R}^n$, каждое из которых есть сумма (теоретико-множественная) конечного числа прямоугольников Δ_i:

$$\sigma = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i,$$

пересекающихся между собой разве что по своим границам, и называть эти множества *фигурами.* При этом *n-мерной мерой* σ будем называть число

$$|\sigma| = \sum_{i=1}^{m} |\Delta_i|.$$

Можно еще сказать, что σ есть множество в $\mathbb{R}^n$, которое можно разрезать на конечное число прямоугольников Δ.

Мы уже не будем доказывать факт, который считаем элементарным, что величина $|\sigma|$ не зависит от способа разрезывания σ на прямоугольники Δ.

На рис. 12.1 изображена фигура $\sigma \subset \mathbb{R}^2$. Пустое множество $\varnothing$ по определению есть фигура меры нуль $|\varnothing| = 0$, принадлежащая к любой фигуре σ. Отметим без доказательства некоторые свойства $\sigma \subset \mathbb{R}^n$.

1) $|\sigma| \geqslant 0$ (только пустое множество имеет меру нуль);
2) если $\sigma < \sigma_1$, то $|\sigma| \leqslant |\sigma_1|$ (равенство имеет место, если $\sigma = \sigma_1$);
3) сумма $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_1 \cup \sigma_2$ фигур σ_1, σ_2 есть фигура $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, и

$$|\sigma_1 + \sigma_2| \leqslant |\sigma_1| + |\sigma_2|,$$

при этом равенство имеет место только тогда, когда фигуры σ_1, σ_2 пересекаются разве что своими границами;

4) замыкание разности $\overline{\sigma_2 \setminus \sigma_1} = \sigma$ есть фигура (надо учесть, что замыкание пустого множества есть пустое множество, $\overline{\varnothing} = \varnothing$, а если σ_1 и $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ непустые, то $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ будет фигурой без некоторых ее граничных точек, это множество делается фигурой, если его замкнуть, т. е. добавить к нему все его граничные точки); если $\sigma_1 \subset \sigma_2$, то

$$|\sigma| = |\sigma_1| + |\overline{\sigma - \sigma_1}|.$$

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ есть ограниченное множество. Существует, таким образом, прямоугольник Δ_0 (фигура), содержащий в себе G $(G \subset \Delta_0)$.

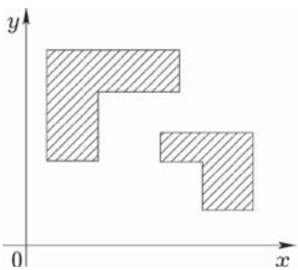

Рис. 12.1

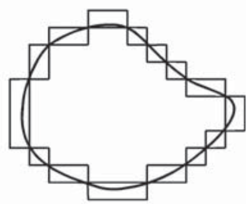

Рис. 12.2

Будем рассматривать всевозможные фигуры σ, содержащие в себе G $(\sigma \supset G)$.

Точная нижняя грань (n-мерных) мер таких фигур есть неотрицательное число

$$m_e G = \inf_{\sigma \supset G} |\sigma|,$$

называемое *внешней n-мерной мерой Жордана* *) множества G (коротко, *внешней мерой* G).

С другой стороны, точная верхняя грань

$$m_i G = \sup_{\sigma \subset G} |\sigma|$$

мер фигур σ, принадлежащих G, называется *внутренней n-мерной мерой Жордана* G (коротко, *внутренней мерой* G).

*) Г. Жордан (1838–1922) — французский математик.

Для любого ограниченного множества G число m_iG существует, потому что всегда есть фигура $\sigma \subset G$, во всяком случае в качестве такой фигуры можно взять пустое множество, которое заведомо по определению принадлежит G; кроме того, так как $G \subset \Delta_0$, то для любой $\sigma \subset G$ имеет место $\sigma \subset \Delta_0$, $|\sigma| \leqslant |\Delta_0|$, и существует $m_iG \leqslant |\Delta_0|$.

Для любого ограниченного множества $G \subset \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство
$$m_iG \leqslant m_eG,$$
потому что если $\sigma' \subset G \subset \sigma''$, то $|\sigma'| \leqslant |\sigma''|$, $m_iG \leqslant |\sigma''|$, $m_iG \leqslant m_eG$.

По определению множество $G \subset \mathbb{R}^n$ *измеримо* в n-мерном смысле *по Жордану*, если его внутренняя и внешняя меры равны между собой:
$$m_iG = m_eG = mG.$$

Число mG называют *n-мерной мерой Жордана* множества $G \subset \mathbb{R}^n$ (коротко, *мерой* G).

Мы видим, что $mG \geqslant 0$. Но далеко не всякое ограниченное в $\mathbb{R}^n$ множество G измеримо (по Жордану), и только для измеримых множеств G существует число mG.

Зададим произвольное ограниченное множество $G \subset \mathbb{R}^n$. Пусть
$$\sigma' \subset G \subset \sigma'' \tag{1}$$
(см. рис. 12.2 в случае $\mathbb{R}^2$). Тогда
$$\sigma = \overline{\sigma'' \setminus \sigma'} \tag{2}$$
есть фигура, содержащая в себе границу Γ множества G $(\sigma \supset \Gamma)$.

С другой стороны, если задана произвольная фигура σ, покрывающая Γ, то, положив $\sigma + G = \sigma''$, $\overline{G \setminus \sigma} = \sigma'$, получим фигуры со свойствами (1), (2) (см. рис. 12.2).

Напомним, что *граничной точкой* G называется точка $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, в любой окрестности которой имеются как точка G, так и точки дополнительного к G множества $\mathbb{R}^n \setminus G$. Сама точка $\mathbf{x}^0$ может принадлежать и не принадлежать G. Совокупность всех граничных точек G составляет границу Γ множества G; Γ замкнуто, $\overline{G} = G + \Gamma$.

Фигура
$$\overline{\sigma'' \setminus \sigma'} = \sigma$$
содержит в себе границу Γ множества G $(\sigma \supset \Gamma)$. В самом деле, так как σ'' — замкнутое множество, то $\overline{G} \subset \sigma''$ и, следовательно, $\Gamma \subset \sigma''$. Внутренние точки σ' являются внутренними и для G. Только граница σ' может содержать точки Γ, при вычитании $\sigma'' \setminus \sigma'$ эти точки выбрасываются из σ'', но при замыкании возвращаются в $\overline{\sigma'' \setminus \sigma'} = \sigma$. Так что σ содержит все точки Γ.

Лемма 1. *Для того чтобы множество G было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали две фигуры σ' и σ'' $(\sigma' \subset G \subset \sigma'')$ такие, что $|\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$.*

Действительно, если множество измеримо, то найдутся такие $\sigma' \subset G$ и $\sigma'' \supset G$, что

$$mG - \frac{\varepsilon}{2} < |\sigma'| \leqslant |\sigma''| < mG + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon.$$

Наоборот, из того, что $\sigma' \subset G \subset \sigma''$, следует, что $|\sigma'| \leqslant m_i G \leqslant \leqslant m_e G \leqslant |\sigma''|$, а если $|\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$, то $m_e G - m_i G < \varepsilon$, и вследствие произвольности $\varepsilon > 0$

$$m_e G = m_i G.$$

Из леммы 1 следует, что *измеримое множество ограничено.*

Лемма 2. *Для того чтобы множество G было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы его граница Γ имела жорданову n-мерную меру нуль, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ должна найтись покрывающая Γ фигура σ, имеющая меру $|\sigma| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть множество G измеримо. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ (см. рис. 12.2) найдутся две фигуры σ' и σ'' такие, что $\sigma' \subset G \subset \sigma''$ и $|\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$. Но фигура $\sigma = \overline{\sigma'' - \sigma'}$ покрывает Γ и ее мера $|\sigma| = |\sigma''| - |\sigma'| < \varepsilon$. Наоборот, пусть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать покрывающую Γ фигуру (см. рис. 12.2) $\sigma, |\sigma| < \varepsilon$. Но мы уже знаем, что $\sigma'' = G + \sigma_0$ и $\sigma' = \overline{G - \sigma_0}$ суть фигуры (см. рис. 12.2), и притом $\sigma' \subset G \subset \sigma''$ и $|\sigma''| - |\sigma'| = |\sigma| < \varepsilon$. Это показывает в силу леммы 1, что G — измеримое множество.

Пример 1. Фигура $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ есть измеримое (в n-мерном смысле) множество. Ведь

$$\sup_{\sigma' \subset \sigma} |\sigma'| = |\sigma|, \qquad \inf_{\sigma'' \supset \sigma} |\sigma''| = |\sigma|.$$

Пример 2. Множество E состоит из точек (r, s), $0 < r,\ s < 1$, плоскости $\mathbb{R}^2$ с рациональными координатами. Пустое множество $\varnothing$ есть единственная фигура, принадлежащая E. С другой стороны, единичный квадрат $\sigma_0 = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$ есть фигура наименьшей двумерной меры, содержащая в себе E. Таким образом, $m_i E = 0$, $m_e E = 1$, и множество E в двумерном смысле неизмеримо.

Можно рассуждать иначе: σ_0 есть граница E, при этом $|\sigma_0| = 1$, т.е. меры, большей нуля. Следовательно, E неизмеримо.

Конечно, если считать, что E принадлежит плоскости x, y пространства $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, то трехмерная мера mE равна нулю. По-прежнему его внутренняя мера $m_i E$ равна нулю, но внешняя мера $m_e E$ тоже равна нулю, ведь E можно покрыть фигурой (прямоугольным параллелепипедом) σ как угодно малой меры.

Лемма 3. *Сумма двух множеств G_1 и G_2, имеющих жорданову меру нуль, в свою очередь имеет жорданову меру нуль.*

Действительно, по условию для всякого $\varepsilon > 0$ существуют фигуры σ' и σ'' такие, что $\sigma' \supset G_1$, $\sigma'' \supset G_2$ и $|\sigma'| < \varepsilon/2$, $|\sigma''| < \varepsilon/2$. Тогда фигура $\sigma = \sigma' + \sigma''$ будет обладать свойствами

$$\sigma \supset G_1 + G_2, \qquad |\sigma| \leqslant |\sigma'| + |\sigma''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лемма 4. *Вместе с G и $G_1 \subset G$ есть множество жордановой меры нуль.*

Лемма очевидна.

Теорема 1. *Если два множества G_1 и G_2 измеримы по Жордану, то измеримы по Жордану также их сумма, разность и пересечение.*

Доказательство. Будем обозначать через $\Gamma(E)$ границу множества E. Имеют место легко проверяемые теоретико-множественные вложения

$$\Gamma(G_1 + G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2),$$
$$\Gamma(G_1 \cdot G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2),$$
$$\Gamma(G_1 - G_2) \subset \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2)$$

(см. рис. 12.3).

Так как G_1 и G_2 измеримы, то по лемме 2 $m\Gamma(G_1) = 0$, $m\Gamma(G_2) = 0$. Но тогда по лемме 3 правые части написанных вложений имеют меру нуль, по лемме 4 и левые части имеют меру нуль. Отсюда, применяя снова лемму 2, получим, что множества, указанные в теореме, измеримы.

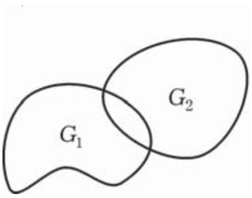

Рис. 12.3

Лемма 5. *Если измеримое по Жордану множество G рассечь на две части G_1 и G_2 при помощи поверхности L (в частности, плоскости), имеющей жорданову меру нуль, то каждая часть в свою очередь измерима по Жордану.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\Gamma(G_1) \subset \Gamma(G) + L, \qquad \Gamma(G_2) \subset \Gamma(G) + L,$$

откуда на основании предыдущих лемм следует утверждение.

Таким образом, если G есть измеримое по Жордану множество, то любая сетка $S_N \subset \mathbb{R}^n$, делящая $\mathbb{R}^n$ на равные n-мерные кубики с ребром длины 2^{-N}, дробит G на части, каждая из которых измерима по Жордану. Диаметр каждой из этих частей не превышает $\sqrt{n}\,2^{-N}$. Таким образом, при $N \to \infty$ диаметры частей равномерно стремятся к нулю.

Теорема 2. *Если множества G_1 и G_2 измеримы по Жордану и имеют общие точки, принадлежащие разве что их границам, то их (измеримая по теореме 1) сумма имеет меру, равную сумме их мер*:

$$m(G_1 + G_2) = mG_1 + mG_2. \tag{3}$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем фигуры σ_1', σ_1'', σ_2', σ_2'' такие, что

$$\sigma_1' \subset G_1 \subset \sigma_1'', \qquad \sigma_2' \subset G_2 \subset \sigma_2'',$$
$$mG_1 - \varepsilon < |\sigma_1'| < |\sigma_1''| < mG_1 + \varepsilon,$$
$$mG_2 - \varepsilon < |\sigma_2'| < |\sigma_2''| < mG_2 + \varepsilon.$$

Положим $\sigma' = \sigma_1' + \sigma_2''$, $\sigma'' = \sigma_1'' + \sigma_2''$. Очевидно, что σ' и σ'' — фигуры, при этом $\sigma' \subset G_1 + G_2 \subset \sigma''$ и

$$|\sigma''| \leqslant |\sigma_1''| + |\sigma_2''|, \qquad |\sigma'| = |\sigma_1'| + |\sigma_2'|. \tag{4}$$

Равенство в (4) справедливо потому, что σ_1' и σ_2' вместе с G_1 и G_2 пересекаются разве что по своим границам.

Теперь очевидно, что

$$\begin{aligned}(mG_1 - \varepsilon) + (mG_2 - \varepsilon) < |\sigma_1'| + |\sigma_2'| = \\ = |\sigma'| \leqslant m_i(G_1 + G_2) \leqslant m_e(G_1 + G_2) \leqslant \\ \leqslant |\sigma''| \leqslant |\sigma_1''| + |\sigma_2''| < (mG_1 + \varepsilon) + (mG_2 + \varepsilon),\end{aligned}$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует (3).

Теорема 3. *Если G_1 и G_2 измеримы по Жордану и $G_1 \subset G_2$, то*

$$m(G_2 - G_1) = mG_2 - mG_1. \tag{5}$$

Доказательство. Измеримость $G_2 - G_1$ доказана в теореме 1, поэтому измеримое множество G_2 распадается на два непересекающихся измеримых множества: $G_2 = G_1 + (G_2 - G_1)$. Но тогда равенство (5) следует из предыдущей теоремы.

§ 12.3. Важные примеры квадрируемых по Жордану множеств

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a, b]$ и интегрируема (в частности, непрерывна) на нем. Обозначим через Γ ее график — множество всех точек $(x, f(x))$, где $a \leqslant x \leqslant b$, и через Ω — множество всех точек (x, y) плоскости, для которых выполняются неравенства

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Теорема 1. *Множество Ω измеримо и его мера (двумерная) равна*

$$m\Omega = \int_a^b f(x)\,dx = I.$$

В самом деле, в силу интегрируемости f на $[a, b]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение R отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\underline{S}_R < I \leqslant \overline{S}_R, \qquad \overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon,$$

где $\underline{S}_R$ и $\overline{S}_R$ — соответствующие R нижняя и верхняя интегральные суммы функции f, равные площадям фигур, первая из которых принадлежит Ω, а вторая содержит Ω.

Это доказывает теорему.

Т е о р е м а 2. *Непрерывная (плоская) кривая* Γ *на плоскости* x, y, *проектируемая взаимно однозначно на отрезок* $[a, b]$ *некоторой прямой* L, *есть иножество точек, имеющее двумерную меру нуль.*

В самом деле, можно считать, что Γ находится по одну сторону от прямой L, иначе в качестве L можно взять другую ей параллельную прямую, удовлетворяющую этим свойствам. Построим прямоугольную систему координат x, y с осью x, совпадающей с L. Тогда Γ будет графиком некоторой непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Множество Ω, определенное для f, как в теореме 1, на основании этой теоремы измеримо, а Γ как часть границы Ω имеет двумерную меру нуль.

Т е о р е м а 3. *Плоское ограниченное множество* Ω *измеримо (в двумерном смысле), если его граница состоит из конечного числа точек и кусков непрерывных кривых, каждый из которых проектируется взаимно однозначно на одну из осей прямоугольной системы координат.*

В самом деле, граница множества Ω есть сумма конечного числа множеств, имеющих двумерную меру нуль.

Заметим, что гладкий кусок кривой Γ, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ (φ' и ψ' непрерывны и $\varphi'^2 + \psi'^2 > 0$), всегда можно разбить на конечное число частей, проектирующихся на одну из осей координат. Ведь (см. § 6.5) каждую точку $t \in [a, b]$ можно покрыть интервалом (t', t'') (в случае $t = a$ или $t = b$ — полуинтервалом) таким, что соответствующая ему часть нашей гладкой кривой проектируется на одну из осей, а на основании леммы Бореля среди этих интервалов можно выбрать конечное их число, все же покрывающих отрезок $[a, b]$.

В заключение отметим, что произвольная плоская непрерывная кривая может и не иметь двумерной меры нуль. Вспомним о кривой Пеано, точки которой заполняют квадрат (см. § 6.5).

П р и м е р 1. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

делится на две части: $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ — верхнюю и нижнюю, определенные функциями

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad -a \leqslant x \leqslant a,$$

непрерывными на отрезке $[-a, a]$.

По теореме 1 куски Γ_1 и Γ_2, следовательно, и кривая Γ, имеют двумерную меру нуль. Но тогда внутренность данного эллипса, имеющая Γ своей границей, измерима в двумерном смысле (по Жордану).

§ 12.4. Еще один критерий измеримости множества. Полярные координаты

Внутреннюю и внешнюю меры ограниченного множества Ω можно еще определить так:

$$m_i\Omega = \sup_{\Omega'\subset\Omega} m\Omega', \qquad m_e\Omega = \inf_{\Omega'\supset\Omega} m\Omega', \tag{1}$$

где Ω' обозначает произвольное измеримое множество, в первом случае принадлежащее Ω, а во втором — содержащее Ω. В самом деле, с одной стороны,

$$m_i\Omega = \sup_{\sigma\subset\Omega} |\sigma| \leqslant \sup_{\Omega'\subset\Omega} m\Omega' = I,$$

потому что фигуры σ измеримы, а с другой стороны, если $\varepsilon > 0$ и Ω' — такое измеримое множество, что $\Omega' \subset \Omega$ и $I - \varepsilon < m\Omega'$, то найдется также $\sigma \subset \Omega'$, так что $m\Omega' < |\sigma| + \varepsilon$. Следовательно, $I - 2\varepsilon < |\sigma| \leqslant m_i\Omega$, и вследствие произвольности ε имеет место $I \leqslant m_i\Omega$. Мы доказали первое равенство (1). Подобным образом доказывается и второе.

Из (1), очевидно, следует: *для того чтобы множество Ω было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, нашлись два измеримых множества Ω' и Ω'' таких, что $\Omega' \subset \Omega \subset \Omega''$ и $m\Omega'' - m\Omega' < \varepsilon$.*

Площадь (двумерная жорданова мера) фигуры Ω, ограниченной полярными лучами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$ и кривой Γ, определяемой в полярных координатах непрерывной функцией $\rho = f(\theta)$, равна (см. § 10.1 и вопрос, поставленный там)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta)\,d\theta. \tag{2}$$

Покажем, что $m\Omega = S$. В самом деле, произвольный круговой сектор есть измеримое множество, потому что его граница есть непрерывная кусочно гладкая кривая. Далее, из существования интеграла (2) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение отрезка $[\theta_1, \theta_2]$, что соответствующая ему верхняя интегральная сумма отличается от нижней менее чем на ε. Но верхняя сумма есть мера суммы конечного числа круговых секторов, содержащих Ω, а нижняя есть мера суммы конечного числа круговых секторов, содержащихся в Ω. Это и доказывает наше утверждение в силу (1).

§ 12.5. Другие случаи измеримости

Т е о р е м а 1. *Поверхность* $S \subset \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z)$, $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$, *где* f — *непрерывная на замкнутом ограниченном множестве* $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \ni (x,y)$ *функция, имеет трехмерную меру нуль*: $mS = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Помещаем Ω в квадрат $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ и делим последний на равные квадратики ω диаметра δ.

Пусть ω — такой квадратик, содержащий точки Ω, и пусть

$$u = \max_{(x,y)\in\Omega\cap\omega} f, \qquad m = \min_{(x,y)\in\Omega\cap\omega} f.$$

Очевидно, часть $s \subset S$ нашей поверхности, расположенную над ω, можно поместить в прямоугольник $\lambda = \omega \times [m, M]$, имеющий объем $|\lambda| \leqslant |\omega|\,\omega(\delta)$, где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности f на Ω.

Множественная сумма всех определенных нами кубиков λ образует фигуру $\sigma = \cup\lambda$, $\sigma \supset S$, покрывающую S. Объем σ оценивается так:

$$|\sigma| \leqslant \sum |\lambda| \leqslant \omega(\delta) \sum |\omega| \leqslant \omega(\delta), \qquad |\Delta| < \varepsilon,$$

для достаточно малого $\delta > 0$, потому что функция f равномерно непрерывна на Ω.

Т е о р е м а 2. *Поверхность* S *(m-мерная) в пространстве* $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant m < n$, *определенная параметрически уравнениями*

$$x_i = \varphi_i(\mathbf{t}) = \varphi_i(t_1, \ldots, t_m), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \mathbf{t} \in \Delta, \tag{1}$$

где функции $\varphi_i(\mathbf{t})$ *непрерывно дифференцируемы на прямоугольнике*

$$\Delta = \{\mathbf{t}\colon a_i \leqslant t_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

(точек $\mathbf{t}$*), имеет n-мерную меру нуль*: $mS = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$M \geqslant \left|\frac{\partial\varphi_i(\mathbf{t})}{\partial t_j}\right|, \qquad \mathbf{t} \in \Delta.$$

Разделим Δ на равные частичные прямоугольники ω в количестве N^m. Пусть

$$\omega = \left\{\mathbf{t} : t_i^0 \leqslant t_i \leqslant t_i^0 + \frac{b_i - a_i}{N},\ i = 1, 2, \ldots, m\right\}$$

— один из них. Его точкам $\mathbf{t}$ при помощи (1) соответствуют точки $\mathbf{x} \in S$ кусочка $s \subset S$. По теореме о среднем для таких $\mathbf{t}$ и $\mathbf{x}$

$$x_i - x_i^0 = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_j}\right)_{\text{ср.}} (t_j - t_j^0),$$

где $(\mathbf{t})_{\text{ср.}}$ есть некоторое (среднее) значение $\mathbf{t}$ в ω. Поэтому

$$|x_i - x_i^0| \leqslant \sum_{j=1}^{m} M\,\frac{(b_j - a_j)}{N} = \frac{c}{N}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

и кусочек $s \subset S$ можно поместить в n-мерный кубик λ, имеющий меру (n-мерную), равную

$$|\lambda| = \left(\frac{2c}{N}\right)^n.$$

Фигура $\sigma = \cup\lambda$, состоящая из этих (перекрывающихся) кубиков, имеет n-мерную меру

$$|\sigma| \leqslant \sum \left(\frac{2c}{N}\right)^n = \frac{1}{N^{n-m}}\,(2c)^n \sum \frac{1}{N^m} \leqslant \frac{c_1}{N^{n-m}} < \varepsilon$$

при достаточно большом N. Надо учесть, что сумма $\sum \frac{1}{N^m}$, состоящая из N^m слагаемых, равна

$$\sum \frac{1}{N^m} = N^m \cdot \frac{1}{N^m} = 1.$$

П р и м е р 1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

разрезается на две части: $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ — верхнюю и нижнюю, определяемые непрерывными функциями

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,$$

заданными на замкнутом ограниченном множестве в $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$.

На основании теоремы 1 трехмерная мера Γ_1 и Γ_2, следовательно, и Γ равна нулю. Поэтому объемный эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ есть измеримое в трехмерном смысле множество.

§ 12.6. Понятие кратного интеграла

Определим это понятие в n-мерном случае. Специально в двух- и трехмерном случаях оно уже вводилось в § 12.1 схематически.

Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное евклидово пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (следовательно, ограниченное) множество и на Ω задана функция $f(P)$, $P \in \Omega$.

Введем разбиение Ω на частичные множества, т. е. представим Ω в виде суммы:

$$\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N, \tag{1}$$

конечного числа измеримых в n-мерном смысле по Жордану множеств Ω_j, которые могут попарно пересекаться только по частям своих границ. Различные разбиения Ω мы будем обозначать символами $\rho, \rho_1, \ldots$ Такое разбиение можно получить, разрезая Ω поверхностями, имеющими n-мерную меру нуль.

В каждом частичном множестве Ω_j, $j = 1, \ldots, N$, разбиения ρ выберем произвольную точку $P_j \in \Omega_j$ и составим *интегральную сумму* (*по Риману*):

$$S_\rho = S_\rho(f) = \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\, m\Omega_j, \tag{2}$$

где $m\Omega_j$ — мера Жордана множества Ω_j.

Надо иметь в виду, что S_ρ зависит от функции f, способа разбиения Ω на части и выбора точек P_j в каждом из частичных множеств Ω_j разбиения.

Обозначим через δ максимальный диаметр множеств Ω_j:

$$\delta = \delta_\rho = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} d(\Omega_j).$$

По определению предел

$$\lim_{\delta_\rho \to 0} \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\, m\Omega_j = I \tag{3}$$

интегральной суммы f называется *определенным* (n*-кратным*) *интегралом в смысле Римана от функции* f *по множеству* Ω.

Таким образом, *определенным интегралом от функции* f *по множеству* Ω называют предел, к которому стремится ее интегральная сумма, соответствующая переменному разбиению Ω, когда максимальный диаметр частичных множеств разбиения стремится к нулю (независимо от выбора точек $P_j \in \Omega_j$).

Как обычно в анализе, это определение можно понимать в двух (эквивалентных) смыслах: на языке ε, δ и на языке последовательностей.

На языке ε, δ оно формулируется так:

Интегралом Римана от функции f *по множеству* Ω *называют число* I, *удовлетворяющее следующему свойству: для всякого* $\varepsilon > 0$ *должно найтись такое* $\delta > 0$, *зависящее от* ε, *что, каково бы ни было разбиение* Ω *на части* Ω_j *с диаметрами, меньшими* δ, *и каков бы ни был выбор точек* $P_j \in \Omega_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *выполняется неравенство*

$$\left| I - \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\, m\Omega_j \right| < \varepsilon. \tag{4}$$

На языке последовательностей оно формулируется так:

Интеграл Римана от функции f *по множеству* Ω *есть предел, к которому стремится любая последовательность интегральных сумм* S_{ρ_k} *функции* f, *соответствующих разбиениям* ρ_k, $k = 1, 2, \ldots$, *со стремящимся к нулю максимальным диаметром* δ_k *частичных множеств*:

$$I = \int_\Omega f\, d\mathbf{x} = \int_\Omega f\, d\Omega = \lim S_{\rho_k}, \qquad \delta_k \to 0. \tag{5}$$

Замечание 1. Сейчас уже заметим, что если определенная на измеримом множестве Ω функция f ограничена и если для нее при некоторой вполне определенной последовательности разбиений ρ_k существует предел (5), равный I, не зависящий от выбора точек $P_j \in \Omega_j$, то этого, как будет доказано в дальнейшем, достаточно для того, чтобы сказать, что существует интеграл от f на Ω, равный I, т.е. тогда автоматически выполняется равенство (5), какова бы ни была последовательность разбиений $\rho_1, \rho_2, \ldots,$ для которой $\delta_k \to 0$ (см. §12.7, теорема 2).

Напомним, что в § 12.2 (после леммы 5) было показано, что измеримое множество всегда можно разбить на части, имеющие диаметры, меньшие наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Интеграл Римана от функции f по Ω, если он существует, обозначается так:

$$I = \int_\Omega f(P)\,d\Omega = \int_\Omega f(P)\,dP. \tag{6}$$

В этом случае говорят еще, что f *интегрируема по Риману на* Ω.

n-кратный интеграл от f на множестве Ω записывают еще так:

$$I = \underset{\Omega}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Это обозначение удобно потому, что, как мы увидим в дальнейшем, вычисление кратного интеграла сводится к вычислению соответствующих однократных интгралов в отдельности по $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если функция $f(P) = A = \text{const}$ на измеримом множестве Ω, то ее интегральная сумма равна числу

$$S_\rho = \sum_{j=1}^{N} Am\Omega_j = Am\Omega,$$

не зависящему от способа разбиения Ω на части. Поэтому

$$\int_\Omega A\,d\Omega = A\int_\Omega d\Omega = Am\Omega. \tag{7}$$

Отметим еще, что если Ω имеет жорданову меру нуль ($m\Omega = 0$), то

$$\int_\Omega f d\Omega = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\,m\Omega_j = \lim_{\max d(\Omega_j)\to 0} 0 = 0$$

для любой конечной на Ω функции f, даже если она не ограничена. Таким образом, из интегрируемости f на Ω не всегда следует ограниченность f на Ω. *При исследовании функции f, определенной на произвольном измеримом множестве Ω, мы заранее будем предполагать, что она ограничена на Ω.*

В будущем, чтобы избежать лишних слов, согласимся, что если про функцию $f(x)$ мы будем говорить, что она интегрируема по Риману на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то под этим будет подразумеваться, что Ω есть измеримое в n-мерном смысле по Жордану множество. Это соглашение вполне естественно, так как определение интеграла по Риману на Ω тесно связано с измеримостью Ω по Жордану.

§ 12.7. Верхняя и нижняя интегральные суммы. Основная теорема

Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное пространство. При первом чтении читатель может считать, что $n = 2$ или $n = 3$, но рассуждения и формулировки в этом параграфе вполне аналогичны и при любом натуральном n, в том числе и при $n = 1$.

Пусть задано измеримое (следовательно, ограниченное) по Жордану (в n-мерном смысле) множество Ω, на котором определена ограниченная функция:

$$|f(P)| \leqslant K < \infty, \qquad P \in \Omega.$$

Множество Ω может быть разбито на части (измеримые по Жордану и пересекающиеся разве что по своим границам) различными способами. Пусть ρ и ρ' — два таких разбиения:

$$\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_N, \qquad \Omega = \Omega'_1 + \ldots + \Omega'_{N'}.$$

Условимся говорить, что ρ' *есть продолжение* ρ, и писать $\rho \subset \rho'$, если любое частичное множество Ω'_k $(k = 1, \ldots, N')$ разбиения ρ' есть часть одного из частичных множеств Ω_j разбиения ρ. Иначе говоря, разбиение ρ' получается из ρ, если некоторые множества Ω_j разбиения ρ в свою очередь разбить на конечное число частей:

$$\Omega_j = \sum_{k=1}^{l_j} \Omega_{jk}, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Таким образом, разбиение ρ' состоит из слагаемых кратной суммы

$$\Omega = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{l_j} \Omega_{jk}. \tag{1}$$

Зададим разбиение ρ. Ему соответствует интегральная сумма функции f

$$S_\rho = \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\, m\Omega_j = \sum_{\rho} f(P)\, m\omega$$

$(P_j \in \Omega_j)$. Мы будем пользоваться как первой, так и второй приведенными записями S_ρ.

Таким образом, ω есть одно из множеств Ω и $P \in \omega$. Положим

$$M_j = \sup_{P \in \Omega_j} f(P), \qquad m_j = \inf_{P \in \Omega_j} f(P),$$

$$\overline{S}_\rho = \sum_\rho M_j\, m\Omega_j = \sum_\rho M\, m\omega, \qquad \underline{S}_\rho = \sum_\rho m_j\, m\Omega_j = \sum_\rho m\, m\omega.$$

Суммы $\overline{S}_\rho$, $\underline{S}_\rho$ называются соответственно *верхней* и *нижней интегральными суммами функции* f (*соответствующими разбиению* ρ).

Для произвольной точки $P_j \in \Omega_j$ справедливы неравенства $m_j \leqslant f(P_j) \leqslant M_j$, $j = 1, \ldots, N$. Поэтому, учитывая, что $m\Omega_j \geqslant 0$, имеем

$$m_j m\Omega_j \leqslant f(P_j)\, m\Omega_j \leqslant M_j m\Omega_j,$$

откуда

$$\underline{S}_\rho \leqslant S_\rho \leqslant \overline{S}_\rho. \tag{2}$$

Таким образом, *любая* (*независимо от выбора точек* P_j) *интегральная сумма функции* f, *соответствующая разбиению* ρ, *находится между ее нижней и верхней интегральными суммами, соответствующими тому же разбиению* ρ.

Другое важное свойство верхних и нижних сумм заключается в том, что если $\rho \subset \rho'$, то имеют место неравенства

$$\underline{S}_\rho \leqslant \underline{S}_{\rho'} \leqslant S_\rho \leqslant \overline{S}_{\rho'} \leqslant \overline{S}_\rho. \tag{3}$$

Второе из них уже доказано.

Чтобы убедиться в справедливости, например, четвертого неравенства, запишем $\overline{S}_{\rho'}$ в виде

$$\overline{S}_{\rho'} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{l_j} M_{jk} m\Omega_{jk},$$

где

$$M_{jk} = \sup_{P \in \Omega_{jk}} f(P).$$

Для сравнения сумму $\overline{S}_\rho$ можно записать подобным образом:

$$\overline{S}_\rho = \sum_{j=1}^{N} M_j m\Omega_j = \sum_{j=1}^{N} M_j \sum_{k=1}^{l_j} m\Omega_{jk} \geqslant \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{l_j} M_{jk} m\Omega_{jk} = \overline{S}_{\rho'}.$$

Теперь ясно, что $\overline{S}_{\rho'} \leqslant \overline{S}_\rho$, потому что из вложения $\Omega_{jk} \subset \Omega_j$ следует, что $M_{jk} \leqslant M_j$.

Пусть теперь ρ_1 и ρ_2 — разбиения Ω и $\rho = \rho_1 + \rho_2$ есть новое разбиение, полученное наложением ρ_1 на ρ_2. Тогда ρ есть продолжение ρ_1 и ρ_2 и

$$\underline{S}_{\rho_1} \leqslant \underline{S}_{\rho} \leqslant \overline{S}_{\rho} \leqslant \overline{S}_{\rho_2}.$$

Таким образом,

$$\underline{S}_{\rho_1} \leqslant \overline{S}_{\rho_2}, \tag{4}$$

каковы бы ни были разбиения ρ_1 и ρ_2.

Если зафиксировать ρ_2 и менять произвольно ρ_1 (которое мы желаем обозначить через ρ), то получим

$$\underline{I}(f) = \sup_{\rho} \underline{S}_{\rho} \leqslant \overline{S}_{\rho_2}.$$

А теперь, варьируя разбиения ρ_2 (обозначаемые через ρ), получим

$$\underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f) = \inf_{\rho} \overline{S}_{\rho}.$$

Числа $\overline{I}(f) = \overline{I}$ и $\underline{I}(f) = \underline{I}$ называются соответственно *верхним и нижним интегралами функции f на Ω*. Из приведенных рассуждений следует, что *для произвольной ограниченной на Ω функции нижний и верхний интегралы на Ω существуют.*

Докажем важную теорему.

Теорема 1 (основная). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ есть измеримое множество (т. е. измеримое в n-мерном смысле по Жордану), на котором определена ограниченная функция f $(|f(\mathbf{x})| \leqslant K)$.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $\underline{I} = \overline{I}$;

2) *для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение ρ, что*

$$\overline{S}_{\rho} - \underline{S}_{\rho} < \varepsilon; \tag{5}$$

3) *для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений ρ с диаметрами $d(\Omega_j) < \delta$ имеет место неравенство* (5);

4) *существует интеграл*

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = I. \tag{6}$$

При этом $I = \underline{I} = \overline{I}$.

Здесь, конечно, подразумевается, что $\underline{I}$ и $\overline{I}$ — нижний и верхний интегралы от f на G, а $\underline{S}_{\rho}$, $\overline{S}_{\rho}$ — нижняя и верхняя интегральные суммы f, соответствующие разбиению ρ.

Эту теорему можно перефразировать так: *для того чтобы существовал интеграл от f на Ω, необходимо и достаточно выполнения одного из условий* 1)–3). *При этом величина интеграла равна $\underline{I} = \overline{I}$.*

Доказательство. 1) $\to$ 2). Для любого ε найдутся разбиения ρ_1 и ρ_2 такие, что

$$\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{\rho_1}, \qquad \overline{S}_{\rho_2} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для $\rho = \rho_1 + \rho_2$

$$\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{\rho_1} \leqslant \underline{S}_{\rho} \leqslant \overline{S}_{\rho} \leqslant \overline{S}_{\rho_2} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда из 1) следует (5), т. е. 2).

2) $\to$ 3). Это самая нетривиальная часть теоремы, утверждающая, что если для любого $\varepsilon > 0$ найдется зависящее от него разбиение ρ_*:

$$\Omega = \sum_{j=1}^{N} \Omega_j^*,$$

для которого $\overline{S}_{\rho_*} - \underline{S}_{\rho_*} < \varepsilon$, то также найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений ρ с $d(\Omega_j) < \delta$ выполняется неравенство (5).

Обозначим через Γ_* объединение всех граничных точек Ω_j^*, каково бы ни было $j = 1, \ldots, N$. Оно имеет меру нуль (Ω_j^* измеримы), и потому можно определить фигуру σ', покрывающую Γ_*, такую, что $|\sigma'| < \varepsilon/(2K)$. Введем еще новую фигуру σ, содержащую строго внутри себя σ', но такую, что $|\sigma| < \varepsilon/(2K)$.

Пусть $\delta > 0$ есть настолько малое положительное число, что расстояние между любыми двумя точками границ σ и σ' больше, чем δ. Тем более расстояние любой точки Γ_* до границы σ больше, чем δ.

Зададим какое-нибудь разбиение ρ, на которое наложено единственное условие, что все его частичные множества ω имеют диаметр $d(\omega) < \delta$ (нам удобно будет их писать без индексов так же, как соответствующие им m и M). Имеем

$$\overline{S}_{\rho} - \underline{S}_{\rho} = \sum{}'(M - m)\, m\omega + \sum{}''(M - m)\, m\omega,$$

где сумма $\sum'$ распространена на все частичные множества ω разбиения ρ, каждое из которых содержит в себе одну из точек Γ_*. Так как $d(\omega) < \delta$, то все такие $\omega \subset \sigma$ и их общая мера не превышает $m\sigma < \varepsilon/(2K)$. Поэтому

$$\sum{}'(M - m)\, m\omega \leqslant 2K \sum{}' m\omega \leqslant 2K\, \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

Сумму $\sum''$ запишем в виде кратной суммы $\sum'' = \sum\limits_i \sum^i$, где $\sum^i$ обозначает сумму слагаемых $\sum''$, соответствующих частичным множествам ω

разбиения ρ, попавшим полностью в частичное множество Ω_i^* старого разбиения ρ_*. Имеем

$$\sum\nolimits''(M-m)\,m\omega = \sum_i \sum\nolimits^i (M-m)\,m\omega \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*) \sum\nolimits^i m\omega \leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*)\,m\Omega_i^* < \varepsilon.$$

Поэтому $\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho < 2\varepsilon$ для всех разбиений ρ с $d(\omega) < \delta$, т.е. имеет место 3).

3) $\to$ 4). Пусть имеет место 3). Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, как указано в 3). Тогда для разбиений ρ, о которых говорится в 3),

$$\underline{S}_\rho \leqslant \sum f(P_j)|\Omega_j| \leqslant \overline{S}_\rho, \qquad \underline{S}_\rho \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}_\rho, \tag{7}$$

и так как выполняется (5), где $\varepsilon > 0$ любое, то $I = \underline{I} = \overline{I}$, и

$$|I - \sum f(P_j)|\Omega_j|\,| < \varepsilon, \tag{8}$$

т.е. I есть интеграл от f на Ω. Мы доказали 4).

Из 4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и разбиение ρ с $\delta_\rho < \delta$ (для нашей цели достаточно одного ρ) такие, что

$$|I - S_\rho| < \varepsilon, \qquad S_\rho = \sum_\rho f(\xi)|\omega| \tag{9}$$

при любом выборе $\xi \in \omega$.

Таким образом, $I - \varepsilon < S_\rho < I + \varepsilon$ для любых $\xi \in \omega$. Но

$$\inf_{\xi\in\omega} S_\rho = \inf_{\xi\in\omega} \sum_\rho f(\xi)|\omega| = \sum_\rho m|\omega| = \underline{S}_\rho, \tag{10}$$

$$\sup_{\xi\in\omega} S_\rho = \sup_{\xi\in\omega} \sum_\rho f(\xi)|\omega| = \sum_\rho M|\omega| = \overline{S}_\rho. \tag{11}$$

Поэтому

$$I - \varepsilon \leqslant \underline{S}_\rho \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}_\rho \leqslant I + \varepsilon,$$

откуда

$$I - \varepsilon \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant I + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ любое, то

$$I = \underline{I} = \overline{I}. \tag{12}$$

Мы доказали, что из 4) следует 1).

Теорема 2. *Пусть задана последовательность разбиений ρ_k, $k = 1, 2, \ldots$, измеримого множества Ω с $\delta_{\rho_k} \to 0$ и ограниченная функция f на Ω.*

Существование предела

$$\lim_{k\to\infty} S_{\rho_k}(f) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\rho_k} f(P_j)|\Omega_j| = I \tag{13}$$

при любом выборе $P_j \in \Omega_j$ влечет существование интеграла от f по Ω, равного числу I.

Доказательство. Из (13) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и некоторого $\rho_k = \rho$ имеет место (9). Но из (9), как мы видели, следует (12), т. е. свойство 1) основной теоремы, следовательно, существование интеграла от f по Ω.

Замечание. Теорема 2 упрощает понимание кратного интеграла от ограниченной на измеримом множестве Ω функции f.

Мы можем, например, ввести сетку, разрезающую $\mathbb{R}^n$ на кубики Δ с ребром длины 2^{-N}, и использовать только целые кубики, попавшие в Ω (см. ниже теорему 3), и интеграл от f по Ω определить как предел

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\Delta_j \subset \Omega} f(P_j)|\Delta_j| = I. \tag{14}$$

Если этот предел существует при любом выборе $P_j \in \Delta_j$, то он и равен интегралу от f по Ω, т. е. не надо проверять существование подобного предела для любой другой последовательности разбиений S_k с δ_{ρ_k}, он автоматически существует и равен I.

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\delta_{\rho_k}\to 0} \sum f(P)\, m\omega = \lim_{\delta_{\rho_k}\to 0} {\sum}' f(P)\, m\omega,$$

где в сумме ${\sum}'$ оставлены члены с частными множествами ω, не прилегающими к границе Γ множества Ω.

Мы называем множество ω *прилегающим* к Γ, если множество $\omega \cap \Gamma$ непусто.

Доказательство. Так как $|\Gamma| = 0$, то Γ можно покрыть фигурой σ_1 $(\sigma_1 \supset \Gamma)$, имеющей меру $|\sigma_1| < \varepsilon/K$ $(|f(x)| < K,\ x \in Q)$.

Раздав*) фигуру σ_1, получим новую фигуру $\sigma \supset \sigma_1 \supset \Gamma$ такую, чтобы $|\sigma| < \varepsilon/K$.

Пусть $\delta > 0$ — толщина зазора между σ_1 и границей σ. Тогда если $\delta_{\rho_k} < \delta$, то все прилегающие к Γ множества ω попадут в σ и сумма ${\sum}''$ слагаемых в (13), соответствующих таким ω, оценивается так:

$$\left|{\sum}'' f(P)|\omega|\right| \leqslant K {\sum}''|\omega| \leqslant K|\sigma| < K\,\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

т. е.

$${\sum}'' f(P)|\omega| \to 0, \qquad \delta_{\rho_k} \to 0.$$

*) То есть раздвинув (стороны) фигуры (*примеч. ред.*).

§ 12.8. Интегрируемость непрерывной функции на замкнутом измеримом множестве. Другие критерии

Теорема 1. *Функция $f(P)$, непрерывная на замкнутом измеримом по Жордану множестве Ω, интегрируема по Риману на Ω.*

Доказательство. Так как множество Ω измеримо, то оно ограничено. Кроме того, оно замкнуто, поэтому непрерывная на Ω функция f равномерно непрерывна на Ω. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $P', P'' \in \Omega$ и $|P'' - P'| < \delta$, то $|f(P'') - f(P')| < \varepsilon$.

Пусть ρ есть произвольное разбиение $\Omega = \sum_{j=1}^N \Omega_j$ на измеримые части с диаметром $d(\Omega_j) < \delta$, и пусть, как всегда, $M_j = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega_j} f(\mathbf{x})$, $m_j = \inf_{\mathbf{x}\in\Omega_j} f(\mathbf{x})$. Тогда

$$M_j - m_j = \sup_{P', P'' \in \Omega_j} \big(f(P'') - f(P')\big) \leqslant \omega(\delta),$$

потому что расстояние между любыми точками $P', P'' \in \Omega$ не превышает по условию δ. Следовательно,

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \sum (M_j - m_j)\, m\Omega_j \leqslant \omega(\delta) \sum m\Omega_j = \omega(\delta)\, m\Omega < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ задано, а $\delta > 0$ достаточно мало, $\omega(\delta)$ есть модуль непрерывности функции f, заданной на ограниченном замкнутом множестве Ω. Поэтому $\omega(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Функция f, ограниченная на измеримом замкнутом множестве Ω и непрерывная на Ω, за исключением точек, образующих множество Λ меры нуль, интегрируема на Ω.*

На рис. 12.4 множество Λ состоит из точки 0 и куска гладкой кривой (см. 4-е издание этой книги, § 12.6, теорема 2).

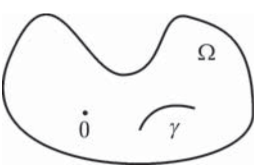

Рис. 12.4

Пример 1. Рассмотрим функцию $\psi(x, y) = \sin \frac{1}{xy}$ на полуоткрытом прямоугольнике $\Delta' = \{0 < x,\ y \leqslant \pi/2\}$. Чтобы применить к ней теорему 2, будем рассуждать так. Доопределим ψ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ оси x и отрезке $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$ оси y какими-нибудь значениями, однако ограниченными в совокупности. Продолженная таким образом на замкнутый прямоугольник $\Delta = \overline{\Delta'}$ функция ψ ограничена на Δ и непрерывна всюду на Δ, за исключением множества (состоящего из указанных двух отрезков) жордановой двумерной меры нуль. Но тогда по теореме 2 существует интеграл

$$\iint_\Delta \psi(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Delta'} \psi(x, y)\, dx\, dy.$$

§ 12.9. Свойства кратных интегралов

Теорема 1. *Если функция f ограничена и интегрируема на $\Omega = \Omega' + \Omega''$, где Ω' и Ω'' измеримы и пересекаются разве что по своим границам, то она также интегрируема на Ω' и Ω'', и обратно.*

При этом

$$\int_{\Omega} f\,d\mathbf{x} = \int_{\Omega'} f\,d\mathbf{x} + \int_{\Omega''} f\,d\mathbf{x}. \tag{1}$$

Берем произвольную последовательность разбиений ρ_k, $k=1,2,\ldots$, множества Ω, содержащих в себе границы Ω' и Ω''. Они индуцируют на Ω', Ω'' разбиения ρ'_k и ρ''_k. Дальше надо рассуждать в точности так же, как при доказательстве одномерной теоремы 1 из § 9.7, только теперь роль отрезков $[a,c]$, $[c,b]$ играют множества Ω' и Ω''.

Следствие. *Если ограниченную и интегрируемую на Ω функцию f видоизменить на любом множестве $E \subset \Omega$, имеющем жорданову меру нуль, так, что видоизмененная функция f_1 останется ограниченной на Ω, то f_1 будет интегрируемой на Ω и*

$$\int_{\Omega} f\,d\Omega = \int_{\Omega} f_1\,d\Omega.$$

В самом деле, $\Omega - E$ измеримо вместе с Ω, поэтому f интегрируема на $\Omega - E$, кроме того,

$$\int_E f\,d\Omega = \int_E f_1\,d\Omega = 0.$$

Но тогда f_1 интегрируема на Ω и

$$\int_{\Omega} f_1\,d\Omega = \int_{\Omega - E} f_1\,d\Omega + \int_E f_1\,d\Omega = \int_{\Omega - E} f\,d\Omega + \int_E f\,d\Omega = \int_{\Omega} f\,d\Omega.$$

В силу этого утверждения, если функция f ограничена на незамкнутом измеримом множестве Ω и интегрируема на нем, пишут

$$\int_{\Omega} f\,d\mathbf{x} = \int_{\overline{\Omega}} f\,d\mathbf{x},$$

хотя функция f могла не быть определенной на $\overline{\Omega} - \Omega$. Ведь все равно, если бы f была определена на $\overline{\Omega} - \Omega$ так, что совокупность ее значений на $\overline{\Omega} - \Omega$ была ограничена, то тогда интегралы от f на Ω и $\overline{\Omega}$ совпадут.

Теорема 2. *Если $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ — ограниченные интегрируемые на Ω функции и c — постоянная, то функции* 1) $f(\mathbf{x}) \pm \varphi(\mathbf{x})$, 2) $cf(\mathbf{x})$, 3) $|f(\mathbf{x})|$, 4) $f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$, 5) $1/f(\mathbf{x})$, *где* $|f(\mathbf{x})| > d > 0$, *интегрируемы на Ω. При этом*

$$\int_{\Omega} (f \pm \varphi)\,d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f\,d\mathbf{x} \pm \int_{\Omega} \varphi\,d\mathbf{x}, \tag{2}$$

$$\int_\Omega cf\,d\mathbf{x} = c\int_\Omega f\,d\mathbf{x}. \tag{3}$$

Доказательство такое же, как в случае одномерной теоремы — § 9.6.

Теорема 3. *Если функции f_1, f_2 и φ ограничены и интегрируемы на Ω и*

$$f_1(P) \leqslant f_2(P), \qquad \varphi(P) \geqslant 0, \qquad P \in \Omega, \tag{4}$$

то

$$\int_\Omega f_1\varphi\,dP \leqslant \int_\Omega f_2\varphi\,dP. \tag{5}$$

В частности, если

$$A \leqslant f(P) \leqslant B, \qquad \varphi(P) \geqslant 0, \tag{6}$$

где A и B — постоянные, то

$$A\int_\Omega \varphi\,dP \leqslant \int_\Omega f\varphi\,dP \leqslant B\int_\Omega \varphi\,dP, \tag{7}$$

и при некотором C

$$\int_\Omega f\varphi\,dP = C\int_\Omega \varphi\,dP, \qquad A \leqslant C \leqslant B. \tag{8}$$

Доказательство. Из (4) следует, что

$$f_1(P)\varphi(P) \leqslant f_2(P)\varphi(P), \qquad P \in \Omega,$$

откуда для любого разбиения ρ множества Ω

$$S_\rho(f_1\varphi) \leqslant S_\rho(f_2\varphi).$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, где δ — максимальный диаметр частичных множеств разбиения ρ, получим (5).

Равенство (8) называют *теоремой о среднем для кратного интеграла.*

Примечание. Если Ω — связное измеримое замкнутое множество и функция f непрерывна на Ω, то

$$\int_\Omega f\varphi\,dP = f(Q)\int_\Omega \varphi\,dP,$$

где Q — некоторая точка Ω.

В самом деле, из непрерывности f на замкнутом измеримом множестве Ω следует, что f интегрируема на Ω, кроме того, существуют на Ω точки Q_1 и Q_2, в которых f достигает соответственно минимума и максимума (на Ω):

$$\min_{P\in\Omega} f(P) = f(Q_1) = A, \qquad \max_{P\in\Omega} f(P) = f(Q_2) = B.$$

В силу связности Ω существует находящаяся в Ω непрерывная кривая $P = P(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, соединяющая точки $Q_1 = P(t_1)$ и $Q_2 = P(t_2)$. Непрерывная на отрезке $[t_1, t_2]$ функция

$$z = f(P(t)) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = \psi(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

принимает для некоторого $t_0 \in [t_1, t_2]$ значение $\psi(t_0) = f(Q) = C$, где $Q = P(t_0)$.

Теорема 4. *Для ограниченной интегрируемой на Ω функции f выполняются неравенства*

$$\left|\int_\Omega f\,d\mathbf{x}\right| \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mathbf{x} \leqslant Km\Omega, \qquad K = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega} |f(\mathbf{x})|. \tag{9}$$

В самом деле, интегрируемость $|f|$ доказана в теореме 2. Кроме того,

$$-|f(\mathbf{x})| \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant |f(\mathbf{x})|, \qquad \mathbf{x} \in \Omega,$$

откуда

$$-\int_\Omega |f|\,d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega f\,d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mathbf{x}.$$

Отметим, что в неравенстве (9) недостаточно предполагать интегрируемость $|f(\mathbf{x})|$ (см. замечание в конце § 9.7).

§ 12.10. Сведение кратного интеграла к интегрированию по отдельным переменным

Пусть на прямоугольнике

$$\Delta = \{(x, y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\} \tag{1}$$

задана ограниченная функция $f(x, y)$.

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\iint_\Delta f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy, \tag{2}$$

верное при условии, что $f(x, y)$ интегрируема на Δ (т. е. интеграл слева в (2) существует), а для любого $x \in [a, b]$ существует одномерный интеграл $\int_c^d f(x, y)\,dy$.

В частности, эти условия выполняются для функции f, непрерывной на Δ (см. § 12.8).

Если ввести обозначения

$$\Delta_1 = [a, b], \qquad \Delta_2 = [c, d], \qquad \Delta = \Delta_1 \times \Delta_2,$$

то формула (2) запишется в виде

$$\iint_{\Delta_1 \times \Delta_2} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\Delta_1} dx \int_{\Delta_2} f(x, y)\, dy. \tag{2$'$}$$

В таком виде эта формула обобщается. Можно считать, что рассматривается $(k+m)$-мерное пространство

$$\mathbb{R}^{k+m} \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m),$$

и в нем задан прямоугольник $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$,

$$\Delta = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, k;\ c_j \leqslant y_j \leqslant d_j,\ j = 1, \ldots, m\},$$
$$\Delta_1 = \{\mathbf{x}\colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, k\},$$
$$\Delta_2 = \{\mathbf{y}\colon c_j \leqslant y_j \leqslant d_j,\ j = 1, \ldots, m\}.$$

На Δ задана ограниченная интегрируемая функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. При этом предполагается, что интеграл $\int_{\Delta_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ существует для любого $\mathbf{x} \in \Delta_1$. Тогда имеет место равенство (2$'$), где уже теперь $d\mathbf{x} = dx_1 \ldots dx_n$, $d\mathbf{y} = dy_1 \ldots dy_m$.

Доказательство в обоих случаях (2) и (2$'$) аналогично. В случае (2) может помочь рис. 12.5.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\Phi(x) = \int_{\Delta_2} f(x, y)\, dy, \qquad x \in \Delta_1.$$

Теорема будет доказана, если будет установлено, что функция $\Phi(x)$ интегрируема на Δ_1 и интеграл от нее по Δ_1 существует и равен левой части (2$'$):

$$\int_{\Delta} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\Delta_1} \Phi(x)\, dx. \tag{3}$$

Составим интегральную сумму для $\Phi(x)$ на Δ_1. Для этого Δ_1 разрежем на равные прямоугольники ω': $\Delta_1 = \cup\omega'$, и в каждом из них выберем точку ξ $(\xi \in \omega')$. Соответствующая интегральная сумма имеет вид

$$\sum_{\omega'} \Phi(\xi)|\omega'| = \sum_{\omega'} \int_{\Delta_2} f(\xi, y)\, dy\, |\omega'|. \tag{4}$$

Разрежем теперь Δ_2 тоже на равные прямоугольники ω'': $\Delta_2 = \cup\omega''$. Соответственно весь прямоугольник Δ разрежется на $(k+m)$-мерные частичные прямоугольники $\omega' \times \omega''$:

$$\Delta = \cup(\omega' \times \omega''), \tag{5}$$

а равенство (4) можно записать и так:

$$\sum_{\omega'} \Phi(\xi)|\omega'| = \\ = \sum_{\omega'} \sum_{\omega''} \int_{\omega''} f(\xi, y)\, dy\, |\omega'|. \tag{6}$$

Теперь под интегралом в правой части (6) стоит функция $f(\xi, y)$ от $\xi \in \omega'$ и $y \in \omega''$.

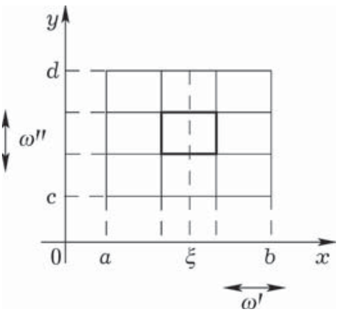

Рис. 12.5

Положим

$$m = \inf_{(x,y)\in(\omega'\times\omega'')} f(x,y), \qquad M = \sup_{(x,y)\in(\omega'\times\omega'')} f(x,y).$$

Очевидно, наша функция $f(\xi, y)$, $\xi \in \omega'$, $y \in \omega''$, будет удовлетворять неравенствам

$$m \leqslant f(\xi, y) \leqslant M.$$

Соответственно

$$m\,|\omega'|\,|\omega''| \leqslant \int_{\omega''} f(\xi, y)\, dy\, |\omega'| \leqslant M\,|\omega'|\,|\omega''|$$

и

$$\sum_{\omega'\times\omega''} m\,|\omega'|\,|\omega''| \leqslant \sum_{\omega'} \sum_{\omega''} \int_{\omega''} f(\xi, y)\, dy\, |\omega'| \leqslant \sum_{\omega'\times\omega''} M\,|\omega'|\,|\omega''|. \tag{7}$$

Если обозначить через ρ разбиение (5) прямоугольника Δ на частичные прямоугольники $\omega' \times \omega''$, то неравенства (7) можно записать так:

$$\underline{S}_\rho(f) \leqslant \sum_{\omega'} \Phi(\xi)|\omega'| \leqslant \overline{S}_\rho(f), \tag{8}$$

где $\underline{S}_\rho$, $\overline{S}_\rho$ суть нижняя и верхняя интегральные суммы f на Δ. По условию f интегрируема на Δ, и потому $\overline{S}_\rho(f)-\underline{S}_\rho(f) \to 0$ при $|\omega'|, |\omega''| \to 0$, и если I есть соответствующий интеграл, то $\underline{S}_\rho(f) \leqslant I \leqslant \overline{S}_\rho(f)$. Но тогда $\lim \underline{S}_\rho(f) = \lim \overline{S}_\rho(f) = I$, и из (8) следует, что функция Φ интегрируема на Δ_1 и выполняется равенство (3), которое мы хотели доказать.

В общем случае сведе́ние вычисления кратных интегралов к последовательному интегрированию по каждой переменной в отдельности основывается на лемме, доказываемой ниже.

Пусть Ω — ограниченное множество. Обозначим через e_1 его проекцию на ось x_1. В частности, если Ω — область, то e_1 — интервал, а если Ω — замыкание области, то e_1 — отрезок $[a,b]$, где $a = \min_{\mathbf{x}\in\Omega} x_1$, $b = \max_{\mathbf{x}\in\Omega} x_1$, $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$. Обозначим еще через $\Omega_{x_1^0}$ сечение Ω плоскостью $x_1 = x_1^0$, т. е. множество точек вида $(x_1^0, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\int\cdots\int_\Omega f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n = \\ = \int_{e_1} dx_1 \int_{\Omega_{x_1}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_2\ldots dx_n, \tag{9}$$

всегда верное, если f ограничена на Ω, e_1 — измеримое одномерное множество и интегралы $\int\cdots\int_\Omega$ и $\int_{\Omega_{x_1}}$ (для любого $x_1 \in e_1$) имеют смысл.

Доказательство. Поместим Ω в некоторый n-мерный прямоугольник $\Delta = [a_1,b_1]\times\Delta'$, где $\Delta' = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = 2,\ldots,n\}$. Это возможно, потому что Ω измеримо, следовательно, ограничено.

Продолжим функцию f с Ω на Δ, положив

$$\bar f = \begin{cases} f & \text{на}\quad \Omega,\\ 0 & \text{на}\quad \Delta\setminus\Omega.\end{cases}$$

Теперь имеем (пояснения ниже)

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_\Delta \bar f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \\ = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\Delta'} \bar f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_2\ldots dx_n = \\ = \int_{e_1} dx_1 \int_{\Omega_{x_1}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_2\ldots dx_n.$$

Первое равенство в этой цепи верно в силу того, что Ω и Δ измеримы, $\bar f = 0$ на $\Delta\setminus\Omega$ и $\bar f$ интегрируема на Δ.

Второе — по теореме 2. Ведь, кроме того, что функция f интегрируема на Ω, она при фиксированных допустимых x_1 как функция от $(x_2, \ldots, x_n)$ интегрируема на Ω_{x_1}, следовательно, и на Δ', потому что она равна нулю вне Ω_{x_1}.

Третье равенство верно, потому что e_1 измеримо, $f = 0$ для $x_1 \notin e_1$ и для $x_1 \in e_1$, когда $(x_2, \ldots, x_n) \notin \Omega_{x_1}$.

Пример 1. Площадь S эллипса W: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ $(a, b > 0)$ (рис. 12.6) вычисляется следующим образом (пояснения ниже):

$$S = \iint_W 1\,dx\,dy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx =$$
$$= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2ab\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\Bigg|_0^a = \pi ab.$$

Первое равенство в этой цепи следует из того, что W — измеримое в двумерном смысле множество, ведь его граница — гладкая кривая.

Второе — из доказанной выше леммы. Ведь $[-a, a]$ есть измеримая проекция W на ось x, и сечение W_x эллипса прямой, параллельной оси y, проходящей через точку $x \in [a, b]$, есть отрезок $\left[-b\sqrt{1-x^2/a^2}, b\sqrt{1-x^2/a^2}\right]$, т. е. измеримое в одномерном смысле множество, на котором функция, равная 1, интегрируема.

Пример 2. На рис. 12.7 изображено замкнутое множество Ω с границей Γ, состоящей из двух кусочно гладких замкнутых контуров и точки. Таким образом, Ω измеримое в двумерном смысле. Его проекция на ось x есть отрезок $[a, b]$. Любое его сечение Ω_x прямой, параллельной оси y, проходящей через точку $x \in [a, b]$, есть отрезок, или система двух отрезков, или точка, — все измеримые в одномерном смысле замкнутые множества. Поэтому если $f(x, y)$ непрерывна на Ω, то она интегрируема на Ω и на любом указанном сечении Ω_x, и к f применима доказанная лемма:

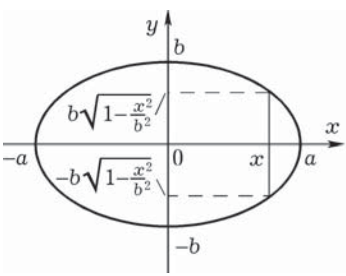

Рис. 12.6

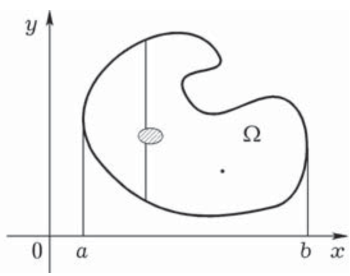

Рис. 12.7

$$\iint_\Omega f\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\Omega_x} f\,dy. \tag{10}$$

Пример 3. Объем $|\Omega|$ эллипсоида Ω: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ $(a,b,c>0)$ может быть вычислен следующим образом (пояснения ниже):

$$\begin{aligned}\Omega = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a} dx \int_{\Omega_x} dy\,dz =\\ = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy \int_{-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dz =\\ = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} 2c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}\,dy =\\ = 2bc\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{1-x^2/a^2}}^{\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{1-x^2/a^2-z^2}\,dz =\\ = bc\int_{-a}^{a} \pi(1-x^2/a^2)\,dx = \frac{4}{3}\,\pi abc.\end{aligned}$$

При переходе к предпоследнему члену цепи сделана подстановка

$$z = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\sin\theta.$$

Множество Ω измеримо, ведь граница Γ состоит из двух непрерывных кусков поверхности

$$z = \pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

каждый из которых проектируется взаимно однозначно на замкнутое ограниченное множество плоскости x, y.

Измеримыми и замкнутыми являются также сечения Ω плоскостями и прямыми, параллельными осям координат, соответственно в двумерном и одномерном смысле, ведь они, если они не пусты, представляют собой при сечении плоскостями эллипсы или точки, а при сечении прямыми — отрезки или точки.

Таким образом, функция 1 интегрируема на Ω и на всех указанных сечениях Ω и равенство (9) применимо.

Если функция $f(x,y)$ ограничена и непрерывна на $\Delta=[a,b]\times[c,d]$, за исключением конечного числа точек, то для нее на основании теоремы 1 имеет место

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy,$$

потому что для любого $x\in[a,b]$ функция $f(x,y)$ по y ограничена и имеет на $[c,d]$ разве что конечное число точек разрыва, следовательно, интегрируема на $[c,d]$.

В частности, если

$$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$$

и функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ ограничены и имеют конечное число точек разрыва соответственно на отрезках $[a,b]$, $[c,d]$, то

$$\iint_\Delta \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d \varphi(x)\psi(y)\,dy = \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_c^d \psi(y)\,dy.$$

Распространение этих фактов на многомерный случай не представляет труда.

§ 12.11. Непрерывность интеграла по параметру

Рассмотрим интеграл

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1,\ldots,x_m) = \\ = \int\limits_\Omega\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)\,dy_1\ldots dy_n = \int_\Omega f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \qquad (1)$$

где Ω — измеримое множество n-мерного пространства точек $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$, а функция $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ интегрируема по $\mathbf{y}$ на Ω. Тогда интеграл (1) есть функция F от точки $\mathbf{x}$.

Простейший случай (1), т. е. $m = n = 1$, есть

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy. \qquad (1')$$

Следующая теорема дает критерий непрерывности $F(\mathbf{x})$.

Теорема 1. *Если функция $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ непрерывна на множестве*

$$G\times\Omega, \qquad \mathbf{x}\in G, \quad \mathbf{y}\in\Omega, \qquad (2)$$

$(n+m)$-мерного пространства точек $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$, где G и Ω — замкнутые ограниченные множества в соответствующих пространствах точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, то интеграл (1) (т. е. $F(\mathbf{x})$) есть непрерывная функция от $\mathbf{x}\in G$. В случае (1′) $G=[a,b]$, $\Omega=[c,d]$.

Доказательство. Обозначим через $\omega(\delta,f)$ модуль непрерывности функции f на множестве (2). Так как последнее замкнуто и ограничено, а функция f непрерывна на нем, то $\omega(\delta,f)\to 0$ $(\delta\to 0)$. Поэтому для $\mathbf{x},\mathbf{x}'\in G$

$$|F(\mathbf{x}') - F(\mathbf{x})| = \left|\int_\Omega (f(\mathbf{x}',\mathbf{y}) - f(\mathbf{x},\mathbf{y}))\,d\mathbf{y}\right| \leqslant \\ \leqslant \int_\Omega \bigl|f(\mathbf{x}',\mathbf{y}) - f(\mathbf{x},\mathbf{y})\bigr|\,d\mathbf{y} \leqslant \int_\Omega \omega(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|,f)\,d\mathbf{y} = \\ = \omega(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|,f)|\Omega| \to 0, \qquad \mathbf{x}'\to\mathbf{x},$$

и теорема доказана.

Теперь рассмотрим интеграл, обобщающий (1) только в случае, когда y есть переменное число (не вектор):

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_m) = \\ = \int_{\varphi(x_1,\ldots,x_m)}^{\psi(x_1,\ldots,x_m)} f(x_1, \ldots, x_m, y)\, dy = \int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, y)\, dy, \qquad \mathbf{x} \in G, \tag{3}$$

и докажем теорему.

Теорема 2. *Если функция $f(\mathbf{x}, y)$ непрерывна на множестве H точек $(\mathbf{x}, y) = (x_1, \ldots, x_m, y)$ $(m+1)$-мерного пространства, определяемых неравенствами $\varphi(\mathbf{x}) \leqslant y \leqslant \psi(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in G)$, где $\varphi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ — непрерывные функции на замкнутом ограниченном m-мерном множестве G точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, то функция $F(\mathbf{x})$ непрерывна на G.*

Доказательство. Подстановка

$$y = \varphi(\mathbf{x}) + t(\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$dy = (\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}))\, dt,$$

приводит интеграл (3) к виду

$$F(\mathbf{x}) = (\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) \int_0^1 f\big(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}) + t(\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}))\big)\, dt. \tag{4}$$

Но $\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$ — непрерывная функция на G, а интеграл в (4) тоже есть непрерывная функция от $\mathbf{x} \in G$, что следует из теоремы 1. Ведь подынтегральная функция есть непрерывная функция от $(\mathbf{x}, t) \in G \times \times [0, 1]$. Следовательно, $F(\mathbf{x})$ непрерывна на G.

Пример 1. Пусть на единичном шаре ω задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Интеграл от нее по ω равен

$$\int_\omega f\, d\omega = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz.$$

Внутренний интеграл $F(x, y) = \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz$ есть функция F от x, y, определенная на круге σ: $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Она непрерывна на σ. Действительно, f непрерывна на замкнутом шаре ω; поверхности, его ограничивающие, $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $(x^2 + y^2 \leqslant 1)$, описываются непрерывными на круге σ функциями. Непрерывность F на σ вытекает из доказанной теоремы. Таким образом,

$$\int_\omega f\, d\omega = \int_{-1}^{+1} dx \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} F(x, y)\, dy \right).$$

Интеграл $\Phi(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} F(x,y)\,dy$ в свою очередь есть непрерывная функция от $x \in [-1,+1]$ на основании этой же теоремы. Действительно, $F(x,y)$ непрерывна на круге σ (замкнутом ограниченном множестве точек (x,y)), а кривые $y = -\sqrt{1-x^2}$, $y = \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, ограничивающие σ, непрерывны. По теореме $\Phi(x)$ непрерывна на $[-1,+1]$.

§ 12.12. Геометрическая интерпретация знака определителя

Зададим в плоскости прямоугольную систему координат x_1, x_2, как на рис. 12.8, *а* и 12.8, *б*.

Мы предполагаем для определенности, что положительное направление оси x_2 получается из положительного направления оси x_1 поворотом

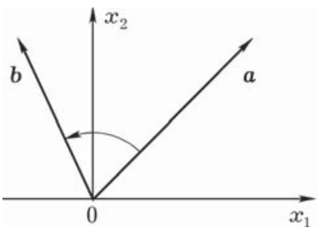

Рис. 12.8, *а*

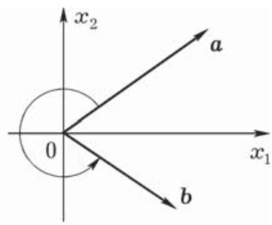

Рис. 12.8, *б*

оси x_1 на угол 90° против часовой стрелки. Зададим два не равных нулю вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, выходящих из нулевой точки, с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

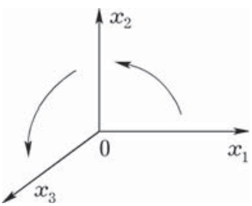

Рис. 12.9

Если $\Delta > 0$, то, чтобы получить направление вектора $\mathbf{b}$, нужно повернуть (против часовой стрелки) $\mathbf{a}$ на угол, меньший π, а если $\Delta < 0$, то это связано с поворотом на угол, больший π. В самом деле, очевидно, что $\mathbf{a} = |a|(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)$ и $\mathbf{b} = |b|(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$, где φ_1, φ_2 — углы, образованные соответственно векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ с осью x_1, откуда $\Delta = |a| \cdot |b| \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Величина $|\Delta|$ есть, очевидно, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Рассмотрим теперь трехмерное пространство, где задана прямоугольная система координат x_1, x_2, x_3 (см. рис. 12.9), и три вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть $\mathbf{i}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{i}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{i}_3 = (0,0,1)$ — орты осей x_1, x_2, x_3. Их определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (>0)$$

Если $\Delta > 0$, то можно определить три непрерывные вектор-функции

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\big), \\ &\boldsymbol{\beta}(t) = \big(\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)\big), \\ &\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)\big), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{aligned}$$

такие, что будут удовлетворяться условия

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{a}, \quad &&\boldsymbol{\beta}(0) = \mathbf{b}, \quad &&\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{c}, \\ &\boldsymbol{\alpha}(1) = \mathbf{i}_1, \quad &&\boldsymbol{\beta}(1) = \mathbf{i}_2, \quad &&\boldsymbol{\gamma}(1) = \mathbf{i}_3 \end{aligned}$$

и при этом для любого $t \in [0,1]$ определитель

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t) \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \\ \gamma_1(t) & \gamma_2(t) & \gamma_3(t) \end{vmatrix} > 0. \tag{2}$$

Если же $\Delta < 0$, то невозможно построить три непрерывные вектор-функции с указанными свойствами.

В случае $\Delta > 0$ говорят, что упорядоченная тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ориентирована так же, как тройка $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, в то время как в случае $\Delta < 0$ тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ориентирована противоположно ориентации тройки $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$.

Подобная характеристика (1-го и 2-го случаев) может быть дана и для пар векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ на плоскости (см. еще далее § 13.8, а также 4-е издание этой книги, § 12.14).

§ 12.13. Замена переменных в кратном интеграле. Простейший случай

Покажем, как видоизменяется интеграл

$$\iint_{\Omega'} f(x_1', x_2')\, dx_1'\, dx_2', \tag{1}$$

если в нем произвести замену переменных

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2, \\ x_2' &= cx_1 + dx_2, \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Будем считать, что Ω' — область с непрерывной кусочно гладкой границей Γ' (рис. 12.10).

Преобразование, обратное к (2), отображает Ω' на некоторую область Ω плоскости x_1, x_2 с непрерывной кусочно гладкой границей Γ (рис. 12.11), и на Ω определена функция

$$F(x_1, x_2) = f(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2), \qquad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Введем на плоскости x_1, x_2 прямоугольную сетку со сторонами квадратов Δ длины h. Она отображается при помощи уравнений (2),

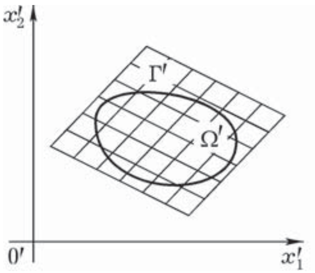

Рис. 12.10

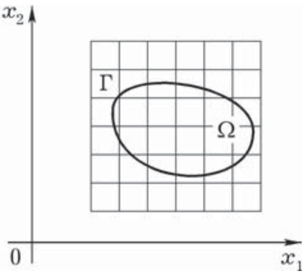

Рис. 12.11

вообще говоря, в косоугольную сетку, делящую плоскость x_1', x_2' на равные параллелограммы Δ' (образы Δ), имеющие площадь

$$|\Delta'| = |D|\,|\Delta| = |D|\,h^2, \qquad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Тем самым определены разбиения ρ, ρ' соответственно областей Ω, Ω'.

Имеем

$$S_{\rho'}(f) = \sum f(x_1', x_2')|\Delta'| = \\ = \sum F(x_1, x_2)|D|\,|\Delta| = S_\rho(|D|F), \qquad (x_1, x_2) \in \Delta. \tag{4}$$

Мы считаем, что вторая сумма в этой цепи распространена только на полные квадраты $\Delta \subset \Omega$, соответственно первая — на соответствующие им “полные” параллелограммы Δ' (см. теорему 3 в § 12.7). Переходя к пределу в (4) при $h \to 0$, получим формулу

$$\iint_{\Omega'} f(x_1', x_2')\,dx_1'\,dx_2' = \\ = \iint_{\Omega} F(x_1, x_2)|D|\,dx_1\,dx_2 = |D| \iint_{\Omega} F(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2. \tag{5}$$

В этом рассуждении можно считать, что функция f непрерывна на $\overline{\Omega}'$, и тогда функция F будет непрерывной на $\overline{\Omega}$, и оба интеграла (5) существуют, а выше доказан факт равенства (5). Достаточно, впрочем, считать, что функция f интегрируема на Ω', и тогда первая сумма в (4) имеет предел, когда $d(\Delta') \to 0$, что автоматически влечет существование равного ему предела второй суммы, когда $d(\Delta) \to 0$, т. е. существование второго интеграла (5), равного первому. Обратно, существование интеграла в правой части (5) влечет существование интеграла в левой.

В следующем параграфе дана более общая формула.

§ 12.14. Замена переменных в кратном интеграле

Т е о р е м а 1. *Пусть в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ задана измеримая область Ω и рассматривается еще другое n-мерное пространство $\mathbb{R}^{n\prime}$ точек $\mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$, а в нем измеримая область Ω'.*

Предположим, что точки $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ переходят в точки $\mathbf{x}' \in \overline{\Omega}'$ при помощи отображения (операции)

$$x_j' = \varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n), \qquad j = 1, \ldots, n, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

которое мы будем еще обозначать так:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \tag{1'}$$

Мы будем предполагать, что операция A обладает следующими свойствами:

1) *она взаимно однозначно отображает Ω на Ω' :*

$$\Omega \rightleftarrows \Omega' \tag{2}$$

(взаимно однозначное соответствие при отображении A между точками границ Ω и Ω' не требуется);

2) *функции $\varphi_j(\mathbf{x})$ непрерывны и имеют на $\overline{\Omega}$ непрерывные частные производные с якобианом*

$$D(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Пусть, далее, задана интегрируемая на Ω' функция

$$f(\mathbf{x}') = f(x_1', \ldots, x_n'),$$

преобразующаяся при помощи подстановок (1) *в функцию*

$$F(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x}) = f\big(\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{x})\big), \qquad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{4}$$

Тогда имеет место формула замены переменных в кратном интеграле:

$$\int_{\Omega'} f(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}' = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}) |D(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}. \tag{5}$$

Если существует один из интегралов (5), *то существует второй и они равны.*

В частности, если функция $f(\mathbf{x}')$ *непрерывна на* $\overline{\Omega}'$, *то непрерывна также функция* F *на* $\overline{\Omega}$ *и оба интеграла в* (5) *существуют, а формула* (5) *утверждает их равенство.*

Замечание. В формуле (5) можно заменить Ω, Ω' соответственно на $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}'$, потому что этим добавляются множества n-мерной меры нуль.

Трудность теоремы заключается в лемме, которая будет доказана в § 12.15. Мы ее сформулируем и сразу же покажем, как с ее помощью доказывается равенство (5).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия теоремы и* $\Delta \subset \Omega$ *есть произвольный куб с ребром* h, *а* $\Delta' = A(\Delta)$ — *его образ на* Ω' *при помощи операции* A. *Тогда имеет место равенство*

$$|\Delta'| = |D(\mathbf{x})|\,|\Delta| + O(h^n \omega(h)), \tag{6}$$

где $D(\mathbf{x})$ — *значение якобиана* D *в одной из точек* $\mathbf{x} \in \Delta$, *а*

$$\omega(h) = \sup_{i,j=1,\ldots,n} \omega_{ij}(h),$$
$$\omega_{ij}(h) = \sup_{\substack{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<h \\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\overline{\Omega}}} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}) \right| \tag{7}$$

(*модуль непрерывности* $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ *на* $\overline{\Omega}$) *и константа* C, *входящая в* O, *не зависит от* h *и положения* Δ *на* Ω.

Важно заметить, что так как частные производные $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ по условию теоремы непрерывны на ограниченном замкнутом множестве $\overline{\Omega}$, то их модули непрерывности $\omega_{ij}(h) \to 0$ $(h \to 0)$, но тогда и

$$\omega(h) \to 0, \qquad h \to 0. \tag{8}$$

Поэтому остаточный член в формуле (6) удовлетворяет неравенству

$$|O(h^n \omega(h))| \leqslant C h^n \omega(h) = o(h^n), \qquad h \to 0, \tag{9}$$

и притом равномерно относительно $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, потому что правая часть (9) не зависит от $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. Что касается первого члена правой части (6), то он равен

$$|D(\mathbf{x})|\,|\Delta| = |D(\mathbf{x})|\,h^n, \quad \text{т.е.} \quad |\Delta'| = |D(\mathbf{x})|\,h^n + o(h^n), \quad h \to 0.$$

Из этого равенства, в частности, следует, что для любого $\mathbf{x} \in \Omega$ имеет место равенство ($\mathbf{x} \in \Delta \subset \Omega$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\Delta'|}{\Delta} = |D(\mathbf{x})|, \qquad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{10}$$

показывающее, что *величина* $|D(\mathbf{x})|$ *с точностью до бесконечно малых* $o(1)$, $h \to 0$, *есть коэффициент увеличения элементарного объема, сконцентрированного возле точки* $\mathbf{x}$ *при преобразовании его посредством операции* A.

Разобьем Ω h-сеткой, состоящей из кубиков с ребрами длины h (рис. 12.12). Часть сетки, содержащаяся в Ω, при помощи операции A

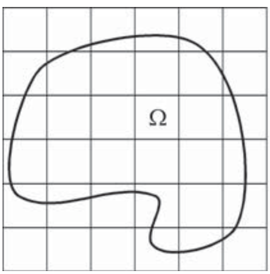

Рис. 12.12

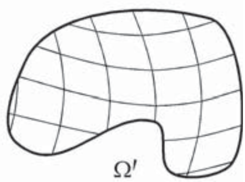

Рис. 12.13

переходит в криволинейную сетку поверхностей, разбивающую Ω' на измеримые части (см. рис. 12.13).

Например, плоскость $x_1 = x_1^0$ пересекает $\overline{\Omega}$ по замкнутому ограниченному множеству $\overline{\Omega}_{x_1^0} \ni (x_1^0, x_2, \ldots, x_n)$, которое операция A переводит на поверхность (разбиения Ω'), непрерывно дифференцируемую, $(n-1)$-мерную. Ее n-мерная мера равна нулю (см. § 12.5, теорема 2).

Обозначим через Δ полные кубы сетки, входящие вместе со своими границами в Ω. При помощи операции A открытое ядро Δ переходит на открытое ядро Δ', а граница Δ — на границу Δ' (формально это утверждение требует доказательства; см. 4-е издание этой книги, § 12.20).

При этом если $h \to 0$, то максимальный диаметр частичных множеств соответствующего разбиения Ω' стремится к нулю, потому что в преобразовании (1) функции $\varphi_j(\mathbf{x})$ равномерно непрерывны на $\overline{\Omega}$.

Учитывая лемму 1, выпишем равенство

$$\sum f(\mathbf{x}')|\Delta'| = \sum F(\mathbf{x})\big(|D(\mathbf{x})|\,|\Delta| + O(h^n\omega(h))\big), \qquad (11)$$

где суммы распространены на все целые кубы $\Delta \subset \Omega$, а $\mathbf{x}$ — произвольные точки, $\mathbf{x} \in \Delta$ и $A\mathbf{x} = \mathbf{x}' \in \Delta'$. Надо иметь в виду, что когда $\mathbf{x}$ пробегает Δ, то $\mathbf{x}'$ соответственно пробегает все множество Δ'.

Так как входящая в ω константа одна и та же для всех $\Delta \subset \Omega$, то

$$\Big|\sum F(\mathbf{x})O(h^n\omega(h))\Big| \leqslant cK\omega(h)\sum|\Delta| \leqslant cK\omega(h)|\Omega| < \varepsilon, \qquad |F(\mathbf{x})| \leqslant K,$$

при достаточно малом h.

Поэтому при $|\Delta| \to 0$ имеет место равносходимость:

$$\sum f(\mathbf{x}')|\Delta'| \sim \sum F(\mathbf{x})|D(\mathbf{x})|\,|\Delta|. \qquad (12)$$

Если интеграл справа в (5) существует, то сумма справа в (12) стремится к числу, равному ему, при $|\Delta| \to 0$ и любом выборе точек $x \in \Delta$. И так как эти точки взаимно однозначно соответствуют точкам $x' \in \Delta'$ и при $|\Delta| \to 0$ максимальный диаметр Δ' стремится к нулю, то сумма в левой части (12) при любом выборе $x' \in \Delta'$ стремится к указанному числу. Но этого достаточно (см. § 12.7, теорема 2), чтобы заключить, что интеграл слева в (5) существует и равен указанному числу. Обратно, если интеграл слева в (5) существует, то сумма слева в (12) стремится к нему при $h \to 0$ и при любом выборе $x' \in \Delta'$, следовательно, и сумма справа стремится к нему же при любом выборе $x \in \Delta$. Но тогда интеграл справа в (5) существует и равен интегралу слева.

§ 12.15. Доказательство леммы 1 § 12.14

Рассматриваем операцию

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}. \qquad (1)$$

Зададим произвольную точку $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ и куб $\Delta \subset \Omega$:

$$\Delta = \{\mathbf{x}\colon x_i^0 \leqslant x_i < x_i^0 + h,\ i = 1,\ldots,n\},$$

с ребром h.

Положим

$$\mathbf{x}'^0 = A\mathbf{x}^0,$$

и, пользуясь теоремой о среднем, операцию $A\mathbf{x}$ запишем равенствами

$$x_i' = {x_i'}^0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\text{ср.}}(x_j - x_j^0), \qquad i = 1,\ldots,n, \quad \mathbf{x} \in \Delta, \qquad (2)$$

где $(\psi)_{\text{ср.}}$ — значение ψ в некоторой точке $\boldsymbol{\xi} \in \Delta$.

Вводим еще другую (линейную) операцию

$$\mathbf{x}'' = A_0\mathbf{x}, \tag{3}$$

определяемую равенствами

$$x_i'' = x_i'^0 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_0 (x_j - x_j^0), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \mathbf{x} \in \Delta, \tag{4}$$

где $(\psi)_0 = \psi(\mathbf{x}^0)$.

Для точек $\mathbf{x} \in \Delta$ имеет место

$$x_i' - x_i'' = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\text{ср.}} - \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_0\right)(x_j - x_j^0),$$

откуда

$$|x_i' - x_i''| \leqslant n\omega(\delta)h, \qquad \delta = \sqrt{n}\,h,$$

$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j' - x_j'')^2} \leqslant \sqrt{n}\,n\omega(\delta)h \leqslant \lambda h\omega(h), \qquad \lambda = n^{5/2},$$

потому что

$$\omega(\delta) = \omega(\sqrt{n}\,h) \leqslant \omega(nh) \leqslant n\omega(h).$$

Таким образом,

$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| \leqslant \lambda h\omega(h), \qquad \mathbf{x} \in \Delta, \tag{5}$$

где константа λ не зависит от $\Delta \subset \Omega$.

Полагаем

$$M \geqslant \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right|, \qquad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — любые точки, принадлежащие Δ. Точка $\mathbf{x}''$ определяется равенствами (4), а точка $\mathbf{y}''$ — равенствами

$$y_i'' = x_i'^0 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_0 (y_j - x_j^0), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \mathbf{y} \in \Delta. \tag{6}$$

Но тогда

$$|x_i'' - y_i''| \leqslant \sum_{j=1}^{n} 2Mh = 2nMh,$$
$$|\mathbf{x}'' - \mathbf{y}''| \leqslant \mu h, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Delta, \qquad \mu = 2n^{3/2}M. \tag{7}$$

В частности, получилось, что ребра Δ длины h переходят посредством A_0 в ребра параллелепипеда Δ'' длины, не большей μh (порядка h).

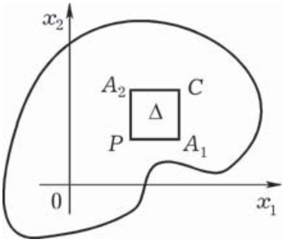

Рис. 12.14

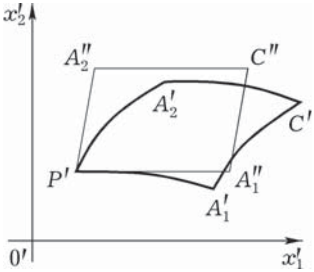

Рис. 12.15

Рассмотрим плоский случай ($n = 2$). Кубик Δ в этом случае есть квадрат. Он переходит при помощи операции A_0 в параллелограмм Δ'' (см. рис. 12.14 и рис. 12.15), определяемый векторами

$$\overline{P'A_1''} = \left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)_0 h,\ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)_0 h\right),$$
$$\overline{P'A_2''} = \left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right)_0 h,\ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)_0 h\right). \tag{8}$$

Длины их имеют порядок

$$\left|\overline{P'A_1''}\right| \leqslant \mu h, \qquad \left|\overline{P'A_2''}\right| \leqslant \mu h$$

(см. (7), но это видно и непосредственно из (8)).

Площадь Δ'' равна

$$|\Delta''| = |D(\mathbf{x}^0)|\, h^2, \qquad D(\mathbf{x}^0) = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)_0 \\ \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)_0 \end{vmatrix}.$$

Элементарными методами аналитической геометрии устанавливаем, что при помощи операций A_0 квадрат Δ отображается на параллелограмм Δ''. Открытое ядро Δ переходит на открытое ядро Δ'', а граница Δ — на границу Δ''.

Аналогично, операция A отображает Δ на некоторое множество Δ' (рис. 12.15), называемое *криволинейным параллелепипедом*. При этом открытое ядро Δ переходит в открытое ядро Δ', а граница Δ — в границу Δ' (взаимно однозначно). Если $D(\mathbf{x}) > 0$ на Ω, то это утверждение следует из § 7.18. В общем случае $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ потребовались бы дальнейшие тонкие рассуждения, которые мы опускаем (см. 4-е издание этой книги, т. II, § 12.17).

Границы Δ, Δ', Δ'' обозначим соответственно через $\Gamma(\Delta)$, $\Gamma(\Delta')$, $\Gamma(\Delta'')$. Если $\mathbf{x} \in \Gamma(\Delta)$, то $\mathbf{x}' \in \Gamma(\Delta')$, $\mathbf{x}'' \in \Gamma(\Delta'')$. При этом $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| \leqslant \lambda h\omega(\mathbf{x})$. Следовательно, $\mathbf{x}'$ находится в круге радиуса $\lambda h\omega(h)$ с центром в $\mathbf{x}''$.

Рис. 12.16

Отсюда следует, что $\Gamma(\Delta')$ принадлежит множеству e, которое определяется как объединение всех кругов радиуса $\lambda h\omega(h)$ с центрами в точках $\mathbf{x}'' \in \Gamma(\Delta'')$. Множество e представляет собой содержащую $\Gamma(\Delta')$ рамку, закругленную в углах Δ'' (рис. 12.16). Такая рамка существует для любого Δ во всяком случае, если высоты H_i параллелограмма Δ'' удовлетворяют неравенствам

$$H_i > 2\lambda h\omega(h), \qquad i = 1, 2. \tag{9}$$

На рис. 12.16 изображен такой параллелограмм Δ''. Площадь e оценивается следующим образом:

$$|e| \leqslant 8\lambda h\omega(h)\mu h + 4\pi\lambda^2 h^2 \omega(h)^2 \leqslant ch^2\omega(h)^2. \tag{10}$$

Один из множителей $\omega(h)$ во втором члене суммы заменен на константу.

Имеем

$$\Delta'' - e \subset \Delta' \subset \Delta'' + e, \qquad |\Delta''| - |e| \leqslant |\Delta'| \leqslant |\Delta''| + |e|,$$
$$|\Delta'| = |\Delta''| + \theta|e|, \qquad -1 < \theta < 1, \qquad |\theta|\,|e| \leqslant ch^2\omega(h),$$
$$|\Delta'| = |\Delta''| + O(h^2\omega(h)), \tag{11}$$
$$|\Delta'| = |D(\mathbf{x}^0)|\,h^2 + O(h^2\omega(h)). \tag{12}$$

Остается рассмотреть случай, когда (9) не выполняется. Пусть, например, $H_1 < 2h\omega(h)$. Тогда

$$|\Delta'|, |\Delta''| \leqslant |e|,$$
$$||\Delta'| - |\Delta''|| \leqslant |\Delta'| + |\Delta''| \leqslant 2|e| \leqslant O(h^2\omega(h)),$$

или

$$|\Delta'| = |\Delta''| + O(h^2\omega(h)).$$

Таким образом, равенство (12) верно в любом случае $\Delta \subset \Omega$.

Наконец, (12) можно заменить на равенство

$$|\Delta'| = |D(\mathbf{x})|\, h^2 + O(h^2\omega(h)), \tag{13}$$

где $\mathbf{x}$ — любая точка в Δ, потому что такая замена изменяет первый член правой части (13) на величину порядка $O(h^2\omega(h))$. Ведь, например,

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0)\right| \leqslant \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right| \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0)\right| + \\ + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0)\right| \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)\right| \leqslant 2M\omega(h), \qquad \mathbf{x} \in \Delta.$$

В трехмерном случае ($n = 3$) рамка e состоит из шести утолщенных граней, общий объем которых не больше $12\lambda h\omega(h)(\mu h)^2$ плюс объем округлений (ребер и вершин), имеющий порядок $O(h^3\omega(h))$, $h \to 0$. Это показывает, что при некотором $c > 12\lambda\mu^2$

$$|e| \leqslant ch^3\omega(h).$$

Дальше рассуждения ведутся так же, как при получении (12).

Итак, во всех возможных случаях имеет место равенство (2). При этом константа, входящая в остаток правой его части, не зависит от h и $\mathbf{x}^0 \in \Omega$. Из примечаний, которые делались попутно, видно, что доказательство в общем случае n совершенно аналогично.

§ 12.16. Полярные координаты в плоскости

Система уравнений

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta \tag{1}$$

осуществляет преобразование полярных координат в декартовы. Правые части (1) — непрерывно дифференцируемые функции с якобианом

$$D = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \geqslant 0. \tag{2}$$

Введем чисто формально новую плоскость с декартовой системой ρ, θ и принадлежащую ей область

$$\Lambda = \{\rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}. \tag{3}$$

Очевидно, преобразование (1) взаимно однозначно отображает Λ на Λ' — плоскость x, y без луча $\theta = 0$. К тому же на Λ якобиан D больше нуля.

Пусть в плоскости x, y задана произвольная измеримая (в двумерном смысле) область, а на ее замыкании — непрерывная функция $f(x, y)$. Выкинем из этой области точки луча $\theta = 0$, если они есть, и оставшееся множество обозначим через Ω'. Будем считать, что Ω'

есть область или сумма конечного числа непересекающихся попарно областей. Множеству Ω' соответствует в силу (1) некоторое множество $\Omega \subset \Lambda$ (которое предполагается измеримым), $\Omega \rightleftarrows \Omega'$. Справедливо равенство

$$\iint_{\Omega'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta, \tag{4}$$

потому что мы находимся в условиях теоремы о замене переменных в кратном интеграле (f непрерывна на Ω', преобразование (1) непрерывно дифференцируемо на $\overline{\Omega}$ с якобианом $\rho > 0$ и $\Omega \rightleftarrows \Omega'$).

В полученной формуле (4) можно теперь заменить Ω, Ω' соответственно на их замыкания $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}'$, потому что этим добавляются только множества двумерной меры нуль.

Если область Ω имеет вид сектора, ограниченного лучами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2 \leqslant \theta_1 + 2\pi)$ и непрерывной кривой $\rho = \psi(\theta)$, то

$$\iint_{\Omega'} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{\psi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho. \tag{5}$$

Впрочем, формулу (4) можно получить из естественных геометрических соображений, не прибегая к искусственной декартовой плоскости ρ, θ. Плоскость x, y разбиваем на элементарные фигуры близкими концентрическими окружностями и выходящими из нулевой точки лучами (рис. 12.17). Площадь каждой такой элементарной фигуры (возле точки (ρ, θ)), или, как говорят, элемент площади в полярных координатах, равна с точностью до бесконечно малых высшего порядка $\Delta S \sim \rho\, d\rho\, d\theta$. Поэтому, если наш интеграл просуммировать по этим элементам, получим

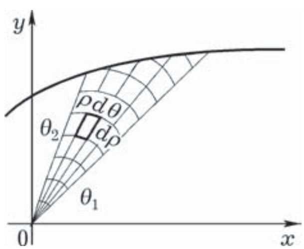

Рис. 12.17

$$\lim_{\Delta\rho, \Delta\theta \to 0} \sum f(\rho_j, \theta_j)\rho_j\, \Delta\rho\, \Delta\theta = \iint_{\Omega} f(\rho, \theta)\rho\, d\rho\, d\theta.$$

П р и м е р 1.

$$\iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} e^{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta = \pi\big(e^{R^2} - 1\big).$$

З а м е ч а н и е. Операция (1) непрерывна на замыкании $\overline{\Lambda}$ области $\Lambda = \{0 < \rho < 1;\ 0 < \theta < 2\pi\}$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие $\Lambda \rightleftarrows \Lambda'$, но при этом взаимно однозначного соответствия между границами Λ и Λ' нет (см. теорему 1 из § 12.14).

§ 12.17. Полярные и цилиндрические координаты в пространстве

Система уравнений

$$x = \rho\cos\theta\,\cos\varphi, \qquad y = \rho\cos\theta\,\sin\varphi, \qquad z = \rho\sin\theta \tag{1}$$

осуществляет переход от полярных координат в пространстве к декартовым (рис. 12.18). Здесь ρ — расстояние точки $P(x, y, z)$ до начала координат (полюса полярной системы), θ — угол между радиус-вектором ρ точки P и его проекцией на плоскость x, y, а φ — угол между указанной проекцией и положительным направлением оси x. Его отсчитывают в том направлении, в котором надо вращать вокруг оси z положительно направленную ось x, чтобы прийти к положительно направленной оси y кратчайшим путем.

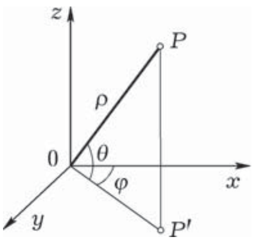

Рис. 12.18

Функции справа в (1) непрерывно дифференцируемы с якобианом

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2\cos\theta, \tag{2}$$

Введем формально новое трехмерное пространство с декартовой системой координат ρ, φ, θ и в нем открытое множество

$$\Lambda = \left\{0 < \rho,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \varphi < 2\pi\right\}. \tag{3}$$

Преобразования (1) взаимно однозначно отображают Λ на Λ', т. е. на пространство x, y, z с выкинутой полуплоскостью $\varphi = 0$ (множеством точек $(x, 0, z)$, где $x \geqslant 0$):

$$\Lambda \rightleftarrows \Lambda'. \tag{4}$$

Пусть теперь в пространстве x, y, z задана произвольная измеримая в трехмерном смысле область, а на ее замыкании — непрерывная функция $f(x, y, z)$. Выкинем из этой области точки полуплоскости $\varphi = 0$ и оставшееся множество обозначим через Ω'. Будем считать, что Ω' есть область или сумма конечного числа непересекающихся попарно областей. Множеству Ω' соответствует в силу (4) некоторое множество $\Omega \subset \Lambda$, которое мы будем предполагать измеримым.

Справедливо равенство

$$\iiint_{\Omega'} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} F(\rho, \theta, \varphi)\rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi, \tag{5}$$

где

$$F(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho\cos\theta\,\cos\varphi, \rho\cos\theta\,\sin\varphi, \rho\sin\theta), \tag{6}$$

потому что мы находимся в условиях теоремы о замене переменных в кратном интеграле.

Теперь в (5) можно при желании заменить Ω, Ω' на $\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}'$ потому, что эти множества отличаются соответственно на множества трехмерной меры нуль.

Пусть σ есть поверхность, описываемая в полярных координатах функцией $\rho = \psi(\theta, \varphi)$, $(\theta, \varphi) \in \omega$, непрерывной на замыкании области ω, и пусть Ω — трехмерная измеримая область пространства x, y, z, ограниченная поверхностью σ и конической поверхностью, лучи которой выходят из нулевой точки и опираются на σ. Тогда для непрерывной на $\overline{\Omega}$ функции $f(x, y, z)$ имеет место

$$\iiint_\Omega f\,dx\,dy\,dz = \iint_\omega d\theta\,d\varphi \int_0^{\psi(\theta,\varphi)} F\rho^2 \cos\theta\,d\rho.$$

В частности, если ω соответствует всей единичной сфере, то последний интеграл равен

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\psi(\theta,\varphi)} F\rho^2\,d\rho.$$

Чтобы наглядно получить элемент объема в полярных координатах, рассечем пространство на малые части концентрическими шаровыми поверхностями с центром в полярном полюсе (точке $\rho = 0$) плоскостями, проходящими через ось z, и круговыми коническими поверхностями, имеющими своей осью ось z. Полученные ячейки имеют объем, равный с точностью до бесконечно малых высшего порядка $\Delta v \sim \rho^2 \cos\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$, где (ρ, θ, φ) — одна из точек ячейки.

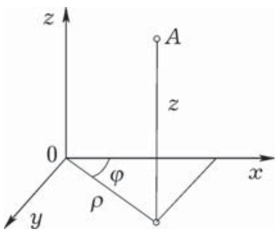

Рис. 12.19

З а м е ч а н и е. Операция (1) непрерывна на замыкании $\overline{\Lambda}$ области $\Lambda = \{0 < \rho < 1,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие $\Lambda \rightleftarrows \Lambda'$. Однако при этом нет взаимно однозначного соответствия точек границ Λ и Λ'.

Цилиндрические координаты (ρ, θ, φ) связаны с декартовыми координатами (x, y, z) равенствами (см. рис. 12.19)

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z. \tag{7}$$

Здесь ρ — расстояние от проекции точки $A = (x, y, z)$ на плоскость x, y до начала декартовой системы, а φ — угол радиус-вектора указанной проекции с осью x. Якобиан преобразования (7) равен

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho.$$

§ 12.18. Гладкая поверхность

Функция

$$z = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

непрерывно дифференцируемая на области $\Omega \ni (x,y)$, определяет в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z)$ гладкую поверхность S, заданную явно.

Непрерывная дифференцируемость f влечет существование касательной плоскости L к поверхности S в любой ее точке $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$, $(x_0,y_0) \in \Omega$ — коротко, в точке (x_0,y_0) (см. § 7.5).

Уравнение касательной L к S в точке (x_0,y_0), как мы знаем, имеет вид

$$(z - z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0), \qquad (\psi)_0 = \psi(x_0,y_0). \tag{2}$$

Здесь x, y, z — текущие координаты L. Числа

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \quad -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, \quad 1$$

пропорциональны соответствующим компонентам нормали к L (или, что все равно, к S) в точке (x_0,y_0). Из этой точки можно выпустить две единичные нормали к S:

$$\pm\,\mathbf{n}_0 = \left(\frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2}}, \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2}}, \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2}} \right), \tag{3}$$

соответствующие знакам $+$ и $-$ перед корнем.

Мы видим, что так как по условию производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны, то каждая из этих единичных нормалей непрерывно зависит от точки (x_0,y_0) поверхности S.

Сделаем общее определение, которое касается любых гладких поверхностей, заданных явно и неявно.

Гладкая поверхность S называется *ориентируемой*, если из любой ее точки можно выпустить единичную нормаль к ней, непрерывно зависящую от положения этой точки на S.

Мы видим, что гладкая поверхность, заданная явно, ориентируема. При этом существуют два способа ее ориентации — вектор $\mathbf{n}_0$ и вектор $-\mathbf{n}_0$ — каждый из них непрерывно зависит от положения точки (x_0,y_0,z_0) на S, из которой он выпущен.

Очевидно, и в общем случае если гладкая поверхность S ориентируема, т. е. если для нее существует закон, следуя которому каждой точке S соответствует выпущенный из нее единичный вектор $\mathbf{n}$, непрерывно зависящий от положения точки на S, то, заменив $\mathbf{n}$ на $-\mathbf{n}$, получим второй закон ориентации S.

Таким образом, если поверхность S ориентируема, то существуют две ее ориентации, называемые *противоположными ориентациями* S.

Если буква S означает ориентируемую поверхность, то ту же поверхность, ориентированную противоположно, удобно обозначить другим символом, например символом S_-. Можно еще исходную ориентированную поверхность обозначить через S_+, а ей противоположно ориентированную поверхность — через S_-.

Соответственно у S возникают две ее стороны.

Например, в случае поверхности (1) естественно рассматривать ее верхнюю сторону S_+, соответствующую единичной нормали к ней, образующей острый угол с осью z, и нижнюю сторону, соответствующую нормали, образующей тупой угол с осью z.

Но гладкая поверхность S может быть *задана параметрически* как геометрическое место точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ с координатами, определяемыми функциями

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v), \qquad (u, v) \in \Omega, \tag{4}$$

непрерывно дифференцируемыми на некоторой области Ω параметров (u, v). При этом предполагается выполнение добавочного условия

$$\left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right| > 0, \qquad (u, v) \in \Omega, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{r} = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k} \tag{6}$$

— радиус-вектор текущей точки S, а $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$ — его частные производные соответственно по u и v.

Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_u &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\chi}{\partial u}\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'_v &= \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\chi}{\partial v}\,\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{7}$$

то

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\chi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} & \dfrac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}\,\mathbf{i} + \frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}\,\mathbf{j} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\,\mathbf{k} \tag{8}$$

и

$$\left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right| = \sqrt{\left(\frac{D(\psi,\chi)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(\chi,\varphi)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right)^2}. \qquad (9)$$

Из записи (9) неравенства (5) следует, что для любой точки (u,v) нашей поверхности S одно из слагаемых под знаком корня отлично от нуля. Пусть в точке (u_0,v_0) будет

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)_0} \neq 0.$$

Тогда на основании теоремы о неявных функциях существует окрестность $\omega \subset \Omega$ точки (u_0,v_0), на которой отображение

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v), \qquad (u,v) \in \omega, \qquad (10)$$

обратимо:

$$u = \lambda(x,y), \qquad v = \mu(x,y), \qquad (x,y) \in g. \qquad (11)$$

Здесь λ и μ непрерывно дифференцируемы на $g \ni (x,y)$. Но тогда

$$z = \chi\big(\lambda(x,y), \mu(x,y)\big) = f(x,y), \qquad (x,y) \in g,$$

где $f(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Таким образом, для любой точки (x_0,y_0,z_0) гладкой поверхности S, заданной параметрически, существует шаровая поверхность с центром в этой точке, вырезывающая из S гладкий кусок, определяемый одним из равенств

$$\begin{aligned} z &= f_1(x,y), \qquad (x,y) \in g_1, \\ x &= f_2(y,z), \qquad (y,z) \in g_2, \\ y &= f_3(z,x), \qquad (z,x) \in g_3, \end{aligned} \qquad (12)$$

где функции f_1, f_2, f_3 непрерывно дифференцируемы.

Одно из этих представлений S во всяком случае имеет место. Но может быть и два или три.

Говорят еще, что гладкая поверхность, заданная параметрически, *локально проектируется* на одну из плоскостей x,y, y,z, z,x. Таким образом, некоторый кусок поверхности S в окрестности ее точки (x_0,y_0,z_0) представляет собой гладкую поверхность, описываемую явно. В любой его точке существует касательная плоскость к S.

Заметим, что любой вектор, исходящий из точки $(x_0,y_0,z_0) \in S$ и касающийся S, принадлежит касательной плоскости L к S в этой точке. Можно еще сказать, что L состоит из таких векторов. Но достаточно двух таких векторов (неколлинеарных), чтобы они определили плоскость L.

В качестве таких векторов можно взять векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_u &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\chi}{\partial u}\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'_v &= \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\chi}{\partial v}\,\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{13}$$

Оба они касаются S в точке (u,v). Они неколлинеарны, потому что $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq 0$.

Вектор $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ нормален к L, а векторы

$$\pm\mathbf{n} = \pm\frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right|}, \qquad (u,v) \in \Omega, \tag{14}$$

суть два единичных вектора нормали к S в точке $(u,v) \in \Omega$.

По условию вектор $\mathbf{r}$ имеет непрерывные производные по u, v, поэтому числитель в дроби (14) есть непрерывная вектор-функция, а знаменатель — непрерывная скалярная функция от (u,v), отличная от нуля. Но тогда единичная нормаль $\mathbf{n}$ есть непрерывная вектор-функция от (u,v), т.е. $\mathbf{n}$ непрерывно изменяется вместе с изменением точки (x,y,z) на S.

Это показывает, что вектор $\mathbf{n}$ ориентирует поверхность S. Вектор же $-\mathbf{n}$ ориентирует S противоположным образом.

Таким образом, гладкая поверхность, заданная параметрически, ориентируема.

§ 12.19. Площадь поверхности

Зададим в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, где определена прямоугольная система координат x, y, z, поверхность S, описываемую уравнением

$$z = f(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{G}. \tag{1}$$

Мы предполагаем, что G есть измеримая открытая область, а функция f имеет непрерывные частные производные

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

на $\overline{G}$ (см. § 7.11). Мы еще будем называть нашу поверхность *гладким куском*, проектируемым на плоскость $z = 0$.

Произведем разбиение G на конечное число измеримых (в двумерном смысле) частей $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_N$, пересекающихся попарно разве что по своим границам. Пусть (x_j, y_j) — произвольная точка G_j, $j = 1, \ldots, N$. Ей соответствует точка $P_j \in S$ с координатами (x_j, y_j, f_j), где $f_j = f(x_j, y_j)$. В точке P_j проведем плоскость L_j, касательную к S.

Обозначим через e_j кусок L_j $(e_j \subset L_j)$, проекцией которого на плоскость $z=0$ служит множество G_j. Площадь e_j обозначим через $|e_j|$.

По определению *площадью поверхности* S называется предел

$$|S| = \lim_{\max d(G_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} |e_j|.$$

Косинус острого угла нормали $\mathbf{n}_j$ к S в точке P_j с осью z (см. § 7.5, (6)) равен $\cos(\mathbf{n}_j, z) = 1\big/\sqrt{1+p_j^2+q_j^2}$, где квадратный корень взят со знаком $+$, а p_j, q_j обозначают результаты подстановки в p, q значений x_j, y_j. Мера G_j равна $|G_j| = |e_j|\cos(\mathbf{n}_j, z)$, $|e_j| = |G_j|\sqrt{1+p_j^2+q_j^2}$, $j=1,\ldots,N$, и

$$|S| = \lim_{\max d(G_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} |e_j| = \lim_{\max d(G_j)\to 0} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{1+p_j^2+q_j^2}\,|G_j| = \iint_G \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy. \qquad (2)$$

Мы получили формулу площади поверхности, заданной в явном виде (1).

Покажем, как преобразуется интеграл (2), если сделать в нем подстановку

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v), \qquad (u,v) \in \overline{\Omega}, \qquad (3)$$

приводящую во взаимно однозначное соответствие измеримые области Ω и G в предположении, что φ и ψ непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$ и якобиан

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0 \quad \text{на} \quad \Omega. \qquad (4)$$

Положим $z = f(\varphi,\psi) = \chi(u,v)$. На основании теоремы о замене переменных в кратном интеграле получим равенство (см. § 7.26, (4)).

$$\iint_G \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \iint_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}\right)^2+\left(\frac{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}\right)^2}\,\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv,$$

из которого следует, что площадь поверхности S выражается формулой

$$|S| = \iint_\Omega \sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2}\,du\,dv = \iint_\Omega |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv. \qquad (5)$$

Отметим равенство

$$|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|^2 = EF - G^2,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$
$$G = \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

Формула (5) может служить основанием для определения понятия площади поверхности, заданной параметрически, не обязательно проектирующейся в целом на одну из плоскостей координат.

Гладкая поверхность S может быть задана параметрически при помощи параметров (u, v):

$$\begin{gathered}\mathbf{r} = \varphi(u,v)\mathbf{i} + \psi(u,v)\mathbf{j} + \chi(u,v)\mathbf{k} \\ (|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| > 0,\ (u,v) \in \Omega \rightleftarrows S),\end{gathered} \tag{6}$$

где Ω — измеримая область плоскости параметров u, v, а φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные на $\overline{\Omega}$. Знак $\rightleftarrows$ указывает на тот факт, что равенство (6) устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками Ω и S.

Так как Ω — измеримое множество, то оно ограничено и потому имеет непустую границу γ. Она отображается при помощи равенства (6) на край $\Gamma = \overline{S} - S$ нашей поверхности. Мы не требуем, чтобы отображение γ на Γ было взаимно однозначным. Имеется много важных примеров, когда этого нет (см. примеры ниже).

По определению назовем *площадью* S (или $\overline{S}$) величину

$$|S| = \iint_{\Omega} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\, du\, dv. \tag{7}$$

Перечислим ряд свойств интеграла (7), показывающих естественность введенного определения.

1) Величина $|S|$ инвариантна относительно допустимых преобразований параметров, т. е. если

$$u = \lambda(u', v'), \qquad v = \mu(u', v'), \qquad (u', v') \in \Omega' \rightleftarrows \Omega,$$

где λ, μ непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}'$, и

$$\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \neq 0, \qquad (u', v') \in \Omega',$$

то

$$\iint_{\Omega} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| \, du \, dv =$$
$$= \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)} \right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)} \right)^2 \right)^{1/2} du \, dv =$$
$$= \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{D(x,y)}{D(u',v')} \right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u',v')} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{D(z,x)}{D(u',v')} \right)^2 \right)^{1/2} \left| \frac{D(u',v')}{D(u,v)} \right| \left| \frac{D(u,v)}{D(u',v')} \right| du' \, dv' =$$
$$= \iint_{\Omega} |\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}| \, du' \, dv'.$$

2) Пусть поверхность S проектируется на плоскость $z = 0$. Точнее, пусть равенства

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v), \qquad \Omega \rightleftarrows G \ni (x,y), \tag{8}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между измеримыми областями Ω и G с якобианом

$$\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \neq 0. \tag{9}$$

Тогда для функции $z = f(x,y) = \chi(u(x,y), v(x,y))$, $(x,y) \in G$, где $u(x,y)$, $v(x,y)$ — решения уравнений (8), в случае, если она имеет не только непрерывные (как это следует из теоремы о неявных функциях), но и равномерно непрерывные на G производные $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, имеет место равенство

$$|S| = \iint_{\Omega} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| \, du \, dv = \iint_{G} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy. \tag{10}$$

Оно уже было доказано выше (см. (5)).

Таким образом, новое определение площади поверхности совпадает с исходным определением, если имеет место ситуация, возможная для последнего.

Заметим, что если бы свойство равномерной непрерывности p и q на G не соблюдалось, а p и q были только непрерывными и ограниченными на G, то все равно выполнялось бы равенство (10), потому что все условия для замены переменных в интеграле и в этом случае соблюдаются.

Больше того, если p и q непрерывны, но не ограничены на G (в то время как функции φ, ψ имеют непрерывные частные производные на $\overline{\Omega}$), то все равно равенство (10) остается верным, если понимать интеграл в его правой части в несобственном смысле (см. ниже пример 1).

Выражение $dS = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv$ называется *дифференциальным элементом поверхности* S. Площадь части S, соответствующей изменению u от u до $u+du$ и v от v до $v+dv$, равна

$$\Delta S = \int_u^{u+du}\int_v^{v+dv} |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\,du\,dv = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|\Big|_{\substack{u=\xi\\ v=\eta}}\,du\,dv =$$
$$= (|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| + \varepsilon)\,du\,dv = dS + o(du\,dv), \qquad du, dv \to 0.$$

Во втором равенстве этой цепи применена теорема о среднем, в третьем в выражении $|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|$ заменена точка (ξ,η) на (u,v) за счет прибавления слагаемого ε, которое в силу непрерывности функции $|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|$ стремится к нулю при $du, dv \to 0$.

Таким образом, dS можно определить как (единственную!) величину вида $A\,du\,dv$, где A не зависит от du и dv, отличающуюся от ΔS на $o(du\,dv)$, $du, dv \to 0$.

Пример 1. *Площадь шаровой поверхности.* Уравнения

$$x = \cos\theta\,\cos\varphi, \quad y = \cos\theta\,\sin\varphi, \quad z = \sin\theta, \tag{11}$$
$$|\dot{\mathbf{r}}_\theta \times \dot{\mathbf{r}}_\varphi| = \cos\theta, \quad \Omega = \{0 < \varphi < 2\pi,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2\},$$

определяют гладкую поверхность S — часть шара радиуса 1 с центром в нулевой точке, из которого выброшен меридиан $\varphi = 0$, $|\theta| \leqslant \pi/2$. Условия (6) здесь выполняются. В частности, имеет место взаимно однозначное соответствие $\Omega \rightleftarrows S$. Однако уравнения (11) не устанавливают взаимно однозначного соответствия между $\gamma = \overline{\Omega} - \Omega$ и $\Gamma = \overline{S} - S$. Край Γ поверхности S есть указанный выше меридиан. Каждому из его концов в силу равенств (11) соответсвует бесконечное множество точек γ, заполняющих противоположные стороны Ω, а каждой прочей точке Γ соответствует пара точек γ, лежащих на других противоположных сторонах γ.

Поверхность единичного шара есть замыкание $\overline{S}$ поверхности S, описанной параметрически уравнениями (11). На основании формулы (7)

$$|\overline{S}| = |S| = \iint_\Omega |\cos\theta|\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\cdot 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = 4\pi.$$

Заметим, что площадь поверхности нашего единичного шара S можно рассматривать как сумму площадей восьми конгруэнтных кусков, вырезаемых из $\overline{S}$ координатными плоскостями. Один из них σ, находящийся в положительном октанте, описывается непрерывной функцией $z = +\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x, y \geqslant 0$, $x^2+y^2 \leqslant 1)$ с неограниченными частными производными

$$p = -x/\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad q = -y/\sqrt{1-x^2-y^2}\,.$$

Мы уже отмечали, что в этом случае можно вычислить площадь σ по формуле (2) площади поверхности в декартовых координатах, понимая, однако, интеграл в несобственном смысле (см. конец § 13.13, замечание 1):

$$|\sigma| = \lim_{\rho\to 1}\iint_{x^2+y^2\leqslant\rho^2<1}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \\ = \lim_{\rho\to 1}\iint_{x^2+y^2\leqslant\rho^2<1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad x>0, \quad y>0.$$

Формулу для элемента площади сферической поверхности радиуса R можно усмотреть из геометрических соображений. Сеть близких друг к другу меридианов и параллелей разрезает нашу шаровую поверхность S на элементарные частицы. Площадь ΔS такой частицы, близкой к точке $A=(R,\theta,\varphi)$, $\theta>0$, может быть, очевидно, оценена следующим образом:

$$R\cos(\theta+d\theta)\,d\varphi\,R\,d\theta < \Delta S < R\cos\theta\,d\varphi\,R\,d\theta.$$

Отсюда $(\theta<\theta'<\theta+d\theta)$

$$\Delta S = R^2\cos\theta'\,d\varphi\,d\theta = R^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta + d\varphi\,o(d\theta), \qquad d\theta\to 0.$$

П р и м е р 2. *Площадь поверхности тора*

$$\begin{gathered} x=(b+a\cos\theta)\cos\varphi, \qquad y=a\sin\theta, \qquad 0<a<b, \\ z=(b+a\cos\theta)\sin\varphi, \qquad |\dot{\mathbf{r}}_u\times\dot{\mathbf{r}}_v| = a(b+a\cos\theta)>0. \end{gathered} \tag{12}$$

Чтобы воспользоваться приведенными выше рассуждениями, придется эту поверхность рассматривать как замыкание $\overline{T}$ гладкой поверхности T, описываемой уравнениями (12), где (θ,φ) пробегает область $\Omega=\{0<\theta,\ \varphi<2\pi\}$.

В этом случае соотношения (6) и сопровождающие их условия непрерывной дифференцируемости будут выполняться, если считать $T=S$, поэтому

$$|\overline{T}| = |T| = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}a(b+a\cos\theta)\,d\theta = 2\pi a(2\pi b+0) = 4\pi^2 ab.$$

П р и м е р 3. Рассмотрим круговой цилиндр радиуса R и высоты H. Его боковую поверхность обозначим через σ, а ее площадь через $|\sigma|$. Разрежем σ равностоящими плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра, так, чтобы соседние плоскости находились на расстоянии, равном H/N^3. Эти плоскости пересекают σ по окружностям $C_0, C_1, \ldots, C_{N^3}$, которые мы перенумеровали по порядку снизу вверх по направлению оси. Окружность C_0 разделим равноотстоящими точками на $2N$ равных частей. Эти точки мы тоже перенумеруем в порядке их следования по C_0, кроме того, через каждую из них проведем образующую нашей цилиндрической поверхности σ, которая пересечет окружность C_k в некоторых точках. Полученные точки на C_k мы тоже занумеруем, руководствуясь правилом, что точки всех C_k, лежащие на одной и той же образующей, имеют один и тот же номер. Теперь на окружностях C_k с четными k оставим только точки с четными номерами, а на окружностях C_k с нечетными k — только точки с нечетными номерами. В результате на поверхности σ нанесено некоторое конечное число точек. Каждые три соседние такие точки являются вершинами некоторого треугольника Δ, а вся совокупность последних образует некоторую многогранную поверхность σ_N, вписанную в σ. Чтобы не было недоразумений, отметим, что две из любых трех точек суть соседние точки, лежащие на C_k, а третья лежит на C_{k+1} или C_{k-1}, и образующая, к которой она принадлежит,находится между (в меньшем центральном углу) образующими, к которым принадлежат первые две точки.

Число треугольников Δ, очевидно, равно $2N \cdot N^3 = 2N^4$, площадь же каждого Δ равна

$$|\Delta| = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{N} R \sqrt{R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{N}\right)^2 + \left(\frac{H}{N^3}\right)^2} \sim$$

$$\sim \frac{\pi}{N} RR \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 > cN^{-3}, \quad N \to \infty, \quad c > 0.$$

Но тогда

$$|\sigma_N| > c_1 N^4 N^{-3} = c_1 N,$$

несмотря на то, что при $N \to \infty$ диаметр Δ стремится к нулю.

Мы видим, что площадь поверхности нельзя определить как предел площади вписанной в нее многогранной поверхности со стремящимся к нулю максимальным диаметром ее граней. Такое определение неэффективно даже для очень простых поверхностей.

Глава 2

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО

§ 2.1. Рациональные и иррациональные числа

В этой главе мы даем обзор основных свойств (аксиом) действительных чисел. Это уместно, потому что среди этих свойств имеются такие, с которыми мы не имели дела в арифметике и школьном курсе алгебры, где рассматриваются операции над постоянными числами. Между тем эти свойства обнаруживаются при рассмотрении *переменных чисел*, или, как говорят по традиции, *переменных величин*.

При изучении функций приходится привлекать свойства чисел во всей их полноте, помимо тех свойств, с которыми мы хорошо знакомы из школьной математики.

Целые числа

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

можно складывать, вычитать и умножать друг на друга, получая снова целые числа.

Рациональные числа будем записывать в виде p/q, где p и q целые, $q \neq 0$.

В практических вычислениях вполне достаточно оперировать только рациональными числами. Однако числа нужны еще для целей измерения геометрических и физических величин (длин отрезков, площадей, объемов, температур и т.д.). Мы здесь имеем в виду не практическое приближенное измерение этих величин, а точное (теоретическое) выражение их числами. Для этих целей рациональных чисел уже недостаточно. Рассмотрим, например, отрезок, представляющий собой гипотенузу прямоугольного треугольника с равными катетами длины единица. Если допустить, что длина этого отрезка выражается положительной рациональной дробью p/q, которую будем считать несократимой, то площадь построенного на нем квадрата равна p^2/q^2, а площадь каждого из квадратов, построенных на катетах, равна 1. Тогда в силу теоремы Пифагора получим равенство $p^2 = 2q^2$. Правая его часть есть целое число, делящееся на 2, но тогда левая должна быть четной, а вместе с ней и p. Отсюда следует, что левая часть делится на 4, но тогда q^2 делится на 2, откуда также q делится на 2. Итак, p и q имеют общий множитель 2, что противоречит предположению, что дробь p/q взята несократимой. Таким образом, имеются отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Их называют *несоизмеримыми с единицей*. Чтобы выразить их длины *), появилась необходимость в новых числах, называемых *иррациональными.* Так возникло число $\sqrt{2}$, выражающее длину гипотенузы рассмотренного треугольника.

Существуют различные способы введения иррациональных чисел. Покажем, как можно ввести их при помощи бесконечных десятичных дробей.

Зададим произвольное положительное рациональное число p/q. Превратим его по известным правилам арифметики в десятичную дробь. В результате получим

$$\begin{array}{l|l} \underline{p} & \;\; q \\ \beta_0 & \overline{\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots}\,, \\ \;\;\underline{\;\;\;}\; & \\ \;\;\beta_1 & \\ \;\;\ldots & \end{array} \tag{2}$$

где α_0 — целое неотрицательное число, а α_k, $k = 1, 2, \ldots$, — цифры.

Будем писать

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots = +\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \tag{3}$$

и называть десятичную дробь в правой части (3) *десятичным разложением числа* p/q.

Легко показать, что десятичное разложение положительного рационального числа не зависит от способа задания последнего, иначе говоря, при замене в (2) p и q соответственно на p_1 и q_1, где $pq_1 = p_1q$, получается в точности то же десятичное разложение $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$

Будем считать, что дробь p/q несократимая.

Хорошо известно, что если знаменатель дроби $\frac{p}{q}$ имеет вид $q = 2^s 5^l$, где s и l — неотрицательные целые числа, то ее десятичное разложение есть конечная десятичная дробь:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m, \tag{4}$$

которая, в частности, может оказаться натуральным числом ($p/q = \alpha_0$). Если формально приписать справа к этой десятичной дроби бесконечно много нулей, то она превращается в бесконечную десятичную дробь:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m 000 \ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m(0). \tag{5}$$

Мы называем ее *периодической десятичной дробью с периодом* 0, потому что в ней цифра 0 периодически повторяется.

---

*) A priori длина и положительное число — разные понятия, но между ними имеется тесная связь, называемая *изоморфизмом* (см. далее § 2.5).

Пользуются также и другим представлением конечной десятичной дроби (4) в виде периодической десятичной дроби с периодом 9:

$$\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_m = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}(\alpha_m-1)99\ldots =$$
$$= \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}(\alpha_m-1)(9), \qquad \alpha_m>0, \qquad (6)$$

хотя оно и не возникает в процессе (2).

Пусть теперь знаменатель положительной дроби p/q не имеет вид 2^s5^l. Тогда процесс (2) бесконечный — на любом его шаге возникает положительный остаток. Каждый остаток меньше q, и потому после того, как цифры числа p снесены, среди первых q остатков окажется по крайней мере два равных между собой. Но как только возникает остаток, который уже был прежде, процесс становится повторяющимся — *периодическим*. Поэтому десятичное разложение произвольного положительного рационального числа p/q имеет вид

$$\frac{p}{q} = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_m\gamma_1\ldots\gamma_s\gamma_1\ldots\gamma_s\ldots = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_m(\gamma_1\ldots\gamma_s). \qquad (7)$$

Разложения (5) или (6) можно рассматривать как частные случаи (7). Разложение вида (7) называется *положительной десятичной периодической дробью* с периодом, представляющим собой группу цифр $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s$.

Ниже приводятся частные примеры положительных бесконечных десятичных периодических дробей:

$$\frac{1}{6} = 0,166\ldots = 0,1(6), \qquad \frac{1}{7} = 0,(142857),$$
$$\frac{2}{9} = 0,22\ldots = 0,(2), \qquad \frac{7}{99} = 0,0707\ldots = 0,(07).$$

В первом примере периодом является цифра 6, во втором — группа цифр 142857, в четвертом — группа цифр 07.

У положительной десятичной дроби хотя бы одно из чисел $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ не равно нулю.

Итак, *каждому положительному рациональному числу p/q при помощи процесса* (2) *ставится в соответствие положительная десятичная периодическая дробь с периодом, отличным от* 9 *).

При других вычислениях могут получаться десятичные дроби с периодом 9, но при желании их затем можно записать через соответствующие им конечные десятичные дроби, или, что все равно, десятичные дроби с периодом 0.

---

*) Если допустить, что процесс (2) привел к десятичной дроби с периодом 9, то, начиная с некоторого этапа процесса, остатки γ_k, γ_{k+1} равны между собой, а в частном получаются цифры 9. Но тогда $10\gamma_k = 9q+\gamma_{k+1}$, и так как $\gamma_k=\gamma_{k+1}$, то $\gamma_k = q$. Но этого не может быть, так как $\gamma_k<q$.

Верно и обратное утверждение: *каждая положительная десятичная периодическая дробь, если она не имеет периода 9, может быть получена при помощи процесса* (2) *из некоторой обыкновенной положительной дроби p/q (единственной).*

Например, если дробь $\frac{103}{330}$ подвергнуть процессу (2), то получим десятичную периодическую дробь $\frac{103}{330} = 0,3(12)$. Обратно, эта последняя превращается в исходную дробь:

$$x = 0,3(12), \qquad 10x = 3,(12), \qquad 1000x = 312,(12),$$
$$1000x - 10x = 312 - 3, \qquad x = \frac{103}{330}.$$

Отрицательному рациональному числу $-p/q$ приводят в соответствие бесконечное десятичное разложение положительного числа p/q, взятое со знаком $-$.

Итак, имеется взаимно однозначное соответствие*) $\pm p/q = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ между не равными нулю рациональными числами и бесконечными десятичными не равными нулю периодическими дробями. Каждому не равному нулю рациональному числу соответствует при помощи указанного выше процесса одно и только одно его десятичное бесконечное периодическое разложение, не имеющее периода 9. Обратно, любое такое разложение соответствует при помощи указанного процесса некоторому не равному нулю рациональному числу (единственному).

Числу нуль (оно тоже рациональное) естественно привести в соответствие разложение $0 = \pm 0{,}00\ldots = 0{,}00\ldots$

Кроме периодических десятичных дробей существуют непериодические, например $0{,}1010010001\ldots$; $0{,}121122111222\ldots$

Вот еще пример: если извлекать корень квадратный из 2 по известному правилу, то получим определенную бесконечную непериодическую десятичную дробь $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$ Она определена в том смысле, что любому натуральному числу k соответствует определенная цифра α_k k-го разряда числа $\sqrt{2}$, однозначно вычисляемая согласно правилу извлечения квадратного корня.

Математический анализ дает много путей вычисления числа π с любой наперед заданной точностью. Это приводит к вполне определенному бесконечному десятичному разложению π, которое, как оказывается, не является периодическим.

Дадим теперь определение иррационального числа, пока чисто формальное. *Иррациональным числом* называется произвольная бесконечная непериодическая дробь

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots, \tag{8}$$

---

*) Если каждому элементу x множества A соответствует определенный элемент y множества B так, что любой элемент $y \in B$ соответствует одному и только одному $x \in A$, то говорят, что этим установлено одно-однозначное или взаимно однозначное соответствие ($x \rightleftarrows y$) элементов A и B.

где α_0 — целое неотрицательное число, а α_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — цифры, знак же равенства = выражает, что мы обозначили правую часть (8) через a. Впрочем, удобно говорить, что правая часть (8) есть десятичное разложение числа a.

Рациональные и иррациональные числа называются *действительными* (или *вещественными*) *числами.*

Из сказанного следует, что всякое не равное нулю действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби (8). Если оно рационально, то его десятичное разложение есть бесконечная десятичная периодическая дробь. В противном случае согласно нашему определению выражение (8) само определяет иррациональное число.

Число a, где не все α_k равны нулю, называется *положительным* или *отрицательным* в зависимости от того, будет ли в (8) фигурировать $+$ или $-$; при этом, как обычно, $+$ будем позволять себе опускать.

Действительные числа определены пока формально, надо еще определить арифметические операции над ними, ввести для них понятие $>$ и проверить, что эти операции и понятие $>$ согласуются с уже имеющимися соответствующими операциями и понятием $>$ для рациональных чисел, а также удовлетворяют свойствам, которые мы предъявляем к числам.

Определение понятия $>$ дается в § 2.2, а определения арифметических операций в § 2.3. В § 2.4 формулируются и доказываются основные свойства действительных чисел, распределенные на пять групп I–V. Первые три группы содержат известные свойства, которыми мы руководствуемся при арифметических вычислениях и решениях неравенств. Группа IV составляет одно свойство (Архимеда). Наконец, группа V также состоит из одного свойства: существования предела у неубывающей ограниченной последовательности. В сущности, для дальнейшего нам будет важно только знать, что действительные числа (десятичные дроби) суть объекты, для которых определены понятие $>$ и арифметические операции, удовлетворяющие свойствам I–V. Поэтому может быть и такой способ чтения книги, когда читатель систематически читает крупный шрифт, только более или менее ознакомившись с мелким шрифтом, где даются доказательства свойств I–V.

Из свойств I–V можно получить логически все остальные свойства числа.

Существует аксиоматический подход к определению действительного числа, заключающийся в том, что числами называются некоторые объекты (вещи) $a, b, c, \ldots,$ удовлетворяющие свойствам I–V. При таком подходе свойства I–V называются *аксиомами числа.*

Аксиоматическое построение понятия числа на первый взгляд может показаться более простым. Однако здесь возникает вопрос, совместны ли аксиомы I–V? Чтобы доказать их совместность, появляется необходимость построить формальные символы, для которых можно определить арифметические операции и понятие $>$, и проверить, что они удовлетворяют аксиомам I–V. Такими символами как раз и могут служить бесконечные десятичные дроби.

§ 2.2. Определение неравенства

Зададим два числа $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, $b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2\ldots$, определяемых бесконечными десятичными дробями, не имеющими периода 9. Будем считать, что они равны между собой тогда и только тогда, когда их знаки одинаковы и

$$\alpha_k = \beta_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Для положительных a и b по определеннию $a < b$, или, что все равно, $b > a$, если $\alpha_0 < \beta_0$ или если найдется такой индекс (целое неотрицательное число) l, что $\alpha_k = \beta_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, l$, и $\alpha_{l+1} < \beta_{l+1}$.

Однако верно утверждение, независимо от того, будут ли дроби a и b иметь период 9 или нет: *если $\alpha_0 < \beta_0$ или, общée, если $\alpha_k = \beta_k$, $k = 0, \ldots, s-1$, $\alpha_s < \beta_s$, то выполняется неравенство $a \leqslant b$.*

В самом деле,

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}\alpha_s\alpha_{s+1}\ldots \leqslant \alpha_0, \alpha_1 \ldots (\alpha_s + 1) \leqslant \\ \leqslant \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_s\beta_{s+1}\beta_{s+2}\ldots = b.$$

По определению $a > 0$ или $a < 0$ в зависимости от того, будет ли a положительным или отрицательным; далее, по определению $a < b$, если $a < 0$, $b \geqslant 0$ или если $a, b < 0$ и $|a| > |b|$.

Если число $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, то по определению $-a = \mp\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ и абсолютная величина $|a| = +\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ Таким образом,

$$|-a| = |a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a \leqslant 0. \end{cases}$$

Приведенные определения согласованы с соответствующими определениями для рациональных чисел.

§ 2.3. Основная лемма. Определение арифметических действий

Пусть каждому неотрицательному целому числу (индексу) n в силу некоторого закона приведено в соответствие число x_n. Совокупность

$$x_0, x_1, x_2, \ldots \tag{1}$$

называется *последовательностью* (чисел). Отдельные числа x_n последовательности (1) называются ее *элементами*. Элементы x_n и x_m при $n \neq m$ считаются отличными как элементы данной последовательности, хотя как числа они могут быть равны между собой, т.е. может быть $x_n = x_m$. Последовательность называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $x_k \leqslant x_{k+1}$ ($x_k \geqslant x_{k+1}$) для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

Будем говорить, что последовательность (1) *ограничена сверху* (*числом M*), если существует целое число M такое, что $x_k \leqslant M$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

Если числа x_k последовательности (1) целые, то будем говорить, что она *стабилизируется к числу* ξ, если найдется такое k_0, что $x_k = \xi$ для всех $k > k_0$.

Очевидно, что если последовательность целых чисел не убывает и ограничена сверху числом M, то она стабилизируется к некоторому целому числу $\xi \leqslant M$.

Рассмотрим теперь последовательность неотрицательных десятичных дробей

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_{10}, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots, \\
a_2 &= \alpha_{20}, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots, \\
a_3 &= \alpha_{30}, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Правые части в (2) образуют таблицу (*бесконечную матрицу*).

Будем говорить, что последовательность (2) *стабилизируется к числу* $a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$, и писать

$$a_n \rightrightarrows a, \tag{3}$$

если k-й столбец таблицы (2) стабилизируется к γ_k, каково бы ни было $k = 0, 1, 2, \ldots$ При этом, очевидно, автоматически оказывается, что γ_0 целое неотрицательное, а γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, — цифры.

З а м е ч а н и е. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, где

$$
\begin{aligned}
a_{2k} &= 1, \underbrace{0\ldots0}_{k\ \text{раз}}11\ldots, \qquad k = 1, 2, \ldots, \\
a_{2k+1} &= 0, \underbrace{9\ldots9}_{k\ \text{раз}}00\ldots, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
$$

не стабилизируется. Из § 3.1, где вводится понятие предела, будет ясно, что данная последовательность имеет предел, равный 1 ($a_n \to 1$). Итак, последовательность десятичных дробей может иметь предел и в то же время не стабилизироваться. Однако из того, что $a_n \rightrightarrows a$, следует, что $a_n \to a$ (см. § 3.1).

Для произвольного числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ введем его *n-ю срезку* $a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1\ldots\alpha_n$, представляющую собой конечную десятичную дробь. Мы считаем, что операции с конечными десятичными дробями читателю известны из курса арифметики.

Очевидно,

$$a^{(n)} \leqslant a^{(n+1)}$$

и еще

$$a^{(n)} + 10^{-n} \geqslant a^{(n+1)} + 10^{-(n+1)},$$

потому что

$$a^{(n+1)} + 10^{-(n+1)} = \alpha_0, \alpha_1\ldots\alpha_n(\alpha_{n+1} + 1) \leqslant a^{(n)} + 10^{-n}.$$

Л е м м а 1. *Если неубывающая последовательность* (2) *десятичных дробей, не имеющих периода* 9, *ограничена сверху числом* M, *то она стабилизируется к некоторому числу* a, *удовлетворяющему неравенствам*

$$a_n \leqslant a \leqslant M, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Считаем, что исходные дроби a_n и $M = m_0, m_1 m_2 \ldots$ не имеют периода 9, но все же может оказаться, что дробь $a = \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \ldots$ имеет период 9. Столбцы матрицы (2) с номерами, не большими k, стабилизируются соответственно к

$$\gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_k \leqslant M^{(k)} \leqslant M. \tag{5}$$

В самом деле, в условиях леммы целые числа α_{n0} не убывают и ограничены сверху числом m_0 ($\alpha_{n0} \leqslant m_0 \leqslant M$), поэтому они стабилизируются к некоторому целому неотрицательному числу $\gamma_0 \leqslant M^{(0)}$. Пусть теперь для любого k установлено, что столбцы матрицы (2) с номерами, не большими k, стабилизируются соответственно к $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ и верны неравенства (5). Тогда это утверждение верно для $k+1$.

В самом деле, раз десятичные разложения чисел a_n для $n > n_1$ при достаточно большом n_1 имеют вид

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k \alpha_{n\ k+1} \alpha_{n\ k+2} \ldots \leqslant M$$

и a_n не убывает, то цифры $\alpha_{n\ k+1} (\leqslant 9)$ не убывают и, следовательно, стабилизируются при $n \geqslant n_2 > n_1$, где n_2 достаточно велико, к некоторой цифре γ_{k+1}. При этом $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_{k+1} \leqslant a_n^{(k+1)} \leqslant M^{(k+1)} (n \geqslant n_2)$, и мы доказали (5) для любого k и тот факт, что $a_n \rightrightarrows a$, где $a = \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \ldots$ Отметим, что $a_n^{(k)} \leqslant a^{(k)} \leqslant M^{(k)}$ для любого k, поэтому $a_n \leqslant a \leqslant M$, т.е. выполняется (4). В самом деле, если, например, $a^{(k)} = M^{(k)}$ для любого k, то цифры одинаковых разрядов равны между собой и $a = M$. Если же $a^{(k)} < M^{(k)}$ для некоторого k, то $a \leqslant a^{(k)} + 10^{-k} \leqslant M^{(k)} \leqslant M$, т.е. $a \leqslant M$. Аналогично доказывается, что $a_n \leqslant a$.

Лемма 1 имеет фундаментальный характер. Она служит основой для доказательства свойства V действительных чисел (см. ниже). На ее основе также даются теоретические определения арифметических действий над бесконечными десятичными дробями.

Сумма, произведение, разность и частное чисел a и b определяем следующим образом:

$$a^{(n)} + b^{(n)} \rightrightarrows a + b, \tag{6}$$

$$(a^{(n)} b^{(n)})^{(n)} \rightrightarrows ab, \tag{7}$$

$$a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) \rightrightarrows a - b, \qquad a > b > 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}\right)^{(n)} \rightrightarrows \frac{a}{b}\,. \tag{9}$$

Выражения слева в (6)–(9) не убывают при возрастании n: благодаря этому и ограниченности их сверху они на основании доказанной леммы стабилизируются к определенным числам, которые обозначаются соответственно через $a + b$, ab, $a - b$, a/b. Надо иметь в виду, что $a^{(n)}$ не убывает при возрастании n, а $b^{(n)} + 10^{-n}$ не возрастает; кроме того, верны неравенства

$$\begin{gathered}
(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} \leqslant (\alpha_0 + 1)(\beta_0 + 1),\\
a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) \leqslant (\alpha_0 + 1),\\
\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}\right)^{(n)} \leqslant \frac{\alpha_0 + 1}{\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_s}
\end{gathered}$$

(где s такое, что $\beta_s > 0$), показывающие, что левые их части ограничены.

Положим еще (пока для $a \geqslant 0$, $b > 0$)

$$0 + a = a \pm 0 = a, \qquad a \cdot 0 = 0 \cdot a = a - a = \frac{0}{b} = 0. \tag{10}$$

Мы определили для неотрицательных чисел a, b их сумму, разность, произведение и частное, предполагая в случае разности, что $a \geqslant b$, и в случае частного, что $b > 0$. Эти определения распространяются обычными способами на числа a и b произвольных знаков. Например, если $a, b \leqslant 0$, то полагаем

$$a + b = b + a = -(|a| + |b|).$$

Если же a и b — числа разных знаков и $|a| \geqslant |b|$, то полагаем

$$a + b = b + a = \pm||a| - |b||,$$

где выбирается знак, одинаковый со знаком a. В частности, $a + (-a) = 0$.

Подобные правила можно было бы привести для остальных арифметических действий — они хорошо известны.

§ 2.4. Основные свойства действительных чисел

Эти свойства могут быть доказаны на основании определений действительных чисел, понятий $=$, $>$, < 0 и арифметических операций над ними. С другой стороны, эти свойства можно рассматривать как аксиомы действительного числа, непротиворечивые (совместные), потому что они верны для бесконечных десятичных дробей.

I. Свойства порядка.

I_1. Для каждой пары действительных чисел a и b имеет место одно и только одно соотношение:

$$a = b, \qquad a > b, \qquad a < b.$$

I_2. Из $a < b$ и $b < c$ следует $a < c$ (транзитивное свойство знака $<$).

I_3. Если $a < b$, то найдется такое число c, что $a < c < b$.

II. Свойства действий сложения и вычитания*).

II_1. $a + b = b + a$ (переместительное или коммутативное свойство).

II_2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательное или ассоциативное свойство).

II_3. $a + 0 = a$.

II_4. $a + (-a) = 0$.

II_5. Из $a < b$ следует, что $a + c < b + c$ для любого c.

III. Свойства действий умножения и деления**).

III_1. $ab = ba$ (переместительное или коммутативное свойство).

III_2. $ab(c) = a(bc)$ (сочетательное или ассоциативное свойство).

---

*) При аксиоматическом подходе надо еще добавить: каждой паре чисел a, b в силу некоторого закона соответствует число $a + b$, называемое их *суммой*; при этом выполняются II_1–II_5. Тогда II_3 и II_4 надо видоизменить: существует число 0 (нуль) такое, что $a + 0 = a$ для всех a, так же как существует для каждого a число $-a$ такое, что $a + (-a) = 0$. Единственность нуля может быть выведена логически из рассматриваемых аксиом: допущение существования другого нуля $0'$ влечет, что $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$. Выводится также из аксиом существование разности $a - b$, т.е. числа, которое надо добавить к b, чтобы получить a. Это число есть $a + (-b)$, потому что $a + (-b) + b = a + 0 = a$. Оно единственно, потому что если $b + c = b + c'$, то $c = (-b) + b + c = (-b) + b + c' = c'$.

**) При аксиоматическом подходе надо добавить: каждой паре a, b в силу определенного закона соответствует число ab, называемое *произведением* a и b. При этом выполняются свойства III_1–III_6. Надо еще видоизменить III_3 и III_4: существует число 1 (единица), отличное от 0 и такое, что $a \cdot 1 = a$ для всех a; существует для любого $a \neq 0$ число $1/a$ такое, что $a \cdot (1/a) = 1$. Единственность единицы выводится логически из рассматриваемых аксиом так же, как существование и единственность частного a/b $(b \neq 0)$, т.е. числа, которое надо умножить на b, чтобы получить a. Вывод вполне аналогичен выводу в сноске к II, где 0 надо заменить на 1 и действие сложения на умножение. При этом автоматически $1 > 0$; ведь если допустить, что $1 < 0$, то (см. II_4, II_5) $0 = 1 + (-1) < -1$ и (см. III_6) $1(-1) < 0(-1)$, т.е. (см. III_3) $-1 < 0$, и мы получим противоречие: $-1 < 0 < -1$. Надо учесть, что

$$0 \cdot (-1) = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0(-1 + 1 + 1) =$$
$$= 0 \cdot (0 + 1) = 0 \cdot 1 = 0.$$

III_3. $a \cdot 1 = a$.

III_4. $a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$.

III_5. $(a+b)c = ac + bc$ (распределительный или дистрибутивный закон).

III_6. Из $a < b$, $c > 0$ следует $ac < bc$.

IV. Архимедово свойство.

Каково бы ни было число $c > 0$, существует натуральное $n > c$. В самом деле, если $c = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, то можно взять $n = \alpha_0 + 2$.

Из архимедова свойства и некоторых предыдущих свойств следует, что, каково бы ни было положительное число ε, всегда можно указать такое натуральное n, что выполняется неравенство $1/n < \varepsilon$.

В самом деле, согласно IV для числа $1/\varepsilon$ можно указать натуральное n такое, что $1/\varepsilon < n$, что в силу III_6 влечет нужное неравенство.

Заметим, что для данного числа $c \geqslant 0$ в ряду $0, 1, 2, \ldots$ целых неотрицательных чисел, очевидно, имеется единственное m, для которого выполняются неравенства $m \leqslant c < m + 1$.

V. Свойство существования предела у неубывающей ограниченной последовательности положительных чисел (см. замечание 1 ниже).

Если последовательность положительных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{1}$$

не убывает и ограничена сверху числом M, то существует действительное число a, не превышающее M, к которому эта последовательность стремится как к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leqslant M. \tag{2}$$

Это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число n_0 такое, что $|a - a_n| = a - a_n < \varepsilon$ для всех $n > n_0$.

Доказательство. Каждый элемент a_n последовательности (1) разложим в бесконечную десятичную дробь, не имеющую периода 9:

$$a_n = \alpha_{n0}, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots \tag{3}$$

Последовательность чисел (3) ограничена сверху числом M ($a_n \leqslant M$) и не убывает, поэтому на основании леммы 1 из § 2.3 последовательность десятичных дробей (3) стабилизируется к некоторому числу $a \leqslant M$:

$$a_n \rightrightarrows a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\ldots$$

Но тогда a_n стремится к a как к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное m такое, что $10^{-m} < \varepsilon$. Так как a_n стабилизируется к a, то найдется n_0 такое, что при $n > n_0$ первые m компонент чисел a_n уже стабилизированы:

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_m \alpha_{n\ m+1} \alpha_{n\ m+2} \cdots ,$$

т.е. равны соответственно первым m компонентам числа a. Но тогда

$$|a - a_n| = a - a_n = 0, 0 \ldots 0\, \gamma_{m+1} - a_{n\ m+1} \ldots \leqslant 10^{-m} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из I–V следует более общее чем V свойство, утверждающее, что всякая *монотонная*, т.е. неубывающая или невозрастающая, ограниченная последовательность не обязательно положительных чисел имеет предел (конечный; см. далее § 3.4).

Пусть $\mathbb{Q}$ есть множество всех рациональных чисел. В $\mathbb{Q}$ свойства I–IV выполняются, однако свойство V не всегда выполняется, как показывает следующий пример.

.

Пример 1. Пусть $a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ есть произвольное положительное иррациональное число, а

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

— его n-е срезки. Числа $a^{(n)}$ рациональные и образуют ограниченную сверху числом a последовательность. При этом их десятичные разложения стабилизируются к десятичному разложению числа a. Но тогда, как мы знаем,

$$\lim_{n \to \infty} a^{(n)} = a.$$

Таким образом, числа $a^{(n)}$ принадлежат $\mathbb{Q}$, но предел их последовательности не принадлежит $\mathbb{Q}$, а если учесть, что предел у последовательности может быть только один (см. далее § 3.1), то получим: для $\mathbb{Q}$ свойство V, вообще говоря, не выполняется.

§ 2.5. Изоморфизм различных представлений действительных чисел. Физические величины

В предыдущих параграфах были определены действительные числа $a, b, c, \ldots$ в виде бесконечных десятичных разложений и было отмечено, что они удовлетворяют свойствам, составляющим указанные выше группы I–V (коротко, свойствам I–V).

Но мы могли бы, рассуждая аналогично, определить бесконечные двоичные или троичные (вообще, n-ичные) разложения $a', b', c', \ldots$ и ввести для них понятия $>$ и операции сложения $+$ и умножения $\cdot$. При проверке оказалось бы, что эти новые объекты тоже удовлетворяют свойствам I–V.

Важно отметить, что все указанные определения действительных чисел с формальной точки зрения не отличаются друг от друга. Это следует из формулируемой ниже теоремы, которую можно назвать теоремой об изоморфизме множеств, удовлетворяющих условиям I–V.

Понятие изоморфизма, точнее, изоморфизма относительно свойств $>, +, \cdot, \lim$ (предел) будет разъяснено ниже попутно.

Т е о р е м а 1. *Пусть E есть множество десятичных дробей $a, b, c \dots$ и E' есть множество элементов $a', b', c', \dots$, для которых определены понятия больше ($>$) и операции сложения ($+$) и умножения ($\cdot$) так, что выполняются свойства* I–V.

Тогда между элементами $a \in E$ и $a' \in E'$ можно указать взаимно однозначное соответствие

$$a \sim a',$$

являющееся изоморфизмом по отношению к понятию $>$, арифметическим действиям и понятию предела.

Это значит, что если

$$a \sim a', \qquad b \sim b',$$

то

$$a \pm b \sim a' \pm b', \qquad ab \sim a'b', \qquad \frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}, \quad b \neq 0, \tag{1}$$

и если при этом $a < b$, то $a' < b'$.

Наконец, для ограниченной сверху неубывающей последовательности элементов $a_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$, имеет место

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sim \lim_{n\to\infty} a'_n. \tag{2}$$

Таким образом, будем ли мы оперировать десятичными разложениями $a, b, c, \dots$ или им соответствующими элементами $a', b', c', \dots$, если это оперирование сводится к арифметическим действиям, взятым в конечном числе, или к нахождению предела неубывающей последовательности, мы каждый раз будем приходить к элементам d и d', находящимся в указанном выше соответствии $d \sim d'$.

Это указывает на возможность корректно определить понятие действительного числа аксиоматически в том смысле, как это уже было определено в конце § 2.1.

Из сказанного следует, что с формальной точки зрения все равно, исходим ли мы при определении действительных чисел из бесконечных десятичных дробей или из аксиоматического подхода к понятию числа. Конечно, с философской точки зрения второй подход более приемлем: числа суть абстракции, выражающие количественные отношения в природе, а десятичные дроби — их представляющие формальные символы.

Имеются еще очень важные для геометрии и физических наук представления действительных чисел. Это — величины: длина отрезка, масса, скорость и др. Между их значениями и действительными числами, иногда только положительными, как в случае массы, устанавливается соответствие, носящее характер изоморфизма. В 4-м издании книги автора "Курс математического анализа" (§ 2.5) прослежено такое соответствие подробно.

§ 2.6. Неравенства для абсолютных величин

Неравенство
$$|a| < \varepsilon \tag{1}$$
эквивалентно двум неравенствам
$$-\varepsilon < a < \varepsilon. \tag{1$'$}$$
Отсюда неравенство
$$|a - b| < \varepsilon \tag{2}$$
эквивалентно неравенствам
$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon. \tag{2$'$}$$
Аналогично, неравенство
$$|a - b| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$
эквивалентно неравенствам $b - \varepsilon \leqslant a \leqslant b + \varepsilon$.

Справедливы также неравенства
$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \tag{4}$$
$$|a - b| \geqslant ||a| - |b||. \tag{5}$$

Неравенство (4) можно получить, рассмотрев отдельно четыре случая: 1) $a, b \geqslant 0$; 2) $a, b \leqslant 0$; 3) $a \leqslant 0 \leqslant b$; 4) $b \leqslant 0 \leqslant a$.

Например, в случае 2)
$$a + b \leqslant b \leqslant 0, \qquad |a + b| = -(a + b) = -a - b = |a| + |b|,$$
а в случае 3), если допустить, что $|b| \geqslant |a|$,
$$|a + b| = b + a \leqslant |a| + |b|.$$

Случай 3) при допущении $|b| \leqslant |a|$ читатель разберет сам так же, как случай 1). Случай 4) сводится к 3).

Далее, в силу (4)
$$|a| \leqslant |b| + |a - b|, \qquad |b| \leqslant |a| + |a - b|,$$
т.е. $|a| - |a - b| \leqslant |b| \leqslant |a| + |a - b|$, но тогда верно (5).

§ 2.7. Точные верхняя и нижняя грани множества

Множество E действительных чисел x называется *ограниченным*, если существует положительное число M такое, что выполняется неравенство $|x| < M$ для всех $x \in E$, или, что все равно, $-M < x < M$.

Если E не удовлетворяет указанному свойству, т. е., каково бы ни было положительное число M (как бы оно ни было велико), найдется такое $x_0 \in E$, что $|x_0| > M$, то E называется *неограниченным.*

Множество E называется *ограниченным сверху* (соответственно *снизу*), если существует число K (соответственно k) такое, что $x \leqslant K$ (соответственно $k \leqslant x$) для всех $x \in E$. Число K (соответственно k) называется *верхней* (*нижней*) *гранью* E.

Очевидно, что ограниченное множество является одновременно ограниченным сверху и снизу. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, очевидно, не ограничено как снизу, так и сверху; множество $\mathbb{R}_+$ положительных чисел ограничено снизу, но не ограничено сверху; отрезок $[a, b]$ и интервал (a, b) при конечных a и b являются примерами ограниченных множеств.

Число M (соответственно m) называется *точной верхней* (соответственно *нижней*) *гранью множества чисел* A, если выполняются следующие свойства:

1) $x \leqslant M$ (соответственно $x \geqslant m$) для всех $x \in A$;

2) как бы ни было мало $\varepsilon > 0$, найдется такое число $x_0 \in A$, что $M - \varepsilon < x_0$ ($x_0 < m + \varepsilon$).

Точная верхняя грань A обозначается так:

$$M = \sup A = \sup_{x \in A} x,$$

а точная нижняя грань так:

$$m = \inf A = \inf_{x \in A} x$$

(sup, inf — сокращения латинских слов supremum — наивысший, infimum — наинизший). В следующем параграфе будет доказано существование точной верхней грани у ограниченного сверху множества, так же как точной нижней грани у ограниченного снизу множества. Единственность их очевидна.

Для неограниченного сверху множества A будем писать:

$$\sup A = \sup_{x \in A} x = +\infty,$$

а для неограниченного снизу:

$$\inf A = \inf_{x \in A} x = -\infty;$$

будем называть в этом случае $+\infty$, $-\infty$ соответственно *точной верхней* и *точной нижней гранью* A.

Отрезок $[a,b]$ и интервал (a,b), очевидно, имеют в качестве своей точной верхней грани точку (число) b. В случае отрезка точная верхняя грань (число b) принадлежит ему, а в случае интервала — не принадлежит. Множество $(-\infty, 0)$, очевидно, имеет в качестве своей точной верхней грани число 0 и в качестве нижней грани символ $-\infty$.

Отметим очевидное равенство

$$\inf_{x\in A} x = -\sup_{x\in A}(-x).$$

Выше мы определили понятие точной верхней грани отдельно для ограниченного и для неограниченного сверху множества. Ниже дается общее определение, годное для обоих случаев.

Число M (конечное или $+\infty$) называется *точной верхней гранью множества действительных чисел* A, если выполняются следующие свойства:

1) $x \leqslant M$ для всех $x \in A$;

2) каково бы ни было конечное число $M' < M$, найдется такое число $x_0 \in A$, что $M' < x_0 \leqslant M$.

Подобное определение можно дать и для точной нижней грани неограниченного снизу множества чисел. Теперь m может быть либо конечным числом, либо $-\infty$.

Возникает вопрос, имеет ли произвольное множество действительных чисел точную верхнюю (нижнюю) грань? Для неограниченного сверху (снизу) множества, как мы видели, имеет — по определению. Она равна $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Для ограниченного множества тоже имеет. Это будет доказано далее, в § 3.6.

§ 2.8. Символика математической логики

Для сокращения записи в дальнейшем мы иногда будем употреблять некоторые простейшие логические символы. Если нас интересует не сущность какого-либо предложения, а его связь с другими, то это предложение будем обозначать одной из букв $\alpha, \beta, \ldots$ Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает, что из предложения α следует предложение β. Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ будет обозначать тот факт, что предложения α и β эквивалентны, т.е. из α следует β и из β следует α.

Запись $\forall x \in A$: α означает, что для всякого элемента $x \in A$ имеет место предложение α. Символ $\forall$ называется *квантором всеобщности.*

Запись $\exists y \in B$: β означает, что существует элемент $y \in B$, для которого имеет место предложение β. Символ $\exists$ называется *квантором существования.*

Запись $\bar{\alpha}$ будем понимать как *отрицание* предложения α, или, коротко, не α.

Построим отрицание утверждения $\forall x \in A : \alpha$.

Если данное утверждение не имеет места, то предложение α имеет место не для всех $x \in A$, т.е. существует элемент $x \in A$, для которого α не имеет места:

$$\overline{\forall x \in A : \alpha} \Leftrightarrow \exists x \in A : \bar{\alpha}.$$

Совершенно аналогично

$$\overline{\exists y \in B : \beta} \Leftrightarrow \forall y \in B : \bar{\beta}.$$

Таким образом, чтобы построить отрицание данной логической формулы, содержащей знаки $\forall$ и $\exists$, необходимо знак $\forall$ заменить на $\exists$, а знак $\exists$ на $\forall$ и отрицание (черту) перенести на свойство, стоящее после двоеточия. Например, отрицание предложения

$$\exists M, \forall x \in A : f(x) \leqslant M$$

имеет вид

$$\overline{\exists M,\ \forall x \in A : f(x) \leqslant M} \Leftrightarrow \forall M,\ \exists x \in A : \overline{f(x) \leqslant M} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall M,\ \exists x \in A : f(x) > M.$$

Глава 3

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 3.1. Понятие предела последовательности

Метод пределов есть основной метод, на котором базируется математический анализ.

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \ldots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число *) x_n. Тогда говорят, что этим определена *последовательность чисел* $x_1, x_2, x_3, \ldots$, или, короче, *последовательность* $\{x_n\}$.

Отдельные снабженные номерами n (*индексами*) числа x_n называют *элементами последовательности* $\{x_n\}$. Они могут быть действительными или комплексными. Мы здесь рассматриваем случай, когда они действительны.

Для разных n_1, n_2 отдельные элементы x_{n_1}, x_{n_2} последовательности могут оказаться равными как числа $(x_{n_1} = x_{n_2})$. Однако x_{n_1} и x_{n_2} рассматриваются как разные элементы последовательности.

Ниже приводятся примеры последовательностей:

1) $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

2) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right\}$;

3) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots\right\}$;

4) $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots\right\}$;

5) $\left\{1 + \dfrac{1}{10^n}\right\} = \left\{1{,}1; 1{,}01; 1{,}001; \ldots\right\}$;

6) $\{(-1)^n\} = \{-1, +1, -1, \ldots\}$;

7) $\{1; 2; \ldots; 10; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; \ldots\}$.

В случае 7) не видно, как написать общую формулу для произвольного элемента x_n, однако закон образования чисел x_n ясен:

$$x_n = \begin{cases} n, & n = 1, \ldots, 10, \\ \dfrac{1}{10^{n-10}}, & n = 11, 12, \ldots \end{cases}$$

*) То есть x_n — функция на множестве натуральных чисел.

Мы еще будем употреблять следующую терминологию: *переменная* x_n *пробегает последовательность* $\{x_n\}$, или *последовательность значений* x_n.

Переменную x_n, все значения которой равны одному и тому же числу a, называют *постоянной* и обычно обозначают просто через a.

По определению число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется (зависящее от него) натуральное число N такое, что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad n > N.$$

При этом мы будем писать

$$\lim x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

или

$$x_n \to a$$

и говорить, что *переменная* x_n *стремится к* a, или что *последовательность* $\{x_n\}$ *стремится (сходится) к числу* a.

Покажем, что переменная 2) имеет предел, равный нулю. В самом деле, зададим ε и составим неравенство

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Оно верно для всех $n > 1/\varepsilon$ или для всех $n > N$, где N есть какое-либо натуральное число, большее $1/\varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что $|x_n| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

В точности так же доказывается, что и последовательность 3) имеет предел 0. Переменная 4) стремится к 1, потому что в этом случае

$$|1 - x_n| = \left|1 - \frac{n-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

для всех $n > N$, где N — натуральное число, большее $1/\varepsilon$.

Нетрудно показать, что и переменная 5) стремится к 1. Переменная 7), очевидно, стремится к нулю. Не имеет значения тот факт, что она сначала имеет тенденцию возрастать: в этом вопросе важно, какие значения она имеет для достаточно больших n.

Если x_n удовлетворяет неравенству $|a - x_n| < \varepsilon$, то это то же, что x_n удовлетворяет неравенствам

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

или, употребляя геометрический язык, что точка (число) x_n принадлежит интервалу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Поэтому, употребляя геометрический язык, можно дать такое определение предела: *переменная* x_n *имеет пределом число (точку)* a, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое натуральное* N, *что для всех* $n > N$ *точки* $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Произвольный интервал (c, d), содержащий в себе точку a, т.е. такой, что $c < a < d$, называется *окрестностью точки* a. Очевидно, какова бы ни была окрестность (c, d) точки a, найдется такое $\varepsilon > 0$, что интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ содержится в (c, d), т.е. $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (c, d)$.

Поэтому тот факт, что $x_n \to a$, можно выразить еще и так: какова бы ни была окрестность (c, d) точки a, все точки x_n, начиная с некоторого номера n, должны попадать в эту окрестность, т.е. должно существовать натуральное N такое, что $x_n \in (c, d), \quad n > N$. Что касается точек $x_1, \ldots, x_N$ с индексами $n \leqslant N$, то они могут принадлежать или не принадлежать (c, d). Таким образом, если вне (c, d) имеются точки x_n, то их конечное число.

С другой стороны, если известно, что вне (c, d) имеется только конечное число точек $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_s}$, то, положив

$$N = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_s\},$$

мы можем сказать, что для всех $n > N$ точки $x_n \in (c, d)$. Поэтому можно дать еще такое определение предела: *переменная x_n имеет своим пределом a, если вне любой окрестности точки a имеется конечное или пустое множество точек x_n.*

Переменная 6) ни к какому пределу не стремится, потому что если предположить, что эта переменная имеет предел, равный a, то любая как угодно малая по длине окрестность точки a должна была бы содержать все элементы x_n, за исключением конечного числа их. Но вне интервала длины $1/2$, как бы он ни был расположен на действительной оси, имеется, очевидно, бесконечное число элементов x_n нашей последовательности.

Нетрудно видеть, что и последовательность 1) не стремится ни к какому пределу. Впрочем, в дальнейшем мы будем говорить, что она стремится к бесконечности, вкладывая в это понятие несколько иной смысл.

Легко видеть, что если переменная x_n имеет предел, то он единственный. Ведь если бы она имела два предела, a и b, где $a < b$, то интервалы $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, где $\varepsilon = (b-a)/3$, должны были бы содержать каждый все точки последовательности $\{x_n\}$, за исключением конечного их числа. Но это, очевидно, невозможно, потому что эти интервалы не имеют общих точек (не пересекаются).

Пример 6) показывает, что для разных n_1, n_2 отдельные значения последовательности $\{x_n\}$ могут быть равными: $x_{n_1} = x_{n_2}$. Однако x_{n_1} и x_{n_2} рассматриваются как *разные элементы* последовательности.

Легко видеть, то *если две последовательности $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ имеют только конечное число различных соответствующих элементов (имеющих одинаковый индекс n), то они одновременно либо не имеют пределов, либо имеют пределы, и притом равные.*

Докажем несколько теорем, выражающих свойства переменных, стремящихся к пределам.

Теорема 1. *Если переменная x_n имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Тогда для $\varepsilon = 1$ должно найтись натуральное число N такое, что

$$1 > |x_n - a| \quad \text{для} \quad n > N.$$

Отсюда $1 > |x_n - a| \geqslant |x_n| - |a|$ или $|x_n| < |a| + 1$ для $n > N$.

Положим $M = \max\{|a| + 1, |x_1|, \ldots, |x_N|\}$. Тогда очевидно, что

$$|x_n| \leqslant M, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

т.е. переменная x_n ограничена.

Теорема 2. *Если переменная x_n имеет не равный нулю предел a, то найдется такое N, что*

$$|x_n| > \frac{|a|}{2} \quad \textit{для} \quad n > N.$$

Больше того, для указанных n если $a > 0$, то $x_n > a/2$, если же $a < 0$, то $x_n < a/2$. Таким образом, начиная с некоторого номера, x_n сохраняет знак a.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Тогда для $\varepsilon = |a|/2$ должно найтись натуральное N такое, что

$$\frac{|a|}{2} > |a - x_n| \geqslant |a| - |x_n|, \qquad n > N,$$

откуда $|x_n| > |a| - |a|/2 = |a|/2$, и первое утверждение теоремы доказано. С другой стороны, неравенство $|a|/2 > |a - x_n|$ эквивалентно следующим двум:

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}, \qquad n > N.$$

Тогда если $a > 0$, то

$$\frac{a}{2} = a - \frac{|a|}{2} < x_n, \qquad n > N,$$

а если $a < 0$, то

$$x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}, \qquad n > N,$$

и этим доказано второе утверждение теоремы.

Теорема 3. *Если $x_n \to a$, $y_n \to b$ и $x_n \leqslant y_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots,$ то $a \leqslant b$.*

Доказательство. Допустим, что $b < a$. Зададим $\varepsilon < (a - b)/2$ и подберем натуральные N_1 и N_2 так, чтобы

$$a - \varepsilon < x_n \ \ (n > N_1), \qquad y_n < b + \varepsilon \ \ (n > N_2),$$

что возможно, потому что $x_n \to a$, а $y_n \to b$.

Если $N = \max\{N_1, N_2\}$, то, очевидно, $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$, $n > N$, и мы пришли к противоречию с тем, что по условию $x_n \leqslant y_n$ для всех n.

Если бы в условии теоремы 3 было бы $x_n < y_n$ (вместо $x_n \leqslant y_n$), то все равно можно лишь утверждать, что $a \leqslant b$ (пример: $x_n = 1 - 2^{-n}$, $y_n = 1 - 3^{-n}$).

Теорема 4. *Если переменные x_n и y_n стремятся к одному и тому же пределу a и $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то переменная z_n также стремится к a.*

Доказательство. Задав $\varepsilon > 0$, можно найти N_1 и N_2 такие, что

$$a - \varepsilon < x_n \quad (n > N_1), \qquad y_n < a + \varepsilon \quad (n > N_2),$$

откуда для $n > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon,$$

$$|z_n - a| < \varepsilon, \qquad n > N,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Если $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$.*

Доказательство теоремы следует из неравенства

$$||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|.$$

Упражнение.

$\overline{\forall \varepsilon \ \exists N; \ \forall n > N \colon |x_n - a| < \varepsilon} \Leftrightarrow \exists \varepsilon, \ \forall N \ \exists n > N \colon |x_n - a| \geqslant \varepsilon.$

Под чертой записано определение $x_n \to a$. Вместе с чертой эта запись отрицает это определение, т.е. говорит, что $x_n \not\to a$. Справа это отрицание выражается в положительной форме: существует ε такое, что для любого N найдется $n > N$, для которого $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$.

§ 3.2. Арифметические действия с пределами

Пусть x_n и y_n обозначают переменные, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. По определению сумма $x_n + y_n$, разность $x_n - y_n$, произведение $x_n y_n$ и частное x_n / y_n суть переменные, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$. В случае частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Если $x_n = c$ для $n = 1, 2, \ldots$, то в этом случае пишут $c \pm y_n$, $c y_n$, c / y_n вместо $x_n \pm y_n$, $x_n y_n$, x_n / y_n.

Справедливы следующие утверждения:

$$\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n, \tag{1}$$

$$\lim (x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n, \tag{2}$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}, \quad \text{если} \quad \lim y_n \neq 0, \tag{3}$$

Эти утверждения надо понимать в том смысле, что *если существуют конечные пределы x_n и y_n, то существуют также и пределы их суммы, разности, произведения и частного (с указанной оговоркой) и выполняются равенства* (1)–(3).

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to b$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N так, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n > N.$$

Тогда

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad n > N,$$

и мы доказали (1).

Чтобы доказать (2), заметим, что

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leqslant \\ \leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \leqslant |y_n|\,|x_n - a| + |a|\,|y_n - b|. \qquad (4)$$

Так как y_n имеет предел, то (по теореме 1 предыдущего параграфа) существует положительное число M такое, что

$$|y_n| < M, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

При этом можно считать, что M выбрано так, чтобы выполнялось также неравенство

$$|a| < M. \qquad (6)$$

Подберем натуральное N так, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad n > N. \qquad (7)$$

Тогда из (4)–(7) следует, что

$$|x_n y_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \qquad n > N.$$

Этим доказано равенство (2).

Пусть теперь к условию, что $x_n \to a$ и $y_n \to b$, добавляется условие, что $b \neq 0$. Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|(x_n - a)b + (b - y_n)a|}{|y_n|\,|b|} \leqslant \\ \leqslant \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n|\,|a|}{|y_n|\,|b|}. \qquad (8)$$

Теперь удобно использовать терему 2 предыдущего параграфа, в силу которой

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}, \qquad n > N_1, \tag{9}$$

для достаточно большого N_1. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N_2 и N_3 такие, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon|b|}{4}, \qquad n > N_2, \tag{10}$$

$$|a|\,|y_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4}, \qquad n > N_3. \tag{11}$$

Тогда, положив $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, будем в силу (8)–(11) иметь

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon|b|}{4}\,\frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \qquad n > N,$$

что доказывает равенство (3).

Заметим, что пределы переменных, стоящие в левых частях равенств (1)–(3), могут существовать без того, чтобы существовали отдельно пределы x_n и y_n. Например, если $x_n = y_n = n$, то x_n и y_n не имеют (конечных) пределов, в то время как $\lim(x_n - y_n) = 0$, $\lim(x_n/y_n) = 1$.

Равенства (1)–(3) дают возможность узнать, имеет ли переменная предел и чему он равен, если она есть результат конечного числа арифметических действий над несколькими другими переменными, существование и величина пределов которых известны.

Однако часто встречаются случаи, выходящие за границы применимости доказанных теорем, и здесь остается большое поле для инициативы математика.

§ 3.3. Бесконечно малая и бесконечно большая величины

Переменная α_n, имеющая предел, равный нулю, называется *бесконечно малой величиной*, или, короче, *бесконечно малой*.

Таким образом, переменная α_n есть бесконечно малая, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что $|\alpha_n| < \varepsilon$, $n > N$.

Нетрудно видеть, что *для того, чтобы переменная x_n имела предел a, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + \alpha_n$, где α_n есть бесконечно малая.*

Переменная β_n называется *бесконечно большой величиной*, или просто *бесконечно большой*, если для любого $M > 0$ найдется такое N, что $|\beta_n| > M$, $n > N$. При этом пишут

$$\lim \beta_n = \infty \quad \text{или} \quad \beta_n \to \infty \tag{1}$$

и говорят, что β_n *стремится к бесконечности.* Такая терминология считается удобной, несмотря на то, что знак ∞ не обозначает никакого числа и бесконечно большая заведомо ни к какому конечному пределу (числу) не стремится.

Если бесконечно большая β_n, начиная с некоторого n, принимает только положительные значения или только отрицательные значения, то пишут

$$\lim \beta_n = +\infty \quad \text{или} \quad \beta_n \to +\infty, \tag{2}$$

соответственно

$$\lim \beta_n = -\infty \quad \text{или} \quad \beta_n \to -\infty. \tag{3}$$

Таким образом, из (2), так же как и из (3), следует (1). Пример переменной $\{(-1)^n n\}$ показывает, что может иметь место соотношение (1), в то время как не имеет места ни (2) ни (3).

Отметим следующие очевидные свойства:

1) *если переменная x_n ограничена, а y_n — бесконечно большая, то $x_n/y_n \to 0$;*

2) *если абсолютная величина x_n ограничена снизу положительным числом, а y_n — не равная нулю бесконечно малая, то $x_n/y_n \to \infty$.*

Докажем только второе свойство.

Дано, что для некоторого числа $a > 0$ имеет место неравенство $|x_n| > a,\ n = 1, 2, \ldots$, и для всякого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$|y_n| < \varepsilon, \qquad n > N.$$

Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > \frac{a}{\varepsilon} = M, \qquad n > N. \tag{4}$$

Зададим произвольное положительное число M и подберем по нему ε так, чтобы $M = a/\varepsilon$, а по ε подберем такое N, чтобы имело место свойство (4). Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > M, \qquad n > N,$$

что и требовалось доказать.

Из высказанных двух утверждений получаются следующие следствия:

$$\lim_{y_n \to \infty} \frac{c}{y_n} = 0, \qquad \lim_{y_n \to 0} \frac{c}{y_n} = \infty, \qquad c \neq 0.$$

Множества $(M, +\infty)$, $(-\infty, M)$, $\{x \colon |x| > M\}$, где M — произвольное число, называются соответственно *окрестностями* “*точек*” $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Пусть $a \geqslant 0$ и k — натуральное число. Под выражением $\sqrt[k]{a}$ мы будем понимать, если это не будет оговорено особо *), арифметическое значение корня k-й

*) При $k \geqslant 2$ есть и комплексные корни k-й степени из a.

степени из a, т.е. неотрицательное число, k-я степень которого равна a. Оно существует и единственно. Это нам будет удобно доказать позже (в конце § 4.5). Но уже сейчас мы будем этим фактом пользоваться. Так поступают в элементарной математике — не обосновывают логически существование корней, но доказывают их свойства.

П р и м е р 1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = \infty$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, потому что неравенства $\sqrt[k]{n} > N$ и $n > N^k$, где $N > 0$, вытекают одно из другого, и поэтому для любого N можно указать такое n_0 (именно $n_0 > N^k$), что для всех $n > n_0$ будет $\sqrt[k]{n} > N$.

П р и м е р 2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Действительно, $\sqrt[n]{n} = 1 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$. Поэтому *) $n = (1 + \varepsilon_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\varepsilon_n^2$, откуда $\varepsilon_n^2 < \frac{2}{n}$ и (см. пример 1) $\varepsilon_n < \sqrt{2}/\sqrt{n} \to 0$, $n \to \infty$.

П р и м е р 3. При $a > 1$ и натуральном k $\lim_{n\to\infty}(n^k/a^n) = 0$, потому что если положить $a = 1 + \varepsilon$, то $\varepsilon > 0$ и при $n > k$

$$\frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{(1+\varepsilon)^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1}\varepsilon^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}}\,\frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k)} =$$
$$= \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n}\right)}\,\frac{1}{n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

§ 3.4. Существование предела у монотонной ограниченной последовательности

Не всякая переменная имеет предел. Часто бывает важно знать, существует ли у данной переменной предел. Следующая теорема дает очень простой признак существования предела переменной.

Т е о р е м а 1. *Пусть переменная x_n, $n = 1, 2, \dots$, не убывает (не возрастает), т. е. удовлетворяет условию $x_n \leqslant x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geqslant x_{n+1}$) для любого $n = 1, 2, \dots$ Если она ограничена сверху (снизу) числом B (соответственно A), то существует предел $\lim x_n$, равный некоторому числу M (соответственно m), удовлетворяющему неравенству $M \leqslant B$ (соответственно $A \leqslant m$). Если же она не ограничена сверху (снизу), то $\lim x_n = +\infty$ $(\lim x_n = -\infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть переменная x_n ограничена сверху числом B и не убывает.

Если $x_1 > 0$, то и $x_n > 0$ для $n = 1, 2, \dots$ В этом случае теорема уже была доказана (см. § 2.4, свойство V). Ее утверждение было выбрано в качестве одного из основных свойств действительных чисел. При аксиоматическом подходе это утверждение может быть принято как аксиома V действительного числа наряду с аксиомами I–IV (см. конец § 2.1).

---

*) Мы здесь воспользовались формулой Ньютона. Она не всегда входит в наши школьные программы, но во многих учебниках она приводится. Этот вывод, основанный на понятии производной от x_n, см. в § 5.9, пример 1.

Пусть теперь $x_1 \leqslant 0$ и $c > |x_1|$. Переменная $y_n = x_n + c$, $n = 1, 2, \ldots$, очевидно, принимает положительные значения ($y_n > 0$), не убывает ($y_n \leqslant y_{n+1}$) и ограничена сверху числом $B + c$ ($y_n \leqslant B + c$). Поэтому на основании уже доказанного существует предел

$$\lim y_n = y_0 \leqslant B + c.$$

Но тогда существует также предел

$$M = \lim x_n = \lim(y_n - c) = y_0 - c \leqslant B.$$

Пусть теперь неубывающая переменная x_n не ограничена сверху. Тогда, как бы ни было велико положительное число N, найдется такое n_0, что $N < x_{n_0}$. Но в силу того, что x_n не убывает,

$$x_{n_0} \leqslant x_n \quad \text{для} \quad n > n_0.$$

Таким образом, каково бы ни было положительное число N, найдется такое n_0, что

$$N < x_n \quad \text{для} \quad n > n_0,$$

а это и значит, что $\lim x_n = +\infty$.

Для невозрастающей переменной x_n теорема доказывается аналогично. Но можно свести вопрос к уже доказанному. Так как x_n не возрастает и ограничена снизу числом A, то $-x_n$ не убывает и ограничена сверху числом $-A$, поэтому существует $\lim(-x_n) \leqslant -A$, а с ним и предел $\lim x_n$, равный

$$m = \lim x_n = -\lim(-x_n) \geqslant A.$$

Пример 1. Переменная q^n, $n = 1, 2, \ldots$, где $0 < q < 1$, удовлетворяет условию $q^{n+1} < q^n$, т.е. она монотонно убывает, кроме того, она ограничена снизу, потому что $0 < q^n$ для любого n. Поэтому согласно теореме 1 существует предел $\lim_{n\to\infty} q^n = A$.

Очевидно, что q^{n+1} должна иметь тот же предел A, но

$$\lim q^{n+1} = q \lim q^n = qA \quad \text{и} \quad A = qA.$$

Так как $q \neq 1$, то это может быть, лишь если $A = 0$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \qquad 0 < q < 1.$$

Отсюда следует, что для $a > 1$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/a)^n} = +\infty. \tag{1}$$

Пример 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. В силу равенства $|a^n/n!| = |a|^n/n!$ достаточно рассмотреть случай $a > 0$. Пусть m — натуральное число такое, что $m+1 > a$. Тогда (см. пример 1)

$$\frac{a^n}{n!} < \frac{a^m}{m!}\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m} \to 0, \qquad n\to\infty. \tag{2}$$

Пример 3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Зададим любое число $a > 0$. В силу примера 2 из § 3.3 найдется N такое, что $a^n/n! < 1$ для $n > N$, т.е. $a^n < n!$ или $a < \sqrt[n]{n!}$ для $n > N$.

§ 3.5. Число e

Рассмотрим переменную

$$\alpha(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Имеем

$$\alpha(n) = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{n^2} + \ldots =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots,$$
$$\alpha(n+1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$

Члены $\alpha(n)$ меньше соответствующих членов $\alpha(n+1)$, и, кроме того, $\alpha(n+1)$ имеет на один (последний) положительный член больше, чем $\alpha(n)$. Поэтому $\alpha(n) < \alpha(n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$ Далее,

$$\alpha(n) = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots <$$
$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 = 3.$$

Таким образом, переменная $\alpha(n)$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом 3. По теореме 1 она имеет предел, который не превышает 3. Этот предел — вполне определенное число, которое называют *числом* e. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{2}$$

Число e имеет большое значение в математическом анализе. Мы убедимся в этом скоро. В известном смысле оно является естественным основанием для логарифмов. Число e называется еще *неперовым числом* по имени шотландского математика Д. Непера (1550–1617). Это — иррациональное число. Ниже приводится его значение с первыми шестью точными десятичными знаками:

$$e = 2{,}718281\ldots$$

В § 5.10 показано, как вычислить число e с наперед заданной точностью.

В дальнейшем, когда будет введено понятие предела функции, мы увидим, что указанный предел существует и равен e, когда n стремится к бесконечности любого знака, изменяясь непрерывно.

§ 3.6. Леммы о вложенных отрезках, существовании точных граней множества и сечения во множестве действительных чисел

Лемма 1. *Пусть задана последовательность отрезков (множеств чисел x, для которых $a_n \leqslant x \leqslant b_n$)*

$$\sigma_n = [a_n, b_n], \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

вложенных друг в друга, т.е. таких, что $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$, $n = 1, 2, \ldots$, с длинами, стремящимися к нулю:

$$d_n = b_n - a_n \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Тогда существует и притом единственная точка (число), одновременно принадлежащая всем отрезкам σ_n.

Доказательство. Очевидно, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant b_m$ при любом заданном m. Это показывает, что числа a_n не убывают и ограничены сверху числом b_m при любом m, и согласно теореме 1 § 3.4 существует число c, к которому стремится последовательность a_n, при этом $a_n \leqslant c \leqslant b_m$. Так как в этих неравенствах n и m произвольны, то, в частности,

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

следовательно, $c \in \sigma_n$, каково бы ни было n.

Найденная точка c — единственная, удовлетворяющая сформулированному свойству. Ведь если допустить существование другой такой точки c_1, то выполнялись бы неравенства $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, $a_n \leqslant c_1 \leqslant b_n$, откуда $b_n - a_n \geqslant |c_1 - c| = \varepsilon > 0$ для любого n. Но это противоречило бы тому, что $b_n - a_n \to 0$.

Лемма 2. *У ограниченного сверху (снизу) числом M (числом m) множества действительных чисел существует точная верхняя (нижняя) грань, не превышающая (не меньшая) M (m).*

Доказательство. Пусть E есть произвольное ограниченное сверху числом M множество действительных чисел (точек), и пусть x_0 — какая-либо точка E.

Зададим отрезок $[a, M]$, где $a < x_0$, который обозначим через σ_0. Заметим, что отрезок σ_0 содержит точки E, такой точкой является точка x_0. С другой стороны, правее σ_0 нет точек E. Поэтому точную верхнюю грань E надо искать в σ_0. Разделим σ_0 на два равных отрезка и обозначим через σ_1 правый из них, если он содержит в себе точки E, в противном случае обозначим через σ_1 левый отрезок. Далее, через σ_2 обозначим самую правую половину отрезка σ_1, содержащую точки E, и т.д. Продолжив этот процесс по индукции, получим последовательность отрезков $\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \ldots$ таких, что их длины стремятся к нулю и при любом n отрезок σ_n содержит в себе точки E, но правее σ_n нет точек E. Согласно лемме 1 существует и притом единственная точка c, принадлежащая всем σ_n. Очевидно, что $c \leqslant M$. Докажем, что

$$\sup E = c.$$

Для этого покажем, что выполняются два условия:

1) $x \leqslant c$ для всех $x \in E$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_1 \in E$ такое, что

$$c - \varepsilon < x_1 \leqslant c. \tag{1}$$

Если бы утверждение 1) не было верно, то существовала бы точка $y \in E$ такая, что $c < y$. Так как отрезки σ_n содержат в себе c и длины их стремятся к нулю, то найдется n такое, что точка y будет правее σ_n. Но этого не может быть, потому что по построению правее σ_n нет точек E. Этим доказано условие 1).

Зададим теперь $\varepsilon > 0$. Очевидно, найдется n такое, что σ_n окажется правее точки $c - \varepsilon$. При этом в σ_n имеется по крайней мере одна точка, которую обозначим через x_1, принадлежащая E. Для нее выполняются неравенства (1).

Если теперь E есть ограниченное снизу числом m множество точек x, то соответствующее множество точек $-x$ ограничено сверху числом $-m$, и так как последнее имеет точную верхнюю грань, которая не превышает $-m$, то существует

$$\inf_{x \in E} x = -\sup_{x \in E} (-x) \geqslant m.$$

Л е м м а 3. *Если множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел разбито на два непересекающихся непустых множества*:

$$\mathbb{R} = A + B,$$

так, что всякое $a \in A$ меньше всякого $b \in B$, то либо существует число c, наибольшее в A, и тогда в B нет наименьшего числа, либо существует число c, наименьшее в B, и тогда в A нет наибольшего числа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел разбито на два класса A и B, как это сказано в формулировке леммы. Пусть b — число, принадлежащее B. Тогда $a < b$ для всех $a \in A$, и в силу леммы 2 существует точная верхняя грань

$$\sup_{a \in A} a = c \leqslant b. \tag{2}$$

Число c по условию принадлежит одному из классов A или B.

Если $c \in A$, то очевидно, что c есть наибольшее число в классе A. Допустим, что наряду с этим в B есть наименьшее число, которое обозначим через b_0. Тогда среднее арифметическое

$$\frac{c+b_0}{2} = d < b_0,$$

и потому $d \in A$ (ведь b_0 — наименьшее число в классе B). С другой стороны, $c < d$ и вследствие (2) d не может принадлежать A, и мы пришли к противоречию.

Если теперь допустить, что $c \in B$, то аналогичными рассуждениями легко устанавливается, что c есть наименьшее число в классе B, и тогда в A нет наибольшего числа. Этим лемма 3 доказана.

З а м е ч а н и е. В нашем распоряжении имеются четыре внешне отличных, но по существу весьма близких утверждения:

1) лемма 1 — о вложенных отрезках;

2) лемма 2 — о существовании точной верхней грани у ограниченного множества;

3) лемма 3 — о сечении во множестве действительных чисел;

4) теорема 1 из § 3.4 — о существовании предела монотонной ограниченной последовательности.

В нашем изложении утверждение 4) представляет собой одно из основных свойств действительных чисел — свойство V. С помощью этого свойства (и свойств I–IV) мы доказали утверждения 1)–3).

На самом деле утверждения 1)–4) (при наличии I–IV) эквивалентны. Любое из них влечет за собой, как нетрудно проверить, верность остальных.

Докажите это, т.е. докажите, что из 3) следует 4).

§ 3.7. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы

Пусть задана произвольная последовательность действительных чисел $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Из нее можно выделить бесконечным числом способов новую последовательность

$$\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots\},$$

где индекс n_k пробегает возрастающую последовательность (бесконечную) натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ Последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$.

Нас здесь будут интересовать только подпоследовательности, которые сходятся либо к конечному числу, либо к $+\infty$, либо к $-\infty$ (т.е. имеют предел конечный, $+\infty$ или $-\infty$). Их мы будем называть *сходящимися*, а их пределы — *числами* (*конечными* или *бесконечными*), распространяя, таким образом, название “число” и на символы $-\infty$ и $+\infty$. Мы считаем, что $-\infty < \alpha < +\infty$, где α — любое действительное (конечное) число. В силу этого соглашения $+\infty$ есть *наибольшее число*, а $-\infty$ *наименьшее.* Для расширенного таким образом множества чисел, очевидно, выполняются аксиомы числа группы I (см. § 2.4).

Предупредим читателя, что в наших рассуждениях весьма существенно, что элементы x_n (не числа x_n) последовательности $\{x_n\}$ считаются различными, если они соответствуют различным индексам n. Надо различать числа (точки), которые пробегаются последовательностью, от ее элементов.

Например, последовательность

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots \tag{1}$$

(как и всякая последовательность) состоит из бесконечного числа элементов $x_1, x_2, x_3, \dots$, но она пробегает весьма бедное множество чисел $\{1, 2, 3\}$, состоящее только из трех чисел (точек).

Легко видеть, что если последовательность сходится, то любая ее подпоследовательность тоже сходится и притом к тому же числу (конечному, $+\infty$, $-\infty$). Но из того, что последовательность $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность, не следует, что сама она сходится. Но справедлива теорема, имеющая большое применение. Ее часто называют теоремой Больцано–Вейерштрасса *).

Т е о р е м а 1. *Из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу (конечному).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть значения x_n нашей последовательности принадлежат отрезку $\Delta_0 = [c, d]$. Разделим его на две замкнутые половинки и обозначим через Δ_1 правую из них, содержащую в себе бесконечное число элементов x_n, т.е. если обе указанные половинки содержат в себе бесконечное число элементов, то Δ_1 есть правая из них, а если только одна из них содержит бесконечное число элементов x_n, то именно она и обозначается через Δ_1.

Пусть x_{n_1} — один из элементов отрезка Δ_1. Обозначим далее через Δ_2 самую правую половину отрезка Δ_1, содержащую в себе бесконечное число элементов x_n. Очевидно, что среди последних найдется элемент x_{n_2} с $n_2 > n_1$. Вообще, если отрезки $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_{k-1}$ и принадлежащие соответственно им элементы $x_{n_1}, \dots, x_{n_{k-1}}$ уже определены, то обозначим через Δ_k самую правую половину отрезка Δ_{k-1}, содержащую в себе бесконечное множество элементов x_n. Очевидно, что среди последних найдется элемент x_{n_k} с $n_k > n_{k-1}$. Обозначим через a точку, принадлежащую всем Δ_k, $k = 1, 2, \dots$ Очевидно, определенная нами подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ стремится к a. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Из любой последовательности действительных чисел (ограниченной или неограниченной) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$.*

---

*) Б. Больцано (1781–1848) — чешский математик. К. Вейерштрасс (1815–1897) — немецкий математик.

В самом деле, это утверждение для ограниченной последовательности уже доказано в теореме 1, и тогда соответствующая подпоследовательность сходится к конечному числу. Если же последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху (снизу), то для любого натурального k найдется, очевидно, натуральное n_k такое, что $k < x_{n_k}$ $\left(x_{n_k} < -k\right)$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ стремится к $+\infty$ $(-\infty)$.

Докажем часто употребляемую в анализе теорему.

Теорема 3. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *такова, что ее любая подпоследовательность содержит в свою очередь подпоследовательность, сходящуюся к одному и тому же числу* A (*конечному*, $+\infty$ *или* $-\infty$), *то существует предел* $\lim x_n = A$.

В самом деле, если бы последовательность $\{x_n\}$ не стремилась к A, то существовала бы окрестность A, вне которой имелось бы бесконечное число элементов x_n. Перенумеровав эти элементы в порядке возрастания n, получаем некоторую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Из последней на основании предыдущей теоремы можно выделить ее подпоследовательность $\{x_{n_{k'}}\}$, стремящуюся к некоторому числу B (конечному, $+\infty$ или $-\infty$), очевидно, заведомо не равному A. Это противоречит условию теоремы, потому что из сходящейся к B подпоследовательности $\{x_{n_{k'}}\}$ нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к A.

3.7.1 *). Введем теперь определение: число α (конечное, $+\infty$ или $-\infty$) называется *верхним* (*нижним*) *пределом последовательности действительных чисел* $\{x_n\}$ (или *переменной* x_n), если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к нему, и при этом всякая другая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится к числу, не большему (не меньшему) α.

Например, последовательность (1), очевидно, имеет верхний предел, равный 3, и нижний предел, равный 1, а последовательность $1, -2, 3, -4, \ldots$ имеет верхний предел $+\infty$ и нижний, равный $-\infty$.

Верхний и нижний пределы последовательности обозначаются соответственно через $\overline{\lim}\, x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$ или еще так: $\limsup x_n$, $\liminf x_n$.

Отметим, что метод вложенных друг в друга отрезков, который мы применили при доказательстве теоремы 1, привел нас к подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, сходящейся к числу a, которое равно верхнему пределу последовательности $\{x_n\}$:

$$a = \overline{\lim}\, x_n.$$

В самом деле, пусть $a' > a$. Подберем n настолько большим, что a' оказывается правее Δ_n. Но правее Δ_n может быть только конечное число элементов x_n и, следовательно, не существует подпоследовательности $\{x_n\}$, которая бы сходилась к числу a'.

Таким образом, указанный процесс доказывает существование верхнего предела у ограниченной последовательности.

*) Пункт 3.7.1 посвящен верхним и нижним пределам, которые в этой книге используются только в теории рядов (§ 11.3, теоремы 2, 3, § 11.11, теоремы 1–3).

Если бы мы процесс, изложенный при доказательстве теоремы 1, видоизменили, обозначая через Δ_n для каждого n не самую правую, а самую левую половину Δ_{n-1}, содержащую бесконечное число элементов x_n, то в результате получили бы число a (точку), равное нижнему пределу последовательности $\{x_n\}$.

Покажем, что верхний (нижний) предел ограниченной последовательности $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: *для любого $\varepsilon > 0$ интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ содержит в себе бесконечное число элементов x_n, при этом справа (слева) от этого интервала имеется не более чем конечное число элементов x_n.*

В самом деле, можно указать такое n, что $\Delta_n \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Но в Δ_n имеется бесконечное число элементов x_n — тем более в $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$; правее (левее) же Δ_n имеется не более чем конечное число элементов x_n — тем более правее (левее) интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Если последовательность не ограничена сверху (снизу), то, очевидно, можно из нее выделить подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$ $(-\infty)$, и так как $+\infty$ $(-\infty)$ больше (меньше) любого числа, то

$$\overline{\lim}\, x_n = +\infty \qquad (\underline{\lim}\, x_n = -\infty).$$

Теорема 4. *Для того чтобы существовал предел*

$$\lim x_n = a \tag{2}$$

(где a — конечное число, $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = a. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна. Докажем достаточность.

Пусть верно (3) и a — конечное число. Тогда неравенство

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, верно для всех n, кроме, быть может, конечного их числа. Но тогда верно (2).

Пусть теперь, например, $a = +\infty$, в частности,

$$\underline{\lim}\, x_n = +\infty.$$

Это показывает, что при любом $M > 0$ неравенство $M < x_n$ не выполняется разве что для конечного числа значений n. Но тогда

$$\lim x_n = +\infty,$$

т. е. верно (2).

П р и м е р 1. Последовательность $E = \{\sin n\alpha\}$, $n = 1, 2, \dots$, в случае, если $\alpha = \lambda\pi$, где $\lambda = p/q$ рационально $(p, q > 0)$, носит периодический характер:

$$\sin\alpha,\ \sin 2\alpha,\ \dots,\ \sin 2q\alpha,\ \sin\alpha,\ \sin 2\alpha, \dots \tag{4}$$

Пределы различных сходящихся ее подпоследовательностей могут быть равны только одному из первых $2q$ чисел (4). Наибольшее из них, очевидно, есть $\overline{\lim}\sin n\alpha$, а наименьшее есть $\underline{\lim}\sin n\alpha$.

Пусть теперь $\lambda > 0$ иррационально. Будем отмечать числа $n\alpha$ на единичной окружности γ, как это принято в тригонометрии. Тогда, каковы бы ни были различные натуральные числа n_1 и n_2, точки $n_1\alpha$ и $n_2\alpha$ геометрически различны, так как в противном случае имело бы место равенство

$$n_2\alpha = n_1\alpha + 2k\pi, \qquad \alpha = \lambda\pi,$$

где k целое, т.е. $(n_2 - n_1)\lambda = 2k$ и λ было бы рациональным. Следовательно, точки $n\alpha$ $(n = 1, 2, \dots)$ образуют бесконечное множество, которое мы обозначим через $\mathfrak{M}$. Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара точек $n_1\alpha$, $n_2\alpha$, геометрически отстоящих друг от друга (вдоль γ) на расстоянии, меньшем ε. Это значит, что

$$(n_2 - n_1)\alpha = 2k\pi + \omega = \beta, \qquad n_1 < n_2,$$

где $|\omega| < \varepsilon$, а k целое.

Точки 0, β, 2β, $3\beta, \dots$ принадлежат, очевидно, $\mathfrak{M}$. Кроме того, любые рядом стоящие точки этой последовательности находятся на равном расстоянии, меньшем ε. Отсюда следует, что, какова бы ни была точка $t \in \gamma$, на γ существует на расстоянии (вдоль γ), меньшем ε, точка множества $\mathfrak{M}$. Это показывает, что любая точка $t \in \gamma$ есть предельная точка множества $\mathfrak{M}$.

Из сказанного следует, что, каково бы ни было t, всегда можно подобрать последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ такую, что

$$\lim_{k\to\infty} \sin n_k\alpha = \sin t.$$

Но $\sin t$ пробегает все значения отрезка $[-1, +1]$; отсюда следует, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sin n\alpha = -1, \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sin n\alpha = 1.$$

У п р а ж н е н и е. Доказать, что для любой переменной x_n

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} x_k, \qquad \underline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k>n} x_k.$$

У к а з а н и е. Для неограниченной сверху (снизу) переменной

$$\sup_{k>n} x_k = +\infty \qquad \Big(\inf_{k>n} x_k = -\infty\Big),$$

и тогда надо считать, что $\lim_{n\to\infty}(+\infty) = +\infty$ $\Big(\lim_{n\to\infty}(-\infty) = -\infty\Big)$.

§ 3.8. Критерий Коши *) существования предела

Пусть переменная x_n, $n = 1, 2, \ldots$, стремится к конечному пределу a. Тогда для произвольного положительного числа ε найдется такое N, что

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n > N.$$

Пусть n и m будут любыми натуральными числами, большими N. Тогда

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n, m > N.$$

Отсюда

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы получим утверждение:

Если переменная x_n, $n = 1, 2, \ldots$, имеет конечный предел, то она удовлетворяет следующему условию, называемому условием Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $n, m > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Верно и обратное утверждение:

Если переменная x_n, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию Коши, то она стремится к конечному пределу, т. е. существует число a такое, что

$$\lim x_n = a.$$

Докажем это утверждение. Пусть задана переменная x_n, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющая условию Коши. Положим $\varepsilon = 1$ и подберем N такое, чтобы

$$|x_n - x_m| < 1, \qquad n, m > N.$$

Зафиксируем какое-либо $m > N$. Из написанного неравенства следует

$$1 > |x_n - x_m| \geqslant |x_n| - |x_m|,$$

или

$$|x_n| < 1 + |x_m|, \qquad n > N,$$

и переменная x_n ограничена.

*) О. Л. Коши (1789–1857) — французский математик. В его трудах впервые определены основные понятия математического анализа (предел, непрерывность, интеграл, ...) так, как это принято в современной математике.

Но из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Покажем, что тогда последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

В самом деле, зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N такое, чтобы выполнялись неравенства

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n, m > N. \tag{1}$$

Подберем также k настолько большим, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n_k > N. \tag{2}$$

Но тогда в неравенстве (1) можно положить $m = n_k$, и будем иметь

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad n > N.$$

Это доказывает, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a.

Если соединить вместе доказанные прямое и обратное утверждения, то получим следующую теорему, о которой говорят, что она дает критерий Коши существования (конечного) предела.

Теорема. *Для того чтобы переменная x_n, $n = 1, 2, \ldots$, стремилась к (конечному) пределу, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Отметим, что условие Коши можно сформулировать и в следующей форме: *для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

для всех $n > N$ и любых натуральных p.

§ 3.9. Счетное множество. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества действительных чисел

Множество E элементов x любой природы называется *бесконечным*, если, каково бы ни было натуральное число n, в нем имеется больше чем n элементов.

E называется *счетным*, если оно *бесконечно* и его элементы можно *перенумеровать*. Это значит, что между (всеми) элементами $x \in E$ и числами натурального ряда

$$\{1, 2, 3, \ldots\} \tag{1}$$

можно установить взаимно однозначное соответствие. Если при этом элементу $x \in E$ соответствует натуральное число n, то естественно обозначить его через x_n. В результате множество E можно записать в виде *последовательности* элементов:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}. \tag{2}$$

Надо учесть, что в данном случае все элементы, входящие в последовательность, различны. Так что если это числа, то $x_k \neq x_l$ при $k \neq l$.

В частности, множество (1) натуральных чисел тривиальным образом счетно. Очевидно также, что множество четных натуральных чисел счетно, потому что оно бесконечно и его элементы x можно занумеровать, положив $x_n = 2n \ (n = 1, 2, \dots)$.

Пусть E есть счетное множество, перенумерованное в виде последовательности (2), *и A — непустая его часть. Тогда в A имеется элемент с наименьшим номером.* В самом деле, в (2) имеется элемент A с некоторым номером n_1. Элементов в A с номерами $n < n_1$ имеется только конечное число; среди них можно выбрать элемент x_{n_0} с наименьшим номером — это и будет, очевидно, элемент A, имеющий самый малый номер в A.

Если E — счетное множество и A — его бесконечная часть, то A — счетное множество, которое можно занумеровать следующим образом: обозначим через z_1 элемент A с наименьшим номером в E; выкидываем из A этот элемент и в оставшемся бесконечном множестве A_1 выбираем элемент с наименьшим номером в E, который обозначаем через z_2; выкидываем z_2 из A_1 и т.д.

Счетная (*теоретико-множественная*) *сумма*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k = E^1 + E^2 + \dots$$

счетных множеств E^k есть счетное множество. В самом деле, запишем элементы $x_j^k \in E^k, \ j = 1, 2, \dots,$ в виде таблицы:

$$\begin{aligned}
&E^1 = \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots\},\\
&E^1 = \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots\},\\
&E^1 = \{x_1^3, x_2^3, x_3^3, \dots\},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Перенумеруем их в следующем порядке:

$$x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_3^1, x_2^2, x_1^3, x_4^1, \dots,$$

выбрасывая, однако, на каждом этапе нумерации те элементы, которые уже были занумерованы на предыдущем этапе: ведь может случиться, что E^k и E^l имеют общие элементы. В результате получим бесконечную последовательность элементов $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$, очевидно, исчерпывающую множество E. Это доказывает, что E — счетное множество.

Аналогично доказывается, что *конечная сумма* $E = E^1 + \ldots + E^N$ *счетных или конечных множеств, среди которых есть хотя бы одно счетное, счетна.*

Докажем, что *множество положительных (отрицательных) рациональных чисел, а следовательно, множество всех рациональных чисел счетны.*

Чисел p/q $(p > 0,\ q > 0$ целые) с $p + q = 1$ нет, среди же чисел p/q с $p + q = 2$ имеется одно: $1 = 1/1$; обозначим его через y_1. Среди (не занумерованных еще) чисел p/q с $p+q = 3$ имеются два: $1/2$ и $2 = 2/1$; обозначим их соответственно через y_2 и y_3; этот процесс продолжаем по индукции. В результате все положительные рациональные числа будут, очевидно, перенумерованы.

С другой стороны, *множество всех действительных чисел не счетно (несчетно).*

Докажем, что уже единичный интервал $(0, 1)$ есть несчетное множество, откуда и будет следовать высказанное утверждение, потому что мы знаем, что часть счетного множества может быть только конечной или счетной. Точки x (числа) интервала $(0, 1)$ будем записывать в виде бесконечных дробей, не имеющих периода 9. Допустим, что интервал $(0, 1)$ есть счетное множество, тогда все его точки можно было бы перенумеровать:

$$\begin{aligned} x^1 &= 0, \alpha_1^1\, \alpha_2^1\, \alpha_3^1 \ldots\,, \\ x^2 &= 0, \alpha_1^2\, \alpha_2^2\, \alpha_3^2 \ldots\,, \\ x^3 &= 0, \alpha_1^3\, \alpha_2^3\, \alpha_3^3 \ldots\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Однако это заключение, как мы сейчас увидим, противоречиво. Для каждого натурального n определим цифру α_n так, чтобы выполнялись неравенства $0 < \alpha_n < 9$, $\alpha_n \neq \alpha_n^n$, что, очевидно, возможно. Сконструируем число $a = 0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ Оно принадлежит интервалу $(0, 1)$ и должно, таким образом, значиться под некоторым номером n_0 в таблице (3): $a = x^{n_0}$. Но тогда должно было бы быть $\alpha_{n_0} = \alpha_{n_0}^{n_0}$, что невозможно.

Упражнения.

1. Доказать, что множество точек плоскости с рациональными координатами (x, y) счетно.

2. То же доказать для множества точек $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства с рациональными координатами x_j.

Глава 4

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Понятие предела функции

Число A называется *пределом функции f в точке a*, если функция f определена на некоторой окрестности a, т.е. на некотором интервале (c, d), где $c < a < d$, за исключением, быть может, самой точки a, и если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать зависящее от него $\delta > 0$ такое, что для всех x, для которых $0 < |x - a| < \delta$, имеет место

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что A есть предел f в точке a, принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A, \qquad x \to a.$$

Другое определение предела функции в точке может быть высказано в терминах пределов последовательностей.

Число A называется *пределом функции f в точке a*, если она определена на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и если предел последовательности $\{f(x_n)\}$ существует и равен A, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к a и такая, что $x_n \neq a$ для всех n. Таким образом,

$$\lim_{\substack{x_n \to a \\ x_n \neq a}} f(x_n) = A.$$

Здесь считается, как и в других подобных случаях, само собой разумеющимся, что сходящаяся к a переменная x_n пробегает значения, для которых $f(x)$ определена.

Высказанные определения эквивалентны. В самом деле, пусть функция f имеет предел в смысле первого определения, и пусть задана переменная x_n, не равная ни при каком n числу a и стремящаяся к a. Зададим ε и подберем δ так, как это сказано в первом определении. Затем подберем натуральное N так, чтобы $|x_n - a| < \delta$ для $n > N$. Но тогда

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \qquad \text{для} \qquad n > N,$$

а это значит, что последовательность чисел $\{f(x_n)\}$ стремится к A, и так как это свойство верно для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, лишь бы $x_n \neq a$ и все x_n принадлежали к области определения функции, то доказано, что из первого определения предела следует второе.

Обратно, пусть функция $f(x)$ имеет предел в смысле второго определения. Допустим, что при этом она не имеет предела в смысле первого определения. Это значит, что существует хотя бы одно ε, которое мы обозначим через ε_0, для которого нельзя подобрать нужное δ, т.е. для *любого* δ среди x, удовлетворяющих соотношениям $0 < |x - a| < \delta$, должен найтись хотя бы один $x = x^{(\delta)}$ такой, что для него $|f(x^{(\delta)}) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

В качестве δ мы берем все числа вида $\delta = 1/k \ \ (k = 1, 2, \ldots)$ и для каждого из них найдем точку $x_k = x^{(\delta)}$, для которой

$$0 < |x_k - a| < \frac{1}{k}, \qquad x_k \neq a,$$

$$|f(x_k) - A| \geqslant \varepsilon_0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Из этих соотношений видно, что $x_k \to a \ \ (x_k \neq a)$, в то время как $f(x_k)$ заведомо не стремится к числу A. Таким образом, допущение, что из второго определения предела не следует первое, приводит к противоречию.

Эквивалентность двух определений доказана.

Выражение “предел функции в точке a” часто заменяют выражением “предел функции при x, стремящемся к a”, или, короче, “предел функции при $x \to a$”. Если угодно, это выражение больше соответствует духу понятия предела потому, что число $A = \lim_{x \to a} f(x)$ ничего не говорит о значении f в самой точке $x = a$. Функция может не быть определенной в $x = a$. Число A говорит о поведении функции в малой окрестности точки a, из которой выбрасывается точка a. Оно говорит о том, что если x приближается к a по любому закону, оставаясь не равным a, то соответствующее значение $f(x)$ в свою очередь приближается к A, т.е. делается как угодно близким к A.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$. Она определена для всех $x \neq 2$. Попробуем найти ее предел при $x \to 2$. Для любого $x \neq 2$ $(x^2 - 4)/(x - 2) = x + 2$, а так как при определении предела при $x \to 2$ совсем не принимаются во внимание значения f в точке $x = 2$, то

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2).$$

Это равенство пока написано в том смысле, что если один из пределов существует, то существует и второй и равен ему. Таким образом, вместо того, чтобы вычислять предел функции $(x^2 - 4)/(x - 2)$, достаточно вычислить предел более простой функции $x + 2$. Этот последний при $x \to 2$, очевидно, равен 4. Ведь если подставить в $x + 2$ вместо x произвольную переменную x_n, стремящуюся к 2, то независимо от способа стремления ее к 2

$$\lim_{x_n \to 2} (x_n + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Вычисления, связанные с нахождением данного предела, обычно располагают следующим образом:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = \lim_{x\to 2} x + 2 = 4.$$

Подчеркнем, что функции $f(x) = (x^2-4)/(x-2)$ и $\varphi(x) = x+2$ являются разными функциями. Первая из них определена для $x \neq 2$, в то время как вторая определена для всех x. Однако при вычислении предела функций при $x \to 2$ нас совершенно не интересует, определены или не определены эти функции в самой точке $x = 2$, и так как $f(x) = \varphi(x)$ для $x \neq 2$, то

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\varphi(x) = \varphi(2).$$

П р и м е р 2. Очевидно, что $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$, потому что если $x_n \to 1$, $x_n \neq 1$, то $\lim x_n^2 = \lim x_n \lim x_n = 1\cdot 1 = 1$. С другой стороны, этот факт можно доказать на языке ε и δ.

Определим какой-либо интервал, содержащий точку 1, например $(1/2, 3/2)$. Для любого x, принадлежащего ему, очевидно, выполняются неравенства

$$|x^2-1| = |x+1|\,|x-1| \leqslant \frac{5}{2}\,|x-1|.$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\,\varepsilon\right\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-1| < \delta$, будет иметь место соотношение

$$|x^2-1| \leqslant \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\,\varepsilon = \varepsilon.$$

П р и м е р 3. Функция $\sin(1/x)$ (график ее изображен на рис. 4.1) определена для всех значений $x \neq 0$. Она определена, таким образом, в окрестности точки

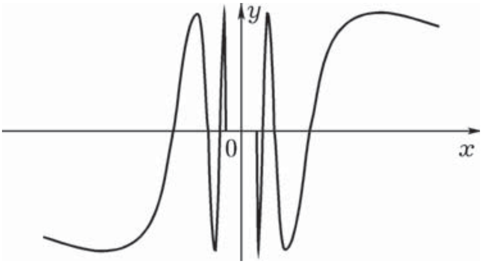

Рис. 4.1

$x = 0$, за исключением самой точки $x = 0$. Эта функция не имеет предела при $x \to 0$, потому что последовательность отличных от нуля значений $x_k = \frac{2}{\pi(2k+1)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, стремится к нулю и в то же время $f(x_k) = (-1)^k$ не стремится при $k \to \infty$ ни к какому пределу.

Введем еще следующее определение. Будем писать

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

и говорить, что *число A есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности*, если f определена для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > K$ при некотором $K > 0$, и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $M > K$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$.

Можно доказать, что это определение эквивалентно следующему.

Число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если функция $f(x)$ определена для всех x с $|x| > M$ при некотором M и

$$\lim_{x_n \to \infty} f(x_n) = A$$

для любой сходящейся к ∞ последовательности $\{x_n\}$.

Доказательство эквивалентности этих двух определений проводится по той же схеме, что и в разобранном выше случае предела f в конечной точке a.

Вообще, многие свойства пределов $f(x)$ при $x \to a$, где a — конечное число, и при $x \to \infty$ являются аналогичными. Можно изложить эти свойства единым образом так, что изложение будет одновременно относиться как к случаю, когда $x \to a$, где a — конечное число, так и к случаю $x \to \infty$. Для этого под буквой a надо понимать либо число (конечное *)), либо символ ∞. Если a есть число, то под окрестностью точки a понимается любой интервал (c, d), содержащий в себе точку a. Таким образом, *окрестность (конечной) точки a* есть множество всех точек x, удовлетворяющих неравенствам $c < x < d$. Если же $a = \infty$ (или $+\infty$, или $-\infty$), то под окрестностью a мы условимся понимать множество всех x, удовлетворяющих неравенству

$$|x| > M \qquad (\text{или} \quad x > M, \quad \text{или} \quad x < -M, \quad M > 0).$$

Мы будем писать

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

где a может быть конечным числом или ∞ (или $+\infty$, или $-\infty$), если функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности a, за исключением **), быть может, самой точки a, и если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность точки a, что для всех x, принадлежащих к ней и отличных от a, имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

---

*) Символы ∞, $+\infty$, $-\infty$ называют *бесконечными числами*; в таких случаях обычные числа называют *конечными числами*.

**) Эта оговорка нужна только в случае конечной точки (числа) a.

Это определение объединяет в себе, очевидно, разобранные выше случаи предела f: когда x стремится к конечному числу a и когда x стремится к ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Приступим к изложению свойств функции $f(x)$, имеющей пределы при $x \to a$, где a есть число или ∞, $+\infty$, $-\infty$. Условимся произвольную окрестность a обозначать символом $U(a)$. Легко проверить, что *пересечение двух окрестностей, $U_1(a)$ и $U_2(a)$, есть снова некоторая окрестность $U(a)$.*

Теорема 1. *Если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, где A — конечное число, то на некоторой окрестности $U(a)$ функция $f(x)$ ограничена, т. е. существует положительное число M такое, что*

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{для всех} \quad x \in U(a), \quad x \neq a.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование окрестности $U(a)$ такой, что

$$1 > |f(x) - A| \geqslant |f(x)| - |A|, \qquad x \in U(a), \quad x \neq a.$$

Отсюда для указанных x

$$|f(x)| \leqslant 1 + |A| = M.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $A \neq 0$ — конечное число, то существует окрестность $U(a)$ такая, что*

$$|f(x)| \geqslant \frac{|A|}{2}, \qquad x \in U(a), \quad x \neq a.$$

Больше того, для указанных x

$$f(x) > \frac{A}{2}, \quad \text{если} \quad A > 0,$$
$$f(x) < \frac{A}{2}, \quad \text{если} \quad A < 0.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование для $\varepsilon = |A|/2$ окрестности $U(a)$ такой, что

$$\frac{|A|}{2} > |A - f(x)| \geqslant |A| - |f(x)|, \qquad x \in U(a), \quad x \neq a,$$

откуда $|f(x)| > |A|/2$ для указанных x. Первое из этих неравенств можно заменить следующими:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}.$$

При $A > 0$ отсюда следует

$$\frac{A}{2} = A - \frac{|A|}{2} < f(x),$$

а при $A < 0$ следует

$$f(x) < A + \frac{|A|}{2} = \frac{A}{2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если*

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = A_1, \qquad \lim_{x \to a} f_2(x) = A_2$$

и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ *на некоторой окрестности* $U(a)$, $x \neq a$, *то* $A_1 \leqslant A_2$.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, $x_n \neq a$; тогда для достаточно большого n_0 имеет место неравенство

$$f_1(x_n) \leqslant f_2(x_n), \qquad n > n_0,$$

и после перехода к пределу — неравенство $A_1 \leqslant A_2$.

Теорема 4. *Если*

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = A, \qquad \lim_{x \to a} f_2(x) = A \tag{1}$$

и на некоторой окрестности $U(a)$, $x_n \neq a$,

$$f_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant f_2(x), \tag{2}$$

то

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = A. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, $x_n \neq a$; тогда при достаточно большом n_0 для $n > n_0$

$$f_1(x_n) \leqslant \varphi(x_n) \leqslant f_2(x_n), \qquad \lim f_1(x_n) = \lim f_2(x_n) = A$$

и, следовательно, существует предел $\varphi(x_n)$, равный A, а так как $\{x_n\}$ есть произвольная сходящаяся к a последовательность, то имеет место (3).

Теорема 5 (критерий Коши существования предела). *Для того чтобы существовал предел (конечный)* $\lim_{x\to a} f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *была определена в окрестности* a, *за исключением, быть может, самой точки* a, *и для всякого* $\varepsilon > 0$

существовала такая окрестность $U(a)$, что, каковы бы ни были точки $x', x'' \in U(a)$, $x', x'' \neq a$, выполнялось неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$, где A — конечное число; тогда существует окрестность a, где $f(x)$ определена, за исключением, быть может, самой точки a. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(a)$, что если $x \in U(a)$, $x \neq a$, то $|f(x) - A| < \varepsilon/2$. Пусть $x', x'' \in U(a)$ и $x', x'' \neq a$; тогда

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы получили, что условие теоремы необходимо.

Докажем достаточность этого условия. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и пусть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать окрестность $U(a)$ такую, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для всех $x', x'' \in U(a)$, $x', x'' \neq a$. Зададим произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$, стремящуюся к a. Тогда найдется натуральное N такое, что для $n, m > N$ будет $x_n, x_m \in U(a)$. Но тогда

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon, \qquad n, m > N,$$

и последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет критерию Коши и, следовательно, имеет предел.

Мы доказали следующее свойство рассматриваемой функции f: для любой сходящейся к a последовательности чисел $x_n \neq a$ существует $\lim f(x_n)$. Из этого свойства автоматически следует, что пределы $\lim f(x_n)$, соответствующие разным сходящимся к a последовательностям, равны между собой. Но тогда существует $\lim_{x\to a} f(x)$. В самом деле, пусть $x_n \to a$, $x'_n \to a$, $x_n, x'_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда по доказанному существуют числа A и A' такие, что $f(x_n) \to A$ и $f(x'_n) \to A'$. Составим новую последовательность: $\{x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, \ldots\}$. Она сходится к a. По доказанному выше должна сходиться к некоторому числу и соответствующая последовательность $\{f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), f(x_3), \ldots\}$. Но это возможно, только если $A = A'$. Таким образом, $A = A'$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to a} \varphi(x) = B,$$

где A и B — конечные числа. Тогда

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm \varphi(x)) = A \pm B, \qquad \lim_{x\to a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = AB$$

и при условии, что $B \neq 0$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Докажем для примера второе равенство. Пусть $x_n \to a$, $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$; тогда

$$\lim f(x_n) = A, \qquad \lim \varphi(x_n) = B,$$

но так как предел произведения двух переменных, пробегающих последовательности, равен произведению их пределов, то

$$\lim(f(x_n)\,\varphi(x_n)) = \lim f(x_n)\, \lim \varphi(x_n) = AB.$$

Это равенство доказано для любой переменной $x_n \to a$, $x_n \neq a$, поэтому $\lim_{x\to a}(f(x)\,\varphi(x)) = AB$.

По определению $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, если функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если для всякого положительного числа M найдется такая окрестность $U(a)$ точки a, что

$$|f(x)| > M, \qquad x \in U(a), \quad x \neq a.$$

Если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ и в некоторой окрестности точки a функция $f(x) > 0$ (соответственно $f(x) < 0$), то еще пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

(соответственно $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$).

Легко доказать следующие теоремы.

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет на некоторой окрестности a неравенству*

$$|f(x)| > M > 0,$$

а для функции $\varphi(x)$ имеет место

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0, \qquad \varphi(x) \neq 0 \quad \textit{для} \quad x \neq a,$$

то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Теорема 8. *Если $|f(x)| < M$ в некоторой окрестности точки a и если $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, то*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Следствие. *Если* $\varphi(x) \to 0$, $x \to a$, $\varphi(x) \neq 0$, *то*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\varphi(x)} = \infty, \tag{4}$$

и если $\varphi(x) \to \infty$, $x \to a$, $\varphi(x) \neq 0$, *то*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0. \tag{5}$$

Теорема 9. *Пусть для функции f, определенной в окрестности точки a (конечной или бесконечной), выполняется условие: из всякой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A$. Тогда $\lim_{x\to a} f(x) = A$.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Согласно условию любая подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$ содержит в себе подпоследовательность, сходящуюся к A. Но тогда по теореме 3 из § 3.7 $f(x_n) \to A$.

§ 4.2. Непрерывность функции в точке

По определению функция f называется *непрерывной в точке* (*конечной*) a, если она определена в некоторой окрестности точки a (в том числе и в самой точке a) и если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

На основании сказанного в § 4.1 о пределе функции в точке можно дать следующую развернутую формулировку непрерывности функции в точке.

Функция f называется непрерывной в точке a, если она определена на некотором интервале (c, d), содержащем точку a, и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

В силу сказанного в § 4.1 приведенной формулировке полностью эквивалентна следующая формулировка.

Функция f непрерывна в точке a, если она определена на некотором интервале (c, d), содержащем a, и если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a, имеет место

$$\lim_{x_n \to a} f(x_n) = f(a).$$

Если функция $f(x)$, заданная в окрестности точки a, не является непрерывной в точке a, т.е. если для нее не выполняется высказанное выше свойство, то говорят, что она *разрывна в точке* a.

Можно дать и прямое определение разрывности f в точке a.

Пусть функция f определена в окрестности точки a, и пусть существует такое положительное число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется точка x_δ такая, что

$$|a - x_\delta| < \delta, \qquad |f(a) - f(x_\delta)| \geqslant \varepsilon_0;$$

тогда $f(x)$ разрывна в точке a.

Рассмотрим непрерывную кривую Γ — график непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ (рис. 4.2). Термин “непрерывная кривая” здесь употреблен в житейском (интуитивном) смысле — ее можно начертить всю, не отрывая карандаша от бумаги.

Зададим произвольное значение $x_0 \in (a, b)$. Ему соответствует значение $f(x_0)$ нашей функции. Зададим $\varepsilon > 0$ и проведем три прямые параллельно оси x соответственно на расстояниях $f(x_0) - \varepsilon$, $f(x_0)$ и

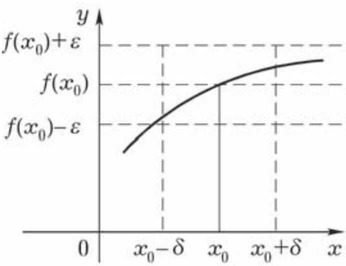

Рис. 4.2

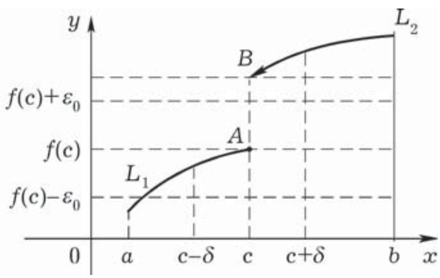

Рис. 4.3

$f(x_0) + \varepsilon$ от оси x. Легко видеть, что для нашей (непрерывной) кривой всегда можно подобрать такое $\delta > 0$ (зависящее от ε), что для всех x, принадлежащих интервалу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, соответствующие ординаты $f(x)$ нашей кривой будут удовлетворять неравенствам

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Таким образом, математическое определение непрерывности функции отвечает интуитивному понятию непрерывной кривой.

Обратимся еще к графику, изображенному на рис. 4.3.

Этот график представляет собой разрывную кривую L, состоящую из двух непрерывных кусков L_1 и L_2. Кусок L_1 взаимно однозначно проектируется (в направлении оси y) на отрезок $[a, c]$. Кусок же L_2 предполагается лишенным левой концевой точки, он взаимно однозначно проектируется на полуинтервал $(c, b]$. Каждому значению $x \in [a, b]$ соответствует единственное значение $y = f(x)$, равное ординате точки кривой L, имеющей абсциссу x. Кривая L разрывна, она состоит из двух не склеенных друг с другом кусков L_1 и L_2. Разрыв имеет место при переходе аргумента x через значение c. Убедимся в том, что функция $f(x)$ также не является непрерывной в точке c. Очевидно, что $f(c) = Ac$.

Возьмем положительное число $\varepsilon_0 < AB$. Внимательное рассмотрение чертежа показывает, что, как бы ни было мало $\delta > 0$, среди значений x, удовлетворяющих неравенству $|c - x| < \delta$, имеются такие, а именно бо́льшие c, что для них

$$|f(x) - f(c)| > \varepsilon_0.$$

Таким образом, разрывному графику соответствует разрывная функция. В данном случае функция $f(x)$ разрывна в точке c (ср. с § 1.4).

Величина $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$ называется *приращением функции f в точке x, соответствующим приращению h независимой переменной.*

Мы можем понятие непрерывности функции f в точке a выразить еще следующим образом (на языке h): *функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если функция $f(a + h)$ от h определена в некоторой окрестности $h = 0$ и если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для $|h| < \delta$ выполняется*

$$|f(a + h) - f(a)| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, функция f непрерывна в точке a, если ее приращение в этой точке, соответствующее приращению h аргумента, стремится к нулю вместе с h.

Из свойств предела функции (см. § 4.1) и определения непрерывности в точке немедленно следует

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке a, то непрерывны также в точке a и их сумма $f(x) + \varphi(x)$, разность $f(x) - \varphi(x)$ и произведение $f(x)\,\varphi(x)$, а также и частное $f(x)/\varphi(x)$ при добавочном условии, что $\varphi(a) \neq 0$.*

Докажем еще теорему о непрерывности функции от функции.

Теорема 2. *Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке a и функция $f(y)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$, то функция от функции $F(x) = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Вследствие непрерывности функции f в точке b найдется такое $\sigma > 0$, что функция $f(y)$ определена на интервале $(b - \sigma, b + \sigma)$ и выполняется неравенство

$$|f(y) - f(b)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad |y - b| < \sigma. \tag{2}$$

А вследствие непрерывности функции φ в точке a найдется такое $\delta > 0$, что функция $\varphi(x)$ определена на интервале $(a-\delta, a+\delta)$ и $|\varphi(x)-\varphi(a)| < \sigma$ для

$$|x-a| < \delta. \tag{3}$$

Из полученных соотношений следует, что для всех x, удовлетворяющих неравенству (3), функция $f(\varphi(x))$ определена и имеет место неравенство

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |F(x)-F(a)| < \varepsilon, \tag{4}$$

что и требовалось доказать.

Чтобы доказать непрерывность F в точке $x = a$, рассуждают еще так. Так как функция φ непрерывна в точке a, функция f непрерывна в точке $b = \varphi(a)$ и, кроме того, $F(a) = f(\varphi(a))$, то для любой стремящейся к a последовательности $\{x_n\}$ имеет место

$$\lim_{x_n \to a} F(x_n) = \lim_{\varphi(x_n)\to\varphi(a)} f(\varphi(x_n)) = f(\varphi(a)) = F(a).$$

Если функция $\Phi(x)$ получена из нескольких функций с помощью только арифметических действий и операций функции от функции, то установление факта непрерывности Φ в данной точке может быть сведено к последовательному применению предыдущих двух теорем, если эти теоремы применяются конечное число раз.

Отметим следующие теоремы, непосредственно вытекающие из определения непрерывности функций в точке и из теорем § 4.1 о пределе функции.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то существует окрестность $U(a)$ точки a, на которой $f(x)$ ограничена.*

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и если $f(a) \neq 0$, то существует окрестность $U(a)$ точки a, на которой*

$$|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}.$$

Больше того, если $f(a) > 0$, то

$$\frac{f(a)}{2} < f(x), \qquad x \in U(a),$$

а если $f(a) < 0$, то

$$f(x) < \frac{f(a)}{2}, \qquad x \in U(a).$$

Пример 1. Постоянная функция $f(x) = C$ определена и непрерывна для любого значения x, потому что приращение ее, соответствующее любому приращению h, равно

$$\Delta C = C - C = 0$$

и, следовательно, тривиальным образом $\Delta C \to 0$ $(h \to 0)$.

Пример 2. Функция $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots,$ определена на всей действительной оси и непрерывна на ней.

В самом деле, функция $y = x$, очевидно, непрерывна для любого x. Поэтому этот же факт имеет место для функции $x^2 = xx$, но тогда и для $x^3 = x^2 x$. По индукции приходим к непрерывности x^n.

Пример 3. Алгебраический многочлен

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

($a_0, \ldots, a_n$ — заданные числа и n — натуральное число) есть, очевидно, функция, непрерывная для любого x, потому что x^{n-k}, $k = 0, 1, \ldots, n$, есть, как показано выше, непрерывная на действительной оси функция, $a_k x^{n-k}$ есть непрерывная на оси функция как произведение двух непрерывных на оси функций a_k и x^{n-k} и, наконец, $P(x)$ непрерывна на оси как сумма конечного числа непрерывных на оси функций.

Пример 4. Рациональная функция

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + \ldots + a_n}{b_0 x^m + \ldots + b_m}, \qquad b_0 \neq 0$$

(n, m — натуральные числа и a_k, b_k — заданные числа) есть непрерывная функция для всех значений x, для которых $Q(x) \neq 0$. Это следует из того, что $f(x)$ получается как частное многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, являющихся непрерывными на действительной оси функциями.

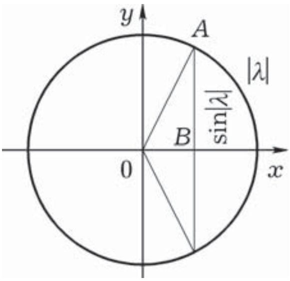

Рис. 4.4

Пример 5. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна для всех значений x. Это вытекает из следующих рассуждений.

Имеет место неравенство $|\sin\lambda| \leqslant |\lambda|$. Чтобы доказать его при $|\lambda| \leqslant \pi/2$, помножим его (обе его части) на 2, и тогда левая его часть будет равна длине хорды (рис. 4.4), стягивающей дугу длины $2|\lambda|$. Если теперь $|\lambda| \geqslant \pi/2$, то $|\lambda| \geqslant \pi/2 > 1 \geqslant |\sin\lambda|$. Поэтому

$$|\sin(x+h) - \sin x| = \left|2\sin\frac{h}{2}\,\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{h}{2}\right| \cdot 1 = |h|$$

и $|\sin(x+h) - \sin x| \to 0$ при $h \to 0$, а это значит, что функция $\sin x$ в точке x (любой) непрерывна.

Пример 6. Функция $\cos x$ непрерывна для всех значений x, потому что

$$|\cos(x+h) - \cos x| = \left|2\sin\frac{h}{2}\,\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{h}{2}\right| \cdot 1 = |h| \to 0, \qquad h \to 0.$$

Из полученного неравенства видно, что для всякого ε можно найти δ (в данном случае $\delta = \varepsilon$) такое, что если $|h| < \delta$, то $|\cos(x+h) - \cos x| < \varepsilon$.

З а м е ч а н и е. В этой книге мы исходим из обычного геометрического определения тригонометрических функций (см. § 1.3, п. 7). Но возможны другие их определения, носящие чисто аналитический характер.

П р и м е р 7. Функция $|x|$ непрерывна для всех значений x, потому что

$$||x+h|-|x|| \leqslant |x+h-x| = |h| \to 0, \qquad h \to 0.$$

Если функция f не является непрерывной в точке $x = a$ и в то же время существует конечный предел $\lim_{x\to a} f(x)$, то говорят, что она имеет *устранимый разрыв* в этой точке. Этим хотят сказать, что f можно видоизменить в точке a (если она определена в a) или доопределить ее в этой точке (если она в a не определена), положив $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$, и после этого f станет непрерывной функцией в этой точке.

П р и м е р 8. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1, \end{cases}$$

очевидно, разрывна в точке $x = 1$. Но этот разрыв устраняется, если положить $f(1) = 3$.

Если функция f непрерывна для всех x в достаточно малой окрестности точки a, за исключением $x = a$, и не ограничена в этой окрестности, то говорят, что f *имеет бесконечный разрыв* в a.

П р и м е р 9. Функция $\sin(1/x)$ может служить примером ограниченной функции с неустранимым разрывом в $x = 0$, а функция $\operatorname{tg} x$ — примером функции, имеющей бесконечные разрывы (в точках $x_k = \pi/2 + k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$).

П р и м е р 10. Функции $\cos(\sin x^2)$ и $(\sin x)^2$ являются непрерывными на всей действительной оси функциями. Это следует из того, что функции x^2, $\sin x$, $\cos x$ непрерывны на действительной оси и из теоремы о непрерывности функции от функции.

З а м е ч а н и е. Формально функция f называется *разрывной в точке* a, если она определена в окрестности a, в том числе в a, и не является непрерывной в a. Именно при таком определении отрицание непрерывности записывается при помощи кванторов:

$$\overline{\forall \varepsilon\ \exists \delta,\ \forall x\ |x-a| < \delta\colon |f(x)-f(a)| < \varepsilon} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon,\ \forall \delta\ \exists x, |x-a| < \delta\colon |f(x)-f(a)| \geqslant \varepsilon,$$

т.е. существует ε такое, что для всякого δ найдется x, удовлетворяющий неравенству $|x-a| < \delta$, для которого $|f(x)-f(a)| \geqslant \varepsilon$.

Однако часто говорят, что функции $\frac{1}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$ разрывны в точке $x = 0$, что с формальной точки зрения недопустимо, потому что эти функции не определены для $x = 0$.

§ 4.3. Пределы функции справа и слева. Монотонная функция

По определению *левой окрестностью точки* (числа) a называется произвольный полуинтервал $(c, a]$, а *правой окрестностью* a называется произвольный полуинтервал $[a, d)$. *Окрестностью* (“точки”) $+\infty$ естественно считать (*полубесконечный*) *интервал* $(N, +\infty)$, а *окрестностью* $-\infty$ *интервал* $(-\infty, N)$, где N — в обоих случаях произвольное (конечное) число. Можно еще говорить, что окрестности $+\infty$, $-\infty$ суть соответственно левая и правая окрестности (“точки”) ∞.

На основе этих определений вводится понятие *правого* и *левого предела* функции f в точке a (конечной и бесконечной). Например, говорят, что A есть *правый предел* f *в точке* a (конечной или бесконечной), если f определена в некоторой правой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую правую окрестность a, что для всех принадлежащих к ней $x \neq a$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Впрочем, правый (левый) предел f в ∞ обычно называют пределом f при $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$.

Можно еще дать другое определение правого предела функции в точке. Говорят, что функция f *имеет правый предел в точке* a (конечной или бесконечной), равный числу A, если она определена на некоторой правой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если $\lim_{x_n \to a} f(x_n) = A$ для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, значения которой x_n не равны a и принадлежат к указанной правой окрестности.

Тот факт, что оба сформулированные определения правого предела эквивалентны, доказывается совершенно аналогично тому, как это делается в случае предела (см. § 4.1).

Сказанное понятным образом переносится на понятие левого предела. Вообще, теоремы § 4.1 о пределах по аналогии переносятся на правые и левые пределы.

Если a — конечная точка, то правый и левый пределы f в ней записываются соответственно так:

$$f(a+0) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x), \qquad f(a-0) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x).$$

Пользуясь определением пределов на “языке ε и δ”, легко доказать, что для того, чтобы f имела предел в конечной точке a, необходимо и достаточно, чтобы существовали правый и левый пределы f в этой точке и были равны между собой, и тогда $f(a+0) = f(a-0) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Пределы f при $x \to -\infty$, $+\infty$, ∞ часто записывают соответственно так:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(-\infty), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty), \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = f(\infty).$$

Здесь, как в случае конечной точки, имеет место очевидное утверждение: для того чтобы существовал предел f при $x \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой пределы f при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, и тогда $f(-\infty) = f(+\infty) = f(\infty)$.

До сих пор мы говорили о конечных пределах функции (A было конечно), но можно по аналогии ввести пределы:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Например, последнее из этих четырех соотношений выражает, что функция f определена для всех x, меньших некоторого числа (т. е. на некоторой окрестности $-\infty$), и, каково бы ни было положительное число N, найдется такое число L, что для всех $x < L$ имеет место $f(x) < -N$.

Односторонние пределы, т. е. пределы справа и слева, имеют большое значение при рассмотрении монотонных функций.

Пусть E — множество действительных чисел (точек прямой). Функция f, определенная на E, называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на E, если из того, что $x', x'' \in E$ и $x' < x''$, следует, что $f(x') \leqslant f(x'')$ (соответственно $f(x') \geqslant f(x'')$).

Неубывающие и невозрастающие на E функции носят общее название *монотонных функций* на E.

Теорема 1. *Пусть функция f не убывает на интервале (a, b), где, в частности, может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$. Если она ограничена сверху числом M, то существует предел (конечный) $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) \leqslant M$. Если же она не ограничена сверху, то $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$.*

Доказательство. Из ограниченности f следует существование конечной точной верхней грани $\sup_{x \in (a,b)} f(x) = A \leqslant M$. Таким образом, $f(x) \leqslant A$ для всех $x \in (a, b)$, и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $x_1 \in (a, b)$ такое, что $A - \varepsilon < f(x_1) \leqslant A$. Но в силу того, что f не убывает, $f(x_1) \leqslant f(x)$, $x_1 \leqslant x < b$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $x_1 < b$ такое, что $A - \varepsilon > f(x) < A + \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенствам $x_1 < x < b$. Это и значит, что

$$A = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x).$$

Пусть теперь неубывающая функция f не ограничена сверху. Тогда для любого M существует $x_1 \in (a, b)$ такое, что $M < f(x_1)$, и вследствие того, что f не убывает на (a, b),

$$M < f(x_1) \leqslant f(x), \qquad x_1 < x < b,$$

а это и говорит о том, что

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty.$$

По образцу доказанной теоремы легко доказывается и

Теорема 2. *Если функция f не убывает на (a, b), где может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$, и $f(x)$ ограничена снизу числом m, то существует (конечный) предел функции f в точке a справа:*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = A \geqslant m.$$

Если же функция f не ограничена снизу, то

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty.$$

Читатель может самостоятельно видоизменить формулировки и доказательства подобных теорем для невозрастающей на (a, b) функции.

Пример 1. На отрезке $[0, 2]$ задана функция

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{для} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ x + 1 & \text{для} \quad 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Ясно, что она однозначна и монотонна на $[0, 2]$. Легко видеть, что $f(1 - 0) = 1$, $f(1 + 0) = f(1) = 2$.

Теорема 3. *Если функция f не убывает на отрезке $[a, b]$, то в каждой точке $x \in (a, b)$ существуют пределы $f(x - 0)$ и $f(x + 0)$ и выполняются неравенства*

$$f(x - 0) \leqslant f(x) \leqslant f(x + 0).$$

Существуют также пределы $f(a + 0)$, $f(b - 0)$, удовлетворяющие неравенствам

$$f(a) \leqslant f(a + 0), \qquad f(b - 0) \leqslant f(b).$$

Эта теорема немедленно следует из предыдущих теорем, если учесть, что из ее условий вытекает, что функция f не убывает на каждом из отрезков $[a, x]$, $[x, b]$.

Можно ввести понятие *непрерывности функции в точке справа* и *слева*.

Функция f называется *непрерывной в точке a* (конечной) *справа* (*слева*), если существует $f(a + 0)$ и $f(a + 0) = f(a)$ (соответственно если существует $f(a - 0)$ и $f(a - 0) = f(a)$).

Если для функции f в точке a (конечной) имеют смысл оба числа $f(a-0)$ и $f(a+0)$ (конечные) и если она все же разрывна в a, то говорят, что эта функция имеет *разрыв первого рода в точке* a.

Отметим, что *если функция f непрерывна как справа, так и слева в точке a, то она, очевидно, непрерывна в точке a.* Можно еще сказать, что *для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке a, необходимо и достаточно, чтобы три числа $f(a-0)$, $f(a)$, $f(a+0)$ имели смысл и чтобы они были равны между собой.*

Мы приводим для примера шесть графиков функций, имеющих разрыв первого рода в точке a. Буква A обозначает точку $A = (a, f(a))$ плоскости. Стрелка на конце куска кривой обозначает, что концевая точка, где находится стрелка, выброшена. На рисунках 4.5–4.8 изображены

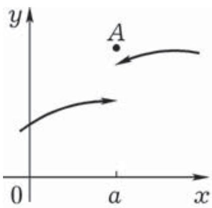

Рис. 4.5

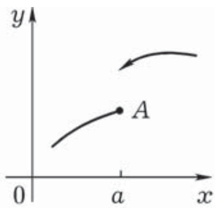

Рис. 4.6

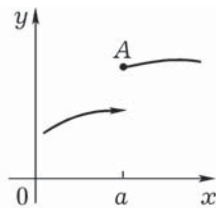

Рис. 4.7

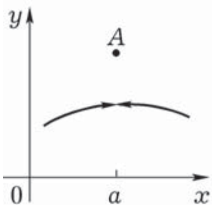

Рис. 4.8

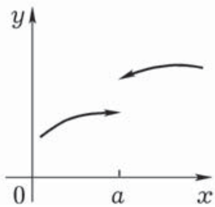

Рис. 4.9

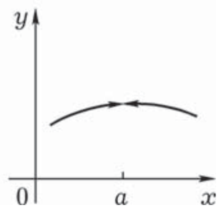

Рис. 4.10

графики функций f, для которых все три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ имеют смысл. На рис. 4.5 числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ различны между собой; функция не только разрывна в a, но и разрывна справа и слева в a. На рис. 4.6 f непрерывна слева в a. На рис. 4.7 f непрерывна справа в a. На рис. 4.8 f имеет устранимый разрыв в a. На рис. 4.9 f не определена в a. На рис. 4.10 f не определена в a, но f можно доопределить в a так, что она будет непрерывной в a.

Заметим следующий важный факт. *Если заданная на отрезке $[a, b]$ функция f монотонна на нем (не убывает или не возрастает), то, какова бы ни была точка $x \in [a, b]$, в ней функция f либо непрерывна, либо имеет разрыв первого рода.* Это утверждение есть непосредственное следствие из теорем 1, 2 и определения понятия точки разрыва первого рода *).

Если функция f определена в окрестности точки a и имеет разрыв в a, не являющийся разрывом первого рода, то говорят, что она имеет в a *разрыв второго рода.* Например, функция, равная $\sin(1/x)$ и нулю для $x = 0$, имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода. Функция

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

также имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, потому что хотя для нее и имеет смысл число

$$\psi(0-0) = 0,$$

но не имеет смысла число $\psi(0+0)$.

§ 4.4. Функции, непрерывные на отрезке

Функция f называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$ (на множестве точек x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$), если она непрерывна во всех точках интервала (a, b) (множества точек x, для которых $a < x < b$), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b **).

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом замечательных свойств, к изложению которых мы сейчас приступим. Впрочем, мы не останавливаемся пока на важном понятии — равномерной непрерывности функции; оно будет изучено позднее (§ 7.10, теорема 4) сразу для функции n переменных. Из полученных там результатов выводятся соответствующие результаты для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции от одной переменной.

Начнем со следующей леммы.

Лемма 1. *Если все значения x_n последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к числу α, принадлежат $[a, b]$, то и $\alpha \in [a, b]$.*

Доказательство. Эта лемма следует из теоремы 3 § 3.1.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем.*

Доказательство. Допустим, что f не ограничена на $[a, b]$. Тогда для каждого натурального числа n найдется точка $x_n \in [a, b]$ такая, что

$$|f(x_n)| > n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена (a и b — числа) и из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке

*) О числе точек разрыва монотонной функции см. конец § 9.5.

**) Подчеркнем, что у отрезка $[a, b]$ всегда его концы — конечные числа (точки).

$\alpha \in [a,b]$ (см. предыдущую лемму и теорему 1 из § 3.7). Но в точке α функция f непрерывна и потому *)

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha). \tag{2}$$

Но свойство (2) противоречит свойству (1). Поэтому f может быть только ограниченной на $[a,b]$.

Заметим, что если функция непрерывна на интервале (a,b) или на полуинтервале $[a,b)$ или $(a,b]$, то она не обязательно ограничена на нем. Например, функция $1/x$ непрерывна на полуинтервале $(0,1]$, но не ограничена на нем. Если эту функцию доопределить, положив $f(0)=0$, то она будет конечной в любой точке отрезка $[0,1]$, однако *не ограниченной на нем.*

Теорема 2. *Непрерывная на $[a,b]$ функция f достигает в некоторых точках отрезка $[a,b]$ своих максимума и минимума, т.е. существуют точки α и β, принадлежащие $[a,b]$, для которых имеет место*

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(\alpha), \qquad \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(\beta).$$

Таким образом, $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$ для всех $x \in [a,b]$.

Доказательство. По предыдущей теореме непрерывная на $[a,b]$ функция ограничена, следовательно, она ограничена сверху некоторым числом K:

$$f(x) \leqslant K, \qquad x \in [a,b].$$

Но тогда существует точная верхняя грань f на $[a,b]$:

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = M. \tag{3}$$

Число M обладает следующим свойством: для любого натурального числа n найдется на $[a,b]$ точка x_n такая, что

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Последовательность $\{x_n\}$ как принадлежащая к $[a,b]$ ограничена, и потому из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу β, которое заведомо принадлежит $[a,b]$ (учесть лемму 1). Но функция f непрерывна в точке β, и потому $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\beta)$. С другой стороны, $M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M$, $k = 1,2,\ldots$, и

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

*) Если $\alpha = b$ (соответственно $\alpha = a$), то в этой точке f непрерывна слева (справа).

Но так как $f(x_{n_k})$ может стремиться только к одному пределу, то $M = f(\beta)$.

Верхняя грань (3), таким образом, достигается в точке β, т.е., как говорят, *функция f достигает в точке β своего максимума на отрезке* $[a,b]$. Мы доказали, что существует точка $\beta \in [a,b]$, для которой

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(\beta).$$

Доказательство другой части теоремы о минимуме аналогично, но его можно свести к доказательству первой части теоремы, учитывая, что

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = -\max_{x\in[a,b]} (-f(x)).$$

З а м е ч а н и е. Функция $y = x$ непрерывна на интервале $(0,1)$ и ограничена на нем; верхняя ее грань $\sup_{x\in(0,1)} x = 1$ не достигается, т.е. нет такого $x_0 \in (0,1)$, для которого эта функция равна 1. Таким образом, в доказанной теореме условие непрерывности f *на замкнутом* (содержащем в себе оба конца a и b) *отрезке* существенно.

Очевидно, что $\sup_{x\geqslant 0} \operatorname{arctg} x = \pi/2$. Однако нет такого x на луче $x \geqslant 0$, для которого функция $\operatorname{arctg} x$ принимает значение $\pi/2$, и она не достигает максимума на $x \geqslant 0$. В данном случае условия теоремы не выполняются: область задания непрерывной функции $\operatorname{arctg} x$ не ограничена.

Т е о р е м а 3. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и числа $f(a)$ и $f(b)$ не равны нулю и имеют разные знаки, то на интервале (a,b) имеется по крайней мере одна точка c такая, что $f(c) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим отрезок $[a,b]$ через Δ_0. Разделим Δ_0 на две равные части. Если в середине Δ_0 функция равна нулю, то теорема доказана; если этого нет, то одна из половинок Δ_0 такова, что на концах ее наша функция принимает значения разных знаков. Обозначим именно эту половинку через Δ_1 и разделим ее на две равные части. Может случиться, что в середине Δ_1 наша функция равна нулю, и тогда теорема доказана. Если нет, то обозначим через Δ_2 ту из половинок, на концах которой f принимает значения разных знаков. Рассуждая так по индукции, мы либо наткнемся на очередном этапе рассуждений на точку $c \in (a,b)$, для которой $f(c) = 0$, и тогда теорема доказана, либо получим последовательность (бесконечную) вложенных друг в друга отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, на каждом из которых f имеет значения разных знаков. Тогда существует точка c, принадлежащая всем Δ_n, следовательно, и $[a,b]$. Очевидно, $f(c) = 0$, потому что, если допустить, например, что $f(c) > 0$, то нашлась бы окрестность U_c точки c такая, что для всех x из $[a,b]$, принадлежащих U_c, функция $f(x)$ была бы положительной, но этого не может быть, потому что при достаточно большом n отрезок $\Delta_n \subset U_c$, а f не сохраняет знак на Δ_n. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция f непрерывна на $[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$ и C — произвольное число, находящееся между числами A и B $(A \neq B)$, то на интервале (a,b) найдется по крайней мере одна точка c, для которой $f(c)=C$.*

Это следствие можно сформулировать и так: *непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка $[a,b]$.*

Доказательство. Определяем новую функцию $F(x)=f(x)-C$, где C — константа — число, находящееся между $A=f(a)$ и $B=f(b)$. Так как f — непрерывная на $[a,b]$ функция, то и F — непрерывная на $[a,b]$ функция. При этом, очевидно, F принимает на концах отрезка $[a,b]$ значения, имеющие разные знаки. Тогда по доказанной теореме должна найтись внутри $[a,b]$ такая точка c, что $F(c)=0$ или $f(c)-C=0$, т.е. $f(c)=C$. Это требовалось доказать.

Пример 1. Уравнение $\cos x - x = 0$ имеет корень на интервале $(0,\pi)$.

В самом деле, функция $f(x) = \cos x - x$ непрерывна на отрезке $[0,\pi]$ и на концах его принимает значения разных знаков: $f(0)=1$, $f(\pi)=-(1+\pi)$.

Замечание. Для разрывной на $[a,b]$ функции доказанная теорема вообще не имеет места, как легко видеть на примере функции

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

§ 4.5. Обратная функция

Зададим какую-либо функцию $y=f(x)$ на произвольном множестве чисел (точек на прямой) E и обозначим через $E_1=f(E)$ образ E (см. § 1.3).

Каждому $y \in E_1$ приведем в соответствие множество всех $x \in E$, для которых $y=f(x)$. Это не пустое множество, обозначим его через e_y.

Таким образом, на E_1 определена функция $x=\varphi(y)$, вообще говоря, многозначная. Функция $\varphi(y)$ называется *обратной функцией по отношению* к $f(x)$.

Важно выделить тот случай, когда обратная функция однозначна. Это всегда имеет место, если функция f *строго монотонна*, т.е. строго возрастает или строго убывает на области E своего определения.

Функция f называется *строго возрастающей* (*убывающей*) на E, если из того, что $x', x'' \in E$ и $x' < x''$, следует, что $f(x') < f(x'')$ (соответственно $f(x') > f(x'')$).

Если $f(x)$ есть строго возрастающая (убывающая) функция на E, то обратная ей функция $x=\varphi(y)$, очевидно, также однозначная, строго возрастающая (убывающая) на образе $E_1=f(E)$ функция.

В этом случае, очевидно, имеют место тождества:

$$\varphi(f(x))=x, \quad x \in E; \qquad f(\varphi(y))=y, \quad y \in E_1.$$

При этом удобно обозначать обратную к f функцию символом f^{-1}:

$$f^{-1}f(x) = x, \quad x \in E; \qquad ff^{-1}(y) = y, \quad y \in E_1.$$

Теорема 1. *Пусть* $y = f(x)$ *есть непрерывная строго возрастающая на отрезке* $[a, b]$ *функция и* $A = f(a)$, $B = f(b)$.

Тогда образ $[a, b]$ *есть отрезок* $[A, B]$ *и обратная к* f *функция* $x = \varphi(y)$ *однозначна, строго возрастает и непрерывна на* $[A, B]$.

В этой теореме можно заменить "возрастающая" на "убывающая", и тогда в ее заключении надо заменить $[A, B]$ на $[B, A]$.

Доказательство. Пусть $E_1 = f([a, b])$. По условию $A, B \in E_1$, и так как функция f непрерывна на $E = [a, b]$, то и любая точка $[A, B]$ принадлежит E_1 (см. следствие теоремы 3 § 4.4 о промежуточных значениях непрерывной функции).

Если точка y не принадлежит $[A, B]$, то вследствие строгой монотонности f она не может быть образом какой-либо точки $x \in [a, b]$. Этим доказано, что образ отрезка $[a, b]$ при помощи f есть отрезок $[A, B]$. То, что обратная определенная на $[A, B]$ функция $x = \varphi(y)$ однозначна и строго монотонна, следует непосредственно из строгой монотонности $y = f(x)$ на $[a, b]$. Остается доказать непрерывность $x = \varphi(y)$ в любой точке $y_0 \in [A, B]$.

Пусть y_0 есть внутренняя точка $[A, B]$, т. е. $y_0 \in (A, B)$. Ей, мы уже знаем, соответствует единственная точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $y_0 = f(x_0)$ или $x_0 = \varphi(y_0)$.

Зададим положительное число $\varepsilon > 0$, которое будем считать настолько малым, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$, и пусть $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Из строгой монотонности f следует, что для любого $y \in (y_1, y_2)$ соответствующее значение $x = \varphi(y)$ принадлежит интервалу $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Таким образом, доказано, что для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$, именно такого, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$, можно подобрать окрестность (y_1, y_2) точки y_0 такую, что $|x - x_0| = |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$ для всех $y \in (y_1, y_2)$.

Сформулированное здесь свойство функции $\varphi(y)$ доказано для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но тогда оно, очевидно, верно и для любых $\varepsilon > 0$. Это свойство выражает тот факт, что функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке y_0.

Для концевой точки $y_0 = B$ соответствующая точка $x_0 = b = \varphi(y_0)$. Полагаем $x_1 = b - \varepsilon > a$, $y_1 = f(x_1)$ и тогда, очевидно, будем иметь $|\varphi(y_0) - \varphi(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in (y_1, y_0]$.

В этом же духе рассматривается случай $y_0 = A$.

Пример 1. Функция $y = \sin x$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Образом этого отрезка посредством функции $\sin x$ является отрезок $[-1, +1]$. На основании доказанной теоремы существует определенная на отрезке $[-1, +1]$ обратная к $\sin x$ однозначная непрерывная строго возрастающая функция $x = \arcsin y$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$.

Для функции $y = \sin x$, рассматриваемой на всей действительной оси, обратная функция, как известно, уже многозначна:

$$x = \operatorname{Arcsin} y = (-1)^k \arcsin y + k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{1}$$

т.е. каждому $y \in [-1, +1]$ соответствует множество e_y значений x, определяемых формулой (1).

Теорема 2. *Пусть $y = f(x)$ есть непрерывная строго возрастающая на интервале (a, b) функция, и пусть*

$$A = \inf f(x), \qquad B = \sup f(x), \qquad x \in (a, b), \tag{2}$$

где, в частности, может быть $a, A = -\infty$, $b, B = +\infty$.

Тогда образ (a, b) есть интервал (A, B) и обратная к f функция $x = \varphi(y)$ однозначна, строго возрастает и непрерывна на (A, B).

Замечание. В этой теореме можно слова "возрастающая", "возрастает" заменить на "убывающая", "убывает", но тогда образ (a, b) будет (B, A).

Из определения числа B непосредственно следует, что если оно конечно, то точка $y > B$ не может принадлежать образу $f((a, b))$. Но и число B тоже не может принадлежать $f((a, b))$, иначе существовала бы точка $x_1 \in (a, b)$ такая, что $B = f(x_1)$, и так как на интервале (a, b) можно определить точку $x_2 > x_1$, то в силу строгой монотонности f мы получили бы $f(x_2) > B = f(x_1)$, что противоречит определению B.

Подобным образом доказывается, что и число A не принадлежит $f((a, b))$, если оно конечно. Итак, образ $f((a, b))$ принадлежит (A, B). Но на самом деле эти два множества совпадают. Действительно, пусть $y \in (A, B)$. Тогда в силу определений (2) должны найтись такие $x_1, x_2 \in (a, b)$, что

$$y_1 = f(x_1) < y < f(x_2) = y_2,$$

и вследствие строгого возрастания f должно быть $x_1 < x_2$. Но функция f непрерывна на (a, b), тем более на $[x_1, x_2]$, и когда x пробегает отрезок $[x_1, x_2]$, сама она должна пробегать все значения между y_1 и y_2, следовательно, и значение y.

Это значит, что существует значение $x = \varphi(y)$ (единственное в силу строгой монотонности f) такое, что $y = f(x)$. Этим доказано, что образ интервала (a, b) есть интервал (A, B) и что определенная выше функция $x = \varphi(y)$ есть обратная к f функция.

Функция φ непрерывна в точке y, потому что φ можно также рассматривать как обратную функцию к функции f, определенной на указанном отрезке $[x_1, x_2]$, а к этой последней можно применить предыдущую теорему. Тот факт, что φ строго возрастает, очевиден. Теорема доказана.

Примечание. В теореме 2 интервалы (a, b), (A, B) можно соответственно заменить на полуинтервалы, например на $[a, b)$, $[A, B)$, и тогда a и A — конечные числа.

Пример 2. Пусть $a > 0$ и n — натуральное число. *Арифметическим значением корня n-й степени из a* называется положительное число, n-я степень которого равна a. Это число обозначается так:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}. \tag{3}$$

Существование и единственность этого числа вытекает из следующих соображений. Функция

$$y = x^n \tag{4}$$

непрерывна и строго возрастает на полуинтервале $[0, \infty)$, образом ее является точка полуинтервала $[0, \infty)$. На основании теоремы 2 и примечания к ней функция $y = x^n$ имеет обратную однозначную и непрерывную функцию $x = \varphi(y)$, $0 \leqslant y < \infty$, строго возрастающую, равную нулю при $y = 0$ и стремящуюся к $+\infty$ вместе с y.

Таким образом, каково бы ни было $y \in [0, \infty)$, существует единственное положительное число $x = \varphi(y)$ такое, что $(\varphi(y))^n = y$. Но тогда $\varphi(y) = y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$, $0 \leqslant y < \infty$.

В частности, если считать $y = a$, то мы доказали существование и единственность арифметического значения корня n-й степени из a $(a \geqslant 0)$.

§ 4.6. Показательная и логарифмическая функции

Функция a^x. Зададим положительное число $a > 0$. Если n — натуральное число, то число a^n определяется как произведение $a^n = a \ldots a$ из n сомножителей, каждый из которых равен a, а число $a^{1/n}$ — как арифметическое значение корня n-й степени из a.

Если теперь p/q $(q > 0,\ p, q$ целые) есть рациональная дробь, то по определению полагают

$$a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p, \qquad a^0 = 1. \tag{1}$$

Доказательство второго равенства в этой цепи и того факта, что это определение приводит к тому же числу, если дробь p/q будет записана в форме $np/nq = p/q$, где n — произвольное натуральное число, известно читателю из элементарной алгебры.

Обозначим через $\mathbb{Q}$ множество всех рациональных чисел. Функция a^x определена пока на этом множестве. В курсе элементарной математики доказывается на основании только аксиом числа I–IV групп, что имеет место свойство:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \tag{2}$$

каковы бы ни были $x, y \in \mathbb{Q}$. Там доказывается также неравенство $a^x < a^y$ $(x < y;\ x, y \in \mathbb{Q},\ a > 1)$.

Но функцию a^x можно доопределить на всех иррациональных точках так, что определенная таким образом на всей действительной оси $\mathbb{R}$ продолженная функция, которую естественно обозначить снова через a^x, будет непрерывной всюду на $\mathbb{R}$. Больше *того, для продолженной функции свойство* (2) *выполняется уже для всех* $x, y \in \mathbb{R}$.

Начнем с того, что докажем вспомогательное неравенство (Бернулли *)).

Если $a > 1$ и N — натуральное число, то $a^{1/N} = 1+\lambda$, где $\lambda > 0$. Поэтому, учитывая формулу бинома Ньютона, получим

$$a = (1+\lambda)^N > 1 + N\lambda \quad \text{и} \quad a^{1/N} - 1 < (a-1)/N.$$

Если теперь h есть произвольное положительное рациональное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < h \leqslant 1$, то можно подобрать такое натуральное число N, что $1/(N+1) < h \leqslant 1/N$. Поэтому при $a > 1$

$$a^h - 1 \leqslant a^{1/N} - 1 < \frac{a-1}{N} = \frac{N+1}{N}(a-1)\frac{1}{N+1} < 2(a-1)h.$$

На основании этого неравенства, называемого *неравенством Бернулли*, получим

$$a^y - a^x = a^x(a^{y-x}-1) \leqslant 2a^x(a-1)(y-x), \quad x, y \in \mathbb{Q}, \quad 0 < y-x \leqslant 1. \tag{3}$$

Зададим произвольное положительное рациональное число c и введем новое множество $\mathbb{Q}_c$, состоящее из всех $x \in \mathbb{Q}$, которые удовлетворяют неравенству $x \leqslant c$. Из (3) следует:

$$a^y - a^x \leqslant M(y-x), \quad x, y \in \mathbb{Q}_c, \quad 0 < y-x \leqslant 1, \quad M = 2(a-1)a^c, \tag{4}$$

где, таким образом, M есть константа, не зависящая от рассматриваемых x, y, но зависящая от c.

Следовательно,

$$|a^x - a^y| \leqslant M|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{Q}_c, \quad |x-y| \leqslant 1. \tag{5}$$

Пусть $x \in \mathbb{Q}_c$, $x_n \in \mathbb{Q}_c$, $x_n \to x$; тогда

$$|a^x - a^{x_n}| \leqslant M|x - x_n|,$$

и, следовательно, имеет место

$$\lim_{x_n \to x} a^{x_n} = a^x. \tag{6}$$

Так как c может быть любым числом, то мы доказали (6) для любых $x_n \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{Q}$.

---

*) Я. Бернулли (1654–1705) — швейцарский математик.

Пусть теперь $x \leqslant c$ — любое иррациональное число и $x_n \in \mathbb{Q}_c$, $x_n \to x$. На основании критерия Коши существования предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{M}, \qquad n, m > N.$$

Это показывает в силу (5), что имеет место неравенство

$$|a^{x_n} - a^{x_m}| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \qquad n, m > N,$$

т.е. условие Коши для последовательности чисел a^{x_n}. Но тогда существует предел этой последовательности, который обозначим через a^x:

$$\lim_{x_n \to x} a^{x_n} = a^x. \tag{7}$$

Найденный предел не зависит от выбранной нами последовательности $x_n \to x$. Ведь если x_{n_1} — другая последовательность, для которой $x_n - x_{n_1} \to 0$, то

$$|a^{x_n} - a^{x_{n_1}}| \leqslant M|x_n - x_{n_1}| \to 0.$$

Итак, функция a^x определена для любых x. Для рациональных x посредством формулы (1) и для иррациональных x формулой (7).

Пусть теперь x и y — любые действительные числа, $|x - y| \leqslant 1$, $x \leqslant c$, $y \leqslant c$, $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n \in \mathbb{Q}_c$, $y_n \in \mathbb{Q}_c$. Тогда

$$|a^{x_n} - a^{y_n}| \leqslant M|x_n - y_n|, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Перейдем в полученном неравенстве к пределу при $n \to \infty$. Так как $a^{x_n} \to a^x$, $a^{y_n} \to a^y$ и функция $|x|$ непрерывна, то получим

$$|a^x - a^y| \leqslant M|x - y| \tag{9}$$

при $0 < |x - y| < 1$. Из неравенства (9) непосредственно следует, что функция a^x непрерывна для любого $x < c$, следовательно, и для любого x, потому что c можно считать произвольным.

Имеют место свойства:

$$a^x > 0, \tag{10}$$

$$a^x < a^y, \quad \text{если} \quad x < y, \quad a > 1, \tag{11}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \tag{12}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y. \tag{13}$$

Чтобы доказать эти свойства, будем исходить из того, что для рациональных x, y они известны из школьного курса элементарной алгебры.

Пусть λ и μ — постоянные рациональные числа такие, что $x < \lambda < \mu < y$, и пусть $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ — переменные такие, что $x_n \to x$, возрастая, и $y_n \to y$, убывая. Тогда $a^{x_n} < a^\lambda < a^\mu < a^{y_n}$, а после перехода к пределу $a^x \leqslant a^\lambda < a^\mu \leqslant a^y$, и мы получили (11) и (10), потому что $0 < a^\mu \leqslant a^y$. Свойства (12) следуют из того, что это верно в случае, когда $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$, пробегая рациональные значения, и из доказанной уже монотонности (см. (11)). Наконец, (13) следует из равенства $a^{x_n+y_n} = a^{x_n}a^{y_n}$ после перехода в нем к пределу.

До сих пор мы считали $a > 1$. Если $0 < a < 1$, то полагаем

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

В этом случае свойство (13) функции a^x и ее непрерывность сохраняются, но теперь уже функция будет строго убывать. Наконец, полагаем

$$1^x = 1 \tag{14}$$

для всех x.

Отметим еще, что при натуральном m

$$a^{xm} = a^x a^{(m-1)x} = (a^x)^2 a^{(m-2)x} = \ldots = (a^x)^m,$$
$$(a^{x/m})^m = a^x \quad \text{и} \quad a^{x/m} = (a^x)^{1/m},$$

поэтому для рационального числа p/q

$$(a^x)^{p/q} = (a^x)^{(1/q)p} = (a^{x/q})^p = a^{x(p/q)}.$$

Далее, если y — произвольное число и $y_n \to y$, где y_n рациональные, то

$$a^{xy} = \lim_{n\to\infty} a^{xy_n} = \lim_{n\to\infty} (a^x)^{y_n} = (a^x)^y,$$

и мы доказали, что $a^{xy} = (a^x)^y$.

Ф у н к ц и я $\log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Пусть для определенности $a > 1$. Тогда $y = a^x$ есть функция, непрерывная и строго возрастающая на всей действительной оси. При этом

$$\inf_{x\in(-\infty,+\infty)} a^x = 0, \qquad \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty.$$

Таким образом, функция a^x отображает действительную ось $(-\infty, +\infty)$ на открытую полуось $(0, +\infty)$, и обратная к ней функция по теореме 2 §4.5

однозначна, строго возрастает и непрерывна на $(0, +\infty)$. Эта функция называется *логарифмом y при основании a* и обозначается так:

$$\log_a y.$$

Из сказанного следует, что (мы заменяем y на x)

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = -\infty.$$

При $a < 1$ рассуждения аналогичны. Функция a^x также отображает действительную ось $(-\infty, +\infty)$ на полуось $(0, +\infty)$, но строго убывая. Обратная функция $\log_a x$, определенная на $(0, +\infty)$, также будет строго убывать, и теперь

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = +\infty.$$

Имеют место тождества ($a \neq 1,\ a > 0$)

$$a^{\log_a x} = x \quad (0 < x < +\infty), \qquad \log_a a^x = x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Отсюда на основании свойств функции a^x при $x, y > 0$ имеем

$$a^{\log_a (xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y},$$
$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Если в этом равенстве заменить x на x/y, то получим

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},$$

Далее,

$$a^{\log_a x^y} = x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y \log_a x}, \qquad x > 0,$$

поэтому

$$\log_a x^y = y \log_a x, \qquad a \neq 1,\ a > 0,\ x > 0.$$

Наконец, отметим, что для положительных не равных 1 чисел a и b имеет место

$$a^{\log_a b \cdot \log_b a} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a$$

и, следовательно,

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Логарифм числа a при основании e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается так: $\log_e a = \ln a$.

§ 4.7. Степенная функция x^b

Здесь b — постоянная, а x — переменная. При любом b эта функция во всяком случае определена на положительной полуоси $x > 0$ (ведь в § 4.6 мы обосновали определение числа a^x, где $a > 0$ и x произвольно).

Имеет место формула (см. § 4.6)

$$x^b = e^{b \ln x}, \qquad x > 0, \tag{1}$$

с помощью которой свойства степенной функции можно вывести из известных уже нам свойств показательной и логарифмической функций.

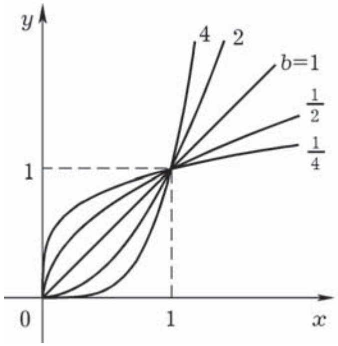

Рис. 4.11

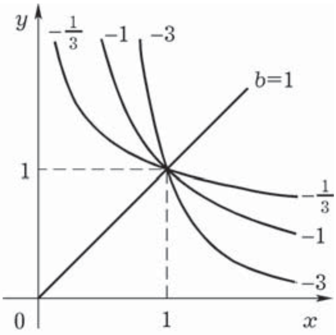

Рис. 4.12

Очевидно, x^b есть непрерывная функция. При $b > 0$ она строго возрастает и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^b = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty.$$

При $b > 0$ естественно считать, что $0^b = 0$; тогда функция x^b делается непрерывной справа в точке $x = 0$.

При $b < 0$ функция x^b непрерывна и строго убывает на положительной полуоси и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^b = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^b = 0.$$

Формула (1) влечет характеристическое свойство степенной функции:

$$(xy)^b = x^b\, y^b, \qquad x, y > 0.$$

На рис. 1.2 и рис. 4.11, 4.12 приведены графики функции $y = x^b$, $x > 0$, для нескольких положительных и отрицательных значений b.

Степенная функция x^b имеет смысл как действительная функция и для отрицательных x, если b — целое или рациональное p/q, где q нечетное.

§ 4.8. Еще о числе e

В § 3.5 рассматривалась функция

$$\alpha(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

от целого аргумента n и было показано, что если $n \to \infty$, пробегая натуральные числа, то $\alpha(n)$ стремится к пределу, который был назван числом e. Но функция $\alpha(n)$ определена на самом деле для произвольных действительных значений n, исключая $n \in (-1, 0]$. Мы покажем, и это важно для приложений, что

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = e, \tag{1}$$

где предел понимается как предел функции $\alpha(n)$, определенной для указанных n.

Чтобы доказать (1), достаточно убедиться в том, что (1) верно в двух случаях: когда $n \to +\infty$ и когда $n \to -\infty$, пробегая не обязательно целые значения.

Если n — положительное действительное число и $[n]$ — его целая часть, то $n < [n] + 1 \leqslant n + 1$ и очевидно, что

$$\left(1 + \frac{1}{[n]+1}\right)^{[n]+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^{[n]+2} < e\left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^2.$$

При $n \to +\infty$, очевидно, $[n]$, $[n] + 1 \to +\infty$, откуда первый и последний члены цепи стремятся к e. Поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e, \qquad n \to +\infty,$$

и так как при этом $1 + 1/n \to 1$, то мы доказали (1). Пока для $n \to +\infty$.

Если теперь $n\to-\infty$, то $m=-n\to+\infty$ и

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^m=$$
$$=\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)=e,$$

т. е. доказано (1) и при $n\to-\infty$. Но тогда верно (1).

Полагая $h=1/n$, получим еще

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

§ 4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

Целью этого параграфа является доказательство того, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1}$$

Функция $\psi(x)=(\sin x)/x$ определена для всех значений $x\neq 0$.

Пусть $0<x<\pi/2$; тогда (рис. 4.13) $\sin x<x<\operatorname{tg}x$, потому что половина хорды, стягивающей дугу окружности, меньше половины дуги, которая в свою очередь меньше половины длины, объемлющей дугу ломаной. Тогда $1<x/(\sin x)<1/(\cos x)$, или

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \tag{2}$$

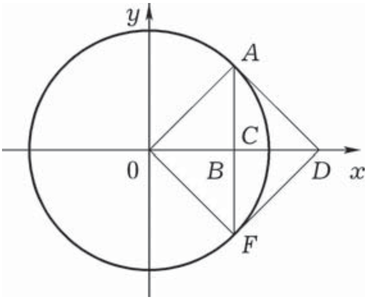

Рис. 4.13

Эти неравенства, очевидно, верны не только для положительных, но и для отрицательных x, удовлетворяющих неравенствам $0<|x|<\pi/2$, в силу четности входящих в (2) функций.

Функция $\cos x$ непрерывна (см. § 4.2, пример 6), поэтому

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1.$$

Перейдем в соотношениях (2) к пределу при $x\to 0$. Пределы левой и правой частей (2) равны 1, поэтому существует и притом равный 1 предел средней части (2).

§ 4.10. Порядок переменной, эквивалентность (асимптотика)

Говорят, что f *на множестве точек* E *имеет порядок* φ или что f *есть* O *большое от* φ *на* E, и пишут при этом

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad \text{на} \quad E, \tag{1}$$

если

$$|f(x)| \leqslant C|\varphi(x)| \quad \text{на} \quad E, \tag{2}$$

где C — не зависящая от x положительная константа.

В частности, равенство $f(x) = O(1)$ на E обозначает тот факт, что f на E ограничена.

Очевидно, если $f(x) = O(\varphi_1(x))$ на E и $\varphi_1(x) = O(\varphi_2(x))$ на E, то $f(x) = O(\varphi_2(x))$ на E.

Пример 1. $\sin x = O(x)$ на $(-\infty, +\infty)$.

Пример 2. $x = O(x^2)$ на $[1, \infty]$ (но не на $[0, 1]$); при этом x^2 и x здесь переставить местами, очевидно, нельзя. С другой стороны, $x^2 = O(x) = O(1)$ на $[0, 1]$.

Мы будем писать

$$f(x) = o(\varphi(x)), \qquad x \to a, \tag{3}$$

и говорить, что *функция* f *есть* o *малое от* φ *при* $x \to a$, если

$$f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x), \tag{3'}$$

где функция $\varepsilon(x) \to 0$ $(x \to a)$.

Мы также будем писать

$$f(x) = O(\varphi(x)), \qquad x \to a, \tag{4}$$

если существует окрестность $U(a)$ точки a (конечной или бесконечной) такая, что

$$f(x) = O(\varphi(x)), \qquad x \in U(a), \quad x \neq a. \tag{4'}$$

Само собой разумеется, что определение (3) так же, как и (4), предполагает, что обе функции f и φ определены на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Если на некоторой такой окрестности (исключая точку a) $\varphi(x) \neq 0$, то определения (3) и (4), очевидно, эквивалентны следующим: говорят, что f *есть* o *малое от* φ *при* $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0, \tag{5}$$

и f *есть O большое от φ при $x \to a$*, если существует окрестность $U(a)$, на которой, за исключением точки a, отношение $f(x)/\varphi(x)$ ограничено. Можно считать, что стремление x к a происходит только слева $(x < a)$ или справа $(x > a)$, и тогда для бесконечной точки в первом случае надо считать, что $x \to +\infty$, и во втором, что $x \to -\infty$. Конечно, под окрестностью a понимается тогда левая или соответственно правая ее окрестность.

Наконец, можно считать в (3), (4), что x стремится к конечному или бесконечному пределу a, пробегая определенную последовательность $x_1, x_2, \ldots$

Очевидно, что если $f(x) = o(\varphi(x))$ $(x \to a)$, а $\varphi(x) = o(\psi(x))$ $(x \to a)$, то $f(x) = o(\psi(x))$ $(x \to a)$, потому что

$$f(x) = \varepsilon(x)\,\varphi(x) = \varepsilon(x)\,\varepsilon_1(x)\,\psi(x) = \varepsilon_2(x)\,\psi(x),$$

где $\varepsilon_2(x) = \varepsilon(x)\,\varepsilon_1(x) \to 0$ $(x \to a)$, так как $\varepsilon(x) \to 0$ и $\varepsilon_1(x) \to 0$.

Пример 3.

1) $x^n = o(e^x)$ $(x \to +\infty)$, $n = 1, 2, 3, \ldots;$

2) $x^2 = o(x)$ $(x \to 0)$;

3) $x = o(x^2)$ $(x \to \infty)$;

4) $\ln x = o(x)$ $(x \to +\infty)$;

5) $x = O(\sin x)$ $(x \to 0)$.

Говорят, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны* (*равны асимптотически*) при $x \to a$, и пишут

$$f_1(x) \approx f_2(x), \qquad x \to a,$$

если обе они определены и не равны нулю на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и если

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1. \tag{6}$$

Здесь относительно стремления x к a можно согласиться так же, как и выше.

Теорема 1. *Для того чтобы две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ были эквивалентными (равными асимптотически) при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись свойства*

$$\begin{aligned} &f_1(x) = f_2(x) + o(f_2(x)) \qquad (x \to a), \\ &f_2(x) \neq 0 \qquad (x \neq a). \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Из (6) следует, что

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1 + \varepsilon(x), \qquad \varepsilon(x) \to 0, \quad x \to a,$$

откуда

$$f_1(x) = f_2(x) + \varepsilon(x) f_2(x) = f_2(x) + o(f_2(x)), \qquad x \to a,$$

т.е. справедливо (7).

Обратно, пусть имеет место (7). Тогда

$$f_1(x) = f_2(x) + \varepsilon(x)\, f_2(x),$$

где $\varepsilon(x) \to 0,\ x \to a$. Отсюда

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1 + \varepsilon(x),$$

и после перехода к пределу при $x \to a$ получим (6).

Заметим, что если $f_1(x) \approx f_2(x),\ x \to a$, то, очевидно, и обратно $f_2(x) \approx f_1(x),\ x \to a$.

Теорема 2. *Пусть в окрестности точки a, за исключением, быть может, ее самой, заданы три функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $\Lambda(x)$. Если $f_1(x) \approx f_2(x)$ при $x \to a$, то*

$$\lim_{x\to a}\bigl(f_1(x)\,\Lambda(x)\bigr) = \lim_{x\to a}\bigl(f_2(x)\,\Lambda(x)\bigr). \tag{8}$$

Это равенство надо понимать в том смысле, что *если существует предел правой его части, то существует также, и притом ему равный, предел левой части, и обратно.*

Отсюда следует, что если один из пределов не существует, то не существует и второй.

Доказательство. Пусть существует предел, стоящий в правой части (8), равный A. Тогда, очевидно,

$$\lim_{x\to a}\bigl(f_1(x)\,\Lambda(x)\bigr) = \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\ \lim_{x\to a}\bigl(f_2(x)\,\Lambda(x)\bigr) = 1\cdot A = A.$$

Аналогично доказывается существование предела правой части (8) и равенство (8), если известно, что существует предел левой части (8).

Доказанная теорема очень проста, и в то же время она весьма важна. Для применения ее на практике надо знать побольше случаев эквивалентных пар функций.

Ниже мы приводим ряд таких случаев.

1) $\sin x \approx x \ \ (x \to 0)$, потому что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) $1 - \cos x \approx \frac{1}{2} x^2 \ \ (x \to 0)$, потому что

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Второе равенство в этой цепи верно на основании теоремы 2 в силу того, что $\sin(x/2) \approx x/2 \ \ (x \to 0)$.

3) $e^h - 1 \approx h \ \ (h \to 0)$, потому что если положить $e^h - 1 = z$, то $e^h = 1 + z, \ h = \ln(1+z)$ и

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\ln(1+z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\ln(1+z)^{1/z}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

При этом предпоследнее равенство верно, потому что $\ln u$ есть функция, непрерывная для $u > 0$ и, в частности, в точке $u = e$.

4) $\ln(1+u) \approx u \ \ (u \to 0)$, потому что

$$\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{1/u} = \ln e = 1.$$

5) $\sqrt[n]{1+u} - 1 \approx \frac{u}{n} \ \ (u \to 0), \ n = 1, 2, \ldots$, потому что

$$\frac{\sqrt[n]{1+u}-1}{\frac{u}{n}} = \frac{u}{\frac{u}{n}\left[(1+u)^{(n-1)/n} + (1+u)^{(n-2)/n} + \ldots + 1\right]} \to 1, \quad u \to 0.$$

Учесть, что функция $(1+u)^\alpha$ непрерывна в точке $u = 0$.

6) $\operatorname{tg} x \approx x \ \ (x \to 0)$, потому что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1,$$

так как $\cos x$ — непрерывная функция.

Например, в силу 2) и 5) и теоремы 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{3}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{3}\,. \tag{9}$$

Полезно следующее определение. Если для функции $\varphi(x)$ можно подобрать числа α и m, где $\alpha \neq 0$, такие, что $\varphi(x) \approx \alpha x^m, \ x \to 0$, то говорят, что *функция αx^m есть главный степенной член функции $\varphi(x)$*. Очевидно, что числа α, m однозначно зависят от функции $\varphi(x)$.

Правые части асимптотических равенств 1)–6) суть, очевидно, главные степенные члены левых частей. Общие методы нахождения главных степенных членов в более сложных случаях основаны на применении формулы Тейлора (см. далее § 5.11, примеры 3, 4, и § 5.14).

Если αx^m, βx^n $(\alpha, \beta \neq 0)$ суть главные степенные члены соответственно функций φ и ψ, то на основании теоремы 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^m}{\beta x^n} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta}, & m = n, \\ 0, & m > n, \\ \infty, & m < n. \end{cases} \tag{10}$$

Это рассуждение в частном случае было проведено при вычислении предела (9).

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 5.1. Производная

Перед чтением этой главы мы рекомендуем читателю прочесть еще раз § 1.5, где говорилось о том, как возникает понятие производной. А сейчас мы начинаем сразу с формального определения производной.

Производной от функции f в точке x называется предел, к которому стремится отношение ее приращения Δy в этой точке к соответствующему приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,. \qquad (1)$$

Заметим, что при фиксированном x величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть вполне определенная функция от Δx:

$$\psi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Если функция f определена в некоторой окрестности точки x, то функция $\psi(\Delta x)$ определена для достаточно малых, не равных нулю Δx, т.е. для Δx, удовлетворяющих неравенству $0 < |\Delta x| < \delta$, где δ — достаточно малое положительное число. При $\Delta x = 0$ она заведомо не определена. Вопрос о существовании производной функции f в точке x эквивалентен вопросу о существовании предела функции $\psi(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$.

Теорема 1. *Если функция f имеет производную в точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из существования конечного предела (1) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x),$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0,$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

А это последнее равенство выражает то, что функция f в точке x непрерывна.

Утверждение, обратное теореме 1, не верно: если функция f непрерывна в точке x, то отсюда не следует, что она имеет производную в этой точке (см. ниже).

Говорят, что функция f *имеет в точке x бесконечную производную, равную* $+\infty$ *или* $-\infty$ (случай ∞ исключается), *если в этой точке* $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ *или соответственно* $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$.

Наконец, введем понятия *правой* и *левой производной от функции* f *в точке* x:

$$f'_+(x) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \psi(0+0), \qquad f'_-(x) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \psi(0-0).$$

Для того чтобы существовала производная $f'(x)$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы существовали производные от f в точке x справа и слева и были равны между собой, тогда автоматически они равны $f'(x)$.

Это утверждение верно также, если в нем термин "производная" заменить на "бесконечная производная".

Функция, изображенная на рис. 5.1, *а*, имеет производную в точке x_0 — график в этой точке имеет (см. § 1.5) касательную (единственную). Функция, изображенная на рис. 5.1, *б*, не имеет производной, но существуют $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, не равные друг другу. Функции, изображенные на рис. 5.1, *в*, *г*, имеют бесконечные производные $f'(x_0) = +\infty$ и $f'(x_0) = -\infty$ соответственно, а функции на рис. 5.1, *д*, *е*, не имеют производных в точке x_0. В случае рис. 5.1, *д*, $f'_-(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = -\infty$, а в случае рис. 5.1, *е*, $f'_-(x_0) = -\infty$, $f'_+(x_0) = +\infty$.

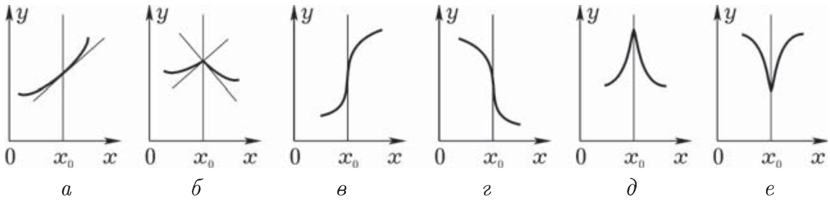

Рис. 5.1

Надо иметь в виду, что производная от функции в точке x есть функция от x. С этой точки зрения обозначение $f'(x)$ является весьма удобным, $f'(a)$ обозначает число — производную от функции f в точке a.

В § 1.5 были выведены формулы (1)–(3) производной от x^n, $n = 0, 1, \ldots$, от $\sin x$ и $\cos x$. Ниже выводится производная от показательной функции a^x, $a > 0$:

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{z\to 0} \frac{z}{\log_a(1+z)} = \\ = a^x \frac{1}{\lim\limits_{z\to 0} \log_a(1+z)^{1/z}} = \frac{a^x}{\log_a e} = a^x \ln a. \qquad (2)$$

Здесь мы воспользовались подстановкой $a^h - 1 = z \to 0$ $(h \to 0)$ и тем фактом, что функция $\log_a u$ для $u > 0$, в частности при $u = e$, непрерывна.

Если в последнем равенстве положить $a = e$, то получим

$$(e^x)' = e^x. \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию (рис. 5.2)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} \to \begin{cases} 1, & h > 0, \quad h \to 0, \\ -1, & h < 0, \quad h \to 0. \end{cases}$$

Производная от $|x|$ в точке $x = 0$ не существует, потому что правая производная в этой точке отлична от левой; в остальных точках производная от $|x|$ существует и равна

$$|x|' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

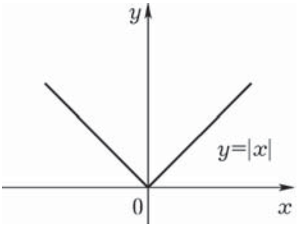

Рис. 5.2

Из рассмотрения графика видно, что функция $|x|$ непрерывна для любого x, в том числе и в точке $x = 0$. Это видно также из следующих выкладок:

$$\big|\,|x+h| - |x|\,\big| \leqslant |x + h - x| = |h| \to 0, \qquad h \to 0.$$

Функция $|x|$ интересна тем, что она непрерывна для любого x, но имеется такое значение x, именно $x = 0$, для которого она не имеет производной. В точке $x = 0$ графика этой функции не существует касательной.

Пример функции $|x|$ показывает, что обратное теореме 1 утверждение не верно.

В математике известны примеры функций f, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и не имеющих производной ни в одной точке этого отрезка (функция Вейерштрасса). Их графики невозможно нарисовать, но они могут быть заданы с помощью некоторых формул. Эти примеры мы не приводим здесь.

П р и м е р 1. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для рациональных } x, \\ x^2 & \text{для иррациональных } x \end{cases}$$

разрывна во всех точках $x \neq 0$, но в точке $x = 0$ имеет производную $f'(0) = 0$, потому что для h рациональных $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$ и для h иррациональных $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h^2-0}{h} = h \to 0$ $(h \to 0)$.

П р и м е р 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна на $(-\infty, +\infty)$; для всех $x \neq 0$ она имеет производную, но в точке $x = 0$ она не имеет даже правой производной и левой, потому что величина $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin \frac{1}{h}$ не имеет предела, когда $h \to 0$, оставаясь положительным или отрицательным.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x, то их сумма, разность, произведение и частное (при условии, что $v(x) \neq 0$) имеют производные и справедливы равенства

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{4}$$

$$(uv)' = uv' + u'v, \tag{5}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \qquad v \neq 0. \tag{6}$$

Доказательство (4) приведено в § 1.5. Докажем (5), (6). Придадим независимой переменной x приращение Δx. Пусть соответствующие приращения u и v будут Δu и Δv. Тогда

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = uv' + vu',$$

потому что из того, что v имеет производную, следует, что она непрерывна, т. е. что $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

В частности, если C — постоянная, то $(Cu)' = Cu' + C'u = Cu'$, потому что $C' = 0$.

Докажем (6):

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Несколько основных формул дифференцирования.

1. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{x\cdot 1' - 1\cdot x'}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2}, \quad x \neq 0.$

Более общая формула:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{x^n\cdot 1' - 1\cdot (x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \\ = -\frac{n}{x^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad x \neq 0.$$

Таким образом, справедлива формула

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{7}$$

обобщающая формулу (1) из § 1.5 на любые целые n.

Дальше мы увидим, что она остается верной и для нецелых n.

2. $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ = \frac{\cos x\ \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \tag{8}$$

3. $$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x\,(\cos x)' - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \tag{9}$$

§ 5.2. Дифференциал функции

Если функция f имеет в точке x производную, то существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Отсюда следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x, \quad \varepsilon(\Delta x) \to 0 \ \text{ при } \ \Delta x \to 0, \tag{1}$$

или

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0. \tag{1'}$$

Если ввести обозначение $A = f'(x)$, то равенство $(1')$ можно записать следующим образом:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0. \tag{2}$$

Говорят, что функция f *дифференцируема в точке* x, если ее приращение Δy в этой точке можно записать в виде (2), где A — некоторая константа, не зависящая от Δx (но вообще зависящая от x).

Из сказанного следует, что *если функция f имеет в точке x производную, то она дифференцируема в этой точке* ($A = f'(x)$).

Верно и обратное утверждение: *если функция f дифференцируема в точке x, т. е. ее приращение в точке x представимо в виде* (2), *то она имеет производную в точке x, равную числу A.*

В самом деле, пусть приращение Δy в точке x представимо в виде (2). Разделим обе части (2) на Δx и перейдем к пределу. Тогда

$$f'(x) = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} o(1) = A.$$

Таким образом, *для того чтобы функция f имела производную в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируемой в этой точке.*

Равенство (2) показывает, что если $A = f'(x) \neq 0$, то приращение функции эквивалентно при $\Delta x \to 0$ первому слагаемому правой части (2):

$$\Delta y \approx A\Delta x, \qquad \Delta x \to 0.$$

В этом случае (когда $A \neq 0$) член $A\Delta x$ называется *главным линейным членом приращения*. Главный член линейно (точнее, пропорционально) зависит от Δx. *Приближенно, пренебрегая бесконечно малой $o(\Delta x)$ высшего порядка, при малых Δx можно считать Δy равным главному члену.*

Главный линейный член приращения называют *дифференциалом* функции f в точке x (соответствующим приращению Δx независимой переменной x) и обозначают так:

$$dy = df = f'(x)\,\Delta x.$$

В целях симметрии приращение Δx независимой переменной обозначают еще через dx, полагая, таким образом, $\Delta x = dx$. Это соглашение не противоречит выражению $dx = x'\Delta x = \Delta x$ для дифференциала функции $y = x$ от x.

Таким образом, дифференциал функции f в точке x запишется так:

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{3}$$

Из этого равенства следует, что *производная от f в точке x равна $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, т. е. она равна отношению дифференциала функции f в точке x к соответствующему дифференциалу независимой переменной x.*

Надо иметь в виду, что *дифференциал dx независимой переменной не зависит от x, он равен Δx — произвольному приращению аргумента x. Что же касается дифференциала dy функции y (отличной от x), то он зависит от x и dx* (см. (3)).

Можно дать геометрическое представление указанных понятий.

Рассмотрим (рис. 5.3) график функции $y = f(x)$; A и B суть точки графика, соответствующие значениям x и $x + \Delta x$ независимой переменной. Ординаты точек A и B соответственно равны $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$. Приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ в точке x равно длине отрезка BD и представляется в виде суммы $\Delta y = BD = DC + CB$, где $DC = \operatorname{tg}\alpha\, \Delta x = f'(x)\, \Delta x$ и α есть угол между касательной в точке A к графику и положительным направлением оси x.

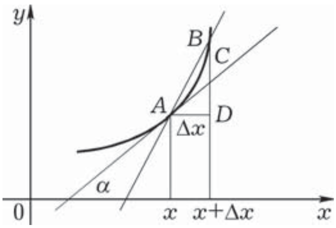

Рис. 5.3

Мы видим, что отрезок DC есть дифференциал функции f в точке x:

$$DC = dy = f'(x)\, \Delta x. \tag{4}$$

Таким образом, на долю второго члена CB приращения Δy приходится величина $o(\Delta x)$. Эта величина при больших Δx может быть даже больше, чем главный член, но она есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, когда $\Delta x \to 0$. При $f'(x) \neq 0$ для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех Δx, удовлетворяющих неравенству $|\Delta x| < \delta$, имеет место неравенство $CB/DC < \varepsilon$.

Отметим очевидные формулы:

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'\, dx = u'\, dx \pm v' dx = du \pm dv, \tag{5}$$

$$d(uv) = (uv)'\, dx = (uv' + u'v)\, dx = u\, dv + v\, du, \tag{6}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}\,. \tag{7}$$

П р и м е р 1. Нужно прикинуть, сколько материала истрачено на изготовление коробки кубической формы, если известно, что внутренний размер ребра коробки равен 10 *см*, а толщина стенок равна 0,1 *см*.

Объем куба есть функция $V(a) = a^3$ от длины его ребра a. Объем стенок коробки определяется как приращение функции

$$\Delta V = V(10 + 0{,}1) - V(10) \approx V'(10) \cdot 0{,}1 = 0{,}1[3a^2]_{a=10} = 300 \cdot 0{,}1 = 30(\textit{см}^3).$$

§ 5.3. Производная функции от функции

Т е о р е м а. *Пусть задана функция от функции* $z = F(x) = f(\varphi(x))$, *где* $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$. *При этом функция* φ *имеет производную в точке* x, *а функция* f *имеет производную в точке* y.

Тогда существует производная от F *в точке* x, *равная*

$$F'(x) = f'(y)\varphi'(x). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция f имеет производную в точке y, то она дифференцируема в этой точке (см. предыдущий параграф), т. е.

$$\Delta z = f'(y)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\,\Delta y, \qquad \varepsilon(\Delta y) \to 0 \ \text{ при } \ \Delta y \to 0. \tag{2}$$

Будем считать, что $\varepsilon(0) = 0$. Равенство (2) при таком соглашении останется верным $(0 = f'(y)0 + 0 \cdot 0)$.

Зададим приращение Δx независимой переменной x. Оно влечет за собой определенное приращение Δy функции $y = \varphi(x)$, которое, в свою очередь, влечет за собой приращение Δz функции $z = f(y)$, выраженное через Δy по формуле (2).

Но полученное число Δz есть в то же время приращение функции $z = F(x)$, соответствующее взятому нами приращению Δx в точке x.

Разделив обе части равенства (2) на Δx, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y)\,\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}\,. \tag{3}$$

Перейдя теперь к пределу при $\Delta x \to 0$, получим производную

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ = f'(y)\varphi'(x) + 0 \cdot \varphi'(x) = f'(y)\varphi'(x).$$

Заметим, что соглашение $\varepsilon(0) = 0$ было сделано на тот случай, когда при некоторых $\Delta x \neq 0$ будет $\Delta y = 0$.

Формула (1) может быть усложнена. Например, если $z = f(y)$, $y = \varphi(x)$, $x = \psi(\xi)$ и все три функции имеют производные в соответствующих точках, то $z'_\xi = z'_y y'_x x'_\xi$.

П р и м е р 1. Чтобы вычислить производную по переменной x от функции $z = \cos(\sin^3 x^2)$, вводим цепочку вспомогательных функций:

$$z = \cos u, \qquad u = v^3, \qquad v = \sin w, \qquad w = x^2.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = (\cos u)'(v^3)'(\sin w)'(x^2)' = \\ = -\sin u\,(3v^2)\cos w \cdot 2x = -6x\cos x^2\ \sin^2 x^2\ \sin(\sin^3 x^2).$$

Функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

называются соответственно *гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом.* Очевидно,

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x, \tag{4}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \operatorname{sh} x, \tag{5}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch} x\,(\operatorname{sh} x)' - \operatorname{sh} x\,(\operatorname{ch} x)'}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}, \tag{6}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{th} x}\right)' = -\frac{(\operatorname{th} x)'}{(\operatorname{th} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}\,\frac{(\operatorname{ch} x)^2}{(\operatorname{sh} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{sh} x)^2}. \tag{7}$$

§ 5.4. Производная обратной функции

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная строго монотонная, т. е. строго возрастающая или строго убывающая, функция $y = f(x)$. Пусть образ (a, b) есть интервал (A, B). Тогда обратная к f функция $x = \varphi(y)$ есть однозначная непрерывная и строго монотонная на (A, B) функция (см. § 4.5).

Зафиксируем $x \in (a, b)$ и дадим ему приращение $(x + \Delta x \in (a, b))$. Тогда f получит соответствующее приращение Δy $(y, y + \Delta y \in (A, B))$ такое, что $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Наоборот, $\varphi(y + \Delta y) = x + \Delta x$.

Вследствие непрерывности прямой и обратной функций для указанных Δx и Δy имеет место утверждение: из $\Delta x \to 0$ следует $\Delta y \to 0$, и обратно.

Пусть теперь функция φ в точке y имеет неравную нулю производную $\varphi'(y)$. Покажем, что в таком случае функция f также имеет в соответствующей точке x производную. В самом деле,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Так как из того, что $\Delta x \to 0$, следует, что $\Delta y \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

и мы получили

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \tag{1}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}. \tag{1'}$$

Этим доказано, что *если $y = f(x)$ есть строго монотонная непрерывная функция и $x = \varphi(y)$ — обратная к ней функция, имеющая в точке y производную $\varphi'(y) \neq 0$, то функция f имеет в соответствующей точке x производную, определяемую формулой* (1).

Может случиться, что в точке y $\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \infty$. В этом случае, очевидно, функция f имеет в точке x производную $f'(x) = 0$.

Если же $\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 0$, то для строго возрастающей функции при этом $\frac{\Delta x}{\Delta y} > 0$, а для строго убывающей $\frac{\Delta x}{\Delta y} < 0$. В первом случае $f'(x) = +\infty$, а во втором $f'(x) = -\infty$.

Производная $\log_a x$. На основании доказанной теоремы, если $y = \log_a x$, имеем

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\left(a^y\right)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}, \qquad a > 0.$$

В случае натурального логарифма производная имеет особенно простой вид

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

Этим объясняется, что в математическом анализе, по крайней мере в теоретических рассуждениях, предпочитают рассматривать логарифмические функции по основанию e.

Функция $\ln x$ как действительная функция определена только для положительных значений x *).

Но можно рассматривать функцию $\ln |x|$, которая определена как для положительных, так и для отрицательных x. Ее график симметричен относительно оси y, а для положительных x совпадает с графиком $\ln x$ (рис. 5.4).

Функция $\ln |x|$ будет играть большую роль в интегральном исчислении. Ее производная при $x \neq 0$ равна

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} \operatorname{sign} x = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0,$$

где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad x > 0, \\ -1 & \text{для} \quad x < 0 \end{cases}$$

*) Для отрицательных x функция $\ln x$ также может быть естественно определена как комплексная функция. Но эти вопросы нас здесь не интересуют.

(см. далее § 8.1, второй пример таблицы неопределенных интегралов).

Для производной от степенной функции x^n $(x > 0)$, где n — любое действительное число, имеет место формула

$$\left(x^n\right)' = \left(e^{n \ln x}\right)' = \frac{n}{x}\, e^{n \ln x} = n x^{n-1}, \tag{2}$$

обобщающая формулу (1) из § 1.5.

Производные обратных тригонометрических функций. Функция $y = \arcsin x$ строго возрастает на отрезке $[-1, +1]$

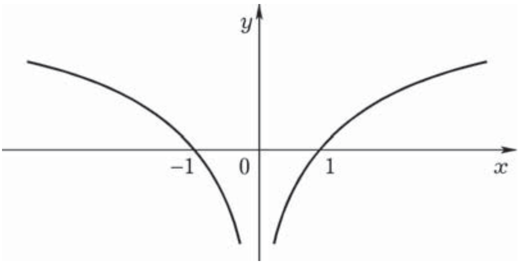

Рис. 5.4

и отображает этот отрезок на $[-\pi/2, \pi/2]$. Обратная к ней функция $x = \sin y$ имеет производную $(\sin y)' = \cos y$, положительную на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Поэтому

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$

Здесь берется арифметическое значение корня (со знаком $+$). Следовательно,

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ строго возрастает на действительной оси $(-\infty, +\infty)$ и отображает ее на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. Обратная к ней функция $x = \operatorname{tg} y$ имеет производную $(\operatorname{tg} y)' = \sec^2 y$, не равную нулю на этом интервале. Поэтому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Упражнение. Доказать равенство $\left(\log_x a\right)' = -\dfrac{(\log_x a)^2}{x \ln a}$.

§ 5.5. Таблица производных простейших элементарных функций

$(C)' = 0 \quad (C$ — постоянная);

$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

$\left(a^x\right)' = \ln a \cdot a^x, \quad a > 0;$

$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \quad x > 0;$

$(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}, \quad x > 0, \ a > 0;$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0;$

$(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0;$

$(|x|)' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x;$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x;$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$

$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{ch} x)^2};$

$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{(\operatorname{sh} x)^2}.$

Упражнения.

Показать, что *):

1. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{ax^2+bx+c} = \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}.$
2. $\dfrac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$
3. $\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$
4. $\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)' = \mp\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (верхний знак соответствует $x > -1$, а нижний $x < -1$).
5. $(x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = x^x(1+\ln x), \quad x > 0.$
6. $(\ln|\operatorname{tg} x|)' = \dfrac{1}{\sin x\,\cos x}$, откуда $\left(\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|\right)' = \dfrac{1}{\sin x}.$
7. $\dfrac{a^2}{2}\left(\arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)' = \sqrt{a^2-x^2}.$
8. $(|x|^p)' = \begin{cases} p|x|^{p-2}x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \quad (p > 1). \end{cases}$

*) Формулы 1–7 полезно иметь в виду при вычислении неопределенных интегралов.

§ 5.6. Производные и дифференциалы высшего порядка

Производная от функции f есть снова функция. Поэтому можно попытаться взять от нее производную. Полученная функция (если она существует) называется *второй производной от* $f(x)$ и обозначается через $f''(x)$. Таким образом,

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

По индукции *производная* $f^{2n(}(x)$ *порядка* n определяется как первая производная от производной $f^{2n-)(}(x)$ порядка $(n-1)$:

$$f^{2n(}(x) = \big(f^{2n-)(}(x)\big)'.$$

Конечно, производная n-го порядка от данной функции f в данной точке x может существовать и не существовать.

Если говорят, что функция f имеет производную n-го порядка в точке x, то этим самым утверждают, что она имеет в достаточно малой окрестности точки x производную $f^{2n-)(}(x)$ порядка $(n-1)$, которая имеет производную в точке x. Эта последняя обозначается через $f^{2n(}(x)$ и называется производной порядка n от f в точке x.

Функция x^m, где m — целое положительное число, имеет на всей действительной оси производную любого порядка

$$(x^m)^{2n(} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

При $n > m$ $(x^m)^{2n(} \equiv 0$.

Степенная функция x^a, где a — произвольное действительное число, имеет для $x > 0$ производную любого порядка n, определяемую по аналогичной формуле

$$(x^a)^{2n(} = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}. \tag{1}$$

Очевидно,

$$(a^x)^{2n(} = (\ln a)^n a^x, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad a > 0, \tag{2}$$

и, в частности,

$$(e^x)^{2n(} = e^x, \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{3}$$

Нетрудно проверить формулы

$$(\sin x)^{2n(} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

$$(\cos x)^{2n(} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Если $s = f(t)$ есть функция, выражающая зависимость прямолинейного пути, пройденного точкой, от времени t, то вторая производная $s'' = f''(t)$ есть ускорение точки в момент t. В дальнейшем мы увидим, что знание второй производной от функции имеет большое значение при изучении поведения графика этой функции.

Формула Лейбница. *Если функция $f = uv$, где u, v — в свою очередь функции, имеющие в некоторой точке производные порядка n, то f имеет производную n-го порядка в этой точке, выражаемую по формуле Лейбница*:

$$f^{(n)} = uv^{(n)} + C_n^1 u'v^{(n-1)} + C_n^2 u''v^{(n-2)} + \ldots + u^{(n)}v = \\ = \sum_{l=0}^{n} C_n^l u^{(l)} v^{(n-l)}, \qquad (6)$$

где C_n^l — биномиальные коэффициенты, $u^{(0)} = u$ (см. § 5.9, (6) и (7)).

Доказательство этой формулы проводится по индукции. При $n = 1$ она очевидна. Если предположить, что она верна при n, то ее верность при $n+1$ получается из следующих выкладок:

$$f^{(n+1)} = \frac{d}{dx}\sum_{l=0}^{n} C_n^l u^{(l)} v^{(n-l)} = \sum_{l=0}^{n} C_n^l u^{(l+1)} v^{(n-l)} + \\ + \sum_{l=0}^{n} C_n^l u^{(l)} v^{(n-l+1)} = \sum_{s=1}^{n+1} C_n^{s-1} u^{(s)} v^{(n+1-s)} + \sum_{l=0}^{n} C_n^l u^{(l)} v^{(n+1-l)} = \\ = C_n^0 u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{l=1}^{n} \left(C_n^{(l-1)} + C_n^l\right) u^{(l)} v^{(n+1-l)} + C_n^n u^{(n+1)} v^{(0)} = \\ = \sum_{l=0}^{n+1} C_{n+1}^l u^{(l)} v^{(n+1-l)},$$

так как $C_{n+1}^0 = C_n^0 = C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$ и $C_{n+1}^l = C_n^l + C_n^{l-1}$, $l = 1, \ldots, n$.

Во втором равенстве переменный индекс l заменен на $s = l + 1$, а в третьем — переменный индекс s формально заменен на l.

Пример 1.

$$(x\sin x)^{(100)} = x\sin\left(x + 100\frac{\pi}{2}\right) + 100 \cdot 1 \cdot \sin\left(x + 99\frac{\pi}{2}\right) = x\sin x - 100\cos x.$$

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на некотором интервале (a, b). Ее можно бесконечным числом способов записать в виде

$$y = \varphi(\psi(x)) = f(x), \qquad x \in (a, b). \qquad (7)$$

Ниже будем употреблять следующую терминологию: переменная y есть функция ($y = f(x)$) от *независимой* переменной x; эта же самая переменная y есть функция от *зависимой переменной* u ($y = \varphi(u)$, $u \neq x$). Последняя зависит от независимой переменной x ($u = \psi(x)$). *Таким образом, роль переменной x здесь носит исключительный характер — она в этих рассуждениях будет фигурировать только как независимая переменная.*

Дифференциал функции будем называть *дифференциалом первого порядка*, в отличие от дифференциалов второго, третьего и вообще высшего порядка, которые мы собираемся ввести ниже.

Как мы знаем, первый дифференциал от f определяется по формуле

$$dy = f'(x)\,dx, \tag{8}$$

где x — независимый аргумент.

С другой стороны,

$$dy = f'(x)\,dx = \varphi'(u)\,\psi'(x)\,dx = \varphi'(u)\,du, \tag{9}$$

и мы выразили первый дифференциал dy через u.

Равенство (9) замечательно вот с какой точки зрения. Мы определили дифференциал dy функции y как произведение производной от y по *независимой* переменной x на дифференциал dx. Оказывается, что dy можно определить так же, как произведение производной от y по *зависимой* переменной u на дифференциал du. При этом имеют место равенства

$$dy = y'_x\,dx = y'_u\,du, \tag{10}$$

если, конечно, дифференциал du, стоящий в третьем члене (10), соответствует именно тому dx, которое стоит во втором члене (10).

В этом смысле говорят, что форма $dy = \varphi'(u)\,du$ записи первого дифференциала *инвариантна относительно любой переменной u*. Для дифференциалов второго и более высокого порядка инвариантность уже не имеет места.

Дифференциалом функции второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка:

$$d^2y = d(dy).$$

Вообще, по индукции *дифференциалом n-го порядка* называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

При этом при вычислении этих дифференциалов считают, что дифференциал от дифференциала независимой переменной равен нулю:

$$d^2x = d(dx) = 0,$$

т. е. dx рассматривается как постоянная.

В терминах переменной x дифференциалы высшего порядка вычисляются очень просто:

$$\begin{aligned}
dy &= f'(x)\,dx,\\
d^2y &= d(f'(x))\,dx = f''(x)\,dxdx = f''(x)\,dx^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
d^ny &= d\big(f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}\big) = f^{(n)}(x)\,dx^{n-1}\cdot dx = f^{(n)}(x)\,dx^n.
\end{aligned}$$

Таким образом, дифференциал n-го порядка от функции f равен произведению производной n-го порядка по независимой переменной x на n-ю степень дифференциала dx:

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}, \tag{11}$$

т. е. n-я производная от f равна отношению n-го дифференциала от f к степени $(dx)^n$.

Выражением $\frac{d^ny}{dx^n}$ широко пользуются для обозначения n-ой производной $f^{(n)}(x)$ по независимой переменной x.

Формальная замена в формуле (11) независимой переменной x на зависимую u, вообще говоря, неверна, как это будет видно ниже.

Пусть теперь первый дифференциал от y выражен через зависимую переменную u:

$$dy = f'(u)\,du.$$

Тогда

$$d^2y = df'(u)\cdot du + f'(u)\,d(du) = f''(u)\,du^2 + f'(u)d^2u. \tag{12}$$

Здесь d^2u равно нулю только в случае, когда u есть линейная функция ($u = ax + b,\ a, b$ — константы).

Таким образом, вообще говоря, $d^2u \neq 0$.

Третий дифференциал от y в терминах переменной u имеет, очевидно, вид

$$\begin{aligned}
d^3y &= f'''(u)\,du^3 + f''(u)\,d(du^2) + f''(u)\,du\,d^2u + f'(u)\,d^3u =\\
&= f'''(u)\,du^3 + 2f''(u)\,du\,d^2u + f''(u)\,du\,d^2u + f'(u)\,d^3u =\\
&= f'''(u)\,du^3 + 3f''(u)\,du\,d^2u + f'(u)\,d^3u.
\end{aligned}$$

Мы видим, что выражения для дифференциалов с повышением их порядка сильно усложняются.

§ 5.7. Возрастание и убывание функции на интервале и в точке. Локальный экстремум

Функция f называется *строго возрастающей на интервале* (a, b) (или *отрезке* $[a, b]$), если для любых точек x_1, x_2 из (a, b) (или $[a, b]$), удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция f называется *неубывающей на* (a, b) (или $[a, b]$), если из того, что $x_1, x_2 \in (a, b)$ (или $[a, b]$) и $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Аналогично, функция f называется *строго убывающей*, соответственно *невозрастающей* на (a, b) (или $[a, b]$), если из того, что $x_1 < x_2$ и $x_1, x_2 \in (a, b)$ (или $[a, b]$), следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x. Тогда для достаточно малых Δx имеет смысл ее приращение в точке x:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

По определению функция f:

1) *возрастает в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0, \qquad 0 < |\Delta x| < \delta; \tag{1}$$

2) *убывает в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0, \qquad 0 < |\Delta x| < \delta; \tag{2}$$

3) *достигает локального максимума в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Delta y \leqslant 0, \qquad |\Delta x| < \delta; \tag{3}$$

4) *достигает локального минимума в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Delta y \geqslant 0, \qquad |\Delta x| < \delta. \tag{4}$$

Подчеркнем, что все неравенства (1)–(4) должны соблюдаться для достаточно малых Δx, положительных и отрицательных.

Указанные четыре свойства можно еще выразить так: для всех точек $x' \in (x - \delta, x)$ и для всех точек $x'' \in (x, x + \delta)$ имеет место:

1) $f(x') < f(x) < f(x'')$;

2) $f(x') > f(x) > f(x'')$;

и для всех точек $x' \in (x - \delta, x + \delta)$:

3) $f(x') \leqslant f(x)$;

4) $f(x') \geqslant f(x)$,

т. е. в случае 3) значение f в точке x *является максимальным в достаточно малой окрестности* x и в случае 4) значение f в точке x *является минимальным в достаточно малой окрестности* x.

Локальные максимум или минимум называют локальным *экстремумом.*

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос, как узнать, что имеет место тот или иной из приведенных четырех случаев, если известны производные от f первого или более высокого порядка в точке x или по соседству с ней.

Допустим, что функция f в точке x имеет положительную производную: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) > 0$. Таким образом, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, являющаяся при фиксированном x функцией от Δx, стремится к положительному числу. Но тогда (см. теорему 2 § 4.1) и сама эта величина должна быть положительной для всех Δx, удовлетворяющих неравенству $|\Delta x| < \delta$, при достаточно малом δ, т. е. согласно определению 1) функция f в точке x должна возрастать.

Аналогично доказывается, что если $f'(x) < 0$, то f убывает в точке x. Мы доказали следующую теорему.

Т е о р е м а. *Если функция f в точке x имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) в этой точке.*

Из этой теоремы немедленно следует

Т е о р е м а Ф е р м а́. *Если функция f достигает в точке x локального экстремума (максимума или минимума) и в ней существует производная $f'(x)$, то последняя равна нулю ($f'(x) = 0$).*

В самом деле, если бы $f'(x) \neq 0$, то в силу предыдущей теоремы функция должна была быть возрастающей или убывающей в точке x, что исключает возможность существования экстремума функции в этой точке.

Эту теорему можно сформулировать и так:

Для того чтобы функция f, имеющая в точке x производную, достигала в ней локального экстремума, необходимо, чтобы производная от f в этой точке была равна нулю.

Конечно, условия $f'(x) = 0$ недостаточно, чтобы функция имела в x локальный экстремум. Если $f'(x) = 0$, то функция f может не иметь локального экстремума в точке x. Она может в этой точке возрастать, как это имеет место, например, для функции x^3 при $x = 0$, убывать (например, $f(x) = -x^3$ при $x = 0$), а может точка x и не быть ни точкой возрастания, ни убывания, ни точкой экстремума функции. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{5}$$

имеет производную $f'(0) = 0$, потому что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

(ведь $|\sin 1/x| \leqslant 1$). С другой стороны, в любой как угодно малой окрестности $|x| < \delta$ точки 0 как справа, так и слева от нее f принимает положительные и отрицательные значения. Поэтому точка 0 не является ни точкой возрастания, ни точкой убывания, ни точкой экстремума функции f.

В следующем параграфе мы переходим к очень важным теоремам, называемым теоремами о среднем. С их помощью будет весьма удобно получить дальнейшие заключения, относящиеся к теории локальных экстремумов.

§ 5.8. Теоремы о среднем значении. Критерии возрастания и убывания функции на интервале. Достаточные критерии локальных экстремумов

Теорема Ролля*). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах его ($f(a) = f(b)$).*

Тогда на интервале (a, b) есть хотя бы одна точка c, где производная от f равна нулю ($f'(c) = 0$).

Доказательство. Пусть M и m — соответственно максимум и минимум f на отрезке $[a, b]$. Они существуют в силу непрерывности f на $[a, b]$. Если выполняются равенства $M = m = f(a)$, то $f(x) = M$ для всех $x \in [a, b]$ и $f'(c) = 0$ в любой точке $c \in (a, b)$. Если же указанные равенства одновременно не выполняются, то по крайней мере одно из чисел M или m отлично от числа $f(a) = f(b)$, пусть для определенности M. Но тогда максимум функции f на отрезке $[a, b]$ достигается в некоторой точке c интервала (a, b) и, следовательно, в этой точке f имеет также локальный максимум. Так как в точке c производная $f'(c)$ существует, то по теореме Ферма она равна нулю. Случай $m \neq f(a)$ разбирается аналогично. Теорема доказана.

Теорема Коши о среднем. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют производные на интервале (a, b), одновременно не обращающиеся в нуль. При этом $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$ **).*

Тогда на интервале (a, b) найдется точка c, для которой выполняется равенство

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}, \qquad a < c < b. \tag{1}$$

Доказательство. Вводим функцию

$$F(x) = (\psi(b) - \psi(a))\,\varphi(x) - (\varphi(b) - \varphi(a))\,\psi(x).$$

---

*) М. Ролль (1652–1719) — французский математик, доказавший эту теорему для многочленов.

**) Заметим, что, например, условие $\varphi'(x) \neq 0$ на (a, b) влечет за собой $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$.

Она, очевидно, непрерывна на $[a, b]$ и имеет производную на интервале (a, b). Кроме того, $F(a) = F(b)$. Поэтому по теореме Ролля найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $F'(c) = 0$, т. е.

$$(\varphi(b) - \varphi(a))\, \psi'(c) = (\psi(b) - \psi(a))\, \varphi'(c). \tag{2}$$

Число $\varphi'(c) \neq 0$, потому что в противном случае в силу того, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, было бы $\psi'(c) = 0$, но $\varphi'(c)$ и $\psi'(c)$ по условию одновременно не равны нулю. Поэтому произведение $(\varphi(b) - \varphi(a))\varphi'(c) \neq 0$. Разделив на него левую и правую части равенства (2), получим (1).

Как следствие из теоремы Коши при $\varphi(x) = x$ и $\psi = f$ получим теорему Лагранжа.

Теорема Лагранжа о среднем*). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную на интервале (a, b). Тогда на (a, b) существует точка c, для которой выполняется равенство*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \qquad a < c < b. \tag{3}$$

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл, если записать ее в таком виде:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad a < c < b.$$

Левая часть этого равенства есть тангенс угла наклона к оси x хорды, стягивающей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$, а правая часть есть тангенс угла наклона касательной к графику в некоторой промежуточной точке $c \in (a, b)$. Теорема Лагранжа утверждает, что если кривая (рис. 5.5) есть график непрерывной на $[a, b]$ функции, имеющей производную на (a, b), то на этой кривой существует точка, соответствующая некоторой абсциссе c, $a < c < b$, такая, что касательная к кривой в этой точке параллельна хорде, стягивающей концы кривой $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

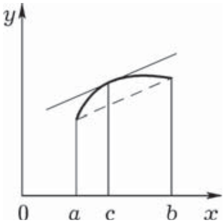

Рис. 5.5

Равенство (3) называется *формулой (Лагранжа) конечных приращений*. Промежуточное значение c удобно записывать в виде

$$c = a + \theta(b - a),$$

где θ есть некоторое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \theta < 1$. Тогда формула Лагранжа примет вид

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a + \theta(b - a)), \qquad 0 < \theta < 1. \tag{4}$$

Она верна, очевидно, не только для $a < b$, но и для $a \geqslant b$.

*) Ж. Лагранж (1736–1813) — французский математик.

Теорема 1. *Функция, непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *и имеющая неотрицательную (положительную) производную на интервале* (a, b), *не убывает (строго возрастает) на* $[a, b]$.

Действительно, пусть $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$; тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются условия теоремы Лагранжа. Поэтому найдется на интервале (x_1, x_2) точка c, для которой

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c), \qquad x_1 < c < x_2.$$

Если по условию $f' \geqslant 0$ на (a, b), то $f'(c) \geqslant 0$ и

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0; \tag{5}$$

если же $f' > 0$ на (a, b), то $f'(c) > 0$ и

$$f(x_2) - f(x_1) > 0. \tag{6}$$

Так как неравенства (5) и (6) имеют место, каковы бы ни были x_1, x_2, где $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, то в первом случае f не убывает, а во втором f строго возрастает на отрезке $[a, b]$.

Теорема 2. *Если функция имеет на интервале* (a, b) *производную, равную нулю, то она постоянна на* (a, b).

В самом деле, на основании теоремы Лагранжа имеет место

$$f(x) - f(x_1) = (x - x_1)f'(c),$$

где x_1 — фиксированная точка интервала (a, b), x — произвольная его точка (она может находиться справа и слева от x_1) и c — некоторая, зависящая от x_1 и x, точка, находящаяся между x_1 и x. Так как по условию $f'(x) \equiv 0$ на (a, b), то $f'(c) = 0$ и $f(x) = f(x_1) = C$ для всех $x \in (a, b)$.

Заметим, что в приведенных теоремах ослабление налагаемых в них условий может привести к неверности утверждений.

Например, функция $f(x)$, определяемая равенствами

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1/2, \\ 1 - x, & 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

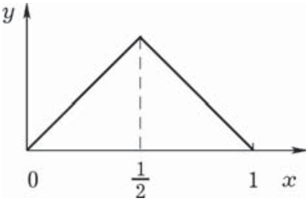

Рис. 5.6

(рис. 5.6), очевидно, непрерывна на отрезке $[0, 1]$, равна нулю на его концах и имеет производную во всех точках $(0, 1)$, за исключением только одной точки $x = 1/2$, и для нее уже, очевидно, не выполняется теорема Лагранжа.

Докажем теорему, которая дает достаточный критерий существования локального экстремума функции.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна в окрестности точки x_0 и имеет производную $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) справа от x_0, $f'(x) \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) слева от x_0, то x_0 есть точка локального минимума (максимума) f.*

Выражение "справа (слева) от x_0" означает "на достаточно малом интервале с левым (правым) концом x_0".

На основании теоремы 1 функция f справа от x_0 не убывает (не возрастает), а слева не возрастает (не убывает), и так как f непрерывна в окрестности точки x_0, то она имеет в этой точке локальный минимум (максимум).

Заметим, что в этой теореме существование производной в самой точке x_0 не предполагалось.

Следующая теорема дает достаточный критерий существования локального экстремума функции по знаку второй производной.

Теорема 4. *Если функция f удовлетворяет условиям $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то x_0 есть точка локального минимума (максимума) функции f.*

Доказательство. Существование второй производной в точке f влечет за собой существование первой производной $f'(x)$ в окрестности точки x_0 и, тем более, непрерывность f в этой окрестности. Из того, что $f''(x_0) > 0$ (< 0), следует, что $f'(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0, и так как $f'(x_0) = 0$, то справа от x_0 $f' > 0$ (< 0), а слева от x_0 $f' < 0$ (> 0). Теперь утверждение теоремы следует из предыдущей теоремы.

Мы знаем, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, имеющая всюду на интервале (a, b) положительную производную, строго возрастает на отрезке $[a, b]$. С другой стороны, пример, который приводится ниже, показывает, что если непрерывная в окрестности точки $x = 0$ функция f имеет положительную производную в этой точке, то отсюда не следует, что f возрастает в некоторой достаточно малой окрестности $x = 0$.

Таким образом, возрастание функции в точке не влечет, вообще говоря, ее возрастание в некоторой окрестности этой точки.

Пример 1. Функция $F(x) = \frac{x}{2} + f(x)$, где f определяется равенством (5) предыдущего параграфа, имеет производную $F'(0) = \frac{1}{2} + f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ в точке $x = 0$ и, следовательно, возрастает в этой точке. В то же время она не возрастает на любом интервале, содержащем эту точку. Действительно, для $x \neq 0$

$$F'(x) = \frac{1}{2} - \cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}.$$

При $x_k = 1/k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$)

$$F'(x_k) = \frac{1}{2} - (-1)^k,$$

откуда видно, что в любом интервале, содержащем в себе нулевую точку, производная F' принимает значения разных знаков и, следовательно, F не изменяется на нем монотонно.

П р и м е р 2. На отрезке $[-1, e]$ дана функция

$$\psi(x) = \begin{cases} x\ln|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Она непрерывна, имеет конечную производную всюду на $[-1, e]$, за исключением $x = 0$, где

$$\psi'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\psi(h) - \psi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln|h| = -\infty. \tag{7}$$

Из (7) следует, что ψ в точке $x = 0$ убывает. Уравнение $\psi'(x) = 1 + \ln|x| = 0$ имеет два корня: $x_1 = -1/e$, $x_2 = 1/e$. Кроме того, $\psi''(x) = 1/x$ $(x \neq 0)$ и $\psi''(-1/e) < 0$, $\psi''(1/e) > 0$, следовательно, $-1/e$ есть точка локального максимума, а $1/e$ — точка локального минимума.

П р и м е р 3. График функции

$$x = \frac{t^2 - a}{b + 2t\sqrt{c}}, \quad b^2 - 4ac < 0, \quad c > 0,$$

распадается на две непрерывные ветви, соответствующие изменению t на $(-\infty, -b/2\sqrt{c}\,)$, $(-b/2\sqrt{c}\,, +\infty)$. На каждом из этих интервалов функция монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Это легко видеть, если учесть, что в силу условия $b^2 - 4ac < 0$ производная $x' > 0$ и при $t = -b/2\sqrt{c}$ выражение $(t^2 - a) = b^2/(4c) - a$ меньше нуля.

§ 5.9. Формула Тейлора

При помощи формулы Тейлора *) можно по данным значениям $f(a)$, $f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)$ функции f и ее производных в точке a и некоторым сведениям о производной $f^{(n)}$ в окрестности этой точки узнать приближенно, часто с большой точностью, значение f в точках этой окрестности.

Средством приближения являются специально строящиеся по указанным значениям многочлены, называемые *многочленами Тейлора* данной функции.

Мы начнем с того, что выведем формулу Тейлора для многочлена

$$P(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n. \tag{1}$$

Зададим произвольное число a и в правой части равенства (1) произведем замену x на $(x - a) + a$:

$$P(x) = b_0 + b_1[(x - a) + a] + \ldots + b_n[(x - a) + a]^n.$$

Затем раскроем квадратные скобки и приведем подобные при одинаковых степенях $x - a$. В результате получим равенство

$$P(x) = \beta_0 + \beta_1(x - a) + \ldots + \beta_n(x - a)^n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x - a)^k, \tag{2}$$

где β_k — постоянные, зависящие от исходных коэффициентов b_k.

*) Б. Тейлор (1685–1731) — английский математик.

Равенство (2) называется *разложением многочлена $P(x)$ по степеням $x-a$*, а числа β_k называются *коэффициентами* данного разложения.

С этой точки зрения исходное равенство (1) можно трактовать как разложение $P(x)$ по степеням x, т. е. по степеням $x-a$, где $a=0$.

Будем последовательно дифференцировать равенство (2):

$$P'(x) = \beta_1 + 2\beta_2(x-a) + 3\beta_3(x-a)^2 + \ldots,$$
$$P''(x) = 2\beta_2 + 3\cdot 2\beta_3(x-a) + 4\cdot 3\beta_4(x-a)^2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P^{(k)}(x) = k!\,\beta_k + (k+1)k\ldots 2\beta_{k+1}(x-a) + \ldots$$

В последнем равенстве, определяющем k-ю производную, положим $x=a$. Тогда в правой части все члены, начиная со второго, обратятся в нуль, и мы получим $P^{(k)}(a) = k!\,\beta_k,\ k=0,1,2,\ldots$ При этом, как обычно, мы считаем, что $P^{(0)}(a) = P(a),\ 0! = 1$. Итак, коэффициенты β_k разложения (2) многочлена $P(x)$ по степеням $x-a$ необходимо выражаются по формуле

$$\beta_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k=0,1,2,\ldots \tag{3}$$

Отсюда, в частности, следует, что один и тот же многочлен $P(x)$ степени n можно разложить по степеням $x-a$ единственным образом, т. е. если для всех значений x

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n}\beta_k(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n}\beta'_k(x-a)^k,$$

где β_k, β'_k — постоянные, то

$$\beta_k = \beta'_k, \qquad k=0,1,\ldots,n.$$

Ведь как числа β_k, так и β'_k вычисляются по одной и той же формуле (3).

Итак,

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{4}$$

Формула (4) называется *формулой Тейлора по степеням $x-a$ для многочлена $P(x)$ степени n.*

Формулу Тейлора по степеням x, т. е. выражение

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\, x^k, \tag{5}$$

называют также *формулой Маклорена.*

Пример 1 (бином Ньютона). Рассмотрим многочлен n-й степени

$$P(x) = (a + x)^n,$$

где a — произвольное число, а n — натуральное число. Его k-я производная равна

$$P^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)(a+x)^{n-k},$$

откуда $P^{(k)}(0) = n(n-1)\ldots(n-k+1)a^{n-k}$ и, следовательно, на основании формулы Маклорена для многочлена n-й степени будем иметь

$$\begin{aligned}(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}\, a^{n-2}x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\, a^{n-3}x^3 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n-1)!}\, ax^{n-1} + x^n.\end{aligned} \tag{6}$$

Это равенство называется *формулой бинома Ньютона.*

Если ввести обычное обозначение

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \qquad C_n^n = C_n^0 = 1, \tag{7}$$

то формула бинома Ньютона может быть записана в более компактной форме:

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k. \tag{6$'$}$$

Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами.*

Отметим, что если числитель и знаменатель дроби в (7) помножить на $(n-k)!$, то получим

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{7$'$}$$

Случай $k = 0$ тоже включается в эту формулу. Ведь $0! = 1$.

Другое важное свойство биномиальных коэффициентов выражается равенством

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

Доказательство его предоставляем читателю. Если учесть, что $C_n^0 = C_n^n = 1$, то с помощью последнего равенства можно легко получить последовательно числа C_n^k для любых n и k, всякий раз пользуясь только одним действием сложения.

Выше мы вывели формулу Тейлора для многочлена. Пусть теперь в окрестности точки a задана функция f, не являющаяся многочленом степени $n-1$, но имеющая там производные до n-го порядка включительно *).

Вычислим числа $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)$ и составим при их помощи функцию

$$Q(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \qquad (8)$$

Очевидно, Q есть многочлен степени $n-1$. Он называется *многочленом Тейлора,* именно $(n-1)$*-м многочленом Тейлора, функции* f по степеням $x-a$.

Положим

$$f(x) = Q_{n-1}(x) + R_n(x), \qquad (9)$$

где Q_{n-1} есть $(n-1)$-й многочлен Тейлора функции f по степеням $x-a$.

Равенство (9) называется *формулой Тейлора функции* f *в окрестности точки* a, а $R_n(x)$ называется *остаточным членом* или n*-м остатком* рассматриваемой формулы Тейлора.

Замечательно, что для остаточного члена можно дать нетривиальные выражения через n-ю производную от f. Ниже мы выведем два таких выражения: *остаточный член в форме Лагранжа* и *остаточный член в форме Коши.*

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа выглядит следующим образом:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \qquad \xi \in (a, x),$$

где ξ есть некоторая (зависящая от x и n) точка интервала (a, x). Здесь и далее x можно считать не только бо́льшим, но и ме́ньшим, чем a **). Обычно точное значение ξ неизвестно, утверждается лишь, что ξ находится где-то на интервале (a, x).

Бывает удобно число ξ записать в виде $\xi = a + \theta(x-a)$, где θ есть некоторое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \theta < 1$. При таком обозначении остаточный член в форме Лагранжа имеет следующий вид:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), \qquad 0 < \theta < 1.$$

*) На самом деле все выводы в этом параграфе проходят при менее ограничительных условиях, налагаемых на f (см. ниже формулировку теоремы 1).

**) Если $x < a$, то (a, x), $[a, x]$ обозначают множества точек t, удовлетворяющих соответственно неравенствам $x < t < a$, $x \leqslant t \leqslant a$.

Остаточный член формулы Тейлора в форме Коши выглядит так:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(a+\theta(x-a)), \qquad 0<\theta<1,$$

где θ — число, зависящее от x и n.

Отметим, что при $n = 1$ формула Тейлора функции с остаточным членом в форме Лагранжа (или Коши) есть уже известная нам формула Лагранжа о среднем значении:

$$f(x)-f(a) = (x-a)f'(a+\theta(x-a)), \qquad 0<\theta<1.$$

Соответствующая теорема гласит:

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,x]$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно и имеет производную порядка n на интервале (a,x).*

Тогда ее n-й остаточный член формулы Тейлора может быть записан в форме Лагранжа или в форме Коши.

Доказательство. Зададим произвольное натуральное число p и указанное в теореме значение x. Предупредим, что на протяжении доказательства x будет оставаться неизменным. Нам будет удобно ввести новую вспомогательную переменную u. По отношению к ней x будет рассматриваться как постоянная.

Мы ставим своей задачей найти удобное выражение для остатка $R_n(x)$. Для этого представим $R_n(x)$ в виде произведения: $R_n(x) = (x-a)^pH$, сведя таким образом вопрос к отысканию величины H. Величина H зависит от x и в силу сделанного соглашения будет рассматриваться как постоянная.

Итак, мы имеем равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + (x-a)^pH.$$

Заменим чисто формально в правой его части постоянную a на переменную u. Тогда получим функцию

$$\Phi(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-u)^k}{k!}\, f^{(k)}(u) + (x-u)^pH = f(u) + \frac{x-u}{1}\, f'(u) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n-1)}(u) + (x-u)^pH, \qquad (10)$$

которая во всяком случае определена и непрерывна для всех значений u, принадлежащих отрезку $[a,x]$, потому что на этом отрезке непрерывна исходная функция $f(u)$ вместе со своими производными до $(n-1)$-й включительно. Кроме того, из определения функции $\Phi(u)$ следует, что при $u = a$ она принимает значение $f(x)$ $(\Phi(a) = f(x))$. Больше того, при $u = x$ она также обращается в $f(x)$ $(\Phi(x) = f(x))$, что непосредственно видно из правой части (10): если положить в ней $u = x$, все члены обращаются в нуль, кроме первого, равного $f(x)$. Наконец, наша функция $\Phi(u)$ имеет на интервале (a, x) производную, потому что на нем имеет производную n-го порядка исходная функция f.

Мы видим, что наша вспомогательная функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля: она непрерывна на отрезке $[a, x]$, имеет производную на интервале (a, x) и принимает равные значения на его концах. Но тогда согласно теореме Ролля существует между a и x промежуточная точка $u = a + \theta(x - a)$ такая, что производная Φ' в ней равна нулю.

Найдем фактически эту производную:

$$\Phi'(u) = f'(u) - f'(u) + (x-u)f''(u) - (x-u)f''(u) + \ldots$$
$$\ldots - \frac{(x-u)^{n-2}}{(n-2)!}\, f^{(n-1)}(u) + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(u) - p(x-u)^{p-1}H.$$

В этом выражении все члены сокращаются, за исключением последних двух. Если в оставшееся выражение подставить указанное значение $u = a + \theta(x - a)$, то, как было сказано, оно обратится в нуль.

Решая полученное уравнение относительно H и умножая найденное H на $(x - a)^p$, получим искомое выражение для остаточного члена:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!\,p}\,(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a + \theta(x-a)).$$

Это выражение зависит от p, где p может быть любым натуральным числом. Если в нем положить $p = n$, то получим остаточный член в форме Лагранжа, а если положить $p = 1$, то в форме Коши.

Отметим, что при $a = 0$ формулу Тейлора называют также *формулой Маклорена*. В этом случае она имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + R_n(x), \tag{11}$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!}\, f^{(n)}(\theta x) \quad \text{— форма Лагранжа,}$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!}\,(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x) \quad \text{— форма Коши.}$$

Предположим теперь, что функция f имеет в точке a непрерывную производную $f^{(n)}$ порядка n. Отсюда следует, что существует некоторая окрестность точки a, на которой функция f имеет производную $f^{(n)}$

и тем более непрерывную производную $f^{(n-1)}$. Таким образом, условия для разложения f по формуле (11) с остатком в форме Лагранжа соблюдены, и можно написать, учитывая предположенную непрерывность $f^{(n)}$ при $x = a$, что

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + r_n(x) = \\ = \frac{(x-a)^n}{n!} \big(f^{(n)}(a) + o(1)\big) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^n), \quad x \to a. \tag{12}$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n), \qquad x \to a. \tag{13}$$

Разложение (13) называют *формулой Тейлора разложения функции f по степеням $(x-a)$ с остаточным членом в форме Пеано* *).

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Если функция f имеет непрерывную производную порядка n в точке a, то она разлагается по формуле* (13) *Тейлора по степеням $x - a$ с остаточным членом в форме Пеано.*

Докажем лемму.

Лемма. *Из равенства*

$$\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n) = \\ = \alpha_0' + \alpha_1'(x-a) + \ldots + \alpha_n'(x-a)^n + o((x-a)^n), \qquad x \to a, \tag{14}$$

где α_k, α_k' — числа, не зависящие от x, следует, что

$$\alpha_k = \alpha_k', \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Действительно, возьмем предел левой и правой частей (14) при $x \to a$. Тогда получим равенство $\alpha_0 = \alpha_0'$. Таким образом, можно считать, что в (14) слагаемых α_0, α_0' нет, и можно (14) сократить на $x - a$ и получить равенство

$$\alpha_1 + \alpha_2(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}) = \\ = \alpha_1' + \alpha_2'(x-a) + \ldots + \alpha_n'(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}),$$

откуда после перехода к пределу при $x \to a$ получим еще, что $\alpha_1 = \alpha_1'$. Продолжая этот процесс последовательно, мы получим (15). Лемма доказана.

---

*) Д. Пеано (1852–1932) — итальянский математик.

Из доказанной леммы и сказанного выше следует *единственность разложения функции f по формуле Тейлора с остатком в форме Пеано.* Эти слова надо понимать в следующем смысле. Если функция f, имеющая в точке $x = a$ непрерывную производную n-го порядка, представлена в виде

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n), \qquad x \to a, \tag{16}$$

где α_k — постоянные числа, то эти числа равны

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

т. е. (16) есть тейлорово разложение f с остатком в форме Пеано.

Формула Тейлора в окрестности $x = 0$ четной (нечетной) функции f содержит в себе члены только четной (нечетной) степени x:

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots \qquad \bigl(f(x) = a_1x + a_3x^3 + \ldots\bigr).$$

Это следует из того, что нечетные производные от четной функции, так же как четные производные от нечетных функций, суть нечетные функции (см. конец § 5.6). Но последние к тому же предполагаются непрерывными в точке $x = 0$, но тогда они необходимо равны нулю в этой точке.

В частности, с помощью этого утверждения легко следует, что *для того, чтобы многочлен*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$$

был четным (нечетным), т. е. четной (нечетной) функцией, необходимо и достаточно, чтобы все его члены имели x в четной (нечетной) степени.

Пример 2. Из равенства $1 + x^2 + \ldots + x^{2m} = (1 - x^{2m+2})/(1 - x^2)$ и того факта, что $x^{2m+2}/(1 - x^2) = o(x^{2m}),\ x \to 0$, следует, что

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + \ldots + x^{2m} + o(x^{2m}), \qquad x \to 0. \tag{17}$$

Но тогда (17) есть формула Тейлора функции $(1 - x^2)^{-1}$ по степеням x с остаточным членом в форме Пеано.

§ 5.10. Формулы Тейлора для важнейших элементарных функций

Функция $f(x) = e^x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = e^x, \qquad f^{(n)}(0) = 1, \qquad f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Поэтому формула Тейлора по степеням x функции e^x с остатком в форме

Лагранжа имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$
$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!}\, e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Если положить в ней $x = 1$, то получим приближенное выражение для e:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\,,$$

с ошибкой $|R_n(1)| \leqslant \frac{1}{n!}\, e < \frac{3}{n!}$. При любом $x \geqslant 0$

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^n}{n!}\, e^x \to 0, \qquad n \to \infty,$$

и при $x < 0$

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}\, e^x \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Ф у н к ц и я $f(x) = \sin x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2}\,,$$
$$f^{(n)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Формула Тейлора по степеням x с остаточным членом Лагранжа имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{\nu+1}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + R_{2\nu+1}(x),$$
$$R_{2\nu+1}(x) = \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\,\sin\left(\theta x + (2\nu+1)\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Остаток стремится к нулю при $\nu \to \infty$ для любого x:

$$|R_{2\nu+1}(x)| = \frac{|x|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \to 0, \qquad \nu \to \infty.$$

Ф у н к ц и я $f(x) = \cos x$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2},$$
$$f^{(n)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Формула Тейлора по степеням x с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{x^{2(\nu-1)}}{(2(\nu-1))!} + R_{2\nu}(x),$$
$$R_{2\nu}(x) = \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}\cos\left(\theta x + 2\nu\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Остаток ведет себя, как и в случае $\sin x$:

$$|R_{2\nu}(x)| = \frac{|x|^{2\nu}}{(2\nu)!} \to 0, \qquad \nu \to \infty.$$

Особенно хорошо стремятся к нулю остатки функций $\sin x$ и $\cos x$ при $|x| \leqslant 1$. Заметим, что численные значения этих функций как раз достаточно знать для дуг x в пределах между числом 0 и числом $\pi/4 < 1$.

Ф у н к ц и я $f(x) = \ln(1+x)$ определена и сколько угодно раз дифференцируема для $x > -1$. Ее формулу Тейлора по степеням x можно написать для $n = 1, 2, \ldots$ при $x > -1$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

то формула Тейлора имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x).$$

При этом для остатка запишем две формы — форму Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(1+\theta x)^n}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

и форму Коши:

$$R_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$; тогда, обращаясь к форме Лагранжа, получим $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} x^n \to 0$, $n \to \infty$. Мы видим, что при $0 < x < 1$ остаток стремится к нулю быстро, при $x = 1$ стремление к нулю происходит очень медленно.

В случае $-1 < x < 0$ форма Лагранжа не дает возможности сделать определенное заключение о стремлении $R_n(x)$ к нулю, потому что мы знаем только, что θ удовлетворяет неравенствам $0 < \theta < 1$. При этом не надо забывать, что θ зависит от x и n. Но, применяя форму Коши, получим, считая, что $0 < |x| < 1$, оценку

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^n}{1 - |x|} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

потому что $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < \frac{1-\theta}{1-\theta} = 1$.

При $x = -1$ функция $\ln(1 + x)$ не имеет смысла. При $x > 1$ формула при любом n имеет смысл, однако ее остаточный член $R_n(x)$ теперь уже не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Итак, остаточный член формулы Тейлора функции $\ln(1 + x)$ по степеням x стремится при $n \to \infty$ к нулю только при x, удовлетворяющих неравенствам $-1 < x \leqslant 1$.

Ф у н к ц и я $f(x) = (1 + x)^m$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$
$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Формула Тейлора по степеням x имеет вид

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n(x).$$

При этом остаток в форме Лагранжа записывается так:

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n (1 + \theta x)^{m-n},$$

а в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n (1 + \theta x)^{m-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

При натуральном m и любом x все члены формулы, начиная с $(m + 1)$-го, исчезают и формула Тейлора превращается в элементарную формулу Ньютона (см. § 5.9, (6)).

Для остальных m формула имеет смысл, во всяком случае при $x > -1$.

Пусть $0 \leqslant x < 1$. Тогда, если воспользоваться формулой Лагранжа, получим для $n > m$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|m(m-1)\dots(m-n+1)|}{n!}\, x^n \to 0, \qquad n \to \infty$$

(см. ниже замечание).

Если же $-1 < x < 0$, то, воспользовавшись формулой Коши, получим (см. ниже замечание)

$$|R_n(x)| \leqslant C\, \frac{|m(m-1)\dots(m-n+1)|}{(n-1)!}\, |x|^n \to 0, \qquad n \to \infty,$$

где C — число, вообще, зависящее от x, но не зависящее от n, потому что $((1-\theta)/(1+\theta x))^{n-1} \leqslant ((1-\theta)/(1-\theta))^{n-1} = 1$ и при $m-1>0$

$$(1+\theta x)^{m-1} \leqslant 2^{m-1},$$

а при $m-1<0$

$$(1+\theta x)^{m-1} < \frac{1}{(1-|x|)^{1-m}}\,.$$

Таким образом, остаточный член формулы Тейлора функции $(1+x)^m$ при $-1 < x < 1$ стремится к нулю при $n \to \infty$. При $x > 1$ остаточный член уже не стремится к нулю *).

Случаи $x = \pm 1$ мы не рассматриваем. Скажем только, что в этих случаях остаточный член $R_n(x)$ зависит от m. При $m < 0$ и $x = -1$ функция $(1+x)^m$ вообще не имеет смысла.

З а м е ч а н и е. Для

$$u_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}\, x^n,$$

где m — произвольное действительное число, имеет место

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|m-n|}{n+1}\, |x| \to |x|, \qquad n \to \infty.$$

Но тогда, как докажет это читатель, при $n \to \infty$

$$u_n \to 0, \quad \text{если} \quad |x| < 1, \qquad u_n \to \infty, \quad \text{если} \quad |x| > 1$$

(впрочем, см. § 11.3, теорема 2).

---

*) Это следует также из расходимости ряда при $x > 1$ с общим членом $\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}\, x^n$ (см. § 11.1).

Ниже приводятся часто встречающиеся примеры приложения формулы Пеано:

$$e^x = 1 + x + O(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x), \quad x \to 0;$$

$$\sin x = x + O(x^3) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^2), \quad x \to 0;$$

$$\cos x = 1 + O(x^2) = 1 - x^2 + o(x), \quad x \to 0;$$

$$\ln(1 + x) = x + O(x^2) = x - \frac{x^2}{2} + o(x), \quad -1 < x < 1, \quad x \to 0;$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + O(x^2) = 1 + mx + o(x), \quad -1 < x < 1, \quad x \to 0.$$

§ 5.11. Ряд Тейлора

Выражение

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \tag{1}$$

где u_k — числа, зависящие в силу некоторого закона от натурального индекса k $(k = 0, 1, \ldots)$, называется *рядом.*

Обозначим через $S_n = \sum_0^{n-1} u_k$ сумму его первых n членов. Числа S_n составляют последовательность $\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \ldots\}$. Если она сходится, т. е. существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд (1) *сходится и имеет сумму, равную* S. При этом пишут $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$

Если функция f имеет в некоторой окрестности точки a производные сколь угодно высокого порядка, то для нее чисто формально можно написать ряд

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots, \tag{2}$$

который носит название *ряда Тейлора функции f по степеням $x - a$.* Для данных значений a и x он может сходиться или расходиться. Особенно важен тот случай, когда ряд Тейлора функции f сходится к самой функции, т. е. имеет суммой $f(x)$.

Это имеет место тогда и только тогда, когда остаточный член в формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_n(x) = S_n(x) + R_n(x) \tag{3}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Действительно, если $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, то из (3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x),$$

и так как $S_n(x)$ есть сумма первых n членов ряда (2), то ряд (2) сходится и имеет своей суммой $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \tag{4}$$

Обратно, если известно, что для некоторого значения x имеет место равенство (4), т. е. если известно, что ряд (2) при этом значении x сходится и имеет своей суммой число $f(x)$, то это значит, что для указанного значения

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

Но тогда из (3) следует, что $R_n(x) \to 0,\ n \to \infty$.

На основании результатов, которые были получены в предыдущем параграфе, мы можем теперь сказать, что имеют место следующие разложения в ряды Тейлора:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \qquad -\infty < x < +\infty,\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \qquad -\infty < x < +\infty,\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \qquad -\infty < x < +\infty,\\
(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \\
&\qquad + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots, \qquad -1 < x < 1,\\
\ln(1+x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \qquad -1 < x \leqslant 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

В приведенных примерах множества E точек x, где ряды Тейлора по степеням x сходятся, представляют собой интервал или полуинтервал с центром в 0. Это не случайные факты. В дальнейшем будет выяснено, что ряд вида (см. § 11.11)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{6}$$

где a_k — заданные постоянные числа, обладает тем свойством, что если он сходится в точке x_1, то он заведомо сходится для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_1|$. Ряды вида (6) называются *степенными рядами.*

Бывают и такие случаи, что для функции f можно формально написать ее ряд Тейлора по степеням $x - a$:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots, \tag{7}$$

иначе говоря, для этой функции имеют смысл производные $f^{(k)}(a)$ для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ и ряд (7) сходится для некоторых значений x, однако сумма ряда для этих x не равна $f(x)$.

Пример 1. Вот пример такой функции:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases} \tag{8}$$

Если $|x| < 1$, $u = 1 - x^2$, то

$$\psi'(x) = -2x(1-x^2)^{-2} e^{1/\left(x^2-1\right)} = -2xu^{-2}e^{-1/u} \to 0, \quad x \to 1.$$

По индукции доказывается, что для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\psi^{(k)}(x) = P(x)\bigl(1-x^2\bigr)^{-l} e^{1/(x^2-1)} = P(x)u^{-l}e^{-1/u} \to P(1)\cdot 0 = 0,$$
$$x < 1, \quad x \to 1,$$

где $P(x)$ — некоторый многочлен, а число $l > 0$ зависит от k. Если учесть, что $\psi(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$, то мы доказали, что $\lim_{x\to 1} \psi^{(k)}(x) = 0$. Далее, $\psi(1) = 0$, и если уже установлено, что $\psi^{(k)}(1) = 0$ при некотором k, то

$$\psi^{(k+1)}(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\psi^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(1)}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \psi^{(k+1)}(1 + \theta(x-1)) = 0, \quad 0 < \theta < 1.$$

Итак, для функции ψ имеют смысл равные нулю числа $\psi(1), \psi'(1), \psi''(1), \ldots$ и можно написать ее ряд Тейлора по степеням $x - 1$. Все его члены при любом x равны нулю. Он, таким образом, сходится, и его сумма для любого x равна нулю, но отлична от $\psi(x)$ для $|x| < 1$. Аналогичные факты имеют место при $x = -1$.

Функция ψ есть пример бесконечно дифференцируемой на действительной оси функции, равной нулю вне некоторого отрезка.

Функции $f(x)$, разлагающиеся в ряд Тейлора по степеням $x - a$, сходящийся к $f(x)$ в некоторой окрестности точки a, называются *аналитическими во всех точках указанной окрестности (открытой). В частности, они аналитические в точке a.*

Из сказанного выше следует, что функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ аналитические на всей действительной оси, а функции $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ аналитические на интервале $(-1, +1)$.

Можно показать (см. ниже пример 2), что, каково бы ни было $a > 0$, функции $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ разлагаются в сходящийся к ним ряд Тейлора по степеням $x - a$ для достаточно малых $x - a$, откуда следует, что функции $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$ на самом деле аналитические при любом $x > 0$. Аналитические функции изучаются в специальной математической дисциплине — теории функций комплексного переменного, называемой также теорией аналитических функций.

Возможна следующая классификация функций, заданных на интервале. Функции:

1) произвольные, вообще, разрывные;

2) непрерывные;

3) имеющие производную $f^{(n)}$ для некоторого $n = 1, 2, 3, \ldots$;

4) имеющие непрерывную производную $f^{(n)}$ для некоторого $n = 1, 2, \ldots$;

5) бесконечно дифференцируемые, т. е. имеющие производную $f^{(n)}$ любого порядка, таким образом, имеющие непрерывную производную $f^{(n)}$ любого порядка;

6) аналитические.

Каждый следующий класс в этом ряду содержится в предыдущем и состоит из более "хороших" функций.

Функция, определенная равенствами (8), бесконечно дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$, но не является аналитической на нем. Впрочем, она аналитическая на $(1, +\infty)$, $(-\infty, 1)$ и на $(-1, 1)$.

Пример 2. Пусть $f(x) = \ln x$. Тогда

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\, x^{-k}, \qquad x > 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$\ln x = \ln a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(x-a)^k}{ka^k} + R_n(x), \qquad a > 0,$$

где $R_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{(x-a)^n}{(a+\theta(x-a))^n}$, $|x-a| < a$. Если $|x-a| < a/2$, то тогда $|a + \theta(x-a)| > a - |x-a| > a - (a/2) = a/2$, $|(x-a)/(a+\theta(x-a))| < 1$ и $|R_n(x)| < 1/n \to 0$.

Таким образом, имеет место разложение в сходящийся ряд

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{1 \cdot a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} + \ldots$$

для любого $a > 0$ и $|x-a| < a/2$. Это показывает, что функция $\ln x$ аналитическая для любого $a > 0$.

Пример 3. Найдем главный степенной член функции $\ln(1 + x + x^2)$:

$$\ln(1 + x + x^2) = (x + x^2) + o(x + x^2) = x + o(x) + o(x) = x + o(x), \qquad x \to 0.$$

Ведь $\ln(1+u) = u + o(u)$, $u \to 0$; $u = x + x^2 \to 0$, $x \to 0$; $x^2 = o(x)$, $x \to 0$, и $o(x + x^2) = o(x)$, $x \to 0$, потому что

$$\frac{o(x+x^2)}{x} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{o(x+x^2)}{x+x^2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{x+x^2}{x}} \to 0, \qquad x \to 0.$$

Пример 4. Найдем теперь главный степенной член функции

$$\ln(1+x+x^2)-x.$$

Если воспользоваться предыдущим результатом, то это не даст главного члена. Ведь тогда

$$\ln(1+x+x^2)-x=x+o(x)-x=o(x), \quad x\to 0.$$

Но мы получили некоторую информацию. Главный член, если существует, имеет степень $n>1$. Попробуем воспользоваться формулой Тейлора с остатком $o(u^2)$, $u\to 0$, в смысле Пеано. Имеем $\ln(1+u)=u-u^2/2+o(u^2)$, $u\to 0$, поэтому

$$\ln(1+x+x^2)-x=x+x^2-\frac{(x+x^2)^2}{2}+o((x+x^2)^2)-x=$$
$$=x^2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+o(x^2)=\frac{x^2}{2}+o(x^2), \quad x\to 0.$$

§ 5.12. Выпуклость кривой в точке. Точка перегиба

Говорят, что *кривая* $y=f(x)$ *обращена в точке* x_0 *выпуклостью кверху* (*книзу*), если существует окрестность x_0 такая, что для всех ее точек x касательная к кривой в точке x_0 (т. е. в точке, имеющей абсциссу x_0) расположена выше (ниже) самой кривой (рис. 5.7; здесь в точке x_1 кривая обращена выпуклостью книзу, в точке x_2 — кверху).

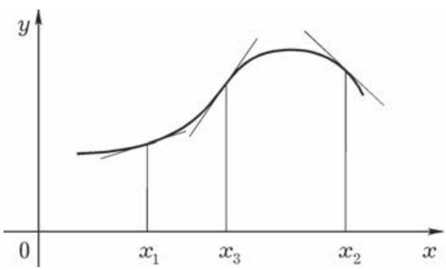

Рис. 5.7

Говорят, что точка x_0 есть *точка перегиба кривой* $y=f(x)$, если при переходе x через x_0 точка кривой (имеющая абсциссу x) переходит с одной стороны касательной на другую (на рис. 5.7 точка x_3 — точка перегиба). Иначе говоря, существует достаточно малое $\delta>0$ такое, что для всех $x\in(x_0-\delta,x_0)$ кривая находится с одной стороны касательной в x_0, а для всех $x\in(x_0,x_0+\delta)$ — с другой.

Указанные определения выделяют возможные расположения кривой относительно касательной к ней в достаточно малой окрестности точки касания. Но не нужно думать, что эти определения исчерпывают все возможные случаи такого расположения. Вспомним о кривой, являющейся графиком функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Ось x пересекает и касается этой кривой в точке $x = 0$, и $x = 0$ не есть точка перегиба.

Теорема 1. *Если функция f имеет в точке x_0 вторую непрерывную производную и $f''(x_0) > 0$ (< 0), то кривая $y = f(x)$ обращена в x_0 выпуклостью книзу (кверху).*

Доказательство. Разлагаем f в окрестности $x = x_0$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x),$$
$$R(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0 + \theta(x - x_0)), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Заметим, что графиком функции

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

является касательная к кривой $f(x)$ в точке x_0. Поэтому остаток $R(x)$ равен величине превышения кривой f над касательной к ней в точке x_0. В силу непрерывности f'', если $f''(x_0) > 0$, то и $f''(x_0 + \theta(x - x_0)) > 0$ для x, принадлежащих достаточно малой окрестности точки x_0, а потому, очевидно, и $R(x) > 0$ для любого отличного от x_0 значения x, принадлежащего указанной окрестности.

Аналогично рассматривается случай $f''(x_0) < 0$.

Теорема 2. *Если функция f такова, что производная f''' непрерывна в x_0, а $f''(x_0) = 0$ и $f'''(x_0) \neq 0$, то кривая $y = f(x)$ имеет в x_0 точку перегиба.*

Доказательство. В этом случае по формуле Пеано

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \\ + \left[\frac{f'''(x_0)}{3!} + \varepsilon(x)\right](x - x_0)^3, \qquad \varepsilon(x) \to 0, \quad x \to x_0.$$

В силу того факта, что $f'''(x_0) \neq 0$, следует, что функция в квадратных скобках сохраняет знак в некоторой окрестности точки x_0; он один и тот же справа и слева от точки x_0. С другой стороны, множитель $(x - x_0)^3$ меняет знак при переходе x через x_0, а вместе с ним и величина $R(x)$ (равная превышению точки кривой над касательной в x_0) меняет знак при переходе x через x_0. Это доказывает теорему.

Сформулируем более общую теорему.

Теорема 3. *Пусть функция f обладает следующими свойствами:*

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0,$$

$f^{(k+1)}(x)$ *непрерывна в* x_0 *и* $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

Тогда если k — четное число, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх или вниз в зависимости от того, будет ли $f^{(k)}(x_0) < 0$ или $f^{(k)}(x_0) > 0$, а если k — нечетное число, то x_0 есть точка перегиба кривой.

Если дополнительно к приведенным уже условиям еще

$$f'(x_0) = 0, \tag{1}$$

то, если k — четное число, функция f достигает в точке x_0 локального максимума или минимума в зависимости от того, будет

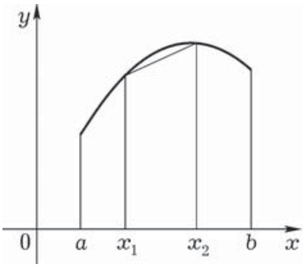

Рис. 5.8

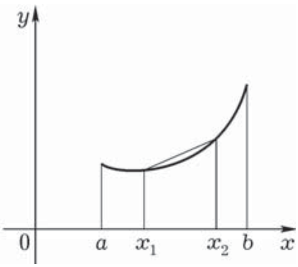

Рис. 5.9

ли $f^{(k)}(x_0) < 0$ или $f^{(k)}(x_0) > 0$, а если k — нечетное число, то в точке x_0 нет экстремума.

Доказательство основано на том, что при указанных условиях имеет место разложение по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^k}{k!}\left(f^{(k)}(x_0) + \varepsilon(x)\right),$$
$$\varepsilon(x) \to 0, \quad x \to x_0,$$

а при дополнительном условии (1) это разложение превращается в следующее:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^k}{k!}\left(f^{(k)}(x_0) + \varepsilon(x)\right), \quad \varepsilon(x) \to 0, \quad x \to x_0.$$

В заключение заметим, что говорят также, что кривая $y = f(x)$ имеет точку перегиба в точке x, где производная $f(x)$ равна $+\infty$ или $-\infty$ (см. рис. 5.1, *в*, *г* и замечания к ним).

§ 5.13. Выпуклость кривой на отрезке

По определению кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой кверху* (*книзу*) на отрезке $[a, b]$, если любая дуга этой кривой с концами в точках x_1, x_2 $(a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b)$ расположена не ниже (не выше) стягивающей ее хорды (рис. 5.8, 5.9).

Т е о р е м а 1. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и имеет вторую производную на (a, b).*

Для того чтобы кривая $y = f(x)$ была выпуклой кверху (книзу) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f''(x) \leqslant 0$ ($f''(x) \geqslant 0$) для всех $x \in (a, b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть наша кривая выпуклая кверху на $[a, b]$. Тогда для любых x и $h > 0$ таких, что $x, x + 2h \in [a, b]$, имеет место неравенство $f(x + h) \geqslant (f(x) + f(x + 2h))/2$, откуда $f(x + h) - f(x) \geqslant f(x + 2h) - f(x + h)$.

Если теперь x_1 и x_2 — произвольные точки интервала (a, b), то, положив $h = (x_2 - x_1)/n$, будем иметь

$$f(x_1 + h) - f(x_1) \geqslant f(x_1 + 2h) - f(x_1 + h) \geqslant \ldots \geqslant f(x_2) - f(x_2 - h).$$

Таким образом, $(f(x_1 + h) - f(x_1))/h \geqslant (f(x_2 - h) - f(x_2))/(-h)$, и, переходя к пределу при $h \to 0$, получим неравенство

$$f'(x_1) \geqslant f'(x_2),$$

показывающее, что производная f' на интервале (a, b) не возрастает. Но тогда $f''(x) \leqslant 0$ на (a, b).

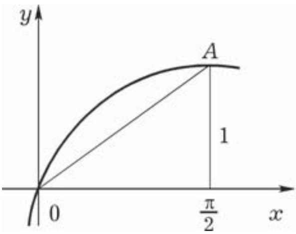

Рис. 5.10

Обратно, пусть $f''(x) \leqslant 0$ и $a < x_1 < x_2 < b$. Нам нужно доказать, что функция $F(x) = f(x) - f(x_1) - m(x - x_1)$, где $m = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$, удовлетворяет неравенству $F(x) \geqslant 0$ на $[x_1, x_2]$. Допустим, что это не так. Тогда $\min_{x_1 \leqslant x \leqslant x_2} F(x) = F(x_0) < 0$ и $x_1 < x_0 < x_2$. Поэтому $F'(x_0) = 0$.

Применив формулу Тейлора, получим

$$0 = F(x_2) = F(x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2!} F''(x_0 + \theta(x_2 - x_0)) = \\ = F(x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2!} f''(x_0 + \theta(x_2 - x_0)).$$

Но в правой части этой цепочки равенств первый член по предположению отрицательный, а второй неположительный, поэтому правая часть меньше нуля, и мы пришли к противоречию.

Доказательство в случае $f''(x) \geqslant 0$ аналогично.

П р и м е р 1. Функция $y = \sin$ имеет непрерывную первую производную и вторую производную

$$(\sin x)'' = -\sin x \leqslant 0$$

на $[0, \pi/2]$. Поэтому хорда OA, стягивающая дугу кривой $y = \sin x$ на $[0, \pi/2]$, ниже синусоиды (рис. 5.10). Так как уравнение хорды $y = (2/\pi)x$, то мы получим неравенство

$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

часто употребляемое в математическом анализе.

§ 5.14. Раскрытие неопределенностей

В нашем распоряжении теперь имеются очень сильные методы дифференциального исчисления: теоремы о среднем и формула Тейлора. С их помощью можно автоматизировать вычисление многих пределов, приводящих при грубом применении обычных правил к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Случай 0/0. Требуется вычислить $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ в предположении, что $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$, $\varphi(x) \neq 0$ в окрестности a.

Пусть a — конечное число и для функций f и φ найдены главные степенные члены (относительно $x - a$):

$$f(x) = \alpha_p (x-a)^p + o((x-a)^p), \qquad x \to a, \qquad \alpha_p \neq 0,$$
$$\varphi(x) = \beta_q (x-a)^q + o((x-a)^q), \qquad x \to a, \qquad \beta_q \neq 0.$$

Тогда (см. § 4.10, (10))

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_p (x-a)^p}{\beta_q (x-a)^q} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_p}{\beta_p} & \text{при} \quad p = q, \\ 0 & \text{при} \quad p > q, \\ \infty & \text{при} \quad p < q. \end{cases}$$

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)\right)}{x - \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^3)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)} = -2.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 - x^2/2 + o(x^2))}{x + o(x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{x} = 0.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos\sqrt{x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right)x^2 + o(x^2)} = -3.$$

Но функции f и φ могут не иметь производных в точке a или почему-либо может быть затруднительно или нежелательно вычисление их в этой точке. Тогда может быть полезна следующая общая теорема, доказательство которой основано на применении теоремы Коши о среднем.

Теорема 1. *Пусть функции f и φ непрерывны и имеют производные в окрестности точки a (a — число или ∞), за исключением, быть может, точки a; при этом φ и φ' не равны нулю в указанной окрестности и*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0.$$

Тогда если существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \tag{1}$$

(*конечный или бесконечный*), *то существует также равный ему предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{2}$$

В частности, здесь речь может идти о правом или левом пределе, и тогда под окрестностью a понимается правая или левая ее окрестность.

Доказательство. Пусть a — число (конечное). Тогда, полагая $f(a) = 0 = \lim_{x\to a} f(x)$, $\varphi(a) = 0 = \lim_{x\to a} \varphi(x)$, мы получим, что функции f и φ непрерывны в точке a. Это свойство вместе со сформулированными в теореме свойствами позволяет применить к функциям f и φ теорему Коши. Таким образом, какова бы ни была точка x из указанной окрестности, найдется между a и x точка $\xi = a + \theta(x - a)$, $0 < \theta < 1$, такая, что

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\,. \tag{3}$$

Если существует предел (1), то, очевидно, также существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = A,$$

а следовательно, и предел (2).

Итак, существование второго предела в (2) влечет существование равного ему первого предела в (2). Обратное утверждение неверно.

Пример 4. В силу того, что $\sin x \approx x$ $(x \to 0)$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

С другой стороны, соответствующее отношение производных равно

$$\frac{2x\sin(1/x)-\cos(1/x)}{\cos x} = 2x\,\frac{1}{\cos x}\,\sin\frac{1}{x} - \frac{\cos(1/x)}{\cos x}\,. \tag{4}$$

Оно, очевидно, не стремится ни к какому пределу при $x \to 0$. Это видно из того, что первый член правой части стремится к нулю, а второй не стремится к какому-либо пределу. Это не мешает тому, что после подстановки в (4) вместо x функции $\xi = \xi(x)$, которая возникает в формуле Коши (3), получается такая функция от x, которая имеет предел при $x \to 0$.

Нам надо рассмотреть еще случай $a = \infty$ (или $a = +\infty$ или $a = -\infty$). Сделаем подстановку $x = 1/u$. Тогда получим функции $F(u) = f(1/u)$, $\Phi(u) = \varphi(1/u)$ от u. Они непрерывны в окрестности точки 0 (при $a = +\infty$ или $a = -\infty$ в правой или левой окрестностях точки 0), имеют производные (по u) в этой окрестности и Φ, так же как Φ' не равны нулю в ней.

При этом

$$\lim_{u\to 0} F(u) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{u\to 0} \Phi(u) = \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0. \tag{5}$$

Далее, если существует $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то, очевидно, существует равный ему предел:

$$\lim_{u\to 0} \frac{F'(u)}{\Phi'(u)} = \lim_{u\to 0} \frac{f'(1/u)(-1/u^2)}{\varphi'(1/u)(-1/u^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,. \tag{6}$$

Поэтому на основании уже доказанного выше (для конечного a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{u\to 0} \frac{F(u)}{\Phi(u)} = \lim_{u\to 0} \frac{F'(u)}{\Phi'(u)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,. \tag{7}$$

Этим теорема доказана.

Случай ∞/∞. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и имеют производные f' и φ' в окрестности (в частности, в правой или в левой окрестности) точки a (конечной или бесконечной), за исключением самой точки a. При этом $\varphi' \neq 0$ в указанной окрестности и*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty \qquad (+\infty \text{ или } -\infty). \tag{8}$$

Тогда если существует

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A, \tag{9}$$

то существует равный ему предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{10}$$

Доказательство. Зададим произвольную последовательность точек x_k $(x_k \neq a)$, стремящуюся к a $(x_k \to a)$.

Так как по условию $f(x_k) \to \infty$, $\varphi(x_k) \to \infty$, то каждому натуральному k можно привести в соответствие натуральное $n_k > k$ $(n_k > n_{k-1})$ такое, что

$$k|f(x_k)| < \left|f\left(x_{n_k}\right)\right|, \qquad k|\varphi(x_k)| < \left|\varphi\left(x_{n_k}\right)\right|, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Следовательно,

$$f(x_k) = o\left(f\left(x_{n_k}\right)\right), \qquad \varphi(x_k) = o\left(\varphi\left(x_{n_k}\right)\right), \qquad k \to \infty.$$

Поэтому (см. теоремы 1 и 2 § 4.10) для некоторых $\xi_k \in \left(x_k, x_{n_k}\right)$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f\left(x_{n_k}\right)}{\varphi\left(x_{n_k}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f\left(x_{n_k}\right) - f(x_k)}{\varphi\left(x_{n_k}\right) - \varphi(x_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f'(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)} = A, \tag{11}$$
$$k = 1, 2, \ldots,$$

потому что при $k \to \infty$ $x_k \to a$, следовательно, $x_{n_k} \to a$ $(k < n_k)$ и $\xi_k \to a$. Мы доказали, что из всякой последовательности $\left\{\frac{f(x_k)}{\varphi(x_k)}\right\}$ можно выделить подпоследовательность $\left\{\frac{f(x_{n_k})}{\varphi(x_{n_k})}\right\}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f\left(x_{n_k}\right)}{\varphi\left(x_{n_k}\right)} = A.$$

Но тогда (см. теорему 9 § 4.1) существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$$

и выполняется равенство (10).

В равенстве (10) существование второго предела влечет существование ему равного первого, но не наоборот, как показывает следующий пример: предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

существует, между тем как предел при $x \to \infty$ отношения производных $(1 - \cos x)/1$ не существует.

Выражаемые теоремами 1, 2 правила, в силу которых вычисление предела отношения функций может быть сведено к вычислению предела отношения их производных, называют *правилом Лопиталя*, по имени математика, который сформулировал это правило, правда, для весьма простых случаев. Впрочем, это правило было известно И. Бернулли до Лопиталя *).

Другие неопределенности. Нам остается еще рассмотреть другие виды неопределенностей. Их можно свести к предыдущим.

Если $f \to \infty$ и $\varphi \to \infty$, то пишем $f - \varphi = \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{f}\right) : \frac{1}{f\varphi}$ и получаем неопределенность вида $0/0$.

Если же $f \to 0$ и $\varphi \to \infty$, то пишем $f\varphi = \frac{f}{1/\varphi}$, что приводит к неопределенности вида $0/0$.

Выражения u^v, приводящие к неопределенностям 0^0, ∞^0, 1^∞, удобно логарифмировать, что приводит к неопределенностям вида $0 \cdot \infty$.

Например, $\lim_{x\to a} u^v = e^{\lim_{x\to a} v \ln u}$, если предел показателя степени в правой части конечный. Если же последний равен $+\infty$, $-\infty$, то предел левой части равен соответственно $+\infty$, 0.

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Пример 6.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{1/x} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1/x}{1/x^2} = 0.$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to+\infty} x^k e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{k!}{e^x} = 0,$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

§ 5.15. Асимптота

Пусть задана кривая (или ветвь кривой) Γ, определяемая уравнением

$$y = f(x), \qquad x > N, \tag{1}$$

где $f(x)$ — непрерывная для любого $x > N$ функция. Можно считать точку $A = (x, f(x))$ кривой Γ зависящей от x.

Пусть, кроме того, задана прямая L:

$$y = ax + b \tag{2}$$

*) Г. Ф. Лопиталь (1661–1704) — французский математик. И. Бернулли (1667–1748) — швейцарский математик.

(a, b — постоянные числа). Если расстояние от точки A кривой до прямой L стремится к нулю при неограниченном возрастании x, то прямая L называется *асимптотой* кривой Γ, соответствующей стремлению x к $+\infty$.

Итак, пусть L есть асимптота Γ при $x \to +\infty$. Уравнение L в нормальном виде записывается так:

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} = 0.$$

Поэтому расстояние точки $A = (x, f(x))$ кривой Γ до L равно $\rho(x) = |f(x) - ax - b|/\sqrt{1 + a^2}$. Так как L — по условию асимптота Γ при $x \to +\infty$, то $\lim_{x\to+\infty} \rho(x) = 0$. Отсюда

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0. \tag{3}$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a\right) = 0$, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a. \tag{4}$$

Из сказанного понятно, как надо поступать, чтобы найти асимптоту Γ при $x \to +\infty$. Надо взять предел (4). Если он не существует, то кривая Γ не имеет асимптоты. Если же предел (4) существует и равен a, надо вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = b. \tag{5}$$

Если на самом деле предел (5) не существует, то кривая Γ не имеет асимптоты при $x \to +\infty$. Если же он существует, то полученные константы a и b определяют прямую, которая и есть асимптота Γ при $x \to +\infty$. Так как пределы (4) и (5) если существуют, то единственны, то непрерывная кривая Γ (или ветвь кривой), определяемая равенством (1), либо не имеет вовсе, либо имеет единственную асимптоту при $x \to +\infty$.

Аналогично определяется асимптота при $x \to -\infty$ непрерывной кривой (ветви кривой)

$$y = f(x), \qquad x < -N, \tag{6}$$

а также асимптота при $x \to \infty$ кривой

$$y = f(x), \qquad N \leqslant |x| \tag{7}$$

(состоящей из двух ветвей, соответствующих $x > N$ и $x < -N$).

В проведенных выше рассуждениях надо считать в случае (6), что $x \to -\infty$, а в случае (7), что $x \to +\infty$.

Если кривая Γ (или ветвь кривой) определяется уравнением $y = f(x)$, $a < x < b$, где $f(x)$ — непрерывная функция на интервале (a, b), обладающая свойством $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$, то в этом случае естественно называть прямую $x = a$ асимптотой Γ. Во всяком случае, прямую $x = a$ принято называть *асимптотой* Γ, если непрерывная функция $f(x)$ стремится к ∞ при $x \to a$ и строго монотонна в правой или левой окрестности точки $x = a$. Ведь тогда кривую Γ можно записать в виде $x = \varphi(y)$, где y, положительное или отрицательное, достаточно велико по абсолютной величине и прямая $x = a$, очевидно, является асимптотой Γ в указанном в начале параграфа смысле.

Замечание. Задачу о нахождении асимптоты кривой $y = f(x)$ при $x \to \infty$ можно рассматривать как задачу о линеаризации функции $f(x)$ на бесконечности.

Ставится вопрос о нахождении линейной функции $Ax + B$ такой, чтобы

$$f(x) = Ax + B + o(1), \qquad x \to \infty.$$

Эта задача и была решена выше. Оказалось, что в одних случаях имеется решение, а в других нет.

Пример 1. Отдадим себе отчет, какой вид имеет график Γ функции $f(x) = \frac{1}{x} + x + e^{-x}$.

Предел $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = 1$. Но уже предел этого отношения при $x \to -\infty$ равен $+\infty$.

Далее, $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$. Таким образом, $y = x$ есть асимптота Γ при $x \to +\infty$. Прямая $x = 0$ тоже есть асимптота Γ при стремлении x к 0 справа и слева:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty.$$

Найти корни уравнения $f'(x) = 0$ не удается. Но очевидно, что

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + e^{-x} > 0, \qquad x > 0,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1.$$

Таким образом, $f'(x)$ на $(0, \infty)$ строго возрастает и существует только одно значение $x_0 > 0$, где $f'(x_0) = 0$. Функция $f(x)$, очевидно, убывает на $(0, x_0)$ от $+\infty$ до $f(x_0)$, затем возрастает, и при этом ее график имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = x$ и весь находится над последней.

На интервале $(-\infty, 0)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 - e^{-x} < 0,$$

потому что $-1/x^2 < 0$ и $1 - e^{-x} < 0$. Учитывая это, легко видеть, что $f(x)$ на $(-\infty, 0)$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Далее,

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + e^{-x},$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4} - e^{-x} < 0 \quad \text{на} \quad (-\infty, 0),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f''(x) = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f''(x) = -\infty.$$

Поэтому на $(-\infty, 0)$ имеется и притом единственная точка x_1 перегиба графика $f(x)$. На $(-\infty, x_1)$ график f обращен выпуклостью вниз, а на $(x_1, 0)$ — выпуклостью вверх (см. схематический график, рис. 5.11).

Пример 2. Кривая $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ не имеет асимптоты, потому что хотя предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

и существует, все же предел $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x} - 0) = \infty$ не конечный.

§ 5.16. Схема построения графика функции

Если нужно в общих чертах представить себе график функции $y = f(x)$, могут помочь следующие указания.

1. Найти область Ω значений x, где функция f определена.

2. Найти точки $x_1, x_2, \ldots,$ где $f'(x) = 0$ или производная не существует, в частности равна ∞. Вычислить значения f в этих точках: $f(x_1), f(x_2), \ldots,$ если они существуют, и определить, не являются ли они точками максимума, минимума. Если f не определена в какой-либо из точек x_k, то важно знать пределы $f(x_k - 0)$, $f(x_k + 0)$, важно также определить пределы

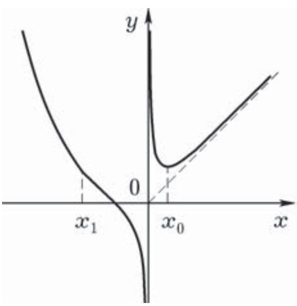

Рис. 5.11

$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} f(x),$$

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

если они имеют смысл.

3. Область Ω разделяется точками x_k на интервалы (a, b), на каждом из которых $f'(x) \neq 0$. Среди них могут быть бесконечные интервалы (вида $(-\infty, c)$ или $(d, +\infty)$). Будем считать, что производная $f'(x)$ непрерывна на каждом таком интервале (a, b). Тогда $f'(x)$ на (a, b) сохраняет знак. Важно выяснить этот знак, тогда станет известно, будет ли f возрастать или убывать на (a, b).

4. Важно отметить на каждом интервале (a, b) точки

$$x_{k,1},\ x_{k,2},\ \ldots, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $f''(x) = 0$, и определить соответствующие значения функции

$$f(x_{k,1}),\ f(x_{k,2}),\ \ldots$$

В этих точках могут быть точки перегиба кривой $y = f(x)$. Эти точки в свою очередь делят (a, b) на интервалы, на которых вторая производная, если она существует, сохраняет знак.

Выяснение знака $f''(x)$ дает возможность узнать направление выпуклости кривой (вверх или вниз).

5. Если возможно, надо решить уравнение $f(x) = 0$ и выяснить интервалы, на которых f сохраняет знак $(f(x) > 0$ или $f(x) < 0)$.

6. Выяснить вопрос о существовании асимптот, т. е. найти пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b,$$

если они существуют.

На основе этих сведений желательно составить таблицу примерно следующего вида:

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, \infty)$
y'	> 0	0	< 0	$-\frac{3}{2}$	< 0	0	> 0
y	возрастает асимптот нет	0	убывает	$-\frac{1}{2}$	убывает	-1	возрастает асимптота $y = x - 3$
y''	< 0	< 0	< 0	0	> 0	> 0	> 0
y	выпукла вверх	max	выпукла вверх	перегиб	выпукла вниз	min	выпукла вниз

На основании данных этой таблицы график функции $y = f(x)$ имеет вид, как на рис. 5.12.

Конечно, этот график передает нам точные значения f только в трех точках $(x = 0, \frac{1}{2}, 1)$, остальные значения f взяты на глаз, но он дает представление об общем поведении функции. Если бы мы захотели протабулировать ее более детально, например вычислить ее на некотором интервале для значений x, отстоящих друг от друга на 0,001, то пришлось бы воспользоваться теми или иными вычислительными устройствами (калькулятором и др.), но и в этом случае для ориентации предварительно полезно узнать схематический график функции, подобный рис. 5.12.

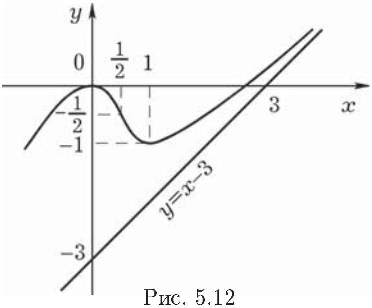

Рис. 5.12

П р и м е р. Построить кривую, заданную параметрически:

$$x = te^t, \qquad y = te^{-t}, \qquad -\infty < t < +\infty. \tag{1}$$

Р е ш е н и е. Построим сначала график функции $x = te^t$. Эта функция задана на всей оси, неограниченная, непрерывная и дифференцируемая на $(-\infty, \infty)$; $x > 0$ при $t > 0$; $x < 0$ при $t < 0$; $x = 0$ при $t = 0$. Далее, $x' = (1+t)e^t$. Уравнение $x'(t) = 0$ имеет единственный корень $t = -1$. При этом, очевидно, $x' > 0$ при $t > -1$, $x' < 0$ при $t < -1$. Таким образом, функция $x(t)$ возрастает при $t > -1$ и убывает при $t < -1$. В точке $t = -1$ функция $x(t)$ имеет локальный минимум, $x(-1) = -e^{-1}$. На самом деле, это, очевидно, минимум на $(-\infty, \infty)$.

Исследуем функцию на выпуклость: $x'' = (2+t)e^t$; $x'' > 0$ при $t > -2$; $x'' < 0$ при $t < -2$; $x''(-2) = 0$. Значит, на $(-\infty, -2)$ график выпуклый вверх, а на $(-2, \infty)$ выпуклый вниз, $t = -2$ — точка перегиба.

Далее,

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{te^t}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} [te^t - 0] = 0,$$

т. е. $x = 0$ — горизонтальная асимптота.

На основании этого график функции имеет вид, как на рис. 5.13. Область значений функции есть $X = [-e^{-1}, \infty)$.

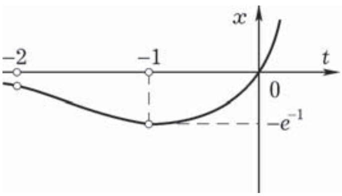

Рис. 5.13

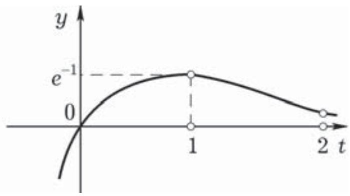

Рис. 5.14

Аналогично можно построить график функции $y = te^{-t}$ (рис. 5.14). Область значений этой функции есть $Y = (-\infty, e^{-1})$. На $(-\infty, 1)$ функция $y = te^{-t}$ строго возрастает от $-\infty$ до $y = e^{-1}$, в точке $t = 1$ достигает максимума (локального и на $(-\infty, \infty)$). На интервале $(1, \infty)$ она строго убывает к нулю при $t \to +\infty$ и имеет, таким образом, асимптоту $y = 0$ при $t \to +\infty$. Отмечена еще точка $t = 2$, в которой кривая имеет перегиб. На $(-\infty, 2)$ кривая обращена выпуклостью вверх и на $(2, \infty)$ — вниз.

Теперь мы переходим к более трудной задаче — начертить схематический график кривой (1). Обозначим ее через Г. Функции, определяющие Г, непрерывно дифференцируемы сколько угодно раз. Мы используем только тот факт, что эти функции дважды непрерывно дифференцируемы. Отметим, что Г — гладкая кривая, потому что производные (по t) от функций $x = \varphi(t) = te^t$ и $y = \psi(t) = te^{-t}$ одновременно не равны нулю.

Обозначим через Γ_1 и Γ_2 ветви Г, на которых соответственно $x'_t < 0$ и $x'_t > 0$. Таким образом (см. рис. 5.13 и 5.14), Γ_1 соответствует изменению $t \in (-\infty, -1)$, Γ_2 соответствует изменению $t \in (-1, \infty)$.

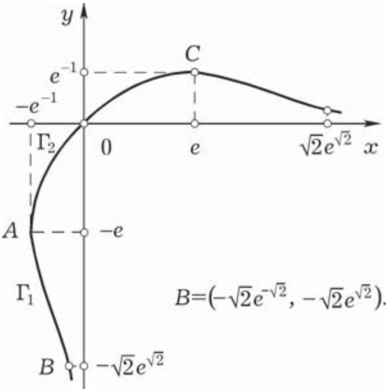

Рис. 5.15

На Γ_1 функция $x = \varphi(t)$ строго убывает от $\varphi(-\infty) = 0$, до $\varphi(-1) = -e^{-1}$, и ее можно обратить, а функция $y = \psi(t)$ строго возрастает от $\psi(-\infty) = -\infty$ до $\psi(-1) = -e$. Отсюда следует, что ветвь Γ_1 описывается явной функцией

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)), \qquad x \in (-e^{-1}, 0).$$

Она изображена на рис. 5.15 — ниже точки A. Когда t возрастает от $-\infty$ до -1, абсцисса x точки Γ_1 убывает от 0 до $-e^{-1}$, а ордината y возрастает от $-\infty$ до $-e$. Так как $x'(-1) = 0$ и $y'(-1) \neq 0$, то касательная в точке A параллельна оси y. К тому же Γ расположена правее касательной — ведь на рис. 5.13 видно, что все точки Γ имеют абсциссу $x \geqslant -e^{-1}$.

В любой точке t кривой Γ, отличной от A, т. е. при $t \neq -1$ производная $x'(t)$ не равна нулю и

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1-t}{1+t}\,e^{-2t}, \tag{2}$$

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{\left(\frac{1-t}{1+t}\,e^{-2t}\right)'}{(1+t)e^t} = 2\,\frac{t^2-2}{(1+t)^3}\,e^{-3t}\,. \tag{3}$$

Отсюда

$$y''_x\Big|_{t=\pm\sqrt{2}} = 0. \tag{4}$$

Нас сейчас интересует значение $t = -\sqrt{2}$, которому соответствует точка $B = \left(-\sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}\right) \in \Gamma_1$.

Из (3) видно, что если $t < -\sqrt{2}$ (т. е. на части Γ_1 ниже точки B), то $y''_x < 0$ и Γ_1 обращена выпуклостью вверх. Если же $-\sqrt{2} < t \leqslant -1$

(т.е. на дуге $\smile{AB}$), то $y''_x > 0$ и Γ_1 обращена выпуклостью вниз. Таким образом, B есть точка перегиба Γ_1.

Переходим теперь к Γ_2 $(-1 < t < \infty)$. Как видно из рис. 5.13 и 5.14, на интервале $-1 < t < 1$ функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ строго возрастают, но тогда и функция от x

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)), \qquad -e^{-1} < x < e,$$

строго возрастает. К тому же ее график на этом интервале обращен выпуклостью вверх (см. (3)). Это изображено дугой $\smile{AC} \subset \Gamma_2$. Что же касается точки C, то в ней $y'_x = 0$ $\left(y'_x(e) = \frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{0}{x'(1)} = 0\right)$, и так как в ней к тому же график обращен выпуклостью вверх, то C есть точка локального максимума функции $y(x)$. При $x > e$ (т.е. $t > 1$) $x(t)$ возрастает, а $y(t)$ убывает к нулю. Это показывает, что при $x \to +\infty$ функция $y(x)$ стремится к нулю, убывая. При этом $x\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ есть точка перегиба графика $y(x)$. Слева от этой точки график обращен выпуклостью вверх, а справа — вниз (см. (3)).

§ 5.17. Кусочно непрерывные и кусочно гладкие функции

Функцию f мы называем *гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она имеет непрерывную производную на этом отрезке.

В этом определении под производной в точках a, b понимается соответственно правая и левая производная в этих точках. Гладкая на $[a, b]$ функция автоматически непрерывна на $[a, b]$, ведь она имеет всюду на $[a, b]$ производную.

Другое эквивалентное определение гласит: функция f *гладкая на* $[a, b]$, если она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на интервале (a, b) непрерывную производную $f'(x)$ такую, что существуют пределы

$$f'(a+0) = A, \qquad f'(b-0) = B. \tag{1}$$

Ясно, что первое определение влечет второе. Допустим теперь, что f гладкая в смысле второго определения. Тогда

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a+\theta h) \to A, \qquad h > 0, \quad h \to 0, \quad 0 < \theta < 1, \tag{2}$$

и, следовательно, f имеет производную (правую) в точке a, равную $f'(a) = A$. В силу первого равенства (1) она непрерывна (справа) в этой точке. Аналогично доказывается существование и непрерывность производной f в точке b и равенство $f'(b) = B$. Следовательно, f гладкая также и в смысле первого определения.

Функция f называется *кусочно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если он может быть разделен точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

так, что f окажется непрерывной на каждом интервале (x_i, x_{i+1}). Но при этом существуют пределы $f(x_i + 0)$, $f(x_{i+1} - 0)$.

Функцию f назовем *кусочно гладкой* на отрезке $[a, b]$, если он может быть разделен точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \tag{3}$$

в конечном числе так, что f окажется непрерывной вместе с производной f' на каждом частичном интервале (x_j, x_{j+1}), $j = 0, \ldots, n-1$, и при этом существуют пределы

$$f(x_j + 0), \quad f'(x_j + 0), \quad f(x_{j+1} - 0), \quad f'(x_{j+1} - 0).$$

Таким образом, функция f делается гладкой на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$, если положить

$$f(x_j) = f(x_j + 0), \qquad f(x_{j+1}) = f(x_{j+1} - 0).$$

На рис. 5.16 изображен график функции $y = [x]$ — целая часть x, очевидно, кусочно гладкой.

Важным частным случаем кусочно гладкой функции является *непрерывная кусочно гладкая на отрезке* $[a, b]$ *функция* f. Для нее имеют место следующие характерные свойства:

1) f непрерывна на $[a, b]$; 2) существует разбиение (3) отрезка $[a, b]$ такое, что f является гладкой функцией на каждом из частичных отрезков $[x_j, x_{j+1}]$.

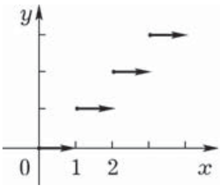

Рис. 5.16

Упражнения.

1. Показать, что функция, изображенная на рис. 5.16, кусочно гладкая. Показать еще, что функции, изображенные на рис. 5.1, *в*–*е*, не являются таковыми.

Пояснение. Учесть, что эти функции в точке x_0 имеют бесконечные производные, во всяком случае, правые и левые.

2. Показать, что функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & 0 < |x| \leqslant 1, \end{cases}$ не является гладкой на отрезке $[-1, +1]$, несмотря на то, что она имеет производную во всех точках этого отрезка.

3. Показать, что если функция f непрерывная, но не гладкая на отрезке $[a, b]$, и в то же время гладкая на каждом из отрезков $[a, c]$, $[c, b]$, то f не имеет производной в точке c, хотя и имеет в этой точке правую и левую производные.

4. Показать, что если f непрерывна и имеет производную f' во всех точках $[a, b]$, то последняя не может иметь разрывы первого рода (производная от f в примере 2 хотя и существует всюду на $[-1, +1]$, но имеет в $x = 0$ разрыв второго рода).

Глава 6

n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ГЕОМЕТРИЯ КРИВОЙ

§ 6.1. n-мерное пространство. Линейное множество

Произвольную упорядоченную систему $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных (комплексных) чисел x_j называют *вектором* или *точкой n-мерного действительного (комплексного) пространства* $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$). Таким образом, $\mathbb{R}^n$ есть множество всех указанных $\mathbf{x}$.

Векторы (точки) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ мы будем складывать, вычитать и умножать на них действительные (комплексные) числа, руководствуясь следующим правилом: если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ и α, β — действительные (комплексные) числа, то

$$\alpha\mathbf{x} \pm \beta\mathbf{y} = (\alpha x_1 \pm \beta y_1, \ldots, \alpha x_n \pm \beta y_n).$$

Вектор (точку) $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ называют *нулевым вектором (точкой)* $\mathbb{R}^n$. Очевидно $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Полагают еще $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$, и тогда, очевидно, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

В приложениях (в геометрии, в механике) говорят, что $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ есть *вектор*, начало которого есть нулевая точка, а конец — точка $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. В двумерном и трехмерном случаях ($n = 2, 3$) такая терминология имеет наглядный смысл.

Непосредственно проверяется выполнение следующих свойств ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, α, β — действительные (комплексные*)) числа):

1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
3) из $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$ следует $\mathbf{y} = \mathbf{z}$;
4) $\alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y})$;
5) $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} = (\alpha + \beta)\mathbf{x}$;
6) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$;
7) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
8) $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Множество E элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ любой природы называется *линейным действительным (комплексным) множеством с нулевым элементом* $\mathbf{0}$, если для любых двух элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ в силу некоторого закона определен элемент $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in E$, называемый их *суммой*, и если для любого действительного (комплексного) числа α и любого элемента $\mathbf{x} \in E$ определен также элемент $\alpha\mathbf{x} \in E$ (*произведение α на* $\mathbf{x}$) и при этом выполняются перечисленные выше свойства (аксиомы) 1)–8).

---

*) О комплексных числах см. §8.2.

Из сказанного следует, что $\mathbb{R}^n$ *можно рассматривать как пример линейного множества.* Но существуют и многие другие такие примеры. Множество всех последовательностей действительных или комплексных чисел $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, если считать, что

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots), \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots),$$

есть линейное множество. Его подмножество, состоящее из сходящихся к конечным числам последовательностей, с тем же определением сложения и умножения на число, очевидно, также есть линейное множество. Множество C всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций f (действительных или комплексных), если считать, как обычно, что

$$\alpha f + \beta\varphi = \alpha f(x) + \beta\varphi(x), \qquad f, \varphi \in C,$$

есть тоже, очевидно, линейное множество.

Наконец, множество многочленов $P_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$ степени не выше n есть также линейное множество, если понимать их сложение и умножение на число в обычном смысле.

В списке аксиом 1)–8) ничего не говорится явно о вычитании элементов. На самом деле это понятие возникает на основе этих аксиом.

В самом деле,

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = 1 \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} = (1 + 0)\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Полагая $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$, получим

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 1 \cdot \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = (1 - 1)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Теперь определяем разность $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ как такой элемент $\mathbf{z}$, что

$$\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{x}.$$

Очевидно, $\mathbf{z} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$, потому что

$$\mathbf{y} + \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}.$$

Другого такого элемента нет, потому что если бы

$$\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{z}_1,$$

то

$$(-\mathbf{y}) + \mathbf{y} + \mathbf{z} = (-\mathbf{y}) + \mathbf{y} + \mathbf{z}_1,$$

т. е.

$$\mathbf{0} + \mathbf{z} = \mathbf{0} + \mathbf{z}_1, \qquad \mathbf{z} = \mathbf{z}_1.$$

§ 6.2. Евклидово n-мерное пространство. Пространство со скалярным произведением

Пусть $\mathbb{R}^n$ есть действительное n-мерное пространство. Произвольным его точкам (векторам)

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \qquad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

приведем в соответствие число

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \tag{1}$$

называемое *скалярным произведением векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$.

Скалярное произведение, очевидно, обладает следующими свойствами:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

2) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ есть *линейная форма по* $\mathbf{x}$, т. е. для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ и чисел α, β

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z});$$

таким образом, в силу 1)

$$(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}, \mathbf{z}); \tag{2}$$

3) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$ для любого вектора $\mathbf{x}$, а из равенства $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ следует, что $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, так как тогда $x_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Введем следующее определение: если E есть линейное действительное множество и любым его двум элементам $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ приведено в соответствие число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, подчиняющееся условиям 1)–3), то будем говорить, что E есть *линейное пространство со скалярным произведением* (где введено скалярное произведение).

Теперь можно сказать, что *пространство* $\mathbb{R}^n$, *в котором введено понятие* (1), *есть пространство со скалярным произведением.*

Известны и другие линейные пространства со скалярным произведением. Некоторые из них мы будем изучать (см. гл. 14).

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — два элемента какого-либо линейного множества E, где введено скалярное произведение, и λ — произвольное действительное число. Тогда в силу свойств 1)–3)

$$0 \leqslant (\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}). \tag{3}$$

Полагая

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})},$$

получим

$$2\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{2(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}, \qquad \lambda^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}.$$

Поэтому из (3) следует:

$$0 \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}, \tag{4}$$

и мы получили важное неравенство (*неравенство Буняковского* *)).

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}. \tag{5}$$

При $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$, т. е. если $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ есть нулевой элемент, оно тоже верно, потому что $(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = (\mathbf{x}, 0 \cdot \mathbf{0}) = 0(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$.

---

*) В. И. Буняковский (1804–1889) — русский математик, академик.

Далее, для любых двух элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ имеем

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant \\ \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \\ + 2\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}\sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \left(\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} + \sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}\right)^2, \tag{6}$$

и мы получили другое важное неравенство

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y})^{1/2} \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} + (\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}. \tag{7}$$

Арифметическое значение корня квадратного из $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ называется *нормой* $\mathbf{x}$ и обозначается так: $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ (см. следующий параграф).

n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, где введено скалярное произведение (1), называется *евклидовым n-мерным пространством.*

Неравенства (5), (7) для элементов евклидова n-мерного пространства превращаются в следующие неравенства для систем чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$:

$$\left|\sum_1^n x_j y_j\right| \leqslant \left(\sum_1^n x_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_1^n y_j^2\right)^{1/2}, \tag{8}$$

$$\left(\sum_1^n (x_j + y_j)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_1^n x_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_1^n y_j^2\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Из (8) следует неравенство

$$\sum_1^n |x_j y_j| \leqslant \left(\sum_1^n x_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_1^n y_j^2\right)^{1/2}, \tag{10}$$

а из (9) следует неравенство

$$\left(\sum_1^n |x_j + y_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_1^n x_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_1^n y_j^2\right)^{1/2}, \tag{11}$$

потому что можно считать, что эти неравенства применены к неотрицательным числам $|x_j|$, $|y_j|$.

Отметим еще неравенства

$$\frac{1}{n^{1/2}} \sum_1^n |x_j| \leqslant \left(\sum_1^n x_j^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_1^n |x_j|. \tag{12}$$

Первое из них вытекает из (10), если считать $y_j = 1,\ j = 1, \ldots, n$, а второе проверяется непосредственно после возведения его частей в квадрат.

Соотношение (8) называется *неравенством Коши*, а (9) есть частный случай *неравенства Минковского*.

§ 6.3. Линейное нормированное пространство

Если E есть линейное множество элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ и каждому его элементу $\mathbf{x}$ приведено в соответствие число $\|\mathbf{x}\|$, удовлетворяющее ниже формулируемым трем свойствам 1)–3), то говорят, что E есть *линейное нормированное пространство*, а число $\|\mathbf{x}\|$ называют *нормой элемента* $\mathbf{x}$.

1) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$ для любого $\mathbf{x} \in E$; из равенства $\|\mathbf{x}\| = 0$ следует, что $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, т.е. есть нулевой элемент линейного множества E.

2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ для любого $\mathbf{x} \in E$ и любого числа α (комплексного или действительного, в зависимости от того, будет ли E комплексным или действительным).

3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, каковы бы ни были $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ есть нормированное пространство, если в качестве нормы $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ взять

$$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| = \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Чтобы доказать, что величина (1) есть норма, надо проверить, что для нее выполняются свойства 1)–3) нормы. В самом деле,

1) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$ (если же $0 = \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_1^n x_i^2\right)^{1/2}$, то все координаты $x_i = 0$, т.е. $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0) = \mathbf{0}$);

2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = \left(\sum_1^n (\alpha x_i)^2\right)^{1/2} = |\alpha|\left(\sum_1^n x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$;

3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (это есть неравенство (10) предыдущего параграфа).

Обычно в случае евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (но только в этом случае) норму в точке $\mathbf{x}$ записывают так:

$$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}|,$$

и мы будем именно так поступать.

Отметим, что в двух- и трехмерном евклидовых пространствах норма $\mathbf{x}$ есть длина вектора $\mathbf{x}$.

Возможны и другие (не евклидовы) нормировки пространства $\mathbb{R}^n$. Например, для точек (векторов) $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ можно ввести норму

$$\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \tag{2}$$

или

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_1^n |x_j|^p\right)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty. \tag{3}$$

Тот факт, что (2) есть норма, так же как то, что (3) при $p = 1$ есть норма, читатель легко может проверить.

Неравенство 3) называется *неравенством треугольника.* В двумерном или трехмерном случае евклидова пространства оно как раз и выражает известный геометрический факт, что длина стороны треугольника не превышает суммы длин остальных его двух сторон, и кстати доказывает этот факт аналитическим путем.

Из неравенства 3) следует (если заменить в нем $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ или $\mathbf{y}$ на $\mathbf{y}-\mathbf{x}$), что

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|, \qquad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|.$$

поэтому

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geqslant \big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big|. \tag{4}$$

В нормированном пространстве E можно определить *понятие предела.* Будем говорить, что последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$ *сходится* (*стремится*) к элементу $\mathbf{x} \in E$, и писать $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ или $\lim \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$, $n \to \infty$, если $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \to 0$, $n \to \infty$.

Если последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$ имеет предел $\mathbf{x} \in E$, то этот предел единственный, потому что из того, что $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{y}$, следует

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) + (\mathbf{x}_n - \mathbf{y})\| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| + \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\| \to 0,$$

откуда $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = 0$, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Так как $\big|\|\mathbf{x}_n\| - \|\mathbf{x}\|\big| \leqslant \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \to 0$, то из того, что $\mathbf{x}_n$ сходится к $\mathbf{x}$, следует, что $\|\mathbf{x}_n\|$ стремится к $\|\mathbf{x}\|$:

$$\|\mathbf{x}_n\| \to \|\mathbf{x}\|, \qquad n \to \infty.$$

Если $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, а α_n, α — числа и если $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, $\alpha_n \to \alpha$, то

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n \pm \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} \pm \mathbf{y}, \qquad \lim_{n\to\infty} (\alpha_n \mathbf{x}_n) = \alpha \mathbf{x}.$$

В самом деле,

$$\|(\mathbf{x} \pm \mathbf{y}) - (\mathbf{x}_n \pm \mathbf{y}_n)\| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{y}_n\| \to 0, \qquad n \to \infty,$$

$$\|\alpha\mathbf{x} - \alpha_n\mathbf{x}_n\| = \|(\alpha-\alpha_n)\mathbf{x} + \alpha_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\| \leqslant \|(\alpha-\alpha_n)\mathbf{x}\| + \\ + \|\alpha_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\| \leqslant |\alpha-\alpha_n|\,\|\mathbf{x}\| + |\alpha_n|\,\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_n\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

§ 6.4. Вектор-функция в n-мерном евклидовом пространстве

Пусть E есть множество действительных чисел t. Если каждому $t \in E$ в силу определенного закона приведен в соответствие вектор *) n-мерного пространства

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \tag{1}$$

то будем говорить, что этим определена *вектор-функция* $\mathbf{x}(t)$ *на* E.

---

*) Мы будем иметь в виду векторы $\mathbf{x}$, принадлежащие действительному пространству $\mathbb{R}^n$, но ничего в наших рассуждениях не изменится, если считать их принадлежащими комплексному пространству $\mathbb{C}^n$.

Обычные функции $\alpha(t)$ (приводящие в соответствие каждому $t \in E$ число $\alpha(t)$) называют также *скалярными функциями.*

Будем говорить, что вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ *имеет предел в точке* t_0, равный вектору $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, и писать

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{y} \quad \text{или} \quad \mathbf{x}(t) \to \mathbf{y}, \qquad t \to t_0, \tag{2}$$

если

$$\lim_{t \to t_0} |\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)| = 0, \tag{3}$$

или, что все равно (пояснения ниже), если

$$\lim_{t \to t_0} x_j(t) = y_j, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Равенство (3) утверждает, что скалярная функция $|\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)|$ от t имеет предел при $t \to t_0$, равный нулю, но это, как мы знаем, предполагает, что она определена на некоторой окрестности точки t_0, за исключением, быть может, самой точки t_0, но тогда и все компоненты $x_j(t)$ определены на этой окрестности.

Имеют место неравенства (см. § 6.2, (10))

$$\frac{1}{\sqrt{n}} |y_j - x_j(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j(t)| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j(t))^2 \right)^{1/2} = |\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)|,$$

из которых следует, что если выполняется (3), то выполняется и (4) для всех $j = 1, \ldots, n$, и наоборот.

По определению вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ *непрерывна в точке* t_0, если существует предел $\lim_{t \to t_0} \mathbf{x}(t)$, равный $\mathbf{x}(t_0)$.

Это определение, очевидно, эквивалентно утверждению, что компоненты $x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, в точке t_0 непрерывны.

Производная от вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ в точке t определяется как предел:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{h},$$

если, конечно, он существует. Производная порядка m от $\mathbf{x}(t)$ определяется по индукции:

$$\frac{d^m \mathbf{x}}{dt^m} = \frac{d}{dt} \frac{d^{m-1} \mathbf{x}}{dt^{m-1}}, \qquad m = 2, 3, \ldots$$

При этом, очевидно, существование ее влечет за собой существование производных m-го порядка от компонент и наоборот, т.е. имеет место равенство

$$\frac{d^m \mathbf{x}}{dt^m} == \left(x_1^{(m)}(t), \ldots, x_n^{(m)}(t) \right), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Производные первого и второго порядков обозначают и так:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t), \qquad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}(t).$$

Если $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ — вектор-функции, а $\alpha(t)$ — скалярная функция, то имеют место равенства

$$\lim_{t\to t_0}\big(\mathbf{x}(t)\pm\mathbf{y}(t)\big) = \lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t)\pm\lim_{t\to t_0}\mathbf{y}(t),$$
$$\lim_{t\to t_0}\big(\alpha(t)\mathbf{x}(t)\big) = \lim_{t\to t_0}\alpha(t)\lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t),$$
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\pm\mathbf{y}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\pm\frac{d\mathbf{y}}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\frac{d\mathbf{x}}{dt}+\frac{d\alpha}{dt}\mathbf{x},$$

где, конечно, предполагается, что пределы или производные, фигурирующие в правых частях равенств, существуют. Эти равенства тривиальным образом доказываются переходом от векторов к соответствующим координатам; например,

$$\lim_{t\to t_0}\big(\mathbf{x}(t)\pm\mathbf{y}(t)\big) = \Big(\lim_{t\to t_0}\big(x_1(t)\pm y_1(t)\big),\ldots,\lim_{t\to t_0}\big(x_n(t)\pm y_n(t)\big)\Big) =$$
$$= \Big(\lim_{t\to t_0}x_1(t)\pm\lim_{t\to t_0}y_1(t),\ldots,\lim_{t\to t_0}x_n(t)\pm\lim_{t\to t_0}y_n(t)\Big) =$$
$$= \Big(\lim_{t\to t_0}x_1(t),\ldots,\lim_{t\to t_0}x_n(t)\Big)\pm\Big(\lim_{t\to t_0}y_1(t),\ldots,\lim_{t\to t_0}y_n(t)\Big) =$$
$$= \lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t)\pm\lim_{t\to t_0}\mathbf{y}(t).$$

Но можно рассуждения проводить чисто векторным путем, например, полагая $\lim_{t\to t_0}\alpha(t)=\beta$, $\lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t)=\mathbf{y}$, получим

$$|\alpha(t)\mathbf{x}(t)-\beta\mathbf{y}| \leqslant |(\alpha(t)-\beta)\mathbf{x}(t)|+|\beta(\mathbf{x}(t)-\mathbf{y})| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha(t)-\beta|\,|\mathbf{x}(t)|+|\beta|\,|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}| \to 0\cdot|\mathbf{y}|+|\beta|\cdot\mathbf{0}=0, \qquad t\to t_0.$$

§ 6.5. Непрерывная кривая. Гладкая кривая

Пусть задана непрерывная вектор-функция

$$\mathbf{x}(t) = \big(x_1(t),\ldots,x_n(t)\big), \qquad a\leqslant t\leqslant b. \tag{1}$$

Множество всех точек $\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^n$, $t\in[a,b]$, упорядоченное при помощи данного параметра t, называется *непрерывной кривой.* Мы ее будем обозначать, например, буквой Γ.

Когда t возрастает от a до b, точка $\mathbf{x}(t)$ выходит из некоторой точки $A=\mathbf{x}(a)\in\mathbb{R}^n$ и приходит в некоторую точку $B=\mathbf{x}(b)\in\mathbb{R}^n$.

Говорят, что параметр t *ориентирует* данную кривую Γ. При $n = 2, 3$ кривая Γ приобретает реальный смысл (рис. 6.1). На ней можно отметить стрелку, указывающую общее направление движения точки $\mathbf{x}(t)$ по Γ при возрастании t.

Если сделать замену t на τ при помощи строго возрастающей непрерывной функции $t = \lambda(\tau)$, $\tau \in [c, d]$, то получим новую вектор-функцию

$$\mathbf{x}(\lambda(\tau)) = \big(x_1(\lambda(\tau)), \ldots, x_n(\lambda(\tau))\big), \qquad \tau \in [c, d], \tag{2}$$

определяющую ту же кривую Γ, но уже при помощи параметра τ. В данном случае, когда τ возрастает от c до d, возрастает также t от a до b. Говорят, что в этом случае замена t на τ не изменяет ориентацию Γ.

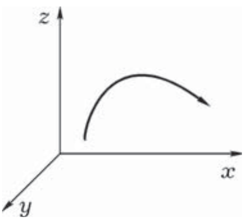

Рис. 6.1

Другое дело, если функция $t = \lambda(\tau)$ строго убывает. Тогда $\lambda(d) = a$, $\lambda(c) = b$ и теперь $d < c$, и когда τ возрастает от d до c, параметр t убывает от b до a и направление движения подвижной точки $\mathbf{x} \in \Gamma$ изменяется на противоположное. В этом случае говорят, что вектор-функция (2) определяет ту же кривую, но ориентированную противоположно.

Подчеркнем, что вектор-функция (1) определяет не только кривую Γ (множество точек), но и ее ориентацию (характер упорядочения точек $\mathbf{x}(t)$ при помощи t). В знак того, что Γ уже мыслится как упорядоченное (посредством t или τ) множество, пишут, например, Γ_+.

Ту же кривую Γ, ориентированную противоположно, можно обозначить теперь через Γ_-.

Вместо того, чтобы говорить "кривая, определяемая вектор-функцией $\mathbf{x}(t)$", будем часто говорить "кривая $\mathbf{x}(t)$".

Кривая Γ называется *гладкой на* $[a, b]$ (на (a, b)), если ее можно *) задать при помощи *гладкой вектор-функции* $\mathbf{x}(t)$, т. е. непрерывной и имеющей непрерывную *не равную нулю* производную на $[a, b]$ (на (a, b)), или, что, очевидно, все равно, если компоненты $x_j(t)$ вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ есть гладкие скалярные функции на $[a, b]$ (на (a, b)), имеющие производные, одновременно не равные нулю:

$$\left|\mathbf{x}'(t)\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} \big(x_j'(t)\big)^2 > 0, \qquad t \in [a, b] \ (\in (a, b)). \tag{3}$$

Мы будем называть параметр τ *допустимым* параметром гладкой кривой Γ, если он связан с t при помощи равенства $t = \lambda(\tau)$, $\tau \in [c, d]$

*) Здесь слово "можно" существенно, так как гладкую вектор-функцию можно "испортить", введя новый параметр τ при помощи подстановки $t = \lambda(\tau)$, где $\lambda(\tau)$ — строго монотонная непрерывная функция, имеющая производную, равную нулю в отдельных точках или вовсе не имеющая производной в некоторых τ.

($\in (c,d)$), где $\lambda(\tau)$ не только непрерывна и строго монотонна, но имеет непрерывную производную, не равную нулю на $[c,d]$ (на (c,d)). Таким образом, производная $\lambda'(\tau)$ на самом деле имеет один и тот же знак на $[c,d]$ (на (c,d)): $+$ или $-$. Если τ — допустимый параметр, то сформулированное выше на языке t определяющее свойство гладкой кривой, очевидно, сохранится, если его формулировать на языке τ, потому что вектор-функция $\mathbf{x}(\lambda(\tau)) = \mathbf{x}_*(\tau)$ имеет непрерывную производную на $[c,d]$ (на (c,d)), к тому же не равную нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} {x'_{*j}}^2(\tau) = {\lambda'}^2(\tau) \sum_{j=1}^{n} {x'_j}^2(t) > 0.$$

В двумерном случае гладкая кривая определяется двумя уравнениями:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t \in (a,b), \tag{4}$$

где φ и ψ имеют непрерывные, одновременно не равные нулю производные. Если, например, $\varphi'(t_0) \neq 0$, то существует интервал $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, на котором φ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, и тогда $y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Обычно в этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ задана *параметрически* равенствами (4). Ее производная вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\,. \tag{5}$$

Говорят, что формула (5) выражает производную от функции $f(x)$ *в параметрическом виде.* Очевидно также, что

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{{x'_t}^3}\,, \tag{6}$$

если допустить, что существуют вторые производные x''_t, y''_t.

Непрерывная кривая (1) называется также *кривой Жордана* (*жордановой кривой*) по имени французского математика Жордана (1838–1922). Если при этом $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b)$, то кривую называют *замкнутой* (*замкнутой кривой Жордана*). Если, кроме того, из того факта, что $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$, следует только, что либо $t_1 = t_2$, либо одно из чисел t_1, t_2, равно a, а другое b, то кривая Γ называется *замкнутой самонепересекающейся кривой Жордана.*

Если из равенства $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$ ($t_1, t_2 \in [a,b]$ или $t_1, t_2 \in (a,b)$) следует $t_1 = t_2$, то говорят, что Γ есть *незамкнутая самонепересекающаяся кривая.*

При $n = 2$ мы получим плоскую непрерывную кривую

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t), \qquad t \in [a,b] \ \text{ или } \ t \in (a,b). \tag{7}$$

Например, уравнения

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad -\infty < \theta < +\infty, \tag{8}$$

определяют гладкую плоскую кривую. Когда θ непрерывно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, соответствующая точка (x, y) описывает бесконечное число раз окружность

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{9}$$

В связи с этим говорят, что уравнения (8) суть параметрические уравнения окружности (9). В данном случае параметр θ имеет геометрический смысл; это есть угол, образованный радиус-вектором точки (x, y) с положительным направлением оси x.

Нужно сказать, что определение непрерывной кривой является настолько общим, что имеются примеры удовлетворяющих этому определению математических объектов, которые весьма сильно отклоняются от нашего обычного представления о кривой, в особенности, если разрешить ей самопересекаться.

Доказано, например, что можно определить такие непрерывные на отрезке $[0, 1]$ функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{10}$$

что при непрерывном возрастании t от $t = 0$ до $t = 1$ переменная точка $(\varphi(t), \psi(t))$, отправляясь при $t = 0$ от положения $(0, 0)$, пробежит буквально все точки квадрата $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ и при $t = 1$ окажется в верхнем правом его углу $(1, 1)$. Таким образом, эта кривая (кривая Пеано) заметает буквально все точки квадрата $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$, и при этом отдельные его точки заметаются кривой не один раз.

Пример 1. Эллипс Γ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0, \tag{11}$$

есть ограниченная гладкая замкнутая самопересекающаяся кривая, потому что Γ также описывается параметрически уравнениями

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{12}$$

определяющая ограниченную гладкую замкнутую кривую в том понимании терминов “гладкость”, “замкнутость”, как это определено выше в этом параграфе.

Пример 2. Астроида Γ

$$|ax|^{2/3} + |by|^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}, \quad 0 < b < a, \tag{13}$$

есть ограниченная непрерывная кусочно гладкая замкнутая кривая, потому что уравнение (13) эквивалентно следующим двум:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\theta, \quad y = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{14}$$

причем имеется только одна пара значений θ $(\theta = 0,\ \theta = 2\pi)$, которым соответствует одна и та же точка Γ. Из (13) видно, что кривая Γ симметрична относительно осей координат, а из (14) видно, что она непрерывна; производные от x и y по θ тоже непрерывны и одновременно не равны нулю всюду, за исключением точек 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$. Поэтому куски Γ, соответствующие интервалам $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$, гладкие (см. § 6.12, рис. 6.14).

§ 6.6. Геометрический смысл производной вектор-функции

Пусть в пространстве, где определена прямоугольная система координат x, y, z, задана гладкая вектор-функция (см. § 5.17)

$$\mathbf{r}(t) = \bigl(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\bigr), \qquad t \in (a, b). \tag{1}$$

На рис. 6.2 изображен *годограф* вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и отмечены две точки A и B годографа — концы векторов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ с началом в нулевой точке.

Очевидно, что вектор $\overline{AB}$ равен $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$. При $\Delta t \to 0$ точка B, двигаясь по годографу, стремится к точке A, а секущая, проходящая через A и B, стремится занять положение определенной прямой, которую называют *касательной к годографу в точке* A. Поэтому предельный вектор

$$\dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

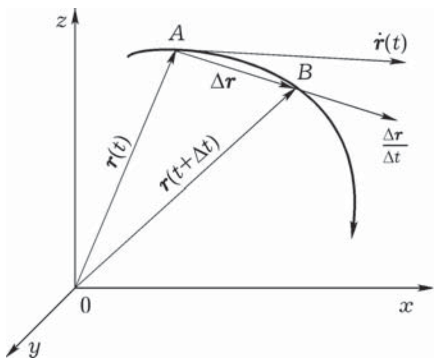

Рис. 6.2

(он не равен нулю) лежит на касательной к годографу в точке A. Длина $|\dot{\mathbf{r}}|$ вектора $\dot{\mathbf{r}}$ есть предел длины вектора $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, потому что

$$\left| |\dot{\mathbf{r}}| - \left| \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \right| \right| \leqslant \left| \dot{\mathbf{r}} - \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \right| \to 0, \qquad \Delta t \to 0.$$

Если t есть время и конец вектора $\mathbf{r}(t)$ описывает движение некоторой точки, то $\dot{\mathbf{r}}(t)$ есть вектор, выражающий скорость этой точки в момент времени t. Длина его $|\dot{\mathbf{r}}|$ есть скалярная величина скорости. Кроме того, вектор $\dot{\mathbf{r}}$ определяет направление движения точки в момент t. Вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ есть ускорение точки в момент t.

В § 6.4 мы уже останавливались на некоторых свойствах производной от вектор-функции. Отметим еще следующие очевидные свойства:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \left(\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\right),$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \left[\mathbf{a}\times \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right] + \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}\times \mathbf{b}\right],$$

где $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ — скалярное произведение, а $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$ — векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Отметим еще следующий факт. Пусть гладкая вектор-функция $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ имеет постоянную норму (длину): $|\mathbf{b}(t)| = c = \mathrm{const} > 0$. Тогда $(\mathbf{b},\mathbf{b}) = \mathbf{b}^2 = c^2$ и

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{b},\mathbf{b}) = 2\left(\mathbf{b}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right) = 0.$$

Таким образом, для любого t векторы $\mathbf{b}$ и $\frac{d\mathbf{b}}{dt}$ ортогональны (по условию $\mathbf{b}$, $\frac{d\mathbf{b}}{dt} \neq 0$), т. е. перпендикулярны.

Вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, имеющий положительную длину ($|\mathbf{a}| > 0$), можно записать в виде $\mathbf{a} = \alpha\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — единичный вектор, направленный в сторону $\mathbf{a}$:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left(\frac{a_1(t)}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2(t)}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3(t)}{|\mathbf{a}|}\right),$$

$$\alpha(t) = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2(t) + a_2^2(t) + a_3^2(t)}\,.$$

Очевидно, что если вектор $\mathbf{a}$ имеет производную для рассматриваемых t, то функции $\boldsymbol{\omega}$ и α имеют производные для этих t. Производная от вектора $\mathbf{a} = \alpha\boldsymbol{\omega}$ раскладывается на два вектора:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\,\boldsymbol{\omega} + \alpha\,\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\,. \tag{2}$$

Из них первый направлен в ту же сторону, что и $\mathbf{a}$ (или $\boldsymbol{\omega}$), и длина его равна скорости изменения длины $\mathbf{a}$, а второй ортогонален $\boldsymbol{\omega}$. Эта формула применяется в механике для разложения вектора ускорения на две составляющие, из которых одна имеет направление движения, а другая направлена перпендикулярно к ней.

§ 6.7. Длина дуги кривой

Пусть Γ есть непрерывная кривая:

$$\mathbf{r}(t) = \big(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\big), \qquad t \in [a,b]. \tag{1}$$

Разобьем отрезок $[a,b]$ на части точками:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b. \tag{2}$$

Им соответствуют точки кривой Г: $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$. Если соединить их последовательно отрезками (рис. 6.3), то получим ломаную, вписанную в Г.

Длиной кривой Г называется предел, к которому стремится сумма длин звеньев этой ломаной:

$$|\smile{AB}| = \lim \sum_{k=1}^{n} |A_{k-1}A_k|, \qquad \max(t_k - t_{k-1}) \to 0, \tag{3}$$

когда максимальный частичный отрезок разбиения (2) стремится к нулю. Если предел (3) существует, то говорят, что *кривая спрямляема на отрезке* $[a, b]$ *изменения параметра* t.

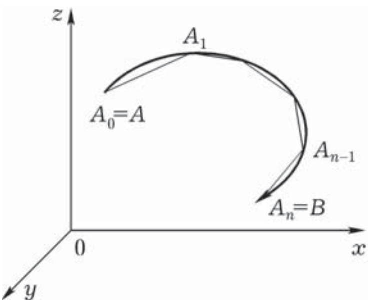

Рис. 6.3

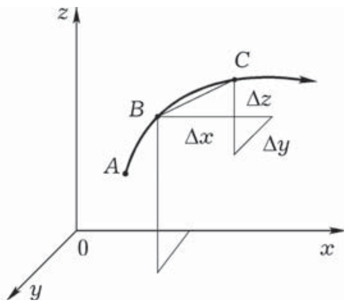

Рис. 6.4

Будем считать теперь, что наша кривая Г гладкая. Таким образом, функции φ, ψ, χ предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные производные на $[a, b]$, подчиняющиеся неравенству

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2 = {\varphi'}^2(t) + {\psi'}^2(t) + {\chi'}^2(t) > 0, \qquad t \in [a, b]. \tag{4}$$

В § 10.3 будет доказано, что гладкая кривая спрямляема на любом отрезке изменения параметра t и что длина дуги гладкой кривой Г обладает свойством аддитивности. Это значит, что если P_1, P_2, P_3 — три точки Г, соответствующие значениям t_1, t_2, t_3 параметра $(t_1 < t_2 < t_3)$, то имеет место равенство

$$|\smile{P_1P_3}| = |\smile{P_1P_2}| + |\smile{P_2P_3}|.$$

На рис. 6.4 изображена гладкая ориентированная кривая Г. Считаем, что она определена вектор-функцией (1). При этом A — начальная точка Г, соответствующая значению параметра $t = a$, а B — текущая точка Г, соответствующая значению $t \geqslant a$. Значению t придано приращение $\Delta t > 0$. На рисунке отмечена точка C, соответствующая значению параметра $t + \Delta t$.

Длина дуги $\breve{AB}$ обозначается через

$$|\breve{AB}| = s = s(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

и, соответственно,

$$|\breve{BC}| = \Delta s > 0, \qquad |\overline{BC}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} > 0.$$

В § 10.3 будет доказано, что для гладкой дуги ее малая длина Δs при $\Delta t \to 0$ эквивалентна соответствующей ее хорде, т. е.

$$|\breve{BC}| = |\overline{BC}| + o(\Delta t), \qquad \Delta t \to 0,$$

или

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} + o(\Delta t), \qquad \Delta t \to 0.$$

Откуда

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} + o(1), \qquad \Delta t \to 0.$$

После перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ получим формулу

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} > 0. \tag{5}$$

Кроме того, $s(a) = 0$. Но тогда s есть строго возрастающая функция, отображающая отрезок $[a, b]$ изменения t на некоторый отрезок $[0, l]$ изменения s, и существует обратная к ней функция

$$t = \Lambda(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant l,$$

непрерывная и имеющая непрерывную производную $\Lambda'(s) > 0$.

Следовательно, s можно рассматривать как один из допустимых параметров нашей гладкой кривой Γ:

$$x = \varphi(\Lambda(s)), \qquad y = \psi(\Lambda(s)), \qquad z = \chi(\Lambda(s)), \qquad 0 \leqslant s \leqslant l.$$

Заметим, что мы считали, что s возрастает вместе с t, поэтому перед корнем в (5) стоит знак $+$.

Отметим формулу

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = \frac{ds}{ds} = 1, \tag{6}$$

вытекающую из (5).

Примечание. Если пользуются записью $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, то при переходе от t к s просто пишут $\mathbf{r}(s) = \big(x(s), y(s), z(s)\big)$.

§ 6.8. Касательная

В пространстве, где определена прямоугольная система координат x, y, z, пусть задана гладкая кривая, определяемая вектором $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in (a, b)$ (рис. 6.5). Будем считать, что отсчет дуги выбран так, что с возрастанием параметра t ее длина s возрастает (как в § 6.7).

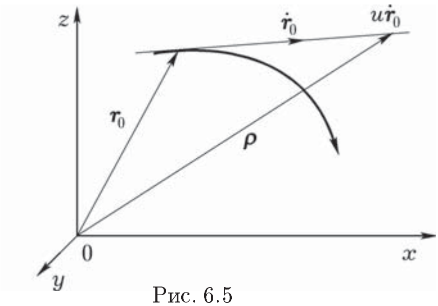

Рис. 6.5

Положим $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ и $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0) = (x_0', y_0', z_0')$. Вектор $\dot{\mathbf{r}}_0$ имеет направление касательной к нашей кривой в точке t_0, поэтому произвольная точка касательной $\boldsymbol{\rho} = (x, y, z)$ определяется вектором

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_0 + u\dot{\mathbf{r}}_0, \tag{1}$$

где u — произвольное число (текущий параметр касательной), ведь векторы $\dot{\mathbf{r}}_0$ и $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0$ коллинеарны.

Равенство (1) есть уравнение *касательной к кривой в точке* t_0 в векторной форме.

Из (1) следует, что уравнения касательной в декартовых координатах имеют вид

$$x - x_0 = ux_0', \quad y - y_0 = uy_0', \quad z - z_0 = uz_0',$$

или

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'} = \frac{z - z_0}{z_0'}\,. \tag{2}$$

Обозначим через α, β, γ углы, которые образует положительное направление касательной (направление $\dot{\mathbf{r}}_0$) соответственно с положительными направлениями осей координат x, y, z. Очевидно,

$$\cos\alpha = \frac{x_0'}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}} = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0,$$

$$\cos\beta = \frac{y_0'}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}} = \left(\frac{dy}{ds}\right)_0,$$

$$\cos\gamma = \frac{z_0'}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}} = \left(\frac{dz}{ds}\right)_0,$$

где $\left(\frac{dx}{ds}\right)_0$ обозначает, что в $\frac{dx}{ds}$ надо подставить значение $s = s_0$, соответствующее $t = t_0$. Перед корнями стоит знак $+$, потому что мы согласились, что длина дуги возрастает вместе с t.

Кривую, заданную в плоскости x, y, можно рассматривать как частный случай кривой в пространстве, у которой $z(t) \equiv 0$. Поэтому соотношениям (2) в плоском случае соответствует одно уравнение

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'}\,.$$

Положительное направление касательной образует в этом случае с осью x угол α, для которого

$$\cos\alpha = \frac{x_0'}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0, \qquad \sin\alpha = \frac{y_0'}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} = \left(\frac{dy}{ds}\right)_0.$$

Итак, $\dot{\mathbf{r}}(t)$ — вектор касательной к ориентированной кривой Γ. Начало его берут в точке касания к Γ. Направлен он по касательной в сторону возрастания t (или s).

Единичный вектор касательной:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \dot{\mathbf{r}}(s).$$

§ 6.9. Основной триэдр кривой

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве x, y, z задана гладкая кривая Γ, определяемая вектор-функцией

$$\mathbf{r}(s) = \big(x(s), y(s), z(s)\big), \qquad a < s < b,$$

от s — длины Γ. Предполагается, что $\mathbf{r}(s)$ в точке s имеет вторую производную

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \big(x''(s), y''(s), z''(s)\big),$$

отличную от нуля:

$$|\ddot{\mathbf{r}}(s)| = K > 0.$$

На рис. 6.6 изображена кривая Γ. В точке $A \in \Gamma$, соответствующей значению s, проведена касательная T к Γ, направленная в сторону возрастания s. На T отмечен единичный вектор касательной

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\mathbf{r}}(s). \tag{1}$$

Надо помнить, что для гладкой кривой

$$|\dot{\mathbf{r}}(s)|^2 = \big(\dot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s)\big) = 1, \tag{2}$$

поэтому, дифференцируя это равенство (по s), получим

$$2\big(\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s)\big) = 0,$$

что показывает, что векторы $\dot{\mathbf{r}}(s)$ и $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ ортогональны (перпендикулярны).

Вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ (выпущенный из точки A) называется *вектором главной нормали* к Γ в ее точке A (или s).

Любая прямая, проходящая через точку $A \in \Gamma$ перпендикулярно к касательной T, называется *нормалью к кривой* Γ (в ее точке). Совокупность этих нормалей заполняет плоскость, называемую *нормальной плоскостью* (к Γ в ее точке A). Но среди этих нормалей выделяется специальная нормаль N — *главная нормаль к* Γ, на которой лежит вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$. При этом N направлена в ту же сторону, что и вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ (см. рис. 6.6).

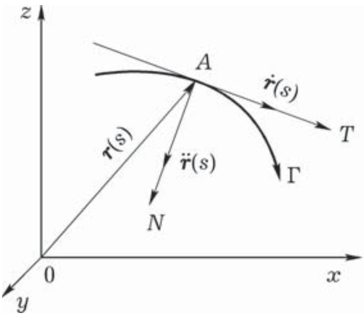

Рис. 6.6

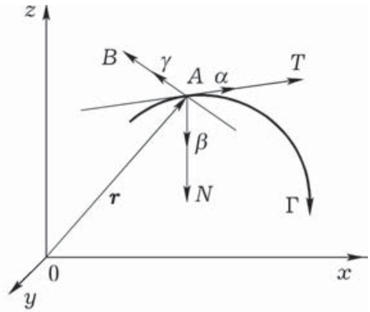

Рис. 6.7

Введем вектор

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{K} \tag{3}$$

— *единичный вектор главной нормали*, и еще третий единичный вектор

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \tag{4}$$

— *единичный вектор бинормали.*

Согласно свойствам векторного произведения вектор $\boldsymbol{\gamma}$ перпендикулярен к векторам $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ и направлен так, чтобы тройка векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ была ориентирована так же, как рассматриваемая прямоугольная система координат x, y, z. В данном случае взята левая система x, y, z, соответственно система $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ тоже левая.

Таким образом, выходящие из точки $A \in \Gamma$ векторы

$$\dot{\mathbf{r}}(s), \qquad \ddot{\mathbf{r}}(s), \qquad \dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) \tag{5}$$

являются соответственно векторами касательной, главной нормали и бинормали в точке $A \in \Gamma$.

Нормируя эти векторы, получим

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\alpha} = \dot{\mathbf{r}}(s), \qquad \boldsymbol{\beta} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{K}, \\ \boldsymbol{\gamma} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)|} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)}{K} \end{gathered} \tag{6}$$

— *единичные векторы* соответственно *касательной*, *главной нормали*, *бинормали*.

Плоскость $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ называют *соприкасающейся плоскостью*, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ — *нормальной плоскостью*, $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}$ — *спрямляющей плоскостью* (к Γ в ее точке A).

Векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ образуют *подвижный триэдр кривой* Γ. Когда точка A движется по кривой Γ, связанный с A триэдр тоже движется поступательно и вращаясь.

Однако, зафиксировав точку $A_0 \in \Gamma$, соответствующую определенному значению $s = s_0$ параметра, с помощью соответствующего A_0 триэдра $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\gamma}_0$ можно изучать достаточно малый кусочек $\sigma \subset \Gamma$, содержащий в себе точку A_0, или, как говорят, изучать Γ для значений s из малой окрестности точки s_0.

Вектор $\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)$ разложим по ортам $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$:

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0) = \xi(s)\boldsymbol{\alpha} + \eta(s)\boldsymbol{\beta} + \zeta(s)\boldsymbol{\gamma}. \tag{7}$$

Будем предполагать, что гладкий вектор $\mathbf{r}(s)$ имеет непрерывную вторую производную по s в окрестности точки s_0, и по-прежнему считать, что

$$|\ddot{\mathbf{r}}(s_0)| = K > 0.$$

Тогда автоматически координаты вектора $\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)$, т.е. функции $\xi(s)$, $\eta(s)$ и $\zeta(s)$, будут иметь вторую непрерывную производную в этой окрестности. Вектор $\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)$ обращается в нуль при $s = s_0$, соответственно

$$\xi(s_0) = \eta(s_0) = \zeta(s_0) = 0. \tag{8}$$

Пример 1. Будем писать $\xi'(s_0) = \xi_0'$, $\xi''(s_0) = \xi_0''$ и т. д.
Имеем

$$\begin{gathered} \xi_0' = (\dot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\alpha}) = 1, \quad \eta_0' = (\dot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad \zeta_0' = (\dot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \\ \xi_0'' = (\ddot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad \eta_0'' = (\ddot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\beta}) = K > 0, \quad \zeta_0'' = (\ddot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Так как $\xi_0' = \xi'(s_0) = 1$, то в окрестности s_0 производная $\xi'(s) > 0$ и $\xi(s)$ — строго возрастающая непрерывная функция в некоторой окрестности s_0, и равенство $\xi = \xi(s)$ обратимо: $s = \lambda(\xi)$. Но тогда в этой окрестности η и ζ — функции от ξ:

$$\eta = \lambda(\xi), \qquad \zeta = \mu(\xi). \tag{10}$$

Обе функции можно дифференцировать с помощью параметра s:

$$\left.\frac{d\eta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \frac{\eta_0'}{\xi_0'} = \frac{0}{1} = 0, \qquad \left.\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right|_{\xi=0} = \frac{\xi_0'\eta_0'' - \xi_0''\eta_0'}{\xi_0'^2} = K, \tag{11}$$

$$\left.\frac{d\zeta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \frac{\zeta_0'}{\xi_0'} = \frac{0}{1} = 0, \qquad \left.\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right|_{\xi=0} = \frac{\xi_0'\zeta_0'' - \xi_0''\zeta_0'}{\xi_0'^2} = 0. \tag{12}$$

Функция $\eta = \lambda(\xi)$ описывает проекцию Γ на соприкасающуюся плоскость. Равенства (11) (и еще $\eta(0) = 0$) показывают, что эта проекция касается касательной Γ в точке s_0 и обращена своей вогнутостью в сторону главной нормали (см. рис. 6.8). Малый кусок $\sigma \subset \Gamma$, содержащий A, находится полностью с одной стороны спрямляющей плоскости, именно со стороны $\boldsymbol{\beta}$. Кривая $\zeta = \mu(\xi)$ есть проекция малого куска $\sigma \subset \Gamma$, содержащего A, на спрямляющую плоскость $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}$. Оказалось, что две производные от этой функции в точке A равны нулю — первая и вторая.

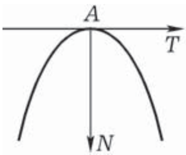

Рис. 6.8

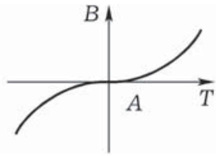

Рис. 6.9

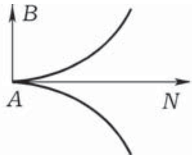

Рис. 6.10

Если допустить, что вектор-функция $\mathbf{r}(s)$ имеет три непрерывные производные, то можно было бы вычислить и третью производную

$$\Lambda = \left.\frac{d^3\xi}{d\xi^3}\right|_{\xi=0}.$$

Если $\Lambda \neq 0$, что часто бывает, то наша проекция будет касаться T в точке A, но с перегибом (см. рис. 6.9). Сама кривая Γ, таким образом, плавно пересечет соприкасающуюся плоскость, касаясь ее.

Проекция Γ на спрямляющую плоскость обычно имеет вид, как на рис. 6.10 (доказательство см. в 4-ом издании книги автора “Курс математического анализа”, § 6.10).

§ 6.10. Соприкасающаяся плоскость

Соприкасающуюся плоскость к гладкой кривой Γ в ее точке A мы уже определили в § 6.9 как плоскость, проходящую через (выпущенные из $A \in \Gamma$) векторы $\dot{\mathbf{r}}(s)$ и $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ при условии, что $|\ddot{\mathbf{r}}(s)| > 0$.

Но если гладкая кривая Γ задана вектором $\mathbf{r}(t)$ при помощи любого допустимого параметра t, то, как мы увидим ниже, соприкасающуюся плоскость к Γ можно определить так же, как плоскость, проходящую через векторы $\dot{\mathbf{r}}(t)$ и $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ при условии, что $|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)| > 0$.

В самом деле, учитывая, что $\dot{\mathbf{r}}(t) = s'_t \dot{\mathbf{r}}(s)$ (см. § 6.8), получим

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt}\left(s'_t \dot{\mathbf{r}}(s)\right) = s''_t \dot{\mathbf{r}}(s) + {s'_t}^2 \ddot{\mathbf{r}}(s), \tag{1}$$

ведь $\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot s'_t$.

Равенство (1) показывает, что $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ есть линейная комбинация перпендикулярных векторов $\dot{\mathbf{r}}(s)$ и $\ddot{\mathbf{r}}(s)$. При этом заметим, что коэффициент при $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ в правой части (1) положителен $\left({s'_t}^2 > 0\right)$, что показывает, что в соприкасающейся плоскости векторы $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ и $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ расположены по одну сторону от касательной (см. рис. 6.11).

Имеем далее

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = s'_t\dot{\mathbf{r}}(s) \times \left(s''_t\dot{\mathbf{r}}(s) + {s'_t}^2\ddot{\mathbf{r}}(s)\right) = {s'_t}^3\left(\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)\right), \qquad (2)$$

потому что $\dot{\mathbf{r}}(s) \times \dot{\mathbf{r}}(s) = 0$.

Равенство (2) показывает, что векторы, перпендикулярные к $\dot{\mathbf{r}}(t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ и к $\dot{\mathbf{r}}(s)$, $\ddot{\mathbf{r}}(s)$, отличаются только положительным множителем $\left({s'_t}^2 > 0\right)$. Это лишний раз показывает, что плоскость векторов $\dot{\mathbf{r}}(t)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ совпадает с плоскостью векторов $\dot{\mathbf{r}}(s)$, $\ddot{\mathbf{r}}(s)$, ведь обе они проходят через точку $A \in \Gamma$.

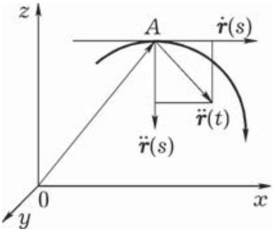

Рис. 6.11

Таким образом, вектор $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)$ так же, как вектор $\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)$, определяет соприкасающуюся плоскость к Γ (в точке A).

Зададим теперь фиксированную точку A_0, определяемую вектором $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$. Будем также писать

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0), \qquad \ddot{\mathbf{r}}_0 = \ddot{\mathbf{r}}(t_0).$$

Пусть далее $\boldsymbol{\rho}$ есть текущий вектор соприкасающейся плоскости к Γ в A_0. Тогда векторное уравнение ее запишется в виде

$$(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0)(\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0) = 0. \qquad (3)$$

Оно выражает, что вектор $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0$, лежащий в плоскости, перпендикулярен к вектору $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0$, перпендикулярному этой плоскости.

В декартовых координатах уравнение (3) записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3')$$

где (x, y, z) — текущие координаты соприкасающейся плоскости в ее точке,

$$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \qquad \dot{\mathbf{r}}_0 = (x'_0, y'_0, z'_0), \qquad \ddot{\mathbf{r}}_0 = (x''_0, y''_0, z''_0).$$

§ 6.11. Кривизна и радиус кривизны кривой

Кривизной окружности радиуса R называется число $1/R$. Это число можно получить как отношение угла между касательными в концах какой-нибудь дуги окружности к длине этой дуги. Это определение дает идею определения кривизны, пригодного для произвольных гладких кривых.

Рассмотрим гладкую кривую Γ (рис. 6.12). Она спрямляема, и имеет смысл говорить о длине любой ее дуги $\overset{\smile}{AB}$. Угол μ $(0 \leqslant \mu \leqslant \pi)$

между (положительными) направлениями касательных к дуге в ее точках A и B называется *углом смежности дуги* $\overset{\smile}{AB}$. Отношение угла смежности дуги $\overset{\smile}{AB}$ к ее длине называется *средней кривизной дуги* $\overset{\smile}{AB}$ (см. рис. 6.12). Наконец, *кривизной кривой* Γ в ее точке A называется предел (конечный или бесконечный) отношения угла смежности μ дуги $\overset{\smile}{AB}$ кривой к ее длине Δs $(\Delta s > 0)$, когда последняя стремится к нулю:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mu}{\Delta s}. \tag{1}$$

Таким образом, $0 \leqslant K \leqslant \infty$. По определению величина $R = 1/K$ (где считается, что $0 = 1/\infty$, $\infty = 1/0$) называется *радиусом кривизны* Γ в точке A.

Из векторной алгебры известно, что

$$\begin{gathered} \sin\alpha = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times (\dot{\mathbf{r}} + \Delta\dot{\mathbf{r}})|}{|\dot{\mathbf{r}}|\,|\dot{\mathbf{r}} + \Delta\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \Delta\dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|\,|\dot{\mathbf{r}} \times \Delta\dot{\mathbf{r}}|}, \\ \Delta\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t + \Delta t) - \dot{\mathbf{r}}(t), \end{gathered} \tag{2}$$

так как $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$. Знаменатель здесь не равен нулю, потому что у гладкой кривой $\dot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0}$. При $\Delta t \to 0$ знаменатель стремится к $|\dot{\mathbf{r}}|^2 > 0$, а числитель стремится к нулю. Введем длину дуги $s = s(t)$ нашей кривой. Длина куска $\overset{\smile}{AB}$ равна $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, $\Delta t > 0$. Из $\Delta s \to 0$ следует $\Delta t \to 0$, потому что t и s — допустимые параметры гладкой кривой (см. § 6.7).

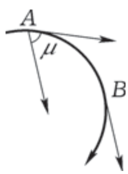

Рис. 6.12

Будем теперь предполагать, что радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ нашей гладкой кривой Γ имеет вторую производную $\ddot{\mathbf{r}}(t)$, и при этом условии докажем существование конечной кривизны Γ в точке A (определяемой параметром t).

В силу (1), (2) кривизна Γ в точке t равна (пояснения ниже)

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mu}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sin\mu}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\dot{\mathbf{r}} \times \dfrac{\dot{\mathbf{r}}}{\Delta t}\right|}{|\dot{\mathbf{r}}|\,|\dot{\mathbf{r}}(t + \Delta t)|\,\dfrac{\Delta s}{\Delta t}}, \tag{3}$$

т. е.

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{R} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3} &= \\ &= \frac{\sqrt{\left(y'z'' - z'y''\right)^2 + \left(z'x'' - x'z''\right)^2 + \left(x'y'' - y'x''\right)^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

В третьем члене (3) мы заменили μ на $\sin\mu$ под знаком предела. Это законно, ведь если для стремящейся к нулю последовательности значений Δs соответствующие значения μ больше нуля, то $\sin\mu \approx \mu$ $(\mu \to 0)$ и применима теорема 2 из § 4.10, если же значения μ равны нулю, начиная с некоторого, то для них $\sin\mu = \mu = 0$ и снова верно второе равенство (3).

Если параметр $t = s$ есть длина дуги Г, то, как мы знаем, $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$ и вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ перпендикулярен к $\dot{\mathbf{r}}(s)$, поэтому (см. третий член (4))

$$K = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|, \qquad R = \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|}. \tag{5}$$

В плоском случае $(z \equiv 0)$ выражение кривизны через координаты выглядит так:

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}. \tag{6}$$

Мы уже пользовались обозначением $K = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|$ (см. § 6.9).

Если плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$, где функция f в окрестности точки x имеет непрерывную производную и в самой точке вторую производную, то, полагая в последней формуле $t = x$, получим

$$K = \frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}. \tag{7}$$

§ 6.12. Эволюта

Пусть A — точка кривой Г, определяемая радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$.

Точка O, лежащая на главной нормали к Г (в точке A) на расстоянии $R = 1/K$ в сторону $\boldsymbol{\beta}$, называется *центром кривизны* Г (в точке A).

Радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ центра кривизны O, таким образом, равен

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + R\boldsymbol{\beta}. \tag{1}$$

Геометрическое место центров кривизны кривой Г называется *эволютой* Г. Ее векторное уравнение имеет вид

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}(t) + R(t)\boldsymbol{\beta}(t). \tag{2}$$

В частности, если $t = s$ — длина дуги, то

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + R\,\frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|} = \mathbf{r} + R^2\ddot{\mathbf{r}}(s). \tag{2$'$}$$

Для R у нас было выражение через t (см. § 6.11, (4)). Чтобы выразить

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = x''_s\mathbf{i} + y''_s\mathbf{j} + z''_s\mathbf{k} \tag{3}$$

через t, можно непосредственно произвести замену s на t (см. 4-е издание этой книги, § 6.9). Но возможен и другой путь, излагаемый ниже.

Вектор $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)$ направлен в сторону $\boldsymbol{\gamma}$, а вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ — в сторону $\boldsymbol{\alpha}$. Но тогда вектор $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)$ — в сторону $\boldsymbol{\beta}$. Ведь

$$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)|}\,.$$

Знаменатель в этом выражении можно упростить (пояснения ниже):

$$|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}| = |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| \cdot |\dot{\mathbf{r}}| = {s'_t}^3 |\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)| \cdot s'_t = {s'_t}^4 |\ddot{\mathbf{r}}(s)| = \frac{{s'}^4}{R}\,.$$

Для первого равенства нужно учесть, что векторы $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ перпендикулярны, для второго — формулу (2) из § 6.10 , $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = s'_t$, для третьего — что $\dot{\mathbf{r}}(s) \perp \ddot{\mathbf{r}}(s)$, $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$ и $|\ddot{\mathbf{r}}(s)| = 1/R$ (см. § 6.11, (5)).

Таким образом,

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{R}{{s'}_t^4}\,(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)),$$

и радиус-вектор эволюты имеет вид

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \frac{R^2}{{s'}_t^4}\,(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}). \tag{4}$$

Пример 1. Написать уравнение эволюты к плоской кривой Г:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Решение. Вводим третий орт $\mathbf{k}$:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}) \times (x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j}) = (x'y'' - y'x'')\mathbf{k}$$

(учесть, что $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$),

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = (x'y'' - y'x'')\mathbf{k} \times (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}) =$$
$$= -y'(x'y'' - y'x'')\mathbf{i} + x'(x'y'' - y'x'')\mathbf{j},$$

$$R^2 = \frac{{s'}_t^6}{(x'y'' - y'x'')^2}$$

(см. § 6.11, (6)).

Теперь в силу (2) для эволюты $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta)$ получаем уравнения

$$\xi = x - y' \, \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}\,, \qquad \eta = y + x' \, \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}\,.$$

Пример 2. Эволюта циклоиды

$$x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t \tag{5}$$

есть кривая

$$\xi = t + \sin t, \quad \eta = -1 + \cos t.$$

Полагая $t = \tau + \pi$, получим уравнения

$$\xi - \pi = \tau - \sin\tau, \qquad \eta + 2 = 1 - \cos\tau,$$

определяющие исходную кривую, но только сдвинутую (эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная исходной; рис. 6.13).

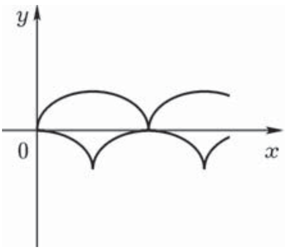

Рис. 6.13

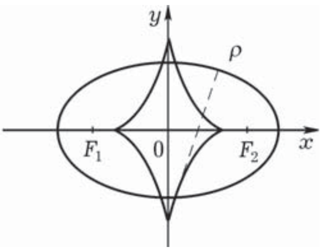

Рис. 6.14

Пример 3. Эволюта эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(a \geqslant b > 0)$ есть астроида (рис. 6.14),

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \qquad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

(см. § 6.5, пример 2).

§ 6.13. Формулы Френе. Свойства эволюты

Формулы Френе имеют вид:

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{R}\,, \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{T}\,, \tag{2}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\alpha}}{R} - \frac{\boldsymbol{\gamma}}{T}\,. \tag{3}$$

В плоском случае

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{R}, \tag{1'}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\alpha}}{T}. \tag{3'}$$

Формула (1) — это формула (§ 6.9, (3)):

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds} = \frac{d}{ds}\dot{\mathbf{r}}(s) = \ddot{\mathbf{r}}(s) = K\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{R}.$$

Так как $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ и $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$, то

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\gamma}\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds} = -(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\beta})\frac{1}{R} = 0, \qquad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}\boldsymbol{\gamma} = 0,$$

т. е. проекции $\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}$ на $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ равны нулю, поэтому вектор $\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}$ направлен по $\boldsymbol{\beta}$ и имеет вид $c\boldsymbol{\beta}$, где скаляр c считают удобным обозначить через $1/T$. Это приводит к формуле (2).

Величину T называют *кручением* (кривой в точке s). Она может быть положительной и отрицательной.

Докажем формулу (3). Из тождеств

$$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\beta} = 0, \qquad \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta} = 1$$

следует

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\beta}\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds} = -\frac{1}{R}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\boldsymbol{\beta} = 0,$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\beta}\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds} = -\frac{1}{T}.$$

Отсюда

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \left(\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\alpha} + \left(\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\boldsymbol{\beta}\right)\boldsymbol{\beta} + \left(\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\boldsymbol{\gamma}\right)\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\boldsymbol{\alpha}}{R} - \frac{\boldsymbol{\gamma}}{T}.$$

Формулы (2), (3) требуют, чтобы определяющая Γ вектор-функция $\mathbf{r}(s)$ имела третью производную. Ведь для вычисления $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ требовалось существование $\ddot{\mathbf{r}}(s)$, но теперь приходится $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ дифференцировать.

Пусть плоская гладкая кривая $\boldsymbol{\gamma}$ задана вектор-функцией

$$\mathbf{r}(s) = \big(x(s), y(s)\big)$$

от дуги s, имеющей на некотором интервале изменения s непрерывную производную $\dddot{\mathbf{r}}(s)$ третьего порядка и, кроме обычных условий $|\dot{\mathbf{r}}(s)| > 0$, $|\ddot{\mathbf{r}}(s)| > 0$, удовлетворяющей условию

$$|R'(s)| > 0. \tag{4}$$

Уравнение эволюты $\boldsymbol{\gamma}$ кривой Γ

$$\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(s) + R(s)\boldsymbol{\beta}(s)$$

можно тогда продифференцировать и, учитывая формулу Френе, получить

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} = \dot{\mathbf{r}} + R\,\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} + R'\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} - R\,\frac{\boldsymbol{\alpha}}{R} + R'\boldsymbol{\beta} = R'\boldsymbol{\beta},$$

т. е.

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} = R'\boldsymbol{\beta}. \tag{5}$$

Из (5) немедленно следует первое свойство эволюты.

1) Касательная к эволюте $\boldsymbol{\gamma}$ в ее точке s есть нормаль к резольвенте Γ в соответствующей точке s.

В самом деле, указанные нормаль N к Γ и касательная T к $\boldsymbol{\gamma}$ проходят через центр O кривизны Γ в точке s. Но нормаль коллинеарна вектору $\boldsymbol{\beta}$ так же, как касательная к $\boldsymbol{\gamma}$ (в силу (5)).

Из (5) следует

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}\right| = |R'(s)| > 0. \tag{6}$$

Но тогда эволюта есть гладкая кривая — производная $\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}$ не только существует и непрерывна, но и отлична от нуля. В таком случае эволюта $\boldsymbol{\rho}(s)$ имеет естественный параметр — длину дуги σ. Будем отсчитывать ее так, чтобы она возрастала вместе с s.

Тогда

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}\right| = \frac{d\sigma}{ds}$$

(в известной формуле $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \frac{ds}{dt}$ надо заменить $\mathbf{r}, s, t$ соответственно на $\boldsymbol{\rho}, \sigma, s$). Тогда из (6) следует

$$\frac{d\sigma}{ds} = |R'(s)| \quad \text{или} \quad \frac{d\sigma}{ds} = \pm\frac{dR}{ds}\,.$$

В случае $R'(s) < 0$ имеем

$$\frac{d(\sigma + R)}{ds} = 0, \qquad \sigma(s) + R(s) = c = \mathrm{const}\,.$$

Отсюда

$$\Delta\sigma = -\Delta R,$$

и мы получили второе свойство эволюты (в случае $R'(s) < 0$).

2) Увеличение длины σ эволюты влечет уменьшение на такую же величину радиуса кривизны.

Рис. 6.15

Отсюда получаем следующий способ получения резольвенты по ее эволюте.

Представим себе нить, накрученную на эволюту. Она сматывается с последней будучи все время натянутой. Отделяясь от эволюты, она, очевидно, будет все время касаться эволюты. Свободный же ее конец будет описывать эвольвенту (рис. 6.15). Так как длина нити может быть произвольной, то данная эволюта порождает бесчисленное множество эвольвент.

Изменение ориентации Γ (изменение s на $-s$) влечет изменение ориентации $\boldsymbol{\gamma}$, и тогда при возрастании s (или σ) будет возрастать $R(s)$ ($R'(s) > 0$). Для нового параметра s

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dR}{ds}, \qquad \sigma(s) = R(s) + c, \qquad \Delta\sigma = \Delta R, \tag{7}$$

и теперь увеличение длины дуги σ влечет такое же увеличение радиуса R.

Глава 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 7.1. Открытое множество

В n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ зададим произвольную точку $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. *Шаром* (или *замкнутым шаром*) радиуса $r > 0$ с центром в этой точке называют множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых выполняется неравенство

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \Big[\sum_{j=1}^{n} \big(x_j - x_j^0\big)^2\Big]^{1/2} \leqslant r.$$

Открытым шаром радиуса r с центром в $\mathbf{x}^0$ мы будем называть множество точек $\mathbf{x}$, для которых выполняется строгое неравенство $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < r$.

Определим *прямоугольник* в $\mathbb{R}^n$ (замкнутый прямоугольник или прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$) как множество точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$ $(a_j < b_j$, $j = 1, 2, \ldots, n)$. В случае $n = 3$ это реальный прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными осям прямоугольных координат x_1, x_2, x_3.

Можно еще определить *открытый прямоугольник* в $\mathbb{R}^n$ как множество точек, удовлетворяющих строгим неравенствам $a_j < x_j < b_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Множество точек $\mathbf{x}$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x_j - x_j^0| \leqslant a$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где $a > 0$ — заданное число, естественно назвать *кубом* (или *замкнутым кубом*) в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\mathbf{x}^0$ и стороной длины $2a$. Конечно, при $n = 3$ это будет куб с гранями, параллельными осям (прямоугольной) системы координат.

Наконец, *открытый куб* (в $\mathbb{R}^n$) определяется при помощи неравенств $|x_j - x_j^0| < a$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Неравенства $|x_j - x_j^0| \leqslant \Big(\sum_1^n \big(x_j - x_j^0\big)^2\Big)^{1/2} < r$ говорят (если их читать справа налево), что если точка $\mathbf{x}$ принадлежит шару радиуса r с центром в $\mathbf{x}^0$, то она принадлежит и кубу со стороной длины $2r$ с тем же центром. Таким образом, *куб со стороной длины $2r$ с центром в $\mathbf{x}^0$ содержит в себе шар радиуса r с тем же центром.* С другой стороны, если точка $\mathbf{x}$ принадлежит кубу $|x_j - x_j^0| < a$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то для нее выполняется неравенство $\left(\sum_1^n \left(x_j - x_j^0\right)^2\right)^{1/2} < a\sqrt{n}$, показывающее, что *шар с центром в* $\mathbf{x}^0$ *радиуса* $a\sqrt{n}$ *содержит в себе куб со стороной длины* $2a$ *с тем же центром* (см. § 6.2, (12)).

Мы рассматривали открытые шары и кубы, но это же верно и для замкнутых шаров и кубов.

Зададим произвольное множество E точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. По определению $\mathbf{x}^0$ называется *внутренней точкой* множества E, если существует открытый шар с центром в этой точке, полностью принадлежащий E. Слово *шар* здесь можно заменить на *куб*, потому что всякий шар содержит некоторый куб с тем же центром, и наоборот.

Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Это определение можно еще сформулировать так: *множество* E *открытое, если из того, что какая-нибудь точка принадлежит ему, следует, что она внутренняя точка.*

Отсюда видно, что *пустое множество есть открытое множество.*

Открытый шар

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < r \tag{1}$$

есть открытое множество. В самом деле, пусть $\mathbf{y}$ есть принадлежащая ему точка, т.е. $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| = \rho < r$, и $\mathbf{x}$ — произвольная точка, принадлежащая шару

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon, \qquad \varepsilon < r - \rho. \tag{2}$$

Для нее $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = |\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{x}^0| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| < \varepsilon + \rho < r$. Это показывает, что шар (2) принадлежит шару (1).

Предоставляем читателю доказать, что *открытый прямоугольник*, в частности открытый куб, *есть открытое множество.*

Пересечение $G_1 \cap G_2$ *двух открытых множеств* G_1 *и* G_2 *есть открытое множество.* В самом деле, пусть точка $\mathbf{x}^0$ принадлежит $G_1 \cap G_2$. Так как $\mathbf{x}^0$ есть внутренняя точка как G_1, так и G_2, то существуют два открытых шара с центром в $\mathbf{x}^0$, из которых первый принадлежит G_1, а второй — G_2. Пересечение их есть, очевидно, открытый шар (наименьший из них), принадлежащий $G_1 \cap G_2$.

Легко видеть, что *сумма конечного или счетного числа открытых множеств есть открытое множество.* Однако пересечение счетного числа открытых множеств может и не быть открытым; например, пересечение открытых шаров $|\mathbf{x}| < 1/k$ $(k = 1, 2, \dots)$ есть точка (нулевая точка).

Окрестностью точки $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ называют произвольное открытое множество, содержащее в себе эту точку. Очевидно, что *пересечение двух окрестностей* $\mathbf{x}^0$ *есть в свою очередь окрестность* $\mathbf{x}^0$.

В дальнейшем нашем распоряжении будет много примеров открытых множеств, определенных строго математически, а сейчас мы призовем читателя к геометрической интуиции, сказав, что если с произвольного геометрического тела содрать его границу, то получим открытое множество.

В ближайших параграфах мы будем рассматривать функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, или, что все равно, от точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, определенные на открытых множествах n-мерного пространства.

Множество E называется *связным*, если любые две его точки $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ можно соединить принадлежащей ему непрерывной кривой, т. е. если существует непрерывная вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, такая, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}'$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}''$, $\mathbf{x}(t) \in E$ (см. § 6.5).

Связное открытое множество называется *областью*.

Отрезком $[\mathbf{x}', \mathbf{x}'']$ называется кривая $\mathbf{x}(t) = t\mathbf{x}' + (1-t)\mathbf{x}''$, $t \in \in [0, 1]$, очевидно, непрерывная и соединяющая точки $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$.

Множество называется *выпуклым*, если вместе с точками $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ ему принадлежит соединяющий их отрезок (примеры см. в конеце § 7.3).

§ 7.2. Предел функции

По определению *функция* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет предел в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, равный числу A, обозначаемый так:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{x_j \to x_j^0 \\ (j=1,\ldots,n)}} f(x_1, \ldots, x_n) = A \tag{1}$$

(пишут еще $f(\mathbf{x}) \to A$, $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$), если она определена на некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, ее самой, и если существует предел

$$\lim_{\substack{|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| \to 0 \\ \mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0}} f(\mathbf{x}^k) = A, \tag{2}$$

какова бы ни была стремящаяся к $\mathbf{x}^0$ последовательность точек $\mathbf{x}^k$ из указанной окрестности ($k = 1, 2, \ldots$), отличных от $\mathbf{x}^0$ (см. § 6.3).

Другое эквивалентное определение заключается в следующем: *функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ предел, равный A*, если она определена в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, ее самой, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta. \tag{4}$$

В этом определении можно заменить неравенства (4) на следующие:

$$0 < \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_j^0| < \delta, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

или сказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U(\mathbf{x}^0)$ такая, что для всех принадлежащих к ней $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ выполняется (3).

Эквивалентность первого и второго определений предела и его единственность в n-мерном случае доказывается аналогично тому, как это делалось в одномерном случае (см. § 4.1).

Сформулируем критерий Коши существования предела (доказываемый, как в одномерном случае; см. § 4.1, теорема 5).

Для того чтобы функция f имела в точке $\mathbf{x}^0$ предел (конечный), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась окрестность $U(\mathbf{x}^0)$ (в частности, куб или шар с центром в $\mathbf{x}^0$) *такая, чтобы для всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}' \in U(\mathbf{x}^0)$, отличных от $\mathbf{x}^0$, имело место неравенство*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon.$$

Очевидно, что если число A есть предел $f(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x}^0$, то A есть предел функции $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h})$ от $\mathbf{h}$ в нулевой точке:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) = A,$$

и наоборот.

Рассмотрим некоторую функцию f, заданную во всех точках окрестности точки $\mathbf{x}^0$, кроме, быть может, точки $\mathbf{x}^0$; пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — произвольный вектор длины единица ($|\boldsymbol{\omega}| = 1$) и $t \geqslant 0$ — скаляр. Точки вида $\mathbf{x}^0 + t\boldsymbol{\omega}$ $(0 \leqslant t)$ образуют выходящий из $\mathbf{x}^0$ *луч в направлении вектора* $\boldsymbol{\omega}$. Для каждого $\boldsymbol{\omega}$ можно рассматривать функцию

$$f(\mathbf{x}^0 + t\boldsymbol{\omega}) = f(x_1^0 + t\omega_1, \ldots, x_n^0 + t\omega_n), \qquad 0 < t < \delta_{\boldsymbol{\omega}},$$

от скалярной переменной t, где $\delta_{\boldsymbol{\omega}}$ есть число, зависящее от $\boldsymbol{\omega}$. Предел этой функции (от одной переменной t)

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega}) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f\bigl(x_1^0 + t\omega_1, \ldots, x_n^0 + t\omega_n\bigr),$$

если он существует, естественно назвать *пределом f в точке $\mathbf{x}^0$ по направлению вектора* $\boldsymbol{\omega}$.

В частности, если $\boldsymbol{\omega}$ — единичный орт $\mathbf{e}^j = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, направленный по оси x_j, то можно говорить о пределе f в точке $\mathbf{x}^0$ по направлению положительной полуоси x_j:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{e}^j) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f\bigl(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0 + t, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0\bigr),$$

или отрицательной полуоси x_j:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(\mathbf{x}^0-t\mathbf{e}^j) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f\bigl(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0 - t, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0\bigr).$$

Из того что функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ предел, равный A, следует, очевидно, что она имеет в этой точке предел, равный A, и по любому направлению. Но обратное утверждение неверно — функция f может иметь предел в $\mathbf{x}^0$, равный A, по любому направлению и в то же время не иметь предела в $\mathbf{x}^0$.

Пример 1. Пусть

$$1)\ \ f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\,; \qquad 2)\ \ \varphi(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,.$$

Функции f и φ определены на плоскости (x,y), за исключением точки $(0,0)$. Имеем

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{2(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2)^{1/2},$$

откуда

$$\lim_{x,y\to 0} f(x,y) = 0$$

(для $\varepsilon > 0$ полагаем $\delta = \varepsilon/2$, и тогда $|f(x,y)| < \varepsilon$, если только $(x^2+y^2)^{1/2} < \delta$).

Далее, считая, что k постоянная, имеем

$$\varphi(x,kx) = \frac{1-k^2}{1+k^2}\,,$$

откуда видно, что пределы в $(0,0)$ по разным направлениям вообще различны. Поэтому φ не имеет предела в $(0,0)$.

Пример 2. В плоскости x,y определим спираль $\rho = \theta$ $(0 < \theta \leqslant 2\pi)$, где ρ — радиус-вектор, а θ — полярный угол. Пусть $\psi(x,y)$ определяется следующим образом (рис. 7.1): $\psi(0,0) = 1$, $\psi(x,y) = 0$ для $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant \theta > 0$, ψ линейна на любом отрезке, соединяющем точку $(0,0)$ с точкой спирали. Легко видеть, что $\lim_{t\to 0}\psi(tx,ty) = 1$, какова бы ни была точка $(x,y) \neq (0,0)$, т.е. существует равный 1 предел ψ в $(0,0)$ по любому направлению, между тем как предел ψ в $(0,0)$ не существует. Ведь если приближаться к точке $(0,0)$ по кривой, находящейся между спиралью и осью x в первой четверти плоскости x,y, то вдоль этой кривой $\psi(x,y) = 0$.

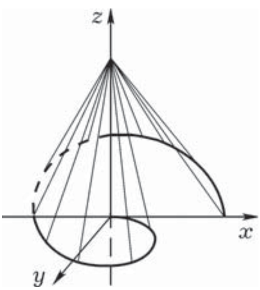

Рис. 7.1

Будем писать $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = \infty$, если функция f определена в некоторой окрестности $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, $\mathbf{x}^0$, и для всякого $N > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(\mathbf{x})| > N$, коль скоро $0 < |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| < \delta$.

Можно говорить о пределе f, когда $\mathbf{x} \to \infty$:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\infty} f(\mathbf{x}) = A. \tag{5}$$

Например, в случае конечного числа A равенство (5) надо понимать в том смысле, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N > 0$, что для точек $\mathbf{x}$, для которых $|\mathbf{x}| > N$, функция f определена и имеет место неравенство $|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$.

Справедливы равенства

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}(f(\mathbf{x}) \pm \varphi(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \pm \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}), \tag{6}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}(f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}), \tag{7}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \frac{f(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} = \frac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x})} \qquad \Bigl(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\Bigr), \tag{8}$$

где, может быть, $\mathbf{x}^0 = \infty$. При этом, как обычно, пределы (конечные) в их левых частях существуют, если существуют пределы f и φ. Докажем для примера (7).

Пусть $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ $(\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0)$; тогда

$$\lim_{\mathbf{x}^k\to\mathbf{x}^0}(f(\mathbf{x}^k)\,\varphi(\mathbf{x}^k)) = \lim_{\mathbf{x}^k\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^k) \lim_{\mathbf{x}^k\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}^k) = \\ = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}). \tag{9}$$

Таким образом, предел в левой части (9) существует и равен правой части (9), а так как последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ произвольна, то он равен пределу функции $f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^0$.

Теорема 1. *Если функция f имеет предел, не равный нулю в точке $\mathbf{x}^0$,*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = A \neq 0,$$

то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta, \tag{10}$$

она удовлетворяет неравенству

$$|f(\mathbf{x})| > |A|/2\,. \tag{11}$$

Больше того, она сохраняет там знак A.

В самом деле, положив $\varepsilon = |A|/2$, найдем $\delta > 0$ такое, чтобы для $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам (10), выполнялось

$$|f(\mathbf{x}) - A| < |A|/2. \tag{12}$$

Поэтому для таких $\mathbf{x}$ $|A|/2 > |A - f(\mathbf{x})| \geqslant |A| - |f(\mathbf{x})|$, т.е. имеет место (11).

Из (12) для указанных $\mathbf{x}$ следует:

$$A - |A|/2 < f(\mathbf{x}) < A + |A|/2\,,$$

откуда $A/2 < f(\mathbf{x})$ при $A > 0$ и $f(\mathbf{x}) < A/2$ при $A < 0$ (сохранение знака).

Замечание. В § 7.11 будет дано более общее определение предела функции, заданной на произвольном множестве.

§ 7.3. Непрерывная функция

По определению функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$, если она определена в некоторой ее окрестности, в том числе и в самой точке $\mathbf{x}^0$, и если предел ее в точке $\mathbf{x}^0$ равен ее значению в ней:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0). \tag{1}$$

Условие непрерывности f в точке $\mathbf{x}^0$ можно написать в эквивалентной форме:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^0), \tag{1$'$}$$

т.е. функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{x}^0$, если непрерывна функция $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h})$ от $\mathbf{h}$ в точке $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

Можно ввести приращение f в точке $\mathbf{x}^0$, соответствующее приращению $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, $\Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0)$, и на его языке определить непрерывность f в $\mathbf{x}^0$: *функция f непрерывна в $\mathbf{x}^0$, если*

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0) = \\ = \lim_{h_1,\ldots,h_n\to 0} \left[f\left(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)\right] = 0. \tag{1$''$}$$

Из формул (6)–(8) § 7.2 непосредственно следует

Теорема 1. *Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке $\mathbf{x}^0$ функций $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ есть непрерывная функция в этой точке, если, конечно, в случае частного $\varphi(\mathbf{x}^0) \neq 0$.*

Постоянную c можно рассматривать как функцию $f(\mathbf{x}) = c$ от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Она непрерывна для любого $\mathbf{x}$, потому что

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \mathrm{c} - \mathrm{c} = 0 \to 0, \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

Следующей по сложности является функция $f_j(\mathbf{x}) = x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Она также непрерывна (как функция от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$). Действительно, пусть $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$; тогда

$$|f_j(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_j(\mathbf{x})| = |(x_j + h_j) - x_j| = |h_j| \leqslant |\mathbf{h}| \to 0, \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

Если производить над функциями x_j и постоянными действия сложения, вычитания и умножения в конечном числе, то будем получать функции, называемые *многочленами от* $\mathbf{x}$, *или* $(x_1, \ldots, x_n)$. На основании сформулированных выше свойств *многочлены суть непрерывные функции на* $\mathbb{R}^n$ (для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$). Отношение P/Q двух многочленов есть *рациональная функция*, очевидно, непрерывная всюду на $\mathbb{R}^n$, за исключением точек $\mathbf{x}$, где $Q(\mathbf{x}) = 0$.

Функция

$$P(\mathbf{x}) = x_1^3 - x_2^3 + x_1^2 x_3 + 2x_1^2 x_2 - 3x_3^2 + 4$$

может служить примером многочлена от x_1, x_2, x_3 третьей степени.

Вообще, имеет место очевидная

Теорема 2. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_m)$ — *непрерывная функция в точке* $\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right)$ *пространства* $\mathbb{R}^m$ *и* $m < n$.

Если ее рассматривать как функцию

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, *то* F *непрерывна относительно* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (*в пространстве* $\mathbb{R}^n$) *в любой точке вида* $(x_1^0, \ldots, x_m^0, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$, *где числа* $x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0$ *произвольны.*

В самом деле, если $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, то

$$\Delta_{\mathbf{h}} F(\mathbf{x}^0) = F(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n) - F(x_1^0, \ldots, x_n^0) =$$
$$= f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_m^0 + h_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0) \to 0, \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ есть целый неотрицательный вектор, т.е. имеющий неотрицательные целые компоненты k_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка $\mathbb{R}^n$, то условимся о следующем обозначении:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}. \tag{2}$$

Эта функция непрерывна для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, потому что она есть произведение конечного числа множителей вида x_j, каждый из которых есть непрерывная функция от $\mathbf{x}$. Введем еще новое обозначение:

$$|\mathbf{k}| = \sum_{j=1}^{n} k_j, \tag{3}$$

которое употребляют для целых неотрицательных векторов $\mathbf{k}$ и которое не надо путать с $|\mathbf{k}| = \left(\sum_{j=1}^n k_j^2\right)^{1/2}$. Составим сумму

$$P_N(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant N} a_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant N} a_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n},$$

распространенную на всевозможные векторы $\mathbf{k}$ с $|\mathbf{k}| \leqslant N$, где $a_{\mathbf{k}} = a_{k_1,\ldots,k_n}$ — постоянные коэффициенты, снабженные целочисленными векторными индексами $\mathbf{k}$. Эта функция (очевидно, непрерывная) называется *многочленом от* $\mathbf{x}$ *степени* N.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть функция* $f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_m)$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0,\ldots,x_m^0)$ *пространства* $\mathbb{R}^m$ *(точек* $\mathbf{x}$*), а функции* $\varphi_j(\mathbf{u}) = \varphi_j(u_1,\ldots,u_n)$, $j = 1,2,\ldots,m$, *непрерывны в точке* $\mathbf{u}^0 = (u_1^0,\ldots,u_n^0)$ *пространства* $\mathbb{R}^n$ *(точек* $\mathbf{u}$*). Пусть, кроме того,* $\varphi_j(\mathbf{u}^0) = x_j^0$, $j = 1,2,\ldots,m$. *Тогда функция*

$$F(\mathbf{u}) = f(\varphi_1(\mathbf{u}),\varphi_2(\mathbf{u}),\ldots,\varphi_m(\mathbf{u}))$$

непрерывна (по $\mathbf{u}$*) в точке* $\mathbf{u}^0$.

Доказательство. Так как f непрерывна в $\mathbf{x}^0$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что f будет определена для всех $\mathbf{x}$, для которых $|x_j - x_j^0| < \delta$, $j = 1,2,\ldots,m$, и для них будет выполняться неравенство $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon$, и так как функции φ_j непрерывны в точке $\mathbf{u}^0$ пространства $\mathbb{R}^n$, то можно определить такое $\eta > 0$, что для точек $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ шара $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0| < \eta$ выполняются неравенства

$$|\varphi_j(\mathbf{u}) - \varphi_j(\mathbf{u}^0)| < \delta, \qquad j = 1,2,\ldots,m.$$

Тогда выполняется также неравенство

$$|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}^0)| = |f(\varphi_1(\mathbf{u}),\ldots,\varphi_m(\mathbf{u})) - f(\varphi_1(\mathbf{u}^0),\ldots,\varphi_m(\mathbf{u}^0))| < \varepsilon,$$

и теорема доказана.

Функцию мы будем называть *элементарной функцией* от переменных $x_1,\ldots,x_n$, если она может быть получена из этих переменных и констант c при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и операций φ, где φ — элементарные функции от одной переменной (см. § 1.3). Функции

1) $\sin\ln\sqrt{1+x^2+y^2} = \varphi_1$,
2) $\sin^2 x + \cos 3(x+y) = \varphi_2$,
3) $\ln\dfrac{x-y}{x+y} = \varphi_3$

могут служить примерами элементарных функций.

Легко проверить, пользуясь теоремами 1–3, что функции φ_1 и φ_2 непрерывны на плоскости x, y, функция же φ_3, очевидно, определена и непрерывна в тех точках (x, y), для которых дробь $(x-y)/(x+y)$ положительна и конечна.

Замечание. Систему функций $(1 \leqslant m \leqslant n)$

$$y_i = \varphi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(x_1,\ldots,x_n), \qquad i = 1,\ldots,m, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

можно рассматривать как отображение

$$\mathbf{y} = A(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega,$$

точек $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ в точки $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

Приращению $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ в точке $\mathbf{x}$ при помощи отображения A соответствует приращение $\Delta\mathbf{y} = (\Delta y_1, \ldots, \Delta y_m)$.

Отображение A непрерывно в точке $\mathbf{x}$, если

$$|\Delta\mathbf{y}| = \left(\sum_{j=1}^{m} |\Delta y_j|^2\right)^{1/2} \to 0 \quad \text{при} \quad |\Delta\mathbf{x}| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|^2\right)^{1/2} \to 0.$$

Это свойство, очевидно, эквивалентно непрерывности функций $\varphi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$, в рассматриваемой точке $\mathbf{x}$.

Из теоремы 1 § 7.2 и определения непрерывности функции в точке непосредственно следует

Т е о р е м а 4. *Функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывная в точке $\mathbf{x}^0$ и не равная нулю в этой точке, сохраняет знак $f(\mathbf{x}^0)$ в некоторой окрестности этой точки.*

С л е д с т в и е. *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$ (во всех точках $\mathbb{R}^n$). Тогда множество G точек $\mathbf{x}$, где она удовлетворяет неравенству $f(\mathbf{x}) > c$ (или $f(\mathbf{x}) < c$), какова бы ни была постоянная c, есть открытое множество.*

В самом деле, функция $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - c$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$, и G есть множество всех точек $\mathbf{x}$, где $F(\mathbf{x}) > 0$. Пусть $\mathbf{x}^0 \in G$; тогда существует шар

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta,$$

на котором $F(\mathbf{x}) > 0$, т.е. он принадлежит G и точка $\mathbf{x}^0 \in G$ внутренняя для G.

Случай $f(\mathbf{x}) < c$ доказывается аналогично.

П р и м е р 1.

$$1)\ f_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{a_k}, \quad a_k > 0; \qquad 2)\ f_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|; \qquad 3)\ f_3(\mathbf{x}) = \max_k |x_k|.$$

Эти три функции определены и непрерывны на $\mathbb{R}^n$. Непрерывность f_3 вытекает из следующих выкладок:

$$\bigl|f_3(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_3(\mathbf{x})\bigr| = \bigl|\max_k |x_k + h_k| - \max_k |x_k|\bigr| \leqslant$$
$$\leqslant \max_k |x_k + h_k - x_k| = \max_k |h_k| \to 0, \qquad |\mathbf{h}| \to 0.$$

В таком случае множества значений $\mathbf{x}$, для которых выполняются равенства $f_i(\mathbf{x}) < c$, $i = 1, 2, 3$, — открытые множества. Первое из них есть внутренность эллипсоида в n-мерном пространстве; второе и третье при $n = 2$ суть внутренности квадратов, изображенных соответственно на рис. 7.2 и 7.3.

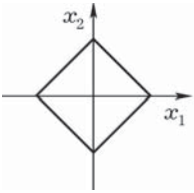

Рис. 7.2

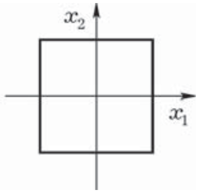

Рис. 7.3

Эти три множества выпуклые, потому что из неравенств $f_i(\mathbf{x}) < c$ и $f_i(\mathbf{y}) < c$ следует $f_i(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) < c$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Неравенства $f_i(\mathbf{x}) > c > 0$ определяют внешности указанных фигур.

§ 7.4. Частные производные и производная по направлению

В этом параграфе мы будем рассматривать функции f, определенные на произвольном открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$.

Назовем *приращением* f *в точке* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $(\in G)$ *по переменной* x_j *с шагом* h *величину*

$$\Delta_{x_j h} f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n),$$

где h — действительное число, достаточно малое, чтобы эта величина имела смысл.

Частной производной по x_j в точке $\mathbf{x}$ называется предел

$$f'_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{x_j h} f(\mathbf{x})}{h}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

если он существует. Частная производная $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ есть обычная производная функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, рассматриваемой как функция только от переменной x_j при фиксированных $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$.

Функция $z = f(x, y)$ от двух переменных изображается в техмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат x, y, z, поверхностью — геометрическим местом точек $(x, y, f(x, y))$, где $(x, y) \in G$. Очевидно, что *величина* $f'_x(x_0, y_0)$ (*если она существует*) *равна тангенсу угла наклона к прямой, параллельной оси* x, *касательной к сечению этой поверхности плоскостью* $y = y_0$ *в точке, имеющей абсциссу* x_0.

Производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, называют также *частными производными первого порядка от* f.

Выражения $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, называют *частными производными второго порядка*. При $i = j$ их принято обозначать так:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Выражения $\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}$ называют *частными производными третьего порядка*, и т. д. Широко пользуются обозначениями такими, как приведенные ниже:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\dots\frac{\partial}{\partial x_k}}_{m \text{ раз}} = \frac{\partial^m}{\partial x_k^m},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^6}{\partial z\,\partial y^2\,\partial z^2\,\partial x}.$$

Мы увидим в дальнейшем, что во многих важных случаях эти операции частного дифференцирования законно менять местами без изменения результата.

Можно еще ввести понятие *производной по направлению*. В случае функций от одной переменной оно не употребляется.

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ есть произвольный единичный вектор. *Производной функции f в точке $\mathbf{x}$ по направлению $\boldsymbol{\omega}$* называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(\mathbf{x}+t\boldsymbol{\omega}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

(если он существует). Подчеркнем, что при вычислении этого предела предполагается, что t стремится к нулю, принимая *положительные* значения, поэтому можно еще сказать, что $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\omega}}$ *есть правая производная в точке $t = 0$ функции $f(\mathbf{x}+\boldsymbol{\omega}t)$ по t.*

Можно, как в случае функций от одной переменной, говорить о правой и левой частной производной по x_j. Надо учесть, что *производная по направлению положительной оси x_j совпадает с правой частной производной по x_j, однако производная по направлению отрицательной оси x_j имеет знак, противоположный знаку левой производной по x_j.*

§ 7.5. Дифференцируемая функция. Касательная плоскость

Для простоты будем рассматривать трехмерный случай; в n-мерном случае рассуждения аналогичны. Случай $n = 1$ был специально рассмотрен в § 5.2.

Пусть на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^3$ задана функция

$$u = f(x, y, z),$$

имеющая в точке $(x, y, z) \in G$ непрерывные частные производные первого порядка. Отсюда автоматически следует, что эти частные производные существуют в некоторой окрестности (x, y, z), хотя, быть может, они в точках, отличных от (x, y, z), не являются непрерывными. Рассмотрим приращение f в (x, y, z), соответствующее приращению $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, где $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, $|\Delta z| < \delta$ и δ достаточно мало́, чтобы точка $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ не выходила из указанной окрестности. Имеют место равенства (пояснения ниже):

$$\begin{aligned}
\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = & \quad (1)\\
= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) + & \quad (2)\\
+ f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z) + & \quad (3)\\
+ f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = & \quad (4)\\
= f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)\Delta x + & \\
+ f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y, z + \Delta z)\Delta y + f'_z(x, y, z + \theta_3 \Delta z)\Delta z = & \quad (5)\\
= \big(f'_x(x, y, z) + \varepsilon_1\big)\Delta x + \big(f'_y(x, y, z) + \varepsilon_2\big)\Delta y + & \\
+ \big(f'_z(x, y, z) + \varepsilon_3\big)\Delta z = & \quad (6)\\
= f'_x(x, y, z)\Delta x + f'_y(x, y, z)\Delta y + f'_z(x, y, z)\Delta z + o(\rho), \quad \rho \to 0, & \quad (7)\\
0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1,\ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},\quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0,\ \rho \to 0. & \quad (8)
\end{aligned}$$

Отметим, что соотношение $\rho \to 0$ эквивалентно трем соотношениям: $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$.

Переход от (2) к первому члену (5) обосновывается так: функция $f(\xi, y + \Delta y, z + \Delta z)$ от ξ (при фиксированных $y + \Delta y$, $z + \Delta z$) имеет по условию производную (по ξ) на отрезке $[x, x + \Delta x]$ и к ней применима теорема Лагранжа о среднем. Аналогичное пояснение ко второму и третьему членам (5). Переход от (5) к (6) чисто формальный: мы положили, например,

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = f'_x(x, y, z) + \varepsilon_1.$$

Но не формален здесь тот факт, что $\varepsilon_1 \to 0$ при $\rho \to 0$. Он следует из предположенной непрерывности f'_x в (x, y, z). Наконец, переход от (6) к (7) сводится к утверждению, что имеет место равенство

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z = o(\rho), \qquad \rho \to 0.$$

В самом деле (см. § 6.2, (9)), при $\rho \to 0$

$$\frac{|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z|}{\rho} \leqslant \rho\, \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}}{\rho} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \to 0.$$

Мы доказали следующую важную теорему.

Теорема 1. *Если функция $u = f$ имеет непрерывные частные производные (первого порядка) в точке (x, y, z), то ее приращение* *в этой точке, соответствующее достаточно малому приращению* $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, *можно записать по формуле*

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho), \qquad \rho \to 0, \\ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \tag{9}$$

где частные производные взяты в точке (x, y, z).

Так как значения частных производных в правой части (9) не зависят от Δx, Δy, Δz, то из теоремы 1 следует, что приращение f в (x, y, z), соответствующее приращению $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, может быть записано по формуле

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho), \qquad \rho \to 0, \tag{10}$$

где числа A, B, C не зависят от Δx, Δy, Δz.

Сделаем следующее определение: если приращение функции f в точке (x, y, z) для достаточно малых $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ может быть записано в виде суммы (10), где A, B, C — числа, не зависящие от Δx, Δy, Δz, то говорят, что функция f *дифференцируема* в точке (x, y, z). Таким образом, дифференцируемость функции f в (x, y, z) заключается в том, что ее приращение Δf в этой точке можно записать в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое есть линейная функция $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ от $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ — она называется *главной линейной частью* приращения Δf, второе же слагаемое, вообще, сложно зависит от приращений Δx, Δy, Δz, но если стремить их к нулю, то оно будет стремиться к нулю быстрее, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Легко видеть, что если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), т.е. представляется равенством (10), то она имеет в этой точке производные, равные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = B, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = C. \tag{11}$$

Например, первое равенство (11) доказывается так. Пусть приращение f в (x, y, z) записывается по формуле (10). Если считать в последней $\Delta x = h$, $\Delta y = \Delta z = 0$, то получим равенство $\Delta_{xh} u = Ah + o(h)$, $h \to 0$. После деления его на h и перехода к пределу, получим

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{xh} u}{h} = \frac{\partial f}{\partial x} = A.$$

Из сказанного следует

Теорема 2. *Для того чтобы функция f была дифференцируемой в точке, необходимо, чтобы она имела в этой точке частные производные, и достаточно, чтобы она имела в этой точке непрерывные частные производные.*

Из (10) следует, что *если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.*

Пример 1. Функция $f(x,y,z)$, равная нулю на координатных плоскостях $x = 0, y = 0, \ z = 0$ и единице в остальных точках $\mathbb{R}^3$, имеет, очевидно, частные производные, равные нулю в точке $(0,0,0)$, но она, очевидно, разрывна в этой точке и потому не может быть в ней дифференцируемой. Таким образом, одного существования частных производных в точке недостаточно для дифференцируемости и даже непрерывности в этой точке.

Отметим отличие многомерного случая от одномерного. При $n = 1$ свойство дифференцируемости f в x записывается в виде равенства $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$, следовательно, если $A \neq 0$, то остаток стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ быстрее главной части. При $n > 1$ это уже не так; например, при $n = 3$, каковы бы ни были числа A, B, C, одновременно не равные нулю, всегда можно стремить Δx, Δy, Δz к нулю так, чтобы при этом постоянно выполнялось равенство $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z = 0$, но тогда в (10) остаточный член $o(\rho)$ вообще больше главного. Впрочем, если мы заставим Δx, Δy, Δz стремиться к нулю так, чтобы выполнялась пропорциональность $\Delta x : \Delta y : \Delta z = A : B : C$, то тогда главная часть приращения будет величиной, имеющей строго порядок ρ, и остаток будет стремиться к нулю быстрее главной части. Здесь предполагается, что одно из чисел A, B, C отлично от нуля.

Если функция f дифференцируема в точке (x,y,z), то главная линейная часть ее приращения в этой точке называется еще *дифференциалом f в этой точке, соответствующим приращениям $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ независимых переменных.*

Он записывается так: $df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$. О других обозначениях мы будем еще говорить.

Рассмотрим поверхность S, описываемую функцией $z = f(x,y)$, заданной в окрестности точки (x_0, y_0), и плоскость L_0:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0), \tag{12}$$

проходящую через точку $C_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S, \ z_0 = f(x_0, y_0)$.

Расстояние $r(x,y)$ от произвольной точки $C = (x, y, f(x,y)) \in S$ до L_0 вдоль z равно

$$r(x,y) = \big[f(x,y) - f(x_0,y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)\big]. \tag{13}$$

Если окажется, что

$$r(x,y) = o(r) \quad (r \to 0), \qquad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \tag{14}$$

то это значит, что функция f дифференцируема в (x_0, y_0) и

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \qquad B = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0. \tag{15}$$

Обратно, если функция f дифференцируема в (x_0, y_0) и числа A и B определяются равенствами (15), то, как мы знаем, выполняется равенство (14).

Введем определение.

Плоскость L_0 вида (12) называется *касательной плоскостью* в точке $C_0 = (x_0, y_0, z_0)$ поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, если расстояние $r(x, y)$ от произвольной точки $C = (x, y, z) \in S$ до L_0 вдоль z стремится к нулю быстрее, чем $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, т.е. если $r(x, y) = o(r)$, $r \to 0$.

Мы доказали, что для того, чтобы у поверхности $z = f(x, y)$ существовала в ее точке $C_0 = (x_0, y_0, z_0)$ касательная плоскость, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ была дифференцируема в (x_0, y_0), и тогда уравнение касательной плоскости к поверхности S в точке C_0 имеет вид

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0). \tag{16}$$

П р и м е р 2. Функция $(\alpha > 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{(1+\alpha)/2} & \text{в рациональных точках,} \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

очевидно, разрывна в любой точке, отличной от нулевой, в нулевой же точке она дифференцируема:

$$f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = 0x + 0y + \rho^{1+\alpha},$$

где $\rho^{1+\alpha} = o(\rho)$, $\rho \to 0$. Таким образом, f есть пример функции, дифференцируемой в точке, но не имеющей непрерывных частных производных в этой точке.

Примеры 1 и 2 показывают, что свойство функции быть дифференцируемой в точке слабее свойства иметь непрерывные частные производные в точке, но сильнее свойства иметь частные производные в точке.

§ 7.6. Производная сложной функции. Производная по направлению. Градиент

Ограничимся рассмотрением функции трех переменных, определенной на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^3$. Распространение излагаемых здесь фактов на n-мерный случай производится аналогично.

Т е о р е м а 1. *Пусть функция*

$$u = f(x, y, z) \tag{1}$$

дифференцируема в точке $(x, y, z) \in G$, *а функции*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t), \tag{2}$$

зависящие от скалярного параметра t, *имеют производную в* t. *Тогда производная по* t *сложной функции* (*производная функции* f *вдоль* *кривой* (2)) $u = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ *вычисляется по формуле*

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + \\ + f'_y(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + f'_z(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t),$$

или, короче,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{3}$$

В самом деле, вследствие дифференцируемости f в (x, y, z), каково бы ни было достаточно малое приращение $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$,

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho), \tag{4}$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \to 0.$$

Значению t, которому при помощи равенств (2) соответствует точка (x, y, z), придадим приращение Δt. Оно вызовет приращения Δx, Δy, Δz функций (2). Если именно их подставить в (4), то получим приращение $F(t + \Delta t) - F(t) = \Delta u$ функции F в точке t. После деления (4) на Δt и перехода к пределу получим

$$F'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t} \right) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{dz}{dt}\,,$$

т.е. (3), потому что функции (2) имеют производные, а

$$\frac{o(\rho)}{\Delta t} = \varepsilon(\rho)\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \to \\ \to 0 \cdot \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2 + {z'_t}^2} = 0, \qquad \Delta t \to 0$$

($\Delta t \to 0$ влечет $\rho \to 0$).

Теорема 2. *Если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), то для нее имеет смысл производная по направлению любого единичного вектора $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, выражаемая формулой*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\,\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\cos\gamma. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению производной по направлению (см. § 7.4) и в силу предыдущей теоремы

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta, z+t\cos\gamma) - f(x,y,z)}{t} =$$
$$= \left[\frac{d}{dt} f(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta, z+t\cos\gamma)\right]_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

где частные производные взяты в (x,y,z).

Если $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$ — уравнение гладкой кривой Г, где параметр s — длина дуги, то величины

$$\frac{dx}{ds} = \varphi'(s), \qquad \frac{dy}{ds} = \psi'(s), \qquad \frac{dz}{ds} = \chi'(s)$$

суть направляющие косинусы вектора касательной к Г. Поэтому величина

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(s) + \frac{\partial f}{\partial y}\psi'(s) + \frac{\partial f}{\partial z}\chi'(s) = \frac{d}{ds} f(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)),$$

где f — дифференцируемая функция, есть производная по направлению указанного касательного вектора. Говорят еще, что $\frac{\partial f}{\partial s}$ есть производная функции f вдоль Г.

Введем вектор

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \tag{6}$$

называемый *градиентом* функции f в точке (x,y,z).

Плоскость, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярная к градиенту f в этой точке, если он не равен нулю, имеет уравнение

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y-y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z-z_0) = 0. \tag{7}$$

Эта плоскость замечательна тем, что ее можно (в силу (5)) рассматривать как геометрическое место выходящих из (x_0, y_0, z_0) лучей, вдоль которых производная от f равна нулю. В § 7.19 будет доказано, что эта плоскость есть касательная плоскость в (x_0, y_0, z_0) к поверхности, определяемой уравнением

$$f(x,y,z) = A \qquad (A = f(x_0, y_0, z_0)). \tag{8}$$

Из формулы (5) понятно, что производная f в точке (x, y, z) по направлению единичного вектора $\mathbf{n}$ равна проекции градиента f в этой точке на направление $\mathbf{n}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = (\operatorname{grad} f, \mathbf{n}) = \operatorname{grad}_{\mathbf{n}} f. \tag{9}$$

Имеет место очевидное неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \leqslant |\operatorname{grad} f| \tag{10}$$

для любого вектора $\mathbf{n}$. Если $\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$, что обычно бывает только в исключительных точках, то $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = 0$ для любого вектора $\mathbf{n}$. Если же $\operatorname{grad} f \neq \mathbf{0}$ (одна из частных производных функции f не равна нулю), то (10) есть строгое неравенство для всех единичных векторов $\mathbf{n}$, за исключением единственного вектора $\mathbf{n}_0 = (\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0)$, направленного в сторону $\operatorname{grad} f$. Таким образом,

$$\begin{gathered}
\cos\alpha_0 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\
\cos\beta_0 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\
\cos\gamma_0 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.
\end{gathered} \tag{11}$$

Из сказанного следует, что *градиент функции f в точке (x, y, z) можно определить как вектор, обладающий следующими двумя свойствами*:

1) *длина его равна максимальной величине производной по направлению $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ в* (x, y, z) (для дифференцируемой в (x, y, z) функции этот максимум существует и есть число неотрицательное);

2) *если его длина не равна нулю, то он направлен в ту же сторону, что и вектор $\mathbf{n}$, вдоль которого производная $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ максимальна.*

Это новое определение градиента полностью эквивалентно его формальному определению при помощи формулы (6). Оно показывает, что $\operatorname{grad} f$ есть инвариант, т.е. он может быть определен независимо от системы координат, в которой рассматривается функция f от точки (см. (1)).

Чтобы пояснить эти слова, рассмотрим физический пример. Будем считать, что G есть физическое тело, а $u = u(P)$ есть температура переменной его точки P, вообще меняющаяся от точки к точке. Если в пространстве ввести прямоугольную систему координат x, y, z, то физическая функция $u = u(P)$ может быть заменена на математическую $u = f(x, y, z)$, где (x, y, z) — прямоугольные координаты точек $P \in G$. В другой прямоугольной системе x', y', z' наша физическая функция будет описываться, вообще говоря, другой математической функцией

$$\begin{aligned} u = f_1(x', y', z') = \\ = f\big(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',\ \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',\ \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'\big), \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z' &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned} \tag{13}$$

— формулы преобразования координат.

Градиент нашей физической функции $u = u(P)$ естественно определить в духе второго приведенного выше определения. Это есть вектор, по направлению которого температура в данной точке P возрастает быстрее всего, длина же его равна максимальной скорости возрастания температуры среди скоростей, соответствующих разным направлениям.

Мы знаем, что если функция f, описывающая нашу физическую функцию, в системе x, y, z дифференцируема в точке $P = (x, y, z)$, для нее имеет смысл градиент в этой точке, определяемый тройкой чисел

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{14}$$

Во второй системе координат x', y', z' он задается другой тройкой:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x'}, \frac{\partial f_1}{\partial y'}, \frac{\partial f_1}{\partial z'}\right). \tag{15}$$

Таким образом, мы из чисто физических соображений доказали, что если некоторый вектор в прямоугольной системе координат x, y, z задан тройкой чисел (14), то при условии дифференцируемости f в (x, y, z) он в новой системе x', y', z' задается тройкой (15), где f_1 определяется формулами (12), (13). Этот факт можно доказать и формально (см. 4-е издание книги автора “Курс математического анализа”, § 7.6), рассматривая $\operatorname{grad} f$ как символическое произведение вектора ∇ на скаляр f.

П р и м е р 1. Пусть $f(r) = F(Q)$ есть функция от расстояния $r = r(P, Q)$ между фиксированной точкой $P(x_0, y_0, z_0)$ и переменной точкой $Q(x, y, z)$;

$$\operatorname{grad} F = \left(f'(r)\frac{x - x_0}{r},\ f'(r)\frac{y - y_0}{r},\ f'(r)\frac{z - z_0}{r}\right)$$

есть вектор, имеющий направление вектора $\overline{PQ}$ и длину $|\operatorname{grad} F| = |f'(r)|$. Поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = |f'(r)| \cos(\overline{PQ}, \mathbf{n}).$$

В частности, если $F(Q) = f(r) = \ln(1/r)$, то

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\cos(\overline{PQ}, \mathbf{n})}{r}.$$

Пример 2. Функции

$$(\nabla u, \nabla u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \tag{16}$$

$$\Delta u = \nabla\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{17}$$

суть инварианты относительно преобразований прямоугольных систем координат, потому что $\nabla u = \operatorname{grad} u$ — вектор (инвариант), левая часть (16) есть квадрат его длины (скалярное произведение вектора на самого себя), а $\nabla\nabla$ есть символический инвариант (скалярное произведение символического вектора ∇ на самого себя), умноженный на скаляр u.

§ 7.7. Независимость от порядка дифференцирования

Теорема 1. *Пусть на открытом плоском множестве G задана функция $f(x,y)$. Если она имеет в точке (x,y) непрерывные смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, то они равны между собой в этой точке*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \tag{1}$$

В самом деле,

$$\Delta_{xh}\Delta_{yh} f = \Delta_{xh}\big(f(x, y+h) - f(x,y)\big) = f(x+h, y+h) - \\ - f(x+h, y) - f(x, y+h) + f(x,y) = \Delta_{yh}\Delta_{xh} f. \tag{2}$$

Далее (пояснения ниже),

$$\Delta_{yh}\Delta_{xh} f = \Delta_{yh}\big(f(x+h, y) - f(x,y)\big) = h\big(f'_y(x+h, y+\theta h) - \\ - f'_y(x, y+\theta h)\big) = h^2 f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta h) = \\ = h^2\big(f''_{xy}(x,y) + \varepsilon\big), \quad \varepsilon \to 0 \text{ при } h \to 0. \tag{3}$$

Так как производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ непрерывна в точке (x,y), то тем самым она существует в достаточно малой окрестности этой точки и автоматически в этой окрестности существует $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$. При достаточно малом h мы не выходим из этой окрестности, и законно, как это сделано во втором равенстве (3), применить теорему о среднем по y к функции $\big(f(x+h,y)-f(x,y)\big)$. Предпоследнее равенство есть применение этой же теоремы по x к f'_y, что законно, потому что в указанной окрестности существует частная производная $\frac{\partial f'_y}{\partial x} = f''_{xy}$. Последнее равенство, где отмечается, что $\varepsilon \to 0$ при $h \to 0$, выражает, что производная f''_{xy} в точке (x,y) непрерывна. Из (3) следует, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{yh}\Delta_{xh} f}{h^2} = f''_{xy}(x,y).$$

Аналогично, пользуясь непрерывностью f''_{yx}, доказывается равенство

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{xh}\Delta_{yh} f}{h^2} = f''_{yx}(x,y),$$

и так как $\Delta_{xh}\Delta_{yh} f = \Delta_{yh}\Delta_{xh} f$ при любых h, то верно и (1).

Заметим, что непрерывность обеих входящих в (1) частных производных есть только достаточное условие для выполнения равенства (1). В литературе известны и менее ограничительные накладываемые на f условия, влекущие за собой это равенство. Но очень редко приходится их применять.

Пусть дан целочисленный неотрицательный вектор $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \geqslant 0$. Будем говорить, что *частная производная подчинена вектору* $\mathbf{k}$, если, каково бы ни было $j = 1, \dots, n$, при ее вычислении применяется операция $\frac{\partial}{\partial x_j}$ не больше чем k_j раз. Если, в частности, $k_j = 0$, то операция $\frac{\partial}{\partial x_j}$ не применяется. Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема 2. *Если все подчиненные вектору* $\mathbf{k}$ *частные производные от функции* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ *непрерывны (в* $\mathbb{R}^n$*) в точке* $\mathbf{x}$, *то в любой из них можно переставить порядок дифференцирования как угодно, не изменяя результата.*

Доказательство этой теоремы во всей ее общности потребовало бы хотя и простой, но громоздкой индукции. Мы ограничимся только примером. Производная $\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y}$ подчинена, очевидно, вектору $(1,1,2)$. В предположении, что не только она, но и все частные производные от f, подчиненные этому вектору, непрерывны по (x,y,z), мы можем, пользуясь всякий раз либо определением частной производной, либо теоремой 1, получить равенства

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\,\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}\,.$$

Например, во втором равенстве мы рассуждаем так: частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ по условию непрерывны относительно (x, y, z), тем более они непрерывны при фиксированном x относительно (y, z), поэтому они равны. В пятом равенстве это же рассуждение проводится для $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Упражнение. Показать, что функция

$$v = \frac{1}{8\pi^{3/2}(t_0 - t)^{3/2}}\, e^{-\frac{r^2}{4(t_0 - t)}},$$
$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

называемая *фундаментальным решением уравнения теплопроводности*, удовлетворяет дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\Delta_0 v - \frac{\partial v}{\partial t_0} = 0, \qquad \Delta v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$
$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right).$$

§ 7.8. Дифференциал функции. Дифференциал высшего порядка

Рассмотрим функцию

$$W = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

заданную на некотором открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Ее можно бесконечным числом способов записать в виде

$$W = \varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1, \ldots, u_m), \tag{2}$$

где

$$u_j = \psi_j(\mathbf{x}), \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad \mathbf{x} \in G. \tag{3}$$

Ниже мы будем употреблять следующую терминологию: переменная W есть функция от *независимой векторной переменной* $\mathbf{x}$; эта же переменная W есть функция от *зависимой векторной переменной* $\mathbf{u}$. Последняя зависит от независимой переменной $\mathbf{x}$: каждому вектору $\mathbf{x}$ из G соответствует вектор

$$\mathbf{u} = (\psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x})).$$

Таким образом, роль векторной переменной $\mathbf{x}$ здесь носит исключительный характер — она в проводимых ниже рассуждениях будет фигурировать *только как независимая переменная*.

Пусть функция f имеет непрерывные частные производные первого порядка в точке $\mathbf{x} \in G$. Тогда, как мы знаем из § 7.5, она дифференцируема, т. е. приращение ее в этой точке может быть записано в виде

$$\Delta W = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} \Delta x_j + o(\rho), \qquad \rho \to 0, \tag{4}$$

$$\rho = |\Delta \mathbf{x}| = \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^2 \right)^{1/2}.$$

Сумма

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_j \tag{5}$$

называется *главной линейной частью приращения* W в точке $\mathbf{x}$ или еще *дифференциалом* W *в этой точке, соответствующим приращениям* $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ *независимых переменных.*

Для независимых $x_1, \ldots, x_n$ полагают

$$\Delta x_j = dx_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

и называют эти величины не только приращениями независимых переменных x_i, но и их *дифференциалами*. Мы будем их называть *независимыми дифференциалами* в знак того, что они не зависят от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Формально "независимость" величин dx_j будет проявляться в том, что при дифференцировании (по $x_1, \ldots, x_n$) они будут рассматриваться как *постоянные* ($d(dx_j) = 0$).

В силу соглашения (6) дифференциал W может быть записан в форме

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} dx_j. \tag{7}$$

Ясно, что dW есть величина, зависящая, вообще говоря, от $x_1, \ldots, x_n$ и $dx_1, \ldots, dx_n$.

Для любых двух функций, u и v, имеющих непрерывные частные производные в точке $\mathbf{x}$, справедливы свойства

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{8}$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \tag{9}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \qquad v \neq 0, \tag{10}$$

и при этом частные производные от функций, стоящих в скобках, непрерывны в точке $\mathbf{x}$.

Докажем, например, третье из этих равенств:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right) dx_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{v\,\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\,\frac{\partial v}{\partial x_j}}{v^2}\, dx_j =$$

$$= \frac{1}{v^2}\left(v\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx_j - u\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx_j\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Непрерывность $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right)$ видна из третьего члена цепи.

Дифференциал от функции W называют еще *дифференциалом первого порядка*, потому что приходится еще рассматривать дифференциалы высших порядков.

Пусть теперь функция W имеет вторые непрерывные частные производные. По определению *второй дифференциал* от нее, соответствующий независимым приращениям (дифференциалам) $dx_1, \ldots, dx_n$, определяется равенством

$$d^2 W = d(dW), \tag{11}$$

где считается, что обе операции d в правой части (11) берутся для указанных независимых приращений $dx_1, \ldots, dx_n$, которые должны рассматриваться как постоянные (не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$). Таким образом,

$$d^2 W = d\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i}\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\, dx_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(d\frac{\partial W}{\partial x_i}\right) dx_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_j dx_i. \tag{12}$$

Так как $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i}$, то второй дифференциал представляет собой квадратическую форму относительно независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$.

Вообще, дифференциал порядка l от W для независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$ определяется по индукции при помощи рекуррентного соотношения

$$d^l W = d(d^{l-1} W), \qquad l = 2, 3, \ldots, \tag{13}$$

где d^l, d, d^{l-1} берутся для указанных независимых дифференциалов dx_i, которые к тому же рассматриваются при вычислениях как постоянные (не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$).

Рассуждая, как в (12), легко получим, что

$$d^3 W = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 W}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}\, dx_k dx_i dx_j.$$

Подобным образом вычисляются дифференциалы любых порядков.

Мы определили понятие дифференциала функции W в терминах независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ (или независимой векторной переменной $\mathbf{x}$). Но пусть, как это было объяснено в начале этого параграфа, W рассматривается теперь как функция от *зависимой* векторной переменной $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$. Возникает вопрос, как выражаются дифференциалы первого и высших порядков в терминах этой переменной $\mathbf{u}$? Начнем изучение этого вопроса в случае дифференциала первого порядка.

Будем предполагать, что функции $\varphi(\mathbf{u})$ и $\psi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, m$, о которых шла речь в начале параграфа, имеют непрерывные частные производные. Тогда

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j}\, dx_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j = \\ = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i}\, du_i, \qquad (14)$$

и мы получили, как в случае одной переменной, что первый дифференциал от W выражается через зависимые переменные так же, как через независимые. В этом проявляется *инвариантность формы первого дифференциала*.

Чтобы исследовать поставленный вопрос, в случае второго дифференциала будем предполагать, что функции φ и ψ_j имеют непрерывные частные производные второго порядка.

Дифференцируя обе части (14), приняв во внимание свойства (8) и (9), получим (пояснения ниже)

$$d^2W = d(dW) = \\ = \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial W}{\partial u_i}\, du_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_i}\, du_j du_i + \frac{\partial W}{\partial u_i}\, d^2 u_i \right) = \\ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j}\, du_i du_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i}\, d^2 u_i. \qquad (15)$$

Во втором равенстве этой цепи мы воспользовались свойствами (8) и (9) и, кроме того, тем фактом, что форма первого дифференциала сохраняется и для зависимых переменных u_j.

Мы видим, что второй дифференциал от функции W, выраженный в терминах зависимых переменных u_j, существенно распадается на два слагаемых. Первое слагаемое представляет собой квадратическую форму, аналогичную форме (12), где d^2W выражалось через независимые переменные. Второе же слагаемое представляет собой некоторый добавок, с которым надо считаться: если $u_i \not\equiv x_i$, то этот добавок, вообще говоря, не равен нулю. Впрочем, если u_i, $i = 1, \ldots, m$, — линейные функции от $x_1, \ldots, x_n$, то свойство инвариантности сохраняется и для дифференциалов высшего порядка.

Выраженные через зависимые переменные u_i дифференциалы d^3W, $d^4W, \ldots$ вычисляются подобным образом последовательно. Приходится считаться с тем фактом, что выражения для них становятся все более громоздкими.

§ 7.9. Теорема Больцано–Вейерштрасса

Множество E называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре (кубе). В противном случае E называется *неограниченным*. В этом определении можно считать, что шар (куб), о котором идет речь, имеет центр в нулевой точке, потому что если все точки $\mathbf{x} \in E$ удовлетворяют неравенству $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \rho_1$, то и неравенству $|\mathbf{x}| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| + |\mathbf{x}^0| < \rho_2$, где $\rho_2 = \rho_1 + |\mathbf{x}^0|$.

Следующая теорема обобщает соответствующую одномерную теорему и базируется на ней.

Теорема (Больцано–Вейерштрасса). *Из всякой ограниченной последовательности точек* $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *можно выделить подпоследовательность* $\{\mathbf{x}^{k_l}\}$, $l = 1, 2, \ldots$, *сходящуюся к некоторой точке* $\mathbf{x}^0$:

$$\|\mathbf{x}^{k_l} - \mathbf{x}^0\| \to 0, \qquad l \to \infty.$$

Доказательство. Так как последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ ограничена, то существует число M такое, что

$$M > |\mathbf{x}^k| \geqslant |x_j^k|, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Это показывает, что координаты точек $\mathbf{x}^k$ также ограничены. Первая координата пробегает ограниченную последовательность $\{x_1^k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, и на основании одномерной теоремы найдутся подпоследовательность $\{k_{l_1}\}$ натуральных чисел и некоторое число x_1^0 такие, что $x_1^{k_{l_1}} \to x_1^0$, $l_1 \to \infty$. Вторую координату x_2^k рассмотрим только для найденных натуральных k_{l_1}. Подпоследовательность $\left\{x_2^{k_{l_1}}\right\}$ ограничена, и по одномерной теореме можно выбрать подпоследовательность $\left\{x_2^{k_{l_2}}\right\}$ и число x_2^0 такие, что $x_2^{k_{l_2}} \to x_2^0$. Так как $\{k_{l_2}\}$ есть подпоследовательность $\{k_{l_1}\}$, то имеет место одновременно $x_1^{k_{l_2}} \to x_1^0$, $x_2^{k_{l_2}} \to x_2^0$. В силу ограниченности третьей координаты можно, рассуждая, как выше, получить подпоследовательность $\{k_{l_3}\}$ подпоследовательности $\{k_{l_2}\}$, для которой одновременно

$$x_1^{k_{l_3}} \to x_1^0, \qquad x_2^{k_{l_3}} \to x_2^0, \qquad x_3^{k_{l_3}} \to x_3^0,$$

где x_3^0 — некоторое число. Продолжая этот процесс, на n-м его этапе получим подпоследовательность натуральных чисел $k_{l_n} = k_l$ и систему чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ такие, что одновременно $x_j^{k_l} \to x_j^0$, $l \to \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Полагая $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, получим утверждение теоремы.

§ 7.10. Замкнутые и открытые множества

Пусть задано множество $E \subset \mathbb{R}^n$.

Точка $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества E, если из того, что $\mathbf{x}^k \in E$ и $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}$, следует, что $\mathbf{x} \in E$.

Предельная точка E может принадлежать и не принадлежать E, но если все предельные точки E принадлежат E, то множество E называется *замкнутым*.

Таким образом, множество E замкнуто, если из того, что $\mathbf{x}^k \in E$ и $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}$, следует, что $\mathbf{x} \in E$.

Пустое множество считается замкнутым.

Пример 1. Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ есть функция, определенная и непрерывная на $\mathbb{R}^n$, и c — любое число.

Множества 1) $E_1 = \{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) \geqslant c\}$, 2) $E_2 = \{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) \leqslant c\}$, 3) $E_3 = \{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) = c\}$ замкнуты.

Доказательство в случае 1). Пусть $\mathbf{x}^k \in E_1$ и $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$; тогда $f(\mathbf{x}^k) \geqslant c$ и $f(\mathbf{x}^k) \to f(\mathbf{x}^0)$. Но тогда и $f(\mathbf{x}^0) \geqslant c$, т.е. $\mathbf{x}^0 \in E_1$.

Пример 2. Шар $V = \{\mathbf{x}\colon |\mathbf{x}| \leqslant r\}$ есть замкнутое множество в силу примера 1, потому что функция $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_1^n x_i^2}$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что если $E \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, то $CE = \mathbb{R}^n \setminus E$ — открытое множество.

В самом деле, если бы это было не так, то в CE существовала бы точка $\mathbf{x}^0$, которая не есть внутренняя точка CE. Выходит, что, каково бы ни было натуральное число k, должна найтись точка $\mathbf{x}^k \in E$, для которой

$$|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Мы получили бы последовательность точек $\mathbf{x}^k \in E$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$. Но E по условию замкнуто, и потому $\mathbf{x}^0 \in E$. Мы получили противоречие с тем, что предполагалось, что $\mathbf{x}^0 \in CE$.

Обратно, если $E \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, то CE — замкнутое множество.

В самом деле, если бы это было не так, то нашлась бы последовательность точек $\mathbf{x}^k \in CE$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^0 \in E$. Но E — открытое множество, и $\mathbf{x}^0$ можно покрыть шаром с центром в ней, полностью принадлежащим E. Получилось противоречие с тем, что любой такой шар содержит точки $\mathbf{x}^k \in CE$.

Пример 3. Пусть $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, — непрерывная функция. 1) Множество $E = \{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) \geqslant c\}$ замкнуто, а $CE = \{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) < c\}$ открыто. 2) Множество $E = \{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) = c\}$ замкнуто, а $CE = \{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) \neq c\}$ открыто.

Если задано произвольное непустое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, отличное от $\mathbb{R}^n$, то $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде суммы трех непересекающихся попарно множеств:

$$\mathbb{R}^n = E_1 + E_2 + E_3, \tag{1}$$

где E_1 — совокупность внутренних точек E — это открытое ядро E, E_2 — совокупность внутренних точек CE — это открытое ядро CE, E_3 — совокупность точек, каждая из которых не есть внутренняя для E, но и не есть внутренняя для CE. Такие точки называются *граничными точками* E, а E_3 называется *границей* E; E_1 открыто, E_2 открыто, $E_1 + E_2$ тоже открыто, $E_3 = \mathbb{R}^n \setminus (E_1 + E_2)$ замкнуто.

Таким образом, граница есть замкнутое множество.

Любую граничную точку $\mathbf{x}^0$ множества E можно определить как такую точку $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, что любой шар с центром в ней содержит как точки E, так и точки CE. Сама точка $\mathbf{x}^0$ может принадлежать и не принадлежать E.

Пустое множество считается одновременно замкнутым и открытым.

Любое из множеств E_1, E_2, E_3, входящих в теоретико-множественную сумму (1), может оказаться пустым.

Пример 4. Пусть $E = \{\mathbf{x}\colon x_1^2 + x_2^2 < 1\}$; тогда $E_1 + E_2 + E_3 = \mathbb{R}^2$,

$E_1 = \{\mathbf{x}\colon x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ — открытое ядро E,

$E_2 = \{\mathbf{x}\colon x_1^2 + x_2^2 > 1\}$ — открытое ядро CE,

$E_3 = \{\mathbf{x}\colon x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ — граница E (не принадлежит E).

Пример 5. E — множество точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ с рациональными координатами.

$E_1 = \varnothing$ — открытое ядро E — пустое множество,

$E_2 = \varnothing$ — открытое ядро CE — пустое множество,

$E_3 = \mathbb{R}$ — граница E.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Если к множеству $E \subset \mathbb{R}^n$ добавить все его предельные точки, то получим множество, называемое *замыканием* E и обозначаемое так: $\overline{E}$.

У замкнутого множества A предельных точек, не принадлежащих ему, нет. В самом деле, любая точка $\mathbf{x} \in CA$ есть внутренняя точка множества CA. Таким образом, если A — замкнутое множество, то $\overline{A} = A$.

§ 7.11. Функции на множестве. Свойства непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве

Пусть функция f задана на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что она *непрерывна в точке* $\mathbf{x}^0 \in E$ *на множестве* E, если $f(\mathbf{x}^k) \to f(\mathbf{x}^0)$ для любой последовательности точек $\mathbf{x}^k \in E$, сходящейся к $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$.

Заметим, что согласно данному определению любая функция, определенная на $E \subset \mathbb{R}^n$, непрерывна в изолированных точках E.

Точка $\mathbf{x}^0 \in E$ называется *изолированной*, если существует шарик с центром в $\mathbf{x}^0$, не содержащий в себе других точек E, кроме $\mathbf{x}^0$. Поэтому если задано, что $\mathbf{x}^k \in E$ и $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$, то это может быть, лишь если для некоторого N будет $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$ для всех $k > N$, но тогда

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^k) = \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0). \tag{1}$$

Если функция f, определенная на $A \in \mathbb{R}^n$, непрерывна в любой точке A, то говорят, что f *непрерывна на* A.

Докажем две теоремы, выражающие замечательные свойства функций, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве; они обобщают соответствующие свойства непрерывных функций от одной переменной, заданных на отрезке.

Теорема 1. *Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве A, ограничена на нем.*

Доказательство. Допустим, что она не ограничена на A; тогда для любого натурального k найдется такая точка $\mathbf{x}^k \in A$, что

$$\left|f(\mathbf{x}^k)\right| > k, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Полученная последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ ограничена. Из нее можно выделить подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{k'}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Вследствие замкнутости A точка $\mathbf{x}^0$ принадлежит A, а в силу непрерывности f в $\mathbf{x}^0$ на A $\lim_{\mathbf{x}^{k'}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^{k'}) = f(\mathbf{x}^0)$, и мы получили противоречие с неравенствами (2).

Теорема 2. *Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве A, достигает на нем своего максимума и минимума.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы известно, что f ограничена на A. Поэтому она имеет на A конечные точные нижнюю и верхнюю грани:

$$m = \inf_{\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}), \qquad M = \sup_{\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}).$$

Из свойства верхней грани следует, что для любого натурального k найдется точка $\mathbf{x}^k \in A$ такая, что

$$M - \frac{1}{k} < f(\mathbf{x}^k) \leqslant M, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Полученная последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ ограничена, и потому из нее можно выделить подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{k_j}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0$. В силу замкнутости A точка $\mathbf{x}^0$ принадлежит A, и в силу непрерывности f на A $\lim_{\mathbf{x}^{k_j}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^{k_j}) = f(\mathbf{x}^0)$. С другой стороны, из (3) следует, что этот предел должен равняться числу M. Но тогда

$$f(\mathbf{x}^0) = M = \max_{\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}).$$

Аналогично доказывается существование точки $\mathbf{y}^0 \in A$, в которой f достигает минимума на A:

$$f(\mathbf{y}^0) = m = \min_{\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}).$$

Рассмотрим снова пока произвольное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ и определенную на нем не обязательно непрерывную функцию f, но ограниченную на A. Зададим число $\delta > 0$ и введем величину

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta \\ \mathbf{x}',\,\mathbf{x}''\in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')|, \tag{4}$$

называемую *модулем непрерывности* f *на множестве* A. В правой части (4) взята точная верхняя грань абсолютных величин разностей значений f, соответствующих всевозможным парам точек $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$, отстоящих друг от друга на расстоянии, меньшем δ.

Модуль непрерывности есть функция от δ, очевидно, неотрицательная. Она не убывает, потому что если $0 < \delta < \delta_1$, то

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta \\ \mathbf{x}',\,\mathbf{x}''\in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| \leqslant \sup_{\substack{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta_1 \\ \mathbf{x}',\,\mathbf{x}''\in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| = \omega(\delta_1).$$

Поэтому существует предел

$$\omega(0+0) = \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta>0}} \omega(\delta) = \lambda \geqslant 0. \tag{5}$$

Введем определение.

1) Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве A, если ее модуль непрерывности $\omega(\delta)$ на A стремится к нулю при $\delta \to 0$, т. е.

$$\omega(0+0) = \lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0. \tag{6}$$

Приведем другое эквивалентное определение.

2) Функция f называется *равномерно непрерывной* на A, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$ с $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta$ имеет место $|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \varepsilon$.

Определение 1) влечет за собой 2).

Потому что из 1) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что

$$\varepsilon > \omega(\delta) = \sup_{\substack{\mathbf{x}',\, \mathbf{x}'' \in A \\ |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| \geqslant$$
$$\geqslant |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')|, \qquad \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A, \quad |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta.$$

Обратно, если имеет место 2), то, задав $\varepsilon > 0$ и подобрав $\delta > 0$ так, как это сказано в 2), получим

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{\mathbf{x}',\, \mathbf{x}'' \in A \\ |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| \leqslant \varepsilon,$$

и так как ω монотонно не убывает, то отсюда следует (6), т.е. 1).

Докажем теперь важную теорему.

Теорема 4. *Функция f, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве A, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого натурального k найдется пара точек

$$\mathbf{x}'_k, \mathbf{x}''_k \in A, \qquad |\mathbf{x}'_k - \mathbf{x}''_k| < 1/k, \tag{7}$$

для которых

$$\left|f(\mathbf{x}'_k) - f(\mathbf{x}''_k)\right| \geqslant \varepsilon_0. \tag{8}$$

В силу ограниченности последовательности $\{\mathbf{x}'_k\}$ и замкнутости A существует подпоследовательность $\{\mathbf{x}'_{k_j}\}$, сходящаяся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in A$: $\mathbf{x}'_{k_j} \to \mathbf{x}^0$. В силу (7) тогда и $\mathbf{x}''_{k_j} \to \mathbf{x}^0$, и потому вследствие непрерывности f в $\mathbf{x}^0$

$$\lim_{k_j \to \infty} \left|f(\mathbf{x}'_{k_j}) - f(\mathbf{x}''_{k_j})\right| = \left|f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}^0)\right| = 0,$$

что противоречит (8).

Пример 1. Функция (Дирихле), равная нулю на рациональных точках отрезка $[0, 1]$ и единице на иррациональных, разрывна во всех точках $[0, 1]$ относительно $[0, 1]$, но это не мешает ей быть непрерывной на множестве A рациональных точек (относительно A) так же, как на множестве иррациональных точек.

Упражнения.

1. Показать, что модули непрерывности $\omega(t)$ функций

1) $\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ (см. начало § 15.5);
2) x^2, $0 \leqslant x \leqslant 1$;
3) $\sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$;
4) $\sin \dfrac{1}{x}$, $0 < |x| \leqslant 1$;
5) $\sin x$, $-\infty < x < \infty$

определяются равенствами:

1) $\omega(t) = \begin{cases} \sqrt{t}, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant t; \end{cases}$

2) $\omega(t) = \begin{cases} 1-(1-t)^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant t; \end{cases}$

3) $\omega(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leqslant t \leqslant \pi/2, \\ 1, & \pi/2 \leqslant t; \end{cases}$

4) $\omega(t) = 2$, $0 \leqslant t$;

5) $\omega(t) = \begin{cases} 2\sin(t/2), & 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ 2, & \pi \leqslant t. \end{cases}$

2. Показать, что если функция $\omega(t)$, $t \geqslant 0$, непрерывна при $t = 0$ и удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant \omega(\delta_2) - \omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2 - \delta_1), \qquad 0 < \delta_1 < \delta_2,$$

то она есть модуль непрерывности самой себя.

3. *Расстоянием от точки* $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ *до множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$r(\mathbf{x}^0, E) = \inf_{\mathbf{x} \in E} |\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = \inf_{\mathbf{x} \in E} \sqrt{\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2}.$$

Здесь и далее E, E_1, E_2, F — непустые множества.

Доказать, что если E — замкнутое множество (ограниченное или неограниченное), то расстояние $r(\mathbf{x}^0, E)$ достигается в некоторой точке $\mathbf{y} \in E$, т.е. $r(\mathbf{x}^0, E) = \min_{\mathbf{x} \in E} |\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = |\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|$.

4. Доказать, что расстояние $r(\mathbf{x}^0, E)$ есть непрерывная функция от $\mathbf{x}^0$.

5. *Расстоянием между двумя множествами* E_1 *и* E_2 называют число

$$r(E_1, E_2) = \inf_{\substack{\mathbf{x}' \in E_1 \\ \mathbf{x}'' \in E_2}} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|.$$

Доказать, что если E_1 и E_2 — замкнутые множества и одно из них ограничено, то существуют две точки $\mathbf{y} \in E_1$ и $\mathbf{z} \leqslant E_2$, для которых эта нижняя грань достигается, т.е. $r(E_1, E_2) = \min_{\substack{\mathbf{x}' \in E_1 \\ \mathbf{x}'' \in E_2}} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| = |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$. Таким образом, если E_1 и E_2 не пересекаются, то $r(E_1, E_2) > 0$.

6. Доказать, что если F замкнутое, а Ω — открытое ограниченное множество и $F \subset \Omega$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество F^ε точек $\mathbf{x}$, расстояние которых до F не превышает ε, принадлежит Ω.

§ 7.12. Лемма о вложенных прямоугольниках и лемма Бореля

Лемма. *Пусть задана последовательность прямоугольников*

$$\Delta_k = \left\{a_j^k \leqslant x_j \leqslant b_j^k,\ j = 1, \ldots, n\right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

вложенных друг в друга ($\Delta_k \supset \Delta_{k+1}$), *с диаметром* $d_k = \sqrt{\sum_1^n \left(b_j^k - a_j^k\right)^2}$, *стремящимся к нулю* ($d_k \to 0$). *Тогда существует единственная точка* $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in \mathbb{R}^n$, *принадлежащая всем* Δ_k.

Доказательство. Из условия леммы следует, что при каждом $j = 1, \ldots, n$ отрезки $\left[a_j^k, b_j^k\right]$, $k = 1, 2, \ldots$, вложены друг в друга и длина их стремится к нулю при $k \to \infty$, поэтому в силу аксиомы о вложенных отрезках для каждого f существует единственное число x_j^0, принадлежащее всем отрезкам $\left[a_j^k, b_j^k\right]$, $k = 1, 2, \ldots$, одновременно. Точка $\mathbf{x}^0$, имеющая своими координатами числа x_j^0, очевидно, и есть та точка, о которой говорится в лемме.

Лемма Бореля*). *Пусть некоторая бесконечная система открытых множеств V (например, открытых кубов или шаров) покрывает замкнутое ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в этой системе существует конечное число указанных множеств V, все же покрывающих E.*

Доказательство. Будем доказательство вести в трехмерном случае $\mathbb{R}^3$. В n-мерном случае рассуждения те же — только кубы пришлось бы делить не на 8, а на 2^n частей.

Так как множество E ограничено, то существует куб $\Delta \subset \mathbb{R}^3$, которому принадлежит E. Допустим, что лемма неверна. Разделим Δ на 8 равных частичных кубов. Тогда среди последних, очевидно, обязательно найдется такой (обозначим его через Δ_1), что теорема для множества $E \cap \Delta_1$ также неверна (любая конечная система множеств V не покрывает $E \cap \Delta_1$). Разделим Δ_1 на 8 равных кубов; среди них найдется снова такой (обозначим его через Δ_2), что для множества $E \cap \Delta_2$ теорема неверна. Продолжив этот процесс неограниченно, получим систему включенных друг в друга кубов $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, диаметры которых стремятся к нулю, таких, что для множества $E \cap \Delta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, теорема неверна. Существует (в силу предыдущей леммы) точка $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^3$, принадлежащая всем Δ_k. В силу замкнутости E она принадлежит E и потому покрыта некоторым множеством V_0 нашей системы. Так как V_0 — открытое множество, то $\Delta_k \subset V_0$ при некотором достаточно большом k. Следовательно, $E \cap \Delta_k \subset V_0$.

Мы пришли к противоречию, потому что, с одной стороны, $E \cap \Delta_k$ покрывается одним множеством V_0, с другой, — не существует никакой конечной системы множеств V, покрывающих $E \cap \Delta_k$.

---

*) Э. Борель (1871–1956) — французский математик.

§ 7.13. Формула Тейлора

Ограничимся трехмерным случаем. Рассуждения в n-мерном случае будут совершенно аналогичными и не сложнее.

Пусть на области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задана функция

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3).$$

Те частные производные, которые мы будем записывать для нее, предполагаем непрерывными на Ω.

Пусть $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) \in \Omega$ и $\delta > 0$ настолько мало, что шар $V(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x}\colon |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta\}$ принадлежит Ω.

Для точки $\mathbf{x} \in V(\mathbf{x}^0)$, которая некоторое время будет считаться фиксированной, вводим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Разлагая ее по формуле Тейлора по одной переменной t, получим

$$\begin{aligned} F(t) &= F(0) + F'(0)t + \frac{F''(\theta t)}{2}\, t^2, \\ F(1) &= F(0) + F'(0) + \frac{F''(\theta)}{2}, \qquad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} F(0) &= f(\mathbf{x}^0), \\ F'(t) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\mathbf{x}^0 + t\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right)\right)\left(x_i - x_i^0\right), \\ F'(0) &= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \left(x_i - x_i^0\right), \qquad (\psi)_0 = \psi(\mathbf{x}^0), \\ F''(t) &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \left(\mathbf{x}^0 + t\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right)\right)\left(x_i - x_i^0\right)\left(x_j - x_j^0\right), \\ F''(\theta) &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \left(\mathbf{x}^0 + \theta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right)\right)\left(x_i - x_i^0\right)\left(x_j - x_j^0\right). \end{aligned}$$

И мы получаем формулу Тейлора функции f по степеням $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ второй степени в форме Лагранжа:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \left(x_i - x_i^0\right) + r_2, \\ r_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \left(\mathbf{x}^0 + \theta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right)\right)\left(x_i - x_i^0\right)\left(x_j - x_j^0\right). \end{gathered} \tag{1}$$

Эта формула выведена в предположении того, что функция f непрерывна вместе со своими частными производными второго порядка на Ω, при этом $\mathbf{x} \in V(\mathbf{x}^0)$.

Но

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 + \varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{ij} \to 0$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$, т. е. при $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \to 0$.

Заметим еще, что

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij}\left(x_i - x_i^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) = \varepsilon \rho^2, \tag{3}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, $\rho = \left(\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - x_i^0\right)^2\right)^{1/2}$. Ведь

$$\frac{1}{\rho^2}\left|\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij}\left(x_i - x_i^0\right)\left(x_j - x_j^0\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} |\varepsilon_{ij}| \frac{\left|x_i - x_i^0\right|}{\rho} \frac{\left|x_j - x_j^0\right|}{\rho} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} |\varepsilon_{ij}| \to 0, \qquad \rho \to 0.$$

На основании (1)–(3) величина $r_2(\mathbf{x})$ может быть записана следующим образом:

$$r_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 \left(x_i - x_i^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) + o(\rho^2), \qquad \rho \to 0.$$

Но тогда функцию $f(x)$ можно записать в следующей форме (Пеано):

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \left(x_i - x_i^0\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 \left(x_i - x_i^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) + o(\rho^2), \qquad \rho \to 0. \tag{4}$$

Мы получили формулу Тейлора функции f по степеням $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ степени 2 в форме Пеано. Здесь предполагалось, что функция f имеет на Ω непрерывные частные производные порядка 2.

Запишем в общем виде формулу Тейлора функции f k-ой степени по степеням $\mathbf{x}-\mathbf{x}^0$ только в форме Пеано:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 (x_i - x_i^0) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{k!}\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_k=1}^{n}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}\right)_0 (x_{i_1} - x_{i_1}^0)\ldots(x_{i_k} - x_{i_k}^0) +$$
$$+ o(\rho^k), \qquad \rho \to 0. \qquad (5)$$

В этой формуле уже предполагается, что функция f имеет на Ω непрерывные частные производные порядка k.

Заметим, однако, что приведенные выше формулы записаны без учета того факта, что непрерывные смешанные частные производные не изменяются при изменении порядка дифференцирования по разным переменным. Ведь, например, два числа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_j - x_j^0)(x_i - x_i^0) =$$
$$= 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

могут быть объединены.

При таком объединении возникают новые формы записи формулы Тейлора, выражаемые через биномиальные коэффициенты (см. 4-е издание книги автора “Курс математического анализа”, § 7.13, 7.14, там же доказывается единственность разложения по формуле с остатком Пеано).

Выпишем все же соответствующую формулу для функций от двух переменных:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (x-x_0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 (x-x_0)(y-y_0) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 (y-y_0)^2\right] +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{k!}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right]^k f\right)_0 + o(\rho^k), \qquad \rho \to 0. \qquad (6)$$

Предпоследний член справа представляет собой символическую запись: выражение в квадратных скобках возводится формально в k-ю степень по биному Ньютона, полученную дифференциальную операцию применяют к f и, наконец, подставляют в частные производные x_0.

Примечание. Формула Тейлора с остатком первой степени в форме Лагранжа выглядит так:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \big(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\big)(x_i - x_i^0). \tag{7}$$

Мы записали ее в n-мерном случае.

Пример 1. При $x, y \to 0$

$$\psi(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)} = [1 + x + x^2 + o(x^2)]\,[1 + y + y^2 + o(y^2)] =$$
$$= 1 + (x+y) + (x^2 + xy + y^2) + o(x^2) + x^2y + xy^2 + x^2y^2 + o(y^2) =$$
$$= 1 + (x+y) + (x^2 + xy + y^2) + o(\rho^2), \qquad \rho \to 0;$$

мы получили разложение функции ψ в окрестности точки $(0,0)$ по формуле Тейлора с остаточным членом $o(\rho^2)$, $\rho \to 0$, в форме Пеано.

Это следует из факта единственности разложения функции по формуле Тейлора в форме Пеано. Доказательство этого факта, впрочем, мы здесь не привели. Предоставляем это читателю.

§ 7.14. Локальный (абсолютный) экстремум функции

Пусть на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Говорят, что f *достигает своего (абсолютного) локального максимума в точке* $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, если существует положительное число δ такое, что для всех точек $\mathbf{x}$, для которых

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2} < \delta, \tag{1}$$

функция $f(\mathbf{x})$ определена и подчиняется неравенству $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}^0)$. Аналогично, по определению f *достигает в* $\mathbf{x}^0$ *своего (абсолютного) локального минимума*, если существует ее окрестность (1), на которой функция f определена и удовлетворяет неравенству $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}^0)$.

Локальный минимум или максимум называют *локальным экстремумом*.

Если функция f достигает в $\mathbf{x}^0$ локального экстремума и имеет в ней частные производные первого порядка, то последние должны в этой точке равняться нулю:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

потому что тогда для каждого j функция

$$f\left(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$$

от одной переменной x_j имеет локальный экстремум в x_j^0 и ее производная по x_j при $x_j = x_j^0$, равная $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0$, должна равняться нулю.

Из сказанного следует, что если мы хотим отыскать точки $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, где f достигает локального экстремума, мы должны их искать среди точек $\mathbf{x} \in \Omega$, где f либо не имеет какой-либо частной производной, либо имеет их, но они равны нулю. Нас будет интересовать второй случай. Покажем, как можно, разлагая функцию f по формуле Тейлора, узнать, имеет ли на самом деле f в указанной точке $\mathbf{x}^0$ экстремум и какой (максимум или минимум).

Пусть функция f имеет в окрестности $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$ непрерывные производные второго порядка и ее первые производные все обращаются в нуль в точке $\mathbf{x}^0$. Тогда ее разложение по формуле Тейлора (при $l = 2$) может быть записано так:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) - f\left(\mathbf{x}^0\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \xi_k \xi_l + \varepsilon \rho^2, \\ a_{kl} = a_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right)_0, \\ \xi_k = x_k - x_k^0, \qquad \varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} \to 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Квадратическая форма $A(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \xi_k \xi_l$ может обладать одним из следующих четырех свойств:

1) форма $A(\boldsymbol{\xi})$ строго положительно определенная, т. е. $A(\boldsymbol{\xi}) > 0$ для любых $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с $\rho > 0$;

2) форма $A(\boldsymbol{\xi})$ строго отрицательно определенная, т. е. $A(\boldsymbol{\xi}) < 0$ для любых $\boldsymbol{\xi}$ с $\rho > 0$;

3) форма $A(\boldsymbol{\xi})$ определенная, но не строго, т. е. $A(\boldsymbol{\xi}) \geqslant 0$ для всех $\boldsymbol{\xi}$ или $A(\boldsymbol{\xi}) \leqslant 0$ для всех $\boldsymbol{\xi}$, и при этом существует точка $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1', \ldots, \xi_n')$ с $\rho' = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k'^2} > 0$ такая, что $A(\boldsymbol{\xi}') = 0$;

4) форма $A(\boldsymbol{\xi})$ неопределенная, т. е. существуют такие $\boldsymbol{\xi}'$ и $\boldsymbol{\xi}''$, что $A(\boldsymbol{\xi}') > 0$, $A(\boldsymbol{\xi}'') < 0$.

Докажем, что *в случае* 1) *функция* f *достигает в* $\mathbf{x}^0$ *локального минимума, в случае* 2) *— локального максимума, в случае же* 4) *в точке* $\mathbf{x}^0$ *заведомо нет экстремума. Наконец, в случае* 3) *вопрос остается открытым — при данной информации функция может иметь экстремум, но может и не иметь его.*

Положим $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}/\rho = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ для $\boldsymbol{\xi}$ с $\rho > 0$, т.е. $\eta_j = \xi_j/\rho$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда равенство (2) можно записать в виде

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \rho^2(\Phi(\boldsymbol{\eta}) + \varepsilon), \tag{3}$$

где $\Phi(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl}\eta_k\eta_l$,

$$\sum_{j=1}^n \eta_j^2 = \frac{1}{\rho^2}\sum_{j=1}^n \xi_j^2 = 1. \tag{4}$$

Таким образом, функцию $\Phi(\boldsymbol{\eta})$ мы должны рассматривать на шаровой поверхности (4), представляющей собой ограниченное замкнутое множество σ. Очевидно, что $\Phi(\boldsymbol{\eta})$ непрерывна на σ.

В случае 1) $\Phi(\boldsymbol{\eta}) > 0$ на σ. В силу того, что σ — замкнутое ограниченное множество и $\Phi(\boldsymbol{\eta})$ непрерывна на нем, существует минимум $\min \Phi(\boldsymbol{\eta}) = m > 0$, $\boldsymbol{\eta} \in \sigma$.

Далее, так как $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$, то существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для всех $\rho < \delta$ имеем $|\varepsilon| < m/2$. На основании (3) тогда для указанных $\rho > 0$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) > \rho^2\left(m - \frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2}\,\rho^2 > 0,$$

т.е. в точке $\mathbf{x}^0$ функция f достигает локального минимума.

Утверждение 2) доказывается аналогично. Если форма строго отрицательно определенная, то функция $\Phi(\boldsymbol{\eta}) < 0$ на σ, следовательно, она достигает своего (отрицательного) максимума на σ, который мы обозначим через $-M$ $(M > 0)$. Но для достаточно малого $\delta > 0$, если $\rho < \delta$, имеем $|\varepsilon| < M/2$, поэтому для $0 < \rho < \delta$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) < \rho^2\left(-M + \frac{M}{2}\right) = -\frac{M}{2}\,\rho^2 < 0,$$

т.е. f имеет в $\mathbf{x}^0$ локальный максимум.

В случае 3) наша форма для некоторой точки $\boldsymbol{\xi}' \neq \mathbf{0}$ обращается в нуль, но тогда в силу однородных свойств формы для любой точки вида $\mathbf{x}' = \alpha\boldsymbol{\xi}'$, где α — любое число, она также должна равняться нулю. Это показывает, что для всех указанных точек $\mathbf{x}'$ наша форма равна нулю и, следовательно,

$$f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{x}') - f(\mathbf{x}^0) = \varepsilon\rho^2.$$

Но знак ε неизвестен, поэтому мы не можем сказать, имеет f в $\mathbf{x}^0$ экстремум или не имеет.

Единственное, что можно сказать при этих условиях, что если форма тождественно не равна нулю и является положительно (не строго) определенной, то в $\mathbf{x}^0$ не может быть максимума, или если она тождественно не равна нулю и является отрицательно (не строго) определенной, то в $\mathbf{x}^0$ не может быть минимума.

В случае 4) опять удобно обратиться к равенству (3). В этом случае по условию существуют точка $\boldsymbol{\xi}'$, для которой форма положительна, и точка $\boldsymbol{\xi}''$, для которой форма отрицательна, но тогда для соответствующих им точек $\boldsymbol{\eta}'$, $\boldsymbol{\eta}''$ будут выполняться неравенства $\Phi(\boldsymbol{\eta}') > 0$, $\Phi(\boldsymbol{\eta}'') < 0$ и при малых ρ окажется, что $\Phi(\boldsymbol{\eta}') + \varepsilon > 0$, $\Phi(\boldsymbol{\eta}'') + \varepsilon < 0$, т. е. в любой малой окрестности $\mathbf{x}^0$ имеются точки $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, для которых $f(\mathbf{x}') > f(\mathbf{x}^0)$ и $f(\mathbf{x}'') < f(\mathbf{x}^0)$, а это означает, что в $\mathbf{x}^0$ заведомо нет экстремума.

Составим ряд главных миноров квадратической формы $A(\boldsymbol{\xi})$:

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \ldots; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме Сильвестра из теории квадратических форм:

1) если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, то форма строго положительно определенная (случай 1));

2) если $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0, \ldots, (-1)^n\Delta_n > 0$, то форма строго отрицательно определенная (случай 2));

3) если $\Delta_1 \geqslant 0$, $\Delta_2 \geqslant 0, \ldots, \Delta_n \geqslant 0$ или $\Delta_1 \leqslant 0$, $\Delta_2 \geqslant 0, \ldots, (-1)^n\Delta_n \geqslant 0$ и имеется j, при котором $\Delta_j = 0$, то форма заведомо не строго определенная (случай 3));

4) во всех остальных случаях форма неопределенная (случай 4)).

В двумерном случае равенство (2) выглядит следующим образом:

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = \frac{1}{2}\left(A\xi_1^2 + 2B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2\right) + \varepsilon\rho^2,$$
$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_0, \quad B = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0, \quad C = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)_0,$$

и соответствующий сильвестров ряд состоит из двух членов:

$$\Delta_1 = A, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Следовательно,

a) если $A > 0$ и $AC - B^2 > 0$, то f имеет в $\mathbf{x}^0$ минимум;

b) если $A < 0$ и $AC - B^2 > 0$, то — максимум;

c) если $AC - B^2 < 0$, то нет экстремума;

d) если $AC - B^2 = 0$, то не известно, есть ли экстремум.

Впрочем, эти факты легко получить непосредственно из представления ($\boldsymbol{\zeta} = (\xi, \eta) \neq 0$)

$$\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 = \frac{(A\xi + B\eta)^2 + (AC - B^2)\eta^2}{A}, \qquad A \neq 0.$$

В случае a) если $|\eta| > 0$, то $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) > 0$, а если $\eta = 0$, то должно быть $\xi \neq 0$ и тогда снова $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) > 0$.

В случае b) если $|\eta| > 0$, то $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) < 0$, а если $\eta = 0$, то должно быть $\xi \neq 0$ и тогда $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) < 0$.

В случае c) и $A \neq 0$ можно, с одной стороны, подобрать (ξ, η) так, что $\eta \neq 0$ и $(A\xi + B\eta) = 0$, а с другой, положить $\eta = 0$ и $\xi > 0$. В обоих случаях будет $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) \neq 0$, но разных знаков. Если же $A = 0$, но $C \neq 0$, то приходим к тем же фактам, заменяя A на C.

В случае d) при $A \neq 0$ имеем $\Lambda(\boldsymbol{\zeta}) = (A\xi + B\eta)^2/A$, и можно указать ненулевую точку $\boldsymbol{\zeta} = (\xi, \eta)$ такую, что $A(\boldsymbol{\zeta}) = 0$. Тот же факт получим при $C \neq 0$, заменяя A на C. Наконец, если $A = C = 0$, то форма $A(\boldsymbol{\zeta}) = B\xi\eta$, очевидно, неопределенная.

Пример 1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$. Уравнения $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ дают два решения: $x = y = 3$ (минимум), $x = y = 0$ (нет экстремума).

Пример 2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 1$. Три решения: $x = +\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ (минимум); $x = -\sqrt{2}$, $y = +\sqrt{2}$ (минимум); $x = y = 0$ (случай d), но на самом деле нет экстремума).

Пример 3. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$. Решение $x = y = 0$ (сомнительный случай). С другой стороны, очевидно, $f(x, y) = (x - y^2)^2 - y^5$, и так как при любом $\varepsilon > 0$ $f(\varepsilon^2, \varepsilon) = -\varepsilon^5 < 0$, $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^3 > 0$, то экстремума в точке $(0, 0)$ нет. Однако при любых h, k $(h^2 + k^2 > 0)$ функция $y(t) = f(ht, kt)$ имеет минимум при $t = 0$.

§ 7.15. Теоремы существования неявной функции

Зададим произвольную функцию $f(x, y)$ от двух переменных x, y. Приравняем ее нулю:

$$f(x, y) = 0.$$

Множество всех точек (x, y), для которых выполняется это равенство, обозначим через $\mathfrak{M}$. Пусть $(x_0, y_0) \in \mathfrak{M}$, т. е. $f(x_0, y_0) = 0$.

Если не накладывать никаких условий на f, то множество $\mathfrak{M}$ может иметь самую различную природу. Например, в случае $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ множество $\mathfrak{M}$ состоит из одной-единственной точки (x_0, y_0); в случае

$$f(x, y) = (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = (x + y - x_0 - y_0)(x - y - x_0 + y_0)$$

$\mathfrak{M}$ есть пара прямых, проходящих через (x_0, y_0). Однако часто имеют место случаи, когда $\mathfrak{M}$, по крайней мере в достаточно малой окрестности

(x_0, y_0), представляет собой кривую, описываемую непрерывной (однозначной) функцией

$$y = \psi(x), \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Возникает вопрос: как по свойствам функции f узнать, что имеет место именно этот случай?

Ниже доказываются две общие теоремы, отвечающие на поставленный вопрос.

Теорема 1. *Пусть задано уравнение*

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее следующим свойствам.

Функция f определена на некоторой двумерной окрестности Ω точки (x^0, y^0) плоскости x, y и непрерывна там вместе со своими частными производными (первого порядка); при этом *)

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \tag{2}$$

и $f(x^0, y^0) = 0$.

Пусть, далее, $\mathfrak{M}$ есть множество всех точек (x, y), удовлетворяющих уравнению (1) (в частности, $(x^0, y^0) \in \mathfrak{M}$).

Тогда, каков бы ни был прямоугольник

$$\Delta = \{|x - x^0| < a,\ |y - y^0| < b\}, \qquad \overline{\Delta} \subset \Omega, \tag{3}$$

число a можно уменьшить так, что множество $\mathfrak{M} \cap \Delta$ описывается непрерывно дифференцируемой функцией

$$y = \psi(x), \qquad x \in \Delta^0, \tag{4}$$

$$\Delta^0 = \{|x - x^0| < a\}. \tag{5}$$

Другими словами, прямоугольник Δ обладает тем свойством, что на его проекции Δ^0 на ось x можно определить непрерывно дифференцируемую функцию (4), удовлетворяющую уравнению (1):

$$f(x, \psi(x)) \equiv 0, \qquad x \in \Delta^0.$$

График ее полностью принадлежит Δ. Эта функция единственна в том смысле, что любая точка $(x, y) \in \mathfrak{M} \cap \Delta$ имеет координаты, связанные уравнением (4). В частности, $y^0 = \psi(x^0)$, потому что $(x^0, y^0) \in \mathfrak{M} \cap \Delta$.

---

*) Достаточно предполагать, что $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = f'_y(x^0, y^0) \neq 0$. Отсюда в силу непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$ следует выполнение условия (2) на некоторой окрестности точки (x^0, y^0).

Теорема 1′. *Пусть задано уравнение*

$$f(\mathbf{x}, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0, \tag{1′}$$

удовлетворяющее следующим условиям.

Функция f определена на некоторой окрестности Ω точки $(\mathbf{x}^0, y^0) = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0\right)$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ точек $(\mathbf{x}, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ и непрерывна там вместе со своими частными производными (первого порядка); при этом

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0, \qquad f\left(\mathbf{x}^0, y^0\right) = 0. \tag{2′}$$

Пусть, далее, $\mathfrak{M}$ есть множество всех точек $(\mathbf{x}, y)$, удовлетворяющих уравнению (1′) (в частности, $(\mathbf{x}^0, y^0) \in \mathfrak{M}$).

Тогда, каков бы ни был прямоугольник

$$\Delta = \left\{\left|x_j - x_j^0\right| < a,\ j = 1, \ldots, n,\ |y - y^0| < b\right\}, \qquad \overline{\Delta} \subset \Omega, \tag{3′}$$

число a можно уменьшить так, что множество $\mathfrak{M} \cap \Delta$ описывается непрерывно дифференцируемой функцией (т. е. имеющей непрерывные частные производные)

$$y = \psi(\mathbf{x}) = \psi(x_1, \ldots, x_n), \qquad \mathbf{x} \in \Delta^0, \tag{4′}$$

$$\Delta^0 = \left\{\left|x_j - x_j^0\right| < a,\ j = 1, \ldots, n\right\}. \tag{5′}$$

Доказательство теоремы 1. Так как $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна на области Ω, то из (2) следует, что $\frac{\partial f}{\partial y}$ имеет один и тот же знак всюду на Ω. Для определенности пусть $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ на Ω.

Введем замкнутый прямоугольник

$$\overline{\Delta} = \{|x - x^0| \leqslant a,\ |y - y^0| \leqslant b\}, \tag{6}$$

принадлежащий Ω $(\overline{\Delta} \subset \Omega)$. Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{\Delta}$ и $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$, то для некоторых положительных констант m_1 и m_2

$$\frac{\partial f}{\partial y} > m_1 > 0, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant m_2. \tag{7}$$

Функция $f(x^0, y)$ от переменной y строго возрастает на отрезке $[y^0 - b, y^0 + b]$, потому что $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ на $\overline{\Delta}$, и так как $f(x^0, y^0) = 0$, то $f(x^0, y^0 - b) < 0$, $f(x^0, y^0 + b) > 0$. Вследствие непрерывности f на $\overline{\Delta}$ можно число a в (5) максимально уменьшить так, что $f(x, y^0 - b) < 0$, $f(x, y^0 + b) > 0$, $x \in \Delta^0$ (см. (5)).

Рассмотрим теперь для произвольной фиксированной точки $x \in \Delta^0$ функцию $f(x,y)$ от y на отрезке $[y^0 - b, y^0 + b]$. В силу свойств f она непрерывна, строго возрастает $\left(\frac{\partial f}{\partial y} > 0\right)$ и имеет противоположные знаки на его концах. Но тогда существует, и притом единственное, $y \in (y^0 - b, y^0 + b)$, мы его обозначим через $\psi(x)$, для которого $f(x, \psi(x)) = 0$.

Этим доказано существование определенной на Δ^0 функции $\psi(x)$, удовлетворяющей требованиям теоремы, если не считать, что пока не доказана ее непрерывная дифференцируемость.

Пусть $x, x + \Delta x \in \Delta^0$, $y = \psi(x)$ и

$$\Delta y = \psi(x + \Delta x) - \psi(x).$$

Тогда, применяя формулу конечных приращений Лагранжа для функции двух переменных (см. § 7.13, (7)), получим

$$0 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) =$$
$$= f'_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta x + f'_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta y$$

или

$$\Delta y = -\frac{f'_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}{f'_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}\,\Delta x. \tag{8}$$

Учитывая, что $\Delta \subset \overline{\Delta}$ (см. (7)), получим

$$\left|f'_x/f'_y\right| \leqslant m_2/m_1 \quad \text{на} \quad \Delta, \tag{9}$$

следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{10}$$

что показывает, что функция $y = \psi(x)$ непрерывна на Δ^0.

Но теперь, деля (8) на Δx, мы можем перейти к пределу при $\Delta x \to 0$ и получить, что для любого $x \in \Delta^0$ существует производная

$$\psi'(x) = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = -\frac{f'_x(x,\psi(x))}{f'_y(x,\psi(x))}\,. \tag{11}$$

Здесь надо учесть, что f'_x и f'_y непрерывны и $f'_y > 0$ на Δ.

Мы доказали не только существование производной $\psi'(x)$, но и важную формулу (11), с помощью которой можно вычислять $\psi'(x)$. Непрерывность $\psi'(x)$ непосредственно видна из этой формулы, потому что f'_x и f'_y непрерывны на прямоугольнике, а кривая $y = \psi(x)$, непрерывность которой уже установлена, не выходит за его пределы.

Доказательство теоремы $1'$ аналогично. Вместо x надо рассматривать $\mathbf{x}$ и считать, что $\mathfrak{M}$, Δ, Δ^0 определяются, как в формулировке теоремы $1'$, и

$$\overline{\Delta} = \left\{\left|x_j - x_j^0\right| \leqslant a,\ \left|y - y^0\right| < b\right\} \subset \Omega.$$

Теперь уже имеют место неравенства

$$\left|f'_{x_j}\right| \leqslant m_2, \qquad f'_y > m_1 \ \text{ на } \ \overline{\Delta}, \tag{7'}$$

и по аналогии доказывается существование и единственность функции

$$\begin{gathered} y = \psi(\mathbf{x}) = \psi(x_1, \ldots, x_n), \qquad \mathbf{x} \in \Delta^0, \\ (\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})) = (x_1, \ldots, x_n, \psi(\mathbf{x})) \in \Delta, \end{gathered} \tag{12}$$

удовлетворяющей уравнению $(1')$. Единственность понимается в том смысле, что любая точка $(\mathbf{x}, y) \in \Delta$, удовлетворяющая уравнению $(1')$, имеет координаты, связанные между собой равенством (12).

Пусть теперь

$$\Delta y = \psi(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}, \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \in \Delta^0,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. Тогда согласно формуле конечных приращений Лагранжа для функции многих переменных (см. § 7.13, (7))

$$\begin{aligned} 0 = f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, y + \Delta y) - f(\mathbf{x}, y) = \sum_{j=1}^{n} f'_{x_j}(\mathbf{x} + \theta\Delta\mathbf{x}, y + \theta\Delta y)\Delta x_j + \\ + f'_y(\mathbf{x} + \theta\Delta\mathbf{x}, y + \theta\Delta y)\Delta y, \qquad 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\Delta y = -\frac{1}{f'_y(\mathbf{x} + \theta\Delta\mathbf{x}, y + \theta\Delta y)} \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x} + \theta\Delta\mathbf{x}, y + \theta\Delta y)\Delta x_i \tag{8'}$$

и в силу $(7')$

$$\lim_{\Delta\mathbf{x} \to 0} \Delta y = 0. \tag{10'}$$

Далее, считая, что $\Delta x_j \neq 0$, $\Delta x_i = 0$ при $j \neq i$, из $(8')$ получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_j} = -\frac{f_{x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + \theta\Delta x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, y + \theta\Delta y)}{f_y(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + \theta\Delta x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, y + \theta\Delta y)},$$

и после перехода к пределу при $\Delta x_j \to 0$, учитывая $(10')$ и то, что f_{x_j}, f_y непрерывны и $f_y > 0$, имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))}{\partial y}}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{11'}$$

При этом $\frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ непрерывны по $\mathbf{x}$, потому что правая часть $(11')$ непрерывна по $\mathbf{x}$.

Теорема 2. *Если функция $f(x,y)$ (соответственно $f(\mathbf{x},y)$) удовлетворяет условиям теоремы 1 (соответственно теоремы $1'$) и, кроме того, имеет на Ω непрерывные частные производные порядка l, то и функция $\psi(x)$ (соответственно $\psi(\mathbf{x})$), о которой идет речь в теореме 1 (соответственно теореме $1'$), имеет на Δ^0 непрерывные частные производные порядка l.*

Доказательство. Дифференцируя (11) по x, получим

$$\psi''(x) = -\frac{f'_y\big(f''_{xx} + \psi' f''_{xy}\big) - f'_x\big(f''_{yx} + \psi' f''_{yy}\big)}{f'^2_y}, \tag{13}$$

где, конечно, всюду в частные производные надо вместо (x, y) подставить $(x, \psi(x))$. Правая часть этого равенства — непрерывная функция от x, следовательно, и $\psi''(x)$ непрерывна.

Продолжая дифференцирование, наконец получим, что производная $\psi^{(l)}(x)$ есть рациональная функция частных производных от f до порядка l включительно и производных $\psi', \ldots, \psi^{(l-1)}$, непрерывность которых установлена на предыдущем этапе дифференцирования. При этом знаменатель дроби, равной этой рациональной функции (в силу условия $f'_y \neq 0$), не равен нулю.

В случае теоремы $1'$ равенству (13) будут соответствовать следующие (см. $(11')$) равенства:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_j} = -\frac{f'_y\big(f''_{x_i x_j} + \psi'_{x_i} f''_{y x_j}\big) - f'_{x_j}\big(f''_{x_i y} + \psi'_{x_i} f''_{yy}\big)}{f'^2_y}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Пример 1. Левая часть уравнения $(y - x)^2 = 0$ имеет непрерывные частные производные, но производная по y при $x = y = 0$ равна нулю. Это не мешает тому, что данное уравнение имеет единственное решение ($y = x$), равное нулю при $x = 0$. Таким образом, теорема 1 дает только достаточные условия для существования единственной неявной функции, график которой проходит через заданную точку (x^0, y^0), но не необходимые.

§ 7.16. Теорема существования решения системы уравнений

Теорема 1. *Пусть задана система уравнений*

$$f_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

удовлетворяющая следующим свойствам.

*Функции f_j определены на некоторой ($(n+m)$-мерной) окрестности Ω точки $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ пространства $\mathbb{R}^{n+m}$ точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ и непрерывны там вместе со своими частными производными (первого порядка) с якобианом (определителем Якоби *))*

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \neq 0. \tag{2}$$

Кроме того, точка $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ удовлетворяет системе (1).

Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, удовлетворяющих системе (1) *(в частности, $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in \mathfrak{M}$).*

Тогда, каково бы ни было $b_0 > 0$, найдется прямоугольник

$$\Delta = \left\{\left|x_i - x_i^0\right| < a,\ i = 1, \ldots, n,\ \left|y_j - y_j^0\right| < b,\ j = 1, \ldots, m\right\},\quad b < b_0 \tag{3}$$

($\overline{\Delta} \subset \Omega$), такой, что множество $\mathfrak{M} \cap \Delta$ описывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$y_j = \psi_j(\mathbf{x}), \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad \mathbf{x} \in \Delta_0, \tag{4}$$

$$\Delta_0 = \left\{\left|x_i - x_i^0\right| < a,\ i = 1, \ldots, n\right\}. \tag{5}$$

Другими словами, прямоугольник Δ обладает тем свойством, что на его проекции Δ_0 на координатное подпространство $(x_1, \ldots, x_n)$ можно определить непрерывно дифференцируемые функции (4), удовлетворяющие уравнениям (1):

$$f_j(\mathbf{x}, \psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x})) \equiv 0, \qquad \mathbf{x} \in \Delta_0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

и неравенствам $\left|\psi_j(\mathbf{x}) - y_j^0\right| < b$. Эти функции единственны в том смысле, что любая точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathfrak{M} \cap \Delta$ имеет координаты, связанные уравнениями (4).

В частности, $y_j^0 = \psi_j(\mathbf{x}^0)$, $j = 1, \ldots, m$, потому что $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in \mathfrak{M} \cap \Delta$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что в формулировке теоремы неравенства $\left|x_i - x_i^0\right| < a$ можно заменить на неравенства $\left|x_i - x_i^0\right| < a'$

*) К. Г. Якоби (1804–1851) — немецкий математик.

$(a' < a)$, потому что если теорема верна при выполнении первого неравенства, то она верна и при выполнении второго при $a' < a$. В ее формулировке также можно было бы написать $|x_i - x_i^0| < a_i$, $i = 1, \ldots, m$, и тогда она будет верной при $|x_i - x_i^0| < a$, где $a = \min_i a_i$.

Заметим, однако, что невозможно добиться того, чтобы a и b в (3) были равными, в чем легко убедиться на примере одного уравнения:

$$F(x, y) = y - 2x = 0, \qquad x_0 = y_0 = 0.$$

Доказательство. При $m = 1$ теорема уже доказана (см. § 7.15, теорема $1'$). Ведь для любого b_0 можно подобрать $a > 0$ и $b < b_0$, чтобы $\overline{\Delta} \subset \Omega$. Пусть она верна при $m - 1$ $(m > 1)$; докажем ее верность при m.

Так как якобиан (2) не равен нулю в точке $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$, один из его миноров порядка $m - 1$ тоже не равен нулю в этой точке, а вследствие его непрерывности — и в некоторой достаточно малой окрестности этой точки, которую мы будем считать совпадающей с Ω, уменьшив в случае необходимости прежнюю окрестность Ω. Не нарушая общности, будем считать, что это есть минор

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_{m-1})}{D(y_1, \ldots, y_{m-1})} \neq 0. \tag{7}$$

Но по предположению теорема верна для $m - 1$, поэтому, учитывая (7), ее можно применить к первым $m - 1$ уравнениям (1) и заключить, что существует в $\mathbb{R}^{n+m}$ принадлежащий Ω прямоугольник

$$\Delta' = \{|x_i - x_i^0| < a, \quad i = 1, \ldots, n, \quad |y_m - y_m^0| < \beta, \\ |y_j - y_j^0| < b', \quad j = 1, \ldots, m - 1\} \tag{3'}$$

такой, что множество точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ из Δ', удовлетворяющих первым $m - 1$ уравнениям (1), описывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$y_j = \varphi_j(\mathbf{x}, y_m), \qquad j = 1, \ldots, m - 1, \qquad (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta_0', \\ \Delta_0' = \{|x_i - x_i^0| < a, \quad i = 1, \ldots, n, \quad |y_m - y_m^0| < \beta\}. \tag{8}$$

Таким образом, в частности,

$$y_j^0 = \varphi_j(\mathbf{x}^0, y_m^0), \qquad j = 1, \ldots, m - 1. \tag{9}$$

Замечание 2. Мы могли бы на этом первом этапе рассуждений взять $a = \beta$, но на втором этапе, возможно, придется числа a, β непропорционально уменьшать. В силу замечания 1 это уменьшение не нарушит уже доказанное.

Итак, множество точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta'$, удовлетворяющих первым $m-1$ уравнениям (1), описывается равенствами (8). Ниже мы доказываем, что среди этих точек есть точки, удовлетворяющие m-у уравнению системы (1). Для них выполняется равенство

$$F(\mathbf{x}, y_m) = f_m(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, y_m), \dots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, y_m), y_m) = 0, \quad (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'_0. \tag{10}$$

Здесь введено для краткости обозначение функции $F(\mathbf{x}, y_m)$, $(\mathbf{x}, y_m) \in \in \Delta'_0$. Обратно, если какая-либо точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет (8) и (10), то она принадлежит Δ' и удовлетворяет всем m уравнениям системы (1).

Итак, верно утверждение:

А. *Множество точек* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta'$, *удовлетворяющих системе* (1), *описывается уравнениями* (8), (10). *Очевидно, выполняются тождества*

$$\begin{gathered} f_j(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}, y_m), \dots, \varphi_{m-1}(\mathbf{x}, y_m), y_m) \equiv 0, \\ j = 1, \dots, m-1, \qquad (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'_0. \end{gathered} \tag{11}$$

З а м е ч а н и е 3. Равенства (11) суть тождества, верные для любых $(\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'_0$, а равенство (10) есть уравнение, которое предстоит еще решить относительно y_m среди точек $(\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'_0$. Ниже будет установлено, что это уравнение имеет решения. Они будут описаны, и тем самым будут описаны все решения $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta'$ системы (1).

Введенная функция $F(\mathbf{x}, y_m)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) она определена на прямоугольнике Δ'_0 и имеет там непрерывные частные производные, потому что этим свойством обладают функции (8), которые к тому же не выходят за пределы прямоугольника Δ' точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, и $f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ непрерывно дифференцируема;

2) $F(\mathbf{x}^0,\ y_m^0) = f_m(\mathbf{x}^0,\ \varphi_1(\mathbf{x}^0,\ y_m^0),\ \dots,\ \varphi_{m-1}(\mathbf{x}^0,\ y_m^0),\ y_m^0) = = f_m(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{y}^0) = 0$;

3) частная производная

$$\frac{\partial F}{\partial y_m} \neq 0, \qquad (\mathbf{x}, y_m) \in \Delta'_0. \tag{12}$$

Свойство 3) вытекает из следующих рассуждений.

Дифференцируя (на Δ'_0) функции (11) и (10) по y_m, получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial f_j}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_j}{\partial y_m} \equiv 0, \qquad j = 1, \dots, m-1, \\ \frac{\partial F}{\partial y_m} = \frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_m}{\partial y_m}. \end{gathered}$$

Поэтому, если прибавить к m-у столбцу определителя (2) его i-ые столбцы, умноженные на $\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_m}$, получим

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

откуда, учитывая (7), $\frac{\partial F}{\partial y_m} \neq 0$.

Наша теорема при $m = 1$ есть теорема $1'$ § 7.15. Применим ее к функции $F(\mathbf{x}, y_m)$, заданной на области

$$\Delta_0' = \{|x_i - x_i^0| < a, \quad i = 1, \dots, n, \quad |y_m - y_m^0| < \beta\}.$$

Условиями теоремы $1'$ являются уже проверенные нами условия 1)–3). В силу этой теоремы число a можно уменьшить и снова обозначить через a так, что для полученного уменьшенного прямоугольника (мы его снова обозначаем через Δ_0') будет выполняться следующее утверждение.

B. *Существует на* $\Delta_0 = \{|x_i - x_i^0| < a,\ i = 1, \dots, n\}$ *непрерывно дифференцируемая функция*

$$y_m = \lambda(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Delta_0, \qquad y_m^0 = \lambda(\mathbf{x}^0), \tag{13}$$

описывающая все решения $(\mathbf{x}, y_m) \in \Delta_0'$ *уравнения* (10).

Важно отметить, что, уменьшая число a, чтобы получить утверждение B, мы оставляем верным утверждение A (см. замечание 2).

Теперь утверждение A можно сформулировать следующим образом.

A. *Множество точек* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta'$, *удовлетворяющих системе* (1), *описывается уравнениями*

$$y_j = \varphi_j(\mathbf{x}, y_m), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad y_m = \lambda(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Delta_0.$$

Или если положить

$$\psi_m(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}), \quad \psi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad \mathbf{x} \in \Delta_0,$$

то получим следующее утверждение.

C. *Множество точек* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *из* Δ', *удовлетворяющих системе* (1), *описывается непрерывно дифференцируемыми функциями*

$$y_j = \psi_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, m, \quad \mathbf{x} \in \Delta_0, \quad y_j^0 = \psi_j(\mathbf{x}^0). \tag{14}$$

Отметим, что утверждение C сохраняется, если найденное a уменьшить.

Зададим b_0, положим $b = \min(b', \beta, b_0)$ и, пользуясь непрерывностью функций $\psi_j(\mathbf{x})$, определим число a (годное и для утверждения C) такое, что

$$\begin{gathered}\left|\psi_j(\mathbf{x}) - \psi_j(\mathbf{x}^0)\right| = \left|\psi_j(\mathbf{x}) - y_j^0\right| < b,\\ \mathbf{x} \in \Delta_0 = \left\{\left|x_i - x_i^0\right| < a, \quad i = 1, \ldots, n\right\}.\end{gathered} \tag{15}$$

Числа a и b определяют в пространстве точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ прямоугольник $(\Delta \subset \Delta')$

$$\Delta = \left\{\left|x_i - x_i^0\right| < a, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \left|y_j - y_j^0\right| < b, \quad j = 1, \ldots, m\right\}. \tag{16}$$

Таким образом, Δ и Δ' имеют одну и ту же проекцию Δ_0 на подпространство $\mathbf{x}$.

Покажем наконец, что

$$\mathfrak{M} \cap \Delta = \mathfrak{M} \cap \Delta' = \{y_i = \psi_i(\mathbf{x}),\ i = 1, \ldots, m,\ \mathbf{x} \in \Delta_0\},$$

откуда окончательно будет следовать утверждение теоремы:

$$\mathfrak{M} \cap \Delta = \{y_i = \psi_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \ldots, m, \quad \mathbf{x} \in \Delta_0\}.$$

В самом деле, так как $\Delta \subset \Delta'$, то $\mathfrak{M} \cap \Delta \subset \mathfrak{M} \cap \Delta'$. С другой стороны, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathfrak{M} \cap \Delta'$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathfrak{M}$ и на основании (15), (16) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta$, т. е. $\mathfrak{M} \cap \Delta' \subset \mathfrak{M} \cap \Delta$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если к условиям теоремы* 1 *добавить, что функции f_j непрерывно дифференцируемы l раз на Ω, то функции $\psi_j(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Delta_0$, $j = 1, \ldots, m$, решающие системы, непрерывно дифференцируемы l раз на Δ.*

Теорема доказывается аналогично теореме 2 § 7.15.

§ 7.17. Отображения

Пусть задана система непрерывно дифференцируемых функций

$$y_j = \varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_m), \qquad \mathbf{x} \in \Omega, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где Ω — открытое множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$.

Будем говорить, что система (1) определяет *непрерывно дифференцируемое отображение*:

$$\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1'}$$

множества Ω на некоторое множество Ω' точек $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$. Будем еще писать $\Omega' = \varphi(\Omega)$ и называть Ω' *образом* Ω, а Ω — *прообразом* Ω' (посредством отображения φ).

Наряду с φ рассмотрим другое непрерывно дифференцируемое отображение ψ:

$$z_j = \psi_j(\mathbf{y}) = \psi_j(y_1, \ldots, y_m), \quad \mathbf{y} \in \Lambda, \quad j = 1, \ldots, m,$$

открытого множества Λ точек $\mathbf{y}$ на некоторое множество точек $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$. Таким образом, $\mathbf{z} = \psi(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \Lambda$.

Если *) $\Omega' \subset \Lambda$, то имеет смысл сложное непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{z} = \psi(\varphi(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \Omega$, определяемое равенствами $z_j = \psi_j(\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $j = 1, \ldots, m$.

Якобианы отображений $\varphi, \psi, \psi\varphi$ связаны замечательными равенствами:

$$\frac{D(z_1, \ldots, z_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} = \left|\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right| = \left|\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right| = \\ = \left|\frac{\partial z_i}{\partial y_s}\right| \left|\frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right| = \frac{D(z_1, \ldots, z_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \, \frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}, \qquad (2)$$

доказательство которых, как мы видим, основано на применении формулы производной от сложной функции и правила умножения определителей.

В частности, если ψ обращает φ на множестве точек $\mathbf{x} \in \Omega$, т.е. $\mathbf{x} = \psi(\varphi(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \Omega$, есть тождественное отображение, то в силу того, что его якобиан равен 1, получим формулу

$$1 = \frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \, \frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \qquad (3)$$

Будем теперь считать, что определяемое равенствами (1) непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ имеет якобиан **)

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

не равный нулю всюду на открытом множестве Ω.

---

*) Отметим, что если $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ и $\mathbf{y}^0 = \varphi(\mathbf{x}^0) \in \Lambda$, то в силу непрерывности φ найдется окрестность $V_{\mathbf{x}^0}$ точки $\mathbf{x}^0$, образ которой посредством φ принадлежит Λ. Уменьшая Ω, положив $\Omega = V_{\mathbf{x}^0}$, получим, что $\Omega' \subset \Lambda$.

**) Случай, когда якобиан отображения (1) равен нулю, изучается в 4-ом издании книги автора "Курс математического анализа", § 7.27 .

Имеют место следующие свойства:

1) $\Omega' = \varphi(\Omega)$ — открытое множество (вместе с Ω);

2) если Ω — область, то и Ω' — область;

3) отображение φ локально взаимно однозначно, т. е., какова бы ни была точка $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, найдется шар $V \in \Omega$ с центром в ней такой, что отображение φ, рассматриваемое только на V, однозначно обратимо.

Пусть $\mathbf{y}^0 \in \Omega'$. Существует точка $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ такая, что $\mathbf{y}^0 = \varphi(\mathbf{x}^0)$. Введем пространство $\mathbb{R}^{2m}$ точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$ и в нем рассмотрим уравнения

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_m) - y_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Точка $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ удовлетворяет этим уравнениям, и в ее некоторой окрестности (в $\mathbb{R}^{2m}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{y}$ любое) функции f_i непрерывно дифференцируемы и имеют якобиан

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} = \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0.$$

Поэтому в силу теоремы 1 предыдущего параграфа для любого $a_0 > 0$ найдутся положительные b и $a < a_0$ такие, что множество $\mathfrak{M} \cap \Delta$ всех точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, принадлежащих прямоугольнику

$$\begin{gathered} \Delta = \Delta_1 \times \Delta_2, \\ \Delta_1 = \left\{ \left| x_j - x_j^0 \right| < a, \quad j = 1, \ldots, m \right\}, \\ \Delta_2 = \left\{ \left| y_j - y_j^0 \right| < b, \quad j = 1, \ldots, m \right\}, \end{gathered}$$

и удовлетворяющих уравнениям (1), описывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x_i = \psi_i(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y} \in \Delta_2, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Коротко $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \Delta_2$.

Таким образом, точки $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяют одному из выписанных ниже вытекающих друг из друга свойств:

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \Delta_1, \mathbf{y} \in \Delta_2 \end{matrix} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{matrix} \mathbf{x} = \psi(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y} \in \Delta_2 \end{matrix} \right\}. \tag{5}$$

Пусть $\omega = \{\mathbf{x} \colon \mathbf{x} = \psi(\mathbf{y}), \ \mathbf{y} \in \Delta_2\}$ — образ Δ_2 при помощи ψ. Тогда вместо (5) можно написать

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \omega \subset \Delta_1, \mathbf{y} \in \Delta_2 \end{matrix} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{matrix} \mathbf{x} = \psi(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y} \in \Delta_2 \end{matrix} \right\}, \tag{5'}$$

т.е. каждая точка $\mathbf{y}$ открытого куба Δ_2 посредством ψ переходит в точку $\mathbf{x} \in \omega$, которая в свою очередь посредством φ переходит в исходную точку $\mathbf{y}$.

Таким образом,

$$\varphi(\psi(\mathbf{y})) = \mathbf{y}, \qquad \mathbf{y} \in \Delta_2, \tag{6}$$

и обратно

$$\psi(\varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \in \omega. \tag{7}$$

Мы задали произвольную точку $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, определили соответствующую точку $\mathbf{y}^0 = \varphi(\mathbf{x}^0)$ образа Ω' отображения $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, и обнаружили в Ω' куб Δ_2 с центром в $\mathbf{y}^0$. Это показывает, что $\varphi(\Omega) = \Omega'$ есть открытое множество, и если Ω есть область, то и Ω' — область (см. ниже замечание).

Этим доказаны утверждения 1), 2).

Из (6) следует, что якобианы преобразований φ, ψ удовлетворяют равенству

$$\frac{D(\varphi)}{D(\mathbf{x})} \cdot \frac{D(\psi)}{D(\mathbf{y})} = 1, \qquad \mathbf{y} \in \Delta_2,$$

и так как первый множитель по условию отличен от нуля, то и второй также не равен нулю.

Мы получили, что отображение $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{y})$ на открытом множестве Δ_2 не только непрерывно дифференцируемо, но и имеет отличный от нуля якобиан. Но в таком случае отображение ψ имеет в качестве образа Δ_2 область. Это уже было доказано на примере φ.

Итак, ω — область, отображающаяся (на основании (6), (7)) при помощи φ на открытый куб Δ_2 непрерывно дифференцируемо и взаимно однозначно. Но тогда любой открытый шар V, принадлежащий ω, с центром в $\mathbf{x}^0$ отображается при помощи φ на некоторую область V' непрерывно дифференцируемо и взаимно однозначно. Этим доказано утверждение 3).

З а м е ч а н и е. Свойства (6) и (7) выражают, что операции φ и ψ взаимно обратны.

Пусть Ω есть область; тогда по уже доказанному свойству 1) Ω' вместе с Ω открыто. Если теперь $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in \Omega'$ — произвольные точки, то им соответствуют некоторые точки $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Omega$ такие, что $\varphi(\mathbf{x}') = \mathbf{y}'$, $\varphi(\mathbf{x}'') = \mathbf{y}''$. Но Ω — связное множество, и найдется непрерывная кривая $\mathbf{x}(t) \in \Omega$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, такая, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}'$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}''$, принадлежащая Ω и соединяющая точки $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$. Но тогда кривая $\mathbf{y}(t) = \varphi(\mathbf{x}(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, тоже непрерывна, принадлежит Ω' и соединяет $\mathbf{y}'$ с $\mathbf{y}''$. Следовательно, Ω' связно, т. е. область, и мы доказали свойство 2).

Свойство 3) утверждает только локальную взаимную однозначность, глобальной взаимной однозначности может и не быть. Например, преобразование $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ полярных координат точек плоскости в декартовы при $\rho > 0$ и произвольном θ непрерывно дифференцируемо и имеет положительный якобиан, равный ρ. Оно отображает точки (ρ, θ), $\rho > 0$, $-\infty < \theta < \infty$, плоскости (ρ, θ) в точки (x, y), отличные от нулевой точки, локально взаимно однозначно. Однако каждой такой точке (x, y) соответствует хотя и одно ρ, но бесконечное число различных значений θ, отличающихся между собой на $2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 7.18. Гладкая поверхность

Пусть $\mathbb{R}^3$ есть трехмерное пространство, где определена прямоугольная система координат x, y, z.

Если G — открытое множество в плоскости x, y и

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in G, \tag{1}$$

есть функция, имеющая на G непрерывные частные производные (первого порядка), то множество $S \subset \mathbb{R}^3$, описываемое этой функцией, называется *гладкой поверхностью.*

Про эту поверхность мы будем говорить, что она проектируется на плоскость $z = 0$. Равенство (1) устанавливает взаимно однозначное соответствие $S \rightleftarrows G$ между точками $(x, y, z) \in S$ и точками $(x, y) \in G$.

Можно, конечно, рассматривать гладкие поверхности, описываемые уравнениями вида $x = \Psi(y, z)$ или $y = \Phi(z, x)$, т. е. когда они (взаимно однозначно) проектируются соответственно на плоскости $x = 0$, $y = 0$.

Мы еще будем говорить, что эти поверхности *заданы в явном виде.*

Распространим теперь эти понятия на поверхности, которые в целом вообще не проектируются ни на одну из координатных плоскостей.

Пусть на открытом трехмерном множестве Ω задана произвольная функция $F(x, y, z)$, непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка. Уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

определяет некоторое множество S точек $(x, y, z) \in \Omega$. Если S — непустое множество и

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > 0 \ \text{ на } \ S, \tag{3}$$

то S будем называть *гладкой поверхностью, заданной неявно.*

Пусть $A_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. В силу (3) одна из частных производных от F в точке A_0 не равна нулю; будем считать, что $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \neq 0$. Тогда в силу непрерывности частных производных от F на основании теоремы о неявной функции (см. § 7.15, теорема 1′) существует трехмерный прямоугольник

$$\Delta = \{|x - x_0|,\ |y - y_0| \leqslant \delta,\ \ |z - z_0| \leqslant \lambda\}, \qquad \delta, \lambda > 0, \tag{4}$$

вырезающий из S часть σ, описываемую явно непрерывно дифференцируемой функцией

$$z = \psi(x, y), \qquad (x, y) \in \Delta', \qquad \Delta' = \{|x - x_0|,\ |y - y_0| \leqslant \delta\}, \tag{5}$$

т. е. σ — кусок поверхности S, определяемый явно.

Кусок σ (или поверхность S) имеет в точке A_0 касательную плоскость, определяемую уравнением (см. § 7.5, (16))

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \tag{6}$$

или в силу равенств (см. § 7.15, (11′))

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}, \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}$$

уравнением

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0. \tag{6′}$$

Мы получили уравнение касательной плоскости к поверхности S в ее точке (x_0, y_0, z_0), когда S в точке задана неявно уравнением (2).

Пример 1. Шаровая поверхность Λ

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad R > 0, \tag{7}$$

есть гладкая поверхность, потому что функция $F = x^2 + y^2 + z^2$ имеет непрерывные частные производные $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 2z$, одновременно не равные нулю на (непустом множестве) Λ. Касательная плоскость к Λ в точке (x_0, y_0, z_0) имеет, очевидно, вид

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0.$$

Пример 2. Уравнение $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ определяет круговой конус с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью x.

Частные производные от функции $\Phi(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$, равные $\Phi'_x = 2x$, $\Phi'_y = -2y$, $\Phi'_z = -2z$, обращаются одновременно в нуль только в начале координат. Из геометрических соображений видно, что в начале координат конус не имеет касательной плоскости, во всех же остальных точках касательная плоскость к рассматриваемому конусу существует и непрерывно изменяется вместе с точкой, в которой она касается конуса.

С точки зрения введенной терминологии, можно сказать, что круговой конус, если из него выбросить его вершину, есть гладкая поверхность.

§ 7.19. Дифференциалы неявных функций. Линеаризация

Мы знаем, что для уравнений

$$\begin{gathered} f_j(\mathbf{x},\mathbf{y})=0, \qquad j=1,\ldots,m, \\ f_j(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0)=0, \\ \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n), \qquad \mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_m), \end{gathered} \tag{1}$$

подчиняющихся условиям теоремы существования неявных функций (теорема 1 § 7.15) существуют непрерывно дифференцируемые функции

$$\begin{gathered} y_s=\psi_s(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\Delta_0, \qquad s=1,\ldots,m, \\ \Delta_0=\left\{\mathbf{x}\colon \left|x_i-x_i^0\right|<a,\ i=1,\ldots,n\right\}, \end{gathered} \tag{2}$$

обращающие эти уравнения в тождества

$$f_j(\mathbf{x},\psi_1(\mathbf{x}),\ldots,\psi_m(\mathbf{x}))\equiv 0, \qquad \mathbf{x}\in\Delta_0. \tag{3}$$

Таким образом, в уравнениях (1) переменную $\mathbf{x}\in\Delta_0$ можно считать независимой, а $\mathbf{y}$ — от нее зависимой.

Из (2) следует

$$dy_s=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_s(\mathbf{x})}{\partial x_i}\,dx_i, \qquad s=1,\ldots,m. \tag{4}$$

Мы получили систему дифференциалов

$$(dx_1,\ldots,dx_n,dy_1,\ldots,dy_m). \tag{5}$$

Дифференциалы dx_i независимые (произвольные числа), а дифференциалы dy_s — зависящие от них.

Зависимость линейная, но с коэффициентами, зависящими от $\mathbf{x}\in\Delta_0$.

Левая часть (3) есть функция W от $\mathbf{x}$, тождественно равная нулю на Δ_0. Ее дифференциал в любой точке $\mathbf{x}\in\Delta_0$ равен нулю:

$$dW=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_i}\,dx_i=\sum_{i=1}^{n}0\,dx_i=0, \tag{6}$$

каковы бы ни были независимые дифференциалы dx_i. Но W записывается еще как функция

$$W=f_j(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_m),$$

где y_j — функции от $\mathbf{x}$. Согласно инвариантного свойства дифференциала равенство (6) можно записать также в виде:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, dx_i + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial y_s}\, dy_s, \tag{7}$$

где, если считать числа dx_i прежними, числа dy_s определяются (через dx_i) по формулам (4). В частные производные надо подставить рассматриваемую точку $\mathbf{x}$ и точку $\mathbf{y}$, вычисленную через $\mathbf{x}$ по формулам (2).

В самом деле, исходным произвольным числам $dx_1, \ldots , dx_n$ уже соответствуют числа $dy_1, \ldots , dy_m$ при помощи равенств (4). Они удовлетворяют также системе (7). Но других чисел dy_j, удовлетворяющих (7) при данных dx_i, нет, потому что определитель $\left|\frac{\partial f_j}{\partial y_s}\right|$ не равен нулю.

Мы получили важный факт.

Если уравнения (1), подчиняющиеся теореме существования, формально продифференцировать и приравнять нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, dx_i + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial y_s}\, dy_s = 0, \qquad j = 1, \ldots, m \tag{8}$$

(подставив в частные производные $y_j = \psi_j(\mathbf{x})$), то, если определитель $\left|\frac{\partial f_j}{\partial y_s}\right|$ отличен от нуля, числа dx_i можно считать независимыми, а числа dy_s вычисляются однозначно по ним из системы (8). При этом окажется, что числа dy_s являются дифференциалами решений $\psi_s(\mathbf{x})$ системы уравнений (1), соответствующими дифференциалам dx_i.

Пример. Функции (см. (2))

$$y_s = \psi_s(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Delta_0, \qquad s = 1, \ldots, m,$$

определяют непрерывно дифференцируемое отображение куба $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^n$ с центром в $\mathbf{x}^0$ в m-мерное пространство $\mathbb{R}^m \ni \mathbf{y} = (y_1, \ldots , y_m)$.

Покажем, как его можно в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ линеаризовать, т. е. записать приближенно при помощи линейных функций от $\mathbf{x}$.

Положим

$$dx_i = x_i - x_i^0, \qquad i = 1, \ldots , n; \qquad \Delta y_s = \psi_s(\mathbf{x}) - \psi_s(\mathbf{x}^0).$$

Имеет место

$$\Delta y_s = dy_s + o(\rho), \qquad \rho \to 0, \qquad \rho = \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i\right)^{1/2}.$$

Поэтому можно для малых ρ считать приближенно:

$$\Delta y_s \approx dy_s = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial x_i}\right)_0 (x_i - x_i^0), \qquad s = 1, \dots, m,$$

или, полагая $\left(\frac{\partial \psi_s}{\partial x_i}\right)_0 = a_{si}$, получить приближение приращения функции ψ_s посредством линейной функции:

$$\Delta y_s \approx \sum_{i=1}^{n} a_{si}(x_i - x_i^0), \qquad s = 1, \dots, m.$$

Однако числа a_{si} у нас получились вычисленными через функции ψ_s, которые для любого $\mathbf{x}$ нам не известны. Но с другой стороны, мы знаем, что имеет место эквивалентность системы

$$dy_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\, dx_i, \qquad s = 1, \dots, m, \tag{9}$$

системе

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_0 dx_i + \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_s}\right)_0 dy_s, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{10}$$

Положим в (10) $dx_l = 1$ и $dx_i = 0$, $i \neq l$, подставим эти числа в (10) и решим (10) относительно чисел dy_s.

Найденные dy_s и исходные дифференциалы dx_k подставим в (9). Получим

$$dy_s = a_{sl}, \qquad s = 1, \dots, m, \qquad l = 1, \dots, n,$$

т. е. получим l-й столбец матрицы $\|a_{ji}\|$.

Эту процедуру придется совершать n раз — для любого l.

§ 7.20. Локальный относительный экстремум

Лемма 1. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан вектор $\mathbf{a}$ и линейно независимые векторы $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^m$ $(m < n)$. Для того чтобы имело место представление*

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{b}^j, \tag{1}$$

где λ_j — некоторые числа, необходимо и достаточно, чтобы всякий вектор $\mathbf{c}$, ортогональный ко всем $\mathbf{b}^j$:

$$(\mathbf{c}, \mathbf{b}^j) = 0, \qquad j = 1, \dots, m, \tag{2}$$

автоматически был ортогонален к $\mathbf{a}$:

$$(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Если имеет место (1), то (2) влечет

$$(\mathbf{c},\mathbf{a}) = \left(\mathbf{c}, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{b}^j\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\mathbf{c}, \mathbf{b}^j) = 0,$$

и мы доказали необходимость условия леммы.

Перейдем к доказательству достаточности. Ортогонализируя систему $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m$, получим ортонормированную систему $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m$, обладающую тем же свойством: из равенств $(\mathbf{c}, \mathbf{a}^j) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, следует, что $(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 0$.

Разложим вектор $\mathbf{a}$ по векторам $\mathbf{a}^j$:

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{a}^j + \mathbf{r}, \qquad \lambda_j = (\mathbf{a}, \mathbf{a}^j).$$

Вектор $\mathbf{r}$ ортогонален ко всем $\mathbf{a}^j$, но тогда $(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 0$ и, следовательно,

$$0 = (\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \left(\mathbf{r}, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{a}^j + \mathbf{r}\right) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}).$$

Но тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{a}^j.$$

Пусть Ω есть открытое множество n-мерного пространства и f, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, $1 \leqslant m < n$, — определенные на Ω функции.

Обозначим через E множество точек $\mathbf{x}$, для которых выполняются одновременно равенства (связи):

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m; \qquad m < n. \tag{4}$$

По определению точка $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ есть *точка локального относительного максимума (минимума) функции* f при наличии связей (4), если $\mathbf{x}^0 \in E$ и существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathbf{x} \in E$, удовлетворяющих неравенству $\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right| = \sqrt{\sum_1^n \left(x_k - x_k^0\right)^2} < \delta$, имеет место $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}^0)$ в случае максимума и $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}^0)$ в случае минимума.

Точка локального относительного максимума или минимума называется *точкой локального относительного экстремума.*

Займемся сначала выяснением вопроса о необходимых условиях, чтобы $\mathbf{x}^0$ была точкой локального относительного экстремума.

Будем предполагать, что на Ω функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ имеют непрерывные частные производные. Больше того, будем предполагать, что в точке $\mathbf{x}^0$ ранг матрицы $\left\|\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right)_0\right\|$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, равен m. Таким образом, среди определителей порядка m, порождаемых этой матрицей, имеется не равный нулю. Для определенности будем считать, что это есть определитель

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)_0} = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)_0 & \ldots & \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}\right)_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}\right)_0 & \ldots & \left(\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}\right)_0 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Мы считаем, что символ $(\quad)_0$ обозначает тот факт, что в функцию, стоящую в скобках, вместо $\mathbf{x}$ подставлено $\mathbf{x}^0$. На основании теоремы о неявных функциях существуют прямоугольник

$$\Delta = \Delta' \times \Delta'', \tag{6}$$

$$\Delta' = \left\{ \left| x_j - x_j^0 \right| < \delta, \quad j = 1, \ldots, m \right\},$$

$$\Delta'' = \left\{ \left| x_i - x_i^0 \right| < \sigma, \quad i = m+1, \ldots, n \right\},$$

и (единственные) непрерывно дифференцируемые функции

$$x_j = \mu_j(x_{m+1}, \ldots, x_n), \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \Delta'', \tag{7}$$

описывающие точки $\mathbf{x} \in E \cap \Delta$.

Имеют место тождества

$$\begin{gathered} \varphi_j(\mu_1, \ldots, \mu_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0, \\ j = 1, \ldots, m, \qquad (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \Delta''. \end{gathered} \tag{8}$$

Можно, таким образом, считать, что у каждой точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in E \cap \Delta$ координаты $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ независимые, а $(x_1, \ldots, x_m)$ зависимые от них (см. (7)). Иногда мы будем называть всю систему $(x_1, \ldots, x_n)$ состоящей из зависимых переменных. Соответственно дифференциалы $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ независимые (произвольные числа), а $dx_1, \ldots, dx_m$ — зависимые от них при помощи равенств

$$dx_j = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial \mu_j}{\partial x_k}\, dx_k, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Если продифференцировать уравнения связи (4), то получим дифференциальные уравнения связи

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\, dx_k = 0, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Если задать произвольные числа $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$, то можно получить $dx_1, \ldots, dx_m$ или по формулам (9), или решая систему (10) — это все равно (см. § 7.19).

Рассматривая уравнения (4), мы будем говорить, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют им, а дифференциалы этих переменных удовлетворяют дифференциальным уравнениям связи (10).

В задаче на относительный экстремум мы рассматриваем функцию

$$W = f(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x}$ подчиняется связям ($\mathbf{x} \in E$). Таким образом, f есть функция от, вообще говоря, зависимых переменных: $W = f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям связи. Но в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ ее можно рассматривать как функцию от независимых переменных $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$:

$$W = \Phi(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(\mu_1, \ldots, \mu_m, x_{m+1}, \ldots, x_n), \qquad (11)$$
$$(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \Delta''.$$

Очевидно, точка $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_m^0, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$ есть точка относительного максимума (минимума) функции f тогда и только тогда, когда $\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$ есть точка абсолютного максимума (минимума) функции $\Phi(x_{m+1}, \ldots, x_n)$. Но тогда $\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$ есть стационарная точка функции Φ, т. е. точка, в которой частные производные первого порядка от Φ равны нулю.

Точка $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ называется *стационарной точкой функции f на множестве E* (определенном связями (4)), если (при условии (5)) $\left(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$ есть стационарная точка функции $\Phi(x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

Ближайшая наша задача — изложить метод Лагранжа отыскания стационарных точек f (на E). В этом изложении свойства функции Φ будут для нас руководящими. Однако в окончательных результатах функция Φ не будет участвовать. В этом, собственно, и заключается метод — выразить окончательные результаты в терминах функций f, φ_j и их частных производных.

Заметим, что из (11) следует на основании инвариантного свойства первого дифференциала:

$$dW = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i, \qquad (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \Delta'', \qquad (12)$$

где $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ — независимые дифференциалы, а $dx_1, \ldots, dx_m$ зависимые, такие, что система $dx_1, \ldots, dx_n$ удовлетворяет (10).

Итак, пусть $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_m^0, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$ есть стационарная точка f на E. Тогда (при условии (5)) $(x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$ есть стационарная точка Φ, т. е. выполняются равенства

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)_0 = 0, \qquad i = m+1, \ldots, n. \tag{13}$$

Равенства (13) эквивалентны одному равенству

$$(d\Phi)_0 = \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)_0 dx_j = 0, \tag{13$'$}$$

которое должно быть верным для произвольных (независимых между собой) $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. В самом деле, из (13) следует (13$'$) при любых $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. Обратно, если верно (13$'$) для любых дифференциалов $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$, то, в частности, оно верно, когда один из этих дифференциалов равен 1, а остальные равны нулю, а это приводит к равенствам (13).

Теперь из (12) и (13$'$) следует

$$0 = (d\Phi)_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 dx_i$$

для любых dx_i, удовлетворяющих системе (10).

Мы доказали, что точка $\mathbf{x}^0$ является стационарной для нашей задачи тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 dx_i = 0 \tag{14}$$

для любых dx_i, удовлетворяющих системе

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_0 dx_i = 0, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{15}$$

Равенства (14), (15) записываются коротко в виде

$$\big((\operatorname{grad} f)_0, d\mathbf{x}\big) = 0, \tag{14$'$}$$

$$\big((\operatorname{grad} \varphi_j)_0, d\mathbf{x}\big) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{15$'$}$$

где $d\mathbf{x} = (dx_1, \ldots, dx_n)$,

$$(\operatorname{grad} f)_0 = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0\right),$$

$$(\operatorname{grad} \varphi_j)_0 = \left(\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}\right)_0\right).$$

При этом векторы $(\operatorname{grad}\varphi_j)_0$ образуют линейно независимую систему, потому что матрица $\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|$ имеет ранг m (см. (5)).

Теперь можно сказать, что точка $\mathbf{x}^0$ есть стационарная точка f при наличии связей (4) тогда и только тогда, когда для этой точки всякий вектор $d\mathbf{x}$, ортогональный градиентам $(\operatorname{grad}\varphi_j)_0$, $j=1,\dots,m$, ортогонален к $(\operatorname{grad} f)_0$.

Тогда согласно лемме 1 для точки $\mathbf{x}^0$ существует единственная система чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, для которой

$$(\operatorname{grad} f)_0 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\operatorname{grad}\varphi_j)_0. \tag{16}$$

Мы получили векторное равенство (16), которое вместе с равенствами (см. (4))

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = 0, \qquad j = 1,\dots,m,$$

дает возможность найти точки $\mathbf{x}^0$ вместе с соответствующими им системами чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_m$.

На языке проекций векторному уравнению (16) соответствует n скалярных уравнений. Вместе с (4) они составляют $n+m$ уравнений относительно $n+m$ неизвестных

$$x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m.$$

Итак, стационарные точки нашей экстремальной задачи являются решениями (вместе с системами $\lambda_1,\dots,\lambda_m$) уравнений (4) и (16).

Изложенный метод называется *методом Лагранжа*, предложившего этот метод.

На практике, решая эту задачу, рассуждают так.

Вводим функцию Лагранжа

$$F_\lambda(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\Omega,$$

где числа λ_k — множители Лагранжа — пока неизвестны.

Приравниваем частные производные от F_λ нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{17}$$

и решаем эти уравнения вместе с уравнениями связи (4) относительно $x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m$.

Переходим к обоснованию достаточного признака экстремума. Считаем, что функции f, φ_j дважды непрерывно дифференцируемы на Ω. Тогда описывающие множество E функции (7) автоматически дважды непрерывно дифференцируемы так же, как функция

$$\Phi(x_{m+1},\dots,x_n), \qquad (x_{m+1},\dots,x_n)\in\Delta''.$$

Пусть $\mathbf{x}^0$ — стационарная точка задачи и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — ее лагранжевы числа. Для точек $\mathbf{x} \in E \cap \Delta$

$$\Phi(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(\mathbf{x}) = F_\lambda(\mathbf{x}), \tag{18}$$

где $F_\lambda(\mathbf{x})$ — лагранжева функция (точки $\mathbf{x}^0$), а координаты $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — функции (от $(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \Delta''$) с дифференциалами dx_i, удовлетворяющими условиям связи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}\, dx_i, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{19}$$

Независимым переменным $x_{m+1}, \ldots, x_n$ придаем (независимые) дифференциалы $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ и вычисляем соответствующие дифференциалы функций (18):

$$d\Phi = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}\, dx_i. \tag{20}$$

Надо учесть, что числа $dx_1, \ldots, dx_n$ удовлетворяют системе (19).

Дифференцируя еще раз (20), получим

$$\sum_{j=m+1}^{n} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}\, dx_j dx_k = \\ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F_\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k}\, dx_j dx_k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_i}\, d^2 x_i.$$

Полагаем теперь в этом равенстве $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$. Так как $\mathbf{x}^0$ — стационарная точка и F_λ — ее лагранжевая функция, то

$$\frac{\partial F_\lambda(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}\right)_0 = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Поэтому окончательно получаем равенство

$$(d^2\Phi)_0 = \sum_{j=m+1}^{n} \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}\right)_0 dx_j dx_k = \\ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_j \partial x_k}\right)_0 dx_j dx_k, \tag{21}$$

где в левой части дифференциалы $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ независимы, а в правой — дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$ подчиняются связям

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_0 dx_i = 0, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{22}$$

Теперь можно сделать заключение.

Пусть для нетривиальных (не равных нулю одновременно) векторов $(dx_1, \ldots, dx_n)$, удовлетворяющих связям (19), квадратическая форма справа в (21):

а) строго положительна;

б) строго отрицательна;

в) не строго положительна;

г) не строго отрицательна;

д) неопределённая (положительна для одного вектора и отрицательна для другого).

Тогда эти же свойства соответственно имеют место для квадратической формы слева в (21) для независимых векторов $(dx_{m+1}, \ldots, dx_n)$.

Следовательно, на основании теории локального абсолютного экстремума в указанных случаях имеет место:

а) локальный относительный минимум;

б) локальный относительный максимум;

в), г) не известно;

д) нет локального экстремума.

Надо учесть, что всевозможные нетривиальные системы $(dx_1, \ldots \ldots, dx_n)$, удовлетворяющие связям, порождают в качестве своих проекций всевозможные системы нетривиальных независимых векторов $(dx_{m+1}, \ldots, dx_n)$.

Схема решения задачи на относительный экстремум на области Ω_1 сводится к следующему.

Выделяется на Ω_1 подмножество Ω точек $\mathbf{x}$, в которых функции f, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ имеют непрерывные частные производные, а матрица $\left\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right\|$ имеет ранг m. На Ω описанным выше способом находятся стационарные точки. Каждая из них затем исследуется на экстремум. Если в ней существуют непрерывные частные производные второго порядка, то может оказаться эффективным метод исследования второго дифференциала функции Лагранжа F_λ. Точки $\Omega_1 \setminus \Omega$ исследуются особо.

Пример 1. Найдем локальные экстремумы функции $f(x, y) = xy$ на окружности (Г):

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{23}$$

Функции f и φ дважды непрерывно дифференцируемы на всей плоскости. Кроме того, ранг матрицы

$$\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right\| = \|2x, 2y\|$$

равен 1 (т.е. количеству связей) на всей плоскости x, y, за исключением точки $(0,0)$. Но последняя не находится на Γ. Следовательно, точки, где возможен локальный экстремум, находятся только среди стационарных точек.

Приравнивая нулю частные производные функции Лагранжа задачи $F(x,y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, получим уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x - 2\lambda y = 0. \tag{24}$$

Решая их вместе с уравнением (23), получим четыре пары стационарных точек $x = \pm 1/\sqrt{2}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$, соответствующих всевозможным распределениям $+$ и $-$. Паре $x_1 = y_1 = 1/\sqrt{2}$ соответствуют $\lambda_1 = 1/2$ и лагранжева функция

$$F(x,y) = xy - (x^2 + y^2 - 1)/2.$$

Второй дифференциал от F в точке (x_1, y_1) имеет вид $d^2F = -dx^2 + 2dx\,dy - dy^2 = -(dx - dy)^2$. В силу (23)

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0,$$

откуда $dy = -dx$, и окончательно получаем

$$d^2F = -(2dx)^2 = -4dx^2,$$

где dx — независимый дифференциал. Следовательно, в точке (x_1, y_1) имеет место локальный относительный максимум задачи, равный $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\,) = 1/2$. Легко заключить, используя симметрические свойства f, что в точке $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\,)$ имеет место другой локальный относительный максимум, равный $1/2$.

Так как окружность Γ есть ограниченное замкнутое множество и непрерывная на Γ функция f должна достигать на Γ своего максимума и так как максимум на Γ необходимо есть локальный максимум на Γ, то $\max_\Gamma F = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\,) = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\,) = 1/2$ и, аналогично,

$$\min_\Gamma f = f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\,) = f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\,) = -1/2.$$

§ 7.21. Замена переменных в частных производных

Ограничимся рассмотрением двумерного случая. В n-мерном случае выкладки аналогичны.

Рассмотрим функцию

$$z = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v). \tag{2}$$

Покажем, как производные $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ выражаются через производные от z по u и v. Для этого продифференцируем (1) по u и v:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{3}$$

Решая эти уравнения относительно p и q, получим

$$p = \frac{\dfrac{D(z,y)}{D(u,v)}}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}, \qquad q = \frac{\dfrac{D(x,z)}{D(u,v)}}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}. \tag{4}$$

Конечно, в этих рассуждениях предполагается, что φ и ψ имеют непрерывные частные производные по u, v с неравным нулю якобианом. В дальнейшем подобные условия, обеспечивающие разрешимость соответствующих уравнений, мы будем предполагать выполненными, не оговаривая это особо.

Равенства (4) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A\,\frac{\partial z}{\partial u} + B\,\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = C\,\frac{\partial z}{\partial u} + D\,\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{5}$$

где важно отметить, что коэффициенты A, B, C, D зависят только от u, v, но не от z. Но тогда

$$\begin{aligned} r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = A\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \\ = A\,\frac{\partial}{\partial u}\left(A\,\frac{\partial z}{\partial u} + B\,\frac{\partial z}{\partial v}\right) + B\,\frac{\partial}{\partial v}\left(A\,\frac{\partial z}{\partial u} + B\,\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \\ = A^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2AB\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + B^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \\ + \left(A\,\frac{\partial A}{\partial u} + B\,\frac{\partial A}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u} + \left(A\,\frac{\partial B}{\partial u} + B\,\frac{\partial B}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned} \tag{6}$$

и мы получили выражение для частной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ через частные производные от z по u и v.

Чтобы вычислить $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, поступаем подобным образом. Производные более высокого порядка вычисляются последовательно этим же методом. Так, для вычисления $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ надо подставить в правую часть (6) $A\,\frac{\partial z}{\partial u} + B\,\frac{\partial z}{\partial v}$ вместо z и произвести нужные дифференцирования.

П р и м е р 1. Выразить оператор Лапласа *) (двумерный)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7}$$

*) П. С. Лаплас (1749–1827) — французский астроном, математик и физик.

в полярных координатах. Решим эту задачу методом дифференциалов (хотя ее можно решить и изложенным выше методом).

Имеем

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta. \tag{8}$$

Дифференцируем (8):

$$dx = \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta, \qquad dy = \sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta.$$

Отсюда $d\rho = \sin\theta\, dy + \cos\theta\, dx,\ d\theta = (-\sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy)\dfrac{1}{\rho}$.

Далее,

$$d^2\rho = (-\sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy)\, d\theta = \rho d\theta^2,$$

$$d^2\theta = \frac{1}{\rho}\,(-\cos\theta\, dx - \sin\theta\, dy)\, d\theta - \frac{d\rho}{\rho^2}\,(-\sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy) = \\ = -\frac{d\rho\, d\theta}{\rho} - \frac{d\rho\, d\theta}{\rho} = -2\frac{d\rho\, d\theta}{\rho}.$$

Подставляя эти выражения в равенство

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\, d\theta^2 + \frac{\partial u}{\partial\rho}\, d^2\rho + \frac{\partial u}{\partial\theta}\, d^2\theta$$

и приводя подобные при $dx^2,\ dx\, dy$ и dy^2, получим, в частности, выражения для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, что дает

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial u}{\partial\rho}. \tag{9}$$

Пример 2. Выразить оператор Лапласа (трехмерный)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

в полярных координатах.

Имеем $x = \rho\cos\theta\,\cos\varphi,\ y = \rho\cos\theta\,\sin\varphi,\ z = \rho\sin\theta$. Введем вспомогательную переменную $r = \rho\cos\theta$. Тогда $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$, и в силу формулы (9)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Остается в этом выражении сделать подстановку $r = \rho\cos\theta,\ z = \rho\sin\theta,\ \varphi = \varphi$, в силу которой на основании той же формулы (9)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial u}{\partial\rho},$$

и на основании формулы (4)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\dfrac{D(z,u)}{D(\rho,\theta)}}{\dfrac{D(r,z)}{D(\rho,\theta)}} = -\frac{1}{\rho}\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta} + \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial\rho}\,.$$

Поэтому

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2\,\cos^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{\rho}\,\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho^2\cos\theta}\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\,. \tag{10}$$

Мы считали, что θ (широта) отсчитывается от экватора сферы ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$). Подстановка $\theta' = (\pi/2) - \theta$ ($\theta < \theta' < \pi$) приводит к отсчету от северного полюса сферы. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\theta'^2}\,, \qquad \cos\theta' = \sin\theta, \qquad \sin\theta' = \cos\theta, \qquad \frac{\partial u}{\partial\theta} = -\frac{\partial u}{\partial\theta'}\,,$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta'^2} + \frac{1}{\rho^2\,\sin^2\theta'}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{\rho}\,\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\cos\theta'}{\sin\theta'}\,\frac{\partial u}{\partial\theta'}\,.$$

Упражнения.

1. Показать, что формула кривизны плоской кривой $y = f(x)$ в полярных координатах ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\left|r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\,\dfrac{d^2r}{d\theta^2}\right|}{\left[r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}\,.$$

2. Показать, что дифференциальное уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0$ подстановками $\xi = x + at,\ \eta = x - at$ сводится к уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

§ 7.22. Система зависимых функций

Пусть задана система m ($m \leqslant n$) функций

$$y_j = f_j(\mathbf{x}) = f_j(x_1, \ldots, x_n), \qquad \mathbf{x} \in G, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

непрерывно дифференцируемых на области G n-мерного пространства.

По определению *система* (1) *зависима на* G, если по крайней мере одна из функций, например y_m, выражается через остальные на G при помощи равенства

$$y_m = \Phi(y_1, \ldots, y_{m-1}), \tag{2}$$

где Φ — некоторая непрерывно диффенцируемая функция от $y_1, \ldots, y_{m-1}$, т. е. (2) есть тождество относительно $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ на G, если в нем положить $y_j = f_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, m$. В случае (2) будем еще говорить, что *функция* y_m *зависима от функций* $y_1, \ldots, y_{m-1}$ *на* G.

Теорема 1. *Если система* (1) *зависима на* G, *то все определители* m*-го порядка, порождаемые матрицей*

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

тождественно равны нулю на G.

Действительно, пусть, например, y_m зависит от $y_1, \ldots, y_{m-1}$ при помощи равенства (2). Тогда

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \qquad j = 1, \ldots, n, \quad \text{на} \quad G.$$

Поэтому определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{на} \quad G,$$

потому что если помножить его первые $(m-1)$ строки соответственно на $\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}$, $k = 1, \ldots, m-1$, и вычесть полученные строки из m-й строки, то последняя будет состоять из нулей. Аналогично рассуждая, получим, что и любой другой определитель m-го порядка, порождаемай матрицей (3), тождественно равен нулю на G.

Конечно, из доказанной теоремы следует, что если хотя бы один определитель порядка $m \leqslant n$ отличен от нуля в некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, то система (1) независима на Ω.

Глава 9

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА *)

§ 9.1. Вступление

Понятие определенного интеграла было введено в § 1.7. Читателю, возможно, следует возобновить в памяти то, что говорилось там. Эта глава начинается с формального определения определенного интеграла по Риману, изучаются его свойства и выясняются условия, которым должна удовлетворять функция, чтобы она была интегрируемой; даются также дальнейшие приложения определенного интеграла, излагается теория несобственных интегралов. Уже сейчас подчеркнем, что определенный интеграл в узком (собственном) смысле, требующий для своего определения одного предельного перехода, имеет смысл, как будет видно ниже, только для конечного отрезка и притом для ограниченных функций, непрерывных и некоторых разрывных. Для неограниченных функций риманов интеграл заведомо не существует. Однако можно ввести понятие несобственного интеграла по Риману, требующее для своего определения двойного предельнего перехода. С его помощью корректно определяется площадь фигуры с границей, не слишком быстро растущей в бесконечность.

Другой несобственный интеграл определяется для функций, заданных на всей действительной оси. С его помощью можно вычислить работу силы, действующей на неограниченном интервале.

Зададим на конечном отрезке $[a, b]$ функцию f. Отрезок $[a, b]$ разобьем на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

и будем говорить, что произведено *разбиение* R (отрезка $[a, b]$). На каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения выберем по произвольной точке ξ_i ($\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$) и составим сумму

$$S_n = S_R = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

Ее называют *интегральной суммой* (Римана) функции f на отрезке $[a, b]$, соответствующей разбиению R. Интегральная сумма определена неоднозначно, потому что зависит от выбора $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

*) Б. Ф. Риман (1826–1866) — выдающийся немецкий математик.

Определенным интегралом (Римана) от f на $[a, b]$ называется предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx = I, \tag{1}$$

понимаемый в том смысле, что I есть такое число, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех разбиений R, у которых $\Delta x_i < \delta$, имеет место $|S_R - I| < \varepsilon$, независимо от выбора точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Другое эквивалентное определение предела (1) следующее: какова бы ни была последовательность разбиений $R^k = \{a = x_0^k < x_1^k < \ldots \ldots < x_{n_k}^k = b\}$ такая, что $\max_i \Delta x_i^k \to 0,\ k \to \infty$, при любом выборе для каждого k произвольных, но определенных точек $\xi_i^k \in [x_i^k, x_{i+1}^k]$, соответствующая интегральная сумма имеет предел

$$\lim_{k\to\infty} S_{R^k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(\xi_i^k)\Delta x_i^k = I$$

(не зависящий от выбора указанных R^k и ξ_i^k).

Эквивалентность этих двух пониманий предела (1) доказывается аналогично тому, как устанавливается эквивалентность пониманий предела функции на языке ε, δ и на языке последовательностей.

Факт существования интеграла можно еще выразить на языке критерия Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для разбиений R и R' с частичными отрезками длины, не большей δ, имеет место $|S_R - S_{R'}| < \varepsilon$.

§ 9.2. Ограниченность интегрируемой функции

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.*

В самом деле, пусть f неограничена на $[a, b]$ и

$$S_R = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j$$

— ее интегральная сумма, соответствующая произвольному разбиению R. Так как f неограничена на $[a, b]$, то она неограничена по крайней мере на одном из отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ разбиения, пусть на $[x_{j_0}, x_{j_0+1}]$. Имеем

$$S_R = f(\xi_{j_0})\Delta x_{j_0} + {\sum}' f(\xi_j)\Delta x_j = f(\xi_{j_0})\Delta x_{j_0} + A,$$

где сумма $\sum'$ распространена на все $j \neq j_0$. Мы считаем, что все входящие в нее ξ_j произвольны, но фиксированы. Отсюда

$$|S_R| \geqslant |f(\xi_{j_0})|\Delta x_{j_0} - |A|.$$

Зададим как угодно большее число N и составим неравенство

$$|f(\xi_{j_0})|\Delta x_{j_0} - |A| > N, \qquad |f(\xi_{j_0})| > \frac{|A| + N}{\Delta x_{j_0}}.$$

В силу неограниченности f на $[x_{j_0}, x_{j_0+1}]$ имеется такая точка $\xi_{j_0} \in \in [x_{j_0}, x_{j_0+1}]$, для которой оно выполняется.

Мы получили, что если f неограничена на $[a, b]$, то, каковы бы ни были число $N > 0$ и разбиение R, соответствующая R интегральная сумма может быть получена путем надлежащего выбора точек ξ_j большей по абсолютной величине, чем N. Следовательно, f не интегрируема на $[a, b]$.

В дальнейшем будут рассматриваться только ограниченные функции.

§ 9.3. Суммы Дарбу *)

Пусть на $[a, b]$ задана ограниченная функция f (вообще, разрывная), и пусть $R = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — произвольное разбиение $[a, b]$. Положим $m_j = \inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$, $M_j = \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$. По определению чи́сла

$$\underline{S}_R = \sum_{j=0}^{n-1} m_j \Delta x_j, \qquad \overline{S}_R = \sum_{j=0}^{n-1} M_j \Delta x_j$$

называются соответственно *нижней* и *верхней интегральными суммами Дарбу* f, соответствующими разбиению R. Это вполне определенные числа, зависящие от f и R.

Очевидно, что $\underline{S}_R \leqslant \overline{S}_R$.

Пусть R_1, R_2, R_3 — разбиения $[a, b]$. Если все точки R_1 принадлежат R_2, то будем писать $R_1 \subset R_2$ и говорить, что R_2 есть продолжение R_1. Если множество точек, из которых состоит R_3, есть теоретико-множественная сумма множеств точек, из которых состоят R_1 и R_2, то будем писать $R_3 = R_1 + R_2$.

Если $R \subset R'$, то

$$\underline{S}_R \leqslant \underline{S}_{R'} \leqslant \overline{S}_{R'} \leqslant \overline{S}_R. \tag{1}$$

В самом деле, если R' получается из R добавлением только одной точки c в частичном отрезке $[x_j, x_{j+1}]$, то слагаемое $M_i \Delta x_i$ заменится на сумму $M_i' \Delta x_i' + M_i'' \Delta x_i''$, где $\Delta x_i' = c - x_i$, $\Delta x_i'' = x_{i+1} - c$, $M_i' = = \sup_{x \in [x_i, c]} f$, $M_i'' = \sup_{x \in [c, x_{i+1}]} f$.

Но $M_i' \leqslant M_i$, $M_i'' \leqslant M_i$, $\Delta x_i = \Delta x_i' + \Delta x_i''$, поэтому

$$M_i' \Delta x_i' + M_i'' \Delta x_i'' \leqslant M_i \big(\Delta x_i' + \Delta x_i''\big) = M \Delta x_i,$$

*) Г. Дарбу (1842–1917) — французский математик.

и, следовательно, $\overline{S}_{R'} \leqslant \overline{S}_R$. Аналогично получим $\underline{S}_R \leqslant \underline{S}_{R'}$. Эти неравенства только усугубляются при дальнейшем добавлении к R точек c.

Каковы бы ни были разбиения R_1, R_2, имеет место $\underline{S}_{R_1} \leqslant \overline{S}_{R_2}$, потому что $\underline{S}_{R_1} \leqslant \underline{S}_{R_1+R_2} \leqslant \overline{S}_{R_1+R_2} \leqslant \overline{S}_{R_2}$.

Зафиксируем R_1, и пусть R произвольно; тогда

$$\underline{S}_{R_1} \leqslant \overline{S}_R, \qquad \underline{S}_{R_1} \leqslant \inf_R \overline{S}_R = \overline{I}.$$

Число $\overline{I} = \inf_R \overline{S}_R$ называется *верхним интегралом функции* f на $[a, b]$. Мы доказали его существование и тот факт, что для любого R (теперь мы заменяем R_1 на R) имеет место

$$\underline{S}_R \leqslant \overline{I}.$$

Но тогда существует точная верхняя грань

$$\underline{I} = \sup_R \underline{S}_R \leqslant \overline{I},$$

называемая *нижним интегралом функции* f на $[a, b]$. Итак, доказаны существование нижнего ($\underline{I}$) и верхнего ($\overline{I}$) интегралов f на $[a, b]$ и неравенство $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Лемма 1. *Если E_1, E_2 — множества чисел, то*

$$\sup_{\substack{x \in E_1 \\ y \in E_2}} (x + y) = \sup_{x \in E_1} x + \sup_{y \in E_2} y.$$

Доказательство предоставляем читателю.

§ 9.4. Основная теорема

В § 9.3 доказано, что для ограниченной на $[a, b]$ функции f

$$\underline{S}_R \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}_R. \tag{1}$$

Мы знаем также, что для любого разбиения R

$$\underline{S}_R \leqslant S_R \leqslant \overline{S}_R, \tag{2}$$

где

$$S_R = \sum_R f(\xi_i) \Delta x_i \tag{3}$$

— интегральная сумма f на $[a, b]$, соответствующая разбиению R.

Положим $\delta_R = \max_i |\Delta x_i|$, т. е. δ_R есть максимум среди длин частиц разбиения R.

Теорема 1. *Для существования интеграла от ограниченной функции f на $[a, b]$ необходимо и достаточно условие*

$$\lim_{\delta_R \to 0} (\overline{S}_R - \underline{S}_R) = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Из (1) и (4) следует, что

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} \leqslant \overline{S}_R - \underline{S}_R \to 0, \quad \delta_R \to 0,$$

и так как числа $\underline{I}$ и $\overline{I}$ не зависят от R, то

$$\underline{I} = \overline{I} = I, \tag{5}$$

и мы получили (см. (1), (2)) две системы неравенств

$$\underline{S}_R < I \leqslant \overline{S}_R, \quad \underline{S}_R \leqslant S_R \leqslant \overline{S}_R.$$

Из них следует:

$$|I - S_R| \leqslant \overline{S}_R - \underline{S}_R \to 0, \quad \delta_R \to 0,$$

и мы доказали

$$\lim_{\delta_R \to 0} \sum_R f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\delta_R \to 0} S_R = I, \tag{6}$$

т. е. существование интеграла от f на $[a, b]$.

Обратно, пусть существует интеграл от f на $[a, b]$, т. е. существует предел (6), поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$I - \varepsilon/2 < S_R < I + \varepsilon/2 \tag{7}$$

(для всех R с $\delta_R < \delta$).

Отметим, что нижняя и верхняя грани S_R по всем точкам $\xi_i \in$ $\in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, равны соответственно (см. лемму 1 из §9.3)

$$\inf_{\xi_i} S_R = \underline{S}_R, \quad \sup_{\xi_i} S_R = \overline{S}_R,$$

поэтому из (7) следует $I - \varepsilon/2 \leqslant \underline{S}_R \leqslant \overline{S}_R \leqslant I + \varepsilon/2$, откуда

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon, \quad \delta_R < \delta.$$

Этим доказано, что условие (4) является необходимым для существования интеграла $\int_a^b f\,dx$.

Однако условие (4) можно заменить более простым условием, как показывает следующая теорема.

Теорема 2. *Условие* (4) *эквивалентно следующему: для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется разбиение* R_* *такое, что*

$$\overline{S}_{R_*} - \underline{S}_{R_*} < \varepsilon. \tag{8}$$

Доказательство. Из (4) следует (8) непосредственно: если верно (4), то в качестве R_* можно взять любое разбиение с $\delta_{R_*} < \delta$.

Докажем теперь, что из (8) следует (4). Это самая нетривиальная часть теории, утверждающая, что если для любого $\varepsilon > 0$ найдется зависящее от него разбиение $R_* = \{a = x_0^* < x_1^* < \ldots < x_n^* = b\}$, для которого $\overline{S}_{R_*} - \underline{S}_{R_*} < \varepsilon$, то также найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений R с $\Delta x_i < \delta$ выполняется неравенство $\overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$.

Именно, в качестве δ возьмем число, удовлетворяющее неравенствам $2\delta < x_{i+1}^* - x_i^*$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $4n\delta K < \varepsilon$, где $K = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Тогда имеем (пишем M_i, m_i, Δx_i без индексов)

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sum{}'(M-m)\Delta x + \sum{}''(M-m)\Delta x,$$

где сумма $\sum'$ распространена на все (замкнутые) отрезки разбиения R, каждый из которых содержит в себе одну из точек R_*, а $\sum''$ — на все остальные отрезки R.

В сумму $\sum'$ входит не более чем $2n$ слагаемых — один отрезок покрывает точку a, другой — точку b, и каждая из точек $x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*$ покрывается одним или двумя отрезками. Имеем (ведь $M, m \leqslant K$)

$$\sum{}'(M-m)\Delta x \leqslant 2K\delta\, 2n < \varepsilon.$$

Сумму $\sum''$ запишем в виде кратной суммы: $\sum'' = \sum_i \sum^i$, где $\sum^i$ обозначает сумму слагаемых $\sum''$, соответствующих отрезкам R, каждый из которых попал в один и тот же интервал (x_i^*, x_{i+1}^*) старого разбиения R_*.

Имеем

$$\sum{}''(M-m)\Delta x = \sum_i \sum{}^i (M-m)\Delta x \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*) \sum{}^i \Delta x \leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^* < \varepsilon.$$

Поэтому $\overline{S}_R - \underline{S}_R < 2\varepsilon$ для всех разбиений R, для которых $\Delta x < \delta$, т. е. имеет место (4).

Из теорем 1 и 2 следует

Теорема 3 (основная). *Для того чтобы существовал определенный интеграл от ограниченной функции на отрезке* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлось разбиение* R_* *отрезка* $[a, b]$ *такое, чтобы*

$$\overline{S}_{R_*} - \underline{S}_{R_*} < \varepsilon. \tag{9}$$

З а м е ч а н и е 1. Неравенство (9) дает сравнительно простой критерий существования интеграла для ограниченной на отрезке функции.

Мы им будем пользоваться при обосновании свойств определенных интегралов.

Т е о р е м а 4. *Для существования определенного интеграла от ограниченной на* $[a, b]$ *функции необходимо и достаточно, чтобы*

$$\underline{I} = \overline{I}. \tag{10}$$

В самом деле, из (4) и (1) следует (10), а из (10) для любого $\varepsilon > 0$ следует существование разбиений $R_1, R_2, R_* = R_1 + R_2$, для которых

$$I - \varepsilon/2 < \underline{S}_{R_1} \leqslant \underline{S}_{R_*} \leqslant \overline{S}_{R_*} \leqslant \overline{S}_{R_2} < I + \varepsilon/2,$$

откуда получим (9) и, следовательно, (4).

П р и м е р 1. Для функции (Дирихле) f, равной 1 в рациональных точках отрезка $[0, 1]$ и 0 в иррациональных, при любом разбиении R отрезка $[0, 1]$ верхняя интегральная сумма $\overline{S}_R = 1$, а нижняя $\underline{S}_R = 0$. Таким образом, $\underline{I} = 0 < 1 = \overline{I}$, и функция Дирихле ограничена, но не интегрируема.

§ 9.5. Теоремы о существовании интеграла от непрерывной и монотонной функции на $[a, b]$

Т е о р е м а 1. *Если функция* f *непрерывна на* $[a, b]$, *то она интегрируема на* $[a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f непрерывна на $[a, b]$; тогда для разбиения R, у которого частичные отрезки $\Delta x_j < \delta$, имеет место ($\xi_j, \eta_j \in [x_j, x_{j+1}]$)

$$\sum_{j=0}^{n-1} \big(f(\xi_j) - f(\eta_j)\big)\, \Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \omega(\delta) \Delta x_j = \omega(\delta)(b - a),$$

где $\omega(\delta) = \sup\limits_{\substack{x', x'' \in [a,b] \\ |x' - x''| < \delta}} |f(x') - f(x'')|$ есть модуль непрерывности f на $[a, b]$.

Поэтому

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sup_{\xi_j, \eta_j} \sum_{j=0}^{n-1} \big(f(\xi_j) - f(\eta_j)\big)\, \Delta x_j \leqslant \omega(\delta)(b - a).$$

Но, как мы знаем, для непрерывной на замкнутом конечном отрезке $[a, b]$ функции $\omega(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$.

В силу основной теоремы интеграл f на $[a, b]$ существует.

Теорема 2. *Функция, определенная на отрезке $[a,b]$ и монотонная на нем, интегрируема на нем.*

Пусть для определенности f не убывает; тогда для произвольного разбиения R имеем $M_j = f(x_{j+1}),\ m_j = f(x_j)$. Поэтому при $\Delta x_j \leqslant \delta$

$$\sum_{j=0}^{n-1}(M_j - m_j)\,\Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1}\bigl(f(x_{j+1}) - f(x_j)\bigr)\,\Delta x_j \leqslant$$
$$\leqslant \delta \sum_{j=0}^{n-1}\bigl(f(x_{j+1}) - f(x_j)\bigr) = \delta\bigl(f(b) - f(a)\bigr) < \varepsilon,$$

если δ достаточно мало́, и на основании теоремы 3 получим, что f интегрируема на $[a,b]$.

§ 9.6. Аддитивные и однородные свойства интеграла

Теорема 1. *Если f интегрируема на $[a,b]$ и $a < c < b$, то она также интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$, и наоборот. При этом*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. В силу основной теоремы существование интеграла от f на $[a,b]$ влечет для любого ε существование разбиения R отрезка $[a,b]$, для которого выполняется неравенство $\overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$. Будем считать, что R содержит в себе точку c, ведь добавление c к R сохраняет указанное неравенство. Разбиение R индуцирует на $[a,c]$ и $[c,b]$ разбиения R' и R'' $(R = R' + R'')$, для которых очевидно

$$\begin{gathered}\varepsilon > \overline{S}_R - \underline{S}_R = \bigl(\overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}\bigr) + \bigl(\overline{S}_{R''} - \underline{S}_{R''}\bigr),\\ \varepsilon > \overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}, \qquad \varepsilon > \overline{S}_{R''} - \underline{S}_{R''}.\end{gathered} \tag{2}$$

Отсюда в силу основной теоремы функция f интегрируема на $[a,c]$ и на $[c,b]$.

Взяв теперь произвольные последовательности $\{R_k'\}$ и $\{R_k''\}$ разбиений соответственно отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ со стремящимися к нулю максимальными частичными отрезками и полагая $R_k' + R_k'' = R_k$, получим

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_{R_k''} + \lim_{k\to\infty} R_{R_k''} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} S_{R_k} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Мы определили интеграл от f на $[a,b]$, где $a<b$. Но полезно расширить это определение, считая в случае $a>b$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

При таком расширенном понимании символа $\int_a^b$ равенство (1), как нетрудно проверить, сохраняется для любых a, b, c, если только существует интеграл на наибольшем среди отрезков $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$.

Мы считаем здесь, что $[a,b]$ — отрезок, соединяющий точки a и b, и даже называем отрезком $[a,a]$ точку a.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$, $\varphi(x)$ — интегрируемые на $[a,b]$ функции и C — постоянная; тогда функции:* 1) $f(x)\pm\varphi(x)$, 2) $Cf(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f(x)\varphi(x)$, 5) $\frac{1}{f(x)}$, *где* $|f(x)|>d>0$ *на* $[a,b]$, *— суть интегрируемые функции. При этом*

$$\int_a^b (f(x)\pm\varphi(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3'}$$

Берем произвольное разбиение $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Тогда

$$\lim_{\max\Delta x_j\to 0}\sum_j \big(f(\xi_j)\pm\varphi(\xi_j)\big)\,\Delta x_j = \lim\sum_j f(\xi_j)\,\Delta x_j \pm$$

$$\pm\lim\sum_j \varphi(\xi_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

потому что по условию интегралы от $f(x)$ и $\varphi(x)$ существуют. Таким образом, предел в левой части этих соотношений существует и равен правой части. Но это значит, что имеет место (3).

Подобным образом

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = \lim_{\max\Delta x_j\to 0}\sum_j Cf(\xi_j)\,\Delta x_j =$$

$$= C\lim_{\max\Delta x_j\to 0}\sum_j f(\xi_j)\Delta x_j = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

Мы доказали 1), 2), (3) и (3′).

Будем обозначать:

$$M_f = \sup_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f, \qquad m_f = \inf_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f.$$

Будем считать, что $K_f = \sup_{x\in[a,b]}|f|$. Имеем для произвольных $\xi, \eta \in \in [x_j, x_{j+1}]$

$$|f(\xi)| - |f(\eta)| \leqslant |f(\xi) - f(\eta)| \leqslant M_f - m_f,$$

$$f(\xi)\varphi(\xi) - f(\eta)\varphi(\eta) \leqslant |f(\xi)|\,|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)| + \\ + |\varphi(\eta)|\,|f(\xi) - f(\eta)| \leqslant K_f(M_\varphi - m_\varphi) + K_\varphi(M_f - m_f),$$

$$\frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{f(\eta)} = \frac{f(\eta) - f(\xi)}{f(\xi)f(\eta)} \leqslant \frac{1}{d^2}\,(M_f - m_f).$$

Взяв верхние грани левых частей полученных неравенств по $\xi, \eta \in \in [x_j, x_{j+1}]$, умножив их на Δx_j и просуммировав по j, получим

$$\sum (M_{|f|} - m_{|f|})\,\Delta x \leqslant \sum (M_f - m_f)\,\Delta x, \tag{4}$$

$$\sum (M_{f\varphi} - m_{f\varphi})\,\Delta x \leqslant \\ \leqslant K_f \sum (M_\varphi - m_\varphi)\,\Delta x + K_\varphi \sum (M_f - m_f)\,\Delta x, \tag{5}$$

$$\sum (M_{1/f} - m_{1/f})\,\Delta x \leqslant \frac{1}{d^2} \sum (M_f - m_f)\,\Delta x \tag{6}$$

(мы опустили j у Δx_j). Но вследствие интегрируемости f и φ правые части (4)–(6) при $\Delta x < \delta$, где δ достаточно мало, можно сделать как угодно малыми, но тогда и левые. В случае (5) найдем для данного ε разбиения R_1, R_2, для которых

$$\overline{S}_{R_1}(f) - \underline{S}_{R_1}(f) < \varepsilon, \qquad \overline{S}_{R_2}(\varphi) - \underline{S}_{R_2}(\varphi) < \varepsilon.$$

Эти неравенства останутся верными, если заменить R_1, R_2 на $R = R_1 + R_2$.

Заметим, что из интегрируемости $|f(x)|$ не следует интегрируемость $f(x)$, как это легко видеть на примере функции, равной 1 в рациональных точках $[a, b]$ и -1 в иррациональных.

§ 9.7. Неравенства и теорема о среднем

Т е о р е м а 1. *Если f и φ интегрируемы и удовлетворяют неравенству $f(x) \leqslant \varphi(x)$ на $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx. \tag{1}$$

Существование этих интегралов уже предположено и надо доказать только само неравенство. Имеем, очевидно, для любого разбиения R

$$\sum f(\xi_j)\Delta x_j \leqslant \sum \varphi(\xi_j)\Delta x_j.$$

Переходя к пределу при $\max \Delta x_j \to 0$, получим (1).

Теорема 2. *Если f интегрируема на $[a,b]$, то*

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dx \leqslant K(b-a), \tag{2}$$

где $K = \sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

Имеем $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. Поэтому по предыдущей теореме $-\int_a^b |f|\,dx = \int_a^b(-|f|)\,dx \leqslant \int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b |f|\,dx$, откуда следует первое неравенство (2). Далее, $|f| \leqslant K$, поэтому $\int_a^b |f|\,dx \leqslant \int_a^b K\,dx = K(b-a)$, и мы получили второе неравенство (2).

Теорема 3 (о среднем). *Если f и φ интегрируемы на $[a,b]$ и $\varphi(x) \geqslant 0$, то*

$$\int_a^b f\varphi\,dx = \Lambda\int_a^b \varphi\,dx, \tag{3}$$

где $m \leqslant \Lambda \leqslant M$, $m = \inf_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, $M = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

Действительно, в силу того, что $\varphi(x) \geqslant 0$,

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x). \tag{4}$$

Интегрируя эти неравенства, получим

$$m\int_a^b \varphi\,dx \leqslant \int_a^b f\varphi\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi\,dx. \tag{5}$$

Если $\int_a^b \varphi\,dx = 0$, то второй интеграл в этих соотношениях также равен нулю и равенство (3) очевидно; если же $\int_a^b \varphi\,dx > 0$, то из (5) следует $m \leqslant \int_a^b f\varphi\,dx/\int_a^b \varphi\,dx \leqslant M$, т.е. второй член в этих соотношениях равен числу Λ, удовлетворяющему неравенствам $m \leqslant \Lambda \leqslant M$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если в этой теореме f непрерывна на $[a,b]$, то найдутся точки $x_1, x_2 \in [a,b]$ такие, что $f(x_2) = M$, $f(x_1) = m$, и точка $\xi \in [x_1, x_2]$ такая, что $f(\xi) = \Lambda$, поэтому в случае непрерывной на $[a,b]$ функции f равенство (3) можно записать в виде*

$$\int_a^b f\varphi\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi\,dx, \qquad a \leqslant \xi \leqslant b. \tag{6}$$

Теорема 4. *Если f — интегрируемая неотрицательная на $[a, b]$ функция такая, что в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ ее непрерывности $f(x_0) > 0$, то*

$$\int_a^b f\,dx > 0.$$

В самом деле, из условия теоремы следует, что существуют число $\lambda > 0$ и отрезок $\sigma \subset [a, b]$, содержащий в себе x_0, такие, что $f(x) \geqslant \lambda$ на σ. Пусть $\delta = \overline{[a, b] - \sigma}$ — множество (состоящее из одного или двух отрезков). Тогда

$$\int_a^b f\,dx = \int_\sigma f\,dx + \int_\delta f\,dx \geqslant \int_\sigma f\,dx \geqslant \lambda|\sigma| > 0,$$

где $|\sigma|$ — длина σ.

Следствие 2. *Если в теореме* 3 f *и* φ *непрерывны на* $[a, b]$ *и* $\varphi(x) > 0$ *на* $[a, b]$, *то в равенстве* (6) $a < \xi < b$.

В самом деле, пусть $\xi = b$ и для любых $\xi < b$ равенство (6) не выполняется; тогда функция $f(b) - f(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$, для определенности положительный. Тогда было бы $\int_a^b \big(f(b) - f(x)\big)\varphi(x)\,dx > 0$, что противоречило бы теореме 4, ведь здесь под интегралом стоит положительная на $[a, b]$ функция.

§ 9.8. Интеграл как функция верхнего предела. Теорема Ньютона–Лейбница

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана интегрируемая функция f. Начнем с того, что отметим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du,$$

т. е. не имеет никакого значения, какая буква (x или u) стоит под знаком f в определенном интеграле по отрезку $[a, b]$.

Зададим произвольное значение $x \in [a, b]$ и определим новую функцию $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Она определена для всех значений $x \in [a, b]$, потому что мы знаем, что если существует интеграл от f на $[a, b]$, то существует также интеграл от f на $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$. Напомним, что мы считаем по определению

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0. \tag{1}$$

Заметим, что

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Покажем, что F *непрерывна* на отрезке $[a, b]$. В самом деле, пусть $x, x + h \in [a, b]$; тогда

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

и если $K = \sup |f(t)|$, $a \leqslant t \leqslant b$, то

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant \left| \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \leqslant K|h| \to 0, \qquad h \to 0.$$

Таким образом, F непрерывна на $[a, b]$ независимо от того, имеет или не имеет f разрывы; важно, что f интегрируема на $[a, b]$.

На рис. 9.1 изображен график f. Площадь переменной фигуры $aABx$ равна $F(x)$. Ее приращение $F(x + h) - F(x)$ равно площади фигуры $xBC(x + h)$, которая в силу ограниченности f, очевидно, стремится к нулю при $h \to 0$ независимо от того, будет ли x точкой непрерывности или разрыва f, например точкой $x = d$.

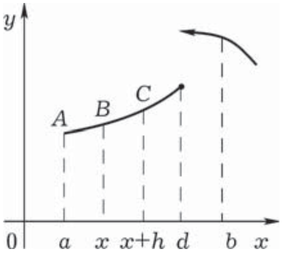

Рис. 9.1

Пусть теперь *функция f не только интегрируема на $[a, b]$, но непрерывна в точке $x \in [a, b]$*. Докажем, что *тогда F имеет в этой точке производную, равную*

$$F'(x) = f(x). \tag{2}$$

В самом деле, для указанной точки x (пояснения ниже)

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(x) + \eta(t)\big)\,dt =$$
$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \eta(t)\,dt = f(x) + o(1), \qquad h \to 0. \tag{3}$$

Мы положили $f(t) = f(x) + \eta(t)$, а так как $f(x)$ постоянная относительно t, то $\int_x^{x+h} f(x)\,dt = f(x)h$. Далее, в силу непрерывности f в точке x для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что $|\eta(t)| < \varepsilon$ для $|x - t| < \delta$. Поэтому

$$\left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \eta(t)\,dt \right| \leqslant \frac{1}{|h|}\,|h|\,\varepsilon = \varepsilon \quad \text{для} \quad |h| < \delta,$$

что доказывает, что левая часть этого неравенства есть $o(1)$ при $h \to 0$.

Переход к пределу в (3) при $h \to 0$ показывает существование производной от F в точке x и справедливость равенства (2). При $x = a, b$ речь здесь идет соответственно о правой и левой производной.

Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то на основании доказанного выше соответствующая ей функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{4}$$

имеет производную, равную $f(x)$: $F'(x) = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Следовательно, функция $F(x)$ есть первообразная для f на $[a,b]$.

Мы доказали, что *произвольная непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция* f *имеет на этом отрезке первообразную, определенную равенством* (4). *Этим доказано существование первообразной для всякой непрерывной на отрезке функции* (см. § 8.1).

Пусть теперь $\Phi(x)$ есть произвольная первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$. Мы знаем, что $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная. Полагая в этом равенстве $x = a$ и учитывая, что $F(a) = 0$, получим $\Phi(a) = C$.

Таким образом, $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$. Но

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b).$$

Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b}. \tag{5}$$

Мы доказали важную теорему:

Теорема 1 (Ньютона–Лейбница). *Если* f *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и* Φ — *ее любая первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство* (5).

Из (5) по теореме Лагранжа следует:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \qquad a < \xi < b,$$

где $\xi \in (a,b)$ — некоторая точка (см. также § 9.7, (6) и следствие 2).

Теорему 1 можно обобщить.

Теорема 2. *Для непрерывной кусочно гладкой на* $[a,b]$ *функции* F *имеет место*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть (см. § 5.15) $a = x_0 < x_1 < \ldots \ldots < x_n = b$, где $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — точки разрыва F' (первого рода). Тогда (пояснения ниже)

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=0}^{n-1} \big(F(x_{j+1}) - F(x_j)\big) = \\ = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F'(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx. \qquad (7)$$

Второе равенство в (7) верно, потому что для любого j

$$F(x_{j+1}) - F(x_j) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} F'(x)\,dx. \qquad (8)$$

Ведь производная $F'(x)$ существует и непрерывна на интервале (x_j, x_{j+1}). Кроме того, существуют пределы $F'(x_j + 0)$, $F'(x_{j+1} - 0)$, которые равны соответственно правой и левой производной от F в точках $x = a, b$.

Из интегрируемости F' на каждом из отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ следует ее интегрируемость на $[a, b]$ и последнее равенство (7).

Замечание. Функция F' не определена в точках $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \in [a, b]$, но это не мешает ей быть интегрируемой на $[a, b]$ (см. подробнее по этому поводу § 9.10).

Теорема 3. *Для непрерывных кусочно гладких на $[a, b]$ функций $u(x)$, $v(x)$ имеет место формула интегрирования по частям*:

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx. \qquad (9)$$

Ведь произведение $u(x)v(x)$ есть также непрерывная кусочно гладкая на $[a, b]$ функция, имеющая, таким образом, всюду на $[a, b]$, за исключением конечного числа точек, производную, вычисляемую по формуле

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Если учесть еще, что функции $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то в силу предыдущей теоремы

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

откуда следует (9).

Теорема 4 (о замене переменной). *Справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \tag{10}$$

где функция $x = \varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на* $[c, d]$, $a = \varphi(c)$, $b = \varphi(d)$ *и значения* $\varphi(t)$, $c \leqslant t \leqslant d$, *принадлежат отрезку* $[A, B]$, *на котором* $f(x)$ *непрерывна.* (*Таким образом,* $[a, b] \subset [A, B]$.)

В самом деле, пусть $F(x)$ и $\Phi(t)$ — соответственно первообразные функции $f(x)$ и $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда (см. § 8.1, (2)) имеет место тождество $\Phi(t) = F(\varphi(t)) + C$, $c \leqslant t \leqslant d$, где C — некоторая постоянная. Теперь (10) следует из очевидного равенства

$$F(b) - F(a) = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \Phi(d) - \Phi(c)$$

на основании теоремы Ньютона–Лейбница.

Пример 1. $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2$ в силу теоремы Ньютона–Лейбница: $\sin x$ непрерывна на $[0, \pi]$, $-\cos x$ — ее первообразная.

Пример 2.

$$\int_a^b \operatorname{sign} t\,dt = |t|\Big|_a^b = |b| - |a|, \qquad \int_0^x \operatorname{sign} t\,dt = |x| \tag{11}$$

в силу теоремы 2, потому что $|x|$ есть непрерывная кусочно гладкая (или гладкая, если $ab \geqslant 0$) функция на отрезке $[a, b]$, а $\operatorname{sign} x$ — ее производная, существующая всюду на $[a, b]$, за исключением точки $x = 0$.

§ 9.9. Вторая теорема о среднем

Теорема. *Если* φ *— неотрицательная неубывающая на отрезке* $[a, b]$ *функция, а* f *— интегрируемая на* $[a, b]$ *функция, то существует точка* $\xi \in [a, b]$ *такая, что*

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi(b) \int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Доказательство см. в 4-м издании этой книги, § 9.10.

§ 9.10. Видоизменение функции

Теорема. *Если функция* f *интегрируема на* $[a, b]$, *то после видоизменения ее в конечном числе точек отрезка* $[a, b]$ *она останется интегрируемой без изменения величины интеграла.*

Доказательство. Ясно, что видоизмененная функция

$$f_1(x) = f(x) + \varphi(x),$$

где φ равна нулю всюду на $[a,b]$, за исключением указанных в условии теоремы точек. Ясно также, что интеграл от φ на $[a,b]$ равен нулю. Поэтому f_1 интегрируема и

$$\int_a^b f_1\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b \varphi\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

До сих пор при исследовании функции f на интегрируемость мы предполагали, что f задана во всех точках $[a,b]$. Из доказанной теоремы мы видим, что интегрируемость f не зависит от того, какие значения принимает f на конечной системе точек отрезка $[a,b]$. Но раз так, то можно и не предполагать, что f задана на этих точках. В этом смысле мы будем говорить об интегрируемости ограниченной функции на $[a,b]$, заданной на самом деле на множестве, полученном выбрасыванием из $[a,b]$ конечного числа точек, например об интегрируемости $\sin(1/x)$ или $(\sin x)/x$ на $[0,1]$. Обе эти функции непрерывны и ограничены только на $(0,1]$, но говорят, что они интегрируемы на $[0,1]$.

§ 9.11. Несобственные интегралы

Зададим на конечном полуинтервале $[a,b)$ функцию f. Допустим, что она интегрируема на любом отрезке $[a,b']$, где $b'<b$, и неограничена в окрестности точки b. Тогда ее интеграл на $[a,b)$, или, что все равно, на $[a,b]$ в обычном смысле (Римана), не может существовать, потому что интегрируемая на $[a,b]$ по Риману функция необходимо ограничена. Однако может случиться, что существует предел $\lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)\,dx$. Если это так, то этот предел называют *несобственным интегралом от* f на отрезке $[a,b]$ и записывают в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)\,dx. \tag{1}$$

В таком случае говорят, что *интеграл* $\int_a^b f\,dx$ *сходится*. В противном случае говорят, что он *расходится* или *не существует как несобственный риманов интеграл.*

Допустим теперь, что функция f задана на луче $[a,\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b']$, где $a<b'<\infty$. Если существует предел

$$\lim_{b'\to\infty}\int_a^{b'} f(x)\,dx,$$

то он называется *несобственным интегралом от* f *на* $[a,\infty)$ и обозначается так:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b'\to\infty}\int_a^{b'} f(x)\,dx.$$

Условимся о следующей терминологии. Выражение

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

будем называть *интегралом* (*от* f) *с особенностью в точке* b, если выполняются следующие условия: если b — конечная точка, то функция f интегрируема на $[a,b']$ при любом b', удовлетворяющем неравенствам $a<b'<b$, и, кроме того, неограничена в окрестности точки b; если же $b=+\infty$, то про функцию f предполагается лишь то, что она интегрируема на $[a,b']$ при любом конечном $b'>a$.

Подобным образом определяется интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ с единственной особенностью в точке a. Теперь b — конечная точка. Если точка $a<b$ тоже конечна, то f в окрестности a неограничена и интегрируема на любом отрезке $[a',b]$, где $a<a'<b$. Если же $a=-\infty$, то функция f предполагается интегрируемой на $[a',b]$ для любого $a'<b$.

В дальнейшем мы будем для определенности рассматривать интеграл (2) с единственной особенностью в точке b, конечной или бесконечной. Все выводы по аналогии могут быть перенесены на случай интеграла с единственной особенностью в точке a.

Теорема 1. *Пусть задан интеграл* (2) *с единственной особенностью в точке* b. *Для его существования необходимо и достаточно выполнение условия* (*Коши*): *для всякого* $\varepsilon>0$ *существует* $b_0<b$ *такое, что*

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(t)\,dt\right|<\varepsilon, \tag{3}$$

каковы бы ни были b', b'', *удовлетворяющие неравенствам* $b_0<b'<$ $<b''<b$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \qquad a<x<b.$$

Существование интеграла (2) эквивалентно существованию предела $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$, что в свою очередь эквивалентно выполнению условия Коши: для любого $\varepsilon>0$ существует b_0, где $a<b_0<b$, так что выполняется неравенство $|F(b'')-F(b')|<\varepsilon$ для всех b' и b'', удовлетворяющих неравенствам $b_0<b'<b''<b$. Но

$$F(b'')-F(b')=\int_{b'}^{b''} f(t)\,dt,$$

и теорема доказана.

Пример 1. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$ — постоянное число, имеет, очевидно, единственную особенность в точке $x = 0$. Чтобы выяснить, сходится ли он, надо вычислить предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1,\\ \infty, & \alpha>1.\end{cases}$$

Таким образом, интеграл (4) сходится при $\alpha < 1$ и равен $(1-\alpha)^{-1}$ и расходится при $\alpha > 1$.

Если же $\alpha = 1$, то он расходится:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon = +\infty.$$

Пример 2. Интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{N\to\infty} x^{1-\alpha}\Big|_1^N =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha>1 \text{ (сходится)},\\ +\infty & \text{при } \alpha<1 \text{ (расходится)},\end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \ln N = +\infty \text{ (расходится)}.$$

Пусть снова задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

имеющий единственную особенность в точке b. Тогда интеграл

$$\int_c^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

где $a < c < b$, также имеет единственную особенность в точке b. Условие Коши существования интегралов (5) и (6) формулируется, очевидно, совершенно одинаково. Поэтому эти интегралы одновременно сходятся или одновременно расходятся. Кроме того, при $a < c < b$, очевидно, имеет место

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f\,dx = \lim_{b'\to b}\left(\int_a^c f\,dx + \int_c^{b'} f\,dx\right) =$$

$$= \int_a^c f\,dx + \lim_{b'\to b}\int_c^{b'} f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx, \tag{7}$$

где $\int_a^c$ — обычный риманов собственный интеграл, а интегралы $\int_a^b$ и $\int_c^b$ несобственные.

Отметим равенство

$$\int_a^b (Af + B\varphi)\,dx = \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} (Af + B\varphi)\,dx =$$
$$= A \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f\,dx + B \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} \varphi\,dx = A\int_a^b f\,dx + B\int_a^b \varphi\,dx, \qquad (8)$$

где A и B — постоянные. Его надо понимать в том смысле, что если существуют интегралы в правой части, то существует также интеграл в левой и имеет место равенство (8).

Говорят, что интеграл (5) (имеющий особенность в точке b) *сходится абсолютно*, если сходится интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty \qquad (9)$$

от абсолютного значения $|f(x)|$.

Абсолютно сходящийся интеграл сходится. В самом деле, из сходимости интеграла (9) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ на интервале (a, b), найдется точка b_0 такая, что если $b_0 < b' < b'' < b$, то

$$\varepsilon > \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \geqslant \left| \int_{b'}^{b''} f(x)\,dx \right|,$$

т. е. для интеграла (1) выполняется условие Коши. Так как

$$\left| \int_a^{b'} f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^{b'} |f(x)|\,dx,$$

то после перехода к пределу при $b' \to b$ для абсолютно сходящегося интеграла (5) получим

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (10)$$

Несобственный интеграл может сходиться и неабсолютно (см. далее примеры § 9.13, 9.14). Конечно, несобственный интеграл от неотрицательной функции если сходится, то абсолютно.

Отметим еще следующую очевидную теорему.

Т е о р е м а 2. *Если F непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет непрерывную на $[a, b)$ производную $F'(x)$, то*

$$F(b) - F(a) = \lim_{\substack{b'\to b\\ b'<b}} \bigl(F(b') - F(a)\bigr) = \lim_{\substack{b'\to b\\ b'<b}} \int_a^{b'} F'(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx,$$

где интеграл справа может быть собственным и несобственным.

Например,

$$\sqrt{x}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\,,$$

где особенность интеграла имеет место в левом конце отрезка $[0, 1]$.

§ 9.12. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Пусть задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

имеющий единственную особенность в точке b, и на промежутке $[a, b)$ интегрирования $f(x) \geqslant 0$.

Тогда, очевидно, функция

$$F(b') = \int_a^{b'} f(x)\,dx, \qquad a < b' < b,$$

от b' монотонно не убывает. Поэтому, если она ограничена, $F(b') \leqslant M$, $a < b' < b$, существует интеграл (1):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant M.$$

Если же F неограничена, то интеграл (1) расходится:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx = +\infty.$$

Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b)$, то пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \infty,$$

в зависимости от того, будет ли интеграл сходиться или расходиться.

Теорема 1. *Пусть интегралы*

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (1), (2)$$

имеют единственную особенность в точке b и на промежутке $[a, b)$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x). \qquad (3)$$

Тогда из сходимости интеграла (2) *следует сходимость интеграла* (1) *и имеет место неравенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

а из расходимости интеграла (1) *следует расходимость интеграла* (2).

Доказательство. Из (3) следует, что для $a < b' < b$

$$\int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{b'} \varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

Если теперь интеграл (2) сходится, то правая часть (4) ограничена числом, равным интегралу (2), но тогда ограничена и левая. И так как левая часть при возрастании b' монотонно не убывает, то она стремится к пределу (интегралу):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Обратно, из расходимости интеграла (1) следует, что предел левой части (4) при $b' \to \infty$ равен ∞, а следовательно, и предел правой равен ∞.

Теорема 2. *Пусть интегралы* (1) *и* (2) *имеют единственную особенность в точке* b, *подынтегральные функции положительны и существует предел*

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0. \tag{5}$$

Тогда эти интегралы одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Из (5) следует, что для положительного $\varepsilon < A$ можно указать такое $c \in [a, b)$, что

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < A + \varepsilon, \qquad c < x < b,$$

и так как $\varphi(x) > 0$, то

$$(A-\varepsilon)\varphi(x) < f(x) < (A+\varepsilon)\varphi(x), \qquad c < x < b. \tag{6}$$

Из сходимости интеграла $\int_a^b \varphi\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_c^b \varphi\,dx$ и сходимость интеграла $\int_c^b (A+\varepsilon)\varphi\,dx$. Но тогда по предыдущей теореме сходится также интеграл $\int_c^b f\,dx$, а вместе с ним интеграл

$\int_a^b f\,dx$. Наоборот, из сходимости $\int_a^b f\,dx$ следует сходимость $\int_c^b \varphi\,dx$ потому, что наряду с (5) имеет место равенство

$$\lim_{x\to b}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{1}{A}>0.$$

Пример 1. Значок $\sim$ между двумя интегралами означает,что эти интегралы в силу теоремы 2 одновременно сходятся или одновременно расходятся.

1) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\ln(1+\sqrt{x}\,)}\sim\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x}\,)}\sim\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}<\infty,\qquad x\to 0.$

2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x-\ln(1+x)}\sim\int_0^1\frac{dx}{x^2/2+o(x^2)}\sim\int_0^1\frac{dx}{x^2}=\infty,\qquad x\to 0.$

Интегралы 1), 2) имеют единственную особенность в точке $x=0$ (это отмечено выше символом $x\to 0$). В знаменателях под этими интегралами мы выделили главные степенные члены (см. § 4.10 и 5.11) и применили теорему 2. Интеграл 1) сходится, а интеграл 2) расходится.

3) $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha e^{-x\beta}\,dx=\int_1^\infty\Big(x^{\alpha+2}e^{-x\beta}\Big)\frac{1}{x^2}\,dx\leqslant K\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}<\infty,\quad \beta>0.$

Функция в скобках непрерывна на $[1,\infty]$ и стремится к нулю при $x\to\infty$, поэтому она ограничена на $[1,\infty)$ некоторой константой K. Таким образом, этот интеграл, имеющий единственную особенность в $x=\infty$, сходится.

§ 9.13. Интегрирование по частям

Пусть на луче $[a,\infty)$ заданы непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а ψ к тому же имеет непрерывную производную. Тогда, если обозначить через $\Phi(x)$ какую-либо первообразную от $\varphi(x)$, получим

$$\int_a^N\varphi(x)\psi(x)\,dx=\psi(N)\Phi(N)-\psi(a)\Phi(a)-\\ -\int_a^N\psi'(x)\Phi(x)\,dx,\qquad a<N<\infty. \tag{1}$$

Если существует несобственный интеграл

$$\int_a^\infty\psi'(x)\Phi(x)\,dx=A \tag{2}$$

и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty}\psi(x)\Phi(x)=B, \tag{3}$$

то существует несобственный интеграл

$$\int_a^\infty \varphi(x)\psi(x)\,dx = B - \psi(a)\Phi(a) - A. \tag{4}$$

Отметим некоторые частные достаточные признаки существования интеграла (2) и предела (3), а следовательно, и существования интеграла (4).

1) Если функция

$$|\Phi(x)| \leqslant M \tag{5}$$

ограничена,

$$\psi(x) \to 0, \qquad x \to \infty, \tag{6}$$

и

$$\int_a^\infty |\psi'(x)|\,dx < \infty, \tag{7}$$

то интеграл (2) и предел (3) существуют.

Действительно, тогда интеграл (2) сходится, даже абсолютно:

$$\int_a^\infty |\psi'(x)\Phi(x)|\,dx \leqslant M \int_a^\infty |\psi'(x)|\,dx < \infty,$$

и

$$|\psi(x)\Phi(x)| \leqslant M|\psi(x)| \to 0, \qquad x \to \infty.$$

Таким образом, в данном случае интеграл (4) сходится и $B = 0$.

2) *Признак Дирихле.* Этот признак заключается в том, что для функции Φ выполняется неравенство (5), что же касается функции ψ, то она предполагается убывающей на $[a, \infty)$, стремящейся к нулю при $x \to \infty$ и, таким образом, имеющей неположительную производную. Тогда условие (6) выполняется. Выполняется также и признак (7), потому что существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^N |\psi'(x)|\,dx = -\lim_{N\to\infty} \int_a^N \psi'(x)\,dx = \\ = \lim_{N\to\infty} \bigl(\psi(a) - \psi(N)\bigr) = \psi(a).$$

Таким образом, признак Дирихле есть частный случай признака 1).

П р и м е р 1. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{8}$$

имеет единственную особенность (в “точке” ∞). Надо иметь в виду, что функция $(\sin x)/x$ имеет устранимый разрыв в точке $x = 0$. Если ее положить равной 1 в этой точке, то она станет непрерывной. Интеграл (8) сходится потому, что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

сходится на основании признака Дирихле (функция $1/x$ монотонно убывает, стремится при $x \to \infty$ к нулю и имеет непрерывную производную, а функция $\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $(-\cos x)$). Однако интеграл (8) сходится не абсолютно:

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx \sim \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

§ 9.14. Несобственный интеграл и ряд

Рассмотрим интеграл с единственной особенностью в точке b

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Пусть $a = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b$, $b_k \to b$. Тогда можно определить ряд

$$\int_{b_0}^{b_1} f\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f\,dx + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx, \tag{2}$$

k-й член которого равен $u_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx$.

Теорема 1. *Если интеграл* (1) *сходится, то сходится также ряд* (2) *и имеет место равенство*

$$\int_a^b f\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx. \tag{3}$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{b_0}^{b_{n+1}} f\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

Если f неотрицательна, то сходимость ряда (2) влечет сходимость интеграла (1). В самом деле, пусть ряд сходится и имеет сумму, равную S. Для любого b', где $a < b' < b$, можно указать такое n_0, что $b_n > b'$ для $n > n_0$. Поэтому, учитывая, что $f(x) \geqslant 0$,

$$\int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^{b_n} f\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx \leqslant S,$$

т. е. интеграл в левой части ограничен и, следовательно, несобственный интеграл (1) существует. Но тогда, как доказано выше, справедливо равенство (3).

Если же функция f не сохраняет знак на $[a, b)$, то из сходимости ряда (2) вообще не следует сходимость интеграла. Например, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin x\, dx = \sum_{0}^{\infty} 0 = 0$$

сходится, интеграл же $\int_0^\infty \sin t\, dt$ расходится, потому что функция от x

$$\int_0^x \sin t\, dt = 1 - \cos x$$

не стремится к пределу при $x \to \infty$.

Теорема 2. *Если функция f непрерывна и не возрастает на $[0, \infty)$, то интеграл*

$$\int_0^\infty f(x)\, dx$$

и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots$$

одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Имеют место неравенства

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leqslant f(k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Суммируя их по k, получим

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(k) = \sum_{k=0}^{n} f(k+1) \leqslant \int_0^{n+1} f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k). \tag{4}$$

Отсюда, учитывая, что все члены в этих соотношениях при возрастании n монотонно не убывают, следует утверждение теоремы.

Из доказанной теоремы следует, что ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots \tag{5}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$, потому что функция $1/(1+x)^\alpha$ при $\alpha > 0$ непрерывна и монотонно убывает на $[0, \infty)$, а

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^\alpha} \begin{cases} < \infty, & \alpha > 1, \\ = \infty, & \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

В случае $\alpha \leqslant 0$ непосредственно видно, что ряд (5) расходится. При $\alpha = 1$ ряд (5) (расходящийся) называется *гармоническим рядом.*

Пример 1.

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \infty,$$

потому что

$$\frac{2}{k+1} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \leqslant \frac{2}{k}, \qquad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = 2, \tag{6}$$

а гармонический ряд (с членами $1/k$) расходится.

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha} + \sin x}\,dx, \qquad \alpha > 0. \tag{7}$$

Он имеет единственную особенность в ∞. При $\alpha > 1$ он абсолютно сходится:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{|\sin x|}{|x^{\alpha} + \sin x|}\,dx \leqslant \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} + 1} < \infty,$$

потому что $x^{\alpha} \sim x^{\alpha} - 1$, $x \to \infty$, а $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} < \infty$.

При $\alpha \leqslant 1$ интеграл (7) абсолютно не сходится потому, что

$$\int_{2}^{\infty} \frac{|\sin x|}{|x^{\alpha} + \sin x|}\,dx \geqslant \int_{2}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha} + 1}\,dx = \infty.$$

Последнее соотношение доказывается рассуждениями, подобными (6).

Но интеграл (7) все же для $1/2 < \alpha \leqslant 1$ сходится (не абсолютно). Действительно, применяя интегрирование по частям, получим

$$\int_{1}^{N} \frac{\sin x}{x^{\alpha} + \sin x}\,dx = -\cos x\,\frac{1}{x^{\alpha} + \sin x}\bigg|_{1}^{N} - \int_{1}^{N} \frac{\cos x\,(\alpha x^{\alpha-1} + \cos x)}{(x^{\alpha} + \sin x)^2}\,dx.$$

Первый член правой части при $\alpha > 0$ имеет при $N \to \infty$ конечный предел, второй член есть сумма интегралов

$$I'_N = -\int_{1}^{N} \frac{\cos^2 x}{(x^{\alpha} + \sin x)^2}\,dx, \qquad I''_N = -\alpha \int_{1}^{N} \frac{\cos x \cdot x^{\alpha-1}}{(x^{\alpha} + \sin x)^2}\,dx.$$

Но

$$\int_{2}^{\infty} \frac{|\cos x| x^{\alpha-1}}{(x^{\alpha} + \sin x)^2}\,dx \leqslant \int_{2}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\left(x^{\alpha} - 1\right)^2}\,dx < C \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} < \infty,$$

поэтому I''_N стремится к конечному пределу при $N \to \infty$ для любого $\alpha > 0$, и вопрос свелся к исследованию I'_N.

Интеграл $\int_\pi^\infty \frac{\cos^2 x}{(x^\alpha+\sin x)^2}\,dx$ при $\alpha > 0$ сходится одновременно с интегралом

$$\int_\pi^\infty \frac{\cos^2 x}{x^{2\alpha}}\,dx \tag{8}$$

(см. замечание 1 в конце § 9.13) в силу того, что $x^\alpha + \sin x \sim x^\alpha$, $x \to \infty$. А интеграл (8) одновременно сходится с интегралом

$$\int_\pi^\infty \frac{dx}{x^{2\alpha}} \begin{cases} < +\infty, & 1/2 < \alpha, \\ = +\infty, & 1/2 \geqslant \alpha \end{cases}$$

(см. предыдущую теорему).

Итак, предел I'_N при $N \to \infty$ существует только при $\alpha > 1/2$, поэтому и интеграл (7) сходится только при $\alpha > 1/2$.

§ 9.15. Несобственные интегралы с особенностями в нескольких точках

Пусть задан, пока формально, интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

где интервал (a, b) может быть конечным и бесконечным. Предположим, что интервал (a, b) можно разбить точками $a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$ $\ldots < c_{n-1} < c_n = b$ на конечное число частичных интервалов (c_k, c_{k+1}) таких, что каждый из интегралов

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dx, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

имеет только одну особенность на одном из концов (c_k, c_{k+1}).

Тогда если все несобственные интегралы (2) существуют (сходятся), то по определению считают существующим (сходящимся) и интеграл (1). При этом полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dx.$$

Если хотя бы один из интегралов (2) не сходится, то и интеграл (1) считается расходящимся (не существующим).

Аналогично, интеграл (1) называется *абсолютно сходящимся* тогда и только тогда, если все интегралы (2) абсолютно сходятся.

Интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ имеет единственную особенность в точке 0. Он не существует, потому что не существуют отдельно интегралы $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ и

$\int_0^1 \frac{dx}{x}$, т. е. не существуют отдельно пределы от $\int_{-1}^{-\varepsilon}$, $\int_{\varepsilon}^{1}$ при $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

Итак, несобственный интеграл по Риману от функции $1/x$ на отрезке $[-1, 1]$ не существует. Однако существует одно важное обобщение несобственного интеграла (в смысле *главного значения* — по Коши), в силу которого указанный интеграл понимается как предел

$$\text{P.V.} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left\{ \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right\} = 0.$$

Здесь P.V.— сокращенная запись выражения Principal Value (анг.) — главное значение (см. § 16.7, (5)).

§ 9.16. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

Пусть функция f имеет на некотором интервале, содержащем в себе точку a, непрерывную кусочно гладкую производную порядка $r-1$ включительно. Тогда на указанном интервале существует, за исключением конечного числа точек, производная $f^{(r)}(x)$, представляющая собой кусочно непрерывную функцию (см. § 5.15). Для любого значения x из этого интервала имеет место формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R(x), \tag{1}$$

$$R(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\, dt \qquad (0! = 1). \tag{2}$$

Действительно, последовательное интегрирование $R(x)$ по частям дает

$$\begin{aligned} R(x) = -\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!} (x-a)^{r-1} + \frac{1}{(r-2)!} \int_a^x (x-t)^{r-2} f^{(r-1)}(t)\, dt = \\ = -\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!} (x-a)^{r-1} - \frac{f^{(r-2)}(a)}{(r-2)!} (x-a)^{r-2} + \\ + \frac{1}{(r-3)!} \int_a^x (x-t)^{r-3} f^{(r-2)}(t)\, dt = \ldots \\ \ldots = -\sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + f(x). \end{aligned}$$

§ 9.17. Формулы Валлиса и Стирлинга *)

Формула Валлиса имеет вид

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m!\,)^2\, 2^{2m}}{(2m)!\,\sqrt{m}}\,. \tag{1}$$

Формула Стрилинга представляет собой равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}} = 1, \tag{2}$$

или, что все равно, асимптотическое равенство

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}, \qquad n \to \infty. \tag{3}$$

Доказательство формул (1), (2) см. в 4-м издании этой книги, § 9.18.

*) Д. Валлис (1616–1703) — английский математик. Д. Стирлинг (1692–1700) — шотландский математик.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ