С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1977

5.17.2
Н 64
УДК 517.5

Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Никольский С. М. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1977, 456 стр.

Основная направленность книги — изложение современного состояния теории вложения классов дифференцируемых функций, определенных на евклидовых пространствах различных размерностей. Читатель должен быть знаком с основами теории интеграла Лебега.

Это изложение проведено с большой полнотой, дано описание свойств различных функциональных пространств, их взаимоотношений, теорем вложения для них, возможности обращения этих теорем, аппроксимационных свойств этих пространств и представлений функций. Новое издание пополнено главой, посвященной весовым классам функций, заданных на областях с гладкой границей.

$Н \frac{20203-142}{053(02)-77} 44-77$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании исправлены замеченные недостатки. Некоторые из них были любезно сообщены мне Ю. А. Брудным, Я. С. Бугровым, В. И. Буренковым (редактором книги), К. И. Осколковым и Д. Данскиным (J. Danskin), который перевел эту книгу на английский язык для издательства Шпрингер. Я их благодарю.

Я дополнил это издание 10-й главой, посвященной весовым классам. Отобраны наиболее ходкие с точки зрения приложений теоремы вложения. Проверено, что с помощью этих теорем и общих соображений из теории гильбертовых пространств можно доказать существование решения первой краевой задачи для уравнения эллиптического типа с сильным вырождением на границе и узнать дифференциальные свойства решения вплоть до границы.

Основные результаты, о которых здесь идет речь, принадлежат А. А. Вашарину, Л. Д. Кудрявцеву, П. И. Лизоркину, С. М. Никольскому и С. В. Успенскому. Далеко не всегда они доказывались для областей с кривой границей. Авторы нередко ограничивались рассмотрением полупространства и формулировкой (не всегда полной) соответствующего результата для области с достаточно гладкой границей.

Мы здесь рассматриваем весовой класс $W^r_{p\alpha}(\Omega)$ функций (см. 10.1), заданных на ограниченной области с достаточно гладкой $(n-1)$-мерной границей. Как правило, соответствующее неравенство доказывается сначала для (одномерного) отрезка или прямоугольника, а затем оно переносится на общий случай одним и тем же методом, развитым автором.

ВВЕДЕНИЕ

В последние два десятилетия теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных, начало которой положил еще в тридцатых годах С. Л. Соболев, получила большое развитие. В настоящее время решение ряда основных вопросов в ней пришло к завершению и появляется необходимость в компактном их изложении. Лично я пришел к вопросам теории вложения в связи с давно интересовавшими меня идеями классической теории приближения функций полиномами, прежде всего тригонометрическими полиномами и их непериодическими аналогами — целыми функциями экспоненциального типа.

Эти идеи, которые мне пришлось соответствующим образом развить, послужили мне основой для построения теории вложений H-классов, где уже в вопросах о следах функций возникли не только прямые, но и полностью их обращающие обратные теоремы. Последние можно еще назвать теоремами о продолжении функций на пространство с принадлежащих к нему многообразий меньшего числа измерений. При этом был охвачен не только изотропный случай функций, имеющих дифференциальные свойства, одинаковые по разным направлениям, но также и анизотропный.

В дальнейшем О. В. Бесов построил аналогичную теорию вложения введенных им B-классов, тоже базируясь на методах теории приближения тригонометрическими полиномами или целыми функциями экспоненциального типа. B-классы замечательны тем, что они подобно H-классам являются, как мы говорим, замкнутыми в себе по отношению к теоремам вложения. Этим мы хотим сказать, что интересующие нас теоремы вложения (мы не будем уж здесь их формулировать) выражаются в терминах B-классов и при этом обладают в известном смысле свойствами транзитивности и обратимости в случае проблемы следов.

С. Л. Соболев доказал свои теоремы вложения для классов $W_p^l = W_p^l(\Omega)$ функций, имеющих на достаточно общей области Ω n-мерного пространства R_n интегрируемые в p-й степени $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ производные до порядка l включительно. Соболевские классы можно назвать дискретными классами, потому что параметр l, выражающий дифференциальные свойства входящих в них функций, пробегает дискретную последовательность $l=0, 1, 2, \ldots$ Классы же H и B в этом смысле непрерывны. Читатель, когда он ознакомится с главой 9 этой книги, отдаст себе отчет в том, что те теоремы С. Л. Соболева с дополнениями к ним, принадлежащими В. И. Кондрашову и В. П. Ильину, которые сопровождаются изменением метрики, являются в определенном смысле окончательными и даже, насколько это позволяет дискретность классов, транзитивными.

Что же касается теорем вложения, сопровождаемых только изменением измерения без изменения метрики, — мы называем их теоремами о следах, — то здесь дело обстоит сложнее. Конечно, теоремы С. Л. Соболева давали определенный ответ на вопрос, какими дифференциальными свойствами обладает след функции класса $W_p^l(\Omega)$ на многообразии $\Gamma \subset \Omega$, но он давался в терминах классов W, а теперь мы знаем, что, вообще говоря, если не считать случая $p=2$, окончательный ответ на этот вопрос не выражается в терминах классов W.

Первые окончательные результаты по проблеме следов W-классов были получены при $p=2$ Ароншайном [1] и независимо от него В. М. Бабичем и Л. Н. Слободецким [1] и Л. Н. Слободецким [2]. В этом случае ($p=2$) были введены дробные классы $W_2^l(\Omega)$ и $W_2^l(\Gamma)$, соответствующие любому положительному не обязательно целому параметру l, и в терминах этих классов получены прямые и полностью им обратные теоремы вложения. В принятых в этой книге обозначениях $W_2^l=L_2^l=B_2^l$. Дальнейшие исследования Гальярдо [1], О. В. Бесова [1], [2], П. И. Лизоркина [11] и С. В. Успенского [1], [2] привели к полному решению проблемы о следах функций классов W_p^l при любом конечном $p>1$. Как выглядит это решение, читатель найдет в той же главе 9 (положив $W_p^l=L_p^l$). А сейчас мы только скажем, что следы функций f класса W_p^l при $p \neq 2$, вообще говоря, принадлежит не к W-, а к B-классам. Это указывает, с одной стороны, на тот факт, что теоремы вложения разных измерений (теоремы о следах) перестают быть замкнутыми по отношению к W-классам, а с другой, — на то, что между классами W и B имеется тесная связь. Настолько тесная, что в свое время, когда в этих вопросах было не все ясно, считали, что классы B_p^l при дробных l являются естественными продолжениями целых соболевских классов и обозначали их через W_p^l. На самом деле естественными такими продолжениями являются так называемые лиувиллевские классы L_p^r. Им посвящена глава 9, таким образом, в частности, и классам W, потому что мы считаем $W_p^l=L_p^l$

($l=0, 1, \ldots$). Читатель должен помнить, что в данной книге обозначение W_p^l употребляется только при $l=0, 1, \ldots$ По этому поводу см. 4.3.

С. Л. Соболев изучал функции своих классов при помощи введенных им интегральных представлений, получивших большое развитие в исследованиях В. П. Ильина, а затем О. В. Бесова (см. по этому поводу ниже 6.10). Функции классов L_p^r определены на всем пространстве, и при их интегральных представлениях очень важно позаботиться о том, чтобы ядра последних достаточно быстро убывали к нулю на бесконечности. Такими являются известные ядра Бесселя — Макдональда. Они и взяты в качестве основы при представлении функций классов L_p^r. Мы говорим в качестве основы, потому что на самом деле здесь рассматриваются анизотропные классы $L_p^{\boldsymbol{r}}$. Ядра их интегральных представлений являются определенными усложнениями макдональдовых ядер. Отмечу, что при написании главы 9 я существенно пользовался материалами, предоставленными мне моим коллегой П. И. Лизоркиным, который совсем недавно получил полную систему теорем вложения для общих анизотропных классов $L_p^{\boldsymbol{r}}$, где $\boldsymbol{r}$ — любые положительные векторы. Его результаты опубликованы пока в виде краткой заметки.

В одномерном случае (где проблема следов не возникает) теоремы вложения разных метрик для классов L_p^r и при нецелых r для классов H_p^r получены еще в работах Харди и Литтлвуда.

Операции I_r, определяемые ядрами Бесселя — Макдональда, носят универсальный характер. В этой книге они изучаются и применяются в разных случаях. Мы довольно широко пользуемся понятием обобщенной функции, поэтому книга содержит небольшой параграф, где приведены с полными доказательствами только те сведения из теории обобщенных функций, которые читателю необходимо знать для понимания дальнейшего. Я ввожу понятие регулярной в смысле L_p обобщенной функции, пользуясь операцией I_r. Для регулярных функций различные доказательства, связанные с умножением на обобщенную функцию, сильно упрощаются. Этим я широко пользуюсь, потому что встречающиеся в этой книге обобщенные функции регулярны.

Операция I_r получила интересные применения также в главе 8. Она осуществляет изоморфизмы не только L-, но и B- и H-классов и может служить средством для интегральных представлений функций этих классов. Эти идеи, которые в периодическом одномерном случае исходят еще от Харди и Литтлвуда, совсем недавно изучались с различных точек зрения в работах Ароншайна и Смита, Кальдерона, Тэйблсона, Лионса, П. И. Лизоркина и автора и др.

В этой книге, естественно, уделено место основам теории приближения функций многих переменных тригонометрическими полиномами и целыми функциями экспоненциального типа. Они сами по себе могут представлять интерес, но в основном они имеют подчиненную роль — средствами теории приближения далее доказываются теоремы вложения для H- и B-классов, даются также представления функций этих классов через ряды по целым функциям экспоненциального типа или тригонометрическим полиномам. Имея в виду эти цели, наряду с традиционными неравенствами мы вводим и применяем другие неравенства (разных измерений и метрик).

Следует отметить, что в этой книге мы даем полные доказательства теорем вложения для упомянутых классов функций, определенных на всем n-мерном пространстве R_n. Но эти классы можно определить для областей $\Omega \subset R_n$. Такие определения даны в книге. Сформулированы также (без доказательства) весьма общие теоремы о продолжении функций этих классов на все пространство (с сохранением класса). Это дает возможность распространить теоремы, доказанные для пространства R_n на случай областей $\Omega \subset R_n$.

Наконец, отмечу, что в последнее время велись исследования (начатые Л. Д. Кудрявцевым) более общих — весовых классов. В этой книге мы ограничились только отдельными замечаниями о связи весовых классов с рассматриваемыми здесь не весовыми классами.

Отмечу еще, что на протяжении последних более чем десяти лет в Математическом институте им. В. А. Стеклова работал постоянно действующий семинар по теории дифференцируемых функций многих переменных, возглавляемый В. И. Кондрашовым, Л. Д. Кудрявцевым и мною. В нем активно участвовали О. В. Бесов, Я. С. Бугров, В. И. Буренков, А. А. Вашарин, П. И. Лизоркин, С. В. Успенский, Г. Н. Яковлев и другие математики. Многие результаты, излагаемые в этой книге, принадлежат участникам этого семинара и обсуждались на нем по мере их возникновения.

В заключение я считаю приятным долгом выразить глубокую благодарность своим коллегам О. В. Бесову, прочитавшему рукопись книги, П. И. Лизоркину, прочитавшему ее главы 8 и 9, и С. А. Теляковскому, прочитавшему несколько глав. Они сделали много ценных замечаний, которые мною так или иначе учтены.

Я благодарен также Т. А. Тиман, указавшей на отдельные недостатки рукописи.

Наконец, я глубоко благодарю моего молодого коллегу В. И. Буренкова — редактора книги. Многие его советы, относящиеся не только к форме, но и к существу изложения, мною учтены.

ГЛАВА 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Пространства $C(\mathscr{E})$ и $L_p(\mathscr{E})$

В этой книге будут рассматриваться функции, зависящие, вообще говоря, от многих переменных.

Символ R_n ($n=1, 2, \ldots$) всегда будет обозначать n-мерное евклидово пространство точек $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ с действительными координатами. Длина вектора $\boldsymbol{x}$ будет обозначаться так:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_1^n x_k^2}. \tag{1}$$

Если $\mathscr{E}$ есть замкнутое множество, принадлежащее к R_n ($\mathscr{E} \subset R_n$), то $C(\mathscr{E})$ будет обозначать совокупность всех равномерно непрерывных на $\mathscr{E}$ (действительных или комплекснозначных) функций $f=f(\boldsymbol{x})$.

Каждой функции $f \in C(\mathscr{E})$ приведем в соответствие ее норму (в смысле $C(\mathscr{E})$)

$$\|f\|_{C(\mathscr{E})} = \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathscr{E}} |f(\boldsymbol{x})|. \tag{2}$$

В случае ограниченного (замкнутого) множества $\mathscr{E}$ sup можно заменить на max.

Если p есть действительное число, удовлетворяющее неравенствам $1 \leqslant p < \infty$, и на некотором измеримом не обязательно ограниченном множестве $\mathscr{E} \subset R_n$, принадлежащем к R_n, задана измеримая действительная или комплекснозначная функция f такая, что функция $|f|^p$ интегрируема (суммируема) в смысле Лебега на $\mathscr{E}$, то положим.

$$\|f\|_{L_p(\mathscr{E})} = \left(\int_{\mathscr{E}} |f|^p \, d\mathscr{E}\right)^{1/p}. \tag{3}$$

Величина (3) называется нормой функции f в смысле $L_p(\mathscr{E})$. Через $L_p(\mathscr{E})$ будет обозначаться совокупность всех функций, имеющих конечную норму (3).

Мы не будем различать две *эквивалентные* функции f_1 и $f_2 \in L_p(\mathscr{E})$, т. е. отличающиеся на множестве меры нуль. Будем считать их равными одному и тому же элементу функционального пространства $L_p(\mathscr{E})$ и писать $f_1 = f_2$. В частности, если функция $f \in L_p(\mathscr{E})$ равна нулю почти для всех $x \in \mathscr{E}$, будем писать $f = 0$, отождествляя таким образом эту функцию с функцией, тождественно равной нулю на $\mathscr{E}$. Таким образом, из равенства $\|f_1 - f_2\|_{L_p(\mathscr{E})} = 0$ следует, что $f_1 - f_2 = 0$ и $f_1 = f_2$.

Множество $\mathscr{E}$ может иметь измерение m, меньшее, чем n, и тогда интеграл, входящий в равенство (3), понимается в смысле естественной (m-мерной) лебеговой меры, определяемой на множестве $\mathscr{E}$. Нам не понадобится рассмотрение сложных по своей конструкции множеств $\mathscr{E}$. Часто $\mathscr{E}$ будет совпадать со всем пространством R_n или будет некоторым его m-мерным подпространством или m-мерным кубом или шаром, принадлежащим к R_n. Наконец, $\mathscr{E}$ может быть гладкой или кусочно-гладкой гиперповерхностью, состоящей из достаточно гладких кусков, и тогда мера измеримого подмножества $\mathscr{E}$, на базе которой определяется интеграл, входящий в правую часть (3), представляет собой обобщение (распространение) обычного понятия площади гиперповерхности.

Определение (3) естественно распространяется и на случай $p = \infty$. Действительно, если функция $f(x)$ измерима и существенно ограничена на ограниченном множестве $\mathscr{E}$, т. е. для нее существует величина

$$\sup_{x \in \mathscr{E}} \operatorname{vrai} |f(x)| = M_f,$$

называемая *существенным максимумом* *) $|f(x)|$ на $\mathscr{E}$, то имеет место равенство

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} = M_f. \tag{4}$$

Оно доказывается следующим образом. Пусть μe обозначает меру e. Если $M_f = 0$ или $\mu\mathscr{E} = 0$, то равенство (4) очевидно. Будем считать, что $0 < M_f < \infty$. Если $\mathscr{E}$ — ограниченное измеримое множество, то

$$\left(\int_{\mathscr{E}} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant M_f (\mu\mathscr{E})^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{p \to \infty}} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant M_f. \tag{5}$$

Если $\mathscr{E}$ — неограниченное измеримое множество, то неравенство (5), вообще говоря, не выполняется (например, $\mathscr{E} = R_n$, $f(x) \equiv 1$). Однако можно доказать

---

*) M_f есть наименьшее число среди чисел M, обладающих тем свойством, что множество всех $x \in \mathscr{E}$, для которых $|f(x)| > M$, имеет меру нуль. Легко видеть, что оно существует.

это неравенство в предположении, что $f(x) \in L_p(\mathscr{E})$ для всех достаточно больших p и что $\overline{\lim\limits_{p\to\infty}} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} < \infty$. В этом случае

$$\left(\int\limits_{\mathscr{E}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant M_f^{1/2}\left(\int\limits_{\mathscr{E}} |f(x)|^{p/2}\,dx\right)^{1/p},$$

поэтому

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\left(\int\limits_{\mathscr{E}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant M_f^{1/2}\left[\overline{\lim_{p\to\infty}}\left(\int\limits_{\mathscr{E}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right]^{1/2},$$

откуда и вытекает неравенство (5).

С другой стороны, из определения существенного максимума функции следует существование ограниченного множества $\mathscr{E}_1$ положительной меры такого, что для всех его точек выполняется неравенство

$$|f(x)| > M_f - \varepsilon,$$

где $0 < \varepsilon \leqslant M_f$. Поэтому

$$\|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \geqslant \left(\int\limits_{\mathscr{E}_1} (M_f-\varepsilon)^p\,d\mathscr{E}_1\right)^{1/p} = (M_f-\varepsilon)\,(\mu\mathscr{E}_1)^{1/p},$$

откуда

$$\underline{\lim_{p\to\infty}} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \geqslant M_f - \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то

$$\underline{\lim_{p\to\infty}} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \geqslant M_f. \tag{6}$$

Отметим, что неравенство (6) справедливо для любого измеримого множества $\mathscr{E}$.

Из (5) и (6) следует (4).

Таким образом, доказано, что если функция $f(x)$ существенно ограничена на ограниченном измеримом множестве $\mathscr{E}$, то существует конечный предел

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})}, \tag{7}$$

равный существенному максимуму $f(x)$ на $\mathscr{E}$.

С другой стороны, из существования предела (7) следует существенная ограниченность $f(x)$ на $\mathscr{E}$. В самом деле, если бы это было не так, то как бы ни было велико N существовало бы измеримое и ограниченное подмножество $\mathscr{E}'$ множества $\mathscr{E}$ положительной меры, на котором

$$|f(x)| > N.$$

Тогда для любого $p \geqslant 1$

$$\|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \geqslant N\,(\mu\mathscr{E}')^{1/p},$$

откуда

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \geqslant N.$$

Так как N как угодно велико, то предел (7) не может быть конечным, и мы пришли к противоречию.

Приведенные соображения указывают на целесообразность следующего обозначения:

$$\|f\|_{L_\infty(\mathscr{E})} = \sup_{x\in\mathscr{E}} \mathrm{vrai}\,|f(x)|, \tag{8}$$

дополняющего обозначения (3) при $p=\infty$. В функциональном анализе принято еще обозначать норму (8) следующим образом:

$$\|f\|_{M(\mathscr{E})}=\sup_{x\in\mathscr{E}} \operatorname{vrai}|f(x)|. \tag{9}$$

Мы тоже иногда будем пользоваться этим обозначением, считая, таким образом, что

$$\|f\|_{M(\mathscr{E})}=\|f\|_{L_\infty(\mathscr{E})}. \tag{10}$$

Символ $M(\mathscr{E})$ будет обозначать совокупность всех функций f, имеющих конечную норму в смысле $M(\mathscr{E})$.

Если $\mathscr{E}$ есть ограниченное замкнутое множество и функция $f(x)$ непрерывна на $\mathscr{E}$, то величина (8) равна обычному максимуму функции $|f(x)|$ на $\mathscr{E}$. В этом случае

$$\|f\|_{L_\infty(\mathscr{E})}=\|f\|_{C(\mathscr{E})}. \tag{11}$$

1.1.1. В случае, если функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ является периодической периода 2π по всем переменным, т. е. если для нее выполняется тождество

$$f(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l+2\pi, x_{l+1}, \ldots, x_n)=f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

для всех или почти всех x и $l=1, \ldots, n$, то при ее нормировании мы в качестве множества $\mathscr{E}$ будем рассматривать n-мерный куб

$$\Delta^{(n)}=\{0\leqslant x_i\leqslant 2\pi;\quad i=1, \ldots, n\}$$

пространства R_n и соответствующую норму будем обозначать следующим образом:

$$\|f\|_{L_p(\Delta^{(n)})}=\|f\|_{L_p^*}^{(n)},\quad \|f\|_{M(\Delta^{(n)})}=\|f\|_{M*}^{(n)},\quad \|f\|_{C(\Delta^{(n)})}=\|f\|_{C*}^{(n)}. \tag{2}$$

Наличие звездочки всегда будет указывать на тот факт, что функция f периодическая и норма ее вычислена относительно куба, определяющего период функции.

При $n=1$, как правило, будем писать $\|f\|_{L_p^*}$, $\|f\|_{M*}$, $\|f\|_{C*}$, вместо соответственно $\|f\|_{L_p^*}^{(1)}$, $\|f\|_{M*}^{(1)}$, $\|f\|_{C*}^{(1)}$.

Совокупность всех периодических периода 2π определенных на R_n функций с конечной нормой $\|f\|_{L_p^*}^{(n)}$ будет обозначаться через $L_p^{*(n)}$. Совокупность всех непрерывных периодических периода 2π определенных на R_n функций будет обозначаться символом $C^{*(n)}$.

Впрочем, значок (n) в этих обозначениях мы по возможности будем опускать.

Очень часто мы будем рассматривать измеримое множество $\mathscr{E}=R_m\times\mathscr{E}'\subset R_n$, представляющее собою топологическое произведение m-мерного подпространства R_m $(m<n)$ точек $(x_1, \ldots, x_m)$ и измеримого множества $\mathscr{E}' \subset R_{n-m}$, где R_{n-m} есть подпространство точек $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

При этом функциональное пространство, состоящее из измеримых на $\mathscr{E}$ функций $f(\boldsymbol{x})$, периодических с периодом 2π относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$ и суммируемых в p-й степени на множестве $\Delta_m \times \mathscr{E}'$, где

$$\Delta_m = \{0 \leqslant x_k \leqslant 2\pi, \quad k=1, \ldots, m\},$$

мы будем обозначать через $L_p^*(\mathscr{E})$. Звездочка будет указывать на наличие периодичности (по Δ_m) у функций $f \in L_p^*(\mathscr{E})$ и на тот факт, что норма функции $f \in L_p^*(\mathscr{E})$ определяется равенством

$$\|f\|_{L_p^*(\mathscr{E})} = \left(\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_{\mathscr{E}'} |f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)|^p dx_1 \ldots dx_m dx_{m+1} \ldots dx_n\right)^{1/p}.$$

1.1.2. Мы будем широко пользоваться тем фактом, что для суммируемой периодической функции φ, т. е. принадлежащей к $L_p^{*(n)}$, имеет место для любого $\boldsymbol{a} \in R_n$ равенство

$$\|\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})\|_{L_p^*} = \|\varphi(\boldsymbol{x})\|_{L_p^*}, \tag{1}$$

так же как и для функций $\varphi(\boldsymbol{x}) \in L_p(R_n)$ равенство

$$\|\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})\|_{L_p(R_n)} = \|\varphi(\boldsymbol{x})\|_{L_p(R_n)}. \tag{2}$$

1.2. Линейные нормированные пространства

1.2.1. Линейное множество. Множество G элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, ... называется *линейным множеством*, если в силу некоторого закона каждым двум его элементам $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соответствует элемент $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, принадлежащий к G, называемый суммой $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, и если каждому действительному (комплексному) числу α и элементу $\boldsymbol{x} \in G$ соответствует элемент $\alpha\boldsymbol{x} \in G$, называемый произведением числа α на элемент $\boldsymbol{x}$, и при этом операции сложения и умножения подчиняются следующим аксиомам:

1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$,
2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$,
3) из $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}$ следует $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$,
4) $\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}=\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$,
5) $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}=(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}$,
6) $\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}$,
7) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

Множество G есть действительное или комплексное линейное множество в зависимости от того, являются ли входящие в его определение числа α, β действительными числами или комплексными.

Из определения линейного пространства следует, что в нем существует единственный элемент θ — *нулевой* элемент такой, что для всех $x \in G$ справедливо

$$x + \theta = x, \quad 0 \cdot x = \theta.$$

Действительно, пусть элементы x и y принадлежат к G. Положим $\theta = \theta_x = 0 \cdot x$ и $\theta_y = 0 \cdot y$, тогда

$$x + \theta_x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = 1 \cdot x = x$$

и аналогично

$$y + \theta_y = y.$$

Из полученных равенств на основании аксиом следует

$$x + y + \theta_x = x + y + \theta_y,$$

откуда

$$\theta_x = \theta_y = \theta.$$

Положим еще $-1 \cdot x = -x$, тогда $x + (-x) = \theta$. Если x и y — произвольные элементы из G, то уравнение $x + z = y$ имеет решение $z = y + (-x)$ единственное по аксиоме 3), которое естественно называть разностью y и x и обозначать $z = y - x$. Таким образом, в G определена, кроме сложения, операция вычитания.

Аксиомы линейного множества дают нам право, пользуясь операциями сложения, вычитания и умножения на число, преобразовывать конечные суммы вида

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z,$$

подобно тому, как это делается с буквенными алгебраическими выражениями.

Всякое множество $G_1 \subset G$, содержащее вместе с элементами x, y элемент $\alpha x + \beta y$, где α, β — действительные (комплексные) числа, очевидно, есть в свою очередь линейное множество.

Конечная система элементов $x_1, \ldots, x_n$ из G называется *линейно независимой*, если из равенства

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \theta$$

следует $\alpha_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. В противном случае эта система называется *линейно зависимой.*

Множество функций $C(\mathscr{E})$, определенное в § 1.1, есть, очевидно, линейное множество. Нулевым элементом в $C(\mathscr{E})$ является функция, тождественно равная нулю на $\mathscr{E}$.

Множество $L_p(\mathscr{E})$ функций f, интегрируемых в p-й степени на измеримом множестве $\mathscr{E}$, есть также линейное множество с нулевым элементом, представляющим собой функцию почти всюду на $\mathscr{E}$, равную нулю (эквивалентную нулю).

1.2.2. Пространство Банаха. Пространства $L_p(\mathscr{E})$, $C(\mathscr{E})$. Линейное (действительное или комплексное) множество E называется *нормированным пространством*, если каждому элементу $x \in E$ приведено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$, называемое нормой элемента x (в пространстве E или в смысле пространства E), удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $\|x\|=0$, то $x=\theta$,

2) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| \qquad (x, y \in E)$,

3) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$,

где $x \in E$ и α — произвольное (действительное или комплексное) число.

Из 2) следует справедливость неравенства

$$|\|x\|-\|y\|| \leqslant \|x-y\| \qquad (x, y \in E). \tag{1}$$

Нормированное пространство E называется *полным*, если из того, что для последовательности $x_n \in E$ $(n=1, 2, \ldots)$ выполняется условие (Коши)

$$\lim_{n, m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0,$$

следует существование в E элемента x_0, для которого выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0. \tag{2}$$

Тот факт, что выполняется свойство (2), записывают еще так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \tag{3}$$

говоря, что x_n стремится к x_0 по норме пространства E или в смысле метрики E.

Линейное нормированное полное пространство называется еще *пространством Банаха* или *банаховым пространством*.

Определенное в 1.1 функциональное множество $C(\mathscr{E})$ есть, очевидно, банахово пространство. Хорошо известно также, что определенное в том же параграфе множество функций $L_p(\mathscr{E})$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ также есть банахово пространство. При этом $C(\mathscr{E})$ и $L_p(\mathscr{E})$ являются действительными или комплексными пространствами в зависимости от того, состоят ли они из действительных или комплексных функций f. В первом случае позволяется f умножать на действительные числа, а во втором — на комплексные.

1.2.3. Конечномерное пространство. Множество $\mathfrak{M} \subset E$ называется подпространством банахова пространства E, если оно есть замкнутое (относительно нормы $\|\cdot\|$) линейное множество.

Пусть принадлежащие к E элементы $x_1, \ldots, x_n$ образуют линейно независимую систему. Множество $\mathfrak{M}_n$ элементов вида

$$y = \sum_1^n c_k x_k, \tag{1}$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — произвольная система действительных (комплексных) чисел, называется *n-мерным* (*конечномерным*) *пространством*. Если $\mathfrak{M}_n$ есть часть E, то $\mathfrak{M}_n$ называется еще n-мерным подпространством пространства E, а система элементов $x_1, \ldots, x_n$ — его базой. Чтобы обосновать сделанное определение, мы должны убедиться в том, что $\mathfrak{M}_n$ есть замкнутое линейное множество. Линейность $\mathfrak{M}_n$ очевидна, замкнутость будет установлена ниже.

Если наряду с элементом y, определяемым равенством (1), задан еще другой элемент

$$y' = \sum_1^n c'_k x_k,$$

определяемый системой $c' = (c'_1, \ldots, c'_n)$, то, очевидно,

$$\|y - y'\| \leqslant \sum_1^n |c_k - c'_k| \, \|x_k\|.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{|c - c'| \to 0} \|y - y'\| = 0. \tag{2}$$

Свойство (2) означает, что элемент y непрерывно (относительно нормы) зависит от определяющих его коэффициентов c_k. В силу неравенства

$$\big| \|y\| - \|y'\| \big| \leqslant \|y - y'\|$$

из (2) вытекает также, что

$$\lim_{|c - c'| \to 0} \|y'\| = \|y\|. \tag{3}$$

Таким образом, норма

$$\|y\| = \Phi(c_1, \ldots, c_n) = \Phi(c)$$

есть непрерывная функция от $c = (c_1, \ldots, c_n)$.

Минимум этой функции на (замкнутом и ограниченном) множестве, определяемом уравнением

$$|c| = \sqrt{\sum_1^n c_k^2} = 1,$$

достигается для некоторой системы коэффициентов $c^0=(c_1^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)})$ и равен числу

$$\frac{1}{\lambda}=\Phi(c^{(0)})>0,$$

заведомо положительному, потому что система $x_1, \ldots, x_n$ линейно независима.

Зададим произвольную систему чисел $c=(c_1, \ldots, c_n)$ $(|c|>0)$ и положим

$$c'=\frac{c}{|c|}.$$

Тогда в силу того, что $|c'|=1$, будет иметь место неравенство

$$\frac{1}{\lambda}\leqslant\left\|\sum_1^n c_k' x_k\right\|,$$

которое после умножения левой и правой частей его на $\lambda|c|$ превращается в неравенство

$$|c|\leqslant\lambda\left\|\sum_1^n c_k x_k\right\|. \tag{4}$$

Теперь уже нетрудно доказать, что линейное множество $\mathfrak{M}_n$ замкнуто и, таким образом, является подпространством.

В самом деле, из того, что

$$y_l=\sum_1^n c_k^{(l)} x_k \qquad (l=1, 2, \ldots) \tag{5}$$

и

$$\|y_l-y_m\|\to 0 \qquad (l, m\to\infty),$$

следует в силу (4), что

$$|c^{(l)}-c^{(m)}|\leqslant\lambda\|y_l-y_m\|\to 0 \qquad (l, m\to\infty),$$

где $c^{(l)}=(c_1^{(l)}, \ldots, c_n^{(l)})$ $(l=1, 2, \ldots)$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{l\to\infty} c^{(l)}=c^{(0)}, \tag{6}$$

откуда

$$\|y_l-y_0\|\to 0 \ (l\to\infty), \tag{7}$$

где

$$y_0=\sum_1^n c_k^{(0)} x_k\in\mathfrak{M}_n. \tag{8}$$

Отметим еще одно важное свойство конечномерного пространства $\mathfrak{M}_n$, непосредственно вытекающее из неравенства (4). Оно заключается в том, что всякое ограниченное (по норме) множество $\Omega \subset \mathfrak{M}_n$ является компактным в $\mathfrak{M}_n$, т. е. из всякой последовательности элементов $y_l \in \Omega$ $(l = 1, 2, \ldots)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся (по норме) к некоторому элементу $\mathfrak{M}_n$. Действительно, из того, что элементы y_l, определяемые равенствами (5), образуют ограниченное множество, следует в силу (4), что векторы $c^{(l)}$ также ограничены в совокупности. Но тогда для некоторой подпоследовательности натуральных чисел l будет выполняться равенство (6) для некоторого вектора $c^{(0)}$, а следовательно, и соотношения (7), (8).

Замечание. В специальных курсах функционального анализа доказывается, что и наоборот, если всякое ограниченное множество, принадлежащее к данному банаховому пространству $\mathfrak{M}$, является компактным, то $\mathfrak{M}$ есть конечномерное пространство, т. е. все его элементы могут быть записаны в виде конечной суммы (1), где элементы $x_1, \ldots, x_n$ образуют линейно независимую систему.

Так как

$$|c_k| \leqslant \sqrt{\sum_1^n c_k^2},$$

то

$$\sum_1^n |c_k| \leqslant n|c|,$$

поэтому, если считать, что

$$M \geqslant \|x_k\| \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

то, приняв еще во внимание (4), получим

$$\left\|\sum_1^n c_k x_k\right\| \leqslant M \sum_1^n |c_k| \leqslant Mn|c| \leqslant Mn\lambda \left\|\sum_1^n c_k x_k\right\|,$$

и мы доказали, что для любых c_k $(k = 1, \ldots, n)$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{\lambda}\left(\sum_1^n c_k^2\right)^{1/2} \leqslant \left\|\sum_1^n c_k x_k\right\| \leqslant Mn\left(\sum_1^n c_k^2\right)^{1/2}, \tag{9}$$

где λ и M — положительные числа, зависящие от свойства нормы, определенной в $\mathfrak{M}_n$.

Если в рассматриваемом n-мерном множестве введена другая норма $\|\cdot\|'$, определяющая, таким образом, другое пространство

$\mathfrak{M}'_n$, то получим новые неравенства

$$\frac{1}{\lambda'}\left(\sum_1^n c_k^2\right)^{1/2} \leqslant \left\|\sum_1^n c_k x_k\right\|' \leqslant M'n\left(\sum_1^n c_k^2\right)^{1/2}, \tag{10}$$

где λ' и M' — другие, отличные вообще от λ, M положительные числа. Из (9) и (10) следует, что

$$\frac{1}{\lambda M'n}\left\|\sum_1^n c_k x_k\right\|' \leqslant \left\|\sum_1^n c_k x_k\right\| \leqslant \lambda' M n\left\|\sum_1^n c_k x_k\right\|'. \tag{11}$$

1.2.4. Эквивалентные нормированные пространства. Если линейное множество нормировано двумя способами, что приводит к двум нормированным пространствам E_1 и E_2, и если существуют две положительные константы c_1, c_2, не зависящие от $x \in E_1$, E_2, такие, что

$$c_1\|x\|_{E_1} \leqslant \|x\|_{E_2} \leqslant c_2\|x\|_{E_1} \tag{1}$$

для всех $x \in E_1$, E_2, то пространства E_1 и E_2 называются *эквивалентными*.

Как правило, мы не будем различать эквивалентные нормы, т. е. будем пользоваться одними и теми же обозначениями для эквивалентных норм.

Из неравенства 1.2.3 (11) следует, что любые две нормировки n-мерного линейного многообразия приводят к эквивалентным нормированным пространствам.

В дальнейших рассуждениях в качестве конечномерных подпространств будут обычно фигурировать множества тригонометрических или алгебраических полиномов от одной переменной данной степени ν или от n переменных данных степеней $\nu_1, \ldots, \nu_n$ или просто системы $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ из n чисел, нормированные тем или иным способом.

1.2.5. Действительные гильбертовы пространства. Пусть H — линейное действительное множество и каждым его двум элементам f, φ приведено в соответствие действительное число (f, φ) — *скалярное произведение* f и φ, — обладающее следующими свойствами:

1) $(f, f) \geqslant 0$; из $(f, f) = 0$ следует, что $f = \theta$ — нулевой элемент H;

2) $(f, \varphi) = (\varphi, f)$;

3) $(c_1 f_1 + c_2 f_2, \varphi) = c_1(f_1, \varphi) + c_2(f_2, \varphi)$, каковы бы ни были действительные числа c_1, c_2 и элементы f, φ, f_1, $f_2 \in H$.

В H вводят норму

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}$$

(нетрудно проверить, что это выражение в самом деле является нормой). С этой нормой H делается нормированным пространством. Если H — полное пространство, то H называется *гильбертовым пространством* (*действительным*).

Заметим, что при любых действительных λ и $f, \varphi \in H$

$$0 \leqslant (\lambda f+\varphi, \lambda f+\varphi)=\lambda^2 (f, f)+2\lambda (f, \varphi)+(\varphi, \varphi),$$

поэтому

$$|(f, \varphi)| \leqslant (f, f)^{1/2} (\varphi, \varphi)^{1/2}=\|f\|\|\varphi\|.$$

Пространство $L_2(\Omega)$ действительных функций, измеримых на Ω и имеющих интегрируемые квадраты на Ω со скалярным произведением

$$(f, \varphi)=\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (f, \varphi \in L_2(\Omega)),$$

служит важным примером действительного гильбертова пространства. Мы встретимся и с другими примерами (см., например, 4.3.1 (4)).

Легко видеть, что для любых $f, \varphi \in H$ выполняется равенство

$$\|f+\varphi\|^2+\|f-\varphi\|^2=2(\|f\|^2+\|\varphi\|^2), \tag{1}$$

напоминающее известный факт из геометрии: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. Пространство $L_p(\Omega)$ при $p \neq 2$ не является гильбертовым, потому что можно указать принадлежащие к нему функции f, φ, для которых равенство (1) не выполняется.

1.2.6. Расстояние от элемента до подпространства. Наилучшее приближение. Пусть $\mathfrak{M}$ есть подпространство банахова пространства E, и пусть $y \in E$. *Расстоянием* от y до $\mathfrak{M}$ называется нижняя грань

$$E(y)=\inf_{x\in\mathfrak{M}} \|y-x\|, \tag{1}$$

распространенная на все элементы $x \in \mathfrak{M}$. Мы часто будем, следуя традициям, возникшим в теории приближений функций, называть число $E(y)$ *наилучшим приближением* элемента y при помощи элементов $x \in \mathfrak{M}$.

Может случиться, что в $\mathfrak{M}$ существует элемент x_* такой, что для него рассматриваемая нижняя грань реализуется, т. е.

$$E(y)=\min_{x\in\mathfrak{M}} \|y-x\|=\|y-x_*\|. \tag{2}$$

В этом случае элемент x_* называется *наилучшим элементом*, приближающим y при помощи элементов $x \in \mathfrak{M}$.

Важно отметить те достаточно общие случаи, когда можно заранее утверждать, что в задаче (1) наилучший элемент существует. Кроме того, представляет интерес другой вопрос, является ли наилучший элемент для данной задачи единственным.

Нетрудно видеть, что если $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n$ есть конечномерное подпространство произвольного нормированного пространства E, то для всякого элемента $y \in E$ наилучший элемент, приближающий y при помощи $x \in \mathfrak{M}_n$, всегда существует. В самом деле, пусть

$$E(y) = \inf_{x \in \mathfrak{M}_n} \|y - x\|;$$

тогда существует (*минимизирующая*) последовательность элементов $x^{(l)}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ такая, что

$$\|y - x^{(l)}\| = E(y) + \varepsilon_l \qquad (\varepsilon_l \geqslant 0, \ \varepsilon_l \underset{l \to \infty}{\to} 0).$$

Эта последовательность ограничена и, следовательно, компактна и, таким образом, некоторая ее подпоследовательность сходится по норме к некоторому элементу $x_* \in \mathfrak{M}_n$. Нетрудно видеть, что x_* есть наилучший элемент, приближающий y при помощи $x \in \mathfrak{M}_n$. Он, вообще говоря, не единствен.

Если $\mathfrak{M}$ — бесконечномерное (не конечномерное) подпространство пространства E, то в задаче (1) наилучший элемент может не существовать вовсе. Такие явления обнаруживаются, например, в пространствах $L_\infty(\mathscr{E})$ и $L_1(\mathscr{E})$. Однако при p, удовлетворяющем неравенствам $1 < p < \infty$, существование наилучшей функции имеет место для любой функции $f \in L_p(\mathscr{E})$ и любого подпространства $\mathfrak{M} \subset L_p(\mathscr{E})$. Больше того, в этом случае наилучшая функция всегда является единственной; эти факты доказываются ниже в 1.3.6. В пространствах $L_1(\mathscr{E})$ и $L_\infty(\mathscr{E})$, если наилучший элемент существует, то он не всегда является единственным (см. 1.2.7, примеры 1) и 2)). Впрочем, и в пространствах L, L_∞ и C имеются важные для анализа случаи единственности наилучшей функции; но эти случаи зависят от специальных свойств подпространств $\mathfrak{M}$ и приближаемых функций f. Подобные вопросы не будут рассматриваться в этой книге.

1.2.7. П р и м е р 1. Пусть функция $f(x) = \operatorname{sign} x$. Будем приближать ее в метрике $L(-1,1)$*) при помощи постоянных функций $\varphi(x) = c$, т. е. искать такую константу λ, при которой достигается минимум

$$\min_c \|f - c\|_{L(-1,+1)} = \min_c \int_{-1}^{1} |f(x) - c| \, dx = \int_{-1}^{1} |f(x) - \lambda| \, dx.$$

Нетрудно видеть, что минимум достигается для любой постоянной λ, удовлетворяющей неравенствам $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

*) $L_p(a, b)$ обозначает $L_p(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}$ есть сегмент $[a, b]$.

С точки зрения обозначений, которые фигурировали в предыдущем параграфе, можно сказать, что мы приближали функцию $f \in L(-1, +1)$ при помощи постоянных на $(-1, +1)$ функций $\varphi(x) = c$, образующих одномерное подпространство пространства $L(-1, +1)$. Наилучшая функция оказалась не единственной.

Пример 2. Функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$ будем приближать теперь в метрике $L_\infty(-1, +1) = M(-1, +1)$ при помощи линейных функций

$$\varphi(x) = Ax + B,$$

где A и B — произвольные действительные числа.

Нетрудно видеть, что

$$\min_{A,B} \| f(x) - Ax - B \|_{M(-1,+1)} = \min_{A,B} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} | f(x) - Ax - B | = \\ = \| f(x) - \lambda x \|_{M(-1,+1)},$$

где λ может быть любым числом, удовлетворяющим неравенству $|\lambda| \leqslant 1$.

Таким образом, и в этом примере наилучшая функция не единственна.

1.2.8. Линейные операторы. Если E и E' — банаховы пространства и каждому элементу $\boldsymbol{x} \in E$ при помощи некоторого закона соответствует определенный элемент

$$\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x}),$$

принадлежащий к E', то говорят, что A есть оператор, отображающий E в E'. Оператор A *линейный*, если, каковы бы ни были элементы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$ и числа c_1, c_2 (действительные или комплексные в зависимости от того, являются ли E и E' действительными или комплексными пространствами), имеет место равенство

$$A(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2) = c_1 A(\boldsymbol{x}_1) + c_2 A(\boldsymbol{x}_2).$$

Линейный оператор A называется *ограниченным*, если существует положительная константа M такая, что имеет место неравенство

$$\| A(\boldsymbol{x}) \|_{E'} \leqslant M \| \boldsymbol{x} \|_E \quad \text{для всех } \boldsymbol{x} \in E. \qquad (1)$$

Наименьшая константа M, для которой выполняется это неравенство для всех $\boldsymbol{x} \in E$, называется *нормой* оператора A и обозначается символом $\| A \|$. Норма оператора может быть еще определена как одна из верхних граней:

$$\| A \| = \sup_{\theta \neq x \in E} \frac{\| A(x) \|_{E'}}{\| x \|_E} = \sup_{\| x \|_E \leqslant 1} \| A(\boldsymbol{x}) \|_{E'}.$$

Оператор A называется *вполне непрерывным*, если он отображает всякое ограниченное множество $\mathscr{E} \subset E$ в компактное множество, принадлежащее к E'. Иначе говоря, какова бы ни была ограниченная последовательность $\{x_l\}$ элементов E, возможно выбрать из нее такую подпоследовательность $\{x_{l_k}\}$ и такой элемент $y_0 \in E'$, что

$$\lim_{k\to\infty} A(x_{l_k}) = y_0.$$

Если пространство E' конечномерно, то всякий линейный ограниченный оператор A, отображающий E в E', есть вполне непрерывный оператор, так как A отображает всякое ограниченное множество из E в ограниченное множество из E', а последнее вследствие конечномерности E' компактно.

Рассмотрим пример. Пусть E по-прежнему обозначает банахово пространство, и пусть $\mathfrak{M}$ есть его конечномерное подпространство.

Пусть еще каждому элементу $x \in E$ соответствует только один элемент $x_* = A(x)$, наилучшим образом приближающий x среди элементов $u \in \mathfrak{M}$, иначе говоря, пусть $A(x)$ есть единственный элемент из $\mathfrak{M}$, для которого выполняется равенство

$$\min_{u\in\mathfrak{M}} \|x-u\|_E = \|x - A(x)\|_E.$$

Тогда $A(x)$ есть оператор, отображающий E в $\mathfrak{M}$. Этот оператор, вообще говоря, нелинейный (он линейный, если E есть гильбертово пространство), но вполне непрерывный, как это видно из следующих соображений. Из неравенства

$$\|A(x)\|_E - \|x\|_E \leqslant \|x - A(x)\|_E \leqslant \|x\|_E$$

следует, что

$$\|A(x)\|_E \leqslant 2\|x\|_E.$$

Отсюда вытекает, что оператор A отображает ограниченное множество элементов E в ограниченное множество элементов $\mathfrak{M}$. Но последнее, вследствие конечномерности $\mathfrak{M}$, компактно.

З а м е ч а н и е. Определение вполне непрерывного оператора может быть распространено и на многозначные операторы, отображающие E в E', т. е. такие, что каждому $x \in E$ соответствует, вообще говоря, не один элемент $y = A(x)$. Многозначный оператор A называется вполне непрерывным, если из всякой ограниченной последовательности элементов $x_l \in E$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{l_k}\}$ и такие определенные значения оператора $A(x_{l_k})$, что последовательность $\{A(x_{l_k})\}$ сходится в E'.

Приведенный пример оператора $A(x)$ наилучшего приближения элемента x при помощи элементов конечномерного подпространства $\mathfrak{M}$ в общем случае дает многозначный оператор, являющийся в указанном выше смысле вполне непрерывным оператором.

1.3. Свойства пространства $L_p(\mathscr{E})$

Мы только сформулируем и разъясним некоторые свойства пространства $L_p(\mathscr{E})$, отсылая читателя за доказательством их к другим источникам (см. замечания к главе 1 в конце книги).

1.3.1. В 1.2.2 было уже отмечено, что $L_p(\mathscr{E})$ есть банахово (действительное или комплексное) пространство. Таким образом, для элементов пространства $L_p(\mathscr{E})$ выполняются следующие свойства:

1) норма

$$\|f\|_{L_p(\mathscr{E})}=\left(\int\limits_{\mathscr{E}}|f|^p\,d\mathscr{E}\right)^{1/p}$$

каждой функции $f\in L_p(\mathscr{E})$ неотрицательная и равна нулю только для функции f_0, эквивалентной нулю ($f_0=0$);

2) $\|f_1+f_2\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant\|f_1\|_{L_p(\mathscr{E})}+\|f_2\|_{L_p(\mathscr{E})}$;

3) $\|cf\|_{L_p(\mathscr{E})}=|c|\,\|f\|_{L_p(\mathscr{E})}$,

где c — произвольное (действительное или комплексное) число;

4) из того, что $f_k\in L_p(\mathscr{E})$ и

$$\|f_k-f_l\|_{L_p(\mathscr{E})}\to 0\qquad (k,\ l\to\infty),$$

следует существование функций $f_*\in L_p(\mathscr{E})$, для которой

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f_*\|_{L_p(\mathscr{E})}=0. \tag{1}$$

Свойства 1) и 3) очевидны. Неравенство 2) носит название *неравенства Минковского*. Оно может обратиться в равенство в том и только в том случае, когда функции f_1 и f_2 линейно зависимы как элементы пространства L_p. Свойство 4) — это теорема о полноте пространства L_p.

Мы будем писать

$$\Psi(x)=u_0(x)+u_1(x)+\ldots\qquad (x\in\mathscr{E})$$

и говорить, что ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится в смысле $L_p(\mathscr{E})$ к его сумме $\Psi(x)$, если

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\Psi-\sum_0^N u_k\right\|_{L_p(\mathscr{E})}=0.$$

Неравенство Минковского распространяется по индукции на случай N функций, и тогда оно имеет вид

$$\left\| \sum_1^N f_k \right\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \sum_1^N \| f_k \|_{L_p(\mathscr{E})}. \tag{2}$$

Из него также легко следует неравенство

$$\left\| \sum_1^\infty f_k \right\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \sum_1^\infty \| f_k \|_{L_p(\mathscr{E})}, \tag{3}$$

соответствующее случаю $N=\infty$. Оно читается так: если функции $f_k \in L_p(\mathscr{E})$ $(k=1, 2 \ldots)$ и ряд (чисел) в правой части (3) сходится, то ряд $f_1+f_2+\ldots$ сходится в смысле $L_p(\mathscr{E})$ к некоторой функции (принадлежащей к $L_p(\mathscr{E})$), которая обозначается через $\sum\limits_1^\infty f_k$, и имеет место неравенство (3).

Отметим еще следующий нужный для нас факт. Если ряд

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

сходится в обычном смысле почти всюду на $\mathscr{E}$ к функции f и, кроме того, он сходится к f_* в смысле $L_p(\mathscr{E})$, то $f(x)=f_*(x)$ почти всюду на $\mathscr{E}$. В самом деле, по условию сумма $S_n(x)$ первых n членов нашего ряда сходится в метрике $L_p(\mathscr{E})$ к f_*. Но тогда, как это известно из теории функций действительного переменного, существует подпоследовательность индексов $n_1, n_2, \ldots$ такая, что $S_{n_k}(x)$ сходится в обычном смысле почти всюду к $f_*(x)$ на $\mathscr{E}$ и, так как $S_{n_k}(x)$ почти всюду также сходится к $f(x)$, то почти всюду $f(x)=f_*(x)$.

В левой части неравенства (2) сначала производится операция суммирования по индексу k, и к результату применяется операция взятия нормы, в правой же части эти две операции меняются местами. Ниже приводится подобное неравенство, когда операция суммирования по значку k заменяется на операцию интегрирования по переменной k.

1.3.2. Обобщенное неравенство Минковского. Для функции $k(u, y)$, заданной на измеримом множестве $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2 \subset R_n$, где $x=(u, y)$, $u=(x_1, \ldots, x_m)$, $y=(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, имеет место неравенство

$$\left(\int_{\mathscr{E}_1} \left| \int_{\mathscr{E}_2} k(u, y)\, dy \right|^p du \right)^{1/p} \leqslant \int_{\mathscr{E}_2} \left(\int_{\mathscr{E}_1} |k(u, y)|^p\, du \right)^{1/p} dy,$$
$$1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{1}$$

которое надо понимать в том смысле, что если правая его часть имеет смысл, т. е. почти для всех $y \in \mathscr{E}_2$ существует внутренний интеграл по $\mathscr{E}_1$ и существует внешний интеграл по $\mathscr{E}_2$, то имеет смысл и левая; и левая часть не превышает правую.

1.3.3. Неравенство 1.3.2 (1), в частности, будет часто применяться при следующих обстоятельствах:

$$\left(\int\left|\int K(t-x)f(t)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p}=\left(\int\left|\int K(t)f(t+x)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant\int|K(t)|\left(\int|f(t+x)|^p dx\right)^{1/p}dt=\int|K(t)|\,dt\left(\int|f(u)|^p du\right)^{1/p}=$$
$$=\|K\|_{L(R)}\|f\|_{L_p(R)},\tag{1}$$

где $1\leqslant p\leqslant\infty$, $K\in L(R)$, $f\in L_p(R)$ *).

Если функции $K(t)$ и $f(t)$ являются периодическими периода 2π функциями и если $K\in L(0,\,2\pi)$, $f\in L_p(0,\,2\pi)$, то имеет место аналогичное неравенство

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}K(t-x)f(t)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\|K\|_{L(0,\,2\pi)}\|f\|_{L_p(0,\,2\pi)}\tag{2}$$

или подобное неравенство для периодических функций от n переменных.

1.3.4. Неравенство Гёльдера. Если $f_1\in L_p(\mathscr{E})$, $f_2\in L_q(\mathscr{E})$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, где $1\leqslant p\leqslant\infty$ **), то имеет место *неравенство Гёльдера*

$$\int_{\mathscr{E}}|f_1f_2|\,d\mathscr{E}\leqslant\|f_1\|_{L_p(\mathscr{E})}\|f_2\|_{L_q(\mathscr{E})}.\tag{1}$$

Оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда $|f_1|^p$ и $|f_2|^q$ линейно зависимы.

1.3.5. Неравенства Кларксона *). Равномерная выпуклость.** Пусть $f_1,\ f_2\in L_p(\mathscr{E})$. Если $2\leqslant p<\infty$, то

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|_{L_p(\mathscr{E})}^p+\left\|\frac{f_1-f_2}{2}\right\|_{L_p(\mathscr{E})}^p\leqslant\frac{1}{2}\|f_1\|_{L_p(\mathscr{E})}^p+\frac{1}{2}\|f_2\|_{L_p(\mathscr{E})}^p.\tag{1}$$

Если же $1<p\leqslant 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|_{L_p(\mathscr{E})}^q+\left\|\frac{f_1-f_2}{2}\right\|_{L_p(\mathscr{E})}^q\leqslant\left(\frac{1}{2}\|f_1\|_{L_p(\mathscr{E})}^p+\frac{1}{2}\|f_2\|_{L_p(\mathscr{E})}^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.\tag{2}$$

При $p=2$ неравенства (1) и (2) переходят в равенство (равенство параллелограмма).

---

*) Здесь и в дальнейшем $\int\equiv\int_R$, $R=R_n$.

**) При $p=\infty$ считается, что $\frac{1}{p}=0$.

***) См., например, книгу С. Л. Соболева [4].

Говорят, что банахово пространство E *равномерно выпукло*, если из того факта, что

$$\max_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}\left(1-\|\alpha x_1^{(n)}+(1-\alpha)x_2^{(n)}\|\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

где $\|x_1^{(n)}\|=\|x_2^{(n)}\|=1$, следует

$$\|x_1^{(n)}-x_2^{(n)}\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Из неравенств (1), (2) Кларксона следует, что пространство $L_p(\mathscr{E})$ $(1<p<\infty)$ равномерно выпукло. В самом деле, пусть

$$\|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E})}=\|\cdot\| \quad\text{и}\quad \|f_1^{(n)}\|=\|f_2^{(n)}\|=1.$$

Тогда из (1), (2) следует, что

$$\left\|\frac{f_1^{(n)}-f_2^{(n)}}{2}\right\|^{\lambda}\leqslant 1-\left\|\frac{f_1^{(n)}+f_2^{(n)}}{2}\right\|^{\lambda}, \tag{3}$$

где $\lambda=p$ в случае (1) и $\lambda=q$ в случае (2). Если теперь

$$\max_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}\left(1-\|\alpha f_1^{(n)}+(1-\alpha)f_2^{(n)}\|\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

то

$$1-\left\|\frac{f_1^{(n)}+f_2^{(n)}}{2}\right\|\to 0.$$

Но тогда правая часть (3) стремится к нулю, а с ней и левая. Значит,

$$\|f_1^{(n)}-f_2^{(n)}\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

1.3.6. Теорема. *Пусть E (в частности, $L_p(\mathscr{E})$, $1<p<\infty$) есть равномерно выпуклое банахово пространство, $\mathfrak{M}$ его подпространство и $y\in E-\mathfrak{M}$.*

Тогда существует, и притом единственный, элемент $u\in\mathfrak{M}$, наилучшим образом приближающий y при помощи элементов из $\mathfrak{M}$:

$$\|y-u\|=\inf_{x\in\mathfrak{M}}\|y-x\|. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть

$$\inf_{x\in\mathfrak{M}}\|y-x\|=d \qquad (d>0);$$

тогда существует минимизирующая последовательность элементов $x_n\in\mathfrak{M}$, для которых

$$\|y-x_n\|=d+\varepsilon_n \qquad (\varepsilon_n\to 0,\ \varepsilon_n\geqslant 0).$$

Будем считать, что x, x' обозначают какие-то элементы $\mathfrak{M}$. Очевидно, элементы

$$w_n=\frac{y-x_n}{d+\varepsilon_n}$$

имеют единичные нормы и для любых α, $\beta \geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$,

$$0 \leqslant 1-\|\alpha w_n+\beta w_m\| =$$
$$= 1-\left\|\left(\frac{\alpha}{d+\varepsilon_n}+\frac{\beta}{d+\varepsilon_m}\right)y-x\right\| = 1-\left(\frac{\alpha}{d+\varepsilon_n}+\frac{\beta}{d+\varepsilon_m}\right)\|y-x'\| \leqslant$$
$$\leqslant 1-\left(\frac{\alpha}{d+\varepsilon_n}+\frac{\beta}{d+\varepsilon_m}\right)d=\eta_{nm} \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0,$$

равномерно по рассматриваемым α, β.

В таком случае, согласно определению равномерно выпуклого пространства,

$$\|w_n-w_m\| \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0.$$

Но

$$\|w_n-w_m\|=\left\|y\left(\frac{1}{d+\varepsilon_n}-\frac{1}{d+\varepsilon_m}\right)-\left(\frac{x_n}{d+\varepsilon_n}-\frac{x_m}{d+\varepsilon_m}\right)\right\| =$$
$$=\left\|\frac{x_n}{d+\varepsilon_n}-\frac{x_m}{d+\varepsilon_m}\right\|+o(1)=\frac{1}{d}\|x_n-x_m\|+o(1) \qquad (n,\ m\to\infty),$$

так как элементы x_n, x_m ограничены по норме. Мы доказали, что

$$\|x_n-x_m\| \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0.$$

Вследствие полноты E и замкнутости $\mathfrak{M}$ существует элемент $u \in \mathfrak{M}$ такой, что $x_n \to u$ и, очевидно, выполняется (1).

Пусть теперь существует еще один элемент u', для которого выполняется (1). Для $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ имеем

$$d \leqslant \|\alpha u+(1-\alpha)u'-y\| \leqslant \alpha\|u-y\|+(1-\alpha)\|u'-y\| =$$
$$=\alpha d+(1-\alpha)d=d.$$

Следовательно, $\|\alpha u+(1-\alpha)u'-y\|=d$. Таким образом,

$$\left\|\alpha\frac{u-y}{d}+(1-\alpha)\frac{u'-y}{d}\right\|=1,$$

причем $\left\|\frac{u-y}{d}\right\|=\left\|\frac{u'-y}{d}\right\|=1$. Вследствие равномерной выпуклости пространства $E\left(x_1^{(n)}=\frac{u-y}{d},\ x_2^{(n)}=\frac{u'-y}{d}\right)$, получим

$$\frac{u-y}{d}=\frac{u'-y}{d},$$

т. е. $u=u'$.

1.3.7. Нам часто еще придется пользоваться следующими фактами, относящимися к теории функций действительного переменного.

Пусть f, $f_k \in L_p(\mathscr{E})$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ и

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|_{L_p(\mathscr{E})}=0 \quad (k\to\infty), \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{1}$$

Тогда существует подпоследовательность $\{k_l\}$ натуральных чисел такая, что

$$\lim_{k_l\to\infty} f_{k_l}(x)=f(x) \text{ почти для всех } x\in\mathscr{E}. \tag{2}$$

Таким образом, существует множество $\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}$, отличное от $\mathscr{E}$, на множество меры нуль, такое, что f и f_{k_l} $(l=1, 2, \ldots)$ на $\mathscr{E}'$ конечны и равенство (2) выполняется для всех $x\in\mathscr{E}'$; отсюда легко следует, что если наряду с (1) при некотором p_* имеет место $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_*-f_k\|_{L_{p^*}(\mathscr{E})}=0$, то $f_*=f$ на $\mathscr{E}$, т. е. функции f и f_* эквивалентны на $\mathscr{E}$.

Если измеримое множество $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1\times\mathscr{E}_2$ есть топологическое произведение двух измеримых множеств $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, т. е. каждая точка $x\in\mathscr{E}$ может быть представлена в виде пары $x=(y, z)$, где $y\in\mathscr{E}_1$, $z\in\mathscr{E}_2$, то можно считать, что

$$f(x)=f(y, z), \quad f_k(x)=f_k(y, z) \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

В этом случае

$$\|f-f_k\|_{L_p(\mathscr{E})}=\left(\int\limits_{\mathscr{E}_1}\Psi_k(y)\,dy\right)^{1/p} \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

где

$$\Psi_k(y)=\int\limits_{\mathscr{E}_2}|f(y, z)-f_k(y, z)|^p\,dz=\|f(y, z)-f_k(y, z)\|^p_{L_p(\mathscr{E}_2)}, \tag{3}$$

— суммируемые на $\mathscr{E}_1$ (принадлежащие к $L(\mathscr{E}_1)$) неотрицательные функции.

Из равенства (1) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\mathscr{E}_1}\Psi_k(y)\,dy=0,$$

и, таким образом, применяя к Ψ_k отмеченное выше свойство (где надо считать $p=1$ и заменить $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}_1$), мы придем к следующей лемме.

1.3.8. Лемма. *Из равенства* 1.3.7 (1), *где измеримое множество* $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1\times\mathscr{E}_2$ *есть топологическое произведение измеримых множеств* $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, *следует, что для некоторой подпоследовательности* $\{k_l\}$ *натуральных чисел* k_l *почти для всех* $y\in\mathscr{E}_1$, *выполняется равенство*

$$\lim_{k_l\to\infty}\|f(y, z)-f_{k_l}(y, z)\|_{L_p(\mathscr{E}_2)}=0. \tag{1}$$

Из доказанной леммы и замечания в начале п. 1.3.7 вытекает еще такая лемма.

1.3.9. Лемма. *Пусть множество* $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1\times\mathscr{E}_2$ *определяется, как в предыдущей лемме, и пусть для последовательности функ-*

ций $f_k \in L_p(\mathscr{E})$ $(k=1, 2, \ldots)$ *и функции* f $(f \in L_p(\mathscr{E}))$ *выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L_p(\mathscr{E})} = 0 \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{1}$$

Пусть, кроме того, для некоторого числа p' $(1 \leqslant p' \leqslant \infty)$, *вообще отличного от* p, *и функции* f_* *выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_*(y, z) - f_k(y, z)\|_{L_{p'}(\mathscr{E}_2)} = 0 \tag{2}$$

почти для всех $y \in \mathscr{E}_1$.

Тогда $f = f_*$, *т. е. функции* $f(x)$ *и* $f_*(x)$ *эквивалентны на* $\mathscr{E}$.

Доказательство. В силу предыдущей леммы для некоторой подпоследовательности натуральных чисел $\{k_l\}$ и на некотором множестве $\mathscr{E}_1' \subset \mathscr{E}_1$, отличном от $\mathscr{E}_1$ на множество меры (в смысле $\mathscr{E}_1$) нуль, имеет место равенство 1.3.8 (1) для всех $y \in \mathscr{E}_1'$. Можно считать, что равенство (2) также имеет место для всех $y \in \mathscr{E}_1'$. Итак, если $y \in \mathscr{E}_1'$, то для него выполняются одновременно (1) и (2).

Но тогда равенство $f(y, z) = f_*(y, z)$ имеет место для почти всех $z \in \mathscr{E}_2$, т. е. почти всюду на измеримом множестве $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$.

Отметим еще следующие теоремы.

1.3.10. Теорема (П. Фату)*). *Если последовательность измеримых неотрицательных функций* $\{f_n\}$ *почти всюду на измеримом множестве* $\mathscr{E} \subset R_n$ *сходится к функции* $F(x)$, *то*

$$\int_{\mathscr{E}} F\, dx \leqslant \sup \left\{ \int_{\mathscr{E}} f_n\, dx \right\}.$$

1.3.11. Теорема**). *Из ограниченной в смысле* $L_p(\mathscr{E})$ $(1 < p < \infty)$ *последовательности функций* $\{f_k\}$:

$$\|f_k\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant M$$

можно выделить подпоследовательность $\{f_{k_l}\}$, *слабо сходящуюся к некоторой функции* $f \in L_p(\mathscr{E})$ *с* $\|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant M$. *Это значит, что имеет место равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathscr{E}} f_k \varphi\, dx = \int_{\mathscr{E}} f\varphi\, dx$$

для любых функций $\varphi \in L_q(\mathscr{E})$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

1.3.12. Функция $f \in L_p(\mathscr{E})$ называется *непрерывной в целом в* $L_p(\mathscr{E})$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\|f(x+y) - f(x)\|_{L_p(\mathscr{E}_\delta)} < \varepsilon$$

*) См., например, книгу И. П. Натансона [1].

**) См., например, книгу В. И. Смирнова [1].

как только $|y|<\delta$. (Здесь $\mathscr{E}_\delta$ — множество таких $x\in\mathscr{E}$, что $x+y\in\mathscr{E}$ для любых y, удовлетворяющих неравенству $|y|<\delta$.)

Теорема. *Всякая функция* $f(x)\in L_p(\mathscr{E})$, $1\leqslant p<\infty$ *непрерывна в целом в* $L_p(\mathscr{E})$.

1.3.13. Мы будем широко пользоваться также следующими неравенствами при $1\leqslant p\leqslant\infty$:

$$\left(\sum_1^\infty |a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_1^\infty |a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_1^\infty |b_k|^p\right)^{1/p}, \tag{1}$$

$$\sum_1^\infty |a_kb_k|\leqslant\left(\sum_1^\infty |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_1^\infty |b_k|^q\right)^{1/q}, \text{ если } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{2}$$

где a_k, b_k — произвольные числа. Они называются соответственно *неравенством Минковского* и *неравенством Гёльдера для сумм.*

С помощью (1) устанавливается, что линейное n-мерное многообразие векторов $\xi=\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ с нормой

$$\|\xi\|_{l_p^n}=\left(\sum_1^n |\xi_k|^p\right)^{1/p}, \qquad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

есть нормированное пространство. В частности, из 1.2.4 следует, что для любых p и p' $(1\leqslant p<p'\leqslant\infty)$

$$c_1\|\xi\|_{l_p^n}\leqslant\|\xi\|_{l_{p'}^n}\leqslant c_2\|\xi\|_{l_p^n}, \tag{3}$$

где c_1, c_2 — положительные константы, не зависящие от ξ. Конечно, эти неравенства можно получить непосредственно, установив точные константы c_1, c_2.

1.4. Усреднение функций по Соболеву *)

Обозначим через

$$\sigma_\varepsilon=\{|x|\leqslant\varepsilon\}, \quad \sigma_1=\sigma,$$

шар в $R=R_n$ радиуса ε с центром в нулевой точке.

Пусть $\psi(t)$ есть бесконечно дифференцируемая четная неотрицательная функция от одной переменной t $(-\infty<t<\infty)$, равная нулю для $|t|\geqslant 1$ такая, что

$$\int\psi(|t|)\,dt=1. \tag{1}$$

В качестве ψ можно взять функцию

$$\psi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_n}e^{\frac{t^2}{t^2-1}}, & 0\leqslant|t|<1,\\ 0, & 1\leqslant|t|,\end{cases}$$

*) С. Л. Соболев [4].

где константа λ_n подобрана так, чтобы выполнялось условие (1).

Функция

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varphi(x) = \psi(|x|), \quad \varepsilon > 0, \tag{2}$$

бесконечно дифференцируема на R (учесть четность ψ), имеет носитель на σ_ε (см. далее 1.4.1) и удовлетворяет условию

$$\int \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = 1. \tag{3}$$

Пусть $g \subset R_n = R$ — открытое множество и $f \in L_p(g)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Положим $f = 0$ на $R - g$. Функция

$$f_\varepsilon(x) = f_{g,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int \varphi\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right) f(u)\,du = \frac{1}{\varepsilon^n}\int \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) f(x-u)\,du \tag{4}$$

называется ε-усреднением по Соболеву. Это, очевидно, бесконечно дифференцируемая функция на R.

Пока мы обратим внимание на следующее важное свойство f_ε:

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0 \quad (\varepsilon \to 0, \ \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(R)}, \quad 1 \leqslant p < \infty). \tag{5}$$

Оно показывает, что при конечном $p\,(1 \leqslant p < \infty)$ множество бесконечно дифференцируемых на R функций всюду плотно в $L_p(g)$, т. е. независимо от того, как устроено открытое множество g, для каждой функции $f \in L_p(g)$ можно указать семейство бесконечно дифференцируемых на R функций f_ε (ее соболевских усреднений) так, что выполняется (5).

В самом деле, в силу (3)

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \\ = \frac{1}{\varepsilon^n}\int \varphi\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right)[f(u) - f(x)]\,du = \int \varphi(v)\,[f(x - \varepsilon v) - f(x)]\,dv,$$

откуда, применив обобщенное неравенство Минковского и учитывая, что φ имеет носитель на σ, получим

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \leqslant \int_\sigma \varphi(v)\,\|f(x - \varepsilon v) - f(x)\|_p\,dv \leqslant \\ \leqslant \sup_{|v| < \varepsilon} \|f(x - v) - f(x)\|_p \to 0 \quad (\varepsilon \to 0). \tag{6}$$

В случае $p = \infty$ свойство (5) не выполняется. Однако если считать, что $g = R$ и $f(x)$ равномерно непрерывна на R $(f \in C(R))$, то (6) запишется в виде

$$\|f_\varepsilon - f\|_\infty \leqslant \sup_{|v| < \varepsilon} |f(x - v) - f(x)| \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Отметим еще неравенство

$$\|f_\varepsilon\|_p \leqslant \frac{1}{\varepsilon^n}\int \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\|f(x-u)\|_p\,du = \|f\|_p \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{7}$$

1.4.1. Финитные функции. Пусть $g \subset R$ — открытое множество. Функция $\varphi(x)$ называется *финитной* в g, если она определена на g и имеет компактный носитель, лежащий в g. *Носителем* функции называется замыкание множества всех точек, где она не равна нулю.

Лемма. *Если $f \in L_p(g)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то существует последовательность бесконечно дифференцируемых финитных в g функций φ_l, для которых выполняются свойства*

$$\|f-\varphi_l\|_p \to 0 \qquad (l \to \infty),$$

$$|\varphi_l(x)| \leqslant \sup_{x\in g}\operatorname{vrai}|f(x)|.$$

Если f одновременно принадлежит к L_p и $L_{p'}$ $(1 \leqslant p,\ p' < \infty)$, то последовательность $\{\varphi_l\}$ может быть взята одной и той же.

Доказательство. Зададим $\eta > 0$ и подберем открытое ограниченное множество $\Omega \subset \bar\Omega \subset g$ такое, чтобы

$$\|f\|_{L_p(g-\Omega)} < \frac{\eta}{2}.$$

Обозначим через d расстояние от Ω до границы g ($d>0$; если g не ограничено, то $d=\infty$). Введем еще функцию

$$f_\Omega(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Ее ε-усреднение $f_{\Omega,\varepsilon} = \varphi$ при $\varepsilon < d$ есть бесконечно дифференцируемая финитная функция в g, для которой выполняются неравенства

$$\|f-f_{\Omega,\varepsilon}\|_{L_p(g)} \leqslant \|f-f_\Omega\|_{L_p(g)} + \|f_\Omega - f_{\Omega,\varepsilon}\|_{L_p(g)} =$$

$$= \|f\|_{L_p(g-\Omega)} + \|f_\Omega - f_{\Omega,\varepsilon}\|_{L_p(g)} < \frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2} = \eta,$$

если только ε достаточно мало.

Далее (см. 1.4 (7))

$$|f_{\Omega,\varepsilon}(x)| \leqslant \sup_{x\in R}\operatorname{vrai}|f_\Omega(x)| \leqslant \sup_{x\in R}\operatorname{vrai}|f(x)|.$$

Поэтому, если $\eta = \eta_l \to 0$, то, считая, что $\varepsilon = \varepsilon_l$, $\Omega = \Omega_l$, мы получим, что функции $\varphi_l = f_{\Omega_l,\varepsilon_l}$ удовлетворяют требованиям леммы. При этом, если одновременно $f \in L_p$, $L_{p'}$, то для обоих p и p' можно подобрать единые Ω_l и ε_l, а следовательно, и φ_l.

1.4.2. Лемма. *Если $f \in L_\infty(g)$ (измеримая и существенно ограниченная на открытом множестве $g \subset R$ функция), то* *существует последовательность бесконечно дифференцируемых финитных в g функций φ_l, удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{l\to\infty} \varphi_l(x) = f(x) \text{ почти всюду на } g, \tag{1}$$

$$|\varphi_l(x)| \leqslant \sup_{x\in g} \text{vrai} |f(x)|. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через g_N пересечение g с шаром $|x| < N$, и пусть η_N монотонно убывает к нулю ($N = 1, 2, \ldots$). Так как $f \in L(g_N)$, то можно указать финитную в g_N, следовательно в g, функцию f_N такую, что

$$\|f - f_N\|_{L(g_N)} < \eta_N \tag{3}$$

и

$$|f_N(x)| \leqslant \sup_{x\in g} \text{vrai} |f(x)|. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что из последовательности $\{f_N\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_l\}$, подчиняющуюся требованиям леммы.

1.5. Обобщенные функции

Введем класс S (Л. Шварц [1]) основных функций $\varphi = \varphi(x)$. Функция φ класса S определена на R, комплекснозначна ($\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, φ_1, φ_2 действительны), бесконечно дифференцируема на R и такова, что для любого неотрицательного числа l (достаточно целого l) и неотрицательного целого вектора $k = (k_1, \ldots, k_n)$

$$\sup_x (1 + |x|^l) |\varphi^{(k)}(x)| = \varkappa(l, k, \varphi) < \infty,$$

где

$$\varphi^{(k)} = \frac{\partial^{|k|}\varphi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \qquad |k| = \sum_{j=1}^{n} k_j. \tag{1}$$

Положим $L_p = L_p(R)$. Из (1), в частности, следует, что

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leqslant \frac{1}{2}\varkappa(0, k, \varphi) < \infty,$$

т. е. функция $\varphi^{(k)} \in S$ ограничена ($\varphi^{(k)} \in L_\infty$). Далее $\varphi^{(k)} \in L_p$ ($1 \leqslant p < \infty$), потому что

$$\int |\varphi^{(k)}(x)|^p dx \leqslant c_1 \int \frac{\left|\varphi^{(k)}(x)\left(1 + |x|^{\frac{n+1}{p}}\right)\right|^p dx}{(1+|x|)^{n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \varkappa^p\left(\frac{n+1}{p}, k, \varphi\right) \int \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}} = c_2 \varkappa^p\left(\frac{n+1}{p}, k, \varphi\right) < \infty,$$

где n — размерность R. Таким образом, при любом $\boldsymbol{k}$

$$\varphi^{(\boldsymbol{k})} \in L_p \quad \text{и} \quad \|\varphi^{(\boldsymbol{k})}\|_{L_p} \leqslant c\varkappa\left(\frac{n+1}{p},\ \boldsymbol{k},\ \varphi\right). \tag{2}$$

Кроме того,

$$|\varphi^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})| \leqslant \frac{\varkappa(1,\ \boldsymbol{k},\ \varphi)}{1+|\boldsymbol{x}|} \to 0 \qquad (|\boldsymbol{x}| \to \infty). \tag{3}$$

Если $\varphi_m,\ \varphi \in S$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$ и для любых неотрицательных целого числа l и целого вектора $\boldsymbol{k}$

$$\varkappa(l,\ \boldsymbol{k},\ \varphi_m - \varphi) \to 0 \qquad (m \to \infty),$$

то будем писать

$$\varphi_m \to \varphi\,(S).$$

Про функцию ψ, бесконечно дифференцируемую на R, будем говорить, что она имеет *полиномиальный рост*, если для любого неотрицательного вектора $\boldsymbol{k}$ существует $l = l(\boldsymbol{k})$, так что

$$|\psi^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})| < c\,(1+|\boldsymbol{x}|^l),$$

где c не зависит от $\boldsymbol{x}$.

Если $\varphi \in S$, то $\psi\varphi \in S$, потому что

$$(\psi\varphi)^{(\boldsymbol{k})} = \sum_{\boldsymbol{s} \leqslant \boldsymbol{k}} C_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \psi^{(\boldsymbol{s})}\varphi^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{s})}$$

$$(\boldsymbol{k} = (k_1,\ \ldots,\ k_n), \quad \boldsymbol{s} = (s_1,\ \ldots,\ s_n),$$

$$C_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} = \frac{\boldsymbol{k}!}{\boldsymbol{s}!\,(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{s})!}, \qquad \boldsymbol{k}! = \prod_{j=1}^{n} k_j!),$$

и если m — натуральное число, то

$$|(1+|\boldsymbol{x}|^m)\,\psi^{(\boldsymbol{s})}\varphi^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{s})}| \leqslant c_1\,|(1+|\boldsymbol{x}|^m)(1+|\boldsymbol{x}|^{l(\boldsymbol{s})})\,\varphi^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{s})}| \leqslant$$
$$\leqslant c_2\,|(1+|\boldsymbol{x}|^{m+l(\boldsymbol{s})})\,\varphi^{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{s})}| \leqslant c_2\varkappa(m+l(\boldsymbol{s}),\ \boldsymbol{k}-\boldsymbol{s},\ \varphi).$$

Больше того, эти неравенства показывают, что если

$$\varphi_m,\ \varphi \in S \quad \text{и} \quad \varphi_m \to \varphi\,(S), \quad \text{то} \quad \psi\varphi_m \to \psi\varphi\,(S).$$

Преобразование Фурье функции φ будем обозначать так:

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(\boldsymbol{\lambda})\, e^{-i\boldsymbol{\lambda x}}\, d\boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{\lambda x} = \sum_{1}^{n} \lambda_j x_j,$$

и обратное к нему преобразование так:

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(\boldsymbol{\lambda})\, e^{i\boldsymbol{\lambda x}}\, d\boldsymbol{\lambda}.$$

Покажем, что если $\varphi \in S$, то $\tilde{\varphi}$, $\hat{\varphi} \in S$ и, каковы бы ни были неотрицательное число l и целый вектор $\boldsymbol{k}$,

$$(1+|\boldsymbol{x}|^l)\,|\tilde{\varphi}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})| \leqslant c_{l,\boldsymbol{k}} \sum_{(l',\boldsymbol{k}') \in \mathscr{E}_{l\boldsymbol{k}}} \varkappa(l', \boldsymbol{k}', \varphi), \tag{4}$$

где $c_{l,\boldsymbol{k}}$ — константа, зависящая от $(l, \boldsymbol{k})$, и $\mathscr{E}_{l\boldsymbol{k}}$ — зависящее от $(l, \boldsymbol{k})$ конечное множество пар $(l', \boldsymbol{k}')$. Отсюда следует, в частности, что если φ_m, $\varphi \in S$, $\varphi_m \to \varphi\,(S)$, то $\tilde{\varphi}_m \to \tilde{\varphi}\,(S)$ и $\hat{\varphi}_m \to \hat{\varphi}\,(S)$.

В самом деле,

$$\tilde{\varphi}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x}) = \int \psi(\boldsymbol{\lambda})\, e^{-i\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{\lambda},$$

где

$$\psi(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{(-i\boldsymbol{\lambda})^{\boldsymbol{k}}}{(2\pi)^{n/2}}\,\varphi(\boldsymbol{\lambda}) \qquad \left(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} = \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n}\right).$$

Очевидно, что $\psi(\boldsymbol{\lambda}) \in S$,

$$(1+|\boldsymbol{x}|) \leqslant (1+|x_1|+\ldots+|x_n|) \tag{5}$$

и

$$|\tilde{\varphi}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})| \leqslant c \int |\boldsymbol{\lambda}|^{|\boldsymbol{k}|}\,|\varphi(\boldsymbol{\lambda})|\, d\boldsymbol{\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant c \int \frac{|\boldsymbol{\lambda}|^{|\boldsymbol{k}|}\, d\boldsymbol{\lambda}}{1+|\boldsymbol{\lambda}|^{|\boldsymbol{k}|+n+2}}\, \varkappa(|\boldsymbol{k}|+n+2,\, 0,\, \varphi) \leqslant c_1\varkappa(|\boldsymbol{k}|+n+2,\, 0,\, \varphi). \tag{6}$$

Далее для $|x_j| \leqslant 1$

$$|x_j\tilde{\varphi}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})| \leqslant |\tilde{\varphi}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})| \leqslant c_1\varkappa(|\boldsymbol{k}|+n+2,\, 0,\, \varphi),$$

а для $|x_j| \geqslant 1$, считая, что Δ_N есть часть R, где $|\lambda_j| < N$, и учитывая (см. (3)), что $\psi \to 0$ при $\lambda_j = \pm N \to \infty$, получим

$$\tilde{\varphi}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x}) = \lim_{N\to\infty} \left\{ \psi(\boldsymbol{\lambda})\, \frac{e^{-i\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}}}{-ix_j}\Bigg|_{\lambda_j=-N}^{\lambda_j=N} + \frac{1}{ix_j} \int_{\Delta_N} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j}\, e^{-i\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{\lambda} \right\} =$$

$$= \frac{1}{ix_j} \int \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j}\, e^{-i\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{\lambda} =$$

$$= \frac{c}{x_j} \int \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_j} \left(\prod_{s=1}^{n} \lambda_s^{k_s} \right) \varphi(\boldsymbol{\lambda}) + \prod_{s=1}^{n} \lambda_s^{k_s}\, \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_j} \right) e^{-i\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{\lambda}. \tag{7}$$

Так как $\left| \dfrac{\partial}{\partial\lambda_j} \left(\prod\limits_{s=1}^{n} \lambda_s^{k_s} \right) \right| \leqslant c_1 |\boldsymbol{\lambda}|^{|\boldsymbol{k}|-1}$ (при $\boldsymbol{k}=0$ надо заменить $|\boldsymbol{k}|-1$ на 0), то

$$|x_j\tilde{\varphi}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})| \leqslant c_2 \int \frac{|\boldsymbol{\lambda}|^{|\boldsymbol{k}|-1} + |\boldsymbol{\lambda}|^{|\boldsymbol{k}|}}{1+|\boldsymbol{\lambda}|^{n+|\boldsymbol{k}|+2}} \big(\varkappa(n+|\boldsymbol{k}|+2,\, 0,\, \varphi) +$$

$$+ \varkappa(n+|\boldsymbol{k}|+2,\, \boldsymbol{e}_j,\, \varphi)\big)\, d\boldsymbol{\lambda}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{e}_j$ — направленный по оси x_j единичный вектор.

Из (5), (6), (8) следует, что

$$(1+|x|)\,|\tilde{\varphi}^{(k)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant c_{1k}\left(\varkappa(n+|k|+2,\ 0,\ \varphi)+\sum_{j=1}^{n}\varkappa(n+|k|+2,\ e_j,\ \varphi)\right),$$

и мы доказали неравенство (4) при любом k и $l=1$. При произвольном l доказательство аналогично, нужно только в равенстве (7) произвести интегрирование по частям вместо одного l раз.

Положим для $\varphi,\ \psi\in S$ *)

$$(\varphi,\ \psi)=\int\varphi(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Из теории интегралов Фурье известно, что

$$(\tilde{\varphi},\ \psi)=(\varphi,\ \tilde{\psi}),\qquad (\hat{\varphi},\ \psi)=(\varphi,\ \hat{\psi}).$$

Линейный и непрерывный на S функционал $(f,\ \varphi)$ называется *обобщенной функцией* (*над* S).

Таким образом, если $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_m,\ \varphi\in S,\ c_1,\ c_2$ — комплексные числа и $\varphi_m\to\varphi\,(S)$, то

$$(f,\ c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1(f,\ \varphi_1)+c_2(f,\ \varphi_2)$$
$$(f,\ \varphi_m)\to(f,\ \varphi)\qquad(m\to\infty).$$

Множество всех обобщенных (над S) функций f обозначается через S'.

Производная от $f\in S'$ по переменной x_j определяется как линейный функционал

$$(f'_{x_j},\ \varphi)=-(f,\ \varphi'_{x_j}).$$

Если $f(x)$ — обычная измеримая функция, определенная на R и такая, что существует интеграл

$$(f,\ \varphi)=\int f(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{9}$$

для всех $\varphi\in S$, который оказывается линейным функционалом над S, то обобщенную функцию, определяемую равенством (9), *отождествляют* с $f(x)$. Например, если $f\in L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, то интеграл (9) есть линейный функционал над S. В самом деле,

$$\int|f(x)\,\varphi(x)|\,dx\leqslant\left(\int|f|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int|\varphi|^q\,dx\right)^{1/q}\leqslant c\varkappa\left(\frac{n+1}{q},\ 0,\ \varphi\right)$$
$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

*) Обращаем внимание читателя, что под интегралом ψ взято без знака комплексного сопряжения (см. В. С. Владимиров [1]).

и следовательно, интеграл (9) конечен для всех $\varphi \in S$ и непрерывен в S. Линейность (9) очевидна.

Если $f(x) \in S$, $a \in R$ и $c \neq 0$ — действительное число, то $f(x+a)$, $f(cx) \in S'$ и определяются соответственно как функционалы

$$(f(x+a),\ \varphi(x)) = (f(x),\ \varphi(x-a)),$$
$$f(cx) = \frac{1}{|c|}\left(f(x),\ \varphi\left(\frac{x}{c}\right)\right).$$

Если f есть обобщенная функция, а ψ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, то функционал над S, определяемый равенством

$$(f\psi,\ \varphi) = (f,\ \psi\varphi),$$

очевидно, также есть обобщенная функция, обозначаемая через $f\psi$ или ψf $(f\psi = \psi f)$.

Если ψ_1 и ψ_2 — две бесконечно дифференцируемые функции с полиномиальным ростом, то их произведение обладает тем же свойством; при этом легко видеть, что если $f \in S'$, то

$$(\psi_1\psi_2) f = \psi_1 (\psi_2 f).$$

Ясно, что если $f(x)$ есть обычная, принадлежащая к L, а $\psi(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция с полиномиальным ростом, то обычное произведение $f(x)\psi(x)$ соответствует по правилу отождествления обобщенной функции $f\psi$ (произведению обобщенной функции f и ψ).

Преобразование Фурье (прямое и обратное) для $f \in S'$ определяется соответственно равенствами

$$(\tilde{f},\ \varphi) = (f,\ \tilde{\varphi}),\ (\hat{f},\ \varphi) = (f,\ \hat{\varphi})\ (\varphi \in S).$$

Так как $\varphi_m \to \varphi\,(S)$ $(\varphi_m,\ \varphi \in S)$ влечет $\tilde{\varphi}_m \to \tilde{\varphi}$, $\hat{\varphi}_m \to \hat{\varphi}\,(S)$, то $\tilde{f}$, $\hat{f} \in S'$.

Если $f(x) \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ есть обычная суммируемая в p-й степени на R функция, то она, как мы знаем, есть обобщенная функция и имеет преобразование Фурье $\tilde{f}$, являющееся, вообще говоря, обобщенной функцией. Если $f \in L_2$, то, как известно, $\tilde{f} \in L_2$ (теорема Пэли — Винера, см. книгу Н. И. Ахиезера [1]),

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{N \to \infty} \int_{\Delta_N} f(t)\, e^{-ixt}\, dt,$$

$$\Delta_N = \{|x_j| < N;\ j = 1,\ \ldots,\ n\},$$

и сходимость понимается в смысле L_2. При этом $\int \tilde{f}\varphi\, dx = \int f\tilde{\varphi}\, dx$ (для всех $\varphi \in S$), что показывает, что в данном случае обычное преобразование Фурье функции совпадает (отождествляется) с обобщенным.

Пусть $\varphi \in S$; тогда

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (iu)^k \tilde{\varphi}(u) e^{ixu} du$$

и

$$\widetilde{\varphi^{(k)}} = (iu)^k \tilde{\varphi}(u) \qquad (u^k = u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n}).$$

Далее

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (-iu)^k \varphi(u) e^{-ixu} du = \widetilde{(-iu)^k \varphi(u)}.$$

Для обобщенных функций $f \in S'$ имеют место аналогичные равенства

$$\widetilde{f^{(k)}} = (iu)^k \tilde{f}, \qquad \tilde{f}^{(k)} = \widetilde{(-iu)^k f}. \tag{10}$$

В самом деле, если $f \in S'$, $\varphi \in S$, то

$$\left(\widetilde{f^{(k)}}, \varphi\right) = (-1)^{|k|} (f, \tilde{\varphi}^{(k)}) = (-1)^{|k|} \left(f, \widetilde{(-iu)^k \varphi}\right) = ((iu)^k \tilde{f}, \varphi),$$

$$(\tilde{f}^{(k)}, \varphi) = (-1)^{|k|} \left(f, \widetilde{\varphi^{(k)}}\right) = (-1)^{|k|} (f, (iu)^k \tilde{\varphi}) = \left(\widetilde{(-iu)^k f}, \varphi\right).$$

Пусть по-прежнему $\varphi \in S$ и

$$\Delta_N = \{ |x_j| < N;\ j = 1, \dots, n \} \subset R.$$

Тогда

$$(\tilde{1}, \varphi) = (1, \tilde{\varphi}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int dx \int \varphi(t) e^{-ixt} dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{N \to \infty} \int \varphi(t)\, dt \int\limits_{\Delta_N} e^{-ixt} dx =$$

$$= (2\pi)^{n/2} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\pi^n} \int \varphi(t) \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin N t_j}{t_j} dt = (2\pi)^{n/2} \varphi(0).$$

Последнее равенство следует из обычной теории интеграла Фурье.

Таким образом,

$$\tilde{1} = (2\pi)^{n/2} \delta(x),$$

где $\delta(x)$ есть известная *дельта-функция*, т. е. обобщенная функция, определяемая равенством

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \qquad (\varphi \in S).$$

Отсюда, если $k=(k_1, \ldots, k_n)$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами, то

$$\widetilde{x^k}=i^k\,\widetilde{(-ix)^k\cdot 1}=i^k(2\pi)^{n/2}\,\delta^{(k)}(x). \tag{11}$$

Далее

$$(\tilde{\delta}, \varphi)=(\delta, \tilde{\varphi})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \varphi(t)\,dt,$$

т. е.

$$\tilde{\delta}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}. \tag{12}$$

Для функций f, $f_l \in S'$ $(l=1, 2, \ldots)$ пишут

$$f_l \to f\,(S'), \quad \text{если} \quad (f_l, \varphi)\to(f, \varphi) \tag{13}$$

для всех $\varphi \in S$, и говорят, что f_l стремится к f в смысле S' или еще *слабо*. Если f_l и f — обычные интегрируемые функции такие, что почти всюду

$$f_l(x)\to f(x) \qquad (l\to\infty)$$

и

$$|f_l(x)|\leqslant \Phi(x)\in L \qquad (l=1, 2, \ldots),$$

где Φ не зависит от l, то, очевидно, f_l, $f\in S'$ и, согласно теореме Лебега, $f_l\to f$ слабо.

Из (13) следует, очевидно, что если $f_l \to f\,(S')$, то

$$\tilde{f}_l\to\tilde{f}, \quad \hat{f}_l\to\hat{f}\,(S'), \tag{14}$$

$$\lambda f_l\to\lambda f\,(S'), \tag{15}$$

$$f_l^{(s)}\to f^{(s)}\,(S'), \tag{16}$$

где λ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста.

Пусть $\varphi\in S$, $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $t=(t_1, \ldots, t_n)$ — действительные векторы. Тогда

$$\widehat{e^{i\mu t}\tilde{\varphi}}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{i\mu t}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\varphi(u)\,e^{-iut}\,du\,e^{ixt}\,dt=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ixt}\,dt\int\varphi(\mu+v)\,e^{-ivt}\,dv=\varphi(\mu+x). \tag{17}$$

Если теперь $f\in S'$, то, учитывая, что функция $e^{i\mu t}$ бесконечно дифференцируема и ограничена вместе со своими производными (полиномиального роста), получим для $\varphi\in S$

$$\left(\widehat{e^{i\mu t}\hat{f}}, \varphi\right)=\left(f, \widehat{e^{i\mu t}\tilde{\varphi}}\right)=(f, \varphi(\mu+x))=(f(x-\mu), \varphi(x)),$$

т. е.

$$\widetilde{e^{i\mu t}\tilde{f}} = f(\boldsymbol{x}-\mu) \qquad (f \in S'). \tag{18}$$

Далее

$$\left(\widehat{e^{i\mu t}\tilde{f}},\ \varphi\right) = \left(f,\ \widetilde{e^{i\mu t}\hat{\varphi}}\right) = (f(\boldsymbol{x}),\ \varphi(\boldsymbol{x}-\mu)),$$

т. е.

$$\widehat{e^{i\mu t}\tilde{f}} = f(\boldsymbol{x}+\mu) \qquad (f \in S'). \tag{19}$$

1.5.1. Свертка. Мультипликатор. Мы часто будем иметь дело с ситуацией, когда некоторая измеримая функция $\mu(\boldsymbol{x})$ умножается на $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$, где $f \in L_p = L_p(R)$ $(R = R_n)$. Если $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ есть обычная функция, то естественно считать, что

$$\mu\tilde{f} = \mu(\boldsymbol{x})\tilde{f}(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

Однако и в этом как будто простом случае могут возникнуть трудности, заключающиеся в том, что наряду с определением $\mu\tilde{f}$ при помощи равенства (1) может быть другое определение $\mu\tilde{f}$ как некоторой обобщенной функции (принадлежащей к S'), и тогда возникает вопрос об идентифицировании этих двух определений.

В случае, если $\tilde{f} \in S'$ есть обобщенная функция, в нашем распоряжении пока имеется единственное определение $\mu\tilde{f}$ в предположении, что μ есть бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста. Именно $\mu\tilde{f}$ определяется как функционал

$$(\mu\tilde{f},\ \varphi) = (\tilde{f},\ \mu\varphi). \tag{2}$$

Если $\tilde{f} \in L_p$, то это определение согласуется с формулой (1) так как в этом случае

$$(\mu\tilde{f},\ \varphi) = \int [\mu(\boldsymbol{x})\tilde{f}(\boldsymbol{x})]\,\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int \tilde{f}(\boldsymbol{x})\,[\mu(\boldsymbol{x})\,\varphi(\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{x} = (\tilde{f},\ \mu\varphi).$$

Ниже будут введены другие определения $\mu\tilde{f}$, где μ принадлежит к некоторому классу измеримых ограниченных на $R = R_n$ функций, а $f \in L_p$. Этот параграф посвящается важному случаю, когда $\hat{\mu} = K \in L$. В этом случае функция

$$\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{\mu}(\boldsymbol{u})\,e^{-i\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}}\,d\boldsymbol{u}$$

ограничена и непрерывна на R, но, конечно, она не есть произвольная непрерывная на R функция.

Если $f \in S$, то функции $\tilde{f}$, $\mu\tilde{f}$, $\widehat{\mu\tilde{f}} \in S'$. Но они также могут быть вычислены средствами обычного анализа (пояснения ниже):

$$\widehat{\mu \tilde{f}} = \widehat{K\tilde{f}} = \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int e^{ixu}\, du \int K(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi \int f(\eta)\, e^{-iu\eta}\, d\eta =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int e^{ixu}\, du \int K(\xi)\, d\xi \int f(\lambda - \xi)\, e^{-iu\lambda}\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int e^{ixu}\, du \int e^{-iu\lambda}\, d\lambda \int K(\xi)\, f(\lambda - \xi)\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int K(\xi)\, f(\lambda - \xi)\, d\xi = K * f. \qquad (3)$$

Так как $f \in S$, то интеграл в третьем члене по η есть функция от u, принадлежащая к $S \subset L$; она умножается на интеграл по ξ, являющийся непрерывной ограниченной функцией; произведение принадлежит к L, и потому после умножения его на e^{ixu} и интегрирования по u получим непрерывную функцию $\widehat{k\tilde{f}}$ от x. Замена порядка интегрирования по ξ и по λ в четвертом равенстве законна, потому что $K, f \in L$ (в силу теоремы Фубини).

Интеграл в предпоследнем члене этих соотношений называется *сверткой* K и f; при этом в рассуждениях, где K фиксировано, а $f \in L_p$ — произвольная функция, K называется *ядром свертки*, функцию μ мы будем называть *мультипликатором* в L_p.

Правая часть (3) имеет смысл не только для $f \in S$, но и для $f \in L_p$. Каковы бы ни были функции $K \in L$ и $f \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, имеет смысл их свертка

$$K * f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int K(x-u)\, f(u)\, du = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int K(u)\, f(x-u)\, du, \qquad (4)$$

удовлетворяющая к тому же важному неравенству (см. 1.3.3(1))

$$\|K * f\|_p \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|K\|_L \|f\|_p \qquad (\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(R)},\ \ \|\cdot\|_L = \|\cdot\|_{L(R)}). \qquad (5)$$

Равенство (3), верное для функций $f \in S$, дает основание положить по определению

$$\mu \tilde{f} = \widetilde{K * f} \qquad (\hat{\mu} = K \in L,\ f \in L_p). \qquad (6)$$

Так как, согласно (5), $K * f \in L_p \subset S'$, то $\widetilde{K * f} \in S'$, и эту последнюю обобщенную функцию мы уславливаемся, таким образом, обозначать через $\mu \tilde{f}$.

Покажем, что для любой функции $f \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ существует не зависящая от μ $(\hat{\mu} \in L)$ последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций f_l такая, что при $l \to \infty$

$$f_l \to f\ (S') \quad \text{и} \quad \mu \tilde{f}_l \to \mu \tilde{f}\ (S'). \qquad (7)$$

Если p конечно, то определим (см. п. 1.4.1) последовательность финитных функций f_l таких, что

$$\|f-f_l\|_p \to 0 \qquad (l \to \infty),$$
$$\|(\hat{\mu} * f)-(\hat{\mu} * f_l)\|_p \leqslant \|\hat{\mu}\|_L \|f-f_l\|_p \to 0,$$

следовательно, и в слабом смысле $f_l \to f$ и $\mu \tilde{f}_l \to \mu \tilde{f}$. Если же $p=\infty$, то определим (см. 1.4.2) последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций f_l, ограниченно сходящуюся почти всюду, таким образом, слабо сходящуюся к f. В силу того, что $\hat{\mu} \in L$ и $f-f_l \in L_\infty$, функция

$$(\hat{\mu} * f)-(\hat{\mu} * f_l)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{\mu}(x-t)\,[f(t)-f_l(t)]\,dt$$

от x непрерывна и ограничена на R. На основании теоремы Лебега о пределе под знаком интеграла она ограниченно стремится для всех x к нулю, следовательно, как обобщенная функция она слабо стремится к нулю, т. е. имеет место (7).

Если $\hat{\mu}=K \in L$ и в то же время μ бесконечно дифференцируемая полиномиального роста, то в нашем распоряжении имеется два определения произведения $\mu \tilde{f}$ ($f \in L_p$). С одной стороны, это функционал

$$(\mu \tilde{f},\ \varphi)=(\tilde{f},\ \mu\varphi) \qquad (\varphi \in S),$$

а с другой — функционал (6). Покажем, что эти функционалы равны.

Пусть $\{f_l\}$ есть последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций, для которых $\mu \tilde{f}_l \to \mu \tilde{f}$ слабо. Тогда, если не только $\hat{\mu} \in L$, но и еще μ бесконечно дифференцируемая полиномиального роста, то

$$(\mu \tilde{f},\ \varphi)=\lim_{l \to \infty}(\mu \tilde{f}_l,\ \varphi)=\lim_{l \to \infty}(\tilde{f}_l,\ \mu\varphi)=(\tilde{f},\ \mu\varphi), \tag{8}$$

и мы доказали интересующее нас равенство функционалов.

Таким образом, определение (2) для бесконечно дифференцируемой функции μ полиномиального роста и определение (6), где $\hat{\mu} \in L$, не противоречат друг другу, какова бы ни была функция $f \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Если λ, μ — дифференцируемые функции полиномиального роста и $f \in S$, то мы знаем (см. 1.5), что

$$\lambda(\mu f)=\mu(\lambda f)=(\lambda\mu) f. \tag{9}$$

Если теперь $\hat{\lambda}=K_1 \in L$, $\hat{\mu}=K_2 \in L$, то и $\widehat{\lambda\mu} \in L$ и для всех $f \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$

$$\lambda(\mu \tilde{f})=\mu(\lambda \tilde{f})=(\lambda\mu)\tilde{f}.$$

В самом деле, легко проверяется методами обычного анализа, что при указанных условиях функция

$$K = K_1 * K_2 = \int K_1(x-u) K_2(u)\, du$$

принадлежит к L и имеет место

$$K_1 * (K_2 * f) = K_2 * (K_1 * f) = (K_1 * K_2) * f, \tag{11}$$

что (в силу (6)) эквивалентно (10). Мы не собираемся во всей общности рассматривать случай, когда мультипликатор есть произведение $\lambda\mu$, где $\hat{\lambda} \in L$, а μ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста. Это не понадобится нам в дальнейшем. Но есть один случай, который будет нам нужен — случай множителя $V^{-1}\mu V$, где $\hat{V}$, $\hat{\mu} \in L$ и V, — кроме того, положительная бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста. Если $f \in L_p$, то операция

$$V^{-1}\mu V\tilde{f} = V^{-1}(\mu(V\tilde{f}))$$

имеет смысл. В самом деле, $V\tilde{f}$ можно понимать в смысле (1) или (6); это приводит к одному и тому же результату; операцию $\mu(V\tilde{f})$ (над $V\tilde{f}$) во всяком случае можно понимать в смысле (6) ($\widehat{V\tilde{f}} \in L_p$!) и, наконец, последнюю операцию $V^{-1}(\mu V\tilde{f})$ (над $\mu V\tilde{f}$) во всяком случае можно понимать в смысле (2); для этого надо только заметить, что $\mu(V\tilde{f}) \in S'$, потому что $\widehat{\mu(V\tilde{f})} \in L_p$.

Важно, что имеет место равенство

$$V^{-1}\mu V\tilde{f} = (V^{-1}\mu V)\tilde{f} = \mu\tilde{f} \tag{12}$$

для всех $f \in L_p$. В самом деле, если f есть финитная функция, то оно сводится к соответствующему очевидному равенству между обычными функциями. Если же $f \in L_p$, то, как мы знаем, можно подобрать последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций f_l такую, что одновременно $\mu\tilde{f}_l \to \mu\tilde{f}$ и $(\mu V)\tilde{f}_l \to (\mu V)\tilde{f}$ слабо ($\widehat{\mu V} \in L$!). Но тогда, учитывая, что V^{-1} — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, и $V^{-1}\mu V\tilde{f}_l \to V^{-1}\mu V\tilde{f}$ слабо. Поэтому равенство (12) можно получить предельным переходом при $l \to \infty$ из уже установленного равенства

$$(V^{-1}\mu V\tilde{f}_l, \varphi) = (\mu\tilde{f}_l, \varphi) \qquad (\varphi \in S).$$

1.5.1.1. Общее определение мультипликатора в L_p ($1 \leq p \leq \infty$). Пусть $\mu = \mu(x)$ есть ограниченная измеримая на $R = R_n$ функция, таким образом, $\mu \in S'$.

Подчеркнем, что если $f \in S$, то $\tilde{f} \in S$ есть бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, и следовательно, определено произведение $\mu\tilde{f} \in S'$:

$$(\mu\tilde{f}, \varphi) = (\mu, \tilde{f}\varphi), \tag{1}$$

которое представляется измеримой функцией

$$\mu\tilde{f} = \mu(x)\tilde{f}(x).$$

По определению функция μ называется *мультипликатором* в L_p $(1 \leqslant p < \infty)$, если она измерима и ограничена (на R) и для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции (или, что то же самое, для любой функции $f \in S$) выполняется неравенство

$$\|\widehat{\mu\tilde{f}}\|_p \leqslant c_p \|f\|_p, \tag{2}$$

где константа c_p не зависит от f.

Если теперь $f \in L_p$ и f_l — бесконечно дифференцируемые финитные функции, для которых $\|f - f_l\| \to 0$ $(l \to \infty)$, то из (2) следует, что

$$\|\widehat{\mu\tilde{f}_k} - \widehat{\mu\tilde{f}_l}\|_p \leqslant c_p \|f_k - f_l\|_p \to 0 \quad (k,\ l \to \infty).$$

Следовательно, существует функция $F \in L_p$, к которой при $l \to \infty$ в смысле L_p стремится $\widehat{\mu\tilde{f}_l}$. Ее естественно обозначать через

$$F = \widehat{\mu\tilde{f}} = \hat{\mu} * f, \tag{3}$$

называя $\hat{\mu} * f$ сверткой функции $\hat{\mu}$ (вообще обобщенной) с f. Второй член в (3) указывает на то, что мы определяем еще $\mu\tilde{f}$ посредством равенства

$$\mu\tilde{f} = \widetilde{\hat{\mu} * f}, \tag{4}$$

где $\hat{\mu} * f$ понимается указанным выше способом. Этим определено произведение $\mu\tilde{f}$ для функций $f \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$. При $p = \infty$ это определение уже не проходит, потому что ограниченную на R функцию нельзя сколь угодно хорошо аппроксимировать в метрике L_∞ финитными функциями. Но для наших нужд будет вполне достаточно в случае $p = \infty$ определения $\mu\tilde{f}$, введенного в предыдущем параграфе, когда $\hat{\mu} = K \in L$.

Мультипликатор μ (удовлетворяющий свойству (2)) мы еще будем называть *множителем Марцинкевича* (см. далее 1.5.3).

Очевидно, что

$$\|\widehat{\mu\tilde{f}}\|_p \leqslant c_p \|f\|_p \tag{5}$$

для всех $f \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, где c_p та же константа, что и в соответствующем неравенстве для $f \in S$.

Функция μ, для которой $\hat{\mu} \in L$, очевидно, есть мультипликатор в смысле данного сейчас определения, потому что (см. 1.5.1) для бесконечно дифференцируемых финитных функций f

$$\widehat{\mu f} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{\mu}(x-u) f(u)\, du, \qquad (6)$$

откуда немедленно следует (2), где

$$c_p = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \| \hat{\mu} \|_L.$$

Это определение для $\hat{\mu} \in L$ эквивалентно соответствующему определению мультипликатора, введенному в 1.5.1; — сказать, что функция $\widehat{\mu f} = \hat{\mu} * f$ определяется (для $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, и $\hat{\mu} \in L$) как интеграл (6) или как предел в метрике L_p такого интеграла, вычисленного для бесконечно дифференцируемой финитной функции f_l, когда $\| f - f_l \|_p \to 0$, это, очевидно, все равно.

Но мы здесь обобщили понятие мультипликатора и свертки, потому что $\hat{\mu}$ может не принадлежать к L и быть даже обобщенной (не обычной) функцией.

Отметим, что если $f \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и f_l — бесконечно дифференцируемые финитные функции, для которых $\| f_l - f \|_p \to 0$ $(l \to \infty)$, а μ — мультипликатор, то

$$\| \widehat{\mu \tilde{f}} - \widehat{\mu \tilde{f}_l} \|_p \leqslant c_p \| f - f_l \|_p \to 0,$$

откуда следует, что

$$\mu \tilde{f}_l \to \mu \tilde{f} \ (S'). \qquad (7)$$

Если μ есть множитель Марцинкевича и в то же время бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, то для $f \in L_p$ и последовательности $\{f_l\}$ бесконечно дифференцируемых финитных функций, для которой выполняется (7), будем иметь

$$(\mu \tilde{f}, \varphi) = \lim_{l \to \infty} (\mu \tilde{f}_l, \varphi) = \lim_{l \to \infty} (\tilde{f}_l, \mu\varphi) = (\tilde{f}, \mu\varphi). \qquad (8)$$

В первом члене (8) $\mu \tilde{f}$ понимается в смысле (4), во втором равенстве (8) переброска μ за запятую законна, потому что μ бесконечно дифференцируема и полиномиального роста, последнее равенсто основано на том, что $f_l \to f\ (S)$ и $\mu\varphi \in S$.

Равенство (8) показывает, что если μ есть множитель Марцинкевича и в то же время бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, то соответствующие этим фактам определения $\mu \tilde{f}$ для $f \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ не противоречат друг другу.

Покажем, что вместе с λ и μ произведение $\lambda\mu$ есть мультипликатор в L_p и имеют место равенства

$$\lambda\mu\tilde{f} = \mu\lambda\tilde{f} = (\lambda\mu)\tilde{f} \quad (f \in L_p,\ 1 \leqslant p < \infty). \qquad (9)$$

В самом деле, начнем с того, что покажем само по себе интересное утверждение, что если функция $\lambda(x)$ измерима и ограничена, а функция F не только принадлежит к L_p, но и к L_2, то

$$\lambda\tilde{F}=\lambda(x)\tilde{F}(x), \tag{10}$$

т. е. произведение $\lambda\tilde{F}$, понимаемое в смысле (4), представляет обычное произведение функций $\lambda(x)$ и $\tilde{F}(x)$. В самом деле, так как $F\in L_2$, то существует последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций F_k $(k=1, 2, \ldots)$ такая, что (см. п. 1.4.1)

$$\|F-F_k\|_p\to 0,$$
$$\|F-F_k\|_2\to 0.$$

Для бесконечно дифференцируемых финитных функций F_k имеет место

$$\lambda\tilde{F}_k=\lambda(x)\tilde{F}_k(x) \tag{11}$$

по определению. С другой стороны,

$$\widehat{\lambda\tilde{F}_k}\to\widehat{\lambda\tilde{F}}\ (L_p),$$

следовательно, в S' и, значит,

$$\lambda\tilde{F}_k\to\lambda\tilde{F}\ (S'). \tag{12}$$

Вследствие ограниченности λ и на основании равенства Парсеваля

$$\|\lambda(x)\tilde{F}_k(x)-\lambda(x)\tilde{F}(x)\|_2\leqslant c\|\tilde{F}_k-\tilde{F}\|_2=c\|F_k-F\|_2\to 0,$$

откуда вытекает, что

$$\lambda(x)\tilde{F}_k(x)\to\lambda(x)\tilde{F}(x)\ (S'). \tag{13}$$

Из (11)—(13) следует, очевидно, нужное утверждение (10).

Зададим теперь произвольную финитную функцию $f\in S$. Положим

$$F=\widehat{\mu\tilde{f}}.$$

Так как $\tilde{f}\in L_2$, то в силу ограниченности μ также $\mu\tilde{f}\in L_2$ и $F\in L_2$. Следовательно, в силу (10)

$$\lambda\mu\tilde{f}=\lambda(x)(\mu\tilde{f})(x)=\lambda(x)\mu(x)\tilde{f}(x)=$$
$$=\mu(x)\lambda(x)\tilde{f}(x)=(\lambda(x)\mu(x))\tilde{f}(x)=(\lambda\mu)\tilde{f}. \tag{14}$$

Этим равенство (9) доказано пока для $f\in S$. Поэтому для $f\in S$, учитывая, что λ и μ — мультипликаторы,

$$\|\widehat{(\lambda\mu)\tilde{f}}\|_p=\|\widehat{\lambda\,(\mu\tilde{f})}\|_p\leqslant c\|\widehat{\mu\tilde{f}}\|_p\leqslant cc'\|f\|_p,$$

и мы доказали, что $\lambda\mu$ есть тоже мультипликатор. Остается доказать равенства (9) для произвольной функции $f \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Для этого нужно взять последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций f_l, сходящуюся к f в метрике L_p, подставить f_l вместо f в (14), применить ко всем членам (14) операцию $\wedge$ и перейти к пределу при $l \to \infty$ в смысле L_p.

1.5.1.2. Лемма. *Пусть $a \in R_n$ — фиксированная точка. Тогда вместе с $\mu(x)$ функция $\mu(x-a)$ есть множитель Марцинкевича и выполняется равенство*

$$\widehat{e^{iat}\mu(t)\widetilde{e^{-iat}f}} = \widehat{\mu(x-a)\tilde{f}} \qquad (\text{для всех } f \in L_p), \tag{1}$$

из которого следует, что

$$\|\widehat{\mu(x-a)\tilde{f}}\|_p = \|\widehat{\mu\widetilde{e^{-iat}f}}\|_p \leqslant c_p \|e^{-iat}f\|_p = c_p \|f\|_p. \tag{2}$$

Таким образом, константа c_p в этом неравенстве та же, что и в соответствующем неравенстве для $\mu(x)$.

Доказательство. Положим

$$f_\beta = e^{i\beta t} f(t) \qquad (\beta \in R_n). \tag{3}$$

Тогда (см. 1.5 (18))

$$\tilde{f} = \widetilde{e^{-i\beta t} f_\beta} = \tilde{f}_\beta(x+\beta).$$

Поэтому (см. снова 1.5 (18))

$$\widehat{\mu(x-a)\tilde{f}} = \widehat{\mu(x-a)\tilde{f}_{-a}(x-a)} = e^{iat}\widehat{\mu(x)\tilde{f}_{-a}(x)},$$

и в силу (3) мы получаем (1).

1.5.2. Периодические функции из L_p^*. Функции

$$\omega_n(x) = \operatorname{sign}\sin(2^{n+1}\pi x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ образуют ортогональную и нормальную (на $[0, 1]$) систему (Радемахера).

Для любой двойной последовательности комплексных чисел $\{a_{mn}\}$ и $p > 0$ справедливы неравенства *)

$$\left(\sum a_{mn}^2\right)^{p/2} \ll \int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{mn}\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^p d\theta\, d\theta' \ll \left(\sum a_{mn}^2\right)^{p/2} \tag{1}$$

с константами, не зависящими от a_{mn}.

В самом деле, если s — натуральное число, то, воспользовавшись полиномиальной формулой Ньютона и тем фактом, что

---

*) Здесь и в дальнейшем мы будем часто писать $A \ll B$ вместо $A \leqslant cB$, где c — константа.

$[\omega_n(\theta)]^l = \omega_n(\theta)$ при нечетных l, получим сначала для действительных a_{mn}

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{mn}\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^{2s} d\theta\, d\theta' =$$

$$= \sum \frac{(2s)!}{(2\alpha_1)!\,\ldots\,(2\alpha_{2s})!}\, a_{m_1n_1}^{2\alpha_1}\,\ldots\, a_{m_{2s}n_{2s}}^{2\alpha_{2s}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(2s)!}{s!\,2^s} \sum \frac{s!}{\alpha_1!\,\ldots\,\alpha_{2s}!}\, a_{m_1n_1}^{2\alpha_1}\,\ldots\, a_{m_{2s}n_{2s}}^{2\alpha_{2s}} = \frac{(2s)!}{s!\,2^s}\left(\sum a_{mn}^2\right)^s$$

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{2s} = s).$$

Но тогда, если $a_{mn} = \alpha_{mn} + i\beta_{mn}$ — комплексные,

$$\int_0^1\int_0^1 |a_{mn}\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')|^{2s} d\theta\, d\theta' \leqslant \int_0^1\int_0^1 |\alpha_{mn}\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')|^{2s} d\theta\, d\theta' +$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 |\beta_{mn}\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')|^{2s} d\theta\, d\theta' \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum \alpha_{mn}^2\right)^s + \left(\sum \beta_{mn}^2\right)^s \leqslant \left(\sum |a_{mn}|^2\right)^s. \qquad (2)$$

Поэтому для любого $p > 0$, если взять натуральное s таким, что $2s \geqslant p$, будем иметь (используя неравенство Гёльдера)

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{mn}\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^p d\theta\, d\theta'\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{mn}\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^{2s} d\theta\, d\theta'\right)^{1/2s} \leqslant \left(\sum a_{mn}^2\right)^{1/2},$$

что доказывает второе неравенство (1). Далее, если $p \geqslant 2$, то

$$\left(\sum a_{mn}^2\right)^{1/2} = \left(\int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{mn}\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^2 d\theta\, d\theta'\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{mn}\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^p d\theta\, d\theta'\right)^{1/p},$$

что доказывает первое неравенство (1). Остается его доказать при $p < 2$. В силу (2)

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{mn}\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^4 d\theta\, d\theta' \leqslant 3\left(\sum a_{mn}^2\right)^2.$$

Пусть $s^2 = \sum a_{mn}^2$, $S = \sum a_{mn}\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')$, A — множество точек $(\theta,\ \theta')$ таких, что $|(S(\theta,\ \theta')| > \frac{s}{2}$, CA дополнительное к A

в единичном квадрате множество и $|A|$ и $|CA|$ — их меры. Тогда

$$s^2=\int_0^1\int_0^1 S^2\,d\theta\,d\theta'=\iint_A+\iint_{CA}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}s^2|CA|+\sqrt{|A|}\left(\int_0^1\int_0^1 S^4\,d\theta\,d\theta'\right)^{1/2}\leqslant\left(\frac{1}{4}+\sqrt{3}\sqrt{|A|}\right)s^2.$$

Значит,

$$1<\frac{1}{4}+2\sqrt{|A|}\quad\text{или}\quad|A|>\frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1\int_0^1|S|^p\,d\theta\,d\theta'\geqslant\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^p}s^p\geqslant\frac{1}{32}s^p,$$

что доказывает первое неравенство (1) при $p<2$. Этим неравенства (1) доказаны полностью.

Аналогично доказываются соответствующие (2) неравенства в n-мерном случае:

$$\left(\sum|a_k^2|\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_0^1\ldots\int_0^1\left|\sum a_k\omega_k(\theta)\right|^p d\theta\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum|a_k^2|\right)^{1/2},\tag{3}$$

где $k=(k_1,\ldots,k_n)$ — всевозможные целочисленные неотрицательные векторы и

$$\omega_k(\theta)=\omega_{k_1}(\theta_1)\ldots\omega_{k_n}(\theta_n).\tag{4}$$

Пусть $f(t)\in L_p^*=L_p(0,2\pi)$ $(1<p<\infty)$ есть функция от одной переменной t периода 2π, разлагающаяся в ряд Фурье вида

$$f(t)=\sum_0^\infty c_ke^{ikt}.$$

Известно (см. Зигмунд [1], гл. VII), что при $1<p<\infty$ этот ряд сходится к f в смысле L_p^*.

Зададим возрастающую последовательность натуральных чисел

$$0=n_0<1=n_1<n_2<\ldots,$$

удовлетворяющую условию

$$\frac{n_{k+1}}{n_k}>a>1\qquad(k=1,\,2,\,\ldots),\tag{5}$$

и введем функции

$$\delta_0(f)=c_0,\quad\delta_k(f)=\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k}c_\nu e^{i\nu t}\qquad(k=1,\,2,\,\ldots).$$

Тогда ряд

$$f(t)=\sum_0^\infty \delta_k(f)$$

сходится к f в смысле L_p^*. Положим далее

$$f_1(t)=\sum_0^\infty \varepsilon_k\delta_k(f) \qquad (\varepsilon_k=\pm 1;\ k=0,\ 1,\ \ldots),$$

где числа $\varepsilon_k=\pm 1$ любым образом зависят от k. Тогда имеют место неравенства (Литтлвуда и Пэли [4], см. Зигмунд [2], II, XV)

$$\|f\|_p \ll \|f_1\|_p \ll \|f\|_p \tag{6}$$

с константами, зависящими от p, но не от f и распределения $\{\varepsilon_k\}$, и с нормами, взятыми по периоду. Эти утверждения легко распространяются на функции многих переменных

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{\nu}\geqslant 0} c_{\boldsymbol{\nu}} e^{i\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{x}}=\sum_{\boldsymbol{k}} \delta_{\boldsymbol{k}}(f)\in L_p^*$$

$$(\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n);\ \boldsymbol{k}=(k_1,\ \ldots,\ k_n)), \tag{7}$$

где

$$\delta_{\boldsymbol{k}}(f)=\delta_{k_1x_1}\ldots\delta_{k_nx_n}(f)$$

и

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}}=\varepsilon_{k_1}\ldots\varepsilon_{k_n},\quad f_1=\sum\varepsilon_{\boldsymbol{k}}\delta_{\boldsymbol{k}}(f).$$

Здесь предполагается, что ε_s $(s=1,\ \ldots,\ n)$ могут принимать только значения ± 1. Для таких f и f_1 также имеют место неравенства

$$\|f\|_p \ll \|f_1\|_p \ll \|f\|_p \quad (1<p<\infty), \tag{8}$$

где уже нормы взяты по n-мерному периоду $\{0<x_j<2\pi;\ j=1,\ \ldots,\ n\}$. Будем считать

$$\delta_{\boldsymbol{k}'}(f)=\delta_{k_1x_1}\ldots\delta_{k_{n-1}x_{n-1}}(f),\quad d\boldsymbol{x}'=dx_1\ldots dx_{n-1},$$

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}'}=\varepsilon_{k_1}\ldots\varepsilon_{k_{n-1}}.$$

Поэтому, если принять, что неравенства (8) верны для $n-1$, и считать, что интегралы берутся по соответствующим периодам, то получим

$$\|f\|_p^p=\int dx_n\int|f|^p\,d\boldsymbol{x}'\ll\int dx_n\int\Big|\sum\varepsilon_{\boldsymbol{k}'}\delta_{\boldsymbol{k}'}(f)\Big|^p d\boldsymbol{x}'=$$
$$=\int d\boldsymbol{x}'\int\Big|\sum\varepsilon_{\boldsymbol{k}'}\delta_{\boldsymbol{k}'}(f)\Big|^p dx_n\ll\int d\boldsymbol{x}'\int\Big|\sum\varepsilon_{\boldsymbol{k}}\delta_{\boldsymbol{k}}(f)\Big|^p dx_n\ll$$
$$\ll\int dx_n\int|f|^p\,d\boldsymbol{x}'=\|f\|_p^p,$$

т. е. (8), если принять во внимание, что

$$\sum \varepsilon_{k_n}\delta_{k_n x_n} \sum \varepsilon_{k'}\delta_{k'}(f) = \sum \varepsilon_k \delta_k(f).$$

Наконец, можно для функций (7) написать неравенства

$$\|f\|_p \ll \left\| \left(\sum |\delta_k^2(f)|\right)^{1/2} \right\|_p \ll \|f\|_p \qquad (1 < p < \infty) \tag{9}$$

с константами, не зависящими от f.

В самом деле, полагая $\Omega = \{0 \leqslant \theta_i \leqslant 1\}$, получим

$$\|f\|_p^p = \int\limits_\Omega \|f\|_p^p \, d\theta \ll \int\limits_\Omega \left\| \sum \omega_k(\theta)\,\delta_k(f) \right\|_p^p d\theta =$$

$$= \left\| \int\limits_\Omega \left| \sum \omega_k(\theta)\,\delta_k(f) \right|^p d\theta \right\|_p^p \ll \left\| \left(\sum |\delta_k^2(f)|\right)^{1/2} \right\|_p^p \ll$$

$$\ll \left\| \int\limits_\Omega \left| \sum \omega_k(\theta)\,\delta_k(f) \right|^p d\theta \right\|_p^p = \int\limits_\Omega \left\| \sum \omega_k(\theta)\,\delta_k(f) \right\|_p^p d\theta \ll$$

$$\ll \int\limits_\Omega \|f\|_p^p \, d\theta = \|f\|_p^p. \tag{10}$$

Переход от 2-го к 3-му и от 6-го к 7-му членам производится на основании неравенства (8) при $\varepsilon_k = \omega_k(\theta)$ и от 4-го к 5-му и затем к 6-му членам — на основании неравенства (3).

Из (9) следует, что если $f \in L_p^*$ есть функция, у которой коэффициенты Фурье c_k не равны нулю разве что для $k \geqslant 0$ и $\mathscr{E}$ — произвольное множество векторов k, то функция

$$\sum_{k \in \mathscr{E}} \delta_k(f) = \varphi = \sum_k \delta_k(\varphi)$$

порождает ряд Фурье некоторой функции $\varphi \in L_p^*$, для которой выполняются неравенства

$$\|\varphi\|_p \ll \left\| \left(\sum_{k \in \mathscr{E}} |\delta_k^2(f)| \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \left\| \left(\sum_k |\delta_k^2(f)| \right)^{1/2} \right\|_p \ll \|f\|_p.$$

Заметим, что если произвольная периодическая функция от одной переменной

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \sum_{k \geqslant 0} + \sum_{k < 0} = f_+ + f_-$$

принадлежит к L_p^*, то ей сопряженная (тригонометрически) функция (при $1 < p < \infty$)

$$f_*(t) = -i \sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} k c_k e^{ikt} \tag{11}$$

(здесь $\operatorname{sign} 0 = 1$), а вместе с ней и $if_* = f_+ - f_-$ также принадлежит к L_p^* (Зигмунд [1], гл. VII, 2.5). Следовательно, $f_+ = \frac{1}{2}(f + if_*) \in$

$\in L_p^*$ и $\|f_+\| \leqslant \|f\|_p$. Отсюда по индукции следует, что и для функций

$$f(x) = \sum c_k e^{ikx}$$

многих переменных, если положить

$$f_+ = \sum_{k \geqslant 0} c_k e^{ikx},$$

то из того, что $f \in L_p^* = \overset{(n)}{L_p^*}$, следует $\|f_+\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Пусть $k = (k_1, \ldots, k_n)$ есть произвольный (не обязательно неотрицательный) целочисленный вектор. Положим

$$\delta_k(f) = \sum_{\pm n_{|k_1|-1}+1}^{\pm n_{|k_1|}} \cdots \sum_{\pm n_{|k_n|-1}+1}^{\pm n_{|k_n|}} c_m e^{imx}, \tag{12}$$

где на соответствующем j-м месте ставится $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли $k_j > 0$ или $k_j < 0$, а при $k_j = 0$ надо считать $n_{|k_j|-1} + 1 = 0$. На основании сказанного выше, очевидно, наряду с неравенствами (9) имеют место также аналогичные им неравенства

$$\|f\|_p \ll \left\| \left(\sum |\delta_k(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \ll \|f\|_p \tag{13}$$

для произвольной периодической функции $f(x)$ (не обязательно такой, у которой $c_k \neq 0$ только для $k \geqslant 0$).

Легко проверить, что неравенства (13) сохраняются и для функций

$$f(x) = \sum c_k e^{\frac{i\pi kx}{l}} = \sum \delta_k(f), \tag{14}$$

$$c_k = \frac{1}{l^n} \int_{\Delta_l} f(u) e^{-\frac{i\pi ku}{l}} du, \qquad \Delta_l = \{ |x_j| \leqslant l;\ j = 1, \ldots, n \},$$

произвольного периода $2l$. При этом надо, конечно, соответственно видоизменить определение δ_k (замена x на $\frac{\pi}{l} x$ в правой части (12)).

Важно отметить, что константы, входящие в неравенства (13), не зависят от l.

1.5.2.1. Пусть

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \sum_{k \geqslant 0} + \sum_{k < 0} = f_+ + f_- \in L_p^* \qquad (1 < p < \infty) \tag{1}$$

периодическая функция от одной переменной, а последовательность $\{n_k\}$ и функции $\delta_k(f)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ определены так же, как в 1.5.2.

Положим еще

$$\delta_{-k}(f)=\sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} c_{-\nu}e^{-i\nu t}, \tag{2}$$

$$\beta_k(f)=\delta_k(f)+\delta_{-k}(f), \quad k=1,\ 2\ \ldots, \tag{3}$$

$$\beta_0(f)=\delta_0(f)=c_0.$$

Тогда из неравенств 1.5.2 (6) следуют аналогичные им неравенства

$$\|f\|_p \leqslant \|f_*\|_p \leqslant \|f\|_p, \quad 1<p<\infty, \tag{4}$$

где

$$f_*=\sum_0^\infty \varepsilon_k\beta_k(f) \quad (\varepsilon_k=\pm 1), \tag{5}$$

с константами, зависящими от α и p, но не от f и распределения $\{\varepsilon_k\}$. В самом деле,

$$\left(\sum \varepsilon_k\beta_k(f)\right)_+=\sum \varepsilon_k\delta_k(f_+),$$

$$\left(\sum \varepsilon_k\beta_k(f)\right)_-=\sum \varepsilon_k\delta_k(f_-(-t)),$$

кроме того, $\|f_+\|_p$, $\|f_-\|_p \leqslant \|f\|_p$, поэтому в силу 1.5.2 (6)

$$\|f_+\|_p \leqslant \left\|\sum \varepsilon_k\delta_k(f_+)\right\|_p \leqslant \left\|\sum \varepsilon_k\beta_k(f)\right\|_p,$$

$$\|f_-\|_p=\|f_-(-t)\|_p \leqslant \left\|\sum \varepsilon_k\delta_k(f_-(-t))\right\|_p \leqslant \left\|\sum \varepsilon_k\beta_k(f)\right\|_p,$$

откуда следует первое неравенство в (4).

Далее

$$\left\|\sum \varepsilon_k\beta_k(f)\right\|_p \leqslant \left\|\sum \varepsilon_k\delta_k(f_+)\right\|_p+\left\|\sum \varepsilon_k\delta_k(f_-(-t))\right\|_p \leqslant$$
$$\leqslant \|f_+\|_p+\|f_-\|_p \leqslant \|f\|_p,$$

т. е. второе неравенство (4).

Из (4) следуют неравенства

$$\|f\|_p \leqslant \left\|\left(\sum \beta_k^2(f)\right)^{1/2}\right\|_p \leqslant \|f\|_p,$$

что доказывается, как в 1.5.2 (10) (заменить δ на β).

Справедливо еще следующее утверждение, которое в одномерном случае доказано в книге Зигмунда (гл. XV, 2.15) и может быть распространено по индукции на многомерный случай.

Пусть $f_1, f_2, \ldots \in L_p$, $(1<p<\infty)$ — последовательность функций от $x=(x_1, \ldots, x_n)$ периода 2π с коэффициентами Фурье c_k, не равными нулю разве что для $k \geqslant 0$, и пусть S_{n,k_n} обозначает сумму Фурье f_n порядка k_n. Тогда существует константа A_p, не зависящая от f_n и N такая, что

$$\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{N}|S_{n,k_n}|^2\right)^{p/2}dx_1\ldots dx_n\leqslant$$
$$\leqslant A_p^p\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\left(\sum_1^N|f_n|^2\right)^{p/2}dx_1\ldots dx_n. \qquad (6)$$

1.5.3. Теорема о мультипликаторах в периодическом случае. Для числовой последовательности $\{\lambda_l\}$, зависящей от одного индекса l, введем разность $\Delta\lambda_l=\lambda_{l+1}-\lambda_l$. Для кратной последовательности $\{\lambda_k\}$, зависящей от неотрицательного целочисленного вектора $k=(k_1, \ldots, k_n)$, мы будем рассматривать разности $\Delta_j\lambda_k$, взятые по компоненте k_j, и кратные разности $\Delta_{j_1}\ldots\Delta_{j_m}\lambda_k$ $(m\leqslant n)$.

Теорема (Марцинкевича). *Пусть задана кратная последовательность $\{\lambda_k\}$, подчиняющаяся неравенствам*

$$|\lambda_k|\leqslant M,\quad \sum_{\nu_{j_1}=\pm 2^{|k_1|-1}}^{\pm 2^{|k_1|}-1}\ldots\sum_{\nu_{j_m}=\pm 2^{|k_m|-1}}^{\pm 2^{|k_m|}-1}|\Delta_{j_1}\ldots\Delta_{j_m}\lambda_\nu|\leqslant M \qquad (1)$$

для любых наборов натуральных чисел $j_1, \ldots, j_m$ таких, что $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_m\leqslant n$, где M — константа, не зависящая от k и $j_1, \ldots, j_m$ (при $k_j=0$ соответствующая сумма распространена только на $\nu_j=0$); $+$ или $-$ ставится в зависимости от того, будет ли $k_j>0$ или <0.

Преобразуем функцию периода 2π вида (см. 1.5.2 (7))

$$f(x)=\sum_k c_k e^{ikx}=\sum\delta_k(f)\in L_p^* \qquad (1<p<\infty) \qquad (2)$$

посредством чисел λ_k (множителей Марцинкевича):

$$F(x)=\sum_k\lambda_k c_k e^{ikx}=\sum\delta_k(F). \qquad (3)$$

Тогда $F\in L_p^*$ и существует зависящая только от p константа c_p такая, что

$$\|F\|_p\leqslant c_pM\|f\|_p. \qquad (4)$$

Доказательство. Ограничимся случаем $n=2$. Больше того, будем считать, что в (2) ряды распространены только на $k\geqslant 0$, что не нарушает общности.

Положив

$$\sum_{\mu=2^{k-1}}^{s}\sum_{\nu=2^{l-1}}^{t}c_{\mu\nu}e^{i(\mu x+\nu y)}=r_{st}=r_{s,t,k,l} \qquad (5)$$

и применив преобразование Абеля, получим

$$\delta_{kl}(F) = \sum_{2^{k-1}}^{2^k-1} \sum_{2^{l-1}}^{2^l-1} \lambda_{\mu\nu} c_{\mu\nu} e^{i(\mu x+\nu y)} =$$

$$= \sum_{2^{k-1}}^{2^k-2} \sum_{2^{l-1}}^{2^l-2} r_{ij} [\lambda_{i,j} - \lambda_{i,j+1} - \lambda_{i+1,j} + \lambda_{i+1,j+1}] +$$

$$+ \sum_{2^{l-1}}^{2^l-2} r_{2^k-1,j} [\lambda_{2^k-1,j} - \lambda_{2^k-1,j+1}] +$$

$$+ \sum_{2^{k-1}}^{2^k-2} r_{i,2^l-1} [\lambda_{i,2^l-1} - \lambda_{i+1,2^l-1}] + r_{2^k-1,2^l-1} \lambda_{2^k-1,2^l-1} = \sum r_{ij}\gamma_{ij}. \tag{6}$$

Применим неравенство Буняковского и учтем (1):

$$|\delta_{kl}(F)|^2 = \left(\sum r_{ij}\gamma_{ij}\right)^2 \leqslant \sum |\gamma_{ij}| \sum r_{ij}^2 |\gamma_{ij}| \leqslant M \sum r_{ij}^2 |\gamma_{ij}|.$$

Поэтому на основании 1.5.2 (13) следует ($n_k = 2^k$):

$$\|F_p\|^p \leqslant \left\| \left(\sum_{k,l} |\delta_{kl}^2(F)| \right)^{1/2} \right\|_p^p \leqslant$$

$$\leqslant M^{p/2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{k,l} \sum \left(r_{ij}\sqrt{|\gamma_{ij}|}\right)^2 \right\}^{p/2} dx\, dy. \tag{7}$$

В круглых скобках правой части (7) стоит функция (см. еще (5))

$$r_{i,j,k,l}\sqrt{|\gamma_{ij}|} \tag{8}$$

($\sqrt{|\gamma_{ij}|}$ — коэффициент, не зависящий от x, y). Ее, очевидно, можно рассматривать как отрезок ряда Фурье функции

$$\delta_{kl}(f)\sqrt{|\gamma_{ij}|}. \tag{9}$$

Следовательно, в фигурных скобках правой части (7) стоит сумма $\sum\limits_{k,l}\sum$ квадратов отрезков рядов Фурье функций (9).

На основании 1.5.2.1 (6) интеграл (7) мажорируется таким же интегралом, где отрезки Фурье функций заменяются самими функциями

$$\|F_p\|^p \leqslant M^{p/2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{k,l} |\delta_{kl}^2(f)| \sum |\gamma_{ij}| \right\}^{p/2} dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant M^p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \sum_k \sum_l |\delta_{kl}^2(f)| \right\}^{p/2} dx\, dy \leqslant M^p \|f\|_p^p,$$

и мы получили неравенство (4).

Легко проверить, что неравенство (4) сохраняется для функций произвольного периода $2l$ с той же константой c_p.

1.5.4. Теорема о мультипликаторах в непериодическом случае. Зададим вектор вида

$$\boldsymbol{k}=(k_1, \ldots, k_n) \quad (k_j=0,\ 1;\ j=1, \ldots, n). \tag{1}$$

Носителем вектора $\boldsymbol{k}$ называется множество

$$e_k=\{j_1, \ldots, j_m\}$$

тех индексов j, для которых $k_j=1$.

Теорема. *Пусть на* $R=R_n$ *задана функция* $\lambda(\boldsymbol{x})$, *обладающая следующими свойствами.*

Каков бы ни был вектор $\boldsymbol{k}$ *вида* (1), *производная* *)

$$D^k\lambda=\frac{\partial^{|k|}\lambda}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} \tag{2}$$

существует и непрерывна в любой точке $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ *с* $x_i\neq 0$, *где* $i\in e_k$, *и подчиняется неравенству*

$$|\boldsymbol{x}^k D^k\lambda|\leqslant M. \tag{3}$$

Тогда λ *есть множитель Марцинкевича. Именно, существует не зависящая от* M *и* f *константа* $\varkappa_p$ *такая, что*

$$\|\widehat{\lambda\tilde{f}}\|_p\leqslant \varkappa_p M\|f\|_p \qquad (1<p<\infty) \tag{4}$$

для всех $f\in L_p$.

Заметим, что так как λ удовлетворяет указанному в теореме свойству при $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$, то она ограничена на R и непрерывна разве что за исключением точек, принадлежащих к координатным плоскостям. Поэтому λ — измеримая функция на R_n и в то же время обобщенная ($\lambda\in S'$).

Доказательство. Ограничимся рассмотрением двумерного случая. Пусть $f(x,\ y)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция. Носитель ее будем считать принадлежащим к квадрату

$$\Delta_{s_0}=\{|x|,\ |y|<s_0\}. \tag{5}$$

И пусть

$$f(x,\ y)=\sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}^s e^{i\frac{\pi}{s}(\mu x+\nu y)} \qquad (s\geqslant s_0), \tag{6}$$

где

$$c_{\mu\nu}^s=\frac{1}{(2s)^2}\iint_{\Delta_s} f(u,\ v)\, e^{-i\frac{\pi}{s}(\mu u+\nu v)}\,du\,dv \qquad (\mu,\ \nu=0,\ \pm 1, \ldots) \tag{7}$$

ее ряд Фурье. Положим

$$u_s(x,\ y)=\sum_{\mu,\nu}\lambda\left(\frac{\mu\pi}{s},\ \frac{\nu\pi}{s}\right)c_{\mu\nu}^s e^{i\frac{\pi}{s}(\mu x+\nu y)}. \tag{8}$$

---

*) Возможно некоторое обобщение этой теоремы в терминах обобщенных производных.

В силу (3) (при $k=0$)

$$\left|\lambda\left(\frac{\mu\pi}{s}, \frac{\nu\pi}{s}\right)\right| \leqslant M. \tag{9}$$

Пусть теперь $k>0$, $l\geqslant 0$, тогда

$$\sum_{\mu=2^{k-1}}^{2^k-1}\left|\lambda\left(\frac{(\mu+1)\pi}{s}, \frac{l\pi}{s}\right)-\lambda\left(\frac{\mu\pi}{s}, \frac{l\pi}{s}\right)\right| =$$

$$=\sum\left|\int\limits_{\frac{\mu\pi}{s}}^{\frac{(\mu+1)\pi}{s}} \frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(\xi, \frac{l\pi}{s}\right)d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s}{\pi\cdot 2^{k-1}}\sum\int\limits_{\frac{\mu\pi}{s}}^{\frac{(\mu+1)\pi}{s}}\left|\xi\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\left(\xi, \frac{l\pi}{s}\right)\right|d\xi \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}2^kM\leqslant 2M. \tag{10}$$

В этих выкладках использована непрерывность $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ по x при $x>0$ и любом y. Полученное неравенство сохраняется также и для $k=0$ при любом l:

$$\left|\lambda\left(\frac{\pi}{s}, \frac{l\pi}{s}\right)-\lambda\left(0, \frac{l\pi}{s}\right)\right| \leqslant \left|\lambda\left(\frac{\pi}{s}, \frac{l\pi}{s}\right)\right| + \left|\lambda\left(0, \frac{l\pi}{s}\right)\right| \leqslant 2M.$$

Аналогично, используя непрерывность $\frac{\partial\lambda}{\partial y}$ по y при $y>0$ при любом x, получим

$$\sum_{\nu=2^{l-1}}^{2^l-1}\left|\lambda\left(\frac{k\pi}{s}, \frac{(\nu+1)\pi}{s}\right)-\lambda\left(\frac{k\pi}{s}, \frac{\nu\pi}{s}\right)\right| \leqslant 2M \qquad (k,\ l\geqslant 0). \tag{11}$$

Далее, пока для $k,\ l>0$

$$\sum_{2^{k-1}}^{2^k-1}\sum_{2^{l-1}}^{2^l-1}\left|\lambda\left(\frac{(\mu+1)\pi}{s}, \frac{(\nu+1)\pi}{s}\right)-\lambda\left(\frac{\mu\pi}{s}, \frac{(\nu+1)\pi}{s}\right)-\right.$$

$$\left.-\lambda\left(\frac{(\mu+1)\pi}{s}, \frac{\nu\pi}{s}\right)+\lambda\left(\frac{\mu\pi}{s}, \frac{\nu\pi}{s}\right)\right| =$$

$$=\sum\sum\left|\int\limits_{\frac{\mu\pi}{s}}^{\frac{(\mu+1)\pi}{s}}\int\limits_{\frac{\nu\pi}{s}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{s}}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{s}{\pi}\right)^2\frac{\lambda}{2^{k+l-2}}\sum\sum\int\limits_{\frac{\mu\pi}{s}}^{\frac{(\mu+1)\pi}{s}}\int\limits_{\frac{\nu\pi}{s}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{s}}\left|\xi\eta\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}(\xi,\ \eta)\right|d\xi\,d\eta\leqslant M. \tag{12}$$

Здесь использована непрерывность $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}$ при $x, y>0$. Для $k>0$ и $l=0$ это неравенство сводится к следующему:

$$\sum_{2^{k-1}}^{2^k-1}\left|\lambda\left(\frac{(\mu+1)\pi}{s},\ \frac{\pi}{s}\right)-\lambda\left(\frac{\mu\pi}{s},\ \frac{\pi}{s}\right)-\lambda\left(\frac{(\mu+1)\pi}{s},\ 0\right)+\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\frac{\mu\pi}{s},\ 0\right)\right|\leqslant 4M \qquad (13)$$

(учесть неравенство (10), верное для любых k, $l\geqslant 0$), а при $k=0$, $l=0$ сумма в левой части сводится к одному члену, не превышающему тоже $4M$.

Мы доказали, что левые части (9) — (12) при любых k, $l\geqslant 0$ не превышают $4M$. Аналогичные неравенства доказываются для остальных трех квадрантов: 1) $k\geqslant 0$, $l\leqslant 0$; 2) $k\leqslant 0$, $l\geqslant 0$; 3) k, $l\leqslant 0$.

Это показывает, что условия теоремы Марцинкевича соблюдаются и, следовательно, существует не зависящая от s (см. замечание в конце п. 1.5.3), M и f константа c_p такая, что

$$\|u_s\|_{L_p(\Delta_s)}\leqslant c_pM\,\|f\|_{L_p(\Delta_s)}=c_pM\,\|f\|_p,\qquad 1<p<\infty. \qquad (14)$$

В данном случае преобразование функции f при помощи множителя λ записывается в виде интеграла

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\xi,\ \eta)\,\tilde{f}(\xi,\ \eta)\,e^{i(x\xi+y\eta)}\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$\tilde{f}(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_s}f(u,\ v)\,e^{-i(xu+yv)}\,du\,dv \qquad (s\geqslant s_0).$$

Очевидно,

$$c_{kl}^s=\frac{\pi}{2s^2}\tilde{f}\left(\frac{k\pi}{s},\ \frac{l\pi}{s}\right). \qquad (15)$$

Оценим на произвольном фиксированном квадрате Δ_μ $(\mu>0)$ разность

$$u(x,\ y)-u_s(x,\ y)=r_1+r_2+r_3.$$

Здесь

$$r_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_N}\lambda(\xi,\ \eta)\tilde{f}(\xi,\ \eta)e^{i(x\xi+y\eta)}\,d\xi\,d\eta-$$

$$-\sum_{|k|,\ |l|\leqslant\alpha N}\lambda\left(\frac{k\pi}{s},\ \frac{l\pi}{s}\right)c^s_{kl}e^{i\frac{\pi}{s}(kx+ly)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_N}\lambda(\xi,\ \eta)\tilde{f}(\xi,\ \eta)e^{i(x\xi+y\eta)}\,d\xi\,d\eta-$$

$$-\frac{\pi}{2s^2}\sum_{|k|}\sum_{|l|\leqslant\alpha N}\lambda\left(\frac{k\pi}{s},\ \frac{l\pi}{s}\right)\tilde{f}\left(\frac{k\pi}{s},\ \frac{l\pi}{s}\right)e^{i\frac{\pi}{s}(kx+ly)},\qquad(16)$$

N — натуральное число и s подобрано так, что $\alpha=\frac{s}{\pi}$ — натуральное число;

$$r_2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R_2-\Delta_N}\lambda(\xi,\ \eta)\tilde{f}(\xi,\ \eta)e^{i(x\xi+y\eta)}\,d\xi\,d\eta,$$

$$r_3=-\frac{\pi}{2s^2}\sum{}'\lambda\left(\frac{k\pi}{s},\ \frac{l\pi}{s}\right)\tilde{f}\left(\frac{k\pi}{s},\ \frac{l\pi}{s}\right)e^{i\frac{\pi}{s}(kx+ly)},$$

где сумма $\sum'$ распространена на такие пары $(k,\ l)$, что или $|k|$, или $|l|$ больше, чем αN. Функция f, будучи бесконечно дифференцируемой финитной функцией, принадлежит к основному классу S, поэтому также $\tilde{f}\in S$, значит,

$$|\tilde{f}(\xi,\ \eta)|\leqslant(1+\xi^2)^{-1}(1+\eta^2)^{-1}$$

и

$$|r_2|\leqslant\iint\limits_{R_2-\Delta_N}(1+\xi^2)^{-1}(1+\eta^2)^{-1}\,d\xi\,d\eta\to 0\qquad(N\to\infty).$$

При $\alpha=\frac{s}{\pi}>1$ для r_3 имеет место подобная оценка:

$$|r_3|\leqslant\sum{}'\left[1+\left(\frac{k\pi}{s}\right)^2\right]^{-1}\left[1+\left(\frac{l\pi}{s}\right)^2\right]^{-1}\to 0\qquad(N\to\infty).$$

Задав $\varepsilon>0$, можно указать такое $N>0$, что для всех $s>s_0$

$$|r_2|,\ |r_3|<\varepsilon.$$

При этом N можно указать такое $s_1>s_0$, что для всех $s>s_1$ и для всех $(x,\ y)\in\Delta_\mu$

$$|r_1|<\varepsilon.$$

Мы доказали, что для любого $\mu > 0$

$$\lim_{s \to \infty} u_s(x, y) = u(x, y) = \widehat{\lambda \tilde{f}}$$

равномерно на Δ_μ.

Из (14) следует, что

$$\| u_s \|_{L_p(\Delta_\mu)} \leqslant c_p \| f \|_p \qquad (\mu \leqslant s).$$

Переходя к пределу при $s \to \infty$, а затем при $\mu \to \infty$, получим неравенство (4) для финитных функций $f \in S$.

Этим доказано, что λ есть множитель Марцинкевича.

1.5.4.1. Если функция $u(\boldsymbol{x}) = u(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных подчиняется условиям теоремы, сформулированной в 1.5.4, то она, очевидно, подчиняется также условиям этой теоремы, если ее рассматривать как функцию от k переменных $x_1, \ldots, x_k$ $(k < n)$ и, следовательно, является мультипликатором относительно них.

1.5.5. Примеры множителей Марцинкевича (в смысле L_p, $1 < p < \infty$).

1. $\operatorname{sign} \boldsymbol{x} = \prod_{1}^{n} \operatorname{sign} x_j$.
2. $(1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$.
3. $(1 + x_j^2)^{r/2} (1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{-r/2} \quad (r > 0;\ j = 1, \ldots, n)$.
4. $(1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{r/2} \left(1 + \sum_{1}^{n} |x_j|^r\right)^{-1} \quad (r > 0)$.
5. $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}} (1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{-r/2} \quad (|\boldsymbol{l}| \leqslant r,\ r > 0,\ \boldsymbol{l} \geqslant 0)$.
6. $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}} (1 + x_s^2)^{\frac{\varkappa r_s}{2}} \left\{ \sum_{1}^{n} (1 + x_j^2)^{\frac{r_j}{2}} \right\}^{-1}$

$$\left(\boldsymbol{r} > 0,\ \boldsymbol{l} \geqslant 0,\ \varkappa = 1 - \sum_{1}^{n} \frac{l_j}{r_j} \geqslant 0 \right).$$

7. $(1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{r/2} \left(1 + \sum_{1}^{n} |x_j|\right)^{-r}$

   (r — произвольное действительное число).
8. $(1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{-r/2} \Lambda_{\boldsymbol{r}}^{-1}(\boldsymbol{x}) \quad (r = r_1 = \ldots = r_n > 0)$.
9. $(1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{r/2} \Lambda_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}) \quad (r = r_1 = \ldots = r_n > 0)$.
10. $(1 + x_i^2)^{\frac{r_i}{2}} \Lambda_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}) \quad (i = 1, \ldots, n)$.
11. $\left\{ \sum_{j=1}^{n} (1 + x_j^2)^{\frac{r_j}{2}} \right\}^{-1} \Lambda_{\boldsymbol{r}}^{-1}(\boldsymbol{x})$.

12. $$\left\{\sum_1^n (1+x_j^2)^{\frac{r_j\lambda}{2\sigma}}\right\}^\sigma \left\{\sum_1^n (1+x_j^2)^{\frac{r_j\delta}{2\sigma}}\right\}^\sigma \left\{\sum_1^n (1+x_j^2)^{\frac{r_j(\lambda+\delta)}{2\sigma}}\right\}^{-\sigma}$$
$$(r_j>0;\ \sigma,\ \delta,\ \lambda>0).$$
$$\Lambda_r(x)=\left\{\sum_{j=1}^n (1+x_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}\right\}^{-\frac{1}{\sigma}}.$$

Эти функции мы обозначим соответственно через μ_i ($i=1, \ldots, 12$). Они будут нам нужны в дальнейшем. Доказательство того, что они суть множители Марцинкевича, сводится к предыдущей теореме 1.5.4.

Критерий ее для μ_1 выполняется тривиальным образом, так как μ_1 есть константа ($+1$ или -1) в каждом открытом координатном угле.

Функции μ_i непрерывны вместе со своими частными производными любого порядка на $R=R_n$, за исключением функций μ_i ($i=4, 5, 6, 7$), которые непрерывны на R, но их частные производные вообще разрывны на координатных плоскостях.

Ниже дается доказательство выполнения критерия Марцинкевича для ряда функций μ_i. Вопрос сводится к проверке того, что функции

$$x^k\mu_i^{(k)} \qquad (k=(k_1, \ldots, k_n),\ k_j=0,\ 1)$$

ограничены на каждом координатном угле пространства R. Вследствие симметрии этих функций достаточно такую проверку произвести для положительного координатного угла. Все рассматриваемые функции, кроме μ_6 и μ_{12}, суть произведения $\mu_i=\lambda_i\psi_i$ определенных функций λ_i и ψ_i. Согласно формуле Лейбница

$$x^k\mu_i^{(k)}=x^k\sum_{\alpha\leqslant k} C_k^\alpha \lambda_i^{(k-\alpha)}\psi_i^{(\alpha)},$$

где сумма распространена на всевозможные целочисленные неотрицательные векторы $\alpha\leqslant k$. Вопрос свелся к оценке функций вида

$$x^k\lambda_i^{(k-\alpha)}\psi_i^{(\alpha)}=x^k\chi_i$$

на положительном координатном угле.

Условимся писать $A\approx B$ вместо $|A|=cB$, где c — некоторая константа. Имеем

$$x^k\chi_4\approx x^k x^{k-\alpha}(1+|x|^2)^{r/2-|k-\alpha|}x^{(r-1)\alpha}\left(1+\sum_1^n x_j^r\right)^{-1-|\alpha|}=$$
$$=\frac{x^{\alpha r}}{\left(1+\sum_1^n x_j^r\right)^{|\alpha|}}\,\frac{x^{2(k-\alpha)}}{(1+|x|^2)^{|k-\alpha|}}\,\frac{(1+|x|^2)^{r/2}}{1+\sum_1^n x_j^r}\leqslant 1\cdot 1\cdot c<\infty.$$

При $r<1$ функция χ_4 разрывна, когда одна из координат x_j, где $j\in e_\alpha\subset e_k$ (e_α — носитель вектора α) равна нулю. Но согласно теореме 1.5.4 достаточно, чтобы функция χ_4 была непрерывной для положительных x_j с $j\in e_k$ и любых остальных x_j, что, очевидно, в данном случае соблюдается. При оценке $\mu_6=uvw$ будем иметь

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}(uvw)^{(\boldsymbol{k})}=\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\sum u^{(\alpha)}v^{(\beta)}w^{(\gamma)}, \tag{1}$$

где сумма распространена на всевозможные векторы α, β, γ с компонентами, равными 1 или 0, такими, что $\alpha+\beta+\gamma=\boldsymbol{k}$. При оценке произвольного слагаемого этой суммы будем считать (иначе оно равно нулю), что $e_\alpha\subset e_l$, а β есть вектор, s-я компонента которого равна 1, а остальные компоненты — нулю. Вопрос сводится к оценке

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}-\alpha}(1+x_s^2)^{\frac{\varkappa r_s}{2}-1}x_s\boldsymbol{x}^{\gamma}\prod_{e_\gamma}(1+x_j^2)^{\frac{r_j}{2}-1}\left\{\sum_1^n(1+x_j^2)^{\frac{r_j}{2}}\right\}^{-1-|\gamma|}=$$

$$=\frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}}(1+x_s^2)^{\frac{\varkappa r_s}{2}}}{\sum\limits_1^n(1+x_j^2)^{\frac{r_j}{2}}}\,\frac{x_s^2}{1+x_s^2}\,\frac{\boldsymbol{x}^{2\gamma}}{\prod\limits_{e_\gamma}(1+x_j^2)}\,\frac{\prod\limits_{e_\gamma}(1+x_j^2)^{\frac{r_j}{2}}}{\left\{\sum\limits_1^n(1+x_j^2)^{\frac{r_j}{2}}\right\}^{|\gamma|}}\leqslant 1.$$

Сделаем пояснение к оценке первого множителя во втором члене этих соотношений. Пусть

$$(1+x_{j_0}^2)^{r_{j_0}}=\max_j(1+x_j^2)^{r_j};$$

тогда

$$\frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}}(1+x_s^2)^{\frac{\varkappa r_s}{2}}}{\sum\limits_1^n(1+x_j^2)^{\frac{r_j}{2}}}\leqslant(1+x_{j_0}^2)^{-\frac{r_{j_0}+\varkappa r_{j_0}}{2}}\prod_{j=1}^n(1+x_{j_0}^2)^{\frac{l_j r_{j_0}}{2r_j}}=(1+x_{j_0}^2)^0=1.$$

При $l_j>1$ оцениваемое произведение без множителя $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$ разрывно, когда одна из координат x_j, где $j\in e_\alpha\subset e_k$ равна нулю, но, согласно теореме 1.5.4, достаточно, чтобы этот множитель был непрерывным для $x_j>0$, где $j\in e_k$ и любых остальных x_j, что в данном случае, очевидно, выполняется.

Для μ_7

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\chi_7\approx\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}-\alpha}(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{r/2-|\boldsymbol{k}-\alpha|}\left(1+\sum_1^n x_j\right)^{-r-|\alpha|}=$$

$$=\frac{\boldsymbol{x}^{2(\boldsymbol{k}-\alpha)}}{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{|\boldsymbol{k}-\alpha|}}\,\frac{\boldsymbol{x}^{\alpha}}{\left(1+\sum\limits_{j=1}^n x_j\right)^{|\alpha|}}\left(\frac{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{1/2}}{1+\sum\limits_{j=1}^n x_j}\right)^r<c<\infty.$$

Здесь применены неравенства

$$c_1\left(1+\sum_1^n x_j\right)\leqslant(1+|x|^2)^{1/2}<1+\sum x_j,$$

второе при $r>0$ и первое при $r<0$.

Функция χ_7 разрывна на некоторых координатных плоскостях, но ее пределы на них изнутри каждого координатного угла существуют, поэтому в каждом замкнутом таком угле χ_7 можно считать непрерывной.

Для μ_8 будем рассуждать следующим образом. Пусть l — вектор с компонентами, равными 1 или 0. Применяя формулу Лейбница о дифференцировании произведения функций многих переменных, опуская постоянные коэффициенты и рассматривая векторы x с неотрицательными координатами, получим (e_s — носитель вектора s)

$$x^lD^l\{(1+|x|^2)^{-r/2}\Lambda_r\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{s\leqslant l}x^lx^{l-s}(1+|x|^2)^{-r/2-|l-s|}\left(\sum(1+x_j^2)^{\frac{r\sigma}{2}}\right)^{1/\sigma-|s|}\times$$

$$\times\prod_{j\in e_s}(1+x_j^2)^{\frac{r\sigma}{2}-1}x_j=\sum_{s\leqslant l}\frac{x^{2(l-s)}}{(1+|x|^2)^{|l-s|}}\frac{x^{2s}}{\prod\limits_{j\in e_s}(1+x_j^2)}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{j\in e_s}(1+x_j^2)^{\frac{r\sigma}{2}}}{\left\{\sum(1+x_j^2)^{\frac{r\sigma}{2}}\right\}^{|s|}}\frac{\left(\sum(1+x_j^2)^{\frac{r\sigma}{2}}\right)^{1/\sigma}}{(1+|x|^2)^{r/2}}\leqslant 1$$

$\left(\text{учесть, что }\left(\sum u_j^\sigma\right)^{1/\sigma}\leqslant\sum u_j,\ \sigma>0,\ u_j\geqslant 0\right)$.

Для μ_9

$$x^lD^l\{(1+|x|^2)^{-r/2}\Lambda_r\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum x^lx^{l-s}(1+|x|^2)^{r/2-|l-s|}\left(\sum(1+x_j^2)^{\frac{r\sigma}{2}}\right)^{\frac{1}{\sigma}-|s|}\times$$

$$\times\prod_{j\in e_s}(1+x_j^2)^{\frac{r\sigma}{2}-1}x^s=\sum_{s\leqslant l}\frac{x^{2(l-s)}}{(1+|x|^2)^{|l-s|}}\frac{x^{2s}}{\prod\limits_{j\in e_s}(1+x_j^2)^{|s|}}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{j\in e_s}(1+x_j^2)^{\frac{r\sigma}{2}}}{\left(\sum(1+x_j^2)^{\frac{r\sigma}{2}}\right)^{|s|}}\frac{(1+|x|^2)^{r/2}}{\left(\sum(1+x_j^2)^{\frac{r\sigma}{2}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}}\leqslant 1.$$

Для μ_{10}

$$x^l D^l \left\{(1+x_i^2)^{\frac{r_i}{2}} \Lambda_r(x)\right\} \leqslant \sum_{s \leqslant l} x^l \left\{\sum_{j=1}^{n} (1+x_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}\right\}^{-\frac{1}{\sigma}-|s|} \times$$

$$\times \prod_{j \in e_s} (1+x_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}-1} x_j D^{(l-s)} (1+x_i^2)^{\frac{r_i}{2}} =$$

$$= \sum_{s \leqslant l} \frac{x^{2s}}{\prod\limits_{j \in e_s} (1+x_j^2)^{|s|}} \frac{\prod\limits_{j \in e_s} (1+x_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}}{\left\{\sum\limits_{j=1}^{n} (1+x_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}\right\}^{|s|}} \frac{x^{l-s} D^{(l-s)} (1+x_i^2)^{\frac{r_i}{2}}}{\left\{\sum\limits_{j=1}^{n} (1+x_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}\right\}^{1/\sigma}}.$$

Первые две дроби в правой части не превышают константу, третья дробь тоже не превышает константу, потому что ее числитель $\psi \equiv 0$, если существует $j \neq i$, $j \in e_{l-s}$; $\psi = (1+x_i^2)^{\frac{r_i}{2}}$, если $l-s=0$; $\psi = 2x_i^2 (1+x_i^2)^{\frac{r_i}{2}-1}$, если множество e_{l-s} состоит только из одного индекса i.

Для μ_{11}

$$x^l D^l \left\{\Lambda_r^{-1}(x) \left(\sum_1^n (1+x_j^2)^{\frac{r_j}{2}}\right)^{-1}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s \leqslant l} x^l \frac{\prod\limits_{j \in e_{l-s}} (1+x_j^2)^{\frac{r_j}{2}-1} x_j}{\left\{\sum\limits_1^n (1+x_j^2)^{\frac{r_j}{2}}\right\}^{1+|l-s|}} \left\{\sum_1^n (1+x_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}\right\}^{1/\sigma-|s|} \times$$

$$\times \prod_{j \in e_s} (1+x_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}-1} x_j =$$

$$= \sum_{s \leqslant l} \frac{\prod\limits_{j \in e_s} (1+x_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}}{\left\{\sum\limits_1^n (1+x_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}\right\}^{|s|}} \frac{x^{2(l-s)}}{\left\{\sum\limits_1^n (1+x_j^2)^{\frac{r_j}{2}}\right\}^{|l-s|}} \times$$

$$\times \frac{\left\{\sum\limits_1^n (1+x_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}\right\}^{1/\sigma}}{\sum\limits_1^n (1+x_j^2)^{\frac{r_j}{2}}} \frac{x^{2s}}{\prod\limits_{j \in e_s} (1+x_j^2)} \leqslant 1.$$

Для μ_{12} один из членов суммы Лейбница (1) оценивается следующим образом:

$$u^k \left\{ \sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j\lambda}{2\sigma}} \right\}^{\sigma-|\alpha|} \left\{ \sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j\delta}{2\sigma}} \right\}^{\sigma-|\beta|} \times$$

$$\times \left\{ \sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j(\lambda+\delta)}{2\sigma}} \right\}^{-\sigma-|\gamma|} \prod_{j\in e_\alpha} (1+u_j^2)^{\frac{r_j\lambda}{2\sigma}-1} u_j \times$$

$$\times \prod_{j\in e_\beta} (1+u_j^2)^{\frac{r_j\delta}{2\sigma}-1} u_j \prod_{j\in e_\gamma} (1+u_j^2)^{\frac{r_j(\lambda+\delta)}{2\sigma}-1} u_j =$$

$$= \frac{\left\{ \sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j\lambda}{2}} \right\}^{\sigma} \left\{ \sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j\delta}{2\sigma}} \right\}^{\sigma}}{\left\{ \sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j(\lambda+\delta)}{2\sigma}} \right\}^{\sigma}} \frac{u^{2k}}{\prod_{j\in e_k} (1+u_j^2)} \times$$

$$\times \frac{\prod_{j\in e_\alpha} (1+u_j^2)^{\frac{r_j\lambda}{2\sigma}} \prod_{j\in e_\beta} (1+u_j^2)^{\frac{r_j\delta}{2\sigma}} \prod_{j\in e_\gamma} (1+u_j^2)^{\frac{r_j(\lambda+\delta)}{2\sigma}}}{\left\{ \sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j\lambda}{2\sigma}} \right\}^{|\alpha|} \left\{ \sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j\delta}{2\sigma}} \right\}^{|\beta|} \left\{ \sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j(\lambda+\delta)}{2\sigma}} \right\}^{|\gamma|}} \leqslant 1. \qquad (2)$$

В первой дрсби, если всюду зачеркнуть σ, порядок не изменится, он не изменится также, если степени λ, δ, $\lambda+\delta$ вынести за знак соответствующих фигурных скобок.

При доказательстве в случае функции μ_{12}^{-1} появятся слагаемые, которые можно записать как правую часть (2). Изменится лишь на обратную величину ее первая дробь, которая все равно, очевидно, будет ограниченной.

Легко видеть, что функции μ_{12} и μ_{12}^{-1} останутся множителями Марцинкевича, если в каждом из трех ее множителей параметр σ принимает разные значения σ_1, σ_2, σ_3 или если в ее первом множителе заменить n на $m<n$. В последнем случае в (2) надо считать, что носитель e_α состоит из индексов с номерами, не превышающими m, иначе соответствующее слагаемое суммы Лейбница равно нулю. В последнем члене (2) в первом множителе числителя n надо заменить на m.

1.5.6. Распространение неравенства 1.5.2 (13) на непериодический случай. Целью нашей будет доказать, что для любой функции $f\in L_p(R_n)=L_p$ $(1<p<\infty)$ выполняются неравенства

$$c_1 \|f\|_p \leqslant \left\| \left\{ \sum |\delta_k(f)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \leqslant c_2 \|f\|_p, \qquad (1)$$

где c_1, c_2 — константы, не зависящие от f,

$$\delta_k(f) = \widehat{(1)_{\Delta_k} f} \qquad \left((1)_e = \begin{cases} 1, & x \in e, \\ 0, & x \neq e \end{cases} \right) \tag{2}$$

и для $k \geqslant 0$

$$\Delta_k = \Delta_{k_1, \ldots, k_n} = \{2^{k_j - 1} \leqslant u_j \leqslant 2^{k_j};\ j = 1, \ldots, n\} \tag{3}$$

(2^{k_j-1} при $k_j = 0$ заменяется на 0), а для произвольных k прямоугольник Δ_k есть множество точек $\{u_1 \operatorname{sign} k_1, \ldots, u_n \operatorname{sign} k_n\}$, где $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \Delta_{|k_1|, \ldots, |k_n|}$.

В дальнейшем будет показано (см. 8.10.2), что если f есть регулярная в смысле L_p $(1 < p < \infty)$ обобщенная функция (см. далее 1.5.10), для которой норма, стоящая во втором члене (1), конечна, то $f \in L_p$.

Ограничимся рассмотрением двумерного случая. Зададим бесконечно дифференцируемую финитную функцию $f(x, y)$ с носителем, принадлежащим к

$$\Delta_{s_0} = \{|x|, |y| < s_0\}, \tag{4}$$

и рядом Фурье 1.5.4 (6). В силу того, что $f \equiv 0$ вне Δ_{s_0} для $s > s_0$, будем иметь неравенства

$$\|f\|_p \ll \left\| \left(\sum |\delta_{kl}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p(\Delta_s)} \ll \|f\|_p, \tag{5}$$

где

$$\delta_{kl}(f) = \sum_{\pm(n_{|k|-1}+1)}^{\pm n_{|k|}} \ \sum_{\pm(n_{|l|-1}+1)}^{\pm n_{|l|}} c_{\mu\nu} e^{i \frac{\pi}{s}(\mu x + \nu y)}$$

и где мы на этот раз считаем, что $n_0 = n_{-1} = 0$, $n_1 = 1$, $n_k = 2^{k-2}\beta$ $(k = 2, 3, \ldots)$, и $s > s_0$ подобрано так, что $\beta = \frac{s}{\pi} > 2$ целое. Знак + или — ставится в зависимости от того, будет ли k или l положительным или отрицательным. Условие 1.5.2 (5) соблюдено:

$$\frac{n_k + 1}{n_k} \geqslant 2 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

поэтому константы, входящие в неравенства (5), не зависят от $s > s_0$.

Положим

$$\delta_{kl}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_{k,l}} \tilde{f}(u, v) e^{i(xu + yv)} \, du \, dv = \widehat{(1)_{\Delta_{kl}} f},$$

где Δ_{kl} — прямоугольник (3) (при $k_1 = k$, $k_2 = l$, $n = 2$).

Пусть

$$a=\frac{k_1\pi}{s},\quad b=\frac{k_2\pi}{s},\quad c=\frac{l_1\pi}{s},\quad d=\frac{l_2\pi}{s};$$

$$\Delta=\{[a,\ b]\times[c,\ d]\};\ b-a,\ d-c\geqslant 1;$$

$$|\tilde f|,\ \left|\frac{\partial\tilde f}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial\tilde f}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\tilde f}{\partial x\,\partial y}\right|\leqslant M_\Delta,\qquad (x,\ y)\in\Delta.$$

Применим преобразование Абеля к сумме

$$\delta_\Delta=\sum_{k_1}^{k_2}\sum_{l_1}^{l_2}c_{kl}e^{i\frac{\pi}{s}(kx+ly)}=\frac{\pi}{2s^2}\sum_{k_1}^{k_2}\sum_{l_1}^{l_2}\tilde f\left(\frac{k\pi}{s},\ \frac{l\pi}{s}\right)e^{i\frac{\pi}{s}(kx+ly)}=$$

$$=\frac{\pi}{2s^2}\sum_{l_1}^{l_2}e^{i\frac{\pi}{s}ly}\left\{\sum_{k_1}^{k_2-1}I_k(x)\,\Delta_k\tilde f\left(\frac{k\pi}{s},\ \frac{l\pi}{s}\right)+\tilde f\left(\frac{k_2\pi}{s},\ \frac{l\pi}{s}\right)I_{k_2}(x)\right\},\qquad (6)$$

где

$$I_k(x)=\sum_{\nu=1}^{k}e^{i\frac{\pi}{s}\nu x}=\frac{e^{i\frac{\pi}{s}(k+1)x}-1}{e^{i\frac{\pi}{s}x}-1},$$

$$\Delta_x a_{kl}=a_{kl}-a_{k+1,\,l}.$$

Дальнейшее преобразование Абеля приводит к равенству

$$\delta_\Delta=\frac{\pi}{2s^2}\left\{\sum_{k_1}^{k_2-1}\sum_{l_1}^{l_2-1}I_k(x)\,I_l(y)\,\Delta^2_{xy}\tilde f\left(\frac{k\pi}{s},\ \frac{l\pi}{s}\right)+\right.$$

$$+\sum_{k_1}^{k_2-1}\Delta_x\tilde f\left(\frac{k\pi}{s},\ \frac{l_2\pi}{s}\right)I_k(x)\,I_{l_2}(y)+\sum_{l_1}^{l_2-1}I_{k_2}(x)\,I_l(y)\,\Delta_y\tilde f\left(\frac{k_2\pi}{s},\ \frac{l\pi}{s}\right)+$$

$$\left.+\tilde f\left(\frac{k_2\pi}{s},\ \frac{l_2\pi}{s}\right)I_{k_2}(x)\,I_{l_2}(y)\right\}.\qquad (7)$$

Если учесть, что

$$|I_k(x)|\leqslant\frac{2}{\left|e^{i\frac{\pi}{s}x}-1\right|}\leqslant\frac{s}{|x|}\qquad(|x|<s),$$

то из (6) и (7) следуют четыре неравенства

$$|\delta_\Delta|\leqslant cM_\Delta|\Delta|\{1,\ |x|^{-1},\ |y|^{-1},\ |xy|^{-1}\},\ |x|,\ |y|<s,\qquad (8)$$

где c не зависит от рядом стоящих множителей и от s. Второе, например, получается из (6) при помощи следующих выкладок:

$$|\delta_\Delta|<\frac{1}{s^2}(l_2-l_1)\left\{(k_2-k_1)\frac{s}{|x|}\frac{M_\Delta}{s}+M_\Delta\frac{s}{|x|}(b-a)\right\}$$

(во втором слагаемом в фигурных скобках добавлен множитель $b-a\geqslant 1$). Четвертое неравенство следует с помощью аналогичных выкладок из (7).

Положим $\Phi_1(x, y)=\min c\{1, |x|^{-1}, |y|^{-1}, |xy|^{-1}\}$. Очевидно, $\Phi_1\in L_p$ $(1<p<\infty!)$ и из (8) следует, что

$$|\delta_\Delta|\leqslant M_\Delta|\Delta|\Phi_1(x, y) \quad ((x, y)\in\Delta_s). \tag{9}$$

На основании (9), считая, что

$$\delta_{kl}^s(f)=\delta_{\Delta_{kl}^s},$$

$$\Delta_{kl}^s=\left\{\pm\frac{(n_{k-1}+1)\pi}{s}\leqslant x\leqslant\pm\frac{n_k\pi}{s};\quad \pm\frac{(n_{l-1}+1)\pi}{s}\leqslant y\leqslant\pm\frac{n_l\pi}{s}\right\},$$

получим $|\delta_{kl}^s(f)|\leqslant M_{\Delta_{kl}^s}|\Delta_{kl}^s|\Phi_1(x, y)$.

Так как функции $\tilde{f}$, $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}$, $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}$ убывают на бесконечности быстрее $(1+|x|^\lambda+|y|^\lambda)^{-1}$, где λ как угодно велико, то, очевидно,

$$\sum M_{\Delta_{kl}^s}|\Delta_{kl}^s|<A<\infty,$$

где константа A не зависит от s. Поэтому

$$\left\{\sum|\delta_{kl}^s(f)|^2\right\}^{1/2}\leqslant\sum|\delta_{kl}^s(f)|\leqslant A\Phi_1=$$
$$=\Phi(x, y)\in L_p(R_n) \quad ((x, y)\in\Delta_s). \tag{10}$$

Ограничиваясь для простоты неотрицательными k, l, будем иметь $\left(s\text{ подобрано так, что }\beta=\frac{s}{\pi}-\text{целое}\right)$

$$\delta_{kl}^s(f)=\frac{\pi}{2s^2}\sum_{2^{k-3}\beta+1}^{2^{k-2}\beta}\ \sum_{2^{l-3}\beta+1}^{2^{l-2}\beta}\tilde{f}\left(\frac{\mu\pi}{s}, \frac{\nu\pi}{s}\right)e^{i\frac{\pi}{s}(\mu x+\nu y)}\xrightarrow[s\to\infty]{}$$
$$\xrightarrow[s\to\infty]{}\frac{1}{2\pi}\int_{2^{k-3}}^{2^{k-2}}\int_{2^{l-3}}^{2^{l-2}}\tilde{f}(u, v)\,e^{i(ux+vy)}\,du\,dv=\delta_{k-2,l-2}(f)$$

равномерно относительно $(x, y)\in\Delta_N$ для k, $l\geqslant 2$ (2^{-1} надо заменить на 0), каково бы ни было фиксированное $N>0$. Если же одно из чисел (пока неотрицательное) меньше 2, то двукратная сумма превращается в однократную или даже (для δ_{00}^s, δ_{10}^s, δ_{01}^s) сумма вырождается в один член. В этих случаях $\delta_{kl}^s(f)\to 0$ равномерно на Δ_N, так как под интегралом стоит функция, непрерывная относительно x, y, u, v. Аналогичные факты верны и для чисел k, l любого знака, поэтому доказано, что при любых k, l

$$\delta_{kl}^s(f) \xrightarrow[s\to\infty]{} \delta_{k-2,l-2}(f) \text{ на } \Delta_N$$

равномерно, каково бы ни было $N>0$.

Из второго неравенства (5) следует при любых N, $N_1>0$

$$\left\| \left(\sum_{|k|,\ |l|<N_1} |\delta_{kl}^s(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p(\Delta_N)} \leqslant \|f\|_p$$

и после перехода к пределу при $s\to\infty$, затем $N_1\to\infty$ и затем $N\to\infty$ получим

$$\left\| \left(\sum |\delta_{kl}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \|f\|_p.$$

Из (10) следует

$$\left(\sum_{|k|,\ |l|<N} |\delta_{kl}^s(f)|^2 \right)^{1/2} \leqslant \Phi(x,\ y),$$

поэтому после перехода к пределу сначала при $s\to\infty$, затем $N\to\infty$ получим

$$\left\{ \sum |\delta_{kl}(f)|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \Phi(x,\ y).$$

Наконец,

$$\left| \left\| \left\{ \sum |\delta_{kl}^s(f)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_{L_p(\Delta_s)}^p - \left\| \left\{ \sum |\delta_{kl}(f)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_{L_p(R_2)}^p \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \left\| \left\{ \sum_{|k|,\ |l|<N} |\delta_{kl}^s(f)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_{L_p(\Delta_N)}^p - \left\| \left\{ \sum_{|k|,\ |l|<N} |\delta_{kl}(f)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_{L_p(\Delta_N)}^p \right| +$$
$$+ \left\| \sum_{|k|,\ |l|<N} |\delta_{kl}^s(f)| \right\|_{L_p(\Delta_s-\Delta_N)} + \left\| \sum_{|k|,\ |l|<N} |\delta_{kl}(f)| \right\|_{L_p(R_2-\Delta_N)} +$$
$$+ \left\| \sum{}' |\delta_{kl}^s(f)| \right\|_{L_p(\Delta_N)} + \left\| \sum{}' |\delta_{kl}(f)| \right\|_{L_p(\Delta_N)} \equiv I_1+\ldots+I_5,$$

где $\sum'$ есть сумма по парам чисел k, l, по крайней мере одно из которых не меньше N.

Здесь

$$I_2,\ I_3 \leqslant \|\Phi\|_{L_p(R_2-\Delta_N)},$$
$$I_4 \leqslant \sum{}' M_{\Delta_{kl}^s} |\Delta_{kl}^s| \, \|\Phi\|_p \leqslant \varepsilon_N \|\Phi\|_p,$$

где ε_N не зависит от s и стремится к нулю при $N\to\infty$

$$I_5 \leqslant \varepsilon_N \to 0 \qquad (N\to\infty).$$

Таким образом, N можно взять настолько большим, чтобы $I_2, \ldots, I_5$ были меньшими заданного $\varepsilon>0$, а затем подобрать s_0 так, чтобы было $I_1<\varepsilon$ для всех $s>s_0$.

Мы доказали, что для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции f

$$\lim_{s\to\infty}\left\|\left\{\sum\left|\delta_{kl}^s(f)\right|^2\right\}^{1/2}\right\|_{L_p(\Delta_s)}=\left\|\left\{\sum\left|\delta_{kl}(f)\right|^2\right\}^{1/2}\right\|_p,$$

и тогда на основании (5), где константы в неравенстве не зависят от s, получим (1) (пока для бесконечно дифференцируемых финитных функций).

Если теперь $f\in L_p$, то подберем последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций f_j $(j=1, 2, \ldots)$ так, что

$$\|f-f_j\|_p\to 0 \qquad (j\to\infty). \tag{11}$$

Это показывает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое λ, что для i, $j>\lambda$

$$\left\|\left\{\sum_{|k|,\,|l|<N}\left[\widehat{(1)_{\Delta_{kl}}\widehat{(f_i-f_j)}}\right]^2\right\}\right\|_p\leqslant\|f_j-f_i\|_p<\varepsilon,$$

после перехода к пределу при $i\to\infty$ в этих неравенствах f_i заменится на f. Дальнейший же переход к пределу при $N\to\infty$ приводит к неравенству

$$\left\|\left\{\sum|\delta_{kl}(f_j-f)|^2\right\}^{1/2}\right\|_p<\varepsilon \qquad (j>\lambda),$$

откуда следует, что

$$\left\|\left\{\sum|\delta_{kl}(f_j-f)|^2\right\}^{1/2}\right\|_p\to 0 \qquad (j\to\infty). \tag{12}$$

Для функций f_j неравенства (1) выполняются. Вследствие же (11) и (12) в этих неравенствах законно перейти к пределу при $j\to\infty$, получив при этом неравенства (1).

1.5.6.1. Совершенно аналогичными рассуждениями, более простыми, потому что мы имеем в виду одномерный случай, доказывается, что для функций $f(x)\in L_p(-\infty, \infty)=L_p$ $(1<p<\infty)$ имеют место неравенства

$$\|f\|_p\leqslant\left\|\left\{\sum\beta_l(f)^2\right\}^{1/2}\right\|_p\leqslant\|f\|_p, \tag{13}$$

где

$$\beta_l(f)=\widehat{(1)_{\Lambda_l}\tilde{f}},$$

$\Lambda_l=\{2^{l-1}\leqslant|x|\leqslant 2^l,\ l=0, 1, \ldots;\ 2^{l-1}$ при $l=0$ заменяется на нуль$\}$ и константы в (13) не зависят от f. В качестве исходного неравенства в периодическом случае надо взять 1.5.2.1(4).

1.5.7. Преобразование Фурье функции $\operatorname{sign} x$. Функция

$$\operatorname{sign} x = \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sign} x_j$$

есть мультипликатор при $1 < p < \infty$ (см. п. 1.5.5). Функционал (пояснения ниже)

$$\begin{aligned}
(\widehat{\operatorname{sign} x}, \varphi) &= (\operatorname{sign} x, \hat{\varphi}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \operatorname{sign} u\, du \int e^{iut} \varphi(t)\, dt = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R_+} du \int \varphi(t) \prod_{j=1}^{n} (e^{it_j u_j} - e^{-it_j u_j})\, dt = \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} i^n \lim_{N\to\infty} \int \varphi(t)\, dt \int\limits_{\Delta_N^+} \prod_{j=1}^{n} \sin t_j u_j\, du_j = \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} i^n \lim_{N\to\infty} \int \varphi(t)\, dt \prod_{j=1}^{n} \int\limits_0^N \sin t_j u_j\, du_j = \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} i^n \lim_{N\to\infty} \int \varphi(t) \prod_{j=1}^{n} \frac{1-\cos N t_j}{t_j}\, dt = \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} i^n \lim_{N\to\infty} \int\limits_{R_+} \Delta\varphi(t) \prod_{j=1}^{n} \frac{1-\cos N t_j}{t_j}\, dt = \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} i^n \int\limits_{R_+} \frac{\Delta\varphi(t)}{t}\, dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} i^n \int \frac{\varphi(t)}{t}\, dt. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Здесь R_+ — положительный координатный угол,

$$\Delta_N^+ = \{0 \leqslant x_j \leqslant N;\ i = 1, \ldots, n\},$$

$$\Delta\varphi(t) = \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n \varphi(t) \qquad (2)$$

и

$$\Delta_j \varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(t_1, \ldots, t_{j-1}, -t_j, t_{j+1}, \ldots, t_n) \quad (j = 1, \ldots, n). \qquad (3)$$

В предпоследнем равенстве (1) при перемножении членов произведения появляются интегралы

$$\int\limits_{R_+} \frac{\Delta\varphi(t)}{t} \prod_{j=1}^{k} \cos N t_j\, dt \to 0,$$

стремящиеся к нулю при $N \to \infty$ вследствие суммируемости $t^{-1}\Delta\varphi(t)$ на R_+ в силу хорошо известной в теории рядов Фурье леммы. Интеграл в последнем члене (1) написан в смысле Коши:

$$\int \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{R^\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt, \tag{4}$$

где R^ε есть множество точек $x \in R$, отстоящих до любых координатных плоскостей на расстоянии, большем чем $\varepsilon > 0$. Функционал (4) определяет обобщенную функцию, которую обозначают через v. p. $\frac{1}{t}$. Итак доказано равенство

$$\widehat{\operatorname{sign} x} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} i^n \text{ v. p. } \frac{1}{t}.$$

Для $f \in S$

$$\widehat{\operatorname{sign} x} * f = \widehat{\operatorname{sign} x \tilde{f}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \operatorname{sign} u \int f(t)\, e^{-itu}\, dt e^{iux}\, du =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \operatorname{sign} u\, du \int f(x-t)\, e^{iut}\, dt = \left(\frac{i}{\pi}\right)^n \int \frac{f(x-t)}{t}\,dt, \tag{5}$$

где последнее равенство следует из уже доказанного равенства между третьим и последним членами (1), если заменить там $\varphi(t)$ на $f(x-t)$. Последний интеграл (5) понимается в смысле Коши.

Записью

$$\widehat{\operatorname{sign} x} * f = \widehat{\operatorname{sign} x \tilde{f}} = \left(\frac{i}{\pi}\right)^n \int \frac{f(x-t)}{t}\,dt \tag{6}$$

мы будем пользоваться и тогда, когда $f \in L_p$ $(1 < p < \infty)$, понимая члены (6) как пределы, к которым стремятся в смысле L_p, соответствующие выражения для финитных функций f_l, где $\|f - f_l\|_p \to 0$. В отношении первого и второго членов (6) это было обосновано выше (см. 1.5.1), потому что $\operatorname{sign} x$ мультипликатор в L_p для $1 < p < \infty$. Соответствующее определение для выражения внешне записанного в виде интеграла мы сделали сейчас. На самом деле можно доказать (М. Рис. [1] при $n = 1$), что для $f \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ это есть действительно интеграл в смысле Коши, существующий почти для всех x, но на этом мы останавливаться не будем. Нам это не понадобится.

Пусть $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n) > 0$ $(a_j > 0)$ — два фиксированных вектора и

$$\Delta_a = \{\,|x_j| < a_j;\ j = 1, \ldots, n\},$$
$$\Delta(\mu, a) = \{\,|x_j - \mu_j| < a_j;\ j = 1, \ldots, n\}, \quad \Delta(0, a) = \Delta_a.$$

Таким образом, $\Delta(\mu, a)$ есть сдвиг Δ_a на вектор μ. Заметим, что характеристическая функция (от одной переменной t)

интервала (a, b) равна

$$(1)_{(a,b)}=\frac{1}{2}[\operatorname{sign}(t-a)-\operatorname{sign}(t-b)].$$

Отсюда следует, что

$$(1)_{\Delta(\mu, a)}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2}[\operatorname{sign}(x_j-\mu_j+a_j)-\operatorname{sign}(x_j-\mu_j-a_j)]=$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^n}\sum\operatorname{sign}\alpha\operatorname{sign}(x-\mu-\alpha), \qquad (7)$$

где сумма распространена на всевозможные векторы $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такие, что $|\alpha_j|=a_j$, $j=1, \ldots, n$.

Мы знаем, что функция $\operatorname{sign} x$ — мультипликатор:

$$\|\widehat{\operatorname{sign} x\tilde{f}}\|_p \leqslant \varkappa_p\|f\|_p \quad (1<p<\infty), \qquad (8)$$

где $\varkappa_p$ не зависит от f (см. 1.5.5), а $\operatorname{sign}(x-a)$ — тоже мультипликатор с той же константой $\varkappa_p$ в соответствующем неравенстве (см. 1.5.1.2), каков бы ни был вектор $a\in R$, поэтому из (7) следует

$$\|\widehat{(1)_{\Delta(\mu, a)}\tilde{f}}\|_p\leqslant\frac{1}{2^n}\sum\varkappa_p\|f\|_p=\varkappa_p\|f\|_p \quad (1<p<\infty), \qquad (9)$$

потому что сумма распространена на 2^n слагаемых. Замечательно, что константа $\varkappa_p$ в (9) та же, что и в (8), и, таким образом, не зависит от μ и a.

Из (7) следует (см. 1.5 (18)), что

$$\widehat{(1)}_{\Delta(\mu, a)}=\frac{(-1)^n}{2^n}\sum\operatorname{sign}\alpha\, e^{i(\mu+\alpha)x}\,\widehat{\operatorname{sign} x}=$$
$$=\frac{1}{2^n}e^{i\mu x}\prod_{j=1}^{n}\left(e^{ia_jx_j}-e^{-ia_jx_j}\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2}(-i)^n\,\text{v. p.}\frac{1}{x}=$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2}e^{i\mu x}D_a(x), \qquad (10)$$

где

$$D_a(x)=\prod_{j=1}^{n}\sin a_jx_j\,\text{v. p.}\frac{1}{x}=\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin a_jx_j}{x_j}. \qquad (11)$$

В (11) при перемножении обычной функции на обобщенную получилась обычная функция. Например, в одномерном случае это доказывается так:

$$\left(\sin ax \text{ v. p. } \frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \left(\text{v. p. } \frac{1}{x}, \sin ax\varphi(x)\right) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{\Delta [\sin ax\varphi(x)]\, dx}{x} = \int \frac{\sin ax}{x} \varphi(x)\, dx, \qquad (12)$$

где $\Delta F(x) = F(x) - F(-x)$. Интеграл в правой части (12) уже можно понимать в смысле Лебега.

Для функций $f \in S$ имеет место равенство

$$\widehat{(1)_{\Delta(\mu,\, a)}\tilde{f}} = \frac{1}{\pi^n} \int e^{i\mu(x-u)} D_a(x-u) f(u)\, du,$$

в частности при $\mu = 0$

$$F(x) = \widehat{(1)_{\Delta_a}\tilde{f}} = \frac{1}{\pi^n} \int D_a(x-u) f(u)\, du, \qquad (13)$$

где интегралы в правых частях понимаются в смысле Лебега. Остановимся подробнее на (13). Интеграл (13) имеет смысл и для любой функции $f \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, потому что $D_a(x) \in L_q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ и

$$\int |D_a(x-a) f(u)|\, du \leqslant \|D_a\|_q \|f\|_p < \infty.$$

Непосредственно видно, что он есть непрерывная функция от x (даже равномерно непрерывная):

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \|D_a(x-u) - D(y-u)\|_q \|f\|_p \to 0 \quad (x \to y).$$

Если $f_l \in S$, $\|f_l - f\|_p \to 0$ и F_l есть результат подстановки f_l вместо f в (13), то

$$|F(x) - F_l(x)| \leqslant \|D_a\|_q \|f - f_l\|_p \to 0$$

равномерно. С другой стороны, $(1)_{\Delta_a}$ есть множитель Марцинкевича, и потому $\|F_k - F_l\|_p \to 0$ $(k,\, l \to 0)$. Это показывает, что F_l стремится в смысле L_p именно к функции F, определяемой интегралом (13), и что для $f \in L_p$ справедливо равенство (13), где его правая часть есть интеграл Лебега, а левая понимается в терминах множителя Марцинкевича (см. 1.5.1).

На самом деле $F(x)$ есть аналитическая функция притом целая экспоненциального типа (см. далее 3.6.2).

1.5.8. Функции φ_ε и ψ_ε. Функция φ_ε определена на $R = R_n$, зависит от малого положительного параметра ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ и обладает следующими свойствами: $\varphi_\varepsilon(x)$ бесконечно дифференцируема и неотрицательна на R, имеет носитель на кубе

$$\Delta_\varepsilon = \{|x_j| < \varepsilon;\ j = 1, \ldots, n\}$$

(т. е. $\varphi_\varepsilon=0$ вне Δ_ε) и, кроме того, удовлетворяет равенству

$$\int_{\Delta_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=1 \qquad (0<\varepsilon<\varepsilon_0). \tag{1}$$

Важно, что $\varphi_\varepsilon \in S$ и имеет компактный носитель, т. е. есть финитная функция (см. 1.4.1).

Если φ есть произвольная непрерывная на R функция (даже локально суммируемая на R и непрерывная в нулевой точке), то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int \varphi_\varepsilon(\boldsymbol{x})\,\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=\varphi(0), \tag{2}$$

потому что

$$\left|\int_{\Delta_\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\boldsymbol{x})\,\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}-\varphi(0)\right| = \int_{\Delta_\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\boldsymbol{x})\,[\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(0)]\,d\boldsymbol{x} \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\Delta_\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\boldsymbol{x})\sup_{\Delta_\varepsilon}|\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(0)|\,d\boldsymbol{x}=\sup_{\Delta_\varepsilon}|\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(0)|\to 0 \quad (\varepsilon\to 0).$$

Если $\varphi \in S$, то равенство (2) можно записать следующим образом:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi_\varepsilon,\ \varphi)=(\delta,\ \varphi)=\varphi(0), \tag{3}$$

где $\delta=\delta(\boldsymbol{x})$ есть дельта-функция.

Положим

$$\psi_\varepsilon(\boldsymbol{x})=(2\pi)^{n/2}\tilde{\varphi}_\varepsilon(\boldsymbol{x}).$$

Так как $\varphi_\varepsilon\to\delta$ $(\varepsilon\to 0)$ слабо, то $\psi_\varepsilon\to(2\pi)^{n/2}\tilde{\delta}=1$ слабо. Кроме того, $\psi_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ как обычная функция при $\varepsilon\to 0$ ограниченно сходится к 1 для всех $\boldsymbol{x}$:

$$\psi_\varepsilon(\boldsymbol{x})=\int\varphi_\varepsilon(\boldsymbol{t})\,e^{-i\boldsymbol{x}\boldsymbol{t}}\,d\boldsymbol{t}\to 1, \tag{4}$$

$$|\psi_\varepsilon(\boldsymbol{x})|\leqslant\int\varphi_\varepsilon(\boldsymbol{t})\,d\boldsymbol{t}=1. \tag{5}$$

Ниже будет показано, что если $f\in L_p$, $g\in L$ и $\varepsilon\to 0$, то слабо

$$\psi_\varepsilon f\to f, \tag{6}$$

$$\psi_\varepsilon g*f\to g*f, \tag{7}$$

$$g*\psi_\varepsilon f\to g*f. \tag{8}$$

Далее, если $f\in L_p$, $g\in L_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то можно определить свертку $g*f$ при помощи интеграла

$$g*f=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int g(\boldsymbol{u})\,f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})\,d\boldsymbol{u}.$$

Очевидно,

$$|(g*f)(\boldsymbol{x})|\leqslant\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|g\|_q\|f\|_p.$$

Эта свертка находится в стороне от введенных в 1.5 обобщений этого понятия, где $g \in S'$ была такой функцией, что $f \in L_p$ влечет $g*f \in L_p$. В данном же случае при $f \in L_p$ функция $g*f$ принадлежит к классу $L_\infty = M$ ограниченных (измеримых) функций. Однако для такой свертки имеет место свойство, аналогичное (8)

$$g*\psi_\varepsilon f \to g*f \qquad (\varepsilon \to 0). \tag{9}$$

Доказательство (6). В силу теоремы Лебега

$$(\psi_\varepsilon f, \varphi) = \int \psi_\varepsilon(t) f(t) \varphi(t)\, dt \to \int f\varphi\, dt = (f, \varphi).$$

Доказательство (7).

$$(\psi_\varepsilon g*f, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\int \psi_\varepsilon(t) g(t) f(x-t) \varphi(x)\, dt\, dx \to$$
$$\to \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\int g(t) f(x-t) \varphi(t)\, dt\, dx = (g*f, \varphi).$$

Так как

$$\int\int |g(t) f(x-t)|\, dt\, |\varphi(x)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \int |g(t) f(x-t)|\, dt \right\|_p \|\varphi\|_q \leqslant \|g\|_L \|f\|_p \|\varphi\|_q \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Доказательство (8).

$$(g*\psi_\varepsilon f, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\int \psi_\varepsilon(t) f(t) g(x-t) \varphi(x)\, dx\, dt \to$$
$$\to \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\int f(t) g(x-t) \varphi(x-t)\, dx\, dt, \tag{10}$$

так как

$$\int\int |f(t) g(x-t) \varphi(x)|\, dt\, dx \leqslant \left\| \int f(t) g(x-t)\, dt \right\|_p \|\varphi\|_q \leqslant$$
$$\leqslant \|g\|_L \|f\|_p \|\varphi\|_q.$$

Доказательство (9). Такое же, как и доказательство (8), но надо принять во внимание неравенство

$$\int\int |f(t) g(x-t) \varphi(x-t)|\, dx\, dt \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \|\varphi\|_L.$$

1.5.9. Операция I_r лиувиллевского типа. Пусть r есть произвольное действительное число. Функция

$$(1+|u|^2)^{r/2} = \left(1 + \sum_{j=1}^n u_j^2\right)^{r/2} \tag{1}$$

бесконечно дифференцируема на R и имеет полиномиальный рост при любом знаке r.

Положим

$$G_r(u) = \widehat{(1+|u|^2)^{-r/2}}. \tag{2}$$

Так как

$$\widetilde{G_r(u)} = (1+|u|^2)^{-r/2} \tag{3}$$

— бесконечно дифференцируемая функция с полиномиальным ростом, то для любой обобщенной функции $f \in S'$ имеет смысл свертка

$$F = G_r * f = \widehat{\tilde{G}_r \tilde{f}} = \widehat{(1+|u|^2)^{-r/2}\tilde{f}} = I_r f, \tag{4}$$

определяющая операцию I_r, отображающую $f \in S'$ в $F \in S'$.

Очевидно,

$$I_0 f = f. \tag{5}$$

Если r и ρ — произвольные действительные числа и $f \in S'$, то

$$I_{r+\rho} f = \widehat{(1+|\lambda|^2)^{-r/2}(1+|\lambda|^2)^{-\rho/2}\tilde{f}} = \widehat{(1+|\lambda|^2)^{-r/2}\widetilde{I_\rho f}} = I_r I_\rho f. \tag{6}$$

В частности, при $\rho = -r$

$$I_r I_{-r} f = I_0 f = f, \tag{7}$$

т. е. операции I_r и I_{-r} взаимно обратны.

Нетрудно видеть также, что операция I_r отображает S на S взаимно однозначно и непрерывно: если φ_m, $\varphi \in S$ и $\varphi_m \to \varphi\,(S)$ при $m \to \infty$, то

$$I_r \varphi_m \to I_r \varphi\,(S).$$

Можно еще ввести операцию I_r^*, определяемую формулой

$$I_r^* = \widetilde{(1+|\lambda|^2)^{-r/2}\hat{f}},$$

которую естественно назвать сопряженной к I_r. Она, очевидно, обладает всеми свойствами, установленными выше для I_r, в том числе непрерывностью в смысле сходимости в S.

Связь между I_r и I_r^* проявляется в равенствах

$$(I_r f, \varphi) = (f, I_r^* \varphi),$$
$$(I_r^* f, \varphi) = (f, I_r \varphi) \qquad (f \in S',\ \varphi \in S).$$

Из них немедленно следует, что операции I_r и I_r^* непрерывны на S' (слабо непрерывны), т. е. что из того, что f_m, $f \in S'$, $m = 1, 2, \ldots$, и

$$f_m \to f\,(S'),$$

следует, что

$$I_r f_m \to I_r f, \quad I_r^* f_m \to I_r^* f\,(S').$$

В самом деле, например,

$$(I_r f_m,\ \varphi) = (f_m,\ I_r^* \varphi) \to (f,\ I_r^* \varphi) = (I_r f,\ \varphi).$$

Заметим, что при $r = -2$ имеет место замечательное равенство

$$I_{-2} f = \widehat{(1 + |\lambda|^2) \tilde{f}} = f + \widehat{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \tilde{f}} =$$

$$= f - \sum_{j=1}^{n} \widehat{(i\lambda_j)^2 \tilde{f}} = f - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = f - \Delta f = (1 - \Delta) f,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Следовательно, при любом натуральном l

$$I_{-2l} f = \widehat{(1 + |\lambda|^2)^l \tilde{f}} = (1 - \Delta)^l f \qquad (f \in S'). \tag{8}$$

1.5.10. Регулярные обобщенные функции. Дальнейшее расширение понятия свертки. Операция I_r может служить удобным средством для расширения понятия свертки на класс обобщенных функций, которые мы называем регулярными.

По определению функцию $f \in S'$ мы будем называть *регулярной в смысле* L_p и писать $f \in S'_p$, если для некоторого $\rho_0 > 0$ имеет место

$$I_{\rho_0} f = F \in L_p. \tag{1}$$

Пусть μ есть мультипликатор в L_p ($\hat{\mu} \in L$ при $p = 1$) (см. 1.5.1, 1.5.1.1). Пусть еще f есть регулярная в смысле L_p функция, для которой выполняется свойство (1).

Положим для $\rho \geqslant \rho_0$

$$\hat{\mu} * f = I_{-\rho} (\hat{\mu} * I_\rho f). \tag{2}$$

Это определение не зависит от $\rho \geqslant \rho_0$. В самом деле, пусть наряду с (1)

$$I_{\rho'} f = F_1 \in L_p \qquad (\rho' > \rho). \tag{3}$$

Тогда при $\rho' - \rho = r$, учитывая, что $I_{\rho_0} f = F \in L_p$, получим

$$I_{-\rho'} (\hat{\mu} * I_{\rho'} f) = I_{-\rho} I_{-r} (\hat{\mu} * I_r I_\rho f) =$$

$$= I_{-\rho} \widehat{(1 + |x|^2)^{r/2} \mu (1 + |x|^2)^{-r/2} \widetilde{I_\rho f}} = I_{-\rho} \widehat{\mu \widetilde{I_\rho f}} = I_{-\rho} (\hat{\mu} * I_\rho f)$$

(см. 1.5.1 (12) при $\mu \in L$ и 1.5.1.1 (9) при $1 \leqslant p < \infty$). В третьем равенстве мы воспользовались тем фактом, который будет доказан позже (см. 8.1), что

$$\widehat{(1 + |x|^2)^{-r/2}} \in L \qquad (r > 0),$$

и тем, что функция $(1+|x|^2)^\lambda$ при любом действительном λ бесконечно дифференцируема и полиномиального роста.

При любом действительном r имеет место равенство $I_r x = x = x_1 \ldots x_n$, показывающее, что функция x не принадлежит к S'_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, хотя она принадлежит к S'. Это следует из 1.5 (12) при $k = \omega = (1, \ldots, 1)$:

$$(1+|x|^2)^{-\frac{r}{2}} \tilde{x} = i^n (2\pi)^{\frac{n}{2}} (1+|x|^2)^{-\frac{r}{2}} \delta^{(\omega)}(x) = i^n (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta^{(\omega)}(x) = \tilde{x}.$$

Важно заметить, что для регулярной в смысле L_p обобщенной функции f равенство

$$I_{-\lambda}(\hat{\mu} * I_\lambda f) = \hat{\mu} * f \tag{4}$$

имеет место для любых λ (положительных и отрицательных). Действительно, для f существует $\rho > 0$ такое, что $I_\rho f \in L_p$. При $\lambda \geqslant \rho$ равенство (4) уже доказано выше, если же $\lambda < \rho$, то положим $\rho = \lambda + \sigma$ $(\sigma > 0)$. Тогда функция $I_\lambda f$ регулярна. Именно $I_\sigma I_\lambda f \in L_p$. Поэтому

$$I_{-\lambda}(\hat{\mu} * I_\lambda f) = I_{-\lambda} I_{-\sigma} (\hat{\mu} * I_\rho f) = I_{-\rho}(\hat{\mu} * I_\rho f) = \hat{\mu} * f.$$

Из (4) следует, что для регулярных в смысле L_p функций f и любого действительного r

$$I_r(\hat{\mu} * f) = I_r I_{-r}(\hat{\mu} * I_r f) = \hat{\mu} * I_r f, \tag{5}$$

т. е. к регулярной функции f операцию I_r можно применить под знаком свертки.

Из (5) следует, что если μ — множитель Марцинкевича и f регулярная в смысле L_p функция, то свертка $\hat{\mu} * f$ тоже регулярна. Действительно, пусть $I_r f \in L_p$, тогда имеет место (5), где правая часть принадлежит к L_p.

Ранее были доказаны равенства 1.5.1.1 (9), которые мы запишем в терминах сверток:

$$\hat{\lambda} * (\hat{\mu} * f) = \hat{\mu} * (\hat{\lambda} * f) = \widehat{\lambda\mu} * f, \qquad f \in L_p \, (1 \leqslant p < \infty). \tag{6}$$

Они верны, если λ и μ — множители Марцинкевича, откуда вытекает, что $(\lambda\mu)$ есть тоже множитель Марцинкевича. Пусть теперь f есть регулярная в смысле L_p обобщенная функция и $I_\rho f \in L_p$ $(\rho > 0)$. Тогда равенства (6) будут выполняться, если в них подставить $I_\rho f$ вместо f. Но для регулярных f операцию I_ρ законно во всех членах (6) вынести за знаки сверток, но тогда равны между собой функции, стоящие под знаком I_ρ, и мы доказали, что (6) имеет место для любой регулярной в смысле L_p обобщенной функции.

ГЛАВА 2

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ

2.1. Теоремы о нулях. Линейная независимость

Функция

$$T_n(z) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kz + \beta_k \sin kz), \tag{1}$$

где α_k, β_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ — произвольные комплексные числа, а z — комплексная или действительная переменная, называется, *тригонометрическим полиномом n-го порядка.* Это определение не исключает случая $\alpha_n = \beta_n = 0$.

Тригонометрический полином есть функция периода 2π, и, следовательно, при его изучении достаточно ограничиться рассмотрением изменения независимой переменной $z = x + iy$ в произвольной вертикальной полосе $a \leqslant x < a + 2\pi$ (или $a < x \leqslant a + 2\pi$), $-\infty < y < \infty$ комплексной плоскости ширины 2π.

С помощью равенств

$$\cos kz = \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2}, \quad \sin kz = \frac{e^{ikz} - e^{-ikz}}{2i} \tag{2}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

тригонометрический полином (1) можно преобразовать к более симметричному виду

$$T_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikz},$$

$$c_k = \frac{\alpha_k - \beta_k i}{2},$$

$$c_{-k} = \frac{\alpha_k + \beta_k i}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad c_0 = \frac{\alpha_0}{2}. \tag{3}$$

Из (3) видно, что если коэффициенты α_k, β_k полинома (1) действительны, то коэффициенты c_k, c_{-k} для каждого k попарно комплексно сопряжены

$$c_{-k}=\bar{c}_k, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{4}$$

Обратно, из (4) следует, что числа α_k, β_k действительны.

Важнейшее свойство тригонометрических полиномов выражается следующей теоремой.

2.1.1. Теорема. *Тригонометрический полином T_n порядка n, у которого коэффициенты c_n и c_{-n} в* (3) *не равны нулю, имеет в любой полосе $a \leqslant x < a+2\pi$ комплексной плоскости ровно $2n$ нулей с учетом их кратности*).*

Если обозначить их через $z_1, \ldots, z_{2n}$, то имеет место равенство

$$T_n(z)=A\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{z-z_k}{2}, \tag{1}$$

где $A \neq 0$ — некоторая константа. Наоборот, равенство (1) *определяет тригонометрический полином порядка n.*

Доказательство. Воспользуемся представлением T_n в виде 2.1 (3). После подстановки $Z=e^{iz}$, которая преобразует взаимно однозначно рассматриваемую полосу плоскости z на всю комплексную плоскость Z (кроме $Z=0$), получим

$$T_n(Z)=\sum_{k=-n}^{n} c_k Z^k = Z^{-n}P_{2n}(Z),$$

где

$$P_{2n}(Z)=c_{-n}+c_{-n+1}Z+\ldots+c_n Z^{2n}.$$

В силу условия теоремы $c_n \neq 0$ и $c_{-n} \neq 0$ и потому многочлен $P_{2n}(Z)$ степени $2n$ имеет в комплексной плоскости Z ровно $2n$ нулей (с учетом кратности), не равных нулю.

Отсюда следует, что тригонометрический полином T_n имеет в рассматриваемой полосе также ровно $2n$ нулей (с учетом их кратности). Обозначим нули многочлена $P_{2n}(Z)$ через $Z_k=e^{iz_k}$ $(k=1, \ldots, 2n)$, тогда

$$T_n(z)=c_n e^{-inz}\prod_{k=1}^{2n}\left(e^{iz}-e^{iz_k}\right)=$$

$$=c_n e^{\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{2n} z_k}\prod_{k=1}^{2n}\left(e^{i\frac{z-z_k}{2}}-e^{i\frac{z_k-z}{2}}\right)=A\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{z-z_k}{2},$$

*) Число a называется *нулем кратности* m функции f, если $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(m-1)}(a)=0$, $f^{(m)}(a)\neq 0$.

где

$$A = c_n 2^{2n} (-1)^n e^{\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{2n} z_k}.$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана. Чтобы убедиться, что функция (1), где числа z_k ($k=1, \ldots, 2n$) принадлежат к некоторой вертикальной (замкнутой с одной стороны) полосе комплексной плоскости ширины 2π, есть тригонометрический полином порядка n, достаточно провести сделанное преобразование в обратную сторону, исходя из (1).

2.1.2. Линейная независимость. Если тригонометрический полином $T_n(z)$ равен нулю более чем в $2n$ точках вертикальной полосы ширины 2π, то на основании теоремы 2.1.1 все его коэффициенты должны равняться нулю. В частности, это имеет место, если тригонометрический полином порядка n тождественно или почти всюду равен нулю на действительной оси.

Отсюда следует, что система функций

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx \qquad (1)$$

линейно независима в C^* и L_p^* (см. 1.1.1 и 1.2.1). Надо учесть, что нулевой элемент в L_p^* есть функция, почти всюду равная нулю.

Линейная независимость системы (1) следует также из ортогональных свойств тригонометрических функций ($m, n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 1, & m=n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0.$$

2.1.3. Если T_m и T_n тригонометрические полиномы соответственно порядков m и n и $m \geqslant n$, то сумма и разность их есть тригонометрический полином порядка не выше m.

Произведение же их есть тригонометрический полином порядка не выше $m+n$, что вытекает из равенств

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x - \sin(m-n)x].$$

2.1.4. Из ортогональных свойств системы 2.1.2 (1) вытекает, что если тригонометрический полином четный (четная функция), то он содержит в качестве своих членов только косинусы ($\beta_k = 0$), и если он нечетный, то только синусы ($\alpha_k = 0$).

Рассматривая действительные части равенства

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n,$$

получим

$$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \, (1-\cos^2 x) + C_n^4 \cos^{n-4} x \, (1-\cos^2 x)^2 + \ldots,$$

откуда следует, что всякий четный тригонометрический полином n-го порядка можно представить в виде $P_n(\cos x)$, где

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

есть некоторый алгебраический многочлен n-й степени.

С другой стороны, из равенства

$$\cos^n x = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\left(e^{inx} + C_n^1 e^{i(n-2)x} + \ldots + e^{-inx}\right)$$

следует, что

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + \ldots + C_n^{\frac{n}{2}-1} \cos 2x + \frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2}\right] \qquad (1)$$

для n четного,

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + \ldots + C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cos x\right] \qquad (1')$$

для n нечетного.

Таким образом, функция $P_n(\cos x)$, где $P_n(z)$ есть алгебраический полином n-й степени, представляет собой четный полином n-го порядка.

2.2. Важные примеры тригонометрических полиномов

Из равенства

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}},$$

рассматривая в нем отдельно действительную и мнимую части, получим

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = D_n(x), \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = D_n^*(x). \qquad (2)$$

В частности, равенство (1) показывает, что полином $D_n(x)$ обращается в нуль в точках

$$x_k = \frac{2\pi k}{\quad +1} \quad (k=1, \ldots, 2n)$$

интервала $(0, 2\pi)$, следовательно, его также можно записать в виде произведения

$$D_n(x) = A\prod_{k=1}^{2n} \sin\frac{x-x_k}{2},$$

где A — постоянная. Полагая в этом равенстве $x=0$, получим соотношение

$$\frac{2n+1}{2} = A\prod_{k=1}^{2n} \sin\frac{x_k}{2},$$

из которого можно определить A.

Тригонометрический полином $D_n(x)$ играет большую роль в теории рядов Фурье. Он носит название *ядра Дирихле*.

Отметим, что (пояснения ниже)

$$\begin{aligned}\|D_n\|_{L^*} &= \int_0^\pi \left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right| dx = 2\int_0^\pi \frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|}{x}\, dx + O(1) = \\ &= 2\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{u}\, du + O(1) = 2\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin u|}{u}\, du + O(1) = \\ &= 2\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi \frac{|\sin u|}{k\pi+u}\, du + O(1) = 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \sin u\, du + O(1) = \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + O(1) = \frac{4}{\pi}\ln n + O(1) \quad (n=1, 2, \ldots). \qquad (3)\end{aligned}$$

Величина $\frac{1}{\pi}\|D_n\|_{L^*}$ носит название *константы Лебега суммы* (n-го порядка) Фурье. Здесь $O(1)$ обозначает некоторую ограниченную функцию от натурального n. В приведенных выкладках мы воспользовались ограниченностью функции $x^{-1} - (\sin x)^{-1}$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и тем фактом, что для $u \in [0, \pi]$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{k\pi+u}\right) \leqslant c\sum_{1}^{n-1}\frac{1}{k^2} < c_1 < \infty.$$

При конечном $p > 1$ норма $\|D_n\|_{L_p^*}$ неограничена:

$$\|D_n\|_{L_p^*}^p = 2\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|^p dx \geqslant 2\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{x}\right|^p dx >$$

$$> c_p n^{p-1}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi}\left|\frac{\sin u}{u}\right|^p du > A_p n^{p-1} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

2.2.1. Разделяя действительную и мнимую части равенства

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)x} = \frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{i\left(n+\frac{3}{2}\right)x}}{1-e^{ix}} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}},$$

получим

$$\sum_{k=0}^{n} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \frac{\sin(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{2}$$

2.2.2. Воспользовавшись 2.2 (1) и 2.2.1 (2), получим

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1}\cos kx = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{(n+1)}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = F_n(x). \tag{1}$$

Этот полином в теории рядов Фурье носит название *ядра Фейера* порядка n.

Заметим, что функция

$$k_\nu(x) = \left(\frac{\sin\frac{\lambda x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^{2\sigma}, \tag{2}$$

где λ и σ — натуральные числа, есть тригонометрический полином порядка $\nu = \sigma(\lambda - 1)$, так как она только на постоянный множитель отличается от σ-й степени ядра Фейера $F_{\lambda-1}(x)$.

Для дальнейшего будет полезно оценить точный порядок изменения величины

$$a_\nu=\int_{-\pi}^{\pi} k_\nu(x)\,dx=2\int_0^{\pi} k_\nu(x)\,dx, \tag{3}$$

когда $\nu=1, 2, \ldots$

Если принять во внимание, что

$$\frac{2}{\pi}\alpha\leqslant\sin\alpha\leqslant\alpha \qquad \left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right), \tag{4}$$

то будем иметь

$$2^{2\sigma+1}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\lambda x}{2}}{x}\right)^{2\sigma}dx\leqslant a_\nu\leqslant 2\pi^{2\sigma}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\lambda x}{2}}{x}\right)^{2\sigma}dx.$$

Но

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\lambda x}{2}}{x}\right)^{2\sigma}dx=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2\sigma-1}\int_0^{\frac{\lambda\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\sigma}dt\sim\lambda^{2\sigma-1}\,^{*)}$$

$$(\lambda=1, 2, \ldots).$$

Очевидно, таким образом, что при фиксированном σ

$$a_\nu\sim\lambda^{2\sigma-1} \qquad (\lambda=1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Введем еще тригонометрический полином

$$d_\nu(x)=\frac{1}{a_\nu}k_\nu(x)=\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{\sin\frac{\lambda x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^{2\sigma} \qquad (\nu=\sigma(\lambda-1)), \tag{6}$$

где $\sigma>0$ — фиксированное целое число, $\lambda=1, 2, \ldots$ и a_ν — константа, определяемая равенством (3).

2.3. Интерполяционный тригонометрический полином Лагранжа

Если два тригонометрических полинома $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ совпадают в $2n+1$ различных точках полузакрытого интервала $a\leqslant x<a+2\pi$, то их разность $T_n(x)-Q_n(x)$, являющаяся полиномом порядка n, равна нулю в этих точках, а следовательно, и тождественно равна нулю, так как не равный тождественно нулю полином n-го порядка может иметь на периоде не более $2n$ нулей.

---

*) Всюду в этой книге мы считаем, что $a_\lambda\sim b_\lambda$ ($\lambda\in\mathscr{E}$), где $\mathscr{E}$ есть некоторое множество чисел λ, если существуют две положительные константы c_1 и c_2 такие, что для всех $\lambda\in\mathscr{E}$ выполняются неравенства $c_1a_\lambda\leqslant b_\lambda\leqslant c_2a_\lambda$.

Итак, тригонометрический полином $T_n(x)$ порядка n вполне определяется своими значениями

$$y_0,\ y_n,\ \ldots,\ y_{2n},$$

соответствующими каким-нибудь $2n+1$ различным точкам

$$x_0<x_1<\ldots<x_{2n}<x_0+2\pi$$

периода.

Нетрудно написать эффективное выражение для него. Действительно, на основании 2.1.1 функция

$$Q^{(m)}(x)=\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{m-1}}{2}\sin\frac{x-x_{m+1}}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin\frac{x_m-x_0}{2}\ldots\sin\frac{x_m-x_{m-1}}{2}\sin\frac{x_m-x_{m+1}}{2}\ldots\sin\frac{x_m-x_{2n}}{2}}$$

$$(m=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n)$$

есть тригонометрический полином порядка n, обладающий, очевидно, свойством

$$Q^{(m)}(x_k)=\begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m\end{cases}\qquad (k,\ m=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n).$$

Поэтому искомый тригонометрический полином $T_n(x)$, удовлетворяющий условиям

$$T_n(x_k)=y_k\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n),$$

можно записать в виде

$$T_n(x)=\sum_{m=0}^{2n}Q^{(m)}(x)\,y_m=$$

$$=\sum_{m=0}^{2n}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{m-1}}{2}\sin\frac{x-x_{m+1}}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin\frac{x_m-x_0}{2}\ldots\sin\frac{x_m-x_{m-1}}{2}\sin\frac{x_m-x_{m+1}}{2}\ldots\sin\frac{x_m-x_{2n}}{2}}\,y_m.$$

Особенно важным является случай равноотстоящих узлов интерполяции, т. е. когда

$$x_k=\frac{2k\pi}{2n+1}\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n).$$

В этом случае можно написать простое выражение для $Q^{(m)}(x)$, если принять во внимание, что тригонометрический полином

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\qquad (1)$$

обладает свойствами

$$D_n(0)=\frac{2n+1}{2},\quad D_n(x_k)=0,\quad x_k=\frac{2k\pi}{2n+1}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n).$$

Отсюда следует, что полином

$$Q^{(m)}(x)=\frac{2}{2n+1}D_n(x-x_m)\qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

удовлетворяет условиям

$$Q^{(m)}(x_k)=\begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m.\end{cases}$$

Таким образом, всякий тригонометрический полином

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{2}$$

можно записать в виде

$$T_n(x)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}D_n(x-x_k)\,T_n(x_k)=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-x_k)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}T_n(x_k). \tag{3}$$

Заменяя в этом равенстве $D_n(x)$ соответствующей суммой, получим *)

$$T_n(x)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}{\sum_{i=0}^{n}}'\cos i(x-x_k)\,T_n(x_k)=$$

$$=\frac{2}{2n+1}{\sum_{i=0}^{n}}'\left[\left(\sum_{k=0}^{2n}\cos ix_kT_n(x_k)\right)\cos ix+\left(\sum_{k=0}^{2n}\sin ix_kT_n(x_k)\right)\sin ix\right].$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos ix$ и $\sin ix$ с соответствующими коэффициентами $T_n(x)$, получим

$$a_j=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\cos ix_kT_n(x_k)\qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

$$b_j=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\sin ix_kT_n(x_k)\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

---

*) Мы считаем, что ${\sum_{k=0}^{n}}'u_k=\frac{u_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}u_k.$

2.4. Интерполяционная формула М. Рисса *)

Если $T_n(\theta)$ есть тригонометрический полином

$$T_n(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta), \tag{1}$$

то для него справедливо тождество

$$T_n(\theta)=a_n\cos n\theta+\frac{\cos n\theta}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_k}{2}T_n(\theta_k), \tag{2}$$

где

$$\theta_k=\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n).$$

Докажем его.

Точки θ_k суть нули полинома $\cos n\theta$, поэтому

$$\cos n\theta=A\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}. \tag{3}$$

Отсюда функция

$$Q^{(m)}(\theta)=\frac{\cos n\theta}{2n}(-1)^m\operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_m}{2}=(-1)^{m+1}\frac{\cos n\theta}{2n}\,\frac{\sin\frac{\theta-(\pi+\theta_m)}{2}}{\sin\frac{\theta-\theta_m}{2}}$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$$

есть тригонометрический полином порядка n, так как она представляет собой произведение вида (3), в котором множитель $\sin\frac{\theta-\theta_m}{2}$ заменен на множитель $\sin\frac{\theta-(\pi+\theta_m)}{2}$. Этот полином, очевидно, равен нулю во всех точках θ_k, за исключением точки θ_m, где он равен единице. В последнем можно убедиться, применив правило Лопиталя. Итак,

$$Q^{(m)}(\theta_k)=\begin{cases}1, & m=k,\\ 0, & m\neq k\end{cases} \qquad (k,\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n).$$

Отсюда следует, что функция

$$T_n^*(\theta)=\frac{\cos n\theta}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_k}{2}T_n(\theta_k)$$

есть тригонометрический полином порядка n, совпадающий с исходным полиномом $T_n(\theta)$ в нулях $\cos n\theta$. В таком случае

---

*) М. Рисс [1].

на основании теоремы 2.1.1 о нулях тригонометрического полинома

$$T_n(\theta) = c\cos n\theta + T_n^*(\theta), \tag{4}$$

где c — константа.

Нам осталось еще показать, что

$$c = a_n. \tag{5}$$

В самом деле, коэффициент Фурье тригонометрического полинома $\cos n\theta \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_k}{2}$, соответствующий $\cos n\theta$, равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n\theta \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_k}{2}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n(u+\theta_k)\operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nu \operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,du = 0,$$

так как подынтегральная функция в последнем интеграле нечетная. В таком случае полином $Q^{(m)}(\theta)$, а следовательно, и полином $T_n^*(\theta)$ не содержит в себе члены с $\cos n\theta$. Отсюда из (1) и (4) вытекает (5).

Тождество (2) доказано. Если продифференцируем его и положим затем $\theta = 0$, то получим

$$T_n'(0) = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}\,T_n(\theta_k).$$

Это последнее равенство справедливо для любого полинома порядка n, в частности, оно справедливо для полинома $T_n(u+\theta)$, где u — переменная, а θ зафиксировано произвольно. Таким образом, для любого θ имеет место

$$T_n'(\theta) = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}\,T_n(\theta+\theta_k). \tag{6}$$

Это и есть формула М. Рисса.

2.5. Неравенство Бернштейна

Если положить в формуле М. Рисса 2.4 (6) $T_n(\theta) = \sin n\theta$, то при $\theta = 0$ получим

$$n = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}. \tag{1}$$

Поэтому из 2.4 (6) для любого тригонометрического полинома порядка n следует неравенство

$$\| T'_n \|_{L^*_p} \leqslant n \| T_n \|_{L^*_p} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty), \tag{2}$$

$$\| f \|_{L^*_p} = \left(\int_0^{2\pi} | f |^p \, d\theta \right)^{1/p},$$

называемое *неравенством Бернштейна*.

Оно является точным в том смысле, что существует тригонометрический полином, для которого оно превращается в равенство. Именно, это имеет место для полинома

$$T_n(\theta) = A \sin(n\theta + \alpha),$$

где A и α — произвольные действительные константы.

2.6. Тригонометрические полиномы от многих переменных

Функция вида

$$T_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\substack{-\nu_l \leqslant k_l \leqslant \nu_l \\ l=1, \ldots, n}} c_{k_1, \ldots, k_n} e^{i(k_1 z_1 + \ldots + k_n z_n)}, \tag{1}$$

где $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — натуральные числа, $z_1, \ldots, z_n$ — комплексные переменные и $c_{k_1, \ldots, k_n}$ — постоянные коэффициенты, вообще говоря, комплексные, зависящие от целых $k_1, \ldots, k_n$, называется *тригонометрическим полиномом порядков* $\nu_1, \ldots, \nu_n$ *соответственно по переменным* $z_1, \ldots, z_n$.

Употребляя векторные обозначения

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n), \quad \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n),$$

$$\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n), \quad \boldsymbol{kz} = \sum_1^n k_l z_l,$$

будем еще писать

$$T = T_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\substack{-\nu_l \leqslant k_l \leqslant \nu_l \\ l=1, \ldots, n}} c_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kz}}$$

и говорить, что $T = T_{\boldsymbol{\nu}}$ есть тригонометрический полином от $\boldsymbol{z}$ порядка $\boldsymbol{\nu}$.

Если коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$c_{-\boldsymbol{k}} = \bar{c}_{\boldsymbol{k}}, \tag{2}$$

т. е. если они изменяются на им сопряженные числа при перемене знака у всех индексов k_l, то для действительных $\boldsymbol{z} =$

$=(z_1, \ldots, z_n)$ полином T_ν есть действительная функция. В самом деле, если $x=(x_1, \ldots, x_n)$ есть действительная точка, то в силу (2)

$$\overline{T_\nu(x)} = \sum_{\substack{|k_l| \leqslant \nu_l \\ l=1, \ldots, n}} \bar{c}_k e^{-ikx} = \sum_{\substack{-\nu_l \leqslant -k_l \leqslant \nu_l \\ l=1, \ldots, n}} c_{-k} e^{-ikx} = T_\nu(x).$$

Мы будем главным образом иметь дело с полиномами, удовлетворяющими условию (2), которые естественно назвать *действительными тригонометрическими полиномами*.

Для комплексных z действительные полиномы $T_\nu(z)$ вообще не являются действительными, но они делаются действительными функциями, если их рассматривать как функции от действительных $x=(x_1, \ldots, x_n)$.

Мы определили действительные тригонометрические полиномы T_ν как линейные комбинации (1) из комплексных функций e^{ikx} с комплексными коэффициентами, удовлетворяющими условиям (2) сопряженности, но их можно определить также как линейные комбинации с действительными коэффициентами из действительных функций. Такими функциями являются всевозможные произведения вида

$$\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n), \tag{3}$$

где $\varphi_l(x_l)$ $(l=1, \ldots, n)$ есть либо функция $\sin kx_l$ $(1 \leqslant k \leqslant \nu_l)$, либо функция $\cos kx_l$ $(0 \leqslant k \leqslant \nu_l)$.

Наоборот, всякая линейная комбинация из функций вида (3) с действительными коэффициентами есть сумма вида (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (2) сопряженности, т. е. действительный тригонометрический полином порядка $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$.

Тригонометрические полиномы T_ν суть непрерывные периодические по каждой переменной функции и, следовательно, они входят как элементы в пространство $C^{(n)}_*$ и тем более в пространство $L^{(n)}_{p*}$ (см. 1.1.1).

Различные функции вида (3) удовлетворяют условию ортогональности на прямоугольнике

$$\Delta^{(n)} = \{0 \leqslant x_k \leqslant 2\pi; \quad k=1, \ldots, n\}$$

и потому образуют линейно независимую систему в $C^{(n)}_*$ и в $L^{(n)}_{p*}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

В качестве примера отметим, что всякий действительный тригонометрический полином порядков μ, ν соответственно по

x, y можно записать в виде

$$T_{\mu,\nu}(x, y) = \sum_{k=0}^{\mu} \sum_{l=0}^{\nu} (a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \cos kx \sin ly + c_{kl} \sin kx \cos ly + d_{kl} \sin kx \sin ly),$$

где a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, d_{kl} — действительные коэффициенты.

Если в полиноме $T_\nu(\boldsymbol{z})$ зафиксировать все переменные, кроме одной, например, z_l, то мы получим, очевидно, тригонометрический полином от одной переменной z_l степени ν_l, и к нему приложимы все свойства тригонометрических полиномов от одной переменной.

Однако тригонометрические полиномы от многих переменных обладают также интересными свойствами, которые трудно заранее предвидеть на основании только знаний свойств полиномов от одной переменной.

2.7. Тригонометрические полиномы по некоторым переменным

Пусть $\mathscr{E} = R_m \times \mathscr{E}' \subset R_n$ — цилиндрическое множество точек $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{u} = (x_1, \ldots, x_m) \in R_m$, $\boldsymbol{y} = (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \mathscr{E}'$, где $\mathscr{E}'$ — измеримое $(n-m)$-мерное множество. Выделим из $\mathscr{E}$ усеченный цилиндр

$$\mathscr{E}_* = \Delta^{(m)} \times \mathscr{E}',$$

где

$$\Delta^{(m)} = \{0 \leqslant x_k \leqslant 2\pi; \quad k = 1, \ldots, m\}$$

есть m-мерный куб, и введем пространство $L_p^*(\mathscr{E})$ функций $f = f(\boldsymbol{x})$ (действительных или комплексных), принадлежащих к $L_p^*(\mathscr{E}_*)$, и почти для всех $\boldsymbol{y} \in \mathscr{E}'$ (в смысле $(n-m)$-мерной меры) периодических периода 2π по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_m$. Очевидно, $L_p^*(\mathscr{E})$ — полное пространство.

Обозначим далее через

$$T_\nu(\boldsymbol{x}) = T_\nu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}) = T_\nu(x_1, \ldots, x_m, \boldsymbol{y})$$

функции такие, что каждая из них принадлежит к $L_p^*(\mathscr{E})$ и почти для всех $\boldsymbol{y} \in \mathscr{E}'$ по $\boldsymbol{u} = (x_1, \ldots, x_m)$ есть тригонометрический полином *) порядка $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$:

Множество всех таких функций при данном $\boldsymbol{\nu}$ обозначим через $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{\nu}p}^*(\mathscr{E})$. Оно, очевидно, линейное.

---

*) Надо иметь в виду, что функция, эквивалентная (относительно $\mathscr{E}$) функции $T_\nu(\boldsymbol{x})$, рассматривается как равная T_ν.

Каждая функция $T_\nu \in L_p(\mathscr{E}_*)$, поэтому (теорема Фубини) существует множество $\mathscr{E}'_1 \subset \mathscr{E}'$ полной меры такое, что $T_\nu(u, y) \in L_p(\Delta^{(m)}) \subset L(\Delta^{(m)})$ по u для всех $y \in \mathscr{E}'_1$ ($\Delta^{(m)}$ ограничено!). Можно заодно считать, что для всех $y \in \mathscr{E}'_1$ имеет место представление

$$T_\nu(u, y) = \sum_{\substack{-\nu_l \leqslant k_l \leqslant \nu_l \\ l=1, \ldots, n}} c_k(y) e^{iku}, \tag{1}$$

где $c_k(y)$ — некоторые функции, зависящие от y. В силу ортогональных свойств e^{iku} справедливы равенства

$$c_k(y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\Delta^{(m)}} T_\nu(u, y) e^{iku} du, \tag{2}$$

из которых следует, в частности, по теореме Фубини, что $c_k(y)$ — измеримые функции на $\mathscr{E}'$, потому что T_ν, как принадлежащая к $L_p(\mathscr{E}_*)$, во всяком случае локально суммируема (если бы даже $\mathscr{E}'$ было неограниченным). Из (2), применив обобщенное неравенство Минковского, а затем Гёльдера, получим

$$\|c_k(y)\|_{L_p(\mathscr{E}')} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\Delta^{(m)}} \|T_\nu(u, y)\|_{L_p(\mathscr{E}')} du \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^m} |\Delta^{(m)}|^{1/q} \|T_\nu\|_{L_p(\mathscr{E}_*)} = c \|T_\nu\|_{L_p(\mathscr{E}_*)} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right), \tag{3}$$

где $|\Delta^{(m)}|$ есть (m-мерный) объем $\Delta^{(m)}$ и c — константа.

Мы доказали, что каждая функция $T_\nu \in \mathfrak{M}^*_{\nu p}(\mathscr{E})$ представима в виде (1), где $c_k(y)$ удовлетворяют неравенствам (3). Обратное, очевидно, также верно.

Пользуясь этим свойством функций $\mathfrak{M}^*_{\nu p}(\mathscr{E})$ и тем фактом, что пространство $L_p(\mathscr{E}')$ полно, легко видеть, что верна следующая лемма.

2.7.1. Лемма. *Множество $\mathfrak{M}^*_{\nu p}(\mathscr{E})$ есть подпространство в $L^*_p(\mathscr{E})$.*

Если $\mathscr{E} = R_n$, т. е. $\mathscr{E}'$ пусто, то $\mathfrak{M}^*_{\nu p}(\mathscr{E})$ есть, очевидно, к тому же конечномерное подпространство. Если же $\mathscr{E}'$ имеет положительную $(n-m)$-мерную меру, то $\mathfrak{M}^*_{\nu p}(\mathscr{E})$ не конечномерно.

2.7.2. Для функций

$$T_\nu = T_\nu(x_1, y) \in \mathfrak{M}^*_{\nu p}(\mathscr{E}) = \mathfrak{M}^*_{\nu p}(R_1 \times \mathscr{E}'),$$

(являющихся тригонометрическими полиномами по x_1 степени ν) почти для всех $y \in \mathscr{E}'$, выполняется обобщенное неравенство

Бернштейна

$$\left\| \frac{\partial T_\nu}{\partial x_1} \right\|_{L_p(\mathscr{E}_*)} \leqslant \nu \| T_\nu \|_{L_p(\mathscr{E}_*)} \tag{1}$$

$$(\mathscr{E}_* = [0, 2\pi] \times \mathscr{E}'; \quad x_1 \in [0, 2\pi], \quad y \in \mathscr{E}').$$

Действительно, $T_\nu(x_1, y)$ есть тригонометрический полином по x_1 для всех $y \in \mathscr{E}_1' \subset \mathscr{E}'$, где $\mathscr{E}_1'$ множество полной меры в $\mathscr{E}'$. Поэтому на основании 2.5 (2) при $1 \leqslant p < \infty$

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial T_\nu(x_n, y)}{\partial x_1} \right|^p dx_1 \leqslant \nu^p \int_0^{2\pi} |T_\nu(x_1, y)|^p dx_1 \quad (y \in \mathscr{E}_1'). \tag{2}$$

Интегрируя обе части этого неравенства по $y \in \mathscr{E}_1$ и возводя в степень $1/p$, получим (1). При $p = \infty$ неравенство (1) очевидным образом вытекает из соответствующего неравенства 2.5 (2).

2.7.3. Другие неравенства для тригонометрических полиномов, которыми мы будем широко пользоваться, см. в 3.3 и 3.4.

ГЛАВА 3

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА, ОГРАНИЧЕННЫЕ НА R_n

3.1. Предварительные сведения

В этой главе мы рассмотрим некоторые свойства целых функций экспоненциального типа, ограниченных на действительном пространстве $R_n = R$. Мы увидим, что они весьма аналогичны соответствующим свойствам тригонометрических полиномов. В то время как тригонометрические полиномы являются хорошим средством приближения периодических функций, целые функции экспоненциального типа могут служить средством приближения *) непериодических функций, заданных на n-мерном пространстве. Быть может, неискушенному в этих вопросах читателю следует начать эту главу с чтения 3.1.1, где дополнительно даются общие сведения из теории кратных степенных рядов.

Зададим n неотрицательных чисел $\nu_1, \ldots, \nu_n$ (не обязательно целых) или неотрицательный вектор $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \geqslant 0$.

Функцию

$$g = g_{\boldsymbol{\nu}}(z) = g_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(z_1, \ldots, z_n)$$

называют *целой функцией экспоненциального типа* $\boldsymbol{\nu}$, если для нее выполняются следующие свойства:

1) она есть целая функция по всем переменным, т. е. разлагается в степенной ряд

$$g(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k z^k = \sum_{\substack{k_l \geqslant 0 \\ l = 1, \ldots, n}} a_{k_1, \ldots, k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} \tag{1}$$

*) Впрочем, в то время как тригонометрический полином определяется конечным числом числовых параметров (коэффициентов), функция экспоненциального типа, вообще говоря, существенно определяется бесконечным (счетным) числом параметров (например, коэффициентов ее ряда Тейлора), поэтому в практических вычислениях появилась бы необходимость в приближении ее еще более простой функцией.

с постоянными коэффициентами $a_k=(a_{k_1,\ldots,k_n})$, абсолютно сходящийся для всех комплексных $z=(z_1, \ldots, z_n)$.

2) Для всякого $\varepsilon>0$ существует положительное число A_ε такое, что для всех комплексных $z_k=x_k+iy_k$ $(k=1, \ldots, n)$ выполняется неравенство

$$|g(z)|\leqslant A_\varepsilon \exp \sum_{j=1}^{n} (\nu_j+\varepsilon)|z_j|. \tag{2}$$

Будем еще говорить, что указанная функция g_ν принадлежит к классу E_ν.

Положим $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ $(\rho_j>0;\ j=1, \ldots, n)$, и пусть

$$|z_j|\leqslant\rho_j, \quad M(\rho)=\sup_{|z_j|\leqslant\rho_j}|g(z)|.$$

Тогда из свойства (2) следует, очевидно, неравенство

$$M(\rho)\leqslant A_\varepsilon \exp \sum_{j=1}^{n} (\nu_j+\varepsilon)\rho_j,$$

и наоборот, потому что

$$|g(z)|\leqslant M\left(\sum_{1}^{n}|z_j|^2\right)^{1/2}\leqslant A_\varepsilon \exp \sum_{j=1}^{n} (\nu_j+\varepsilon)|z_j|.$$

Производную порядка $k=(k_1, \ldots, k_n)$ от g в точке $z=(z_1, \ldots, z_n)$ можно записать по формуле Коши

$$g^{(k)}(z)=\frac{k!}{(2\pi i)^n}\int_{C_1}\cdots\int_{C_n}\frac{g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\,d\zeta_1\ldots d\zeta_n}{\prod_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)^{k_j+1}}, \tag{3}$$

где C_j — окружность в плоскости ζ_j с центром в z_j. Следовательно, если считать, что $z=0$ и C_j имеет радиус ρ_j, то получим неравенство Коши

$$|a_k|\leqslant\frac{M(\rho)}{\rho^k}.$$

Пусть

$$\rho_j=\frac{k_j}{\nu_j+\varepsilon}.$$

Тогда

$$|a_k|\leqslant A_\varepsilon\frac{e^{|k|}(\nu+\varepsilon)^k}{k^k} \quad (\varepsilon=(\varepsilon, \ldots, \varepsilon)). \tag{4}$$

Мы доказали, что из (2) следует, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется A_ε такое, что выполняется (4). Согласно формуле

Стирлинга

$$\frac{e^{|k|}}{k^k} = \frac{(\sqrt{2\pi})^n (k_1 \dots k_n)^{1/2}}{k!} \prod_{j=1}^{n} (1+\varepsilon_{k_j})^{k_j} \, (\varepsilon_{k_j} \to 0, \ k_j \to \infty),$$

поэтому из (4) следует (2) (но вообще с другой константой B_ε):

$$M(\rho) \leqslant \sum_k |a_k| \rho^k \leqslant B_\varepsilon \sum_k \frac{(\nu+2\varepsilon)^k}{k!} \rho^k = B_\varepsilon e^{\sum\limits_1^n (\nu_j+2\varepsilon)\rho_j},$$

где B_ε — достаточно большое зависящее от ε число.

Из доказанного следует, что если $g \in E_\nu$, то и любая ее частная производная $g^{(\lambda)} \in E_\nu$. Дело в том, что из (4) следует, что модуль $(k-\lambda)$-го коэффициента степенного ряда $g^{(\lambda)}$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{k!}{(k-\lambda)!} a_k \right| \leqslant A'_\varepsilon \frac{e^{|k-\lambda|} (\nu+2\varepsilon)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)^{k-\lambda}},$$

где A'_ε достаточно велико.

Из сказанного следует, что в случае целой функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

от одной переменной следующие два условия, каждое из которых выражает, что f экспоненциального типа степени ν, эквивалентны:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r} \leqslant \nu \tag{5}$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{e} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\,|a_n|} \leqslant \nu. \tag{6}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_{\nu p}(R) = \mathfrak{M}_{\nu p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ совокупность всех целых функций экспоненциального типа ν, которые как функции от действительного $x \in R = R_n$ принадлежат к $L_p = L_p(R)$. Положим еще $\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{M}_{\nu\infty}$, т. е. $\mathfrak{M}_\nu$ состоит из всех функций типа ν, ограниченных на R.

Заметим уже сейчас, что в дальнейшем будет доказано, что (см. 3.2.5 или 3.3.5) при любом p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ $\mathfrak{M}_{\nu p} \subset \mathfrak{M}_\nu$. Кроме того, будет видно (см. 3.2.2 (10), $\mathscr{E} = R_n$, $n = m$), что для каждой функции $g \in \mathfrak{M}_\nu$ существует не зависящая от z константа A такая, что

$$|g(z)| \leqslant A e^{\sum\limits_{j=1}^{n} \nu_j |y_k|} \quad (z_j = x_j + iy_j). \tag{7}$$

Это неравенство сильнее неравенства (2). Из него непосредственно следует, что g ограничена на R_n. Таким образом, $\mathfrak{M}_\nu$ можно определить как класс целых функций $f(z)$, для которых имеет место (7).

Функции

$$e^{ikz},\quad \cos kz = \frac{e^{ikz}+e^{-ikz}}{2},\quad \sin kz = \frac{e^{ikz}-e^{-ikz}}{2i},$$

где k — действительное число, принадлежат, очевидно, к классу $\mathfrak{M}_{|k|}(R_1) = \mathfrak{M}_{|k|}$.

Тригонометрический полином

$$T_\nu(z) = T_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\substack{|k_l| \leqslant \nu_l \\ 1 \leqslant l \leqslant n}} c_k e^{ikz}$$

принадлежит к $\mathfrak{M}_\nu(R_n)$, но не к $\mathfrak{M}_{\nu p}$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

Функция $\sin z/z$ от одной переменной z принадлежит к $\mathfrak{M}_{1p}(R_1)$ $1 < p \leqslant \infty$. В самом деле, как функция от действительного x она, очевидно, принадлежит к L_p с указанными ограничениями на p. С другой стороны, она есть, очевидно, целая функция; далее, $\sin z$ есть целая функция, и нетрудно видеть, что для нее при некоторой константе c_1 выполняется неравеиство

$$|\sin z| \leqslant c_1 e^{|y|}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant c_1 e^{|y|} \quad (|z| \geqslant 1).$$

С другой стороны, существует положительная константа c_2 такая, что

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant c_2 \quad (|z| \leqslant 1).$$

Но, так как $1 \leqslant e^{|y|}$, то

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant c_2 e^{|y|} \quad (|z| \leqslant 1).$$

Таким образом, имеет место

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant c e^{|y|} \quad \text{для всех } z,$$

где

$$c = \max(c_1, c_2).$$

Функция e^z принадлежит к $E_1(R_1)$, т. е. есть целая экспоненциального типа, но не принадлежит к $\mathfrak{M}_{1p}(R_1)$ при любом p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. С другой стороны, функция e^{iz} принадлежит, очевидно, к $\mathfrak{M}_{1\infty}=\mathfrak{M}_1(R_1)$. Алгебраический многочлен $P(z) = \sum_0^n a_k z^k$ есть, очевидно, функция типа 0 не принадлежащая однако к $\mathfrak{M}_{0p}(R_1)$ ни при каком p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Из дальнейшего (см. сноску на стр. 115) будет видно, что если $f \in \mathfrak{M}_{0p}(R_1)$, то f — константа (равная 0, если $1 \leqslant p < \infty$).

Очевидно, $\mathfrak{M}_{\nu p} \subset \mathfrak{M}_{\nu' p}$, если

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \leqslant \nu' = (\nu_1', \ldots, \nu_n'), \text{ т. е. } \nu_j \leqslant \nu_j' \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Если считать, что g_ν обозначает некоторую функцию из класса $\mathfrak{M}_\nu$, то, очевидно,

$$g_\nu g_\mu = g_{\nu+\mu}, \quad g_\nu + g_{\nu'} = g_\mu,$$

где

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n), \quad \mu_j = \max(\nu_j, \nu_j'),$$

$$\prod_{j=1}^n g_{\nu_j}(z_j) = g_\nu(z).$$

Легко видеть, что если g есть целая функция типа единица по всем переменным и $\mu_j \neq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, то $g(\mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n)$ есть целая функция типа $|\mu_1|, \ldots, |\mu_n|$. Верно и обратное утверждение. Можно, пользуясь приведенными общими свойствами, конструировать из заданных целых функций экспоненциального типа другие такие функции. Мы применяли для этого операции сложения и умножения, взятые в конечном числе. Важным средством конструирования целых функций экспоненциального типа является процесс интегрирования по параметру (см. 3.6.2).

3.1.1. Сведения о кратных степенных рядах. Достаточно все рассмотрения провести на примере двойных рядов. Для рядов более высокой кратности они аналогичны.

Под *суммой ряда*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} u_{kl}, \tag{1}$$

где u_{kl}, вообще говоря, — комплексные числа, понимается предел

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} u_{kl} = S \tag{2}$$

(если он существует), когда натуральные числа m и n неограниченно возрастают независимо друг от друга.

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд с членами $|u_{kl}|$. Очевидно, абсолютно сходящийся ряд сходится.

Если ряд (1) абсолютно сходится, то его члены равномерно ограничены, т. е. существует константа K такая, что

$$|u_{kl}| \leqslant K \qquad (k, l = 0, 1, 2, \ldots).$$

Однако если ряд (1) сходится неабсолютно, то его члены не обязаны быть равномерно ограниченными, как показывает пример ряда

$$\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty} a_{kl}, \tag{3}$$

где $a_{0l}=l!$, $a_{1l}=-l!$, $a_{kl}=0$ для остальных натуральных k, l. Он сходится к сумме, равной нулю, но не абсолютно, и члены его не ограничены в совокупности.

Рассмотрим степенной ряд

$$f(\eta, \zeta)=\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty} c_{kl}\eta^k\zeta^l, \tag{4}$$

где c_{kl} — комплексные постоянные и η, ζ — комплексные переменные. Пусть этот ряд абсолютно*) сходится в точке η_0, ζ_0, где $\eta_0 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$. Тогда он сходится также абсолютно и равномерно для любых η, ζ, удовлетворяющих неравенствам

$$|\eta| \leqslant \rho_1 |\eta_0|, \quad |\zeta| \leqslant \rho_2 |\zeta_0|, \quad 0<\rho_1, \quad \rho_2<1. \tag{5}$$

В самом деле, существует константа c такая, что

$$\left|c_{kl}\eta_0^k\zeta_0^l\right| < c \quad (k, l=0, 1, \ldots),$$

поэтому для указанных η, ζ

$$|c_{kl}\eta^k\zeta^l| = |c_{kl}\eta_0^k\zeta_0^l| \left|\frac{\eta}{\eta_0}\right|^k \left|\frac{\zeta}{\zeta_0}\right|^l \leqslant c\rho_1^k\rho_2^l$$

и, следовательно, члены ряда (1) по абсолютной величине соответственно не превышают членов сходящегося ряда

$$c\sum\sum \rho_1^k\rho_2^l = \frac{c}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}.$$

Ряд (1) законно почленно дифференцировать для указанных η, ζ сколько угодно раз. В самом деле, после однократного дифференцирования, например по η, общий член полученного ряда для указанных η, ζ будет удовлетворять неравенствам

$$\left|c_{kl}k\eta^{k-1}\zeta^l\right| = \left|c_{kl}\eta_0^k\zeta_0^l\right| \left|\frac{k}{|\eta_0|}\right| \left|\frac{\eta}{\eta_0}\right|^{k-1} \left|\frac{\zeta}{\zeta_0}\right|^l \leqslant \frac{ck}{|\eta_0|}\rho_1^{k-1}\rho_2^l.$$

Следовательно, продифференцированный ряд равномерно сходится в области (5), так как сходится ряд

$$\sum\sum k\rho_1^{k-1}\rho_2^l < \infty.$$

Из сказанного следует, что

$$c_{kl}=\frac{1}{k!\,l!}\,\frac{\partial^{k+l}f(0, 0)}{\partial\eta^k\partial\zeta^l}.$$

*) Если отбросить слово «абсолютно», то это утверждение вообще неверно. Например, если в (4) в качестве c_{kl} взять коэффициенты a_{kl} ряда (3), то ряд (4) сходится при $\eta=\zeta=1$ и расходится при $\eta=0$ и любом $\zeta \neq 0$, так как он вырождается в этом случае в расходящийся ряд

$$\sum_{0}^{\infty} a_{0l}\zeta^l = \sum_{0}^{\infty} l!\,\zeta^l.$$

Это, в частности, показывает, что разложение рассматриваемой функции f в степенной ряд (1) единственно.

Функция $f(\eta, \zeta)$, представимая в виде абсолютно *) сходящегося степенного ряда (4) в комплексной области, определяемой неравенствами

$$|\eta| < \rho_1, \quad |\zeta| < \rho_2, \tag{6}$$

называется аналитической в этой области.

Пусть $f(\eta, \zeta)$ — аналитическая в области (6) функция. Тогда при фиксированном η ($|\eta| < \rho_1$) и произвольном ζ ($|\zeta| < \rho_2$) функция

$$f(\eta, \zeta) = \sum_0^\infty \left(\sum_0^\infty c_{kl}\eta^k \right) \zeta^l$$

разлагается в сходящейся по степеням ζ ряд. Поэтому $f(\eta, \zeta)$ есть аналитическая функция от ζ для $|\zeta| < \rho_2$. Аналогично $f(\eta, \zeta)$ при фиксированном ζ ($|\zeta| < \rho_2$) есть аналитическая функция от η для $|\eta| < \rho_1$. Отсюда следует представление f в виде интеграла Коши

$$f(\eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(u, \zeta)}{u - \eta}\, du = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{f(u, v)\, du\, dv}{(u - \eta)(v - \zeta)}, \tag{7}$$

получаемое путем последовательного применения этого представления по каждой из переменных η, ζ. Здесь C_1, C_2 — окружности соответственно в комплексных плоскостях η, ζ с центрами в нулевых точках и радиусами $r_1 < \rho_1$, $r_2 < \rho_2$ и $|\eta| < r_1$, $|\zeta| < r_2$.

Так как ряд

$$\frac{1}{(u - \eta)(v - \zeta)} = \sum \sum \frac{\eta^k \zeta^l}{u^{k+1} v^{l+1}}$$

равномерно сходится относительно $u \in C_1$, $v \in C_2$ и η, ζ, удовлетворяющих неравенствам

$$|\eta| < r_1' < r_1, \quad |\zeta| < r_2' < r_2,$$

то подстановка его в (7) и почленное интегрирование приводят к исходному равенству (4), откуда

$$c_{kl} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{f(u, v)}{u^{k+1} v^{l+1}}\, du\, dv. \tag{8}$$

Если бы мы исходили из произвольной непрерывной на C_1, C_2 функции $f(u, v)$, то интеграл (типа Коши), стоящий в правой части (7), был бы равен некоторой функции $F(u, v)$, представляемый в виде абсолютно и равномерно сходящегося для $|\eta| < r_1'$, $|\zeta| < r_2'$ ряда

$$F(u, v) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty c_{kl}\eta^k \zeta^l, \tag{9}$$

каковы бы ни были $r_1' < r_1$ и $r_2' < r_2$. Таким образом, функция $F(u, v)$ аналитична, если $|\eta| < r_1$, $|\zeta| < r_2$.

---

*) Здесь слово «абсолютно» можно опустить, так как можно доказать, что из сходимости ряда (4) для всех (!) η, ζ с $|\eta| < \rho_1$, $|\zeta| < \rho_2$ следует его абсолютная сходимость для всех указанных η, ζ.

Из того факта, что функция f, аналитическая в области (6), является аналитической по каждой переменной, следует формула

$$f(\eta, \zeta)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\eta+re^{i\theta}, \zeta+\rho e^{i\theta})\,d\theta\,d\varphi, \tag{10}$$

$$0<r<\rho_1-|\eta|, \quad 0<\rho<\rho_2-|\zeta|,$$

которая получается из соответствующей одномерной формулы.

Отметим еще такое свойство: если последовательность аналитических в области (6) функций $f_N(\eta, \zeta)$ сходится при $N\to\infty$ равномерно на множестве

$$|\eta|<r_1<\rho_1, \quad |\zeta|<r_2<\rho_2$$

при любых указанных r_1, r_2, к функции $f(\eta, \zeta)$, то последняя аналитична в области (6). Чтобы убедиться в этом, подставим f_N в (7) вместо f и перейдем к пределу при $N\to\infty$, тогда для предельной функции $f(\eta, \zeta)$, где $|\eta|<r_1$, $|\zeta|<r_2$, будет выполняться (7), что показывает, что она аналитична для $|\eta|<r_1$, $|\zeta|<r_2$ и вследствие произвольности $r_1<\rho_1$, $r_2<\rho_2$ аналитична в области (6).

Пусть задана последовательность степенных рядов

$$f_n(\eta, \zeta)=\sum_0^\infty\sum_0^\infty c_{kl}^{(n)}\eta^k\zeta^l \quad (n=1, 2, \ldots),$$

абсолютно сходящихся для $\eta=\eta_0\neq 0$, $\zeta=\zeta_0\neq 0$ и таких, что

$$\sum_0^\infty\sum_0^\infty |c_{kl}^{(n)}-c_{kl}^{(m)}|\,|\eta_0|^k\,|\zeta_0|^l\to 0 \quad (n,\ m\to\infty).$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} c_{kl}^{(n)}=c_{kl},$$

где c_{kl} — некоторые числа. При этом ряд

$$f(\eta, \zeta)=\sum_0^\infty\sum_0^\infty c_{kl}\eta^k\zeta^l$$

абсолютно сходится при $\eta=\eta_0$, $\zeta=\zeta_0$, и для $|\eta|\leqslant\eta_0$, $|\zeta|\leqslant\zeta_0$

$$|f(\eta, \zeta)-f_n(\eta, \zeta)|\leqslant\sum_0^\infty\sum_0^\infty |c_{kl}-c_{kl}^{(n)}|\,|\eta_0|^k\,|\zeta_0|^l\to 0 \ (n\to\infty),$$

откуда видно, что равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\eta, \zeta)=f(\eta, \zeta)$$

имеет место равномерно в области

$$|\eta|\leqslant|\eta_0|, \quad |\zeta|\leqslant|\zeta_0|.$$

В этой книге мы будем оперировать только целыми функциями

$$f(z)=\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k, \tag{11}$$

т. е. такими функциями, для которых ряд (11) абсолютно сходится для всякого комплексного z.

Из отмеченных выше свойств аналитических функций следует, что степенной ряд (11) целой функции сходится равномерно на любой ограниченной области, так же как и ряды, получаемые почленным дифференцированием (11), которое законно производить по любым переменным $z_1, \ldots, z_n$ любое конечное число раз. При фиксированных $z_{m+1}, \ldots, z_m$ функция $f(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots \ldots, z_n)$ есть целая функция относительно $z_1, \ldots, z_m$.

Если функция $f(z)$ целая, то ее можно разложить (единственным образом) в ряд

$$f(z) = \sum_{k \geqslant 0} c_k (z - z_0)^k$$

по степеням $(z-z_0)^k = (z_1 - z_{01})^{k_1} \ldots (z_n - z_{0n})^{k_n}$, абсолютно сходящийся для всех z. Например, в случае $n=2$ это утверждение следует из того, что формальные тождества

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} z_1^k z_2^l =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \sum_{s=0}^{k} C_k^s z_{10}^{k-s} (z_1 - z_{10})^s \sum_{j=0}^{l} C_l^j z_{20}^{l-j} (z_2 - z_{20})^j =$$
$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\mu\nu} (z_1 - z_{10})^{\mu} (z_2 - z_{20})^{\nu}$$

законны по существу. Последнее равенство получено после приведения подобных членов при одинаковых степенях $(z_1 - z_{10})^{\mu} (z_2 - z_{20})^{\nu}$. Чтобы обосновать его, достаточно показать, что его левая часть есть абсолютно сходящийся кратный ряд, т. е. что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{kl}| \sum_{s=0}^{k} C_k^s x_0^{k-s} (x - x_0)^s \sum_{j=0}^{l} C_l^j y_0^{l-j} (y - y_0)^j < \infty$$

$$(x_0 = |z_{10}|, \quad y_0 = |z_{20}|, \quad x - x_0 = |z_1 - z_{10}|, \quad y - y_0 = |z_2 - z_{20}|).$$

Но это так, потому что все члены этого ряда неотрицательны и его сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{kl}| x^k y^l < \infty$$

по условию сходится.

3.1.2. Преобразование Фурье функций класса $\mathfrak{M}_{\nu p}$. Из 3.1 мы знаем, что целую функцию от одной переменной

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1}{1} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \ldots \tag{1}$$

типа $\sigma > 0$ можно определить как целую функцию, обладающую одним из следующих свойств:

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r)}{r} \leqslant \sigma \tag{2}$$

или

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \sigma. \tag{3}$$

В силу этого можно сказать, что определяемая рядом (1) функция $F(z)$ имеет тип σ тогда и только тогда, если ряд

$$f(z)=\frac{a_0}{z}+\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z^3}+\ldots \tag{4}$$

сходится для $|z|>\sigma$.

Функция $f(z)$ называется *преобразованием Бореля* функции $F(z)$. С ней связан следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{\infty(\theta)} F(\zeta)\,e^{-\zeta z}\,d\zeta=f(z,\ \theta), \tag{5}$$

взятый вдоль луча ($\zeta=\rho e^{-i\theta}$, $0\leqslant\rho<\infty$). Именно, оказывается, см. книгу Н. И. Ахиезера [1], § 81, что если целая функция F типа σ, то для нее интеграл (5) равномерно и абсолютно сходится на любом множестве, внутреннем по отношению к полуплоскости Δ_θ, которая не содержит точку $z=0$ и границей которой является касательная к окружности $|z|=\sigma$ в точке $\sigma e^{i\theta}$. При этом имеет место тождество

$$f(z)=f(z,\ \theta) \qquad (z\in\Delta_\theta)$$

для любого (действительного) θ.

Пусть известно, что функция $F(z)$ не только целая экспоненциального типа σ, но и принадлежит к $L=L(-\infty,\ \infty)$ как функция от действительного x, иначе говоря, $F\in\mathfrak{M}_{\sigma 1}(R_1)=\mathfrak{M}_{\sigma 1}$. Если положить в (5) $\theta=0$, π и $z=x+iy$, то получим

$$f(x+iy)=\int\limits_0^{\infty} F(\xi)\,e^{-\xi(x+iy)}\,d\xi \qquad (x\geqslant 0), \tag{6}$$

$$f(x+iy)=-\int\limits_{-\infty}^{0} F(\xi)\,e^{-\xi(x+iy)}\,d\xi \qquad (x\leqslant 0). \tag{7}$$

Заметим, что на основании общих высказанных выше соображений мы могли бы сказать только, что интегралы (6), (7) сходятся соответственно для $x>\sigma$ и $x<-\sigma$. Однако в данном случае рассматривается функция $F\in L$. Для нее непосредственно видно, что интегралы (6) и (7) сходятся в более широких областях (соответственно) $x\geqslant 0$ и $x\leqslant 0$. Интегралы, полученные из (6) и (7) формальным дифференцированием по $z=x+iy$, снова, очевидно, абсолютно сходятся при $x\geqslant 0$ и $x\leqslant 0$. Это показывает, что интегралы (6), (7) определяют аналитические функции при $x>0$ и $x<0$ соответственно. Они, следовательно, совпадают на указанных областях с функцией $f(z)$ — преобразованием Бореля функции F.

Из (6) и (7) для $\varepsilon > 0$ следует

$$f(\varepsilon+iy)-f(-\varepsilon+iy)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\,e^{-i\xi y}e^{-\varepsilon|\xi|}\,d\xi,$$

откуда, перейдя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$0=\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\,e^{-i\xi y}\,d\xi \qquad (|y|>\sigma),$$

т. е. преобразование Фурье функции $F\in\mathfrak{M}_{\sigma 1}$ есть функция (непрерывная), тождественно равная нулю вне отрезка $[-\sigma,\sigma]$.

Если $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ — положительный вектор и $F\in\mathfrak{M}_{\sigma 1}(R_n)=\mathfrak{M}_{\sigma 1}$, то $\tilde F(x)$ есть непрерывная на R_n функция. Так как $F(u_1,\ldots,u_n)=F(\boldsymbol{u})$ есть целая типа σ_1 функция по u_1, принадлежащая к $L(R_1)=L(-\infty,\infty)$ почти для всех $\boldsymbol{u}'=(u_2,\ldots,u_n)$ из соответствующего $(n-1)$-мерного пространства, то для таких $\boldsymbol{u}'$

$$\int F(u_1,\boldsymbol{u}')\,e^{-ix_1u_1}\,du_1=0 \qquad (|x_1|>\sigma_1),$$

но тогда $\tilde F(\boldsymbol{x})=0$, если $|x_1|>\sigma_1$. Это рассуждение можно провести для всех x_j $(j=1,\ldots,n)$. Тем самым доказано следующее утверждение.

3.1.3. Теорема. *Если $F\in\mathfrak{M}_{\sigma 1}$, то $\tilde F(\boldsymbol{x})$ — непрерывная функция, равная нулю вне*

$$\Delta_\sigma=\{|x_j|\leqslant\sigma_j,\quad j=1,\ldots,n\}.$$

3.1.4. Известно, и в этом заключается теорема Пэли — Винера*), что *если $F\in\mathfrak{M}_{\sigma 2}$, $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, то функция*

$$\tilde F(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int F(\boldsymbol{u})\,e^{-i\boldsymbol{xu}}\,d\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

где интеграл понимается в смысле сходимости в среднем

$$\left\|\tilde F(\boldsymbol{x})-\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\Delta_N} f(\boldsymbol{u})\,e^{-i\boldsymbol{xu}}\,d\boldsymbol{u}\right\|_{L_2(\Delta_N)}\to 0 \quad (N\to\infty), \tag{2}$$

$$\Delta_N=\{|x_j|<N;\quad j=1,\ldots,n\},$$

не только принадлежит к $L_2(R_n)$, как это вытекает из (2), но, кроме того, $\tilde F(\boldsymbol{x})=0$ почти всюду вне Δ_σ. Наоборот, если

*) Пэли и Винер [1] при $n=1$. Доказательство в этом случае см., например, в книге Н. И. Ахиезера [1]. Планшерель и Полиа [1] при $n>1$.

φ — произвольная функция из $L_2(\Delta_\sigma)$, то функция

$$F(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\Delta_\sigma}\varphi(u)\,e^{ixu}\,du \tag{3}$$

принадлежит $\mathfrak{M}_{\sigma 2}$, и определяемая формулой (1) функция $\tilde{F}=\varphi$ почти всюду.

Легко проверяется, что если считать, что $F(x)\in\mathfrak{M}_{\sigma 2}$ представляет обобщенную функцию ($F\in S'$), то функция $\tilde{F}(x)$ представляет преобразование $\tilde{F}$ (в смысле S) и $F=\hat{\tilde{F}}$ (см. 1.5).

Таким образом, преобразование Фурье функции $F=\mathfrak{M}_{\sigma 2}$ можно рассматривать как обобщенную и обычную функцию, и притом принадлежащую к $L_2(\Delta_\sigma)$.

Из дальнейшего будет видно, что если $1\leqslant p\leqslant 2$ и $F\in\mathfrak{M}_{\sigma p}$, то $F\in\mathfrak{M}_{\sigma 2}$, поэтому $\tilde{F}$ имеет носитель на Δ_σ и $\tilde{F}\in L_2(\Delta_\sigma)$. Но если $2<p\leqslant\infty$, то преобразование Фурье функции $F\in\mathfrak{M}_{\sigma p}$ может оказаться существенно обобщенной функцией. Например, $1\in\mathfrak{M}_{\sigma\infty}=\mathfrak{M}_\sigma$, а $\tilde{1}=(2\pi)^{n/2}\delta(x)$ (см. 1.5). Поэтому при $p>2$ утверждение, что $\tilde{F}$ имеет носитель на Δ_σ может быть сформулировано только на языке обобщенных функций.

Будем говорить, что обобщенная функция $\Phi\in S'$ имеет *носитель* на Δ_σ, если для любой основной функции φ ($\varphi\in S$) такой, что $\varphi\equiv 0$ на $\Delta_{\sigma+\varepsilon}$, где $\sigma+\varepsilon=\{\sigma_1+\varepsilon,\ \dots,\ \sigma_n+\varepsilon\}$ имеет место $(\Phi,\ \varphi)=0$.

3.1.5. Докажем следующую теорему, принадлежащую Л. Шварцу.

Теорема. *Если $g\in\mathfrak{M}_{\sigma p}$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, то $\tilde{g}$ имеет носитель в Δ_σ.*

Доказательство. Введем функции φ_ε (см. 1.5.8) и $\psi_\varepsilon=(2\pi)^{n/2}\tilde{\varphi}_\varepsilon$. Так как $\varphi_\varepsilon\in S$, то $\psi_\varepsilon\in S\subset L_q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, поэтому $\psi_\varepsilon g\in L$. Кроме того, функция ψ_ε целая экспоненциального типа ε, поэтому $\psi_\varepsilon g$ экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon=(\sigma_1+\varepsilon,\ \dots,\ \sigma_n+\varepsilon)$ и, следовательно, $\psi_\varepsilon g\in\mathfrak{M}_{\sigma+\varepsilon,1}$. Значит, если $\varphi\in S$ и $\varphi=0$ на $\Delta_{\sigma+\varepsilon}$, то (см. 3.1.3)

$$(\widetilde{\psi_\varepsilon g},\ \varphi)=0.$$

После перехода к пределу при $\varepsilon\to 0$ получим (см. 1.5.8 (6))

$$(\tilde{g},\ \varphi)=0,$$

что и требовалось доказать.

Что касается обращения этой теоремы, то для наших целей будет достаточно знать, что преобразование Фурье функции (обычной), равной нулю вне Δ_σ и принадлежащей к $L_2(\Delta_\sigma)$, на основании теоремы Пэли — Винера есть функция класса $\mathfrak{M}_{\sigma 2}$.

3.2. Интерполяционная формула

Пусть (см. Сайвин [1]) $\omega_\nu(t)$ есть непрерывная функция периода $2\nu > 0$ по каждому из переменных и $a = (a_1, \ldots, a_n)$ такой вектор, что ряд Фурье

$$e^{iax}\omega_\nu(x) = \sum_k c_k^\nu e^{i\frac{k\pi}{\nu}x} \qquad (|x_j| < \nu), \tag{1}$$

$$c_k^\nu = \frac{1}{(2\nu)^n}\int\limits_{\Delta_\nu} \omega_\nu(u)\, e^{i\left(a - \frac{k\pi}{\nu}\right)u}\, du, \tag{2}$$

абсолютно сходится, т. е.

$$\sum_k |c_k^\nu| < \infty. \tag{3}$$

Докажем, что если, кроме того, $f, \tilde{f} \in L$ (таким образом, f и $\tilde{f}$ непрерывны и ограничены на R), то

$$\widetilde{\omega_\nu(t)\tilde{f}(t)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k_j|<N} \widetilde{c_k^\nu e^{i\left(\frac{k\pi}{\nu} - a\right)t}\tilde{f}(t)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k_j|<N} c_k^\nu f\left(x + \frac{k\pi}{\nu} - a\right) = \sum_k c_k^\nu f\left(x + \frac{k\pi}{\nu} - a\right), \tag{4}$$

где ряд справа равномерно сходится относительно $x \in R$. Первое равенство в (4) следует из того, что имеет место равномерная сходимость при $N \to \infty$ частичной суммы

$$\lambda_N(x) = \sum_{|k_j|<N} c_k^\nu e^{i\left(\frac{k\pi}{\nu} - a\right)t}$$

к $\omega_\nu(x)$. В самом деле, учитывая, что $\tilde{f} \in L$, получим

$$|\widehat{\omega_\nu \tilde{f}} - \widehat{\lambda_N \tilde{f}}| = |\widehat{(\omega_\nu - \lambda_N)\tilde{f}}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int |\omega_\nu - \lambda_N||\tilde{f}|\, dt \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Второе равенство (4) следует из формулы 1.5 (19). Третье очевидно.

3.2.1. Теорема. *Пусть $\Omega(x) = \Omega(x_1, \ldots, x_n)$ есть бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, четная или нечетная. Если $\Omega(x)$ — четная, то будем предполагать, что для любого $\nu > 0$ периодическая периода 2ν по каждому из переменных функция*

$$\omega_\nu(x) = \Omega(x) \qquad (|x_j| < \nu;\ j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

разлагается на Δ_ν *в абсолютно сходящийся ряд Фурье* (3.2. (1) *при* $a=0$). *Если же* $\Omega(x)$ — *нечетная функция, то будем предполагать, что ряд* 3.2 (1) *при* $a=a_\nu=\left(\frac{\pi}{2\nu}, \ldots, \frac{\pi}{2\nu}\right)$ *абсолютно сходится.*

Будем еще считать, что

$$|c_k^\nu| \leqslant c_k \quad (\nu \leqslant \nu_0) \tag{2}$$

и

$$\sum_k c_k < \infty. \tag{3}$$

Пусть далее $g(x) \in \mathfrak{M}_{\nu p}(R_n) = \mathfrak{M}_{\nu p}$.

Тогда имеет место равенство

$$\widetilde{\Omega(t)\tilde{g}} = \sum_k c_k^\nu g\left(x - a_\nu + \frac{k\pi}{\nu}\right) \tag{4}$$

($a_\nu=0$ *при четной* Ω, $a_\nu=\left(\frac{\pi}{2\nu}, \ldots, \frac{\pi}{2\nu}\right)$ *при нечетной* Ω), *где ряд сходится в смысле* L_p.

Нетрудно видеть, что если $\Omega(x)$ есть нечетная тождественно не равная нулю функция, то ей соответствующая периодическая функция $\omega_\nu(x)$, вообще говоря, разрывна и без умножения на e^{iat} ее ряд Фурье заведомо не может абсолютно сходиться.

Доказательство. Зададим $\varepsilon_1>0$, и пусть $0<\varepsilon<\varepsilon_1$. Введем функции φ_ε и ψ_ε. В 3.1.5 было показано, что $\psi_\varepsilon g \in \mathfrak{M}_{\nu+\varepsilon, 1}$, следовательно, $\widetilde{\psi_\varepsilon g}$ есть непрерывная функция с носителем в $\Delta_{\nu+\varepsilon}$. Таким образом, $\widetilde{\psi_\varepsilon g} \in L$ и законно применить к $\psi_\varepsilon g$ формулу 3.2 (4). Имеем

$$\begin{aligned}\Lambda_\varepsilon(x) &= \widetilde{\Omega(t)\widetilde{\psi_\varepsilon g}} = \widetilde{\omega_{\nu+\varepsilon_1}\widetilde{\psi_\varepsilon g}} = \\ &= \sum_k c_k^{\nu+\varepsilon_1}\psi_\varepsilon\left(x - a_{\nu+\varepsilon_1} + \frac{k\pi}{\nu+\varepsilon_1}\right) g\left(x - a_{\nu+\varepsilon_1} + \frac{k\pi}{\nu+\varepsilon_1}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

($a_{\nu+\varepsilon_1}=0$ при четной функции Ω и $a_{\nu+\varepsilon_1}=\left(\frac{\pi}{2(\nu+\varepsilon_1)}, \ldots, \frac{\pi}{2(\nu+\varepsilon_1)}\right)$ при нечетной функции Ω).

В этих соотношениях всюду фигурируют обычные функции; второе равенство имеет место потому, что $\Omega=\omega_{\nu+\varepsilon_1}$ на $\Delta_{\nu+\varepsilon_1}$ — носителе функции $\widetilde{\psi_\varepsilon g}$; третье равенство верно в силу 3.2 (4).

Так как $\widetilde{\psi_\varepsilon g} \in L$, то $\psi_\varepsilon g$ — ограниченная на R функция и ряд (5) равномерно на R сходится к его сумме, которую мы обозначили через $\Lambda_\varepsilon(x)$. С другой стороны,

$$|\psi_\varepsilon(x)| = \left|\int_{\Delta_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t)\, e^{-ixt}\, dt\right| \leqslant \left|\int_{\Delta_\varepsilon} \varphi_\varepsilon\, dt\right| = 1$$

и по условию $g \in L_p$, поэтому ряд (5) сходится к $\Lambda_\varepsilon(x)$ также и в смысле L_p. Будем именно так понимать сходимость ряда (5).

Заметим, что

$$\psi_\varepsilon(x) = \int\limits_{\Delta_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t)\, e^{-ixt}\, dt \to 1 \qquad (\varepsilon \to 0),$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda_\varepsilon(x) = \sum_k c_k^{\nu+\varepsilon_1} g\left(x - a_{\nu+\varepsilon_1} + \frac{k\pi}{\nu+\varepsilon_1}\right) \tag{6}$$

в смысле L_p. В самом деле,

$$\left\| \Lambda_\varepsilon(x) - \sum_k c_k^{\nu+\varepsilon_1} g\left(x - a_{\nu+\varepsilon_1} + \frac{k\pi}{\nu+\varepsilon_1}\right)\right\|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|k_j|<N} \left| c_k^{\nu+\varepsilon_1}\right| \left\| \left[\psi_\varepsilon\left(x - a_{\nu+\varepsilon_1} + \frac{k\pi}{\nu+\varepsilon_1}\right) - 1\right] \times \right.$$

$$\left. \times g\left(x - a_{\nu+\varepsilon_1} + \frac{k\pi}{\nu+\varepsilon_1}\right)\right\|_{L_p} + 2 \sum{}' \left| c_k^{\nu+\varepsilon_1}\right| \|g\|_{L_p},$$

где штрих во второй сумме обозначает, что сумма распространена на все k, которые не вошли в первую сумму. Всегда можно взять N настолько большим, чтобы вторая сумма была меньшей наперед заданного $\eta > 0$, и затем подобрать ε_0 настолько малым, чтобы первая сумма была меньшей η для положительных $\varepsilon < \varepsilon_0$, что возможно по теореме Лебега. Обе части равенства (6) на самом деле не зависят от ε_1 — это видно из (5). Из (6) после перехода к пределу при $\varepsilon_1 \to 0$ следует наконец, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda_\varepsilon(x) = \sum_k c_k^\nu g\left(x - a_\nu + \frac{k\pi}{\nu}\right), \tag{7}$$

где ряд справа сходится в смысле L_p, предел слева, как отмечалось выше, также понимается в смысле L_p. В самом деле, норма в смысле L_p разности правых частей (6) и (7) не превышает

$$\int\limits_{|k_j|<N} \left| c_k^{\nu+\varepsilon_1} - c_k^\nu \right| \|g\|_{L_p} + \sum_{|k_j|<N} \left| c_k^\nu \right| \left\| g\left(x - a_{\nu+\varepsilon_1} + \frac{k\pi}{\nu+\varepsilon_1}\right) - \right.$$

$$\left. - g\left(x - a_\nu + \frac{k\pi}{\nu}\right)\right\|_{L_p} + \|g\|_{L_p} \cdot 2 \sum{}' |c_k|,$$

где учтены неравенства (2) и (3), в которых надо считать, что $\nu_0 = \nu + \varepsilon^0$ $(\varepsilon_1 < \varepsilon^0)$. Опять N можно взять настолько большим, чтобы третья сумма была меньшей η, при этом N первая и вторая суммы будут при достаточно малых ε_1 также меньше чем η, потому что $a_{\nu+\varepsilon_1} \to a_\nu$ и $c_k^{\nu+\varepsilon_1} \to c_k^\nu$ $(\varepsilon_1 \to 0)$ (учесть, что

Ω — бесконечно дифференцируемая, следовательно, суммируемая на $\Delta_{\nu+\varepsilon_1}$ функция).

Итак, (7) доказано.

С другой стороны (см. (5)),

$$(\Lambda_\varepsilon, \varphi) = (\widehat{\Omega\widetilde{\psi_\varepsilon g}}, \varphi) = (\psi_\varepsilon g, \widetilde{\Omega\hat{\varphi}}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (g, \widetilde{\Omega\hat{\varphi}}) = (\widehat{\Omega\tilde{g}}, \varphi),$$

и мы доказали интерполяционную формулу (4).

3.2.2. Интерполяционная формула для производной целой функции экспоненциального типа. Эта формула будет получена как частный случай общей формулы 3.2.1 (4). Пусть $g_\nu(x) = g(x) \in \mathfrak{M}_{\nu p}(R_1) = \mathfrak{M}_{\nu p}$, т. е. есть целая функция от одной переменной степени ν, ограниченная на действительной оси. Для ее производной имеет место формула (1.5 (10))

$$g'(x) = \widehat{it\tilde{g}}. \tag{1}$$

Функция it бесконечно дифференцируема, нечетна и имеет полиномиальный рост. Рассмотрим периодическую периода 2ν функцию

$$e^{iat}it = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^\nu e^{\frac{ik\pi}{\nu}t} \qquad \left\{|t|<\nu,\ a=\frac{\pi}{2\nu}\right\},$$

$$c_k^\nu = \frac{i}{2\nu}\int_{-\nu}^{\nu} ue^{i\left(\frac{\pi}{2\nu}-\frac{k\pi}{\nu}\right)u}\,du =$$

$$= -\frac{1}{\nu}\int_0^\nu u\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\nu}u\,du = \frac{\nu(-1)^{k-1}}{\pi^2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Ясно, что

$$|c_k^\nu| \leqslant |c_k^{\nu_0}| \qquad (0<\nu\leqslant\nu_0)$$

и

$$\sum_k |c_k^{\nu_0}| < \infty.$$

Поэтому функция it удовлетворяет всем требованиям, которые предъявлялись к $\Omega(t)$ в 3.2.1. В силу 3.2.1 (4) справедлива интерполяционная формула

$$g'(x) = \widehat{it\tilde{g}} = \frac{\nu}{\pi^2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}g\left(x+\frac{\pi}{\nu}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right), \tag{2}$$

где ряд сходится в смысле L_p. Ее можно рассматривать как аналог формулы М. Рисса для тригонометрических полиномов.

В дальнейшем будет видно, что $\mathfrak{M}_{\nu p} \subset \mathfrak{M}_{\nu\infty} = \mathfrak{M}_{\nu}$ и, таким образом, на самом деле ряд (2) сходится не только в смысле L_p, но и равномерно.

Если положить в (2) $g(x) = \sin x \in \mathfrak{M}_{1\infty}$, и затем подставить $x = 0$, то получим

$$1 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2}. \tag{3}$$

Поэтому для любой функции $g \in \mathfrak{M}_{\nu p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ имеет место неравенство

$$\|g'\|_{L_p} \leqslant \nu \|g\|_{L_p}, \tag{4}$$

которое носит название *неравенства Бернштейна* *). Оно доказано С. Н. Бернштейном ([1], 269—270) при $p = \infty$.

Если $z = x + iy$ есть произвольное комплексное число, то $g(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(iy)^s}{s!} g^{(s)}(x)$, откуда

$$\|g(x + iy)\|_{L_p} \leqslant e^{\nu |y|} \|g\|_{L_p}, \tag{5}$$

где норма слева взята по $x \in R_1$.

Так как функция $g(u + iy)$ при любом фиксированном y по u есть снова целая экспоненциального типа ν, то из (5) следует, что если $g(z) \in \mathfrak{M}_{\nu p}$, то и $g(u + iy) \in \mathfrak{M}_{\nu p}$, но тогда верно равенство (2), если заменить в нем x на произвольное комплексное z:

$$g'(z) = \frac{\nu}{\pi^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2} g\left(z + \frac{\pi}{\nu}\left(k - \frac{1}{2}\right)\right), \tag{6}$$

где сходимость понимается по x $(z = x + iy)$ в смысле $L_p(R_1)$. Мы уже предупреждали читателя, что в дальнейшем будет доказано (см. 3.3.5), что $\mathfrak{M}_{\nu p} \subset \mathfrak{M}_{\nu\infty} = \mathfrak{M}_{\nu}$, откуда непосредственно следует, что ряд (6) равномерно сходится по x $(z = x + iy)$, а в силу (5) легко следует также, что он сходится равномерно на любой полосе $\{y_1 < y < y_2\}$, где y_1, y_2 — произвольные действительные числа.

Пусть $g(\boldsymbol{x}) = g(x_1, \boldsymbol{x}')$ есть функция, определенная на измеримом множестве $\mathscr{E} = R_1 \times \mathscr{E}'$ $(x_1 \in R_1, \boldsymbol{x}' \in \mathscr{E}')$, принадлежащая к $L_p(\mathscr{E})$, целая экспоненциального типа ν по x_1 почти для всех (в смысле $(n-1)$-мерной меры) $\boldsymbol{x}' \in \mathscr{E}'$. В силу теоремы Фубини

*) Неравенство (4) верно и при $\nu = 0$: ведь из (4) и того, что $g_0 \in \mathfrak{M}_{0p} \subset \mathfrak{M}_{\nu p}$, следует, что $\|g'\|_p = 0$ и g — константа, равная, очевидно, нулю при конечном p.

можно сказать, что для указанных x' по x_1 функция $g(x_1, x') \in \mathfrak{M}_{\nu p}(R_1)$, и потому вследствие (4)

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|^p_{L_p(R_1)} \leqslant \nu^p \|g\|^p_{L_p(R_1)} \qquad (1 \leqslant p < \infty).$$

После интегрирования обеих частей этого неравенства по $x' \in \mathscr{E}'$ и возведения в степень $1/p$ получим

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \nu \|g\|_{L_p(\mathscr{E})} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{7}$$

Мы приписали также очевидный случай $p = \infty$.

Если функция $g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{M}_{\nu p}(R_n)$, то, учитывая, что любая ее частная производная $g^{(\lambda)}$ есть целая функция экспоненциального типа ν (см. 3.1), легко получим на основании (7) ($\mathscr{E} = R_n$) неравенство

$$\|g^{(\lambda)}\|_{L_p(R_n)} \leqslant \nu^\lambda \|g\|_{L_p(R_n)}. \tag{8}$$

Его можно обобщить еще, предполагая, что $g(x) = g(u, x') = g(x_1, \ldots, x_m, x) \in L_p(\mathscr{E})$, $\mathscr{E} = R_m \times \mathscr{E}' \subset R_n$ — измеримое множество, $m < n$ и g — почти для всех $x' \in \mathscr{E}'$ по $x_1, \ldots, x_m$ целая экспоненциального типа $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$. Тогда, если $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)$, то получим

$$\|g^{(\lambda)}\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \nu^\lambda \|g\|_{L_p(\mathscr{E})}. \tag{9}$$

Если учесть, что почти для всех x'

$$g(u + iy, x') = g(z) = g(u + iy) = \sum_{\lambda \geqslant 0} \frac{g^{(\lambda)}(u)}{\lambda!} (iy)^\lambda,$$

то из (9) легко получим, что

$$\|g(u + iy, x')\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \|g(x)\|_{L_p(\mathscr{E})} e^{\sum_{j=1}^{m} \nu_j |y_j|}. \tag{10}$$

Из (2) можно получить как частный случай формулу М. Рисса, доказанную в 2.4. Надо только учесть, что тригонометрический полином порядка ν является целой ограниченной на действительной оси функцией ν ($T_\nu \in \mathfrak{M}_\nu$), поэтому к нему применима формула (2). Надо учесть еще, что T_ν есть периодическая периода 2π функция.

3.2.3. Неравенство 3.2.2 (4) можно распространить на более общие нормы*). Пусть E есть банахово пространство функций $f(x, w)$, определенных и измеримых на $\mathscr{E} = R_1 \times \mathscr{E}_1$, обладающее следующими свойствами:

---

*) См. в конце книги замечание к 3.2.3.

1) сложение двух функций E и умножение функции на число определяется обычным образом. Две функции f_1 и f_2, равные почти всюду на $\mathscr{E}$, считаются равными ($f_1=f_2$) как элементы E;

2) если $f=f(x, \boldsymbol{w})\in E$, то $f_{x_0}=f(x+x_0, \boldsymbol{w})\in E$ для всякого действительного значения x_0 и $\|f(x, \boldsymbol{w})\|=\|f(x+x_0, \boldsymbol{w})\|$;

3) из того, что $f_n\in E\ (n=1, 2, \ldots)$, $f\in E$, $\|f_n-f\|\to 0$ и $f_n(x, \boldsymbol{w})\to\psi(x, \boldsymbol{w})\ (n\to\infty)$ для $x\in R_1$ и почти всех $\boldsymbol{w}\in\mathscr{E}_1$, следует, что $\psi=f$.

Если функция $g_\nu(x, \boldsymbol{w})\in E$ и почти для всех $\boldsymbol{w}$ относительно x она есть ограниченная целая функция типа ν, то для нее имеет место равенство

$$g'(x, \boldsymbol{w})=\frac{\nu}{\pi^2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}g\left(x+\frac{\pi}{\nu}\left(k-\frac{1}{2}\right), \boldsymbol{w}\right) \tag{1}$$

почти для всех $\boldsymbol{w}$ в смысле обычной сходимости. С другой стороны, вследствие свойства 2) сумма норм членов ряда (1) не превышает $\nu\|g_\nu\|$, и, таким образом, правая часть ряда (1) сходится по рассматриваемой норме к некоторой функции $\psi\in E$. Но функция ψ в силу свойства 3) должна необходимо быть равной $\frac{\partial g_\nu}{\partial x}$. Этим обосновано неравенство

$$\left\|\frac{\partial g_\nu}{\partial x}\right\|\leqslant\nu\|g_\nu\|. \tag{2}$$

3.2.4. Обобщенное неравенство, аналогичное 3.2.3 (2), можно получить, основываясь на 2.7.2, и для тригонометрических полиномов. Для этого достаточно считать, что пространство E состоит из функций $f(x, \boldsymbol{w})$ периода 2π по x с нормой, подчиняющейся только свойствам 1) и 2).

3.2.5. Теорема*). *Пусть $1\leqslant p<\infty$ и целая функция*

$$g=g_\nu(\boldsymbol{z})=g_\nu(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y})$$

экспоненциального типа $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1, \ldots, \nu_n)>0$ принадлежит к классу $L_p(R_n)$. Тогда

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} g_\nu(\boldsymbol{x})=0. \tag{1}$$

Отсюда, в частности, следует, что $g_\nu(\boldsymbol{x})$ ограничена на R_n.

Доказательство. Достаточно доказать теорему в случае $\nu_1=\ldots=\nu_n=1$, к которому можно привести нашу функцию, заменяя ее на следующую $g_\nu\left(\frac{z_1}{\nu_1}, \ldots, \frac{z_n}{\nu_n}\right)$. Ограничимся двумерным случаем, при $n>2$ доказательство аналогично.

---

*) Планшерель и Полна [1].

Итак, пусть задана целая функция $g(z_1, z_2)=g$ типа (1,1), принадлежащая к $L_p(R_2)$, где $1\leqslant p<\infty$. Как всегда, будем считать x_1, x_2 действительными.

Имеет место равенство (см. 3.1.1)

$$g(x_1, x_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x_1+\rho_1 e^{i\theta_1},\ x_2+\rho_2 e^{i\theta_2})\,d\theta_1\,d\theta_2,$$

где ρ_1, $\rho_2>0$. Помножим обе его части на $\rho_1\rho_2$ и проинтегрируем на прямоугольнике $0\leqslant\rho_1$, $\rho_2\leqslant\delta$. Тогда получим

$$g(x_1, x_2)\frac{\delta^4}{4}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_\sigma\int_\sigma g(x_1+\xi_1+i\eta_1,\ x_2+\xi_2+i\eta_2)\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\xi_2\,d\eta_2,$$

где (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) суть декартовы координаты, σ — круг радиуса δ с центром в начале координат.

Отсюда

$$|g(x_1, x_2)|\leqslant\frac{1}{\delta^4\pi^2}\int_\sigma\int_\sigma |g(x_1+\xi_1+i\eta_1,\ x_2+\xi_2+i\eta_2)|\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\xi_2\,d\eta_2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\delta^{4\left(1-\frac{1}{q}\right)}\pi^2}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} d\eta_1\,d\eta_2\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta}|g(\xi+i\eta)|^p\,d\xi_1\,d\xi_2\right)^{1/p}, \quad (2)$$

$$\xi+i\eta=(\xi_1+i\eta_1,\ \xi_2+i\eta_2).$$

Докажем, что интеграл

$$I(g)=\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} d\xi_1\,d\xi_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(\xi+i\eta)|^p\,d\eta_1\,d\eta_2$$

конечен, откуда будет следовать, что правая часть (2) стремится к нулю, когда $|\boldsymbol{x}|\to\infty$, и теорема будет доказана.

В самом деле (см. 3.2.2 (10)),

$$I(g)=\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\|g(\xi+i\eta)\|^p_{L_p(R_2)}\,d\eta_1\,d\eta_2\leqslant$$

$$\leqslant\|g(\xi)\|^p_{L_p(R_2)}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}e^{(|\eta_1|+|\eta_2|)p}\,d\eta_1\,d\eta_2<\infty.$$

При $p=\infty$ эта теорема неверна, как показывает пример функции $\sin z\in\mathfrak{M}_{1,\infty}(R_1)$.

3.2.6. Целые функции экспоненциального сферического типа. Про целую функцию

$$g(z)=g(z_1, \ldots, z_n)$$

мы будем говорить, что она *экспоненциального сферического типа* $\sigma \geqslant 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать константу $A_\varepsilon > 0$ такую, что

$$|g(z)| < A_\varepsilon \exp\left\{(\sigma+\varepsilon)\sqrt{\sum_1^n |z_j|^2}\right\} \tag{1}$$

для всех z. Совокупность всех таких функций данного типа $\sigma \geqslant 0$ обозначим через SE_σ. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n |z_j| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2} \leqslant \sum_{j=1}^n |z_j|,$$

то

$$E_{\sigma/\sqrt{n}} \subset SE_\sigma \subset E_\sigma.$$

Множество функций $g \in SE_\sigma$, которые как функции действительного вектора $x \in R_n$ принадлежат к $L_p(R_n) = L_p$, обозначим через $S\mathfrak{M}_{\sigma p}$.

Пусть $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ есть произвольный единичный вектор (действительный). Обозначим через

$$D_\omega f(x) = f'_\omega(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, \omega_j$$

производную от f в точке x по направлению ω и через

$$f_\omega^{(l)}(x) = D_\omega f_\omega^{(l-1)}(x) = \sum_{|k|=l} f^{(k)}(x)\, \omega^k \quad (l = 1, 2, \ldots)$$

производную порядка l от f в точке x по направлению ω. Введем преобразование

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \rightleftarrows (\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — координаты x в новой прямоугольной системе координат (действительные), которая выбрана так, что возрастание ξ_1 при фиксированных $\xi_2, \ldots, \xi_n$ ведет к передвижению точки x по направлению ω. Преобразование координат

$$x_k = \sum_{s=1}^n \alpha_{ks} \xi_s \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

определяется действительной ортогональной матрицей. Эта матрица определяет также преобразование

$$z_k = \sum_{s=1}^n \alpha_{ks} w_s$$

комплексных систем $\boldsymbol{w}=(w_1, \ldots, w_n)$ в системы $\boldsymbol{z}=(z_1, \ldots, z_n)$. При этом, очевидно, выполняется равенство

$$\sum_{s=1}^{n} |z_s|^2 = \sum_{s=1}^{n} |w_s|^2.$$

Положим

$$g(\boldsymbol{z}) = g(z_1, \ldots, z_n) = g_*(w_1, \ldots, w_n) = g_*(\boldsymbol{w}),$$

и пусть $g \in S\mathfrak{M}_{\sigma p}$; тогда и $g_* \in S\mathfrak{M}_{\sigma p}$, потому что g_* есть, очевидно, целая функция и

$$|g_*(\boldsymbol{w})| = |g(\boldsymbol{z})| < A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2}} = A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2}}.$$

Из этого неравенства видно, что g_* — функция типа σ по w_1 и к ней применимо неравенство 3.2.2 (4).

Далее

$$g_\omega^{(l)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^l}{\partial \xi_1^l} g_*(\xi),$$

поэтому

$$\|g_\omega^{(l)}(\boldsymbol{x})\|_{L_p} = \left\| \frac{\partial^l g_*(\xi)}{\partial \xi_1^l} \right\|_{L_p} \leqslant \sigma^l \|g_*(\xi)\|_{L_p} = \sigma^l \|g(\boldsymbol{x})\|_{L_p}. \tag{3}$$

Полагая $\boldsymbol{z} = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$, получим

$$g(\boldsymbol{z}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{|\boldsymbol{k}|=l} g^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})(i\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{k}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} g_\omega^{(l)}(\boldsymbol{x})(i|\boldsymbol{y}|)^l,$$

$$\left(|\boldsymbol{k}| = \sum_{j=1}^{n} k_j, \quad |\boldsymbol{y}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2, \quad \omega = \frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|}\right),$$

где, таким образом, $g_\omega^{(l)}$ есть производная порядка l по направлению $\omega = \boldsymbol{y}/|\boldsymbol{y}|$ или $\boldsymbol{y}$.

Но тогда

$$\|g(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y})\|_{L_p} \leqslant \|g(\boldsymbol{x})\|_{L_p} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\sigma|\boldsymbol{y}|)^l}{l!} = \|g(\boldsymbol{x})\|_{L_p} \exp\left(\sigma \sqrt{\sum_{1}^{n} y_j^2}\right). \tag{4}$$

Преобразование Фурье $\tilde{g}$ функции $g \in S\mathfrak{M}_{\sigma p}$ имеет носитель, принадлежащий к шару $v_\sigma \subset R_n$ радиуса σ с центром в нулевой точке (Л. Шварц [1]).

В самом деле, если $g \in L_1$, то, учитывая, что при ортогональном преобразовании координат (2)

$$\boldsymbol{x} \rightleftarrows \xi, \quad \boldsymbol{u} \rightleftarrows \boldsymbol{v},$$

имеет место $\boldsymbol{xu} = \xi\boldsymbol{v}$, $d\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{v}$, и, считая, что $\boldsymbol{v}' = (v_2, \ldots, v_n)$, получим

$$\tilde{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int g(\boldsymbol{u})\, e^{-i\boldsymbol{xu}}\, d\boldsymbol{u} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int g_*(\boldsymbol{v})\, e^{-i\xi\boldsymbol{v}}\, d\boldsymbol{v} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\xi'\boldsymbol{v}'}\, d\boldsymbol{v}' \int g_*(v_1, \boldsymbol{v}')\, e^{-iv_1\xi_1} dv_1 = \tilde{g}_*(\xi).$$

Но $g_*(\xi_1, \xi')$ типа σ по ξ_1 и почти для всех ξ' принадлежит к $L(R_1)$, поэтому (см. 3.1.3) $\tilde{g}_*(\xi)$ равна нулю вне полосы $|\xi_1| \leqslant \sigma$ при любом выборе координат $(\xi_2, \ldots, \xi_n)$, но тогда $\tilde{g}(\boldsymbol{x}) = 0$ вне шара v_σ. Наше утверждение, если $g \in S\mathfrak{M}_{\sigma 1}$, доказано. Если $g \in S\mathfrak{M}_{\sigma p}$, то вводим функции $\varphi_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ и $\psi_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ и рассуждаем, как в 3.1.5.

Если f — обобщенная функция и $e \subset R$ — открытое множество, то будем писать

$$(f)_e = 0, \tag{5}$$

если

$$(f, \varphi) = 0$$

для всех $\varphi \in S$, имеющих носитель, принадлежащий к e.

Пусть $0 < \lambda < \sigma$ и v_σ — по-прежнему шар с центром в нулевой точке радиуса σ. Покажем, что *если* $f \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *и*

$$(\tilde{f})_{v_\sigma} = 0,$$

то для целой функции g сферической степени λ, принадлежащей к L, имеет место равенство

$$g * f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u})\, f(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u} = 0. \tag{6}$$

Введем определенные в 1.5.8 функции φ_ε и $\psi_\varepsilon = (2\pi)^{n/2}\, \tilde{\varphi}_\varepsilon$. Для $\varphi \in S$ и такого $\varepsilon > 0$, что $\lambda + \varepsilon < \sigma$,

$$(\psi_\varepsilon g * f, \varphi) = (\widetilde{\psi_\varepsilon g}\tilde{f}, \hat{\varphi}) = (\tilde{f}, \widetilde{\psi_\varepsilon g}\hat{\varphi}) = 0, \tag{7}$$

потому что g вместе со своими производными — ограниченная бесконечно дифференцируемая функция, $\psi_\varepsilon \in S$, $\psi_\varepsilon g \in S$, $\widetilde{\psi_\varepsilon g} \in S$, а следовательно, $\widetilde{\psi_\varepsilon g}\hat{\varphi} \in S$, и имеет носитель, принадлежащий строго к v_σ. После перехода к пределу в равенстве (7) при $\varepsilon \to 0$ (см. 1.5.8 (7)), получим (6).

3.3. Неравенства разных метрик для целых функций экспоненциального типа

В этом параграфе нас будут интересовать классы целых функций $\mathfrak{M}_{\nu p}(R_n)$.

Центральное место здесь занимает неравенство разных метрик, с помощью которого норма функции $g_\nu(x)$ в метрике $L_{p'}=L_{p'}(R_n)$ оценивается через ее норму в метрике L_p $(1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty)$ и произведение некоторых степеней $\nu_1, \ldots, \nu_n$. Это неравенство будет играть существенную роль в дальнейшем при изучении дифференцируемых функций более общих классов.

Очевидно, $\mathfrak{M}_{\nu p}(R_n)$ есть линейное множество. Оно бесконечномерно. Например, функции $\sin^2 \frac{x}{2k} \Big/ x^2$ $(k=1, 2, \ldots)$ принадлежат к $\mathfrak{M}_{1p}(R_1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и образуют линейно независимую систему. Поэтому уже из общих соображений функционального анализа можно заключить, что единичная сфера в $\mathfrak{M}_{\nu p}(R_n)$ не компактна в метрике $L_p(R_n)=L_p$. Однако мы увидим, что она компактна в ослабленном смысле (см. 3.3.6).

3.3.1. Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $h>0$, $x_k=kh$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $g_\nu=g_\nu(z)$ — *целая функция от одной переменной типа* ν *и*

$$((g_\nu))_{L_p} = \sup_u \left(h \sum_{-\infty}^{\infty} |g_\nu(x_k-u)|^p\right)^{1/p} < \infty$$

или $\|g_\nu\|_{L_p} < \infty$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\|g_\nu\|_{L_p} \leqslant ((g_\nu))_{L_p} \leqslant (1+h\nu)\|g_\nu\|_{L_p}. \tag{1}$$

Доказательство. При $p=\infty$ теорема тривиальна. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $\|g_\nu\|_{L_p} < \infty$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_\nu|^p\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |g_\nu|^p\,dx = h \sum_{-\infty}^{\infty} |g_\nu(\xi_k)|^p,$$

где числа ξ_k удовлетворяют неравенствам $x_k < \xi_k < x_{k+1}$. Используя обобщенное неравенство Бернштейна, неравенство Гёльдера, а также неравенство $|\|x\|-\|y\|| \leqslant \|x-y\|$, получим

$$\left|\left(h \sum_{-\infty}^{\infty} |g_\nu(\xi_k)|^p\right)^{1/p} - \left(h \sum_{-\infty}^{\infty} |g_\nu(x_k)|^p\right)^{1/p}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(h \sum_{-\infty}^{\infty} |g_\nu(\xi_k)-g_\nu(x_k)|^p\right)^{1/p} \leqslant \left[h \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} g'_\nu(t)\,dt\right|^p\right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(h \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |g'_\nu|^p\,dt\,h^{p/q}\right)^{1/p} = h\|g'_\nu\|_{L_p(R_1)} \leqslant h\nu\|g_\nu\|_{L_p(R_1)}.$$

Поэтому

$$\left(h\sum_{-\infty}^{\infty}|g_\nu'(x_k)|^p\right)^{1/p}=$$

$$=\left[\left(h\sum_{-\infty}^{\infty}|g_\nu(x_k)|^p\right)^{1/p}-\left(h\sum_{-\infty}^{\infty}|g_\nu(\xi_k)|^p\right)^{1/p}\right]+\left(h\sum_{-\infty}^{\infty}|g_\nu(\xi_k)|^p\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant(1+h\nu)\|g_\nu\|_{L_p(R_1)}. \quad (2)$$

Если принять во внимание, что при любом фиксированном u функция $g_\nu(x-u)$, рассматриваемая как функция от x, есть целая функция типа ν, то из неравенства (2), заменяя в нем $g_\nu(x)$ на $g_\nu(x-u)$, получим второе неравенство (1).

С другой стороны, если $((g_\nu))_{L_p}<\infty$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g_\nu|^p\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|g_\nu|^p\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^h|g_\nu(x_{k+1}-u)|^p\,du=$$

$$=\int_0^h\sum_{-\infty}^{\infty}|g_\nu(x_{k+1}-u)|^p\,du\leqslant h\sup_u\sum_{-\infty}^{\infty}|g_\nu(x_k-u)|^p, \quad (3)$$

где замена порядка суммирования и интегрирования законна в силу того, что оперируем с неотрицательными функциями. Этим доказано первое неравенство (1).

3.3.2. Теорема*). *Пусть* $1\leqslant p\leqslant\infty$, $h_l>0$, $x_k^{(l)}=kh_l$ ($l=1,\ldots,n$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$), $g=g_\nu$ — *целая функция типа* $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$,

$$((g))_p^{(n)}=$$

$$=\sup_{u_l}\left(\prod_{m=1}^{n}h_m\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_n=-\infty}^{\infty}\left|g\left(x_{l_1}^{(1)}-u_1,\ldots,x_{l_n}^{(n)}-u_n\right)\right|^p\right)^{1/p}<\infty \quad (1)$$

или

$$\|g\|_{L_p(R_n)}=\|g\|_p<\infty.$$

Тогда

$$\|g_\nu\|_{L_p(R_n)}\leqslant((g_\nu))_p^{(n)}\leqslant\prod_1^n(1+h_l\nu_l)\|g_\nu\|_{L_p(R_n)}. \quad (2)$$

---

*) С. М. Никольский [3].

Доказательство. При $p=\infty$ неравенства (2) тривиальны. Пусть $1\leqslant p<\infty$. Тогда

$$\int |g|^p\,dx=\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_n=-\infty}^{\infty}\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_n}\left|g\left(x_{l_1}^{(1)}-u_1,\ \ldots,\ x_{l_n}^{(n)}-u_n\right|^p du=$$

$$=\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_n}\sum\cdots\sum\left|g\left(x_{l_1}^{(1)}-u_1,\ \ldots,\ x_{l_n}^{(n)}-u_n\right)\right|du\leqslant((g))_p^{(n)},$$

и мы доказали первое неравенство (2) в предположении, что второй член (2) конечен. Пусть теперь конечен третий член (2). Чтобы доказать второе неравенство (2), заметим, что $g(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{u})=g(z_1-u_1,\ \ldots,\ z_n-u_n)$ при любых фиксированных u_l есть целая функция типа $\boldsymbol{\nu}$ по $\boldsymbol{z}$, для которой $\|g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})\|_p=\|g(\boldsymbol{x})\|_p$. Поэтому достаточно доказать неравенство

$$\left(\prod_{l=1}^{n}h_l\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_n=-\infty}^{\infty}\left|g\left(x_{l_1}^{(1)},\ \ldots,\ x_{l_n}^{(n)}\right)\right|^p\right)^{1/p}\leqslant\prod_{l=1}^{n}(1+h_l\nu_l)\|g\|_p.$$

Но оно уже доказано в предыдущей теореме при $n=1$. Допустим, что верность его установлена для $m=n-1$. Тогда в силу того, что при любом фиксированном x_1 функция g есть целая типа $\nu_2,\ \ldots,\ \nu_n$ соответственно по $x_2,\ \ldots,\ x_n$, будем иметь

$$\prod_{l=1}^{n}(1+h_l\nu_l)^p\int\cdots\int|g(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)|^p\,dx_2,\ \ldots\,dx_n\geqslant$$

$$\geqslant\prod_{l=2}^{n}h_l\sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_n=-\infty}^{\infty}\left|g\left(x_1,\ x_{l_2}^{(2)},\ \ldots,\ x_{l_n}^{(n)}\right)\right|^p,$$

откуда после интегрирования по x_1 и возведения в степень p^{-1} получим

$$\prod_{l=2}^{n}(1+h_l\nu_l)\|g\|_p\geqslant$$

$$\geqslant\left(\prod_{l=2}^{n}h_l\right)^{1/p}\geqslant\left(\sum_{l_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_n=-\infty}^{\infty}\left(\int\left|g\left(x_1,\ x_{l_2}^{(2)},\ \ldots,\ x_{l_n}^{(n)}\right)\right|^p dx_1\right)\right)^{1/p}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{1+h_1\nu_1}\left(\prod_{l=1}^{n}h_l\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_n=-\infty}^{\infty}\left|g\left(x_{l_1}^{(1)},\ \ldots,\ x_{l_n}^{(n)}\right)\right|^p\right)^{1/p}.$$

Последнее неравенство имеет место в силу второго неравенства 3.3.1 (1), так как g есть целая функция типа ν_1 по x_1.

3.3.3. Лемма *). *Для любых* $a_k \geqslant 0$

$$\left(\sum_1^\infty a_k^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant \left(\sum_1^\infty a_k^p\right)^{1/p} \quad (1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty). \qquad (1)$$

Доказательство. Достаточно считать, что

$$\sum_1^\infty a_k^p = 1,$$

тогда

$$a_k \leqslant 1, \quad \sum_1^\infty a_k^{p'} \leqslant \sum_1^\infty a_k^p = 1,$$

откуда следует неравенство (1) при $1 \leqslant p < p' < \infty$. Чтобы получить (1) при $p' = \infty$, достаточно перейти к пределу при $p' \to \infty$.

3.3.4. Теорема. *В условиях теоремы* 3.3.2 *имеет место неравенство*

$$((g))_{p'}^{(n)} \leqslant \left(\prod_{l=1}^n h_l\right)^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}} ((g))_p^{(n)} \quad (1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty). \qquad (1)$$

Оно непосредственно вытекает из определения $((g))_p^{(n)}$ и предыдущей леммы.

3.3.5. Теорема **). *Если* $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$, *то для целой функции экспоненциального типа* $g = g_\nu \in L_p(R_n)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, *имеет место неравенство (разных метрик)*

$$\|g_\nu\|_{L_{p'}(R_n)} \leqslant 2^n \left(\prod_1^n \nu_k\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|g_\nu\|_{L_p(R_n)}. \qquad (1)$$

При фиксированном n *и произвольных* ν_k *это неравенство точно в смысле порядка.*

Доказательство. На основании 3.3.2 (2) и 3.3.4, полагая $\omega = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$, получим

$$\|g\|_{L_{p'}(R_n)} \leqslant ((g))_{p'}^{(n)} \leqslant \left(\prod_{l=1}^n h_l\right)^{-\omega} ((g))_p^{(n)} \leqslant \prod_1^n \frac{1+h_l\nu_l}{h_l^\omega} \|g\|_{L_p(R_n)} =$$

$$= \prod_1^n \frac{1+\alpha_l}{\alpha_l^\omega} \left(\prod_1^n \nu_l\right)^\omega \|g\|_{L_p(R_n)}, \quad (\alpha_l = h_l\nu_l). \qquad (2)$$

*) См. Харди, Литтлвуд и Полиа [1].

**) С. М. Никольский [3], см. замечания 3.3—3.4.3 в конце книги.

Функция

$$\psi(\alpha)=\frac{1+\alpha}{\alpha^{\omega}}$$

на полуоси $0<\alpha<\infty$ достигает своего минимума, равного

$$\lambda_{\omega}=\frac{1}{\omega^{\omega}(1-\omega)^{1-\omega}}\leqslant 2. \tag{3}$$

Таким образом, можно написать

$$\|g\|_{L_{p'}(R_n)}\leqslant(\lambda_{\omega})^{n}\left(\prod_{1}^{n}\nu_l\right)^{\omega}\|g\|_{L_p(R_n)},$$

откуда в силу (3) следует (1).

Чтобы доказать второе утверждение теоремы, рассмотрим функцию

$$F_{\nu}=\prod_{1}^{n}\frac{\sin^2\frac{\nu_k z_k}{2}}{z_k^2}, \tag{4}$$

очевидно, принадлежащую к $L_p(R_n)$ при любом p, удовлетворяющем неравенствам $1\leqslant p\leqslant\infty$ и представляющую собой целую функцию типа $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$. Ее норма равна

$$\|F_{\nu}\|_{L_p(R_n)}=\left(2^n\prod_{1}^{n}\int_{0}^{\infty}\left|\frac{\sin^2\frac{\nu_k t}{2}}{t^2}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=c_p\left(\prod_{1}^{n}\nu_k\right)^{2-\frac{1}{p}}$$
$$(1\leqslant p\leqslant\infty),$$

где c_p — положительная константа, не зависящая от ν_l. Следовательно,

$$\|F_{\nu}\|_{L_{p'}(R_n)}=\frac{c_{p'}}{c_p}\left(\prod_{1}^{n}\nu_k\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|F_{\nu}\|_{L_p(R_n)},$$

что и требовалось доказать.

3.3.6. Теорема о компактности*). *Из всякой ограниченной в метрике $L_p(R_n)$ последовательности функций $g_{(k)}\in\mathfrak{M}_{\nu p}(R_n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty,\ k=1, 2, \ldots)$ можно выделить подпоследовательность $g_{(k_l)}$ $(l=1, 2, \ldots)$ и определить такую функцию $g\in\mathfrak{M}_{\nu p}(R_n)$, что имеет место равенство*

$$\lim_{k_l\to\infty} g_{(k_l)}(z)=g(z)$$

равномерно на любом ограниченном множестве.

*) $p=\infty$, $n=1$, С. Н. Бернштейн [1], стр. 269—270.

Доказательство. По условию существует константа A_1 такая, что

$$\|g_{(k)}\|_{L_p(R_n)} \leqslant A_1 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Отсюда в силу 3.3.5 (1)

$$|g_{(k)}(x)| \leqslant 2^n \left(\prod_1^n \nu_k\right)^{\frac{1}{p}} \|g_{(k)}\|_{L_p(R_n)} \leqslant A, \tag{2}$$

где константа A также не зависит от k.

Разложим $g_{(k)}(z)$ в ряд Тейлора:

$$g_{(k)}(z) = \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{c_\alpha^{(k)} z^\alpha}{\alpha!},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — системы неотрицательных целых чисел и

$$c_\alpha^{(k)} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} g_{(k)}(0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Вследствие (2) и неравенства Бернштейна (3.2.2 (8))

$$|c_\alpha^{(k)}| \leqslant A \nu^\alpha \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Таким образом, коэффициенты $c_\alpha^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены при каждой фиксированной системе α и, возможно, воспользовавшись диагональным процессом, получить подпоследовательность натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots$ такую, что

$$\lim_{k_s \to \infty} c_\alpha^{(k_s)} = c_\alpha. \tag{4}$$

Положим

$$g(z) = \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{c_\alpha}{\alpha!} z^\alpha. \tag{5}$$

Тогда

$$|g(z)| \leqslant A \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{\nu^\alpha |z_1|^{\alpha_1} \ldots |z_n|^{\alpha_n}}{\alpha!} = A e^{\sum_1^n \nu_j |z_j|},$$

потому что числа c_α удовлетворяют неравенству

$$|c_\alpha| \leqslant A \nu^\alpha. \tag{6}$$

Следовательно, $g(z)$ есть целая функция экспоненциального типа ν.

Далее, считая, что $|\alpha|^2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2$, получим

$$\|g(z) - g_{(k_s)}(z)\| \leqslant \sum_{|\alpha| < N} \frac{\left|c_\alpha - c_\alpha^{(k_s)}\right|}{\alpha!} |z_1|^{\alpha_1} \ldots |z_n|^{\alpha_n} + \\ + \sum_{|\alpha| \geqslant N} \frac{|c_\alpha| + \left|c_\alpha^{(k_s)}\right|}{\alpha!} |z_1|^{\alpha_1} \ldots |z_n|^{\alpha_n} = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Но в силу (3) и (6) для $\sqrt{\sum_1^n |z_j|^2} \leqslant K$

$$\sigma_2 \leqslant 2A \sum_{|\alpha| \geqslant N} \frac{|\nu_1 z_1|^{\alpha_1} \ldots |\nu_n z_n|^{\alpha_n}}{\alpha!} < \varepsilon$$

при достаточно большом N. Если это достаточно большое N зафиксировать, то в силу (4) можно указать такое s_0, что $|\sigma_1| < \varepsilon$ для всех $s > s_0$ и $|z| \leqslant K$.

Таким образом,

$$\lim_{k_s \to \infty} g_{k_s}(z) = g(z) \tag{7}$$

равномерно для всех z, удовлетворяющих неравенству $|z| \leqslant K$, где K — любое положительное число.

Наконец, если $V_\rho \subset R_n$ есть сфера радиуса ρ с центром в начале координат, то вследствие (7) и (1)

$$\|g\|_{L_p(V_\rho)} = \lim_{s \to \infty} \|g_{(k_s)}\|_{L_p(V_\rho)} \leqslant A_1,$$

откуда после перехода к пределу при $\rho \to \infty$ получим

$$\|g\|_{L_p(R_n)} \leqslant A_1$$

и

$$g \in \mathfrak{M}_{\nu p}(R_n).$$

3.3.7. Пример применения теоремы 3.3.5. Зададим числа $1 \leqslant p_1, p_2, \ldots, p_n \leqslant \infty$ и рассмотрим пространство $L_{(p_1, \ldots, p_n)}(R_n) = L_p(R_n)$ измеримых на R_n функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p(R_n)} = \left\{\int \left[\ldots \left(\int \left(\int |f|^{p_n} dx_n\right)^{\frac{p_{n-1}}{p_n}} dx_{n-1}\right)^{\frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}} \ldots\right]^{\frac{p_1}{p_2}} dx_1\right\}^{\frac{1}{p_1}}, \tag{1}$$

где все интегралы берутся от $-\infty$ до $+\infty$.

Здесь, если $p_{n'}=p_{n'+1}=\ldots=p_n=\infty$, то надо считать

$$\left\{\int\left[\ldots\left(\left(\int|f|^{p_n}dx_n\right)^{\frac{p_{n-1}}{p_n}}dx_{n-1}\right)^{\frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}}\right]^{\frac{p_{n'}}{p_{n'+1}}}dx_{n'}\right\}^{\frac{1}{p_{n'}}}=$$
$$=\sup_{x_{n'},\ldots,x_n}|f(x_1,\ldots,x_{n'-1},x_{n'},\ldots,x_n)| \qquad (2)$$

при фиксированных произвольных $x_1, \ldots, x_{n'-1}$.

Пусть сначала $1\leqslant p\leqslant p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant p_n$ и $g_\nu=g_{\nu_1,\ldots,\nu_n}=g$ есть целая функция экспоненциального типа ν, ограниченная на R_n. Рассматривая ее как функцию только от переменной x_n, можно написать

$$\left(\int|g|^{p_n}dx_n\right)^{\frac{1}{p_n}}\leqslant 2\nu_n^{\frac{1}{p_{n-1}}-\frac{1}{p_n}}\left(\int|g|^{p_{n-1}}dx_n\right)^{\frac{1}{p_{n-1}}},$$

где интегралы всюду мы условимся считать взятыми в бесконечных пределах $(-\infty, \infty)$.

Отсюда

$$\left(\int\left(\int|g|^{p_n}dx_n\right)^{\frac{p_{n-1}}{p_n}}dx_{n-1}\right)^{\frac{1}{p_{n-1}}}\leqslant$$
$$\leqslant 2\nu_n^{\frac{1}{p_{n-1}}-\frac{1}{p_n}}\left(\int\int|g|^{p_{n-1}}dx_{n-1}\,dx_n\right)^{\frac{1}{p_{n-1}}}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{1+2}\nu_n^{\frac{1}{p_{n-1}}-\frac{1}{p_n}}(\nu_{n-1}\nu_n)^{\frac{1}{p_{n-2}}-\frac{1}{p_{n-1}}}\left(\int\int|g|^{p_{n-2}}dx_{n-1}\,dx_n\right)^{\frac{1}{p_{n-2}}}.$$

Первое неравенство здесь следует из теоремы 3.3.5 при $n=1$ и $p=p_{n-1}$, $p'=p_n$, а второе из теоремы 3.3.5 при $n=2$ и $p=p_{n-2}$, $p'=p_{n-1}$. Продолжив этот процесс до конца, получим неравенство *)

$$\|g_\nu\|_{L(p_1,\ldots,p_n)(R_n)}\leqslant 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\nu_n^{\frac{1}{p_{n-1}}-\frac{1}{p_n}}(\nu_{n-1}\nu_n)^{\frac{1}{p_{n-2}}-\frac{1}{p_{n-1}}}\times\ldots$$
$$\ldots\times(\nu_1\ldots\nu_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\|g_\nu\|_{L_p(R_n)}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_1^n\nu_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_k}}\|g_\nu\|_{L_p(R_n)}. \qquad (3)$$

Для получения этого неравенства в сущности применялось n раз неравенство 3.3.5 (1) в соответствующих частных случаях.

Для того чтобы доказать неравенство (3) в общем случае $1\leqslant p\leqslant p_1, \ldots, p_n\leqslant\infty$, достаточно заметить, что

$$\|f\|_{L(p_1,\ldots,p_n)}\leqslant\|f\|_{L(q_1,\ldots,q_n)}, \qquad (4)$$

*) С. М. Никольский [5], [13], [14].

где $q_1, \ldots, q_n$ — перестановка чисел $p_1, \ldots, p_n$ в неубывающем порядке. Неравенство (4) вытекает из обобщенного неравенства Минковского (см. 1.3.2). Например, при $n=2$, $p_2 \leqslant p_1$ имеем

$$\left[\int\left(\int |f(x_1, x_2)|^{p_2} dx_2\right)^{\frac{p_1}{p_2}} dx_1\right]^{\frac{1}{p_1}} \leqslant \left[\int\left(\int |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2\right]^{\frac{1}{p_2}}.$$

Неравенство (3) в смысле порядка точное, что проверяется на функциях F_ν (см. 3.3.5 (4)).

3.4. Неравенства разных измерений для целых функций экспоненциального типа

Эти неравенства также будут иметь существенное значение для дальнейшего, с их помощью норма целой функции экспоненциального типа, исчисленная для подпространства $R_m \subset R_n$ $(m < n)$, оценивается через норму ее, исчисленную для всего пространства R_n. Мы увидим в дальнейшем, что неравенства разных измерений послужат основой при изучении устойчивых граничных свойств дифференцируемых функций.

3.4.1. Пусть $\mathscr{E} = R_m \times \mathscr{E}' \subset R_n$ есть цилиндрическое измеримое множество точек $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$,

$$\boldsymbol{u} = (x_1, \ldots, x_m) \in R_m,$$
$$\boldsymbol{y} = (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \mathscr{E}' \subset R_{n-m}$$

и

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \geqslant \mathbf{0}.$$

По определению функция $g(\boldsymbol{x}) \in \mathfrak{M}_{\nu p}(\mathscr{E})$, если она принадлежит к $L_p(\mathscr{E})$ и почти для всех $\boldsymbol{y} \in \mathscr{E}'$ по $\boldsymbol{u}$ является функцией экспоненциального типа $\boldsymbol{\nu}$.

Для функций

$$g = g_\nu \in \mathfrak{M}_{\nu p}(\mathscr{E}) = \mathfrak{M}_{\nu p}(R_m \times \mathscr{E}')$$

выполняется неравенство

$$\| \|g_\nu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})\|_{L_{p'}(R_m)} \|_{L_p(\mathscr{E}')} \leqslant 2^m \left(\prod_1^m \nu_k\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})}, \qquad (1)$$
$$1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty,$$

где в левой части внутренняя норма вычисляется по переменной $\boldsymbol{u} \in R_m$, а внешняя — по переменной $\boldsymbol{y} \in \mathscr{E}'$. В самом деле, на основании неравенства разных метрик (3.3.5 (1)), которое применяется для почти всех $y \in \mathscr{E}'$,

$$\left(2^m \left(\prod_1^m \nu_k\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|g(u, y)\|_{L_p(\mathscr{E})}\right)^p =$$

$$= \int_{\mathscr{E}'} \left(2^m \left(\prod_1^m \nu_k\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|g(u, y)\|_{L_p(R_m)}\right)^p dy \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\mathscr{E}'} \|g(u, y)\|_{L_{p'}(R_m)}^p dy,$$

откуда, возводя обе части полученного неравенства в степень $1/p$, получим (1).

Положим в формуле (1) $p' = \infty$ и учтем, что для некоторого множества $\mathscr{E}'_1 \subset \mathscr{E}'$ полной меры имеет место следующее свойство: для всякого $y \in \mathscr{E}'_1$ функция $g(u, y)$ типа ν по u и конечна норма

$$\|g(u, y)\|_{L_\infty(R_m)} = \sup_{u \in R_m} \operatorname{vrai} |g(u, y)| =$$

$$= \lim_{\rho \to \infty} \max_{u \in V_\rho} |g(u, y)| \geqslant |g(u, y)| \quad (u \in R_m), \tag{2}$$

где через V_ρ мы обозначили шар с центром в начале радиуса ρ, принадлежащий к R_m.

Неравенство (2), таким образом, справедливо для $y \in \mathscr{E}'_1$ и $u \in R_m$, поэтому

$$\|g(u, y)\|_{L_p(\mathscr{E}')} \leqslant \| \|g(u, y)\|_{L_\infty(R_m)} \|_{L_p(\mathscr{E}')},$$

и мы получим, учитывая (1), следующее неравенство:

$$\|g(u, y)\|_{L_p(\mathscr{E}')} \leqslant 2^m \left(\prod_1^m \nu_k\right)^{\frac{1}{p}} \|g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})}. \tag{3}$$

3.4.2. Теорема*). *Если* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $1 \leqslant m < n$, *то для всякой целой функции* $g_\nu(z) = g_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(z_1, \ldots, z_n) \in L_p(R_n)$ *экспоненциального типа* ν *имеет место неравенство (разных измерений)*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |g(u_1, \ldots, u_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)|^p du_1 \ldots du_m\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{n-m} \left(\prod_{m+1}^n \nu_k\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |g|^p du_1 \ldots du_n\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

*) С. М. Никольский [3].

При фиксированных n и m и произвольных $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ это неравенство в смысле порядка точно.

Доказательство. Пространство R_n можно рассматривать как топологическое произведение

$$R_n=R_{n-m}\times R_m,$$

где $(x_1, \ldots, x_m)\in R_m$, $(x_{m+1}, \ldots, x_n)\subset R_{n-m}$. Если теперь в неравенстве 3.4.1 (3) считать, что $\mathscr{E}=R_n$, $\mathscr{E}_1=R_m$ и заменить R_m на R_{n-m}, то получим искомое неравенство.

Точность неравенства (1) в смысле порядка относительно ν можно проверить на функциях F_ν (см. 3.3.5 (4)), которые уже служили в 3.3.5 для подобной цели.

Замечание. Полагая в 3.3.7 (3) $p_1=\ldots=p_n=p$, $p_{m+1}=\ldots$ $\ldots=p_n=\infty$, получим неравенство

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{x_{m+1},\ldots,x_n}|g(u_1, \ldots, u_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)|^p\,du_1\ldots du_m\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\prod_{m+1}^{n}\nu_k\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)|^p\,du_1\ldots du_n\right)^{\frac{1}{p}},$$

которое уточняет неравенство (1) в том смысле, что слева под интегралом вместо $|g(u_1, \ldots, u_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)|^p$ стоит

$$\sup_{x_{m+1},\ldots,x_n}|g(u_1, \ldots, u_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)|^p.$$

3.4.3. Неравенства разных метрик и измерений для тригонометрических полиномов. Они аналогичны соответствующим неравенствам для целых функций экспоненциального типа.

Пусть $T=T_\nu(\boldsymbol{x})\in\mathfrak{M}^*_\nu(R_n)$, т. е. T — тригонометрический полином порядка ν от n переменных, и

$$((T))^{(n)}_{p}{}^{*}=\max_{u_l}\left(\prod_{l=1}^{n}h_l\sum_{l_1=1}^{N_1}\ldots\sum_{l_n=1}^{N_n}\left|T\left(x^{(1)}_{l_1}-u_1, \ldots, x^{(n)}_{l_n}-u_n\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

$$\left(h_l=\frac{2\pi}{N_l},\ N_l=1, 2, \ldots;\ l=1, \ldots, n,\ 1\leqslant p\leqslant\infty\right).$$

Тогда имеют место неравенства *)

$$\|T_\nu\|_{L_p^*}^{(n)} \leqslant ((T_\nu))_p^{*(n)} \leqslant \prod_1^n (1+h_i\nu_i) \|T_\nu\|_{L_p^*}^{(n)}, \tag{2}$$

$$\|T_\nu\|_{L_{p'}^*}^{(n)} \leqslant 3^n \left(\prod_1^n \nu_i\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|T_\nu\|_{L_p^*}^{(n)}, \tag{3}$$

$$\left(\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} |T(u_1, \ldots, u_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)|^p \, du_1 \ldots du_m\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant 3^{n-m} \left(\prod_{m+1}^n \nu_i\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} |T|^p \, du_1 \ldots du_n\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Они аналогичны соответствующим доказанным выше неравенствам для целых функций экспоненциального типа и доказываются аналогично. Теперь уже при доказательстве все суммы ($\sum$) распространяются, как в (1), на конечное число слагаемых ($N_1, \ldots, N_m$), интегралы берутся по периодам и применяется неравенство Бернштейна для тригонометрических полиномов. Однако если вести рассуждения по аналогии с тем, как это делалось для функций экспоненциального типа, получается (округленная) константа 3 вместо 2, что объясняется тем, что в периодическом случае приходится искать минимум $\psi(\alpha)$ среди дискретных значений α. Но, конечно, в обоих случаях приведенные константы завышены.

Для тригонометрических полиномов можно получить аналоги и других приведенных в 3.3 неравенств.

Точность указанных неравенств в смысле порядка на этот раз проверяется на ядрах Фейера (см. 2.2.2).

3.5. Подпространства функций данного экспоненциального типа

Теорема. *Пространство* $\mathfrak{M}_{\nu p}(\mathscr{E}) = \mathfrak{M}_{\nu p}(R_m \times \mathscr{E}')$ (см. 3.4.1) *есть подпространство пространства* $L_p(\mathscr{E})$, *т. е. линейное замкнутое в* $L_p(\mathscr{E})$ *множество.*

Доказательство. Линейность $\mathfrak{M}_{\nu p}(\mathscr{E})$ очевидна.

Пусть для последовательности $g_k = g_{\nu k} \in \mathfrak{M}_{\nu p}(\mathscr{E})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ выполняется условие

$$\lim_{k,\, l \to \infty} \|g_k - g_l\|_{L_p(\mathscr{E})} = 0. \tag{1}$$

*) См в конце книги замечания 3.3—3.4.3.

Тогда существует функция $f \in L_p(\mathscr{E})$ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} \| f - g_k \|_{L_p(\mathscr{E})} = 0. \tag{2}$$

Очевидно, можно указать множество $\mathscr{E}'_1 \subset \mathscr{E}'$ полной меры одно и то же для всех $k = 1, 2, \ldots$ такое, что $g_k(u, y)$ будет для всех $y \in \mathscr{E}'_1$ целой по u экспоненциального типа ν. Заодно можно считать, что $\mathscr{E}'_1$ обладает дополнительно свойством

$$\lim_{k_s \to \infty} \| f(u, y) - g_{k_s}(u, y) \|_{L_p(R_m)} = 0 \text{ для всех } y \in \mathscr{E}'_1, \tag{3}$$

где k_s — некоторая подпоследовательность натуральных чисел одна и та же для всех $y \in \mathscr{E}'_1$ (это следует из (2) на основании леммы 1.3.8). Далее из (3) вследствие неравенства 3.2.2 (10) $(p = \infty)$ и неравенства разных метрик следует, что $(y \in \mathscr{E}'_1)$

$$|g_{k_s}(u + iv, y) - g_{k_{s'}}(u + iv, y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_u |g_{k_s}(u, y) - g_{k_{s'}}(u, y)| \, e^{\sum_{j=1}^{m} \nu_j |v_j|} \leqslant$$

$$\leqslant 2^m \prod_{j=1}^{m} \nu_j^{\frac{1}{p}} \| g_{k_s}(u, y) - g_{k_{s'}}(u, y) \|_{L_p(R_m)} \, e^{\sum_{j=1}^{m} \nu_j |v_j|} \to 0, \tag{4}$$

$$s, s' \to \infty.$$

Это показывает, что $g_{k_s}(z, y)$ для любого фиксированного $y \in \mathscr{E}'_1$ при $s \to \infty$ равномерно на любом ограниченном множестве комплексных z стремится к некоторой функции $g(z, y)$, очевидно, целой по z. Пусть

$$\Delta_N = \{ |x_j| \leqslant N;\ j = 1, \ldots, n \}.$$

Из сказанного следует, что $g_{k_s}(x) \to g(x)$ $(s \to \infty)$ почти всюду на $\mathscr{E}\Delta_N$, а из (2) тогда вытекает, что $g(x) = f(x)$ почти всюду на $\mathscr{E}\Delta_N$, а следовательно (в силу произвольности N), и на $\mathscr{E}$.

Наконец, из неравенства, аналогичного (4),

$$|g_{k_s}(z, y)| \leqslant 2^m \prod_{j=1}^{m} \nu_j^{\frac{1}{p}} \| g_{k_s}(u, y) \|_{L_p(R_m)} \qquad (y \in \mathscr{E}'_1),$$

перейдя в нем к пределу при $s \to \infty$, получим такое же неравенство, но только уже для g, что показывает, что g при любом $y \in \mathscr{E}'_1$ экспоненциального типа ν по u.

Мы доказали, что фигурирующую в (2) функцию f можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль так, что она почти для всех y будет целой экспоненциального типа ν по u, и так как $f \in L_p(R_n)$, то $f \in \mathfrak{M}_{\nu p}(\mathscr{E})$. Теорема доказана.

3.6. Свертки с целыми функциями экспоненциального типа

3.6.1. Лемма. *Пусть*

$$g(t)=\sum_{0}^{\infty} c_{2k}t^{2k} \tag{1}$$

есть четная целая функция от одной переменной экспоненциального типа ν. *Тогда функция*

$$g_*(\boldsymbol{x})=g(|\boldsymbol{x}|)=\sum_{0}^{\infty} c_{2k}|\boldsymbol{x}|^{2k} \tag{2}$$

есть целая сферического типа ν.

Доказательство. Ряд (1) абсолютно сходится для любого t, многочлен

$$|\boldsymbol{x}|^{2k}=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^k$$

имеет положительные коэффициенты. Поэтому ряд (2) после раскрытия скобок в каждом его члене есть абсолютно сходящийся для любого $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ степенной ряд по степеням $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, $g_*(\boldsymbol{z})$ — целая функция. Она экспоненциального сферического типа ν, потому что

$$|g_*(\boldsymbol{z})|=|g(|\boldsymbol{z}|)|\leqslant A_\varepsilon e^{(\nu+\varepsilon)\sqrt{\sum_1^n |z_j|^2}}.$$

3.6.2. Теорема. *Пусть* g *есть целая функция экспоненциального типа* ν_j *по* z_j $(j=1, \ldots, n)$ *(или сферического типа* ν*), принадлежащая к* $L_q(R_n)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, *и* $f\in L_p(R_n)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. *Тогда функция*

$$\omega(\boldsymbol{x})=\int g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})f(\boldsymbol{u})\,d\boldsymbol{u}$$

принадлежит к $\mathfrak{M}_{\nu\infty}$ *(соответственно к* $S\mathfrak{M}_{\nu\infty}$*), т. е. есть ограниченная на* $R=R_n$ *целая экспоненциального типа* ν_j *по* z_j *(соответственно сферической степени* ν*).*

Если $g\in L$, $f\in L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, то $\omega\in L_p$ (1.3.3), поэтому $\omega\in\mathfrak{M}_{\nu p}$ $(S\mathfrak{M}_{\nu p})$.

Доказательство. Ограниченность ω на R следует из неравенства

$$|\omega(\boldsymbol{x})|\leqslant\|g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})\|_q\|f(\boldsymbol{u})\|_p=\|g\|_q\|f\|_p. \tag{1}$$

В силу того, что g есть целая функция, имеет место разложение в ряд Тейлора

$$g(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{u})=\sum_{k\geqslant 0}\frac{g^{(k)}(-\boldsymbol{u})}{k!}\boldsymbol{z}^k, \tag{2}$$

абсолютно сходящийся при любом $u \in R$ и любом комплексном $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Имеем

$$\sum_{|k|<N} \left| \frac{g^{(k)}(-u) f(u) z^k}{k!} \right| \leqslant \sum_{k \geqslant 0} \left| \frac{g^{(k)}(-u) f(u) z^k}{k!} \right| = \Phi(u),$$

тогда $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$\int \Phi(u)\, du \leqslant \sum_k \frac{|z^k|}{k!} \|g^k\|_q \|f\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \|g\|_q \|f\|_p \sum_k \frac{|z^k| \nu^k}{k!} = \|g\|_q \|f\|_p e^{\sum_{j=1}^n \nu_j |z_j|}.$$

Это неравенство показывает, что равенство (2) после умножения его на $f(u)$ законно (на основании теоремы Лебега) почленно интегрировать

$$\omega(z) = \int g(z-u) f(u)\, du = \sum_k \frac{c_k}{k!} z^k, \qquad c_k = \int g^{(k)}(-u) f(u)\, du, \tag{3}$$

и при этом имеет место неравенство

$$|\omega(z)| \leqslant \|g\|_q \|f\|_p e^{\sum_{j=1}^n \nu_j |z_j|}.$$

Если g есть не только типа ν по каждой переменной, но и сферического типа ν, то надо еще доказать, что ω также сферического типа ν.

В самом деле, для действительных x, u, y

$$g(x + iy - u) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{g^{(k)}(x-u)}{k!} (iy)^k =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sum_{|k|=l} \frac{g^{(k)}(x-u)}{k!} y^k = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \frac{g_y^{(l)}(x-u)}{l!} |y|^l,$$

где $g_y^{(l)}$ есть производная от g порядка l в направлении y. Поэтому, рассуждая, как при выводе (3), будем иметь

$$\omega(x+iy) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\int g_y^{(l)}(x-u) f(u)\, du}{l!} (i|y|)^l.$$

Учитывая неравенства

$$\left| \int g_y^{(l)}(x-u) f(u)\, du \right| \leqslant \|g_y^{(l)}\|_q \|f\|_p \leqslant \nu^l \|g\|_q \|f\|_p,$$

которые выводятся на основании 3.2.6 (3), получим

$$|\omega(x+iy)| \leqslant \|g\|_q \|f\|_p \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\nu|y|)^l}{l!} = \|g\|_q \|f\|_p e^{\nu|y|}.$$

Мы доказали, что $\omega \in \mathfrak{M}_{\nu\infty}$.

3.6.3. Теорема. *Пусть*

$$\omega(z) = \int k(|z-u|) f(u)\, du, \qquad \int = \int_{R_m}, \tag{1}$$

где

$$k(t) = \left(\frac{\sin\frac{t}{\lambda}}{t}\right)^{\lambda}, \tag{2}$$

λ — натуральное четное число, удовлетворяющее неравенствам

$$(\lambda-\mu)q - m > 0 \tag{3}$$

и

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

$$\int |f(u)(1+|u|)^{-\mu}|^p\, du < \infty \qquad (\mu > 0). \tag{4}$$

Тогда $\omega(z)$ есть целая функция экспоненциального сферического типа 1.

Доказательство. Положим

$$A = \left(\sum_{j=1}^{m} |z_j|^2\right)^{1/2}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|\omega(z)| \leqslant I(z)\, \|f(u)(1+|u|)^{-\mu}\|_{L_p(R_m)}, \tag{5}$$

где

$$I(z) = \left(\int |k(|z-u|)|^q (1+|u|)^{q\mu}\, du\right)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{|u|<1}\right)^{1/q} + \left(\int_{|u|<3A}\right)^{1/q} + \left(\int_{|u|>1,\, 3A}\right)^{1/q} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{6}$$

Заметим, что

$$|z-u|^2 = \left|\sum z_j^2 - 2\sum z_j u_j + \sum u_j^2\right| \geqslant$$
$$\geqslant |u|^2 - 2A|u| - A^2 = (|u|-A)^2 - 2A^2 = \psi(|u|). \tag{7}$$

Функции $\left(\sin\frac{t}{\lambda}\right)^{\lambda}$ и $k(t)$ от одной переменной t целые типа 1, ограниченные на действительной оси, поэтому $\left(\sin\frac{|z|}{\lambda}\right)^{\lambda}$ и $k(|z|)$ —

целые сферического типа 1, ограниченные на R_m (3.6.1). В таком случае, учитывая, что $u \in R_m$ — действительные точки и $z = (x_1 + iy_1, \ldots, x_m + iy_m)$, имеет место (см. (3.6.1) и 3.2.6 (4))

$$k(|z-u|) \ll \exp|y| \leqslant \exp A, \tag{8}$$

$$\left(\sin\frac{|z-u|}{\lambda}\right)^{\lambda} \ll \exp|y| \leqslant \exp A. \tag{9}$$

Поэтому в силу (8)

$$I_1 \ll \exp A\left(\int\limits_{|u|<1} (1+|u|)^{q\mu}\,du\right)^{1/q} \ll \exp A, \tag{10}$$

$$I_2 \ll \exp A\left(\int\limits_{|u|<3A} (1+|u|)^{q\mu}\,du\right)^{1/q} \ll \exp\{(1+\varepsilon)A\}, \tag{11}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, константа во втором неравенстве (11) зависит от ε, а в силу (7) и (9) (пояснения ниже)

$$I_3 \ll \exp A\left(\int\limits_{\rho>1,\,3A} \frac{\rho^{\mu q+m-1}}{\psi(\rho)^{\frac{\lambda q}{2}}}\,d\rho\right)^{1/q} \ll \exp A \qquad (\rho = |u|). \tag{12}$$

Функция

$$\frac{\rho^2}{\psi(\rho)} = \varphi(\rho) \qquad (\rho \geqslant 3A)$$

ограничена, потому что она положительна и ее производная отрицательна. Следовательно, полагая

$$\nu = \frac{1}{2}(\lambda q - \mu q - m + 1)$$

и $\rho = tA$, получим, что интеграл, входящий в (12), с точностью до постоянного множителя не превышает

$$\int\limits_{\rho>3A,\,1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)^{\nu}} = \frac{1}{A^{2\nu-1}} \int\limits_{t>3,\,\frac{1}{A}} \frac{dt}{\psi(t)^{\nu}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{A^{2\nu-1}} \int\limits_{t>3,\,\frac{1}{A}} \frac{dt}{t^{2\nu}} \ll \begin{cases} \int\limits_3^{\infty} t^{-2\nu}\,dt \ll 1 & (A \geqslant 1), \\ \frac{1}{A^{2\nu-1}} A^{2\nu-1} = 1 & (A < 1), \end{cases}$$

т. е. справедливо второе наравенство (12). Из полученных оценок следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует константа c_ε, не зависящая от f, такая, что

$$|\omega(z)| \leqslant c_\varepsilon \|f(u)(1+|u|)^{-\mu}\|_{L_p(R_m)} \exp\{(1+\varepsilon)A\}. \tag{13}$$

Остается доказать, что $\omega(z)$ есть целая функция. Пусть $f_N = f$ для $|u| < N$ и $f_N = 0$ для $|u| > N$ и

$$\omega_N(z) = \int k(|z-u|) f_N(u)\, du.$$

Зададим произвольное число $\Lambda > 0$, и пусть ε_Λ есть множество точек $z = (z_1, \ldots, z_m)$, для которых $|z_j| < \Lambda$. Для таких точек

$$A = \sqrt{\sum_1^m |z_j|^2} \leqslant m\Lambda$$

и в силу (13)

$$|\omega(z) - \omega_N(z)| < c_\varepsilon m\Lambda \| (f - f_N)(1 + |u|)^{-\mu} \|_{L_p(R_m)} \to 0,$$
$$N \to \infty$$

т. е. $\omega_N(z) \to \omega(z)$, $N \to \infty$ равномерно на любом $\mathscr{E}_\Lambda$, и следовательно, $\omega(z)$ — целая (см. (3.1.1)). Утверждение доказано (см. далее 4.2.2).

ГЛАВА 4

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ W, H, B

4.1. Обобщенная производная

Зададим в пространстве $R=R_n$ открытое множество g и обозначим через g_1 его ортогональную проекцию на гиперплоскость $x_1=0$. Пусть на g задана действительная (комплексная) измеримая функция $f(\boldsymbol{x})=f(x_1, y)$. При фиксированном y она есть функция от x_1, определенная на соответствующем открытом одномерном множестве. Если функция f абсолютно непрерывна на любом принадлежащем к этому множеству замкнутом конечном отрезке, то будем говорить, что она при указанном y *локально абсолютно непрерывна* по x_1.

По определению функция f имеет обобщенную производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ (по x_1), если f измерима на g и существует эквивалентная ей (относительно g) функция f_1, локально абсолютно непрерывная почти для всех допустимых y (т. е. $y \in g_1$). *Функция f_1 будет иметь почти всюду на g (в смысле n-мерной меры) обычную частную производную $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$. Любую эквивалентную ей (в смысле n-мерной меры) функцию мы и будем называть обобщенной производной от f на g по x_1 и обозначать через $\frac{\partial f}{\partial x_1}$.*

Если $\varphi(t)$ есть функция от одной переменной t и Ω — открытое множество точек t, то тот факт, что φ имеет на Ω обобщенную производную $\varphi'(t)$, можно выразить следующим образом: существует функция φ_1, эквивалентная φ (относительно Ω), локально абсолютно непрерывная на Ω. Тогда φ_1 имеет, как известно, почти всюду на Ω обычную производную $\varphi_1'(t)$. Любая функция, эквивалентная $\varphi_1'(t)$, и есть по определению обобщенная производная $\varphi'(t)$ на Ω.

Чтобы не было недоразумений, поясним более подробно, почему при указанных условиях обычная частная производная $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ существует почти всюду на g.

Проекция g_1 открытого множества g на подпространство точек $y=(0, x_2, \ldots, x_n)$ есть, очевидно, также открытое множество. Каждой фиксированной точке $y \in g_1$ соответствует одномерное открытое (в одномерном смысле) множество e_y точек вида $(x_1, y) \in g$. Множество g можно рассматривать как теоретико-множественную сумму

$$g = \bigcup_{y \in g_1} e_y.$$

По условию функция $f_1(x_1, y)$ почти для всех $y \in g_1$ абсолютно непрерывна по x_1 на каждом замкнутом отрезке изменения x_1, принадлежащем к e_y. Отсюда следует, что для почти всех точек $y \in g_1$ функция $f_1(x_1, y)$ имеет почти для всех $x_1 \in e_y$ обычную частную производную $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = f_{1x_1}$. Обозначим через g' множество всех точек $x=(x_1, y) \in g$, для которых не существует частная производная f_{1x_1}. Множество g' измеримо, так как оно является дополнительным к множеству тех точек $x \in g$, для которых существует предел отношения

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_1(x_1+h, y) - f_1(x_1, y)}{h} = f_{1x_1}(x_1, y),$$

представляющего собой для каждого h измеримую функцию (f измерима на g по условию!). Надо иметь в виду, что множество точек сходимости последовательности измеримых функций на (измеримом) множестве $\mathscr{E}$ измеримо *).

С другой стороны,

$$g' = \bigcup_{y \in g_1} e'_y,$$

причем почти для всех $y \in g_1$ в смысле $(n-1)$-мерной меры, $\mu e'_y = 0$. Отсюда (по теореме Фубини) g' имеет n-мерную меру $\mu g' = 0$, и, таким образом, функция f_1 имеет почти всюду на g обычную частную производную $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, которую мы назвали обобщенной частной производной f по x_1.

Функция $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ (измеримая на открытом **) множестве g) может в свою очередь иметь обобщенную частную производную по x_1,

*) Пусть $\{F_k\}$ — последовательность измеримых функций, заданных на измеримом множестве $\mathscr{E}$, $e_{nm} = \left\{x\colon |F_k(x) - F_l(x)| < \frac{1}{m}\right\}$ для любых $k, l \geq n$; $n, m = 1, 2, \ldots$ Тогда $A = \bigcap_m \bigcup_n e_{nm}$ есть множество точек сходимости $\{F_k\}$, очевидно, измеримое.

**) В определении $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ можно вместо открытого в R_n множества $g \subset R_n$ взять измеримое множество $\mathscr{E} \subset R_n$, являющееся открытым по переменной x_1. Точнее, можно взять измеримое множество $\mathscr{E} \subset R_n$, проекция которого $\mathscr{E}_1$ на подпространство точек $y=(0, x_2, \ldots, x_n)$ измерима в $(n-1)$-мерном смысле, такое, что

$$\mathscr{E} = \bigcup_{y \in \mathscr{E}_1} e_y,$$

где e_y — открытые одномерные множества точек вида (x_1, y) с изменяющимся числом x_1. В частности, таким является измеримое множество вида $\mathscr{E} = R_1 \times \mathscr{E}_1 \subset R_n$, где $\mathscr{E}_1$ — измеримое в смысле $(n-1)$-мерной меры множество.

т. е. может оказаться, что существует ей эквивалентная (в смысле n-мерной меры) определенная на g функция φ, абсолютно непрерывная по x_1 на любом замкнутом отрезке изменения x_1, почти для всех $y \in g_1$. Обычная производная по x_1 от φ, существующая почти всюду, или ей эквивалентная функция обозначается через $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$. Подобным образом по индукции определяется $\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k} = f_{x_1}^{(k)}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, f_{x_1}^{(0)}=f)$. Нетрудно видеть, что если существует на g обобщенная производная $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$, то всегда можно функции f привести в соответствие ей эквивалентную, определенную на g функцию φ такую, что производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^k}$ существуют в обычном смысле почти всюду на g и при этом $\frac{\partial^i \varphi}{\partial x_1^i}$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$ абсолютно непрерывны по x_1 на любом замкнутом отрезке изменения x_1 для всех y, принадлежащих к одному и тому же множеству $g_1' \subset g_1$, отличному от g_1 на множество меры нуль.

Аналогично определяются обобщенные на g производные $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}$ $(i=2, \ldots, n)$. Смешанные производные второго и высших порядков определяются по индукции. Например, производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ определяется равенством

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Очевидно, тот факт, что функция $f(x)$ от одной переменной имеет на (a, b) обобщенную производную порядка k, сводится к тому, что она (после изменения на множестве меры нуль) имеет обычные производные до порядка $k-1$ включительно абсолютно непрерывные на любом замкнутом отрезке $[c, d] \subset \subset (a, b)$, что влечет за собой еще существование производной $f^{(k)}(x)$ порядка k почти всюду на интервале (a, b).

Мы будем всюду в этой книге иметь дело с обобщенными производными и часто поэтому будем называть их производными без добавления слова «обобщенными».

Хотя данное выше определение обобщенной производной является весьма общим, но уже оно само по себе является достаточно эффективным в применениях при интегрировании по частям. Пусть функция f имеет на g обобщенную производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$. При этом f мы будем считать уже видоизмененной на множестве n-мерной меры нуль, как это требуется определением.

Пусть, кроме того, $\varphi(x)$ есть функция, непрерывная на g вместе со своей производной $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$. Тогда почти для всех $y=(x_2, \ldots, x_n)$, каков бы ни был отрезок $[a, b]\times y$, принадлежащий к g, законно интегрирование по частям

$$\int_a^b f(x_1, y)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1, y)\,dx_1 =$$
$$= f(b, y)\varphi(b, y) - f(a, y)\varphi(a, y) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y)\varphi(x_1, y)\,dx. \quad (1)$$

Часто появляется необходимость это выражение интегрировать по y, но для этого измеримости $f(x) = f(x_1, y)$ на g недостаточно, нужны добавочные условия на f. Такими эффективными условиями могут быть суммируемость или локальная суммируемость f и $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ или только $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ на g.

Понятие обобщенной производной мы находим в исследованиях Беппо Леви [1], который рассматривал обобщенные производные с интегрируемым квадратом на g. В дальнейшем многие математики приходили к этому понятию нередко независимо от своих предшественников.

С. Л. Соболев [1], [2] подошел к определению обобщенной производной с точки зрения идеи введенного им понятия обобщенной функции. Определение Соболева заключается в следующем. *Пусть f и λ — локально суммируемые на открытом множестве g функции. Если для любой бесконечно дифференцируемой финитной в g функции φ выполняется равенство*

$$\int \lambda\varphi\,dx = (-1)^{|s|}\int f\varphi^{(s)}\,dx,$$

то λ есть обобщенная производная $f^{(s)}$ от f.

Если функция f локально суммируема на g вместе со своей производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, понимаемой в смысле первого определения, то для финитной в g бесконечно дифференцируемой функции φ будем иметь (см. (1))

$$\int_g f\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx = \int_{g_1} dy \int f(x, y)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1, y)\,dx_1 =$$
$$= -\int_{g_1} dy\int \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y)\varphi(x_1, y)\,dx_1 = -\int \frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi\,dx,$$

и мы доказали, что из первого определения производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ следует второе. Обратное также верно. Нам удобнее привести доказательство этого утверждения позднее (см. 4.5.2), а пока мы будем исходить из первого определения. Отметим, что оба определения несмешанной обобщенной производной $\frac{\partial^\rho f}{\partial x_1^\rho}$ также совпадают. Но это уже не так для смешанной производной. Из первого определения вытекает второе, но не наоборот, как показывает пример функции $f(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2)$, где $\varphi(x_1)$ и $\psi(x_2)$ — непрерывные нигде не дифференцируемые функции. В смысле С. Л. Соболева $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, а в смысле первого определения производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ не существует.

Совпадение обоих определений $f^{(s)}$ имеет место во всяком случае тогда, когда $f^{(s)} = f^{(s_1, \ldots, s_n)}$, а также

$$f^{(s_1, \ldots, s_{n-1}, 0)}, \ f^{(s_1, \ldots, s_{n-2}, 0, 0)}, \ \ldots, \ f^{(s_1, 0, \ldots, 0)} \text{ и } f$$

локально суммируемы. Это имеет место для функций классов W, H, B, L, которые мы будем изучать в этой книге (см., например, 4.4.6).

Приведем характерную задачу, естественным образом приводящую к понятию обобщенной производной.

Пусть на g задана последовательность непрерывно дифференцируемых функций $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, обладающая таким свойством: какова бы ни была ограниченная область $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset g$

$$\|f_k - f_l\|_{L_p(\Omega)} \to 0 \quad (k, \ l \to \infty), \tag{2}$$

$$\left\|\frac{\partial f_k}{\partial x_1} - \frac{\partial f_l}{\partial x_1}\right\|_{L_p(\Omega)} \to 0 \quad (k, \ l \to \infty). \tag{3}$$

Требуется охарактеризовать локальные свойства функции f, к которой f_k стремится в среднем (локально):

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k - f\|_{L_p(\Omega)} = 0. \tag{4}$$

Эти свойства заключаются в том (см. 4.4.5), что функция f имеет обобщенную производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ на g и f и $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ локально суммируемы на g в p-й степени.

Приведем еще одну задачу, тесно связанную с нашими целями, приводящую к понятию обобщенной производной.

Обозначим через Ω_h множество точек $x \in \Omega$, отстоящих от границы Γ открытого множества Ω на расстоянии, большем чем $h > 0$, и пусть

$$M_\alpha[f] = \sup_h \frac{\|f(x_1 + h, y) - f(x_1, y)\|_{L_p(\Omega_h)}}{|h|^\alpha} < \infty \quad (0 < \alpha \leqslant 1). \tag{5}$$

Пусть еще на Ω задана последовательность непрерывно дифференцируемых функций $f_k(\boldsymbol{x})$, обладающая свойством (5) и такая, что

$$M_\alpha\left[\frac{\partial f_k}{\partial x_1}-\frac{\partial f_l}{\partial x_1}\right]\to 0 \qquad (k,\ l\to\infty). \tag{6}$$

Требуется охарактеризовать свойства функции f, для которой имеет место (4). Эти свойства заключаются в том (см. 4.7), что f имеет на Ω обобщенную производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ и величина $M_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$ конечна.

4.2. Конечные разности и модули непрерывности

Пусть $g\subset R_n$ есть открытое множество и $\boldsymbol{h}=(h_1,\ \ldots,\ h_n)\in R_n$ — произвольный вектор. Обозначим через g_h множество точек $\boldsymbol{x}\in g$ таких, что вместе с $\boldsymbol{x}$ принадлежит к g также любая точка $\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}$, где $0\leqslant t\leqslant 1$, т. е. любая точка отрезка, соединяющего $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$.

Мы также будем употреблять обозначение g_δ, где $\delta>0$, множества точек $\boldsymbol{x}\in g$, отстоящих от границы g на расстоянии, большем чем δ. Множества g_h и g_δ могут быть пустыми. Очевидно, $g_{|h|}\subset g_h$.

Пусть f есть функция, определенная на g. Если $\boldsymbol{x}\in g_h$, то имеет смысл (*первая*) *разность*

$$\Delta_h f=\Delta_h f(x)=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})$$

функции f в точке $\boldsymbol{x}$ с (*векторным*) *шагом $\boldsymbol{h}$.*

По индукции вводится понятие *k-й разности функции f в точке $\boldsymbol{x}$ с шагом $\boldsymbol{h}$*:

$$\Delta_h^k f=\Delta_h^k f(\boldsymbol{x})=\Delta_h\Delta_h^{k-1}f(\boldsymbol{x}) \qquad (\Delta_h^0 f=f,\ \Delta_h^1=\Delta_h,\ k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Она во всяком случае определена на множестве g_{kh}.

Очевидно,

$$\Delta_h^k f(\boldsymbol{x})=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{l+k}C_k^l f(\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{h}) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots). \tag{1}$$

Если s — натуральное число, то, очевидно,

$$\Delta_{sh}f(\boldsymbol{x})=\sum_{l=0}^{s-1}\Delta_h f(\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{h})$$

и (по индукции)

$$\Delta_{sh}^k f(\boldsymbol{x})=\sum_{l_1=0}^{s-1}\ldots\sum_{l_n=0}^{s-1}\Delta_h^k f(\boldsymbol{x}+l_1\boldsymbol{h}+\ldots+l_n\boldsymbol{h}). \tag{2}$$

Модулем непрерывности порядка k функции f в метрике $L_p(g)$ по направлению $\boldsymbol{h}$ мы называем величину

$$\begin{gathered}\omega^k(\delta)=\omega_h^k(f,\ \delta)=\sup_{|t|\leqslant\delta}\|\Delta_{th}^k f(\boldsymbol{x})\|_{L_p(g_{kth})},\qquad |\boldsymbol{h}|=1,\\ \omega(\delta)=\omega_h(f,\ \delta)=\omega_h^1(f,\ \delta).\end{gathered}\tag{3}$$

(Если $\mathscr{E}$ — пустое множество, то мы считаем $\|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E})}=0$.) Для того чтобы имела смысл величина (3), необходимо, чтобы нормы под знаком sup были конечны, что будет, например, если $f\in L_p(g)$. Ниже мы остановимся на некоторых характерных свойствах модулей $\omega^k(\delta)$.

Хорошо известно (см. 1.3.12), что если функция $f\in L_p(g)$ и $1\leqslant p<\infty$, то

$$\lim_{t\to 0}\omega(t)=0.\tag{4}$$

При $p=\infty$ это свойство не имеет, вообще говоря, места. Однако оно выполняется тривиальным образом, если f равномерно непрерывна на g.

Имеют место неравенства

$$0\leqslant\omega(\delta_2)-\omega(\delta_1)\leqslant\omega(\delta_2-\delta_1)\qquad(0<\delta_1<\delta_2).\tag{5}$$

Первое из них очевидно. Второе может быть доказано следующим образом. Если $\delta_1,\ \delta_2\geqslant 0$, то всякое t с $|t|\leqslant\delta_1+\delta_2$ можно представить в виде $t=t_1+t_2$, где t_1 и t_2 одного знака с t и $|t_1|\leqslant\delta_1$, $|t_2|\leqslant\delta_2$.

Поэтому

$$\begin{aligned}\omega(\delta_1+\delta_2)&=\sup_{\substack{|t'|\leqslant\delta_1\\|t''|\leqslant\delta_2}}\|f(\boldsymbol{x}+(t'+t'')\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})\|_{L_p(g_{th})}\leqslant\\ &\leqslant\sup_{\substack{|t'|\leqslant\delta_1\\|t''|\leqslant\delta_2}}\|f(\boldsymbol{x}+(t'+t'')\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}+t''\boldsymbol{h})\|_{L_p(g_{th})}+\\ &\qquad+\sup_{|t''|\leqslant\delta_2}\|f(\boldsymbol{x}+t''\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})\|_{L_p(g_{th})}\leqslant\\ &\leqslant\sup_{|t'|\leqslant\delta_1}\|f(\boldsymbol{x}+t'\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})\|_{L_p(g_{t'h})}+\omega(\delta_2)=\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2).\end{aligned}$$

Заменив в этом неравенстве δ_2, $\delta_1+\delta_2$ соответственно на $\delta_2-\delta_1$, δ_2, получим (5).

Из (4) и (5) следует, что функция $\omega(t)$ (при $1\leqslant p<\infty$ и $p=\infty$, если f равномерно непрерывна на g) непрерывна при любом $t\geqslant 0$.

Из второго неравенства (5) следует еще такое свойство

$$\omega(l\delta)\leqslant l\omega(\delta)\qquad(\delta>0;\ l=1,\ 2,\ \ldots).$$

Оно может быть получено также и притом в более общем виде из равенства (2) ($s=l$):

$$\omega^k(l\delta)\leqslant l^k\omega^k(\delta)\qquad (k,\ l=1,\ 2,\ \ldots). \tag{6}$$

Очевидно, что

$$\omega^k(\delta)\leqslant\omega^k(\delta')\qquad (0<\delta<\delta'). \tag{7}$$

Неравенство (6) обобщается на произвольные, не обязательно целые $l>0$. Для этого подберем натуральное m так, чтобы $m\leqslant l<m+1$; тогда

$$\omega^k(l\delta)\leqslant\omega^k[(m+1)\delta]\leqslant(m+1)^k\omega^k(\delta)\leqslant(l+1)^k\omega^k(\delta) \tag{8}$$
$$(l>0,\ k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Заметим еще, что

$$\sup_{|t|\leqslant\delta}\|\Delta_{th}^{s+k}f(\boldsymbol{x})\|_{L_p(g_{t(s+k)h})}\leqslant\sup_{|t|\leqslant\delta}2^s\|\Delta_{th}^{k}f(\boldsymbol{x})\|_{L_p(g_{tkh})}, \tag{9}$$

и следовательно,

$$\omega^{s+k}(\delta)\leqslant 2^s\omega^k(\delta). \tag{10}$$

Пусть $1\leqslant m\leqslant n$, $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{u}\in(x_1,\ \ldots,\ x_m)\in R_m$, $\boldsymbol{y}=(x_{m+1},\ \ldots,\ x_n)$. Мы будем также обозначать через R_m множество точек $(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ пространства R_n $(R_m\subset R_n)$.

Введем величину

$$\Omega_{R_m}^k(f,\ \delta)_{L_p(g)}=\sup_{\substack{h\in R_m\\ |h|=1}}\omega_h^k(f,\ \delta)_{L_p(g)}, \tag{11}$$

которую мы будем называть *модулем непрерывности порядка k функции f в направлении (подпространства)* $R_m\subset R_n$. Если g — ограниченное множество и d — его диаметр, то легко видеть, что для $\delta>d$ функция $\Omega_{R_m}^k(f,\ \delta)$ есть постоянная.

Пусть теперь функция f имеет любые производные по $\boldsymbol{u}\in R_m$ порядка ρ. Тогда для нее имеет смысл на g производная по направлению любого единичного вектора $\boldsymbol{h}\in R_m$:

$$f_{\boldsymbol{h}}^{(\rho)}=\sum_{|s|=\rho}f^{(s)}\boldsymbol{h}^s \tag{12}$$

$(\boldsymbol{h}=(h_1,\ \ldots,\ h_m,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ |\boldsymbol{h}|=1,$

$$\boldsymbol{h}^s=h_1^{s_1}\ldots h_m^{s_m}=h_1^{s_1}\ldots h_m^{s_m}0^0\ldots 0^0,\ 0^0=1).$$

Положим

$$\Omega_{R_m}(f^{(\rho)},\ \delta)=\sup_{\substack{h\in R_m\\ |h|=1}}\omega_h^k(f_h^{(\rho)},\ \delta). \tag{13}$$

Эту величину мы будем называть *модулем непрерывности производных (всех) порядка* ρ *функции* f.

Так как в силу (8)

$$\omega_h^k(f_h^{(\rho)},\ l\delta)\leqslant(1+l)^k\,\omega_h^k(f_h^{(\rho)},\ \delta),$$

то и верхние грани этих величин по $\boldsymbol{h}\in R_m$, $|\boldsymbol{h}|=1$, остаются в той же связи

$$\Omega_{R_m}^k(f^{(\rho)},\ l\delta)\leqslant(1+l)^k\,\Omega_{R_m}^k(f^{(\rho)},\ \delta). \tag{14}$$

Неравенства (8), (14) показывают, что конечность модулей непрерывности для малых δ влечет за собой конечность их для больших δ.

В силу того, что $f_h^{(\rho)}$ есть конечная линейная комбинация из производных $f^{(s)}$, $|\boldsymbol{s}|=\rho$ (по координатным направлениям) с ограниченными коэффициентами $\boldsymbol{h}^s$, $(|\boldsymbol{h}^s|\leqslant 1)$, не зависящими от $\boldsymbol{x}$, имеет место

$$\Omega_{R_m}^k(f_h^{(\rho)},\ \delta)=\sup_{\substack{|h|=1\\ h\in R_m}}\ \sup_{|t|\leqslant\delta}\left\|\Delta_{th}^k f_h^{(\rho)}(\boldsymbol{x})\right\|_{L_p(g_{th})}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_h\sup_t\sum_{|s|=\rho}{}'\left\|\Delta_{th}^k f^{(s)}(\boldsymbol{x})\right\|_{L_p(g_{th})}=$$

$$=\sup_h\sum_{|s|=\rho}\omega_h^k(f^{(s)},\ \delta)=\sum_{|s|=\rho}\Omega_{R_m}^k(f^{(s)},\ \delta), \tag{15}$$

где суммы $\sum$ распространены на все координатные производные $f^{(s)}$ порядка ρ с $\boldsymbol{s}=(s_1,\ \ldots,\ s_m,\ 0,\ \ldots,\ 0)$.

4.2.1. Если $\mathscr{E}=R_1\times\mathscr{E}'\subset R_n$ $(\boldsymbol{x}=(x_1,\ \boldsymbol{y}),\ x_1\in R_1,\ y\in\mathscr{E}'$, есть цилиндрическое измеримое множество, и f — определенная на $\mathscr{E}$ функция периода 2π по x_1, то в этом случае норма функции f в $L_p^*(\mathscr{E})$ понимается в смысле

$$\|f\|_{L_p^*(\mathscr{E})}=\left(\int_{\mathscr{E}_*}|f|^p\,dx\right)^{1/p},$$

где $\mathscr{E}_*=\{(0,\ 2\pi)\times\mathscr{E}'\}$. Поэтому в этом случае

$$\omega_{x_1}^{k}{}_*(t)=\sup_{|h|\leqslant t}\left\|\Delta_{x_1h}^k f(\boldsymbol{x})\right\|_{L_p(\mathscr{E}_*)},$$

где h есть приращение x_1 (число).

Свойства модулей непрерывности $\omega_*^k(t)$ аналогичны свойствам $\omega^k(t)$.

4.2.2. Рост функции с ограниченной разностью. Пусть $\mathscr{E}=R_m\times\mathscr{E}'$ — цилиндрическое множество точек $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{u}=(x_1,\ \ldots,\ x_m)$, $\boldsymbol{y}=(x_{m+1},\ \ldots,\ x_n)$, $\boldsymbol{u}\in R_m$, $\boldsymbol{y}\in\mathscr{E}'$. Будем для краткости писать (в этом пункте)

$$\|\cdot\|_\Lambda=\|\cdot\|_{L_p(\Lambda\times\mathscr{E}')},\quad \|\cdot\|=\|\cdot\|_{R_m}=\|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E})}.$$

Зададим натуральное k и положительное число $\delta > 0$.

Пусть на $\mathscr{E}$ задана функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\|f(x)\|_{\{|u|<\delta(k+m)\}} < A, \tag{1}$$

$$\left\|\Delta_h^k f(x)\right\| < B \tag{2}$$

для любых $h \in R_m$, $|h| = \delta$.

Положим

$$\sigma_N = \{N < |u| < N+1,\ y \in \mathscr{E}'\}. \tag{3}$$

Докажем существование константы $c = c_{\delta k}$, для которой выполняется неравенство

$$\|f\|_{\delta_N} < cN^{\frac{m-1}{p}}(A + (A+B)N^k), \quad N = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Заметим, что для $\varepsilon > 0$ из (4) следует

$$\frac{\|f\|_{\sigma_N}^p}{N^{m+(k+\varepsilon)p}} < \frac{c_1}{N^{1+\varepsilon_1}},$$

где c_1 не зависит от $N = 1, 2, \ldots$ и $\varepsilon_1 > 0$ зависит от ε, откуда при $\varepsilon > 0$, приняв во внимание (1), получим неравенство

$$\left\|\frac{f(x)}{\left(1 + |u|^{\frac{m}{p}+k+\varepsilon}\right)}\right\|_{L_p(\mathscr{E})} < \infty, \tag{5}$$

в котором нельзя считать $\varepsilon = 0$, как это показывает пример функции от одной переменной x^k $(k = 1, 2, \ldots)$.

При доказательстве для простоты будем считать $\delta = 1$.

Зададим произвольный единичный вектор $u' \in R_m$ и определим в R_m $(m-1)$-мерный куб, ортогональный к u' с центром в нулевой точке и имеющий ребра единичной длины. На этом кубе как на основании и векторе u' как на высоте построим единичный куб $\omega = \omega_{u'} \in R_m$.

Зададим еще натуральное число N, и пусть $\omega_N = \omega_{Nu'}$ обозначает единичный куб, состоящий из точек вида $Nu' + u$, где u пробегает ω.

Заметим, что для локально суммируемой в p-й степени (при $p = \infty$ локально ограниченной) функции $\psi(x)$ имеет место

$$\psi(Nu' + u, y) = \psi(u, y) + \sum_{j=0}^{N-1} \Delta\psi(ju' + u, y),$$

$$\Delta\psi(ju' + u, y) = \psi((j+1)u' + u, y) - \psi(ju' + u, y),$$

откуда

$$\|\psi\|_{\omega_N} \leqslant \|\psi\|_{\omega} + \sum_{j=0}^{N-1} \|\Delta\psi\|_{\omega_j} \tag{6}$$

Докажем неравенство

$$\left\|\Delta_{u'}^{k-s} f\right\|_{\omega_{Nu'}} < c(A + (A+B)N^s) \tag{7}$$

$$(c = c_{k,s};\quad N = 0, 1, \ldots;\quad s = 0, 1, \ldots, k).$$

При $s = 0$ оно непосредственно следует из (2) $(\delta = 1)$. Пусть (7) верно при s, докажем его верность при $s+1$. Будем считать

$$\psi(x) = \Delta_{u'}^{k-s-1} f(x).$$

Тогда

$$\|\psi\|_\omega \leqslant \left\| \sum_{l=0}^{k-s-1} (-1)^{l+k-s-1} C_{k-s-1}^l f(u+l'x, y) \right\|_\omega \leqslant A \sum_{l=0}^{k-s-1} C_{k-s-1}^l = 2^{k-s-1} A,$$

$$\|\Delta_{u'}\psi\|_{\omega_j} \leqslant \|\Delta_{u'}^{k-s} f\|_{\omega_j} < c\,(A+(A+B)\,j^s).$$

Поэтому на основании (6)

$$\|\Delta_{u'}^{k-s-1} f\|_{\omega_N} \leqslant 2^{k-s-1} A + c \sum_{j=0}^{N-1} (A+(A+B)\,j^s) \leqslant c_1 (A+(A+B)\,N^{s+1})$$

Мы доказали (7). Полагая в (7) $s=k$, получим

$$\|f\|_{\omega_{Nu'}} \leqslant c\,(A+(A+B)\,N^k). \tag{8}$$

Из (8) и (3) следует существование константы c_2 такой, что

$$\|f\|_{\sigma_N}^p \leqslant c_2 N^{m-1} (A+(A+B)\,N^k)^p \qquad (N=1,\ 2,\ \ldots)$$

или (4). Дело в том, что область σ_N может быть покрыта кубами вида $\omega_{Nsu'}$, где $s=N-1$, N, $N+1$, количество которых имеет порядок N^{m-1}.

4.3. Классы W, H, B

Начнем с широко применяемого в этой книге определения понятия вложения.

Если E и E' — два нормированных пространства, $E \subset E'$, и при этом существует не зависящая от x константа c так, что

$$\|x\|_{E'} \leqslant c\,\|x\|_E, \tag{1}$$

где $\|\cdot\|_{E'}$, $\|\cdot\|_E$ — нормы соответственно в смысле E' и E, то мы будем говорить, что имеет место *вложение* $E \to E'$. Если $E \to E'$ и $E' \to E$, то будем писать $E \rightleftarrows E'$.

Если элементы одного и того же линейного множества нормированы в смысле разных метрик E и E_1 и $E \rightleftarrows E_1$, то мы часто будем писать: $E = E_1$ и даже $\|x\|_E = \|x\|_{E_1}$, добавляя в тех случаях, когда могут быть недоразумения, что это равенство имеет место с точностью до эквивалентности.

Пусть R_n рассматривается как прямое произведение $R_n = R_m \times R_{n-m}$ координатных подпространств R_m и R_{n-m}, $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда произвольную точку $x \in R_n$ можно записать в виде $x = (u, y)$, где $u \in R_m$, $y \in R_{n-m}$. В частности, $x = u$ при $m = n$. Пусть далее $g \subset R_n$ — открытое множество и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В этом параграфе определяются классы

$$W_{up}^l = W_{up}^l(g) \qquad (l = 0,\ 1,\ \ldots;\quad W_{up}^0(g) = L_p(g)),$$

$$H_{up}^r = H_{up}^r(g) \qquad (r > 0),$$

$$B_{up\theta}^r = B_{up\theta}^r(g) \qquad \left(r > 0,\ 1 \leqslant \theta < \infty;\quad B_{upp}^r = B_{up}^r\right).$$

При $m=n$ в этих обозначениях букву u будем опускать и тогда получим: W_p^l, H_p^r, $B_{p\theta}^r$, B_p^r $(\theta=p)$. В другом важном случае, когда $R_m=R_{x_j}$ $(j=1, \ldots, m)$, будем писать $W_{x_jp}^l$, $H_{x_jp}^r$, $B_{x_jp\theta}^r$, $B_{x_jp}^r$.

Эти классы мы будем называть *изотропными по направлениям* R_m, потому что их дифференциальные свойства по любым направлениям R_m одинаковы, или просто *изотропными*, если $m=n$. Для целого вектора $\boldsymbol{l}=(l_1, \ldots, l_m)\geqslant \boldsymbol{0}$ $(l_j\geqslant 0)$ и вектора $\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_m)$, где $1\leqslant p_j\leqslant\infty$, будет еще определен класс (при разных l_j или p_j *анизотропный*)

$$W_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{l}}(g)=\bigcap_{j=1}^{n} W_{x_jp_j}^{l_j}(g) \qquad \left(W_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{l}}=W_p^l \text{ при } \boldsymbol{p}=(p, \ldots, p)\right)$$

как пересечение классов $W_{x_jp_j}^{l_j}(g)$. Аналогично определяются классы

$$H_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{r}}(g)=\bigcap_{j=1}^{n} H_{x_jp_j}^{r_j}(g), \quad B_{\boldsymbol{p}\theta}^{\boldsymbol{r}}(g)=\bigcap_{j=1}^{n} B_{x_jp_j\theta}^{r_j}(g),$$

где $\boldsymbol{r}=(r_1, \ldots, r_n)>\boldsymbol{0}$ $\left(H_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{r}}=H_p^r,\ B_{\boldsymbol{p}\theta}^{\boldsymbol{r}}=B_{p\theta}^r \text{ при } \boldsymbol{p}=(p, \ldots, p)\right)$.

Классы (n-мерные) $W_p^l(g)$ $(l=0, 1, \ldots)$ называют *классами Соболева* по имени С. Л. Соболева *), изучившего их основные свойства и впервые получившего для них основные теоремы вложения применительно к областям g, звездным относительно некоторого шара, и к конечным суммам таких областей. Эти классы состоят из функций, интегрируемых в p-й степени на g вместе со своими частными производными (обобщенными) порядка l.

Классы (n-мерные) $H_p^r(g)$, $H_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{r}}(g)$ определены для любых $r>0$ или $r_j>0$. Они состоят из функций, принадлежащих к $L_p(g)$ и имеющих на g частные производные определенных порядков, удовлетворяющих в метрике L_p условию Гёльдера (Липшица при $p\to\infty$) или (при целых r, r_j) обобщенному такому условию (условию Зигмунда), в котором первая разность заменяется на разность более высокого порядка.

H-классы во всей полноте определены в работах С. М. Никольского **), получившего для них теоремы вложения. Оказалось, что эти теоремы образуют замкнутую систему и, в частности, теоремы вложения разных измерений (см. далее) полностью обращаются.

---

*) С. Л. Соболев [3], [4]. Анизотропные соболевские классы $W_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{l}}$ см. С. М. Никольский [10].

**) С. М. Никольский [3], [5], [10].

Классы $B^r_{p\theta}$, $B^{\mathbf{r}}_{p\theta}$ во всей полноте определены О. В. Бесовым *), получившим для них замкнутую систему теорем вложения. Теорема вложения разных измерений для этих классов тоже обращаются.

В дальнейшем для классов H и B будут даны эквивалентные определения в терминах наилучших приближений функциями экспоненциального типа. Применительно к классам B они будут более широкими, охватывающими случай $\theta=\infty$. Мы увидим, что естественно считать, что

$$B^{\mathbf{r}}_{up\infty}=H^{\mathbf{r}}_{up}.$$

В дальнейшем будет показано (см. 9.3), что для достаточно общих областей $(\theta=p)$ **)

$$B^l_{up}\to W^l_{up}\quad(1\leqslant p\leqslant 2), \tag{2}$$

$$W^l_{up}\to B^l_{up}\quad(2\leqslant p\leqslant\infty,\ B^l_{u\infty}=H^l_{u\infty})\quad(l=1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

В частности, таким образом,

$$B^l_{u2}=W^l_{u2}\qquad(l=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Равенство (4) указывает на определенную связь между классами B и W, проявляющуюся при $p=2$. Но имеется и другая связь, проявляющаяся уже при любом p. Она вытекает из свойств следов функций указанных классов (см. 9.1).

Исторически наличие этих связей дало повод называть ***) классы, которые обозначаются здесь через B^r_p, $B^{\mathbf{r}}_p$ $(\theta=p)$, в случаях дробных (не целых), r, $\mathbf{r}$ соответственно классами W^r_p, $W^{\mathbf{r}}_p$, считая, по-видимому, что именно эти классы являются естественными продолжениями соболевских (с целыми l, $\mathbf{l}$) классов W^l_p, $W^{\mathbf{l}}_p$. Дело, конечно, здесь не в обозначениях, но теперь уже, когда все основные вопросы о взаимоотношениях указанных классов выяснены до конца, ясно, что естественными (если угодно, истинными) продолжениями соболевских классов в n-мерном случае являются другие так называемые лиувиллевские классы, построенные на основе непосредственного обобщения понятия дробной производной в смысле Лиувилля (или Вейля в периодическом случае). Мы говорим об n-мерном случае потому, что в одномерном случае всегда так считалось — проблема следов там не возникала.

---

*) О. В. Бесов [2], [3]. Теорема вложений для классов $B^{\mathbf{r}}_{p\theta}$ см. В. П. Ильин и В. А. Солонников [1], [2].

**) О. В. Бесов [3], [5].

***) Л. Н. Слободецкий [1].

Итак, мы будем исходить из следующих обозначений. Имеются соболевские классы W_p^l, определенные для целых $l=0, 1, \ldots$, они «погружены» в дробные лиувиллевские классы, обозначаемые через L_p^l (l — действительное число); таким образом, $W_p^l = L_p^l$ ($l=0, 1, \ldots$). Мы увидим, что классы L_p^r объединены тем, что принадлежащие к ним функции имеют единое интегральное представление (через свертки ядер Бесселя — Макдональда с функциями $f \in L_p$, см. 9.1). Мы увидим также, что классы L_p^r образуют замкнутую систему по отношению к теоремам вложения разных метрик. Замкнутость проявляется в том, что теоремы вложения разных метрик для классов L_p^r выражаются полностью в терминах этих классов и притом эти теоремы, обладают свойством транзитивности (см. далее 7.1). Однако классы L_p^r при $p \neq 2$ не образуют замкнутой системы по отношению к теоремам вложения разных измерений, и здесь нет различия между целыми и не целыми r.

Точные теоремы вложения разных измерений для классов L_p^r при $p \neq 2$ уже не выражаются в терминах этих классов. Чтобы выразить их, появляется необходимость в привлечении классов B_p^r. Однако исключение составляет случай $p=2$, изученный в работахАроншайна [1] и Л. Н. Слободецкого*). Теоремы вложения разных метрик для классов B_2^r (в обозначении Л. Н. Слободецкого W_2^r), где не меняется $p=2$, замкнуты в себе. Сами по себе классы B_p^r образуют замкнутую систему по отношению к теоремам вложения разных метрик и измерений (и некоторым другим) и имеют единое интегральное представление через ядра Макдональда (см. 8.9.1), но в то же время эти классы играют служебную роль в задаче о следах функций классов L_p^r (или W_p^l при $r=l$ натуральном), которая решается теоремами вложения разных измерений. В этом заключается связь между классами L и B; другая связь, как было отмечено выше, заключается в том, что $L_2^l = B_2^l$ ($l=0, 1, \ldots$). Подобные взаимоотношения имеют место и для соответствующих анизотропных классов.

После сказанного было бы целесообразнее либо считать, что W_p^r для дробных r обозначает лиувиллевский класс, и вовсе не употреблять знак L_p^r, либо оставить только обозначение L_p^r для всех r, выбросив специальное обозначение W_p^l для соболевских классов. Но я этого не сделал в этой книге, потому что боюсь уподобиться лицу, которое увидело целесообразность переимено-

*) Л. Н. Слободецкий [1], [2], см. еще В. М. Бабич и Л. Н. Слободецкий [1].

вания улицы, переименовало ее, но не спросило мнения об этом жителей, ее населяющих.

Мы увидим (см. 6.1), что при любых $\varepsilon > 0$ имеют место вложения

$$H_{up}^{r+\varepsilon} \to B_{up\theta}^{r} \to H_{up}^{r} \qquad (r > 0,\ 1 \leqslant \theta \leqslant \infty), \tag{5}$$

$$H_{up}^{l+\varepsilon} \to W_{up}^{l} \to H_{up}^{l} \qquad (l = 1;\ 2,\ \ldots). \tag{6}$$

Указанные классы являются линейными нормированными пространствами. Это будет непосредственно видно из их определений. Как будет видно в дальнейшем, они являются полными, следовательно, банаховыми пространствами (см. 4.7).

Мы увидим, что норма в смысле W, H, B слагается из двух чисел

$$\|f\|_W = \|f\|_{L_p} + \|f\|_w,\quad \|f\|_H = \|f\|_{L_p} + \|f\|_h,\ \ldots, \tag{7}$$

где второе слагаемое (которое мы будем называть полунормой) характеризует чисто дифференциальные свойства f. Полунорму можно считать нормой в соответствующем пространстве w, h, b, где не различаются функции, отличные друг от друга на многочлены определенных степеней (относительно $x_1, \ldots, x_m$).

В дальнейшем (см. 8.9.2, 9.2) указанные классы будут определены в случае $g = R_n$ и для нулевых и отрицательных значений r, но они вообще состоят из обобщенных функций (регулярных в смысле L_p).

4.3.1. Классы W. Пусть $g \subset R_n$ — открытое множество, l — целое неотрицательное число, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{u} = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_m) \in R_m$, $\boldsymbol{y} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$; через R_m будем обозначать также подпространство точек вида $(\boldsymbol{u}, \mathbf{0})$.

По определению $f \in W_{up}^{l}(g)$ $(W_{up}^{l}(g) = W_{p}^{l}(g)$ *) при $m = n$, $W_{up}^{0}(g) = L_p(g))$, *если конечна норма*

$$\|f\|_{W_{up}^{l}(g)} = \|f\|_{L_p(g)} + \|f\|_{w_{up}^{l}(g)} \qquad (l = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

$$\|f\|_{W_{up}^{0}(g)} = \|f\|_{L_p(g)},$$

$$\|f\|_{w_{up}^{l}(g)} = \sum_{|s| = l} \|f^{(s)}\|_{L_p(g)}$$

$$\left(\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_m,\ 0, \ldots, 0),\quad |\boldsymbol{s}| = \sum_{1}^{m} s_j\right), \tag{2}$$

где, таким образом, сумма распространена на все производные (обобщенные) смешанные и не смешанные порядка l по $\boldsymbol{u}$. Тем самым предполагается, что у f существуют обобщенные производ-

*) С. Л. Соболев [3], [4].

водные по u порядков меньших l, но а priori не предполагается, что они принадлежат к $L_p(g)$. Но мы увидим, что они во всяком случае локально суммируемы на g, кроме того, они, в том числе и производные порядка l, не зависят от порядка, в котором производится дифференцирование (см. 4.5.1).

Можно рассматривать пространство $w^l_{up}(g)$ (при $m=n$ $w^l_p(g)$) функций f, для которых конечна полунорма (2), т. е. предполагать, что $w^l_{up}(g)$ состоит из измеримых функций f, быть может, не принадлежащих к $L_p(g)$, но таких, что для них имеют смысл принадлежащие к $L_p(g)$ обобщенные производные на g порядка l. Очевидно, $w^l_{up}(g)$ есть линейное множество. Оно будет нормированным пространством, если считать, что две функции f_1, $f_2 \in w^l_{up}(g)$, отличающиеся на многочлен степени $l-1$, определяют один и тот же элемент пространства $w^l_p(g)$; иначе говоря, нулевым элементом в $w^l_p(g)$ является произвольный многочлен

$$P_{l-1}(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{k}| \leqslant l-1} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}, \qquad \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m;\ 0, \ldots, 0),$$

степени $l-1$ с коэффициентами $a_{\boldsymbol{k}} = a_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{y})$, зависящими от $\boldsymbol{y} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

Норма (1) эквивалентна следующей норме:

$$\|f\|_{W^l_{up}(g)} = \left(\int_g \left(|f|^p + \sum_{|\boldsymbol{s}|=l} |f^{(\boldsymbol{s})}|^p\right) dx\right)^{1/p}, \tag{3}$$
$$\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_m, 0, \ldots, 0).$$

Преимущество этой последней заключается в том, что при $p=2$ она гильбертова. Скалярное произведение, порождающее при $p=2$ эту норму, имеет вид

$$(f, \varphi) = \int_g \left(f\varphi + \sum_{|\boldsymbol{s}|=l} f^{(\boldsymbol{s})}\varphi^{(\boldsymbol{s})}\right) d\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

Можно говорить также о классах $W^l_{x_j p}(g)$ функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{W^l_{x_j p}} = \|f\|_{L_p(g)} + \left\|\frac{\partial^l f}{\partial x_j^l}\right\|_{L_p(g)} \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

и классах *)

$$W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{p}}(g) = \bigcap_{j=1}^{n} W^{r_j}_{x_j p_j}(g) \left(W^{\boldsymbol{r}}_{up} = W^{\boldsymbol{r}}_{up} \quad \text{при } p = p_1 = \ldots = p_n\right),$$
$$\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) > 0, \ \boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n), \qquad 1 \leqslant p_j \leqslant \infty, \tag{6}$$

*) С. М. Никольский [10].

с нормой

$$\|f\|_{W^r_{up}(g)} = \sum_1^m \left(\|f\|_{L_{p_j}(g)} + \left\| \frac{\partial^{r_j} f}{\partial x_j^{r_j}} \right\|_{L_{p_j}(g)} \right). \tag{7}$$

Введем еще другой класс $'W^l_{up}$: функция $f \in {'W^l_{up}}(g)$, если для нее имеет смысл норма

$$\|f\|_{'W^l_{up}(g)} = \|f\|_{L_p(g)} + \sup_{u \in R_m} \|f^l_u\|_{L_p(g)}, \tag{8}$$

где

$$f^\rho_u = \sum_{|s| = \rho} f^{(s)} u^s \quad \left(u^s = \left(u_1^{s_1} \ldots u_m^{s_m}\right),\ |u| = 1\right), \tag{9}$$

производная от f порядка ρ по направлению u.

В дальнейшем будет показано (см. 9.2), что

$$W_p^{l, \ldots, l}(R_n) \to W_p^l(R_n).$$

Если область g такова, что для нее имеет место теорема о продолжении (см. замечания в конце книги к 4.3.6)

$$W_p^{l, \ldots, l}(g) \to W_p^{l, \ldots, l}(R_n),$$

тогда

$${'W^l_p}(g) \to W_p^{l, \ldots, l}(g) \to W_p^{l, \ldots, l}(R_n) \to W^l_p(R_n) \to W^l_p(g),$$

где первое вложение объясняется тем, что производная $f^l_{x_j}$ есть в то же время производная по направлению x_j. Обратное вложение

$$W^l_p(g) \to {'W^l_p}(g),$$

очевидно, также верно, следовательно, при наличии теоремы о продолжении

$$W^l_p(g) \rightleftarrows {'W^l_p}(g).$$

Как будет видно из дальнейшего, для многих достаточно «хороших» множеств g из того, что $f \in W^\rho_{up}(g)$, автоматически следует, что все частные производные от f по u до порядка $\rho - 1$ включительно принадлежат к $L_p(g)$. Однако для произвольного открытого множества g это вообще неверно.

4.3.2. Пример. Функция $f(x)$ от одной переменной x задана на множестве $g = \sum_1^\infty \sigma_k$, представляющем собой теоретико-множественную сумму интервалов $\sigma_k = (a_k < x < b_k)$ длины $\delta_k = k^{-2}$.

Пусть

$$f(x) = \frac{(x-a_k)}{\delta_k^\alpha} \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Тогда, если $\frac{1}{2p} \leqslant \alpha < 1$, то

$$\|f\|_{L_p(g)} = \left(\sum_1^\infty \int_{\sigma_k} \left(\frac{x-a_k}{\delta_k^\alpha}\right)^p dx\right)^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{(p+1)^{1/p}} \left(\sum_1^\infty \delta_k^{p(1-\alpha)+1}\right)^{1/p} = \frac{1}{(p+1)^{1/p}} \left(\sum_1^\infty \frac{1}{k^{2[p(1-\alpha)+1]}}\right)^{1/p} < \infty,$$

$$\|f^{(l)}\|_{L_p(g)} = 0 \quad \text{при} \quad l \geqslant 2,$$

$$\|f'\|_{L_p(g)} = \left(\sum_1^\infty \int_{\sigma_k} \left|\frac{1}{\delta_k^\alpha}\right|^p dx\right)^{1/p} = \sum_1^\infty \frac{1}{k^{2(1-\alpha p)}} = +\infty.$$

При этом условие $\delta_k = k^{-2}$ показывает, что множество g может быть ограниченным.

Таким образом, $f \in W_p^{(l)}(g)$ $(l \geqslant 2)$, но норма ее первой производной в метрике $L_p(g)$ равна $+\infty$.

4.3.3. **Классы H.** Обозначения, введенные в начале 4.3.1, сохраняются в силе. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r > 0$ и числа k, ρ целые неотрицательные, удовлетворяющие неравенствам $k > r - \rho > 0$. Такие пары (k, ρ) мы будем называть *допустимыми*.

По определению функция $f \in H_{up}^r(g)$ *), *если она принадлежит к $L_p(g)$ и для нее имеют смысл производные $f^{(s)}$ порядка $s = (s_1, \ldots, s_m, 0, \ldots, 0)$ с $|s| = \sum_1^m s_j = \rho$ и для них выполняются неравенства*

$$\|\Delta_h^k f^{(s)}(x)\|_{L_p(g_{kh})} \leqslant |M| \, h|^{r-\rho}, \tag{1}$$

где M не зависит от $h \in R_m$, или эквивалентные им неравенства

$$\Omega^k(f^{(s)}, \delta) = \sup_{\substack{h \in R_m \\ |h| = 1}} \omega_h^k(f^{(s)}, \delta) \leqslant M\delta^{r-\rho}. \tag{1'}$$

При этом полагаем

$$\|f\|_{H_{up}^r(g)} = \|f\|_{L_p(g)} + \|f\|_{h_{up}^r(g)}, \tag{2}$$

где полунорма

$$\|f\|_{h_{up}^r(g)} = M_f = \inf M \tag{3}$$

*) При $p = \infty$ здесь имеется в виду, что функция f эквивалентна некоторой функции, обозначаемой снова через f, для которой выполнено (1).

есть нижняя грань всех M, для которых для всех $h \in R_m$, $|h| = 1$ и любых указанных s выполняется неравенство (1).

Это определение на самом деле зависит еще от допустимой пары (k, ρ), но будет доказано (5.5.3), что нормы (2) (но вообще не (3)) для измеримого множества $g = R_m \times g'$ и разных допустимых пар попарно эквивалентны, а для других множеств g эквивалентность будет зависеть от возможности продолжения функций за пределы g на R_n с сохранением соответствующих норм (см. замечания в конце книги к 4.3.6).

Пусть $r = \bar{r} + \alpha$, где $\bar{r}$ — целое и $0 < \alpha \leqslant 1$. Если $\alpha < 1$, то, выбрав в качестве допустимой пары числа $\rho = \bar{r}$, $k = 1$, получим частный вид неравенства (1)

$$\|\Delta_h f^{(\bar{r})}(x)\|_{L_p(g_h)} \leqslant M |h|^\alpha \qquad (0 < \alpha < 1). \tag{4}$$

Если же $\alpha = 1$, то эта пара не годится, но можно взять в качестве допустимой пару $\rho = \bar{r}$, $k = 2$, и тогда неравенство (1) будет иметь вид

$$\|\Delta_h^2 f^{(r)}(x)\|_{L_p(g_{2h})} \leqslant M |h|. \tag{5}$$

Обычно пользуются определениями*) (4) и (5) или просто одним определением

$$\|\Delta_h^2 f^{(\bar{r})}(x)\|_{L_p(g_{2h})} \leqslant M |h|^\alpha, \qquad (0 < \alpha \leqslant 1), \tag{6}$$

годным для любых рассматриваемых α.

Возможно, видоизменение этих определений, заключающееся в том, что в качестве полунормы M_f берется нижняя грань таких M, для которых (1) выполняется для всех $h \in R_m$, удовлетворяющих неравенству $|h| \leqslant \eta$, где η — заданное положительное число. Так видоизмененная норма также, как мы увидим, эквивалентна вышеопределенным нормам во всяком случае для областей вида $g = R_m \times g'$.

Наконец, возможно еще одно определение: функция $f \in H_{up}^r(g)$, если для нее имеют смысл производные f_h^ρ порядка ρ по любому направлению $h \in R_m$ и

$$\|\Delta_h^k f_h^\rho\|_{L_p(g_{k|h|})} \leqslant M |h|^{r-\rho}, \tag{7}$$

где (k, ρ) — допустимая пара и M не зависит от $h \in R_m$. Это неравенство эквивалентно следующему:

$$\Omega^k(f^\rho;\ \delta) = \sup_{|h|=1} \sup_{|t| \leqslant \delta} \|\Delta_{th}^k f_h^\rho\|_{L_p(g_{kh})} \leqslant M\delta^{r-\rho}. \tag{8}$$

Норма f определяется аналогично (2).

---

*) С. М. Никольский [5].

Если R_m $(m=1)$ есть координатная ось x_j, то соответствующий класс $H^r_{up}(g)$ мы будем обозначать через $H^r_{x_jp}(g)$ $(j=1, \ldots, m)$ и норму через

$$\|f\|_{H^r_{x_jp}(g)}=\|f\|_{L_p(g)}+M_{x_jf}, \tag{9}$$

$$M_{x_jf}=\|f\|_{h^r_{x_jp}(g)}. \tag{10}$$

Наконец, если $\boldsymbol{r}=(r_1, \ldots, r_m)$, $\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_m)$ $(r_j>0$, $1\leqslant p_j\leqslant\infty;$ $j=1, \ldots, m\leqslant n)$, то положим *)

$$H^{\boldsymbol{r}}_{u\boldsymbol{p}}(g)=\bigcap_{j=1}^{m} H^{r_j}_{x_jp_j}(g) \quad \left(H^{\boldsymbol{r}}_{up}=H^{\boldsymbol{r}}_{up} \text{ при } p=p_1=\ldots=p_m\right) \tag{11}$$

с нормой

$$\|f\|_{H^{\boldsymbol{r}}_{u\boldsymbol{p}}(g)}=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\|f\|_{L_{p_j}(g)}+\|f\|_{h^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p}}(g)}, \tag{12}$$

$$\|f\|_{h^{\boldsymbol{r}}_{u\boldsymbol{p}}(g)}=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\|f\|_{h^{r_j}_{x_jp_j}(g)}. \tag{13}$$

В (13) можно заменить $\max\limits_j$ на $\sum\limits_j$, получив эквивалентную норму.

4.3.4. Классы B. Сохраним обозначения, введенные в начале 4.3.1, и введем еще параметр θ, где $1\leqslant\theta<\infty$. Пусть $r>0$ и числа k, ρ (образующие допустимую пару) целые неотрицательные, удовлетворяющие неравенствам $k>r-\rho>0$.

По определению функция f принадлежит к классу $B^r_{up\theta}(g)$ **) (*при $m=n$ просто $B^r_{p\theta}(g)$*), *если $f\in L_p(g)$, существуют обобщенные частные производные по $\boldsymbol{u}\in R_m$ от f порядков $\boldsymbol{s}=(s_1, \ldots, s_m, 0, \ldots, 0)$* $(|\boldsymbol{s}|\leqslant\rho)$ и конечна одна из следующих полунорм:

$$^1\|f\|_{b^r_{up\theta}(g)}=\sum_{|\boldsymbol{s}|=\rho}\left(\int_0^\infty t^{-1-\theta(r-\rho)}\,\Omega^k_{R_m}(f^{(\boldsymbol{s})}, t)^\theta_{L_p(g)}\,dt\right)^{1/\theta}, \tag{1}$$

$$^2\|f\|_{b^r_{up\theta}(g)}=\left(\int_0^\infty t^{-1-\theta(r-\rho)}\,\Omega^k_{R_m}(f^\rho, t)^\theta_{L_p(g)}\,dt\right)^{1/\theta}, \tag{2}$$

$$^3\|f\|_{b^r_{up\theta}(g)}=\sum_{|\boldsymbol{s}|=\rho}\left(\int_{R_m}|\boldsymbol{u}|^{-m-\theta(r-\rho)}\,\|\Delta^k_{\boldsymbol{u}}f^{(\boldsymbol{s})}(\boldsymbol{x})\|^\theta_{L_p(g_{ku})}\,d\boldsymbol{u}\right)^{1/\theta}, \tag{3}$$

$$^4\|f\|_{b^r_{up\theta}(g)}=\left(\int_{R_m}|\boldsymbol{u}|^{-m-\theta(r-\rho)}\,\|\Delta^k_{\boldsymbol{u}}f^\rho_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})\|^\theta_{L_p(g_{ku})}\,d\boldsymbol{u}\right). \tag{4}$$

---

*) С. М. Никольский [10].

**) См. сноски на стр. 160.

(см. 4.2 (12), (13)). При этом полагаем

$$^{j}\|f\|_{B^{r}_{up\theta}(g)}=\|f\|_{L_p(g)}+{}^{j}\|f\|_{b^{r}_{up\theta}(g)}\qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4).\tag{5}$$

Все четыре приведенные полунормы (1)—(4) зависят еще от допустимых пар k, ρ; кроме того, их можно видоизменить, взяв написанные там интегралы по ограниченным областям (соответственно по $0\leqslant t\leqslant\eta$ или $|u|\leqslant\eta$), и все же определенные при помощи них нормы оказываются эквивалентными во всяком случае для областей вида $g=R_m\times g'\subset R_n$ (см. далее 5.6) и, следовательно, для областей g, с которых функции продолжимы на R_n с сохранением указанных норм.

Часто эти нормы задаются в следующей ситуации *). Для данного $r>0$ определяется целое $\bar r$ такое, что $r=\bar r+\alpha$ и $0<\alpha\leqslant 1$. Если $\alpha<1$, то достаточно взять допустимую пару $\rho=\bar r$, $k=1$, если же $\alpha=1$, то $\rho=\bar r$, $k=2$ или же, чтобы объединить эти два случая, можно взять $\rho=\bar r$, $k=2$.

Если g — ограниченное множество и d его диаметр, то для $t>d$ каждая из функций Ω в (1) и (2) равна некоторой постоянной c и остатки $\int\limits_d^\infty$ интегралов, стоящих в правых частях (1), (2), конечны (ведь θ, $r-\rho>0$). Поэтому конечность полунорм (1), (2) зависит исключительно от свойств указанных модулей для малых t.

Классы $B^{r}_{x_jp}$ $(j=1,\ \ldots,\ m)$ соответствуют тому случаю, когда R_m заменяется координатной осью x_j.

Полагаем **)

$$\|f\|_{B^{r}_{up\theta}(g)}=\sum_{j=1}^{m}\|f\|_{B^{r_j}_{x_jp_j\theta}(g)}\qquad \left(B^{r}_{up\theta}=B^{r}_{p\theta}\quad\text{при}\quad m=n\right).$$

Отметим простейшие неравенства между полунормами (1)—(4) (при одной и той же паре k, ρ):

$$^{3}\|f\|_b\leqslant{}^{1}\|f\|_b,\qquad {}^{4}\|f\|_b\leqslant{}^{2}\|f\|_b,\qquad {}^{2}\|f\|_b\leqslant{}^{1}\|f\|_b.\tag{6}$$

Последнее неравенство следует из неравенства 4.2 (15). Первые два получаются немедленно, если ввести полярные координаты $u=(t,\ \sigma)$, $t=|u|$, $du=t^{m-1}\,dt\,d\sigma$ и учесть неравенства

$$\|\Delta_u^k f^{(s)}(x)\|_{L_p(g_{ku})}\leqslant\Omega^k_{R_m}(f^{(s)},\ t)_{L_p(g)},\tag{7}$$

$$\|\Delta_u^k f^{\rho}(x)\|_{L_p(g_{ku})}\leqslant\Omega^k_{R_m}(f^{\rho},\ t)_{L_p(g)}.\tag{8}$$

---

*) О. В. Бесов [3], [5]. В этих работах рассматривались нормы (1) и (3).

**) О. В. Бесов [3], [5], случай $p_1=\ldots=p_n$, В. П. Ильин и В. А. Солонников [1], [2], общий случай.

4.3.5. Периодические классы. Периодические классы $W^l_{*x_jp}(\mathscr{E})$, $H^r_{*x_jp}(\mathscr{E})$, $B^r_{*x_jp\theta}(\mathscr{E})$ определяются на множестве $\mathscr{E}=R_j\times\mathscr{E}^j\subset R_n$, где R_j — действительная ось x_j $(j=1, \ldots, n)$. Это классы функций $f(x_j, y^j)$, $y^j=(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ периода 2π по x_j. Они определяются в точности так же, как соответствующие классы $W^l_{x_jp}(\mathscr{E})$, ... непериодических функций, но только всюду надо норму $\|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E})}$ заменить на норму $\|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E}_*)}$, где $\mathscr{E}_*=[0, 2\pi]\times\mathscr{E}^j$. Аналогично определяются периодические классы $W^r_{*up}(\mathscr{E})$, $H^r_{*up}(\mathscr{E})$, $B^r_{*up}(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}=R_m\times\mathscr{E}'\subset R_n$ $(1\leqslant m\leqslant n)$; при $m=n$ значок u опускаем).

4.3.6. Продолжение функций с сохранением класса. Сделаем еще важное замечание. Пусть $\Lambda(g)$ обозначает один из классов $W(g)$, $H(g)$, $B(g)$ с теми или иными параметрами r, p, ... Если область $g\subset R_n$ такова, что всякой функции $f\in\Lambda(g)$ можно привести в соответствие определенную на R_n функцию $\bar{f}$ такую, что $\bar{f}=f$ на g и

$$\|\bar{f}\|_{\Lambda(R_n)}\leqslant c\|f\|_{\Lambda(g)},$$

где c не зависит от f, то будем говорить, что *функции f класса $\Lambda(g)$ можно продолжить с g на R_n с сохранением класса* (*или нормы*). Будем еще говорить в этом случае, что имеет место вложение

$$\Lambda(g)\to\Lambda(R_n).$$

Наши классы устроены так, что если функция $f\in\Lambda(R_n)$, то ее значения на g образуют функцию $f\in\Lambda(g)$ и

$$\|f\|_{\Lambda(g)}\leqslant\|f\|_{\Lambda(R_n)}.$$

В связи с этим говорят, что имеет место вложение

$$\Lambda(R_n)\to\Lambda(g).$$

Допустим теперь, что для некоторой области g заданы два класса $\Lambda(g)$ и $\Lambda'(g)$ и

$$\Lambda(g)\to\Lambda(R_n)\to\Lambda'(R_n). \tag{1}$$

Тогда

$$\Lambda(g)\to\Lambda'(g). \tag{2}$$

В этой книге уделяется главное внимание изучению указанных классов в случае, когда $g=R_n$ или $g=R_m\times g'$, где $1\leqslant m<n$ и g' — измеримое $(n-m)$-мерное множество. В замечаниях в конце книги к 4.3.6 читатель найдет формулировки нескольких общих теорем о продолжении с сохранением класса. Наличие вложений (1) влечет за собой автоматически вложение (2).

4.4. Представление промежуточной производной через производную более высокого порядка и функцию. Следствия

В этом параграфе вводятся некоторые видоизменения формулы Тейлора, на основании которых будут получены некоторые неравенства

4.4.1. Рассмотрим на конечном интервале (a, b) функцию $f(x)$, имеющую на любом внутреннем по отношению к (a, b) отрезке абсолютно непрерывные производные до порядка $(\rho-2)$ включительно и, следовательно, почти всюду на $[a, b]$ производную порядка $\rho-1$. Для нее имеет место почти для всех x_0 формула Тейлора

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\rho-1} f^{(j)}(x_0)\frac{(x-x_0)^j}{j!}+R(x, x_0) \qquad (a<x,\ x_0<b) \qquad (1)$$

чисто формальная, потому что при высказанных условиях ничего нельзя сказать о поведении остаточного члена $R(x, x_0)$.

Прямоугольник $\{a<x,\ x_0<b\}$ обозначим через Δ. Разделим отрезок $[a, b]$ на 2ρ равных частичных отрезков

$$\Delta_0, \ \ldots, \ \Delta_{2\rho-1}$$

и выберем на каждом отрезке Δ_{2k} с четным индексом соответственно по точке x_k. Пусть g обозначает ρ-мерный куб точек $(x_1, \ldots, x_\rho)$ координаты x_k которых соответственно принадлежат к частным отрезкам Δ_{2k}:

$$x_k\in\Delta_{2k} \qquad (k=1, \ \ldots, \ \rho).$$

Перенеся в (1) $R(x, x_0)$ в левую часть и подставляя вместо x числа $x_1, \ldots, x_\rho$, получим линейную систему из ρ уравнений

$$\sum_{j=0}^{\rho-1}\frac{(x_k-x_0)^j}{j!}f^{(j)}(x_0)=f(x_k)-R(x_k, x_0) \qquad (k=1, \ \ldots, \ \rho) \qquad (2)$$

с ρ неизвестными $f^{(j)}(x_0)$ и определителем

$$W=W(x_1-x_0, \ \ldots, \ x_\rho-x_0)=\begin{vmatrix} 1 & (x_1-x_0) & \ldots & \dfrac{(x_1-x_0)^{\rho-1}}{(\rho-1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & (x_\rho-x_0) & \ldots & \dfrac{(x_\rho-x_0)^{\rho-1}}{(\rho-1)!}\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\rho}\alpha_{jk}(x_1-x_0, \ \ldots, \ x_\rho-x_0)\frac{(x_k-x_0)^j}{j!}=\sum_{k=1}^{\rho}\alpha_{jk}\frac{(x_k-x_0)^j}{j!}, \qquad (3)$$

где α_{jk} есть алгебраическое дополнение определителя W, соответствующее его элементу $(x_k-x_0)^j(j!)^{-1}$.

Из (2) и (3) следует

$$f^{(j)}(x_0)=\frac{1}{W}\sum_{k=1}^{\rho}\alpha_{jk}[f(x_k)-R(x_k,\ x_0)] \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho-1). \quad (4)$$

Функция W только постоянным множителем отличается от определителя Вандермонда, равного произведению всевозможных множителей вида (x_k-x_l), где $k<l$, k, $l=1,\ \ldots,\ \rho$, и так как разные x_k, x_l находятся на расстоянии, большем положительной константы, то функция $1/W$ ограничена. Функции α_{jk} также ограничены, поэтому из (4) следует неравенство

$$|f^{(j)}(x_0)|\leqslant c_1\left(\sum_{k=1}^{\rho}|f(x_k)|+|R(x_k,\ x_0)|\right) \quad (5)$$

$$(x_0\in[a,\ b], \quad (x_1,\ \ldots,\ x_n)\in g).$$

Так как левая часть (5) не зависит от x_k $(k=1,\ \ldots,\ \rho)$, то, очевидно,

$$|f^{(j)}(x_0)|\leqslant c_2\sum_{k=1}^{\rho}\left(\|f(x_k)\|_{L_p(g)}+\|R(x_k,\ x_0)\|_{L_p(g)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c_3\left(\|f\|_{L_p(a,b)}+\|R(x,\ x_0)\|_{L_{p,x}(a,b)}\right) \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho-1), \quad (6)$$

где знак $L_{p,x}$ обозначает, что норма исчисляется по переменной x.

Наконец, из (6) следует

$$\|f^{(j)}\|_{L_p(a,b)}\leqslant c\left(\|f\|_{L_p(a,b)}+\|R\|_{L_p(\Delta)}\right) \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho-1). \quad (7)$$

При $p=\infty$ это очевидно, а при p конечном это получится, если возвести левую и правую части (6) в степень p, к правой части применить неравенство

$$a+b\leqslant 2^{1-\frac{1}{p}}(a^p+b^p)^{1/p} \quad (a,\ b>0,\ 1\leqslant p\leqslant\infty),$$

проинтегрировать обе части неравенства по x_0 и, наконец, возвести их в степень $1/p$.

4.4.2. Заметим, что если $\|R\|_{L(\Delta)}<\infty$, то, подставив выражения 4.4.1 (4) для производных $f^{(j)}(x_0)$ в равенство 4.4.1 (1), проинтегрировав обе его части по кубу g точек $(x_0,\ \ldots,\ x_\rho)$ и разделив на величину его объема $\varkappa$, получим формулу *)

$$f(x)=P(x)+F(x), \quad (1)$$

где

$$P(x)=\sum_{j=0}^{\rho-1}\sum_{k=1}^{\rho}\frac{1}{\varkappa}\int_g\frac{\alpha_{jk}(x_1-x_0,\ \ldots,\ x_\rho-x_0)}{W(x_1,\ \ldots,\ x_\rho)}[f(x_k)-R(x_k,\ x_0)]\frac{(x-x_0)^j}{j!}\,dg \quad (2)$$

*) С. М. Никольский [11].

есть многочлен степени $\rho-1$ и

$$F(x)=\frac{1}{\varkappa}\int_g R(x, x_0)\,dg. \tag{3}$$

Формула (1) показывает, что функция f может быть представлена в виде суммы некоторого многочлена $P(x)$ степени $\rho-1$ и остатка $F(x)$. При этом P и F явно выражены только через саму функцию f и ее остаточный член Тейлора R.

Остаток R обычно выражается через производную $f^{(\rho)}$ от функции f порядка ρ.

Таким образом, в правую часть формулы (1) вовсе не входят явно промежуточные производные $f^{(1)}, \ldots, f^{(\rho-1)}$, что дает возможность оценивать нормы этих производных через нормы f и $f^{(\rho)}$.

4.4.3. Рассмотрим важные частные случаи формул 4.4.1 (6) и (7).

Если функция $f \in W_p^\rho(a, b)$, то она эквивалентна вполне определенной непрерывной функции, которую мы снова обозначаем через f. Для нее справедлива формула Тейлора 4.4.1 (1) с остаточным членом

$$R(x, x_0)=\frac{1}{(\rho-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^{\rho-1}f^{(\rho)}(u)\,du, \tag{1}$$

где $f^{(\rho)} \in L_p(a, b)$.

Из (1) следует неравенство

$$|R(x, x_0)| \leqslant c_1\|f^{(\rho)}\|_{L_p(a,b)}, \qquad a \leqslant x,\ x_0 \leqslant b. \tag{2}$$

Тем более

$$\|R\|_{L_p(\Delta)} \leqslant c_2\|f^{(\rho)}\|_{L_p(a,b)}, \tag{3}$$

где константа c_2 зависит от $b-a$, p и ρ. В таком случае из 4.4.1 (6) и (7) следуют соответственно неравенства

$$|f^{(j)}(x_0)| \leqslant c_3\left(\|f\|_{L_p(a,b)}+\|f^{(\rho)}\|_{L_p(a,b)}\right)=c_3\|f\|_{W_p^{(\rho)}(a,b)}, \tag{4}$$

$$\|f^{(j)}\|_{L_p(a,b)} \leqslant c_3\|f\|_{W_p^{(\rho)}(a,b)} \qquad (j=0, 1, \ldots, \rho-1). \tag{5}$$

Оба полученных неравенства непосредственно распространяются на случай класса функций $W_{xp}^\rho(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}=[a, b]\times\mathscr{E}_1$ ($x \in [a, b]$, $y \in \mathscr{E}_1$, $\mathscr{E} \subset R_n$) — измеримое множество

$$\|f_{x_0}^{(j)}(x_0, y)\|_{L_p(\mathscr{E}_1)} \leqslant c_4\|f\|_{W_{xp}^\rho(\mathscr{E})}, \tag{6}$$

$$\|f_x^{(j)}\|_{L_p(\mathscr{E})}=\left(\int_{\mathscr{E}_1}\|f_x^{(j)}(x, y)\|_{L_p(a,b)}^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c_3\left(\int_{\mathscr{E}_1}\|f\|_{W_{xp}^\rho(a,b)}^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c_4\|f\|_{W_{xp}^\rho(\mathscr{E})} \tag{7}$$

$$(j=0, 1, \ldots, \rho).$$

Если $f \in H^r_{xp}(\mathscr{E})$ и $r = \rho - 1$, то f записывается по формуле 4.4.1 (1), где

$$R(x, x_0) = \frac{1}{(\rho-2)!} \int_{x_0}^{x} (u - x_0)^{\rho-2} \left[f_x^{(\rho-1)}(u, y) - f_x^{(\rho-1)}(x_0, y)\right] du.$$

Отсюда

$$\int_a^b |R|^p dx_0 \leqslant c\left(\left|\int_a^x \int_{x_0}^x |f_x^{(\rho-1)}(u, y) - f_x^{(\rho-1)}(x_0, y)|^p du\, dx_0\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\int_x^b \int_x^{x_0} |f_x^{(\rho-1)}(u, y) - f_x^{(\rho-1)}(x_0, y)|^p du\, dx_0\right|\right) =$$
$$= c\left(\left|\int_a^x \int_0^{x-x_0} |f_x^{(\rho-1)}(x_0+h, y) - f_x^{(\rho-1)}(x_0, y)|^p dh\, dx_0\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\int_x^b \int_0^{x_0-x} |f_x^{(\rho-1)}(x_0-h, y) - f_x^{(\rho-1)}(x_0, y)|^p dh\, dx_0\right|\right) =$$
$$= c\left|\int_0^{x-a} \int_a^{x-h} |f_x^{(\rho-1)}(x_0+h, y) - f_x^{(\rho-1)}(x_0, y)|^p dh\, dx_0\right| +$$
$$+ c\left|\int_0^{b-x} \int_{x+h}^{b} |f_x^{(\rho-1)}(x_0-h, y) - f_x^{(\rho-1)}(x_0, y)|^p dh\, dx_0\right|$$

и

$$\left(\int_{\mathscr{E}_1} \int_a^b |R|^p dx_0\, dy\right)^{\frac{1}{p}} <$$
$$< \left[\int_0^{x-a} \left|\int_{\mathscr{E}_1} \int_a^{x-h} |f_x^{(\rho-1)}(x_0+h, y) - f_x^{(\rho-1)}(x_0, y)|^p dx_0\, dy\right| dh\right]^{\frac{1}{p}} +$$
$$+ \left[\int_0^{b-x} \left|\int_{\mathscr{E}_1} \int_{x+h}^{b} |f_x^{(\rho-1)}(x_0-h, y) - f_x^{(\rho-1)}(x_0, y)|^p dx_0\, dy\right| dh\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда, приняв во внимание, что при $h > 0$

$$\left(\int_{\mathscr{E}_1} \int_a^{b-h} |f_x^{(\rho-1)}(x_0+h, y) - f_x^{(\rho-1)}(x_0, y)|^p dx_0\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant M h^{\alpha},$$

где

$$M = \|f\|_{h_p^r(\mathscr{E})},$$

получим

$$\|R\|_{L_p(\mathscr{E})}=\left(\int_a^b\int_{\mathscr{E}_1}\int_a^b |R|^p\,dx_0\,dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_a^b\int_0^{x-a} M^p h^{\alpha p}\,dh\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b\int_0^{b-x} M^p h^{\alpha p}\,dh\,dx\right)^{\frac{1}{p}}<c_2M.$$

Поэтому из 4.5.1 (7) следует

$$\|f_x^{(j)}\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant c_3(\|f\|_{L_p(\mathscr{E})}+\|R\|_{L_p(\mathscr{E})})\leqslant$$
$$\leqslant c_4(\|f\|_{L_p(\mathscr{E})}+M)\leqslant c_4\|f\|_{H_p^r(\mathscr{E})}\qquad (j=1,\ldots,\bar{r}). \tag{8}$$

Неравенства (4), (5), так же как (8), верны и при $a=-\infty$, $b=+\infty$. В случае (4) это очевидно. В случаях же (5) и (8) это следует из 6.1 (2) и (8), в случае (5) $(1<p<\infty)$ еще из 9.2.2. Соответствующее неравенство для интервала (a, ∞) сводится к предыдущему путем применения теоремы о продолжении 4.3.6.

4.4.4. Заметим, что при определении функций классов $W_p^\rho(\mathscr{E})$ и $H_p^r(\mathscr{E})$ предполагалось существование на $\mathscr{E}$ обобщенных частных производных $f_x^{(j)}$ порядков $j=1,\ldots,\rho-1$ $(\bar{r})$, но не предполагалось, что они имеют конечную норму в смысле $L_p(\mathscr{E})$.

Неравенства 4.4.3 (7) и (8) показывают, что конечность норм указанных производных вытекает из определения соответствующих классов. Но тогда производные $f_x^{(j)}$ $(j=0, 1,\ldots,\rho-1)$ почти для всех $y\in\mathscr{E}_1$ по переменной x абсолютно непрерывны на замкнутом отрезке $[a, b]$. Таким образом, почти для всех $y\in\mathscr{E}_1$ имеет место разложение f по формуле Тейлора

$$f(a, y)=\sum_0^{\rho-1}\frac{f_x^{(k)}(a, y)}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{(\rho-1)!}\int_a^x f_x^{(\rho)}(u, y)(x-u)^{\rho-1}\,du \tag{1}$$

в окрестности концевой точки a сегмента $[a, b]$ и соответствующее разложение в окрестности другой концевой точки b. Отметим неравенство

$$\|\Delta_{x_j,h}^{\rho}f\|_{L_p(g_{x_{j\rho}|h|})}\leqslant|h|^\rho\left\|\frac{\partial^\rho f}{\partial x_j^\rho}\right\|_{L_p(g)}, \tag{2}$$

которое можно трактовать следующим образом: если имеет смысл правая часть неравенства (2), то и левая, и имеет место само неравенство (2).

В 4.8 будет получено обращение неравенства (2) при $\rho=1$.

Доказательство. Пусть сначала $\rho=1$; тогда в силу равенства

$$\Delta_{x_1, h} f(\boldsymbol{x})=\int_0^h f'_{x_1}(x_1+t,\ \boldsymbol{y})\,dt, \qquad \boldsymbol{x}=(x_1,\ \boldsymbol{y})\in g_{|h|},$$

имеющего место почти для всех допустимых $\boldsymbol{y}=(x_2, \ldots, x_n)$ и для всех x_1, h, допустимых для всякого такого $\boldsymbol{y}$, получим (см. 1.3.2)

$$\|\Delta_{x_1, h} f\|_{L_p(g_{|h|})}\leqslant\left|\int_0^h \|f'_{x_1}(x_1+t,\ \boldsymbol{y})\|_{L_p(g_{|h|})}\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int_0^h \|f'_{x_1}\|_{L_p(g)}\,dt\right|=|h|\,\|f'_{x_1}\|_{L_p(g)}.$$

Поэтому при произвольном ρ

$$\|\Delta^{\rho}_{x_1, h} f\|_{L_p(g_{x_1\rho\,|h|})}=\|\Delta_{x_1, h}\Delta^{\rho-1}_{x_1, h} f\|_{L_p(g_{x_1\rho\,|h|})}\leqslant$$
$$\leqslant|h|\,\|\Delta^{\rho-1}_{x_1, h} f'_{x_1}\|_{L_p(g_{x_1(\rho-1)\,|h|})}\leqslant$$
$$\leqslant|h|^2\,\|\Delta^{\rho-2}_{x_1, h} f''_{x_1}\|_{L_p(g_{x_1(\rho-2)\,|h|})}\leqslant\ldots\leqslant|h|^{\rho}\,\|f^{(\rho)}_{x_1}\|_{L_p(g)}.$$

Следствие 1. Для функции $g_\nu(\boldsymbol{x})=g_\nu(x_1, \ldots, x_n)\in\in\mathfrak{M}_{x, \nu p}(\mathscr{E})$, $\mathscr{E}=R_1\times\mathscr{E}_1$ (т. е. принадлежащей к $L_p(\mathscr{E})$ и целой степени ν по x_1, см. 3.4.1) имеет место неравенство *)

$$\|\Delta^{\sigma}_{x_1, h} g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant|h|^{\rho}\left\|\frac{\partial^{\rho} g_\nu}{\partial x_1^{\rho}}\right\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant(\nu h)^{\rho}\,\|g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})} \tag{3}$$

(см. 3.2.2 (7)). Здесь надо учесть, что $\mathscr{E}_{x_1, \delta}=\mathscr{E}$, так как $\mathscr{E}$ есть цилиндрическое в направлении x_1 множество.

Следствие 2. Если $r>0$ — целое, то

$$W^{(r)}_{x_j p}(g)\to H^{(r)}_{x_j p}(g). \tag{4}$$

Это следует из того, что

$$\frac{1}{h}\|\Delta^2_{x_j, h} f^{(r-1)}_{x_j}\|_{L_p(g_{x_j 2\,|h|})}\leqslant\|\Delta_{x_j, h} f^{(r)}_{x_j}\|_{L_p(g_{x_j\,|h|})}\leqslant 2\,\|f^{(r)}_{x_j}\|_{L_p(g)}.$$

4.4.5. Лемма. *Пусть задана последовательность функций f_l $(l=1,\ 2, \ldots)$, принадлежащих к $W^{\rho}_{x_1, p}(g)$, где $g\subset R_n$ — открытое множество.*

Если для двух функций f, $\varphi\in L_p(g)$

$$\|f-f_l\|_{L_p(g)}\to 0, \qquad l\to\infty, \tag{1}$$

$$\left\|\varphi-\frac{\partial^{\rho} f_l}{\partial x_1^{\rho}}\right\|_{L_p(g)}\to 0, \qquad l\to\infty, \tag{2}$$

*) Неравенство (3) верно и для тригонометрических полиномов g_ν порядка ν по x_1, если заменить $L_p(\mathscr{E})$ на $L_{p^*}(\mathscr{E})$.

то (в обобщенном смысле)

$$\varphi = \frac{\partial^\rho f}{\partial x_1^\rho} \quad \text{на } g. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть сначала $g=[a, b]$. Из того, что функция $f_l \in W_{xp}^\rho[a, b]$ $(l=1, 2, \ldots)$ следует, что для нее или некоторой эквивалентной ей функции, обозначаемой снова через f_l, для любых x, $x_0 \in [a, b]$ имеет место разложение f_l по формуле Тейлора

$$f_l(x) = \sum_0^{\rho-1} \frac{f_l^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(\rho-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\rho-1} f_l^{(\rho)}(t)\,dt. \tag{4}$$

В силу 4.4.3 (4) и условий леммы

$$|f_k^{(j)}(x_0) - f_l^{(j)}(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant c\left[\|f_k - f_l\|_{L_p(a,b)} + \|f_k^{(\rho)} - f_l^{(\rho)}\|_{L_p(a,b)}\right] \to 0 \quad k, l \to \infty,$$

т. е. имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{l\to\infty} f_l^{(j)}(x_0) = \lambda_j(x_0) \qquad (a \leqslant x_0 \leqslant b;\ j=0, 1, \ldots, \rho-1)$$

на отрезке $[a, b]$. Но тогда после перехода к пределу в (4) при $l \to \infty$ получим

$$f(x) = \sum_0^{\rho-1} \frac{\lambda_k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(\rho-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\rho-1}\varphi(t)\,dt,$$

т. е.

$$\lambda_j(t) = f^{(j)}(t), \qquad j=0, 1, \ldots, \rho-1,$$
$$\varphi(t) = f^{(\rho)}(t) \qquad [a \leqslant t \leqslant b],$$

и лемма доказана.

В общем случае лемма будет, очевидно, доказана, если будет доказана справедливость равенства (3) на произвольном прямоугольном параллелепипеде $\Delta \subset g$.

Будем считать, что $\Delta = [a, b] \times \Delta_1$, где $x_1 \in [a, b]$, $y \in \Delta_1$. В силу условий, наложенных на функции f_l, и того факта, что их счетное количество, можно считать их видоизменениями на множестве меры нуль так, что существует множество $\Delta_1' \subset \Delta_1$ полной меры такое, что для всех $y \in \Delta_1'$ все функции f_l локально абсолютно непрерывны по x. Из (1) и (2) следует, что почти для всякого $y \in \Delta_1'$, для некоторой (зависящей от y) подпоследовательности индексов l_s имеет место (см. 1.3.8)

$$\|f-f_{l_s}\|_{L_p(a,\,b)}\to 0,$$

$$\left\|\varphi-\frac{\partial^\rho f_{l_s}}{\partial x_1^\rho}\right\|_{L_p(a,\,b)}\to 0.$$

Но тогда для указанных y

$$\varphi(x_1,\ y)=\frac{\partial^\rho f}{\partial x_1^\rho}(x_1,\ y)$$

почти для всех $x_1\in[a,\ b]$. Это и приводит к утверждеиию леммы.

4.4.6. Теорема. *Пусть $g\subset R_n$ — открытое множество и g_1 — другое открытое ограниченное множество такое, что $g_1\subset\subset\bar g_1\subset g$. Тогда, если $f\in W_p^l(g)$, то*

$$\|f^{(s)}\|_{L_p(g_1)}\leqslant c_{g_1}\|f\|_{W_p^l(g)}\qquad (|s|\leqslant l), \tag{1}$$

c_{g_1} — константа, зависящая от p, l и g_1, но не от f.

Эта теорема легко вытекает по индукции из неравенства 4.4.3 (7). Учитывая, что g_1 можно покрыть конечным числом кубов $\Delta\subset g$ с ребрами, параллельными осям координат, достаточно теорему доказать для одного из них.

4.4.7. Лемма. *Пусть дана последовательность функций*

$$f_k=f_k(x_1,\ \ldots,\ x_n)=f_k(x)\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

интегрируемых на g в p-й степени ($1\leqslant p\leqslant\infty$) вместе со своими фигурирующими ниже в (1) частными производными до порядка ρ включительно, и, кроме того, даны функции

$$f,\ f_{\alpha_1},\ f_{\alpha_1\alpha_2},\ \ldots,\ f_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$$

($\alpha_1+\ldots+\alpha_s\leqslant\rho$, α_j — целые положительные, $1\leqslant s\leqslant n$) такие, что

$$\begin{gathered}\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|_{L_p(g)}=0,\\ \lim_{k\to\infty}\left\|f_{\alpha_1}-\frac{\partial^{\alpha_1}f_k}{\partial x_1^{\alpha_1}}\right\|_{L_p(g)}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lim_{k\to\infty}\left\|f_{\alpha_1\ldots\alpha_s}-\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}f_k}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_s^{\alpha_s}}\right\|_{L_p(g)}=0.\end{gathered} \tag{1}$$

Тогда (в обобщенном смысле)

$$f_{\alpha_1}=\frac{\partial^{\alpha_1}f}{\partial x_1^{\alpha_1}},\quad f_{\alpha_1\alpha_2}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}},\ \ldots,\ f_{\alpha_1\ldots\alpha_s}=\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_s^{\alpha_s}}. \tag{2}$$

Для случая $s=1$ это лемма 4.4.5. Переход к общему случаю совершается без труда по индукции.

4.4.8. Если рассматриваемые в 4.4.7 функции f_k и их частные производные соответствующих порядков непрерывны на g, то эти частные производные не зависят от порядка дифференцирования, поэтому и обобщенные производные 4.4.7 (2) не зависят от порядка дифференцирования почти всюду на g.

4.4.9. Теорема. *Пусть функции $f_1, f_2, \ldots$ непрерывны вместе со своими частными производными до порядка ρ включительно и вместе с функцией f удовлетворяют условиям леммы 4.4.7 и при этом равенства* (1) *выполняются для любых $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с $|\alpha|\leqslant\rho$. Пусть, кроме того, область g изменения переменных $x_1, \ldots, x_n$ взаимно однозначно отображается на область $\tilde{g}$ переменных $t_1, \ldots, t_n$ при помощи функций*

$$x_j=\varphi_j(t_1, \ldots, t_n) \tag{1}$$

непрерывных, имеющих непрерывные и ограниченные на $\tilde{g}$ частные производные порядков, не превышающих ρ и таких, что якобиан

$$D(t)=\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)}>k>0.$$

Тогда функция

$$F(t_1, \ldots, t_n)=f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

интегрируема в p-й степени на $\tilde{g}$ вместе со своими частными производными порядка до ρ включительно, причем эти частные производные вычисляются по классическим формулам, как если бы функция f имела непрерывные частные производные.

Доказательство. В самом деле, из условий леммы следует, что $f^{(s)}\in L_p(g)$ для всех s с $|s|\leqslant\rho$ и имеет место

$$\int_g |f^{(s)}(x)|^p\,dx=\lim_{k\to\infty}\int_g |f_k^{(s)}(x)|^p\,dx=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\int_{\tilde{g}} |f_k^{(s)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)|^p D(t)\,dt=\int_{\tilde{g}} |f^{(s)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)|^p D(t)\,dt,$$

и так как $D(t)$ ограничена снизу положительной константой, то $f^{(s)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\in L_p(\tilde{g})$. Положим

$$F_k(t)=f_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \quad F(t)=f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Согласно классической формуле производная от F_k порядка $l=(l_1, \ldots, l_n)$ имеет вид

$$F_k^{(l)}(t)=\sum_{|s|\leqslant|l|}\alpha_s f_k^{(s)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \tag{2}$$

где α_s — определяемые преобразованиями (1) функции, непрерывные и ограниченные на $\tilde{g}$. Так как $f_k^{(s)} \to f^{(s)}$ $(k \to \infty)$ в смысле $L_p(g)$, то на основании сказанного $f_k^{(s)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \to f^{(s)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ в смысле $L_p(\tilde{g})$ и из (2) следует после перехода к пределу при $k \to \infty$, что

$$F^{(l)}(t) = \sum_{|s| \leqslant |l|} \alpha_s f^{(s)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \tag{2'}$$

почти для всех $t \in \tilde{g}$. В формулу (2′) входят, вообще говоря, обобщенные производные. Если последние непрерывны, то (2′) есть классическая формула.

В этих рассуждениях мы считали, что p конечно $(1 \leqslant p < \infty)$. При $p = \infty$ из условия леммы ничего нового не возникает, потому что тогда $f_k^{(s)}$ $(|s| \leqslant \rho)$ равномерно сходится к $f^{(s)}$.

4.5. Еще об усреднении по Соболеву *)

Пусть $g \subset R = R_n$ — открытое множество, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, функция $f \in L_p(g)$ и

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int \varphi\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right) f(u)\,du \qquad (f = 0 \text{ на } R - g) \tag{1}$$

ее ε-усреднение (см. 1.4).

Очевидно, $f_\varepsilon(x)$ бесконечно дифференцируема на R и

$$f_\varepsilon^{(s)}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+|s|}} \int \varphi^{(s)}\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right) f(u)\,du \tag{2}$$

для любого целого вектора $s = (s_1, \ldots, s_n) \geqslant 0$.

4.5.1. Обозначим, как обычно, через g_ε множество точек $x \in g$, отстоящих от границы g на расстоянии, большем чем $\varepsilon > 0$.

Пусть $f \in L_p(g)$ и $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L_p(g)$. Если $x \in g_\varepsilon$, то в равенстве

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int \varphi'_{x_1}\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right) f(u)\,du$$

под интегралом, который можно считать распространенным на шар радиуса ε с центром в x, стоит функция f, абсолютно непрерывная по u_1 почти для всех $(u_2, \ldots, u_n)$, поэтому этот интеграл можно проинтегрировать по частям по u_1 (при $x \notin g_\varepsilon$ это, вообще говоря, не так, f может быть существенно разрывной в указанном шаре).

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \varphi\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right) = -\frac{1}{\varepsilon} \varphi'_{x_1}\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right)$$

---

*) С. Л. Соболев [4].

и что $\varphi=0$ вне упомянутого шара, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon^n}\int \frac{\partial}{\partial u_1}\varphi\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right) f(u)\,du =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int \varphi\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1}(u)\,du = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_\varepsilon(x).$$

Вообще, если рассматривать функции f, $\frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}}$, ..., то, рассуждая по индукции, получим

$$D^s(f_\varepsilon) = (D^s f)_\varepsilon \quad (x \in g_\varepsilon), \qquad D^s = \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}}. \tag{1}$$

При определении класса $W_p^l(g)$ предполагалось, что всякая принадлежащая к нему функция f принадлежит к $L_p(g)$ вместе со своими частными производными $f^{(l)}$ порядка l. Что касается подчиненных производных $f^{|s|}$ $(|s|<l)$, то они, естественно, предполагались существующими (в обобщенном смысле) на g, но не обязательно суммируемыми в p-й степени на g.

В 4.4.6 было показано, если $f \in W_p^l(g)$ и $\sigma \subset g$ — произвольный n-мерный шар, то $f^{(s)} \in L_p(\sigma)$ $(|s| \leqslant l)$. Но тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место на σ равенство (1), из которого в силу 1.4 (5) следует при $1 \leqslant p < \infty$ (или при $p=\infty$ в предположении, что $D^s f$ равномерно непрерывна на R_n), что

$$\|D^s(f_\varepsilon) - D^s f\|_{L_p(\sigma)} = \|(D^s f)_\varepsilon - D^s f\|_{L_p(\sigma)} \to 0 \qquad (\varepsilon\to 0,\ |s| \leqslant l). \tag{2}$$

Учитывая, что f_ε — бесконечно дифференцируемая функция и, следовательно, для нее результат операции $D^s f_\varepsilon$ не зависит от порядка дифференцирования (по $s_1, \dots, s_n$), и что $\sigma \subset g$ — произвольный шар, мы приходим к следующему выводу.

Если $f \in W_p^l(g)$, то для указанных s производные $f^{(s)}$ почти всюду не зависят от порядка дифференцирования.

4.5.2. Теорема. *Пусть f и λ — локально суммируемые на g функции. Если функция λ есть производная по x_1 на g по Соболеву, то она также есть производная*

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \tag{1}$$

в употребляемом нами смысле (см. начало § 4.1).

Доказательство. Пусть

$$f_\varepsilon(x) = \int \varphi_\varepsilon(x-u) f(u)\,du, \tag{2}$$

ε — усреднение f; тогда

$$f'_\varepsilon(x) = \int \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_\varepsilon(x-u) f(u)\,du = -\int \frac{\partial}{\partial u_1}\varphi_\varepsilon(x-u) f(u)\,du =$$

$$= \int \varphi_\varepsilon(x-u)\lambda(u)\,du \qquad (x \in g_\varepsilon). \tag{3}$$

Последнее равенство имеет место в силу того, что λ есть производная от f по x_1 на g в смысле Соболева, и того, что $\varphi_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})$ при фиксированном $\boldsymbol{x}\in g_\varepsilon$ есть финитная функция по $\boldsymbol{u}$.

Так как f и λ локально суммируемы на g, то из (2) и (3) следует (см. 4.5.1) (2)), что

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L(\sigma)}\to 0,\quad \varepsilon\to 0,$$
$$\|f'_\varepsilon - \lambda\|_{L(\sigma)}\to 0,\quad \varepsilon\to 0,$$

на любом замкнутом шаре $\sigma\subset g$, но тогда согласно лемме 4.4.5 имеет место (1).

4.6. Оценка приращения по направлению

Рассмотрим линейное преобразование

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}t_k \qquad (i=1,\ \dots,\ n) \tag{1}$$

с определителем, не равным нулю, отображающее взаимно однозначно точки $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots\ x_n)\in g$ в точки $\boldsymbol{t}=(t_1,\dots,t_n)\in\tilde{g}$. Оно удовлетворяет требованиям теоремы 4.4.9. Если $f\in W_p^l(g)$, то мы знаем уже, что для каждого шара $\sigma\subset\bar{\sigma}\subset g$ выполняется 4.5.1 (2), но тогда вследствие теоремы 4.4.9 преобразованная посредством (1) функция $\bar{f}(\boldsymbol{t})=f(x_1(\boldsymbol{t}),\dots\ x_n(\boldsymbol{t}))$ имеет на любом шаре $\sigma\subset\tilde{g}$, а следовательно, и на $\tilde{g}$ все производные $\bar{f}^{(\boldsymbol{s})}(\boldsymbol{t})$ по $\boldsymbol{t}$, где $|\boldsymbol{s}|\leqslant l$, вычисляемые к тому же по классическим правилам. Ясно, что $\bar{f}\in W_p^l(\tilde{g})$.

Чтобы определить производную от функции $f\in W_p^l(g)$ по направлению вектора $\boldsymbol{h}\in R_n$, введем ортогональное преобразование (1) такое, что изменение t_1 в положительном направлении при фиксированных $t_2,\dots,t_n$ влечет изменение $\boldsymbol{x}$ в направлении $\boldsymbol{h}$. Мы будем считать, что производная от f по направлению $\boldsymbol{h}$ определяется равенством

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial t_1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\cos(\boldsymbol{h},\ x_j), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^s f}{\partial \boldsymbol{h}^s}=\frac{\partial^s \bar{f}}{\partial t_1^s}=\sum_{|\boldsymbol{s}|=s} f^{(\boldsymbol{s})}\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{s}} \tag{3}$$

$$\left(\boldsymbol{s}=(s_1,\ \dots,\ s_n);\ |\boldsymbol{s}|\leqslant l,\quad \boldsymbol{h}^{\boldsymbol{s}}=h_1^{s_1}\dots h_n^{s_n},\ |\boldsymbol{h}|=1\right).$$

Очевидно, это определение не зависит от выбора ортогонального преобразования (1), подчиняющегося указанным требованиям.

Имеет место равенство

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) = |h| \int_0^1 f'_h(x+th)\,dt, \tag{4}$$

откуда

$$\|\Delta_h f(x)\|_{L_p(g_h)} \leqslant |h| \int_0^1 \|f'_h(x+th)\|_{L_p(g_h)}\,dt = |h|\,\|f'_h\|_{L_p(g)}, \tag{5}$$

где h есть произвольный вектор. Легко получить также более общее неравенство (в частности, содержащее аналогичное 4.4.4 (2))

$$\|\Delta_h^\rho f(x)\|_{L_p(g_{\rho h})} \leqslant |h|^\rho \|f_h^{(\rho)}\|_{L_p(g)}. \tag{6}$$

4.7. Полнота пространств W, H, B

Теорема. *Каково бы ни было открытое множество $g \subset R_n$, пространства*

$$W_{up}^l(g),\ W_{up}^l(g),\ H_{up}^r(g),\ H_{up}^r(g),\ B_{up\theta}^r(g),\ B_{up\theta}^r(g)$$

полны.

Существуют различные варианты определений указанных классов. Для произвольного открытого множества g они вообще не эквивалентны. Мы доказываем полноту для вариантов: 4.3.1 (1) для пространств W_{up}^r, 4.3.3 (5) для H_{up}^r, 4.3.4 (2) или 4.3.4 (4) для $B_{up\theta}^r$. Для других вариантов доказательство не отличается существенно.

Доказательство. Будем считать, что $g_1 \subset \tilde{g}_1 \subset g$ — ограниченное открытое множество. Пусть задана последовательность функций $f_k \in W_{up}^l(g)$ $(k=1, 2, \ldots)$, удовлетворяющая условию Коши в метрике $W_{up}^l(g)$.

Тогда (см. 4.4.6 и 4.4.7)

$$\|f_k^{(s)} - f_j^{(s)}\|_{L_p(g_1)} \leqslant c_{g_1} \|f_k - f_l\|_{W_{up}^l(g)} \to 0 \tag{1}$$

$$k,\ j \to \infty,\quad s = (s_1, \ldots, s_m, 0, \ldots, 0),\ |s| \leqslant l,$$

существует функция f, для которой

$$\|f_k^{(s)} - f^{(s)}\|_{L_p(g_1)} \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{2}$$

Она принадлежит к $W_{up}^l(g_1)$, потому что $f_k \in W_{up}^l(g_1)$. Задав $\varepsilon > 0$, можно указать $N > 0$ так, что для $k,\ j > N$

$$\|f_k - f_j\|_{L_p(g_1)} + \sum_{|s|=l} \|f_k^{(s)} - f_j^{(s)}\|_{L_p(g_1)} \leqslant \|f_k - f_j\|_{W_{up}^l(g)} < \varepsilon \tag{3}$$

для любых g_1. Переход в первом члене (3) к пределу при $j\to\infty$ в силу (2) приводит к такому же выражению, где надо заменить f_j на f, т. е. имеет место

$$\|f_k-f\|_{W^l_{up}(g_1)}\leqslant\varepsilon \qquad (k>N)$$

для любого g_1, следовательно, и для g. При этом f принадлежит (вместе с f_k) к $W^l_{up}(g)$. Этим полнота $W^l_{up}(g)$, в частности, $W^{l_j}_{x_jp}(g)$ доказана, но тогда, очевидно, и $W^l_{up}(g)$ полно.

Докажем теперь полноту $B^r_{up\theta}(g)$ $(1\leqslant\theta\leqslant\infty,\ B^r_{up\infty}=H^r_{up})$. Можно доказать (см. замечание в конце книги к п. 4.3.6), что функции классов $B^{r,\ldots,r}(g)=B^{r,\ldots,r}_{up\theta}(g)$ можно продолжить с $g_1\subset\bar{g}_1\subset g$ на R с сохранением нормы (по g), т. е. можно для каждой $f\in B^{r,\ldots,r}(g)$ определить ее продолжение $\bar{f}$ $(\bar{f}=f$ на $g_1)$ так, что

$$\|\bar{f}\|_{B^{r,\ldots,r}(R)}\leqslant c\|f\|_{B^{r,\ldots,r}(g)}. \tag{4}$$

Но дальше будет доказано (5.6.2), что

$$B^{r,\ldots,r}(R)=B^r(R). \tag{5}$$

Поэтому для функций f_k, удовлетворяющих условию Коши в $B^r(g)$

$$\begin{gathered}0\leftarrow\|f_k-f_l\|_{B^r(g)}\geqslant\|f_k-f_l\|_{B^{r,\ldots,r}(g_1)}\geqslant\\ \geqslant\|\bar{f}_k-\bar{f}_l\|_{B^{r,\ldots,r}(R)}\geqslant\|\bar{f}_k-\bar{f}_l\|_{B^r(R)}\geqslant\|f_k^{(s)}-f_l^{(s)}\|_{L_p(g_1)} \qquad (6)\\ (s=(s_1,\ldots,s_m,0,\ldots,0),\ |s|\leqslant\bar{r},\ r=\bar{r}+\alpha,\\ \bar{r}\text{ — целое, } 0<\alpha\leqslant 1).\end{gathered}$$

Первое неравенство тривиально $(B^r\to B^{r,\ldots,r})$; второе справедливо в силу вышеуказанной теоремы о продолжении, здесь $\bar{f}_l$, $\bar{f}_k$ — функции, продолжающие, согласно этой теореме, соответственно функции f_k, f_l с множества g_1; третье неравенство следует из (5); четвертое будет доказано позднее (6.2(8)). Отметим, что в случае $H^r_{x_jp}(g)$ $(m=1)$ неравенство между первым и последним членами (6) следует непосредственно из (4.4.3(8)) без привлечения теоремы о продолжении.

Из (6), очевидно, следует, что при $\rho=\bar{r}$

$$\|f^\rho_{ku}-f^\rho_{lu}\|_{L_p(g_1)}\to 0 \qquad (k,\ l\to\infty,\ u\in R_m), \tag{7}$$

где f^ρ_{ku} — производная от f_k порядка ρ по направлению u, каково бы ни было $g_1\subset\bar{g}_1\subset g$.

Теперь, рассматривая класс $H_{up}^r(g)$ и для простоты считая, что и $0<\alpha<1$, и задав $\varepsilon>0$, получим ($g_1 \subset \bar{g}_1 \subset g_u$)

$$\|f_k - f_j\|_{L_p(g)} + \frac{\left\|\left(f_{ku}^\rho(x+u) - f_{ju}^\rho(x+u)\right) - \left(f_{ku}^\rho(x) - f_{ju}^\rho(x)\right)\right\|_{L_p(g_1)}}{|u|^\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \|f_k - f_j\|_{H_{up}^r(g)} \leqslant \varepsilon \quad (k,\ j>N,\ u \in R_m), \tag{8}$$

где N достаточно велико. Если k зафиксировать и стремить $j \to \infty$, то в пределе первый член (8) в силу (7) превращается в такое же выражение, где f_j надо заменить на f. В нем заменяем g_1 на g_u, что, очевидно, законно. Взяв верхнюю грань полученного выражения по u, получим

$$\|f_k - f\|_{H_{up}^r(g)} \leqslant \varepsilon \quad (k>N),$$

и так как из того, что $f_k \in H_{up}^r(g)$, следует, что $f \in H_{up}^r(g)$, то полнота $H_{up}^r(g)$ при $\alpha<1$ доказана. При $\alpha=1$ в (8) надо вместо первой разности от $f_{ku}^\rho - f_{ju}^\rho$ взять вторую, рассуждая аналогично.

Для класса же $B_{up\theta}^r(g)$ $(1 \leqslant \theta < \infty)$ для любого $\varepsilon>0$ ($g_1 \subset \bar{g}_1 \subset g_{ku}$)

$$\|f_\mu - f_\nu\|_{L_p(g)} + \left(\int\limits_{\lambda<|u|<\varkappa} |u|^{-m-\theta\alpha} \|\Delta_u^k (f_\mu^\rho - f_\nu^\rho)\|_{L_p(g_1)}^\theta \, du\right)^{1/\theta} \leqslant \varepsilon$$
$$(\mu,\ \nu>N,\ u \in R_m,\ \rho=\bar{r},\ k \geqslant 2, \text{ при } \alpha<1\ k \geqslant 1), \tag{9}$$

где $0<\lambda<\varkappa$ — произвольные числа.

Переход к пределу при $\nu \to \infty$ приводит к такому же неравенству, где f_ν^ρ надо заменить на f^ρ. Это следует из того, что здесь можно применить теорему Лебега о пределе под знаком интеграла. Дело в том, что зависящая от u норма под знаком интеграла в (9) ограниченно стремится к такой же норме, где вместо f_ν^ρ стоит f^ρ (см. (6), (7)). В полученном неравенстве, верном для любых указанных λ, $\varkappa$, можно, очевидно, положить $\lambda=0$, $\varkappa=\infty$ и заменить g_1 на g_{ku}, что влечет

$$\|f_\mu - f\|_{B_{up\theta}^r} \leqslant \varepsilon, \quad \mu>N.$$

Кроме того, из того, что $f_\mu \in B_{up\theta}^r(g)$ следует $f \in B_{up\theta}^r(g)$. Полнота $B_{up\theta}^r(g)$ доказана.

4.8. Оценка производной разностным отношением

Теорема (обращающая неравенство 4.4.4 (2)). *Пусть функция $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \boldsymbol{y})$ задана на открытом множестве g, локально суммируема на нем и удовлетворяет неравенству*

$$\int_{g_h} \left| \frac{\Delta_{x_1, h} f(x)}{h} \right|^p d\boldsymbol{x} \leqslant M \qquad (1 < p < \infty), \tag{1}$$

где M не зависит от h.

Тогда на g существует производная $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, обладающая свойством

$$\int_g \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^p d\boldsymbol{x} \leqslant M. \tag{2}$$

Доказательство. Зададим два строго вложенных друг в друга открытых куба $\Delta \subset \bar{\Delta} \subset \Delta_1 \subset \bar{\Delta}_1 \subset g$ с гранями, параллельными осям координат. Имеем

$$\frac{\Delta_{x_1, h} f_\varepsilon(x)}{h} = \left(\frac{\Delta_{x_1, h} f(x)}{h} \right)_\varepsilon$$

$$((\cdot)_\varepsilon - \varepsilon\text{-усреднение}),$$

поэтому из (1) и 1.4 (7) следует для достаточно малых h и ε

$$\int_\Delta \left| \frac{\Delta_{x_1, h} f_\varepsilon(x)}{h} \right|^p d\boldsymbol{x} \leqslant \int_{\Delta_1} \left| \frac{\Delta_{x_1, h} f(x)}{h} \right|^p d\boldsymbol{x} \leqslant M.$$

Переходя к пределу при $h \to \infty$, получим

$$\int_\Delta \left| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_1} \right|^p d\boldsymbol{x} \leqslant M. \tag{3}$$

Имеем

$$f_\varepsilon(x_1', \boldsymbol{y}) - f_\varepsilon(x_1, \boldsymbol{y}) = \int_{x_1}^{x_1'} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_1}(t, \boldsymbol{y})\, dt, \tag{4}$$

где мы считаем, что $\boldsymbol{y} = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$ пробегает прямоугольный параллелепипед

$$\Delta_* = \{x_j \leqslant \xi_j \leqslant x_j + h_j;\ j = 2, \ldots, n\}$$

и

$$[x_1, x_1'] \times \Delta_* \subset \Delta.$$

Интегрируя (4) по $\boldsymbol{y} \in \Delta_*$, получим

$$\int_{\Delta_*} [f_\varepsilon(x_1', \boldsymbol{y}) - f_\varepsilon(x_1, \boldsymbol{y})]\, d\boldsymbol{y} = \int_\Delta dy \int_{x_1}^{x_1'} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_1}(t, \boldsymbol{y})\, dt. \tag{5}$$

Из (3) следует, что существует последовательность чисел $\varepsilon'_k \to 0$ и функция $\psi \in L_p(\Delta)$ такая, что $\frac{\partial f_{\varepsilon'_k}}{\partial x_1} \to \psi$ слабо в смысле $L_p(\Delta)$ (см. 1.3.11). С другой стороны, из того, что $\|f_{\varepsilon'_k} - f\|_{L_p(\Delta)} \to 0$, из последовательности $\{\varepsilon'_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_k\}$ такую, что

$$\int_{\Delta_*} f_{\varepsilon_k}(x_1, y)\,dy \to \int_{\Delta_*} f(x_1, y)\,dy, \qquad \varepsilon_k \to 0,$$

для всех x_1 из некоторого множества $\mathscr{E} \subset [a, b] = \text{пр}_{x_1}\Delta$ (проекция Δ на ось x_1) меры (линейной) $b-a$. В таком случае, если в (5) положить $\varepsilon = \varepsilon_k$, то в пределе при $\varepsilon_k \to 0$ для любых x_1, $x'_1 \in \mathscr{E}$ получим

$$\int_{\Delta_*} [f(x'_1, y) - f(x_1, y)]\,dy = \int_{\Delta_*} dy \int_{x_1}^{x'_1} \psi(t, y)\,dt.$$

Если разделить обе части этого равенства на $h_1, \ldots, h_n$ и перейти к пределу при $h_1 \to 0$, затем $h_2 \to 0$ и т. д., то получим почти для всех $y = (x_2, \ldots, x_n)$ и

$$x_1 \in \mathscr{E}, \qquad x'_1 \in \mathscr{E} \qquad ((x_1, y),\ (x'_1, y) \in \Delta):$$

$$f(x'_1, y) - f(x_1, y) = \int_{x_1}^{x'_1} \psi(t, y)\,dt. \tag{6}$$

На самом деле это равенство верно почти для всех допустимых y и всех x_1, $x'_1 \in [a, b]$, поскольку его правая часть непрерывна по x_1, x'_1. Оно указывает на существование на Δ (обобщенной) частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \psi \in L_p(\Delta)$ и в силу произвольности Δ на существование $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L_p(\Omega)$, каково бы ни было открытое $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset g$.

Так как теперь уже мы знаем, что подынтегральная функция в (1) стремится почти всюду на Ω к $\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^p$, то (теорема Фату 1.3.10)

$$\int_{\Omega} \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^p dx \leqslant \sup_h \int_{\Omega} \left|\frac{\Delta_{x_1, h} f}{h}\right|^p dx \leqslant M,$$

и вследствие произвольности $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset g$ справедливо (2).

4.8.1. Теорема 4.8 при $p = \infty$ $n = 1$ есть известная теорема из теории функций действительного переменного: *если функция f удовлетворяет на интервале (a, b) условию Липшица с константой M, то она имеет почти всюду на (a, b) производную, удов-*

летворяющую неравенству $|f'(x)|\leqslant M$ (см. П. С. Александров и А. Н. Колмогоров [1]).

4.8.2. Теорема 4.8 при $p=1$, $n=1$ переходит в следующую: *если для локально суммируемой на* (a, b) *функции* f *выполняется неравенство*

$$\int\limits_a^{b-h} |f(x+h)-f(x)|\,dx \leqslant Mh \qquad (0<h<b-a),$$

то она эквивалентна некоторой функции, которую мы снова обозначаем через f, *ограниченной вариации на* (a, b) *и*

$$\operatorname*{Var}_{(a,\,b)} f \leqslant M.$$

В самом деле, рассуждая, как в начале доказательства теоремы 4.8, получим

$$\int\limits_\Delta |f'_\varepsilon|\,dx \leqslant M,$$

где Δ — произвольный интервал такой, что $\bar\Delta\subset\Delta_1\subset\bar\Delta_1\subset(a, b)$, Поэтому

$$\operatorname*{Var}_{(a,\,b)} f_\varepsilon = \int\limits_a^b |f'_\varepsilon|\,dx \leqslant M. \tag{1}$$

Так как $f\in L(\Delta_1)$, то $\int\limits_{\Delta_1} |f_\varepsilon - f|\,dx \to 0$ и в силу произвольности $\Delta_1\subset\bar\Delta_1\subset(a, b)$ существует последовательность $\varepsilon_k\to 0$ такая, что

$$f_{\varepsilon_k}(x)\to f(x) \tag{2}$$

почти всюду на (a, b). Но по теореме Хелли (см. И. П. Натансон [1]) из условия (1) и того факта, что выполняется (2) даже только в одной точке интервала (a, b), следует, что существует подпоследовательность $\{\varepsilon'_k\}$ последовательности $\{\varepsilon_k\}$ такая, что $f_{\varepsilon'_k}$ стремится всюду на (a, b) к некоторой функции ψ, ограниченной на (a, b) и

$$\operatorname*{Var}_{(a,\,b)} \psi \leqslant M.$$

Но тогда ψ и f эквивалентны на (a, b).

ГЛАВА 5

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМЫ

5.1. Введение

Всюду в этой главе мы считаем, что $u=(x_1, \ldots, x_m) \in R_m$, $y=(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, и рассматриваем цилиндрическое измеримое множество $\mathscr{E}=R_m \times \mathscr{E}'$ точек $x=(u, y)=(x_1, \ldots, x_n)$, где $u \in R_m$, $y \in \mathscr{E}'$. Через R_m мы обозначаем также подпространство R_n точек $(u, 0)=(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. При $m=n$ $\mathscr{E}=R_n$; случай $m=0$ будет мало интересен.

Эта глава посвящена изучению приближений функций из H, W и B классов (см. гл. 4), заданных на указанном цилиндрическом множестве $\mathscr{E}$. Функции классов H_p и W_p будут приближаться целыми функциями экспоненциального типа (по u) в метрике L_p, периодические же функции классов H_p^* и W_p^* — тригонометрическими полиномами (по u) в метрике L_p^*.

Для классов H и W будут доказаны прямые теоремы теории приближения (типа Джексона), показывающие, что определяющие класс числа r или системы чисел $(r_1, \ldots, r_m)$ определяют также порядок приближения принадлежащих к ним функций.

Будут доказаны также обратные теоремы теории приближения (типа Бернштейна), показывающие, что порядок приближения данной функции f при помощи функций конечной степени или тригонометрических полиномов часто полностью определяет тот класс H (но не W), к которому принадлежит функция f. В ряде интересных для анализа случаев будут получены на языке порядков приближений необходимые и достаточные условия принадлежности функции f к тому или иному H-классу. Важным средством выражения этих теорем будет служить понятие наилучшего приближения, идея которого восходит к П. Л. Чебышеву.

С этой точки зрения будут рассмотрены также классы $B_{p\theta}^r$. Принадлежащие к ним функции также полностью характеризуются поведением их наилучших приближений целыми функциями экспоненциального типа или (в периодическом случае) тригонометрическими полиномами. Именно, для того чтобы функция принадлежала к данному классу B, необходимо и достаточно, чтобы сходился определенный ряд, составленный из ее наилучших приближений. Мы увидим, что определение классов $B^r_{p\theta}$ на языке наилучших приближений, естественно, расширяется на случай $\theta=\infty$ и приводит к эквивалентности: $B^{(r)}_{p\infty}=H^{(r)}_p$.

В этой главе на основе метода приближений будет получено много различных эквивалентных определений норм в H и B классах. Сам факт эквивалентности сводится к некоторым неравенствам, в частности неравенствам между частными производными одной и той же функции.

Будем рассматривать определенные на $\mathscr{E}=R_m\times\mathscr{E}'$ функции $g_\nu(x)=g_\nu(u, y)$, $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_m)$, являющиеся почти для всех $y\in\mathscr{E}'$ целыми функциями экспоненциального типа ν по переменным $u=(x_1, \ldots, x_m)$. Совокупность всех таких функций $g_\nu\in L_p(\mathscr{E})$ при данном ν образует подпространство $\mathfrak{M}_{\nu p}(\mathscr{E})\subset L_p(\mathscr{E})$ (см. 3.5).

Пусть задана функция $f\in L_p(g)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. *Наилучшим приближением f при помощи функций $g_\nu\in\mathfrak{M}_{\nu p}(\mathscr{E})$, где $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ — заданная система чисел, называется величина*

$$E_\nu(f)=E_\nu(f)_{L_p(\mathscr{E})}=\inf_{g_\nu\in\mathfrak{M}_{\nu p}(\mathscr{E})}\|f-g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})}=\inf_{g_\nu}\|f-g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})}. \quad (1)$$

При $m=n$ нижняя грань (1) достигается для некоторой (наилучшей) функции. Действительно, из (1) следует существование последовательности функций $g_{\nu s}\in\mathfrak{M}_{\nu p}(R_n)$ $(s=1, 2, \ldots)$, для которых выполняются неравенства

$$\|f-g_{\nu s}\|_{L_p(R_n)}\leqslant E_\nu(f)_{L_p(R_n)}+\varepsilon_s=d+\varepsilon_s \qquad (\varepsilon_s\to 0).$$

Из этой последовательности можно в силу 3.3.6 выделить подпоследовательность, которую мы снова обозначим через $\{g_{\nu s}\}$ такую, что она равномерно сходится к некоторой функции $g_\nu\in\mathfrak{M}_{\nu p}(R_n)$ на любой ограниченной области $g\subset R_n$. Но тогда

$$\|f-g_\nu\|_{L_p(g)}=\lim_{s\to\infty}\|f-g_{\nu s}\|_{L_p(g)}\leqslant\lim_{s\to\infty}\|f-g_{\nu s}\|_{L_p(R_n)}=d.$$

Следовательно,

$$\|f-g_\nu\|_{L_p(R_n)}=d.$$

Так как $\mathfrak{M}_{\nu p}(\mathscr{E})$ есть подпространство пространства $L_p(\mathscr{E})$, то при условии $1<p<\infty$ нижняя грань (1) достигается для единственной (наилучшей) функции $g_\nu\in\mathfrak{M}_{\nu p}(\mathscr{E})$. Иногда удобно рассматривать функции, которые мы будем обозначать через

$g_{u\nu}(\boldsymbol{x})$ $(\nu>0)$. Это есть определенные на $\mathscr{E}$ функции, являющиеся почти для всех $\boldsymbol{y}=(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ целыми экспоненциального типа по $\boldsymbol{u}=(x_1, \ldots, x_m)$ сферической степени ν.

Наилучшим приближением функции $f \in L_p(\mathscr{E})$ *при помощи функций* $g_{u\nu}$ *(при данном* $\nu>0$*) назовем величину*

$$E_{u\nu}(f)=E_{u\nu}(f)_{L_p(\mathscr{E})}=\inf_{g_{u\nu}}\|f-g_{u\nu}\|_{L_p(\mathscr{E})}, \tag{2}$$

где нижняя грань распространена на все $g_{u\nu} \in L_p(\mathscr{E})$ *при данном* ν.

Частным случаем этих понятий является величина

$$E_{x_j\nu}(f)_{L_p(\mathscr{E})}=\inf_{g_{x_j\nu}}\|f-g_{x_j\nu}\|_{L_p(\mathscr{E})}, \tag{3}$$

где $\mathscr{E}=R_j\times\mathscr{E}^j$ $(j=1, \ldots, n)$, R_j есть ось координат x_j и $g_{x_j\nu}$ — функции из $L_p(\mathscr{E})$ экспоненциального типа ν по x_j.

5.2. Теорема об аппроксимации

5.2.1. Прямая теорема об аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа. Пусть $g(\xi)$ есть неотрицательная четная функция от одной переменной экспоненциального типа 1, удовлетворяющая условию

$$\varkappa_m\int_0^\infty g(\xi)\,\xi^{m-1}\,d\xi=\int_{R_m} g(|\boldsymbol{u}|)\,d\boldsymbol{u}=1, \tag{1}$$

где $\varkappa_m$ — соответствующая константа, и пусть $\mathscr{E}=R_m\times\mathscr{E}'$.

Для произвольной функции $\varphi(\boldsymbol{x})$, определенной на $\mathscr{E}$, вектора $\boldsymbol{h}\in R_m$ и натурального числа l справедливо равенство

$$(-1)^{l+1}\Delta_h^l\varphi(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0}^{l}(-1)^{j-1}C_l^j\varphi(\boldsymbol{x}+j\boldsymbol{h})=\sum_{j=1}^{l}d_j\varphi(\boldsymbol{x}+j\boldsymbol{h})-\varphi(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

где

$$\sum_{j=1}^{l}d_j=1. \tag{3}$$

Зададим функцию $f\in L_p(\mathscr{E})$; тогда для почти всех $y\in\mathscr{E}'$ функция $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$ от $\boldsymbol{u}$ принадлежит к $L_p(R_m)$, и имеет смысл функция

$$g_\nu(\boldsymbol{x})=g_\nu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})=\int_{R_m} g(|\boldsymbol{t}|)\{(-1)^{l-1}\Delta_{t/\nu}^l f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x})\}\,d\boldsymbol{t}=$$

$$=\int_{R_m} g(|\boldsymbol{t}|)\sum_{j=1}^{l}d_jf\left(\boldsymbol{u}+j\frac{\boldsymbol{t}}{\nu}, \boldsymbol{y}\right)d\boldsymbol{t}=\int_{R_m}K_\nu(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{u})\,f(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{t}, \tag{4}$$

где

$$K_\nu(u) = \sum_{j=1}^{l} d_j \left(\frac{\nu}{j}\right)^m g\left(\frac{|u|\nu}{j}\right). \tag{5}$$

В силу (1)

$$g_\nu(x) - f(x) = (-1)^{l-1} \int_{R_m} g(|t|)\, \Delta_{t/\nu}^l f(x)\, dt. \tag{6}$$

Предположим теперь, что функция f имеет на $\mathscr{E}$ по u производные порядка ρ, принадлежащие к $L_p(\mathscr{E})$ и $k = l - \rho$. Тогда из (6) следует (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} E_{u\nu}(f)_{L_p(\mathscr{E})} &\leqslant \|f - g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})} = \left\| \int_{R_m} g(|t|)\, \Delta_{t/\nu}^l f(x)\, dt \right\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \\ &\leqslant \int_{R_m} g(|t|) \left\| \Delta_{t/\nu}^l f(x) \right\|_{L_p(\mathscr{E})} dt \leqslant \\ \leqslant \int_{R_m} g(|t|) \left(\frac{|t|}{\nu}\right)^\rho \left\| \Delta_{t/\nu}^k f_t^\rho \right\|_{L_p(\mathscr{E})} dt &\leqslant \frac{1}{\nu^\rho} \int_{R_m} g(|t|)\, |t|^\rho\, \Omega_{R_m}^k \left(f^\rho, \frac{|t|}{\nu}\right) dt \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\nu^\rho} \int_{R_m} g(|t|)\, |t|^\rho (1 + |t|)^k\, dt\, \Omega_{R_m}^k \left(f^\rho, \frac{1}{\nu}\right)_{L_p(\mathscr{E})} = \\ &= \frac{c}{\nu^\rho}\, \Omega_{R_m}^k \left(f^\rho, \frac{1}{\nu}\right)_{L_p(\mathscr{E})} \quad (\nu > 0), \end{aligned} \tag{7}$$

если правая часть конечна.

В частности, из (7) следует, что если $f \in H_{up}^r(\mathscr{E})$, то

$$E_{u\nu}(f) \leqslant \frac{c_1}{\nu^r}. \tag{8}$$

Мы применили обобщенное неравенство Минковского 1.3.2 и неравенство 4.6 (6); f_t^ρ есть производная от f порядка ρ по направлению t, $\Omega_{R_m}^k(f^\rho, \delta)$ — модуль непрерывности f по всем производным порядка ρ. К нему применено свойство 4.2 (14). Наконец, мы считаем, что функция g выбрана так, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, t^{\rho+k+m-1}\, dt$$

был конечным. В качестве g можно взять функцию вида

$$\mu \left(\frac{\sin \frac{t}{\lambda}}{t}\right)^\lambda, \tag{9}$$

где $\lambda \geqslant \rho + k + m + 2$ — целое четное и μ — постоянная, для которой имеет место (1).

Так как $g(\xi)$ есть целая функция от одной переменной экспоненциального типа 1, то в силу (5) функция $g_\nu(x)$ есть в свою очередь целая сферического типа ν по $u=(x_1, \ldots, x_m)$ (см. 3.6.2), принадлежащая к $L_p(\mathscr{E})$.

5.2.1.1. Допустим, что про функцию f мы знаем только, что для нее конечен модуль непрерывности

$$\Omega^k_{R_m}(f^\rho, \delta)<\infty \tag{1}$$

при некотором $\delta>0$. Тогда, рассуждая как выше (справо налево), мы можем получить для $\frac{1}{\nu}\leqslant\delta$ всю цепочку соотношений 5.2.1 (7), исключив пока первое неравенство Разность $f-g_\nu$ будет представлять собой формальную запись функции, стоящей под интегралом в третьем члене 5.2.1 (7). Однако если известно, что функция f локально интегрируема в p-й степени на $\mathscr{E}$ (или даже несколько меньше: см. ниже), то можно заключить, что f интегрируема в p-й степени на $\mathscr{E}$ с определенным весом, а g_ν при выборе подходящего ядра g есть целая функция сферического типа ν (интегрируемая с тем же весом). В самом деле, из (1) для любого $h\in R_m$ с $|h|\leqslant\delta$ следует:

$$\left\|\Delta^l_h f(x)\right\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant\delta^\rho\left\|\Delta^k_h f^\rho_h(x)\right\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant\delta^\rho\Omega^k_{R_m}(f^\rho, \delta)$$

и в силу 4.2.2 (5) (заменить k на l)

$$\|f(x)(1+|u|^{-\mu})\|_{L_p(\mathscr{E})}<\infty, \tag{2}$$

где

$$\mu=\frac{m}{p}+l+\varepsilon \quad (\varepsilon>0). \tag{3}$$

Но тогда почти для всех $y\in\mathscr{E}'$

$$\|f(u, y)(1+|u|)^{-\mu}\|_{L_p(\mathscr{E})}<\infty.$$

И в силу 3.6.2 можно ядро $g(t)$ вида 5.2.1 (9) подобрать так (взяв λ достаточно большим), что функция

$$g_\nu(x)=\int_{R_m}K_\nu(t-u)f(t, y)\,dt \tag{4}$$

(см. 5.2.1 (4), (5)) заведомо будет сферического типа почти для всех y.

Теперь приобретает смысл также и первый член в формуле 5.2.1 (7) — $E_{u\nu}(f)_{L_p(\mathscr{E})}$. Его можно рассматривать как наилучшее приближение в метрике $L_p(\mathscr{E})$ рассматриваемой функции f при помощи целых функций сферического типа ν (вообще не принадлежащих к $L_p(\mathscr{E})$). Мы показали, что если для локально суммируемой в p-й степени функции f имеет смысл модуль (1), то ее имеет смысл приближать в метрике $L_p(\mathscr{E})$ функциями сферического типа ν по u.

На самом деле (см. 4.2.2 (4)) вместо локальной суммируемости $|f|^p$ (при $p=\infty$ — локальной ограниченности и измеримости f) достаточно предполагать существование $\|f\|_{L_p(v\times\mathscr{E}')}$, где $v=\{|u|<\delta(l+m)\}$.

5.2.2. Другие оценки аппроксимации. Ниже приводятся другие оценки, основанные на формуле 5.2.1 (6). Если f имеет обобщенные производные по $u=(u_1, \ldots, u_m)$ до порядка ρ включительно, то из 5.2.1 (6) следует, что во всяком случае формально для любого целочисленного неотрицательного вектора $s=(s_1, \ldots, s_m, 0, \ldots, 0)$ с $|s| \leqslant \rho$ имеет место равенство

$$g_\nu^{(s)} - f^{(s)} = (-1)^{l-1} \int_{R_m} g(|t|)\, \Delta_{t/\nu}^l f^{(s)}(x)\, dt \tag{1}$$

и неравенство

$$\left\| g_\nu^{(s)} - f^{(s)} \right\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \int_{R_m} g(|t|) \left\| \Delta_{t/\nu}^l f^{(s)}(x) \right\|_{L_p(\mathscr{E})} dt. \tag{2}$$

Если при любом s с $|s| \leqslant \rho$ интеграл в правой части (2) конечен, то имеет место уже неформальное равенство (1) и неравенство (2).

Мы будем еще пользоваться неравенством

$$\left\| \Delta_h^l \varphi(x) \right\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant c \left\| \Delta_h^{l'} \varphi(x) \right\|_{L_p(\mathscr{E})} \qquad (0 < l' < l), \tag{3}$$

где $c = 2^{l-l'}$, $h \in R_m$.

Тогда (пояснения ниже) при $k = l - \rho$, $|s| \leqslant \rho$

$$\begin{aligned}
\left\| g_\nu^{(s)} - f^{(s)} \right\|_{L_p(\mathscr{E})} &\leqslant \int_{R_m} g(|t|) \left(\frac{|t|}{\nu} \right)^{\rho - |s|} \left\| \Delta_{t/\nu}^{k+|s|} \frac{\partial^{\rho - |s|}}{\partial t^{\rho - |s|}} f^{(s)}(x) \right\|_{L_p(\mathscr{E})} dt \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\nu^{\rho - |s|}} \int_{R_m} g(|t|) |t|^{\rho - |s|} \sum \left\| \Delta_{t/\nu}^{k+|s|} f^{(\rho)} \right\|_{L_p(\mathscr{E})} dt \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\nu^{\rho - |s|}} \int_{R_m} g(|t|) |t|^{\rho - |s|} \sum \Omega_{R_m}^{k+|s|} \left(f^{(\rho)}, \frac{|t|}{\nu} \right) dt \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\nu^{\rho - |s|}} \int_{R_m} g(|t|) |t|^{\rho - |s|} (1 + |t|^{k+|s|})\, dt \sum \Omega_{R_m}^k \left(f^{(\rho)}, \frac{1}{\nu} \right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\nu^{\rho - |s|}} \int_0^\infty g(t) (1+t)^{\rho + k + m - 1}\, dt \sum \Omega_{R_m}^k \left(f^{(\rho)}, \frac{1}{\nu} \right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{c}{\nu^{\rho - |s|}} \sum_{|s| = \rho} \Omega_{R_m}^k \left(f^{(s)}, \frac{1}{\nu} \right) \qquad (\nu > 0).
\end{aligned} \tag{4}$$

Первое неравенство получается на основании 4.6 (6), здесь $\frac{\partial^{\rho - |s|}}{\partial t^{\rho - |s|}}$ обозначает производную порядка $\rho - |s|$ по направлению t. Второе получается в силу того, что эта производная есть линейная комбинация из обычных производных (по координатным направлениям) того же порядка с ограниченными коэффициентами, не зависящими от x; при этом сумма распространена на все производные $f^{(\rho)}$ порядка ρ. Третье вытекает из определения 4.2 (13). Четвертое, в силу 4.2 (14), при $\rho = 0$ (где надо f заменить на $f^{(\rho)}$) и в последнем неравенстве надо считать g выбранным так, чтобы выполнялось 5.2.1 (1).

Отметим еще, что любая производная $g_\nu^{(\rho)}$ по $u \in R_m$ порядка ρ может быть записана (см. 5.2.1 (4)) в виде

$$g_\nu^{(\rho)}(x) = \int_{R_m} g(|t|) \sum_{j=1}^{l} d_j f_u^{(\rho)} \left(u + \frac{jt}{\nu}, y \right) dt,$$

откуда

$$\|\Delta_h^k g_\nu^{(\rho)}(\boldsymbol{x})\|_{L_p(\mathscr{E})} = \int\limits_{R_m} g(|\boldsymbol{t}|) \sum_{j=1}^{l} |d_j| \left\| \Delta_h^k f^{(\rho)}\left(x + \frac{jt}{\nu}\right)\right\|_{L_p(\mathscr{E})} dt \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{R_m} g(|\boldsymbol{t}|)\, dt\, \omega_{R_m}^{(k)}(f^{(\rho)}, |\boldsymbol{h}|)_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant c_1 \omega_{R_m}^{(k)}(f^{(\rho)}, |\boldsymbol{h}|)_{L_p(\mathscr{E})}$$

или

$$\Omega_{R_m}^k\left(g_\nu^{(\rho)}, \delta\right) \leqslant c\Omega_{R_m}^k\left(f^{(\rho)}, \delta\right), \tag{5}$$

где c не зависит от ν и f.

Это показывает, что дифференциальные свойства f передаются на g_ν равномерно относительно ν.

5.2.3. Вернемся снова к ядру 5.2.1 (5), которое нас будет интересовать на этот раз при $m = 1$. Будем, таким образом, предполагать, что $\mathscr{E} = R_1 \times \mathscr{E}' \subset R_n$.

Положим

$$K_{\nu, l}(u) = \sum_{j=1}^{l} d_j \frac{\nu}{j} g\left(\frac{u\nu}{j}\right) \quad (l = \rho + k, \quad -\infty < u < \infty). \tag{1}$$

В силу 5.2.1 (7)

$$\left\| f - \int K_{\nu, l}(t - x_1) f(t, \boldsymbol{y})\, dt \right\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \frac{b_l}{\nu^\rho} \omega_{x_1}^k \left(f_{x_1}^{(\rho)}, \frac{1}{\nu}\right)_{L_p(\mathscr{E})} \tag{2}$$

в предположении, конечно, что правая часть (2) имеет смысл. Конечно, мы считаем, как в 5.2.1, что целая положительная четная функция $g(t)$ от одной переменной экспоненциального типа 1 выбрана так, что выполняется условие 5.2.1 (1) при $m = 1$, обеспечивающее оценку (2). Подчеркнем, что из него, во всяком случае, следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\nu, l}(t)\, dt = 1, \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_{\nu, l}(t)|\, dt \leqslant c_l < \infty \qquad (\nu > 0), \tag{4}$$

где c_l не зависит от $\nu > 0$.

Пусть теперь $\mathscr{E} = R_m \times \mathscr{E}' \subset R_n$, $g(\boldsymbol{x})$ — функция, которая почти для всех $\boldsymbol{y} \in \mathscr{E}'$ есть целая экспоненциального типа $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ по $(x_1, \ldots, x_m)$; мы как всегда будем ее обозначать через

$$g_{\boldsymbol{\nu}} = g_{\nu_1, \ldots, \nu_m}(x_1, \ldots, x_m).$$

Это определение имеет смысл, когда ν_i $(i = 1, \ldots, m)$ — положительные конечные числа. Распространим это определение на случай, когда некоторые ν_i (не все) равны ∞. Именно, если $\nu_i=\infty$ ($i\leqslant m$), будем считать, что по переменной x_i функция g не обязана быть целой. Например, $g_{\nu_1,\ \nu_2,\ \infty,\ \ldots,\ \infty}$, где ν_1, ν_2 конечны, обозначает, что эта функция почти для всех $(x_3, \ldots, x_n)$ в смысле $(n-2)$-мерной меры есть относительно x_1, x_2 целая функция экспоненциального типа соответственно ν_1, ν_2.

5.2.4. Теорема. *Пусть ρ_j, k_j $(j=1, \ldots, m)$ — натуральные числа, $l_j=\rho_j+k_j$, $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})\in L_p(\mathscr{E})$ и задана система функций*

$$g_{\nu_1,\ \infty,\ \ldots,\ \infty}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty} K_{\nu_1,\ l_1}(u)\, f(x_1+u,\ x_2,\ \ldots,\ x_m;\ \boldsymbol{y})\,du,$$

$$g_{\nu_1,\ \nu_2,\ \infty,\ \ldots,\ \infty}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{\nu_1,\ l_1}(u_1)\,K_{\nu_2,\ l_2}(u_2)\times$$
$$\times f(x_1+u_1,\ x_2+u_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_m;\ \boldsymbol{y})\,du_1\,du_2, \quad (1)$$

. . . .

$$g_{\nu_1,\ \ldots,\ \nu_m}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} K_{\nu_1,\ l_1}(u_1)\ldots$$
$$\ldots K_{\nu_m,\ l_m}(u_m)\, f(x_1+u_1,\ \ldots,\ x_m+u_m;\ \boldsymbol{y})\,du_1\ \ldots\ du_m,$$

где $\nu_j>0$.

Тогда каждая из функций $g_{\nu_1,\ \ldots,\ \nu_l,\ \infty,\ \ldots,\ \infty}$ (очевидно) принадлежит к $L_p(\mathscr{E})$ и является целой экспоненциального типа $\nu_1, \ldots, \nu_l$ соответственно по $x_1, \ldots, x_l$ $(1\leqslant l\leqslant m)$. Кроме того, выполняются неравенства

$$\|f-g_{\nu_1,\ \infty,\ \ldots,\ \infty}\|_{L_{p_1}(\mathscr{E})}\leqslant\frac{c\omega_{x_1}^{k_1}\left(f_{x_1}^{(\rho_1)},\ \frac{1}{\nu_1}\right)_{L_{p_1}(\mathscr{E})}}{\nu_1^{\rho_1}},$$

$$\|g_{\nu_1,\ \infty,\ \ldots,\ \infty}-g_{\nu_1,\ \nu_2,\ \infty,\ \ldots,\ \infty}\|_{L_{p_2}(\mathscr{E})}\leqslant\frac{c\omega_{x_2}^{k_2}\left(f_{x_2}^{(\rho_2)},\ \frac{1}{\nu_2}\right)_{L_{p_2}(\mathscr{E})}}{\nu_2^{\rho_2}}, \quad (2)$$

. . . .

$$\|g_{\nu_1,\ \ldots,\ \nu_{m-1},\ \infty}-g_{\nu_1,\ \ldots,\ \nu_m}\|_{L_{p_m}(\mathscr{E})}\leqslant\frac{c\omega_{x_m}^{k_m}\left(f_{x_m}^{(\rho_m)},\ \frac{1}{\nu_m}\right)_{L_{p_m}(\mathscr{E})}}{\nu_m^{\rho_m}},$$

$$\|g_\nu\|_{L_{p_j}(\mathscr{E})}\leqslant c\,\|f\|_{L_{p_j}(\mathscr{E})}, \quad (3)$$

$$\omega_{x_j}^{k_j}\left(g_{\nu x_j}^{(\rho_j)},\ \delta\right)_{L_{p_j}(\mathscr{E})}\leqslant c\omega_{x_j}^{k_j}\left(f_{x_j}^{(\rho_j)},\ \delta\right)_{L_{p_j}(\mathscr{E})} \quad (j=1,\ \ldots,\ m). \quad (4)$$

Из (1), в частности, при $p=p_1=\ldots=p_m$, очевидно, следует:

$$\|f-g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant c\sum_{j=1}^{m}\frac{\omega_{x_j}^{k_j}\left(f_{x_j}^{(\rho_j)},\ \frac{1}{\nu_j}\right)_{L_p(\mathscr{E})}}{\nu_j^{\rho_j}}. \tag{5}$$

Доказательство. Приведем доказательство теоремы в случае $m=3$; для $m>3$ оно аналогично.

Первое неравенство (2) получается на основании 5.2.3 (2):

$$\|f-g_{\nu_1,\,\infty,\,\ldots,\,\infty}\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant\frac{b_{l_1}}{\nu_1^{\rho_1}}\,\omega_{x_1}^{(k)}\left(f_{x_1}^{(\rho_1)},\ \frac{1}{\nu_1}\right)_{L_p(\mathscr{E})}.$$

Второе неравенство (2) получается при помощи следующих выкладок:

$$\|g_{\nu_1,\,\infty,\,\infty}-g_{\nu_1,\,\nu_2,\,\infty}\|_{L_{p_2}(\mathscr{E})}=$$
$$=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}K_{\nu_1,\,l_1}(u_1)\,h_1(x_1+u_1,\ x_2,\ x_3;\ y)\,du_1\right\|_{L_{p_2}(\mathscr{E})}, \tag{6}$$

где

$$h_1(x_1,\ x_2,\ x_3;\ y)=$$
$$=f(x_1,\ x_2,\ x_3;\ y)-\int_{-\infty}^{\infty}K_{\nu_2,\,l_2}(u_2)\,f(x_1,\ x_2+u_2,\ x_3;\ y)\,du_2$$

и в силу 5.2.3 (2)

$$\|h_1\|_{L_{p_2}(\mathscr{E})}\leqslant\frac{b_{l_2}\,\omega_{x_2}^{k_2}\left(f_{x_2}^{(\rho_2)},\ \frac{1}{\nu_2}\right)}{\nu_2^{\rho_2}}.$$

Тогда, применяя к (6) обобщенное неравенство Минковского, получим (см. еще 5.2.3 (4))

$$\|g_{\nu_1,\,\infty,\,\infty}-g_{\nu_1,\,\nu_2,\,\infty}\|_{L_{p_2}(\mathscr{E})}\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|K_{\nu_1,\,l_1}(u_1)|\,\|h_1(x_1+u_1,\ x_2,\ x_3;\ y)\|_{L_{p_2}(\mathscr{E})}\,du_1=$$
$$=\|h_1\|_{L_{p_2}(\mathscr{E})}\int_{-\infty}^{\infty}|K_{\nu_1,\,l_1}(u_1)|\,du_1\leqslant\frac{c_{l_1}b_{l_2}\,\omega_{x_2}^{k_2}\left(f_{x_2}^{(\rho_2)},\ \frac{1}{\nu_2}\right)}{\nu_2^{\rho_2}}.$$

Наконец, третье неравенство (2) получим при помощи рассуждений:

$$(g_{\nu_1,\,\nu_2,\,\infty}-g_{\nu_1,\,\nu_2,\,\nu_3})(x_1,\ x_2,\ x_3;\ y)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_{\nu_1,\,l_1}(u_1)\,K_{\nu_2,\,l_2}(u_2)\,h_2(x_1+u_1,\ x_2+u_2,\ x_3;\ y)\,du_1\,du_2,$$

где

$$h_2(x_1,\ x_2,\ x_3;\ y)=$$

$$=f(x_1,\ x_2,\ x_3;\ y)-\int_{-\infty}^{\infty}K_{\nu_3,\ l_3}(u)\,f(x_1,\ x_2,\ x_3+u;\ y)\,du.$$

Поэтому, применяя обобщенное неравенство Минковского и соотношения 5.2.3 (2) и (4), получим

$$\|g_{\nu_1,\ \nu_2,\ \infty}-g_{\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3}\|_{L_{p_3}(\mathscr{E})}\leqslant\frac{c_{l_1}c_{l_2}b_{l_3}\,\omega_{x_3}^{k_3}\left(f_{x_3}^{(\rho_3)},\ \frac{1}{\nu_3}\right)}{\nu_3^{\rho_3}}.$$

Неравенства (2) доказаны. Неравенство (3) (при $m=3$) немедленно получается, если к интегралу, стоящему в правой части последнего равенства (1), применить обобщенное неравенство Минковского

$$\|g_{\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3}\|_{L_{p_i}(\mathscr{E})}\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|K_{\nu_1,\ l_1}(u_1)\,K_{\nu_2,\ l_2}(u_2)\,K_{\nu_3,\ l_3}(u_3)|\,du_1\,du_2\,du_3\,\|f\|_{L_{p_i}(\mathscr{E})}\leqslant$$

$$\leqslant c_{l_1}c_{l_2}c_{l_3}\|f\|_{L_{p_i}(\mathscr{E})}\qquad(i=1,\ 2,\ 3).$$

Наконец, если продифференцировать последнее равенство (1) ρ_1 раз по x_1 и применить операцию k_1-й разности по x_1, то в силу неравенства Минковского получим

$$\left\|\Delta_{x_1,\ h}^{k}\frac{\partial^{\rho_1}g_\nu}{\partial x_1^{\rho_1}}\right\|_{L_{p_1}(\mathscr{E})}\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_{\nu_1,\ l_1}(u_1)\,K_{\nu_2,\ l_2}(u_2)\,K_{\nu_3,\ l_3}(u_3)\times$$

$$\times\|\Delta_{x_1,\ h}^{k_1}f_{x_1}^{(\rho_1)}(x_1+u_1,\ x_2+u_2,\ x_3+u_3,\ y)\|_{L_p(\mathscr{E})}\,du_1\,du_2\,du_3\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|K_{\nu_1,\ l_1}K_{\nu_2,\ l_2}K_{\nu_3,\ l_3}|\,du_1\,du_2\,du_3\quad\omega_{x_1}^{(k_1)}\left(f_{x_1}^{(\rho_1)},\ |h|\right),$$

откуда следует (4). При $i=2,\ 3$ доказательство аналогично.

5.3. Периодические классы

Теоремы § 5.2 сохраняются с некоторыми видоизменениями в доказательствах, если в их формулировках рассматриваемые там функции считать периодическими периода 2π, а приближающие целые функции g_ν заменить на тригонометрические полиномы T_ν. Как всегда, в этом случае надо нормы $\|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E})}$ ($\mathscr{E}=R_m\times\mathscr{E}_1\subset R_n$) заменить на нормы $\|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E}_*)}$ ($\mathscr{E}_*=\Delta^{(m)}\times\mathscr{E}_1$), где $\Delta^{(m)}=\{0\leqslant x_j\leqslant 2\pi;\ j=1,\ \ldots,\ m\}$. Первые простейшие прямые теоремы приближения были получены в периодическом случае. Именно, Джексон показал, что периодическую периода 2π функцию от одной переменной, имеющую непрерывную производную порядка r, можно приблизить тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ так, что отклонение (в равномерной метрике C) удовлетворяет неравенству

$$|f(x)-T_n(x)| \leqslant c_r \frac{\omega_*\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)}{n^r} \quad (n=1, 2, \ldots),$$

где $\omega_*(f^{(r)}, \delta)$ есть модуль непрерывности функции $f^{(r)}$. Метод приближения периодических функций тригонометрическими полиномами, который будет рассматриваться ниже, является модернизованным методом Джексона. В простейших случаях (см. далее 5.3.1 (6), (8) $l=1$, $\sigma=2$, $n=1$) он совпадает с методом Джексона. С другой стороны, он является аналогом рассмотренного выше метода 5.2.1 (4) приближения целыми функциями экспоненциального типа.

5.3.1. Первые два равенства 5.2.1 (4) при $m=1$, $-\infty < x < \infty$ можно еще записать в виде

$$g_\nu(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu g(\nu t)\left\{(-1)^{l+1}\Delta_{x,t}^{l} f(x, y)+f(x, y)\right\} dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \nu g(\nu t) \sum_{k=1}^{l} d_k f(x+kt, y)\, dt, \tag{1}$$

где

$$d_k=(-1)^{k-1}C_l^k \quad (k=1, \ldots, 1) \tag{2}$$

и

$$q_\nu(t)=\nu g(\nu t)$$

есть целая неотрицательная функция экспоненциального типа ν, удовлетворяющая (см. 5.2.1 (1), (2)) следующему условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_\nu(t)\, dt=1. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение по аналогии тригонометрические полиномы $\tau_\nu(t)$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$ порядка не выше ν, обладающие следующими свойствами:

$$\int_0^{2\pi} \tau_\nu(t)\, dt=1, \tag{4}$$

$$\int_0^{2\pi} |\tau_\nu(t)|\, dt \leqslant c, \quad (\nu=1, 2, \ldots), \tag{5}$$

где c — константа, не зависящая от ν.

Очевидно,

$$\tau_0(t)=\frac{2}{\pi}.$$

При $\nu>0$ полиномы $\tau_\nu(t)$ определяются неоднозначно.

Такие полиномы можно получить, например (см 2.2.2 (2)), при помощи формулы

$$d_\nu(t)=\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{\sin\frac{\lambda t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2\sigma}, \tag{6}$$

где $\sigma>0$ — целое, не зависящее от λ число, λ — натуральное число такое, что

$$2(\lambda-1)\sigma\leqslant\nu<2\lambda\sigma; \tag{7}$$

константа a_ν подобрана так, чтобы выполнялось равенство (4). В примере (6) полиномы $\tau_\nu(t)$ неотрицательны, поэтому свойство (5) автоматически следует из свойства (4).

Определим по аналогии с (1) функцию

$$T_\nu(x, y)=\int_0^{2\pi}\tau_\nu(t)\left\{(-1)^{l+1}\Delta_{x,t}^l f(x, y)+f(x, y)\right\}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\tau_\nu(t)\sum_{k=1}^{l} d_k f(x+kt, y)\,dt, \tag{8}$$

где на этот раз $f(x)=f(x, y)$ есть определенная на $\mathscr{E}=R_1\times\mathscr{E}'\subset R_n$ ($x\in R_1$, $y\in\mathscr{E}'$) периода 2π по x, интегрируемая в p-й степени на $\mathscr{E}_*=[0, 2\pi]\times\mathscr{E}'$ функция.

Отметим, что

$$T_0(x, y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{l} d_k f(x+kt, y)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}f(u, y)\,du\sum_{k=1}^{l}(-1)^{k+1}C_l^k=\int_0^{2\pi}f(u, y)\,du=T_0(y). \tag{8'}$$

Таким образом, при фиксированном y функция $T_0(x, y)$ есть константа (функция от y), представляющая собой среднее значение $f(x, y)$ по периоду 2π.

В силу периодичности f можно еще написать:

$$T_\nu(x, y)=\sum_{k=1}^{l}\frac{d_k}{k}\int_0^{2k\pi}\tau_\nu\left(\frac{u}{k}\right)f(x+u, y)\,du=$$

$$=\sum_{k=1}^{l}\frac{d_k}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\int_{2s\pi}^{2(s+1)\pi}\tau_\nu\left(\frac{u}{k}\right)f(x+u, y)\,du=$$

$$=\sum_{k=1}^{l}\frac{d_k}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\int_0^{2\pi}\tau_\nu\left(\frac{t+2s\pi}{k}\right)f(x+t, y)\,dt=\int_0^{2\pi}K_\nu(t)f(x+t, y)\,dt, \tag{9}$$

где

$$K_\nu(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{d_k}{k} \sum_{s=0}^{k-1} \tau_\nu\left(\frac{t+2s\pi}{k}\right). \tag{10}$$

Покажем, что функция $K_\nu(t)$ есть тригонометрический полином порядка не выше ν, откуда следует, что $T_\nu(x, y)$ по x (почти для всех y) есть также тригонометрический полином порядка не выше ν.

В самом деле, тригонометрический полином τ_ν можно записать в виде некоторой линейной комбинации

$$\tau_\nu(t) = \sum_{-\nu}^{\nu} a_\lambda e^{i\lambda t} \qquad (\bar{a}_\lambda = a_{-\lambda})$$

с постоянными коэффициентами a_λ.

Но

$$\sum_{s=0}^{k-1} e^{i\lambda\frac{t+2s\pi}{k}} = e^{\frac{i\lambda t}{k}} \sum_{s=0}^{k-1} e^{i\frac{\lambda 2s\pi}{k}} = \begin{cases} ke^{i\frac{\lambda t}{k}} = ke^{i\mu t} & \text{при } \frac{\lambda}{k} = \mu \text{ целом}, \\ 0 & \text{при } \frac{\lambda}{k} = \mu \text{ нецелом}, \end{cases}$$

и, следовательно, сумма

$$\sum_{s=0}^{k-1} \tau_\nu\left(\frac{t+2s\pi}{k}\right) = \sum_{-\nu}^{\nu} a_\lambda \sum_{s=0}^{k-1} e^{i\lambda\frac{t+2s\pi}{k}}$$

есть тригонометрический полином порядка ν. Но тогда K_ν также есть тригонометрический полином порядка ν.

Из (8) следует

$$T_\nu - f = (-1)^{l+1} \int_0^{2\pi} \tau_\nu(t)\, \Delta_{x,t}^{l} f(x, y)\, dt, \tag{11}$$

откуда применением обобщенного неравенства Минковского получим основное неравенство

$$\|T_\nu - f\|_{L_p(\mathcal{E}_*)} \leqslant \int_0^{2\pi} |\tau_\nu(t)|\, \|\Delta_{x,t}^{l} f(x, y)\|_{L_p(\mathcal{E}_*)}\, dt \tag{12}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots)$$

Имеет место следующая теорема, сводящаяся к неравенству, аналогичному 5.2.1 (7).

5.3.2. Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mathcal{E} = R_1 \times \mathcal{E}'_1 \subset R_n$, *функция* $f = f(x, y)$ $(x \in R_1,\ y \in \mathcal{E}_1)$ *определена на* $\mathcal{E}$, *имеет период* 2π *относительно* x *почти для всех* $y \in \mathcal{E}'$ *и принадлежит к классу* $L_p(\mathcal{E}_*)$, $\mathcal{E}_* = [0, 2\pi] \times \mathcal{E}'_*$. *Кроме того, пусть* f *имеет на* $\mathcal{E}$ *обобщенную производную* $f_x^{(\rho)} = \frac{\partial^\rho f}{\partial x^\rho}$ *порядка* ρ $\left(f_x^{(0)} = f\right)$.

Наконец, пусть четные неотрицательные тригонометрические полиномы $\tau_\nu(t)$ *порядка* ν *удовлетворяют наряду с условием* 5.3.1 (4) *еще дополнительному условию*

$$\int_0^\pi \tau_\nu(t)\, t^\rho\, dt \leqslant \frac{a_\rho}{(\nu+1)^\rho}, \tag{1}$$

где константа a_ρ *не зависит от* $\nu=0, 1, 2, \ldots$ (*Такие полиномы можно получить по формуле* 5.3.1 (6) *при соответствующем выборе* σ *и* λ.)

Тогда определяемая равенствами 5.3.1 (8) *функция* $T_\nu(x, y)$ (*тригонометрический полином порядка* ν *по* x) *приближает* f *в метрике* $L_p(\mathscr{E}_*)$ *со следующей оценкой:*

$$\|f-T_\nu\|_{L_p(\mathscr{E}_*)} \leqslant b_\rho \frac{\overset{k}{\omega}{}^*_{x,\, L_p(\mathscr{E})}\left(f_x^{(\rho)}, \frac{\pi}{\nu+1}\right)}{(\nu+1)^\rho} \quad (\nu=0, 1, \ldots), \tag{2}$$

где b_ρ — *константа, зависящая от* ρ.

Доказательство. Мы уже знаем, что тригонометрические полиномы $d_\nu(t)$, определяемые соотношениями 5.3.1 (6), (7), удовлетворяют условиям 5.3.1 (4). Убедимся, что они при $\nu \geqslant 1$ удовлетворяют также неравенству (1) при некоторой константе $a_{\rho+1}$ в предположении, что $2\sigma-\rho\geqslant 3$. Этим будет установлено существование полиномов, удовлетворяющих условиям теоремы.

В самом деле,

$$\int_0^\pi d_\nu(t)\, t^\rho\, dt \leqslant \frac{c_1}{a_\nu} \int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{\lambda t}{2}}{t}\right)^{2\sigma} t^\rho\, dt \leqslant \frac{c_2}{\lambda^\rho} \int_0^\infty \frac{(\sin u)^{2\sigma}}{u^{2\sigma-\rho}}\, du \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_3}{\lambda^\rho} \leqslant \frac{a_\rho}{(\nu+1)^\rho} \quad (\nu=1, 2, \ldots),$$

где последнее неравенство следует из 5.3.1 (7).

Примем во внимание, что имеет место неравенство

$$\left\|\Delta_{x,t}^{\rho+k} f(x, y)\right\|_{L_p^*(\mathscr{E})} \leqslant |t|^\rho \left\|\Delta_{x,t}^k f_x^{(\rho)}(x, y)\right\|_{L_p^*(\mathscr{E})} \leqslant |t|^\rho \omega_*^k(|t|), \tag{3}$$

где

$$\omega_*^k(\delta) = \overset{k}{\omega}{}^*_{x,\, L_p(\mathscr{E})}(f, \delta).$$

Заметим еще, что справедливо неравенство

$$\omega_*^k(t) \leqslant c(\nu+1)^k t^k \omega_*^k\left(\frac{\pi}{\nu+1}\right) \quad \left(\frac{\pi}{\nu}\leqslant t\right), \tag{4}$$

которое доказывается аналогично неравенству 4.2 (8).

Применим неравенство 5.3.1 (12) при $l=\rho+k$, учтя (3) и (4):

$$\|f-\tau_\nu\|_{L_p^*(\mathscr{E})} \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \tau_\nu(t) \left\| \Delta_{x,t}^{\rho+k} f(x, y) \right\|_{L_p^*(\mathscr{E})} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \tau_\nu(t) \, |t|^\rho \omega_*^k(|t|)\, dt = 2\int_0^\pi \tau_\nu(t)\, t^\rho \omega_*^k(t)\, dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{\nu+1}} \tau_\nu(t)\, t^\rho \omega_*^k(t)\, dt + 2\int_{\frac{\pi}{\nu+1}}^{\pi} \tau_\nu(t)\, t^\rho \omega_*^k(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\omega_*^k\left(\frac{\pi}{\nu+1}\right)\left[\left(\frac{\pi}{\nu+1}\right)^\rho + \frac{2}{\pi}(\nu+1)^k \int_{\frac{\pi}{\nu+1}}^{\pi} \tau_\nu(t)\, t^{\rho+k}\, dt\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2\omega_*^k\left(\frac{\pi}{\nu+1}\right)\left[\left(\frac{\pi}{\nu+1}\right)^\rho + \frac{2}{\pi}\frac{a_{\rho+k}}{(\nu+1)^\rho}\right] = \frac{b_\rho}{(\nu+1)^\rho}\omega_*^k\left(\frac{\pi}{\nu+1}\right),$$

где

$$b_\rho = 2\left(\pi^\rho + \frac{2}{\pi} a_{\rho+1}\right).$$

Этим теорема доказана.

Примечание 1. Для рассмотренного тригонометрического полинома T_ν выполняется равенство 5.3.1 (11), поэтому

$$T_\nu^{(\rho)}(x, y) = f^{(\rho)}(x, y) + (-1)^{l+1}\int_0^{2\pi} \tau_\nu(t)\, \Delta_{x,t}^l f_x^{(\rho)}(x, y)\, dt,$$

и мы получили равенство, аналогичное равенству 5.2.2 (1). Рассуждая, как в 5.2.2 при $l=\rho+k$, легко получим неравенство, аналогичное 5.2.2 (5):

$$\overset{k}{\omega}{}^*_{x,\, L_p(\mathscr{E})}(T_\nu^{(\rho)}, \delta) \leqslant c\,\overset{k}{\omega}{}^*_{x,\, L_p(\mathscr{E})}(f^{(\rho)}, \delta), \tag{5}$$

где константа c не зависит от рядом стоящего множителя.

Примечание 2. Если периодическая функция $f(x, y)$ такова, что ее среднее значение по периоду равно нулю, т. е.

$$\int_0^{2\pi} f(u, y)\, du = 0,$$

то $T_0=0$ (см. 5.3.1 (8)), поэтому неравенство (2) при $\nu=0$ сводится к следующему неравенству:

$$\|f\|_{L_p(\mathscr{E}_*)} \leqslant b_\rho \overset{k}{\omega}{}^*_{x,\, L_p(\mathscr{E})}(f_x^{(\rho)}, \pi). \tag{6}$$

5.3.3. Как в 5.2.3, можно определить (аналогичные $g_{\nu_1, \ldots, \nu_m}(x)$) функции $T_{\nu_1, \ldots, \nu_m}(x_1, \ldots, x_n)$, заданные на измеримом множестве $\mathscr{E} = R_m \times \mathscr{E}_1 \subset R_n$, являющиеся тригонометрическими полиномами почти для всех $y=(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \mathscr{E}'$ относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$ соответственно порядков $\nu_1, \ldots, \nu_m$. Мы будем, как в 5.2.3, допускать, что отдельные ν_k $(k=1, \ldots, m)$ могут равняться ∞.

Пусть $r=(r_1, \ldots, r_m)>0$. Определим четные неотрицательные тригонометрические полиномы $\tau_{\nu, r_j}(t)$ порядка ν, удовлетворяющие условиям теоремы 5.3.2 соответственно при $\rho=r_1, \ldots, \rho=r_m$. Для них, таким образом, выполняются условия

$$\int_0^{2\pi} \tau_{\nu, r_j}(t)\,dt=1, \tag{1}$$

$$\int_0^{2\pi} \tau_{\nu, r_j}(t)\,dt \leqslant \frac{a_{r_j}}{(\nu+1)^{r_j}} \quad (j=1, \ldots, m;\ \nu=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Определим далее тригонометрические полиномы K_{ν, r_j} (ядра) порядков ν по формулам

$$K_{\nu, r_j}(t)=\sum_{q=1}^{l_j} \frac{d_q}{q} \sum_{s=0}^{q-1} \tau_{\nu, r_j}\left(\frac{t+2s\pi}{q}\right) \quad (k=1, \ldots, m),$$

(см. 5.3.1), где $l_j \geqslant r+k$.

Полагаем далее

$$T_{\nu_1, \infty, \ldots, \infty}(x)=\int_0^{2\pi} K_{\nu_1 r_1}(u)\, f(x_1+u, x_2, \ldots, x_m; y)\,du,$$

. . . .

$$T_{\nu_1, \ldots, \nu_m}(x)=$$
$$=\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} K_{\nu_1 r_1}(u_1) \ldots K_{\nu_m r_m}(u_m)\, f(x_1+u_1, \ldots, x_m+u_m; y)\,du_1 \ldots du_m.$$

Для указанного семейства $T_{\nu_1, \ldots, \nu_m}$ функций f можно по аналогии сформулировать и доказать теорему (обобщение теоремы Джексона), аналогичную теореме 5.2.4.

В частности, из нее следует, что если $f \in \overset{r}{H}{}_{up}^{*}(\mathscr{E})$, то

$$E_{\underset{x_1\nu}{*}}(f)_p \leqslant \frac{c\,\|f\|_{\overset{r}{h}{}_{x_1,p}^{*}}}{(\nu+1)^r}, \tag{3}$$

где c не зависит от рядом стоящего сомножителя.

5.4. Обратные теоремы теории приближений

В этом параграфе будет выяснена схема, следуя которой можно получить обратные теоремы теории приближений, указывающие на принадлежность функции к тому или иному классу, если известны оценки ее приближений.

Доказывается общая теорема, в основе которой лежит обратная теорема теории приближения (для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа), принадлежащая С. Н. Бернштейну*).

5.4.1. Теорема. *Пусть* R_n *есть* n-*мерное пространство точек* $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{u}=(x_1,\ldots,x_m)$, $\boldsymbol{y}=(x_{m+1},\ldots,x_n)$ *и* $R_m=(\boldsymbol{u},0)$ — *его* m-*мерное подпространство* $(1\leqslant m\leqslant n)$. *Пусть далее* $r>0$, k — *натуральное число,* $1\leqslant p\leqslant\infty$, *и* $\mathfrak{M}_\nu$ — *линейные, зависящие от параметра* $\nu\geqslant 1$ *множества функций, определенных на открытом множестве* $g\subset R_n$, *причем*

$$\mathfrak{M}_\nu\subset\mathfrak{M}_{\nu'}\quad(\nu<\nu'). \tag{1}$$

Допустим, что каждая функция $\tau_\nu\in\mathfrak{M}_\nu$ *обладает следующими свойствами:* τ_ν *имеет на* g *производные по* $\boldsymbol{u}$ *порядков, меньших* $r+k$, *и имеют место неравенства*

$$\|\tau_\nu^{(s)}\|_{L_p(g)}\leqslant c\nu^{|s|}\|\tau_\nu\|_{L_p(g)}, \tag{2}$$
$$\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_m,0,\ldots,0),\quad|\boldsymbol{s}|<r+k,$$

где константа c *не зависит от* ν.

Пусть, кроме того, для данной функции $f\in L_p(g)$ *существует семейство функций* $\tau_\nu\in\mathfrak{M}_\nu$, *зависящих от* ν, *такое, что*

$$\|f-\tau_\nu\|_{L_p(g)}\leqslant\frac{K}{\nu^r}\quad(\nu\geqslant 1), \tag{1}$$

где K *не зависит от* ν.

Тогда $f\in H^r_{up}(g)$ (см. 4.3.3) *и выполняются неравенства*

$$\|f^{(\rho)}\|_{L_p(g)}\leqslant A\,(\|f\|_{L_p(g)}+K) \tag{4}$$

для всех производных $f^{(\rho)}$ *от* f *порядка* $\rho<r$ *и*

$$\|f\|_{H^r_{up}(g)}\leqslant A\,(\|f\|_{L_p(g)}+K), \tag{5}$$

где A *не зависит от рядом стоящего множителя.*

Замечание 1. Функции τ_ν можно еще считать периодическими по x_1 периода 2π, определенными на $g=\mathscr{E}=R_1\times\mathscr{E}'$, и тогда в (1)—(5) надо $L_p(g)$, $H^r_{up}(g)$ заменить на $L_p^*(\mathscr{E})$, $H^{r*}_{up}(\mathscr{E})$.

Замечание 2. Можно считать, что ν пробегает значения $\nu=\nu(s)$, зависящие от $s=0,1,\ldots$, и удовлетворяющие условиям:

1) $\nu(s)\geqslant 1$,

2) $\nu(s)\to\infty$ $(s\to\infty)$,

3) $\frac{\nu(s+1)}{\nu(s)}\leqslant\Lambda<\infty$ $(s=0,1,\ldots)$,

где Λ не зависит от s. В частности, можно считать, что $\nu(s)=a^s$, $a>1$.

*) С. Н. Бернштейн [1], стр. 11—104.

Действительно, пусть

$$\|f-\tau_{\nu(s)}\|_{L_p(g)} \leqslant \frac{K}{\nu(s)^r} \qquad (s=0,\ 1,\ \ldots)$$

и $\nu_0 = \min \nu(s)$, $s=0,\ 1,\ \ldots$

Если $1 \leqslant \nu \leqslant \nu_0$, то полагаем $\tau_\nu = 0$ и тогда $\|f-\tau_\nu\| = = \|f\| \leqslant \frac{\|f\|\nu_0^r}{\nu^r}$, если же $\nu > \nu_0$, то подберем s так, чтобы

$$\nu(s) \leqslant \nu < \nu(s+1).$$

Так как $\nu_{\nu(s)} \subset \mathfrak{M}_{\nu(s)} \subset \mathfrak{M}_\nu$, то можно считать $\tau_{\nu(s)} = \tau_\nu$ и, следовательно,

$$\|f-\tau_\nu\|_{L_p(g)} \leqslant \frac{K}{\nu(s)^r} \leqslant \frac{K}{\nu^r}\left(\frac{\nu(s+1)}{\nu(s)}\right)^r \leqslant \frac{K\Lambda^r}{\nu^r}, \qquad \nu \geqslant 1.$$

Таким образом,

$$\|f-\tau_\nu\| \leqslant \frac{K_1}{\nu^r}, \qquad \nu \geqslant 1,$$

где

$$K_1 = \|f\|\nu_0^r + K\Lambda,$$

и неравенство (3) выполняется для всех $\nu \geqslant 1$, как требует теорема. Заключение теоремы (см. (4), (5)) не меняется от замены K на K_1, потому что $\|f\| + K_1 \leqslant \|f\| + K$.

Доказательство теоремы 5.4.1. В силу (3) функцию f можно представить в виде ряда

$$f = \sum_0^\infty Q_j, \tag{6}$$

где

$$Q_0 = \tau_1 = \tau_{2^0}, \quad Q_j = \tau_{2^j} - \tau_{2^{j-1}} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots),$$

сходящегося в смысле $L_p(g)$. При этом $(\|\cdot\|_{L_p(g)} = \|\cdot\|)$,

$$\|Q_0\| = \|\tau_1\| \leqslant K + \|f\|,$$

$$\|Q_j\| \leqslant \|\tau_{2^j} - f\| + \|f-\tau_{2^{j-1}}\| \leqslant \frac{K}{2^{jr}} + \frac{K}{2^{(j-1)r}} = \frac{c_1K}{2^{jr}} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots). \tag{7}$$

Возьмем какую-либо производную от f порядка ρ, смешанную или несмешанную:

$$f^{(\varrho)} = \sum_0^\infty Q_j^{(\varrho)}, \qquad |\boldsymbol{\rho}| = \rho. \tag{8}$$

Так как множества $\mathfrak{M}_{2^j}$ линейны и $\mathfrak{M}_{2^{j-1}} \subset \mathfrak{M}_{2^j}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$, то $Q_j \in \mathfrak{M}_{2^j}$ и на основании оценки (2) имеют место неравенства

$$\|Q_0^{(\varrho)}\| \leqslant c\|Q_0\| \leqslant c_1(\|f\|+K), \quad \|Q_j^{(\varrho)}\| \leqslant c2^{\rho j}\|Q_j\| \leqslant \frac{c_1K}{2^{j(r-\rho)}},$$

показывающие, что формальное почленное дифференцирование (8) ряда (6) при $\rho < r$ законно и ряд (8) сходится в смысле $L_p(g)$ к $f^{(\varrho)}$ (см. лемму 4.4.7). При этом $f \in W^{\rho}_{up}(g)$, и выполняются неравенства (4).

Зададим вектор $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_m, 0, \ldots, 0) \in R_m$ и подберем натуральное N так, что

$$\frac{1}{2^{N+1}} < |\boldsymbol{h}| \leqslant \frac{1}{2^N}, \qquad |\boldsymbol{h}|^2 = \sum_{j=1}^{m} h_j^2. \tag{10}$$

Рассмотрим k-ю разность функции $f^{(\varrho)}$, соответствующую сдвигу $\boldsymbol{h}$. Учитывая равенство $\Delta_h \varphi(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{h}| \int\limits_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial h}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h})\,dt$, получим

$$\Delta_h^k f^{(\varrho)}(\boldsymbol{x}) = $$
$$= \sum_0^N |\boldsymbol{h}|^k \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{\partial^k}{\partial h^k} Q_j^{(\varrho)}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(u_1 + \ldots + u_k))\,du_1 \ldots du_k + $$
$$+ \sum_{N+1}^{\infty} \Delta_h^k Q_j^{(\varrho)}(\boldsymbol{x}), \tag{11}$$

где $\boldsymbol{x} \in g_{kh}$. Очевидно,

$$\| \Delta_h^k f^{(\varrho)}(\boldsymbol{x}) \|_{L_p(g_{kh})} \leqslant$$
$$\leqslant |\boldsymbol{h}|^k \sum_0^N \left\| \frac{\partial^k}{\partial h^k} Q_j^{(\varrho)} \right\|_{L_p(g_{kh})} + 2^k \sum_{N+1}^{\infty} \| Q_j^{(\varrho)} \|_{L_p(g)} = J_1 + J_2. \tag{12}$$

Учитывая, что производная $\frac{\partial^k}{\partial h^k}$ есть конечная линейная комбинация из обычных производных по координатам $x_1, \ldots, x_m$ и неравенства (2), (9), (10), получим

$$I_1 \leqslant |\boldsymbol{h}|^k c_4 (\|f\| + K) \sum_0^N 2^{[k - (r - \rho)]j} \leqslant$$
$$\leqslant c_5 |\boldsymbol{h}|^k (\|f\| + K)\, 2^{[k - (r - \rho)]N} \leqslant c_6 (\|f\| + K) |\boldsymbol{h}|^{r - \rho}. \tag{13}$$

Важно отметить, что мы предполагаем, что $k > r - \rho$. Если бы мы считали, что $k = r - \rho$, то сумма

$$\sum_0^N 2^{[k - (r - \rho)]j} = N + 1$$

не имела бы порядка $2^{[k - (r - \rho)]N} = 1$.

Далее

$$I_2 \leqslant c_7 K \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{(r-\rho)j}} \leqslant c_8 K |h|^{r-\rho}. \tag{14}$$

Из (12) — (14) и (4) при $\rho=0$ следует (5).

5.4.2. Теорема (обратная 5.2.1. (8) *). *Пусть $r>0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $\mathscr{E} = R_m \times \mathscr{E}'$ и $f \in L_p(\mathscr{E})$.*

Если для наилучшего приближения f в метрике $L_p(\mathscr{E})$ при помощи целых функций экспоненциального сферического типа ν выполняется неравенство

$$E_{u\nu}(f)_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \frac{K}{\nu^r} \qquad (\nu \leqslant 1), \tag{1}$$

где K не зависит от ν (ν может пробегать значения $\nu = \nu(s)$, удовлетворяющие условиям замечания 2 в 5.4.1, $s=0, 1, \ldots$), то $f \in H_p^r(\mathscr{E})$, и

$$\|f\|_{H_p^r(\mathscr{E})} \leqslant A(\|f\|_{L_p(\mathscr{E})} + K), \tag{2}$$

$$\|f^{(\rho)}\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant A(\|f\|_{L_p(\mathscr{E})} + K), \qquad (|\rho| = 0, 1, \ldots, \bar{r}), \tag{3}$$

где A не зависит от рядом стоящего множителя.

Доказательство. Из условия следует существование семейства функций $g_\nu(u, y)$ ($u \in R_m$, $y \in \mathscr{E}'$) экспоненциального сферического типа ν по u (почти для всех $y \in \mathscr{E}'$) таких, что

$$\|f - g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant 2E_\nu(f)_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \frac{2K}{\nu^r}.$$

Но тогда утверждение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 5.4.1, если учесть, что g_ν являются также функциями экспоненциального типа ν по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_m$, и потому для них выполняется неравенство (см. 3.2.2 (9))

$$\|g_\nu^{(k)}\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \nu^{|k|} \|g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})},$$

какова бы ни была производная порядка $k = (k_1, \ldots, k_m, 0, \ldots, 0)$. Случай, когда $\nu = \nu(s)$ пробегает значения, описанные в замечании 2 в 5.4.1, сводится, согласно этому же замечанию, к случаю непрерывно изменяющегося ν.

5.4.3. Теорема (обратная к 5.3.3 (3) **). *Пусть $r>0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mathscr{E} = R_1 \times \mathscr{E}' \subset R_n$ и функция $f(x) = f(x_1, y)$ ($x_1 \in R_1$, $y \in \mathscr{E}'$) по переменной x_1 (почти для всех $y \in \mathscr{E}'$) периодическая периода 2π и принадлежит к $L_p^*(\mathscr{E})$.*

---

*) $m=1$, $p=\infty$ — С. Н. Бернштейн [1], стр. 421—432; $m=n=1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ — Н. И. Ахиезер [1]; $m=1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ — С. М. Никольский [3].

**) См. замечание в конце книги к 5.4.

Если для наилучшего приближения f в метрике $L_p^*(\mathscr{E})$ при помощи функций $T_\nu(x_1, y)$, являющихся (почти для всех $y \in \mathscr{E}'$) тригонометрическими полиномами порядка ν, выполняется неравенство

$$E_{x_1\nu} * (f)_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \frac{K}{(\nu+1)^r} \qquad (\nu = 0, 1 \ldots), \tag{1}$$

то $f \in H_{x_1 p}^{r*}(\mathscr{E})$ и

$$\| f_{x_1}^{(\rho)} \|_{L_p^*(\mathscr{E})} \leqslant AK \qquad (1 \leqslant \rho < r), \tag{2}$$

$$\| f \|_{h_{x_1 p}^{r*}} = M_f \leqslant AK, \tag{3}$$

где A не зависит от K.

В условии теоремы достаточно считать, что числа ν пробегают значения, описанные в замечании 2 в 5.4.1.

Эта теорема аналогична теореме 5.4.2. Но исторически она возникла ранее этой последней *), прежде всего, при $p = \infty$, $n = 1$. Ее условие (1) при $\nu = 0$ содержит неравенство для наилучшего приближения f при помощи константы, что приводит к неравенствам (2), (3) с правыми частями, зависящими только от K (сравни с 5.4.2 (2), (3)).

5.4.4. Гармонические полиномы. Рассмотрим гармонический полином

$$\Phi_n(\rho, \theta) = \sum_0^n \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant 1, \ -\infty < \theta < \infty). \tag{1}$$

Обозначим

$$\| \Phi \|_{L_p(\sigma_R)} = \int_R^1 \int_0^{2\pi} | \Phi(\rho, \theta) |^p \rho \, d\rho \, d\theta \quad (0 \leqslant R \leqslant 1). \tag{2}$$

Теорема. *Имеют место неравенства* **)

$$\left\| \frac{\partial^l \Phi_n}{\partial \rho^l} \right\|_{L_p(\sigma_R)} \leqslant c_R n^l \| \Phi_n \|_{L_p(\sigma_R)}, \tag{3}$$

$$\left\| \rho^l \frac{\partial^l \Phi_n}{\partial \rho^l} \right\|_{L_p(\sigma_R)} \leqslant c n^l \| \Phi_n \|_{L_p(\sigma_0)}, \tag{4}$$

$$\left\| \frac{\partial^l \Phi_n}{\partial \theta^l} \right\|_{L_p(\sigma_R)} \leqslant n^l \| \Phi_n \|_{L_p(\sigma_R)} \qquad (n, \ l = 1, 2, \ldots; \ 1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{5}$$

---

*) С. Н. Бернштейн [1], стр. 11—104, см. замечание в конце книги к 5.4.

**) А. Л. Шагинян [1] при $p = \infty$, Я. С. Бугров [2]—общий случай.

Доказательство. Положим

$$x(x-1)\ldots(x-l+1)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i x^i,$$

где, таким образом, λ_i — числа, зависящие от i и l. Тогда

$$\frac{\partial^l\Phi_n}{\partial\rho^l}=\frac{1}{\rho^l}\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\ldots(k-l+1)\rho^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)=$$

$$=\frac{1}{\rho_l}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i k^i\rho^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)=\frac{1}{\rho^l}\sum_{i=1}^{l}\Psi_n^{(i)}(\rho,\ \theta),$$

где

$$\Psi_n^{(i)}(\rho,\ \theta)=\frac{\lambda_l}{\rho^l}\sum_{k=1}^{n}k^i\rho^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta).$$

Имеем

$$\Psi_n^{(i)}(\rho,\ \theta)=\frac{\lambda_l}{\pi\rho^l}\int_0^{2\pi}\Phi_n(\rho,\ u+\theta)\sum_{k=1}^{n}k^i\cos ku\,du=$$

$$=\frac{2\lambda_l n^l}{\pi\rho^l}\int_0^{2\pi}\cos nu\Phi_n(\rho,\ u+\theta)\,\chi_n^{(i)}(u)\,du, \qquad (6)$$

где $\chi_n^{(i)}(u)=\sum\limits_0^{n-1}{}'\left(1-\frac{k}{n}\right)^i\cos ku$ и штрих обозначает, что слагаемое, соответствующее $k=0$, равно $\frac{1}{2}$. Здесь надо учесть, что $\cos nu\cos ku=\frac{1}{2}(\cos(n+k)u+\cos(n-k)u)$ и полученные, таким образом, члены $\cos(n+k)u$ при $k>0$ ортогональны на отрезке $(0,\ 2\pi)$ изменения u к тригонометрическому по u полиному $\Phi_n(\rho,\ \theta+u)$ порядка n.

Применяя преобразование Абеля, получим

$$\chi_n^{(i)}(u)=\sum_{k=0}^{n-3}(k+1)\Delta^2\left(1-\frac{k}{u}\right)^i F_k(u)+$$

$$+\frac{1}{n^{i-1}}F_{n-1}(u)+\frac{n-1}{n^i}(2^i-2)F_{n-2}(u),$$

где $F_k(u)$ — ядра Фейера (см. 2.2.2 (1)), $\Delta^2\mu_k=\mu_k-2\mu_{k+1}+\mu_{k+2}$.

Существенно отметить, что $F_k(u)\geqslant 0$ и $\Delta^2\left(1-\frac{k}{n}\right)^i\geqslant 0$, вследствие чего $\chi_n^{(i)}(u)\geqslant 0$ и $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\chi_n^{(i)}(u)\right|du=1$ $(i=1,\ 2,\ \ldots)$. Применяя к (6) обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\|\Psi_n^{(l)}\|_{L_p(\sigma_R)} \leqslant 2|\lambda_l| n^l R^{-l} \|\Phi_n\|_{L_p(\sigma_R)} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\chi_n^{(l)}(u)| \, du \leqslant$$
$$\leqslant c_R n^l \|\Phi_n\|_{L_p(\sigma_R)},$$

откуда следуют (3) и (4). Неравенство (5) следует из того, что $\Phi_n(\rho, \theta)$ есть тригонометрический полином по θ порядка n.

5.5. Прямые и обратные теоремы о наилучших приближениях. Эквивалентные H-нормы

В этом параграфе сопоставляются доказанные выше прямые и обратные теоремы о наилучших приближениях. Мы увидим, что функции классов H полностью характеризуются поведением их наилучших приближений. Как и всюду в этой главе, $\mathscr{E} = R_m \times \mathscr{E}' \subset R_n$.

Наилучшее приближение измеримой на $\mathscr{E}$ функции f при помощи целых функций экспоненциального сферического типа ν по u, согласно 5.2.1 (7), удовлетворяет неравенству

$$E_\nu(f) = E_{u\nu}(f)_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \|f - g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \frac{c}{\nu^\rho} \Omega_{R_m}^k\left(f^\rho, \frac{1}{\nu}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{\nu^\rho} \sum_{|s|=\rho} \Omega_{R_m}^k\left(f^{(s)}, \frac{1}{\nu}\right), \quad (1)$$

если, конечно, правая его часть имеет смысл. Таким образом,

$$E_\nu(f) = o(\nu^{-\rho}) \qquad (\nu \to \infty) \quad (2)$$

для $f \in W_{up}^\rho(\mathscr{E})$ при p конечном $(1 \leqslant p < \infty)$ и при $p = \infty$, если производные $f^{(s)}$ $(|s| = \rho)$ *равномерно непрерывны на* $\mathscr{E}$ *в направлении* R_m, что обозначает, что для любого ε найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f^{(s)}(x + h) - f^{(s)}(x)| < \varepsilon \qquad (|h| < \delta, \ h \in R_m).$$

Как показывают приводимые ниже примеры (5.5.5), оценка (2) при $\rho > 0$ не обращается, т. е. из того, что для $f \in L_p(\mathscr{E})$ выполняется (2), не следует, что $f \in W_{up}^\rho(\mathscr{E})$.

В случае же $\rho = 0$ она обращается. Именно, имеют место следующие две теоремы (типа Вейерштрасса).

5.5.1. Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Для того чтобы функция* $f \in L_p(\mathscr{E})$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство функций* $g_\nu \in L_p(\mathscr{E})$ *целых экспоненциального сферического типа* ν *по* u *таких, что*

$$\|f - g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})} \to 0 \qquad (\nu \to \infty). \quad (1)$$

Необходимость следует из 5.5 (1) при $\rho=0$, достаточность тривиальна.

5.5.2. Теорема 4*). *Для того чтобы функция f была ограниченной и равномерно непрерывной на $\mathscr{E}$ в направлении R_m, необходимо и достаточно существование такого семейства ограниченных в совокупности на $\mathscr{E}$ функций g_ν целых экспоненциального сферического типа ν по $\boldsymbol{u}$, что*

$$\lim_{\nu\to\infty} g_\nu(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

равномерно на $\mathscr{E}$.

Доказательство. Снова необходимость следует из 5.5 (1) при $\rho=0$. Докажем достаточность. Так как g_ν ограничены и имеет место равномерная сходимость (1), то f ограничена и существует постоянная λ такая, что для всех рассматриваемых ν и $\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}$

$$|g_\nu(\boldsymbol{x})|\leqslant\lambda.$$

Поэтому для $\boldsymbol{h}\in R_m$

$$|g_\nu(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-g_\nu(\boldsymbol{x})|\leqslant|\boldsymbol{h}|\sup_{\boldsymbol{x}}\left|\frac{\partial}{\partial h}g_\nu(\boldsymbol{x})\right|\leqslant$$
$$\leqslant|\boldsymbol{h}|\,\nu\sup_{\boldsymbol{x}}|g_\nu(\boldsymbol{x})|\leqslant\lambda\nu\,|\boldsymbol{h}|,$$

т. е. g_ν (при данном ν) равномерно непрерывны на $\mathscr{E}$ в направлении R_m, а потому и f равномерно непрерывна на $\mathscr{E}$ в направлении R_m.

5.5.3. Рассмотрим нормы

$${}^j\|f\|_{H^r_{up}(\mathscr{E})}={}^j\|f\|=\|f\|+{}^j\|f\|_h,\quad \|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E})},$$

и соответствующие им классы ${}^jH$, ${}^jh$, где

$${}^j\|f\|_h={}^jM_f\quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

наименьшие константы M, для которых соответственно выполняются неравенства (см. 4.3.3)

$$\Omega^k_{R_m}(f^{(s)},\ \delta)_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant M\delta^{r-\rho}\qquad (|\boldsymbol{s}|=\rho), \tag{1}$$

$$\Omega^k_{R_m}(f^\rho,\ \delta)_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant M\delta^{r-\rho}, \tag{2}$$

$$\|\Delta^k_h f^{(s)}(\boldsymbol{x})\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant M\,|\boldsymbol{h}|^{r-\rho}\qquad (|\boldsymbol{s}|=\rho), \tag{3}$$

$$\|\Delta^k_h f^\rho_h(\boldsymbol{x})\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant M\,|\boldsymbol{h}|^{r-\rho} \tag{4}$$

($\rho\geqslant 0$, $k>r-\rho>0$) и $\boldsymbol{h}\in R_m$. Мы вводим еще норму (класс)

$${}^5\|f\|_h=\sup_{\nu<\theta}\nu^r E_\nu(f), \tag{5}$$

*) С. Н. Бернштейн [2], стр. 371, при $n=1$.

где $E_\nu(f)=E_{u\nu}(f)$ есть наилучшее приближение функции f в метрике $L_p(\mathscr{E})$ целыми функциями сферического типа ν по u. Здесь ν может также пробегать значения $\nu(s)=a^s$, $a>1$ $(s=0, 1, 2, \ldots)$.

Кроме того,

$$^6\|f\|_H=\inf \sup_{s=0,1\ldots} a^{sr}\|Q_{a^s}\|, \tag{6}$$

где предполагается, что функция f представима в виде сходящегося к ней в метрике $L_p(\mathscr{E})$ ряда

$$f=\sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s}(x), \tag{7}$$

члены которого — целые функции сферического типа a^s по u, причем норма (6) конечна. Нижняя грань взята по всем разложениям (7). Отметим, что норма f явно в (6) не входит.

При $j=1, 2, 3, 4$ можно еще рассматривать видоизмененные константы ^jM_f, которые мы будем обозначать через $^jM'_f$ — это наименьшие константы в соответствующих неравенствах (1) — (4), когда $\delta\leqslant\eta$ или $\|h\|<\eta$, где η — заданное произвольное положительное число. Соответствующне классы будем обозначать через $^jH'$, $^jh'$ и нормы

$$^j\|f\|_{H'}=\|f\|+{}^j\|f\|_{h'}.$$

Нашей целью будет доказать, что все классы ^jH, $^lH'$ (но вообще не ^jh, $^lh'$) эквивалентны между собой; при этом каждый из них можно взять с любой независимой системой допустимых параметров k, ρ, η, a. Впрочем, константы соответствующих вложений зависят от этих параметров (наряду с r, n, m).

Сказанное даст основание в дальнейшем употреблять единое обозначение $\|f\|_{H_p^r(\mathscr{E})}$ для всех норм $^j\|\cdot\|$, $^j\|\cdot\|_{H'}$, опуская j и штрих; что касается норм $^j\|\cdot\|_h$, $^j\|\cdot\|_{h'}$, то для них эти обозначения, вообще говоря, существенны. Попутно мы получим некоторые вложения для классов h, интересные сами по себе.

Непосредственно из определения модулей непрерывности, входящих в (1), (2), следует, что имеет место эквивалентность

$$^1H\rightleftarrows{}^3H,\quad {}^3H\rightleftarrows{}^4H, \tag{8}$$

если сравниваемые классы берутся при одних и тех же парах k, ρ. Это же имеет место, если в (8) заменить H на h, H' или h' (при сравнении с одинаковыми η). Ниже будет показано, что $^1H\rightleftarrows{}^2H\rightleftarrows{}^1H'\rightleftarrows{}^2H'$, и при этом эти классы можно взять независимо с любыми допустимыми k, ρ, а также любыми $\eta>0$. Тогда в силу (8) к этой цепочке можно присоединить и классы ^jH, $^jH'$ при $j=3, 4$, которые, таким образом, также можно брать каждый с различными допустимыми k, ρ, η. Случаи $j=3$, 4 можно считать рассмотренными.

Зададим $\eta>0$ и допустимые k, ρ $(\rho\geqslant 0,\ k>r-\rho>0)$. Из (1) и (2) следует:

$$^1h'\to {}^2h'. \tag{9}$$

Далее

$$^2h'\to {}^5h', \tag{10}$$

где мы пока считаем

$$^5\|f\|_{h'}=\sup_{\nu\geqslant\frac{1}{\eta}}\nu^r E_\nu(f). \tag{11}$$

В самом деле, в силу 5.5 (1) для $f\in {}^2h'$ и функции g_ν, определяемой равенством 5.2.1 (6):

$$E_\nu(f)\leqslant\|f-g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant\frac{c}{\nu^\rho}\,{}^2M_f\frac{1}{\nu^{r-\rho}}=\frac{c\,{}^2M_f}{\nu^r}\left(\nu>\frac{1}{\eta}\right), \tag{12}$$

и потому

$$^5\|f\|_{h'}\leqslant c_1\,{}^2M_f.$$

Если теперь $f\in {}^5H'$, то $f\in L_p(\mathscr{E})$ и для f конечна норма (11).

Тогда в силу обратной теоремы 5.4.2 $f\in {}^1H$ и

$$^5H'\to {}^1H\to {}^1H'. \tag{13}$$

Второе вложение тривиально. В (9) и (10) можно, очевидно, заменить h на H, что вместе с (12) дает

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\nearrow {}^2H\to {}^2H' \\ {}^1H'\to {}^2H'\to {}^5H'\to {}^1H\to {}^1H' \end{array}, \tag{14}$$

т. е. классы, входящие в эту цепь, эквивалентны. Так как $^5H'$ не зависит от k, ρ, то можно считать, что в этой цепи пары k, ρ в ^jH и $^jH'$ $(j=1,\ 2)$ взяты произвольно и независимо. Число η в $^1H'$ и $^2H'$ тоже можно взять независимо, потому что ^1H не зависит от η.

Нам еще предстоит показать, что отмеченные выше варианты норм $^5\|\cdot\|$ эквивалентны между собой.

Из (5.5) (1) следует, что для $f\in {}^1H$

$$E_\nu(f)\leqslant\frac{c\,{}^1M_f}{\nu^r}\qquad(\nu>0),$$

поэтому

$$^1M_f\geqslant\sup_{\nu>0}\nu^r E_\nu(f)\geqslant\sup_{s=0,1,\ldots}a^{sr}E_{a^s}(f).$$

Но если правая часть в этих соотношениях конечна, $a>1$ и $f\in L_p(\mathscr{E})$, то по обратной теореме 5.4.2 (см. еще замечание 2 в 5.4.2) $f\in {}^1H$. Это доказывает эквивалентность.

Далее, пусть $f \in {}^5H$ и g_ν — функции целые сферического типа ν по u такие, что

$$\|f - g_\nu\| \leqslant 2E_\nu(f) \leqslant \frac{2\, {}^5\|f\|_h}{\nu^r}.$$

Зададим $a > 1$ и положим

$$Q_1 = Q_{a^0} = g_{a^0}, \quad Q_{a^s} = g_{a^s} - g_{a^{s-1}} \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Тогда получим представление функции f в виде сходящегося к ней в смысле $L_p(\mathscr{E})$ ряда

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^s} \tag{15}$$

с оценкой

$$\|Q_1\| \leqslant \|f\| + {}^5\|f\|_h \ll {}^5\|f\|_H,$$

$$\|Q_{a^s}\| \leqslant \|g_{a^s} - f\| + \|f - g_{a^{s-1}}\| \ll \frac{{}^5\|f\|_h}{a^{rs}},$$

где константа в последнем неравенстве зависит от a.

Таким образом

$${}^6\|f\| \leqslant \sup_{s=0, 1, \ldots} a^{rs} \|Q_{a^s}\| \ll {}^5\|f\|_H.$$

Наоборот, из того, что функция $f \in {}^6H$, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ она представима в виде ряда (7) так, что

$$\sup_s a^{sr} \|Q_{a^s}\| < {}^6\|f\|_H + \varepsilon.$$

Поэтому

$$E_{a^N}(f) \leqslant \left\| f - \sum_0^{N-1} Q_{a^s} \right\| = \sum_N^{\infty} \|Q_{a^s}\| \leqslant$$

$$\leqslant ({}^6\|f\|_H + \varepsilon) \sum_N^{\infty} a^{-rs} \ll ({}^6\|f\|_H + \varepsilon)\, a^{-Nr},$$

т. е.

$${}^5\|f\|_h = \sup_N a^{rN} E_{a^N}(f) \ll {}^6\|f\| + \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\|f\| \leqslant \sum \|Q_{a^s}\| \leqslant ({}^6\|f\|_H + \varepsilon) \sum a^{-rs} \ll {}^6\|f\|_H + \varepsilon,$$

и мы доказали в силу произвольности ε, что

$${}^5H \to {}^6H \to {}^5H,$$

т. е.

$${}^5H \rightleftarrows {}^6H.$$

Полученные результаты, в частности, содержат следующую теорему.

Замечание 1. Выражение (6) есть банахова норма, потому что для любых функций

$$f=\sum_{s=0}^{\infty} Q_s \quad \text{и} \quad f^*=\sum_{s=0}^{\infty} Q_s^*$$

$$\sup_s a^{rs}\|Q_s+Q_s^*\| \leqslant \sup_s a^{rs}\|Q_s\|+\sup_s a^{rs}\|Q_s^*\|,$$

$$\sup_s a^{rs}\|cQ_s\| = c\,|\sup_s a^{rs}\|Q_s\|,$$

где c — произвольное число, а эти соотношения сохраняются и для нижних граней, т. е.

$${}^6\|f+f^*\|_H \leqslant {}^6\|f\|_H+{}^6\|f^*\|_H.$$

5.5.4. Теорема. *Для того чтобы определенная на* $\mathscr{E}=R_m\times\mathscr{E}'$ *функция* f *принадлежала к одному из классов* ${}^jH_{up}^r(\mathscr{E})$ $(j=1, 2, 3, 4)$ *или* ${}^jH'^r_{up}(\mathscr{E})$ $(j=1, 2, 3, 4)$, *необходимо и достаточно, чтобы ее наилучшее приближение при помощи целых функций экспоненциального сферического типа* ν *по* u *удовлетворяло неравенству*

$$E_{u\nu}(f)_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \frac{c}{\nu^r},$$

где c не зависит от $\nu>0$ или $\nu=a^s$ $(s=0, 1, \ldots, \gamma>0, a>1)$.

Справедлива также

5.5.4.1. Теорема. *Произвольная функция* $f\in H_{up}^r(\mathscr{E})$ *может быть представлена в виде сходящегося к ней в метрике* $L_p(\mathscr{E})$ *ряда* 5.5.3 (7) *функций* $Q_{as}(x)$ — *целых сферического типа по* u — *так, что операторы* $Q_{as}=A_sf$ $(s=0, 1, \ldots)$ *линейные и выражение*

$$\sup_s a^s\|Q_{as}\| = {}^7\|f\|_H$$

есть эквивалентная норма в $H_{up}^r(\mathscr{E})$.

В самом деле, пусть $f\in H_{up}^r(\mathscr{E})$. Положим

$$Q_{a^0}=g_1, \quad Q_{a^s}=g_{a^s}-g_{a^{s-1}} \quad (s=1, 2, \ldots),$$

где функции g_ν — целые экспоненциального типа ν по u — определяются равенством 5.2.1 (6), из которого видно, что функции g_ν, а вместе с ними Q_{as} линейно зависят от f. При этом (см. 5.5.3 (12))

$$\|f-g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})} \leqslant \frac{c^2M_f}{\nu^r} \quad (\nu>\nu_0>0),$$

откуда

$$\|Q_{a^0}\|=\|g_1\|\leqslant\|f\|+c\,{}^2M_f,$$

$$\|Q_{a^s}\|\leqslant\|g_{a^s}-f\|+\|f-g_{a^{s-1}}\|\leqslant\frac{c_1\,{}^2M_f}{a^{rs}}\qquad(s=1,\ 2,\ \ldots)$$

и, следовательно, для указанных Q_{a^s}

$${}^6\|f\|_H\leqslant\sup_s a^{rs}\|Q_{a^s}\|\leqslant{}^2\|f\|_H,$$

т. е.

$${}^6\|f\|_H\sim{}^7\|f\|_H\sim{}^2\|f\|_H,$$

потому что эквивалентность ${}^6\|f\|_H\sim{}^2\|f\|_H$ уже установлена.

5.5.5. Пример 1. Хорошо известно, что если действительная функция $f(x)$ периода 2π принадлежит к пространству L_2^*, то она разлагается в ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\tag{1}$$

сходящийся к ней в смысле $L_2^*=L_2(0,\ 2\pi)$, где

$$\left.\begin{matrix}a_k\\ b_k\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\left\{\begin{matrix}\cos kt\\ \sin kt\end{matrix}\right\}dt\qquad(k=0,\ 1,\ \ldots).\tag{2}$$

При этом

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).\tag{3}$$

Наоборот, если ряд из любых действительных чисел a_k, b_k стоящий в правой части (3), сходится, то ряд (1) сходится в смысле L_2^* к некоторой функции $f\in L_2^*$ и имеют место равенства (2).

Вследствие известных ортогональных свойств тригонометрических функций, квадрат наилучшего приближения при помощи тригонометрических полиномов порядка $n-1$ (в смысле L_2^*) функции $f\in L_2^*$, определенной рядом (1), равев

$$E_n(f)_{L_2^*}=\min_{\gamma_k,\,\delta_k}\int_0^{2\pi}\left[f(x)-\frac{\gamma_0}{2}-\sum_{1}^{n-1}(\gamma_k\cos kx+\delta_k\sin kx)\right]^2dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{1}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2dx=\pi\sum_{n}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).\tag{4}$$

Если функция f принадлежит к W^1_{2*}, т. е. абсолютно непрерывна и ее (существующая почти всюду) производная $f' \in L_{2*}$, то ее коэффициенты Фурье a_k, b_k можно (проинтегрировав по частям) представить в виде

$$a_k = -\frac{\beta_k}{k}, \quad b_k = \frac{\alpha_k}{k} \quad (k = 1, 2), \tag{5}$$

где α_k, β_k — коэффициенты Фурье производной f', для которой ряд

$$\sum_1^\infty \alpha_k^2 + \beta_k^2 = \sum_1^\infty k^2 (a_k^2 + b_k^2) \tag{6}$$

сходится. Наоборот, функция f принадлежит к W^1_{2*}, если она представима в виде (сходящегося в ней в смысле L_2^*) ряда (1), причем $\sum_1^\infty k^2 (a_k^2 + b_k^2) < \infty$

Наилучшее приближение функции $f \in W^1_{2*}$ при помощи тригонометрических полиномов $(n-1)$-го порядка подчиняется неравенству

$$E_{n-1}(f)^2_{L_2^*} = \pi \sum_n^\infty \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{k^2} \leqslant \frac{\pi}{n^2} \sum_n^\infty (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = o(n^{-2}) \quad n \to \infty, \tag{7}$$

что согласуется с общей теорией (периодический аналог формулы 5.5 (1)).

Чтобы убедиться в том, что, обратно, из (7) не вытекает принадлежность f к классу W^1_{2*}, рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty \frac{\cos kx}{k^{3/2} \sqrt{\ln k}}.$$

Очевидно,

$$E_n(f)^2_{L_2^*} = \pi \sum_n^\infty \frac{1}{k^3 \ln k} \leqslant \pi \frac{1}{\ln n} \sum_n^\infty \frac{1}{k^3} = o(n^{-2}) \quad (n \to \infty).$$

С другой стороны, $f \notin W^1_{2*}$, так как ряд

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k \ln k},$$

соответствующий ряду (6), расходится.

Пример 2. Функция периода 2π

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin kx}{k^2 \ln k},$$

очевидно, непрерывна и имеет наилучшее приближение при помощи тригонометрических полиномов $(n-1)$-го порядке в метрике C (или L_∞), удовлетворяющее неравенству

$$E_{n-1}(f)_C \leqslant \sum_n^\infty \frac{1}{k^2 \ln k} \leqslant \frac{c}{n \ln n} = \frac{o(1)}{n} \quad (n \to \infty).$$

В то же время почленно продифференцированный ряд

$$f'(x)=\sum_{2}^{\infty}\frac{\cos kx}{k\ln k} \tag{8}$$

в силу монотонного убывания к нулю его коэффициентов равномерно сходится на $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ при любом $\varepsilon>0$ (см. Зигмунд [1], 2.6). Таким образом, его сумма непрерывна на интервале $(0, 2\pi)$ и равна производной $f'(x)$. При этом ряд (8) есть ряд Фурье для $f'(x)$, так как $\sum\frac{1}{k^2\ln^2 k}<\infty$. В таком случае f' разрывна в точке $x=0$, потому что если бы f' была непрерывной всюду, то ее n-я сумма Фейера в $x=0$ стремилась бы к $f'(0)$. Между тем сумма Фейера как средняя арифметическая из первых $n+1$ сумм Фурье стремится в $x=0$ вместе с этими суммами к ∞.

5.5.6. Анизотропный случай. Будем исходить из доказанной в 5.2.4 (5) оценки

$$\|f-g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant c\sum_{j=1}^{m}\frac{\omega_{x_j}^{k_j}\left(f_{x_j}^{(\rho_j)}, \frac{1}{\nu_j}\right)_{L_p(\mathscr{E})}}{\nu_j^{\rho_j}} \quad (\mathscr{E}=R_m\times\mathscr{E}', \ \nu_j>0). \tag{1}$$

Из нее для наилучшего приближения $f\in W_{up}^{r}(\mathscr{E})$ при помощи целых функций g_ν экспоненциального типа $\nu=(\nu_1, \dots, \nu_m)$ по $u=(x_1, \dots, x_m)$ следует неравенство

$$E_\nu(f)_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant\sum_{j=1}^{m}\frac{o(1)}{\nu_j^{r_j}} \quad (\nu_j\to 0) \tag{2}$$

при $1\leqslant p<\infty$ или при $p=\infty$, если частные производные $f_{x_j}^{(r_j)}$ соответственно равномерно непрерывны на $\mathscr{E}$ в направлении x_j.

Если $f\in H_p^r(\mathscr{E})$, то из (1) следует, что

$$E_\nu(f)_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant\|f-g_\nu\|_{L_p(\mathscr{E})}\leqslant c\|f\|_{h_p^r(\mathscr{E})}\sum_{1}^{m}\frac{1}{\nu_j^{r_j}}. \tag{3}$$

В частности, если заменить в этом неравенстве ν_j соответственно на ν^{1/r_j} $(\nu>0)$, то получим (опуская $L_p(\mathscr{E})$)

$$\nu E_{\nu^{1/r_1}, \dots, \nu^{1/r_m}}(f)\leqslant c_1\|f\|_{h_p^r(\mathscr{E})} \quad (\nu>0). \tag{4}$$

Зададим $a>1$ и введем нормы

$$^{j}\|\cdot\|_H=\|\cdot\|+{}^{j}\|\cdot\|_h \quad (j=1, 2, 3), \quad \|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E})}, \tag{5}$$

где

$$^{1}\|f\|_h=\|f\|_{h_p^r(\mathscr{E})}, \tag{6}$$

$$^{2}\|f\|_h=\sup_{\nu>0}\nu E_{\nu^{1/r_1}, \dots, \nu^{1/r_m}}(f), \tag{7}$$

$$^{3}\|f\|_h=\sup_{s=0, 1, \dots}a^s E_{a^{s/r_1}, \dots, a^{s/r_m}}(f). \tag{8}$$

Кроме того, положим

$$^4\|f\|_H=\inf \sup_{s=0,1,\ldots} a^s\|Q_s\|, \tag{9}$$

где последнюю норму (не содержащую явно $\|f\|$) надо понимать в том смысле, что f представима в виде сходящегося к ней в метрике $L_p(\mathscr{E})$ ряда

$$f=\sum_0^\infty Q_s, \tag{10}$$

члены которого суть функции целые типа a^{s/r_j} по x_j $(j=1, \ldots, m)$ так, что норма (9) конечна. Нижняя грань взята по всем разложениям (10).

Все четыре нормы $^j\|\cdot\|_H$ (но не $^j\|\cdot\|_h$) и соответствующие им классы ^jH эквивалентны. Ниже это утверждение доказывается для $j=1, 2, 3$. Эквивалентность $^3H={}^4H$ будет следовать (см. 5.6.1) как частный случай из соответствующего предложения для B классов.

Имеет место очевидное неравенство

$$E_{x_j a^{s/r_j}}(f)\leqslant E_{a^{s/r_1}, \ldots, a^{s/r_m}}(f),$$

где слева стоит наилучшее приближение f в метрике $L_p(\mathscr{E})$ при помощи функций целых экспоненциального типа a^{s/r_j} по одной переменной x_j. Поэтому, если $f\in{}^3H$, то

$$\sup_s a^sE_{x_j a^{s/r_j}}(f)\leqslant \sup_s a^sE_{a^{s/r_1}, \ldots, a^{s/r_m}}(f)={}^3\|f\|_h.$$

Но тогда, учитывая еще, что $f\in L_p(\mathscr{E})$, получим, что $f\in H_{x_jp}^{r_j}(\mathscr{E})$ (см. 5.5.3) и

$$\|f\|_{H_{x_jp}^{r_j}(\mathscr{E})}\leqslant {}^3\|f\|_H \quad (j=1, \ldots, m).$$

Поэтому $f\in H_p^r(\mathscr{E})={}^1H$ и

$$^1\|f\|_H\leqslant {}^3\|f\|_H.$$

Мы доказали, что

$$^1H\to{}^2H\to{}^3H\to{}^1H,$$

т. е. эти классы эквивалентны.

Полученные результаты, в частности, содержат следующую теорему.

5.5.7. Теорема *). *Для того чтобы функция $f \in H_p^{\mathbf{r}}(\mathscr{E})$, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$E_\nu(f) \leqslant c \sum_1^m \frac{1}{\nu_j^{r_j}} \quad (\nu_j > 0). \tag{1}$$

Неравенство (1) необходимо следует из 5.5.6 (3). Наоборот, если оно выполняется для любых независимых $\nu_j > 0$, то тем более для ν_j вида $\nu_j = \nu^{1/r_j} (j = 1, \ldots, m)$, и тогда конечна верхняя грань 5.5.6 (7).

Конечно, определяющие $H_p^{\mathbf{r}}$ классы $H_{x_j p}^{r_j}$ можно рассматривать в различных вариантах, описанных в 5.5.3 $(m = 1,\ R_m = R_{x_j})$.

5.5.8. Все доказанные в этом параграфе теоремы без изменений переносятся на периодический случай, при этом всюду в рассуждениях надо заменить соответственно H, W на $H*$, $W*$ и целые функции g_ν на тригонометрические полиномы. Следует при этом учесть сказанное в 5.3.

5.6. Определение B-классов с помощью наилучших приближений. Эквивалентные нормы

Пусть $\mathscr{E} = R_m \times \mathscr{E}' \subset R_n$, $r > 0$, k и ρ — допустимые целые числа (удовлетворяющие неравенствам $\rho \geqslant 0$, $k > r - \rho > 0$), $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$, $a > 1$ и функция f измерима на $\mathscr{E}$.

Основной целью будет доказательство того, что нормы

$${}^j\|f\|_{B_{up\theta}^r(\mathscr{E})} = {}^j\|f\|_B = \|f\| + {}^j\|f\|_b \qquad (j = 1, \ldots, 5),$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E})}$,

$${}^1\|f\|_b = \sum_{|s| = \rho} \left(\int_0^\infty t^{-1-\theta(r-\rho)} \Omega^k (f^{(s)}, t)^\theta \, dt \right)^{1/\theta}, \tag{1}$$

$${}^2\|f\|_b = \left(\int_0^\infty t^{-1-\theta(r-\rho)} \Omega^k (f^\rho, t)^\theta \, dt \right)^{1/\theta}, \tag{2}$$

$${}^3\|f\|_b = \sum_{|s| = \rho} \left(\int_{R_m} |u|^{-m-\theta(r-\rho)} \|\Delta_u^k f^{(s)}(x)\|_{L_p(\mathscr{E})}^\theta \, du \right)^{1/\theta}, \tag{3}$$

$${}^4\|f\|_b = \left(\int_{R_m} |u|^{-m-\theta(r-\rho)} \|\Delta_u^k f_u^\rho (x)\|_{L_p(\mathscr{E})}^\theta \, du \right)^{1/\theta}, \tag{4}$$

$${}^5\|f\|_b = \left\{ \sum_{l=0}^\infty a^{lr\theta} E_{ua^l}^\theta (f)_{L_p(\mathscr{E})} \right\}^{1/\theta}, \tag{5}$$

*) С. Н. Бернштейн [2], стр. 421—426, $p = \infty$; С. М. Никольский [1], $1 \leqslant p < \infty$.

эквивалентны; кроме того, они эквивалентны норме (не содержащей явно $\|f\|$)

$$^{6}\|f\|_B=\inf\left\{\sum_{l=0}^{\infty} a^{lr\theta}\|Q_{ua^l}\|^{\theta}_{L_p(\mathscr{E})}\right\}^{1/\theta} \quad (a>1), \tag{6}$$

где нижняя грань распространена на все представления f в виде сходящего к ней в смысле $L_p(\mathscr{E})$ ряда

$$f=\sum_{l=0}^{\infty} Q_{ua^l}(x), \tag{7}$$

члены которого целые экспоненциального сферического типа a^l по $u\in R_m$, так что норма ${}^{6}\|f\|_B$ конечна.

Здесь $f^{(s)}$ обозначает произвольную производную от f порядка $s=(s_1, \ldots, s_m)$, $|s|=\rho$, по переменным $u_1, \ldots, u_m$, а f_u^{ρ} — производную по направлению $u\in R_m$ порядка ρ,

$$\Omega^k(f^{(s)}, \delta)=\Omega^k_{R_m}(f^{(s)}, \delta)_{L_p(\mathscr{E})}=\sup_{|u|<\delta}\|\Delta_u^k f^{(s)}(x)\|_{L_p(\mathscr{E})},$$

$$\Omega^k(f^{\rho}, \delta)=\Omega^k_{R_m}(f^{\rho}, \delta)_{L_p(\mathscr{E})}=\sup_{\substack{|u|=1\\ u\in R_m}}\sup_{|t|<\delta}\|\Delta_{tu}^k f_u^{\rho}(x)\|_{L_p(\mathscr{E})}.$$

Мы вводим еще нормы

$${}^{j}\|f\|_{B'}=\|f\|+{}^{j}\|f\|_{b'} \quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Это такие же нормы, как соответственно ${}^{j}\|\ \|_B$, ${}^{j}\|\ \|_b$, но в них по определению интегрирование производится по $t\in[0, \eta]$ или по u с $|u|<\eta$.

Будет доказано, что эти нормы эквивалентны предыдущим (без штрихов), но с константами, зависящими от η. Надо иметь в виду, что каждый из перечисленных классов зависит еще от допустимой пары (k, ρ). Будет показано, что любые такие два класса, соответствующие разным парам, тоже эквивалентны (с константами, зависящими от этих пар).

Отметим, что эквивалентность нормы (5) с одной из остальных норм для классов $B^r_{up\theta}(\mathscr{E})$ соответствует утверждению теоремы 5.5.4, дающей в терминах наилучших приближений необходимые и достаточные условия принадлежности функции f к классу $H^r_{up}(\mathscr{E})$. Из (5) следует, что $B^r_{up\infty}(\mathscr{E})=H^r_{up}(\mathscr{E})$.

Классы, соответствующие указанным нормам, краткости ради, мы будем обозначать через ${}^{j}B, {}^{j}b$ $(j=1, \ldots, 6)$, ${}^{j}B', {}^{j}b'$ $(j=1, \ldots, 4)$.

Надо иметь в виду, что сами по себе полунормы ${}^{j}b$, ${}^{l}b'$, вообще говоря, не эквивалентны, эквивалентны суммы их с $\|f\|=\|f\|_{L_p(\mathscr{E})}$, т. е. нормы ${}^{j}B$, ${}^{l}B'$.

Ниже мы доказываем ряд вложений, из которых будет следовать высказанное выше утверждение об эквивалентности. Эти вложения и сами по себе представляют интерес. Некоторые из них верны не только для допустимых пар k, ρ, т. е. удовлетворяющих неравенствам $k>r-\rho>0$.

Имеем пока для одной и той же не обязательно допустимой пары натуральных k, ρ

$$^1b\to{}^1b'\to{}^3b'\to{}^4b'. \tag{8}$$

Первое и второе вложения очевидны, а третье следует из соотношений

$$\|\Delta_u^k f_u^\rho(x)\|=\left\|\Delta_u^k\sum_{|s|=\rho}f^{(s)}\left(\frac{u}{|u|}\right)^s\right\|\leqslant\sum_{|s|=\rho}\|\Delta_u^k f^{(s)}\|.$$

Аналогично также для одной и той же не обязательно допустимой пары k, ρ:

$$^1b\to{}^1b'\to{}^2b'\to{}^4b'. \tag{9}$$

Пусть теперь $f\in{}^4B'$ при некоторых не обязательно допустимых k, ρ.

Для каждого $\nu>0$ существует целая сферического типа ν по $u\in R_m$ функция g_ν такая, что (5.2.1 (6))

$$g_\nu-f=(-1)^{l-1}\int_{R_m}g(|u|)\,\Delta_{u/\nu}^{k+\rho}f(x)\,du, \tag{10}$$

и тогда

$$E_{a^j}(f)\leqslant\|g_{a^j}-f\|=\left\|\int_{R_m}g(|u|)\,\Delta_{a^{-j}u}^{k+\rho}f(x)\,du\right\|=$$
$$=c\left\|\int_0^\infty\int_{|\xi|=1}g(t)\,\Delta_{a^{-j}t\xi}^{k+\rho}f(x)\,t^{m-1}\,d\xi\,dt\right\|.$$

Поэтому (пояснения ниже)

$$^5\|f\|_b=\left\{\sum_{j=0}^\infty a^{jr\theta}E_{a^j}^\theta(f)\right\}^{1/\theta}\leqslant a^r\left\{\int_{-1}^\infty a^{jr\theta}E_{a^j}^\theta(f)\,dj\right\}^{1/\theta}\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\int_{-1}^\infty a^{jr\theta}\left\|\int_0^\infty\int_{|\xi|=1}g(t)\,\Delta_{a^{-j}t\xi}^{k+\rho}f(x)\,t^{m-1}\,d\xi\,dt\right\|^\theta dj\right\}^{1/\theta}\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^\infty t^{m-1}g(t)\left\{\int_{-1}^\infty a^{jr\theta}\left\|\int_{|\xi|=1}\left|\Delta_{a^{-j}t\xi}^{k+\rho}f(x)\right|d\xi\right\|^\theta dj\right\}^{1/\theta}dt\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^\infty t^{m-1+r}g(t)\left\{\int_0^{at}\int_{|\xi|=1}v^{-r\theta-1}\|\Delta_{v\xi}^{k+\rho}f(x)\|^\theta\,d\xi\,dv\right\}^{1/\theta}dt\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^\infty t^{m-1+r}g(t)\,dt\left\{\int_{|u|<\eta}|u|^{-m-(r-\rho)\theta}\|\Delta_u^k f^\rho\|^\theta du+\right.$$
$$\left.+\int_\eta^\infty v^{-r\theta-1}\,dv\,\|f\|^\theta\right\}^{1/\theta}\leqslant{}^4\|f\|_{b'}+\eta^{-r}\|f\|\leqslant{}^4\|f\|_{B'}. \tag{11}$$

В четвертом соотношении (неравенстве) применено обобщенное неравенство Минковского: сначала норма $\|\cdot\|$ по x подведена под знак интеграла по j, а затем норма по j — под знак интеграла по t. В пятом интеграле сделана замена j на v при помощи подстановки $a^{-j}t=v$.

Если $\eta=\infty$, то

$$^{5}\|f\|_b \leqslant {}^{4}\|f\|_b, \tag{12}$$

т. е.

$$^{4}B' \to {}^{5}B, \tag{13}$$

$$^{4}b \to {}^{5}b. \tag{14}$$

В дальнейшем будет использовано только вложение (13), но вложение (14) само по себе интересное.

Пусть теперь $f\in {}^{5}B$. Обозначим через g_{a^l} функцию целую сферической степени a^l по u такую, что

$$\|f-g_{a^l}\|\leqslant 2E_{a^l}(f) \qquad (l=0,\ 1,\ \ldots),$$

и положим

$$Q_{a^0}=g_{a^0},\quad Q_{a^l}=g_{a^l}-g_{a^{l-1}} \qquad (l=1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда в смысле $L_p(\mathscr{E})$

$$f=\sum_{l=0}^{\infty} Q_{a^l},$$

потому что из конечности $^{5}\|\cdot\|_b$ следует, что $E_{a^l}(f)\to 0$ $(l\to\infty)$. Далее

$$\|Q_{a^0}\|\leqslant \|f\|+2E_{a^0}(f),$$
$$\|Q_{a^l}\|\leqslant \|g_{a^l}-f\|+\|f-g_{a^{l-1}}\|\leqslant 4E_{a^{l-1}}(f),$$

потому что $E_{a^l}(f)$ не возрастает при возрастании l. Поэтому

$$^{6}\|f\|_B \leqslant \left\{(\|f\|+2E_{a^0}(f))^\theta+\sum_{l=1}^{\infty} a^{lr\theta}E_{a^{l-1}}(f)^\theta\right\}^{1/\theta}\leqslant$$
$$\leqslant \|f\|+\left\{\sum_{l=0}^{\infty} a^{lr\theta}E_{a^l}(f)^\theta\right\}^{1/\theta}={}^{5}\|f\|_B,$$

и мы доказали, что

$$^{5}B\to {}^{6}B.$$

Пусть теперь $f\in {}^{6}B$, задано $\varepsilon>0$ и f представима в виде (7), где сумма ряда в (6) не превышает $^{6}\|f\|_B+\varepsilon$. Зададим произвольные допустимые натуральные k, ρ. Для любого $u\in R_m$, целочисленного вектора $s=(s_1,\ \ldots,\ s_m,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ с $|s|=\rho$ и натурального N

$$\Delta_u^k f^{(s)}(x)=\sum_{l=0}^{N-1}\Delta_u^k Q_{a^l}^{(s)}(x)+\sum_{l=N}^{\infty}\Delta_u^k Q_{a^l}^{(s)}(x),$$

$$\|\Delta_u^k f^{\rho}\|\leqslant|u|^k\sum_{l=0}^{N}a^{l(\rho+k)}\|Q_{a^l}\|+2^k\sum_{l=N}^{\infty}a^{l\rho}\|Q_{a^l}\|.$$

Отсюда

$$\Omega^k(f^{(s)},\ a^{-N})=\sup_{|u|<a^{-N},\ u\in R_m}\|\Delta_u^k f^{(s)}(x)\|\leqslant$$

$$\leqslant a^{-Nk}\sum_{l=0}^{N}a^{l(\rho+k)}\|Q_{a^l}\|+\sum_{l=N}^{\infty}a^{l\rho}\|Q_{a^l}\|.$$

Оценим ${}^1\|f\|_{b'}$. Имеем

$$\int_0^1 t^{-1-\theta(r-\rho)}\Omega^k(f^{(s)},\ t)^\theta\,dt=$$

$$=\ln a\int_0^{\infty}a^{\theta(r-\rho)n}\Omega^k(f^{(s)},\ a^{-n})^\theta\,dn=$$

$$=\ln a\sum_{N=0}^{\infty}\int_N^{N+1}a^{\theta(r-\rho)n}\Omega^k(f^{(s)},\ a^{-n})^\theta\,dn\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{N=0}^{\infty}a^{\theta(r-\rho)N}\Omega^k(f^{(s)},\ a^{-N})^\theta=J_1+J_2,\tag{16}$$

где (объяснения ниже)

$$J_1=\sum_{N=0}^{\infty}a^{\theta(r-\rho-k)N}\left(\sum_{l=0}^{N}a^{l(\rho+k)}\|Q_{a^l}\|\right)^\theta\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}a^{r\theta l}\|Q_{a^l}\|^\theta,\tag{17}$$

$$J_2=\sum_{N=0}^{\infty}a^{\theta(r-\rho)N}\left(\sum_{l=N}a^{l\rho}\|Q_{a^l}\|\right)^\theta\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}a^{lr\theta}\|Q_{a^l}\|^\theta.\tag{18}$$

Неравенства $\leqslant$ обосновываются следующим образом. Если $a>1$, $0<\delta<\beta$, $b_l\geqslant 0$ $(l=0,\ 1,\ \ldots)$, то

$$\sum_{N=0}^{\infty}a^{-\theta\beta N}\left(\sum_{l=0}^{N}b_l\right)^\theta=\sum_{N=0}^{\infty}a^{-\theta\beta N}\left(\sum_{l=0}^{N}a^{(\beta-\delta)l}a^{(\delta-\beta)l}b_l\right)^\theta\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{N=0}^{\infty}a^{-\theta\delta N}\sum_{l=0}^{N}a^{(\delta-\beta)\theta l}b_l^\theta=\sum_{l=0}^{\infty}a^{(\delta-\beta)\theta l}b_l^\theta\sum_{N=l}^{\infty}a^{-\theta\delta N}\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}a^{-\beta\theta l}b_l^\theta,\tag{19}$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} a^{\theta\beta N}\left(\sum_{l=N}^{\infty} b_l\right)^{\theta} = \sum_{N=0}^{\infty} a^{\theta\beta N}\left(\sum_{l=N}^{\infty} a^{(\delta-\beta)\,l}a^{(\beta-\delta)\,l}b_l\right)^{\theta} \ll$$

$$\ll \sum_{N=0}^{\infty} a^{\theta\beta N}\left(\sum_{l=N}^{\infty} a^{(\delta-\beta)\theta' l}\right)^{\theta/\theta'}\left(\sum_{l=N}^{\infty} a^{(\beta-\delta)\,\theta l}b_l^{\theta}\right) \ll$$

$$\ll \sum_{N=0}^{\infty} a^{\theta\delta N}\sum_{l=N}^{\infty} a^{(\beta-\delta)\,\theta l}b_l^{\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} a^{(\beta-\delta)\,\theta l}b_l^{\theta}\sum_{N=1}^{l} a^{\theta\delta N} \ll \sum_{l=0}^{\infty} a^{\beta\theta l}b_l^{\theta}; \qquad (20)$$

при этом $A \ll B$ надо понимать в смысле $A \leqslant cB$, где c — константа, зависящая от a и δ, но не от b_l.

Неравенство (17) получается из (19), если положить $\beta = k - r + \rho\,(>0)$, $b_l = a^{l\,(\rho+k)}\left\|Q_{a^l}\right\|$, а неравенство (18) получается из (20), если положить

$$\beta = r - \rho, \quad b_l = a^{l\rho}\left\|Q_{a^l}\right\|.$$

Применение этих двух неравенств требует предположения допустимости пары k, ρ, т. е. выполнения условия $k > r - \rho > 0$.

Мы доказали, что

$$\left(\int_0^{\eta} t^{-\theta\,(r-\rho)-1}\Omega^k\,(f^{(s)},\ t)^{\theta}\,dt\right)^{1/\theta} \ll {}^{6}\|f\|_B + \varepsilon. \qquad (21)$$

Далее, положив $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$, получим

$$\|f\| \leqslant \sum_{0}^{\infty}\left\|Q_{a^l}\right\| = \sum_{0}^{\infty} a^{-lr}a^{lr}\left\|Q_{a^l}\right\| \leqslant \left(\sum_{0}^{\infty} a^{-lr\theta'}\right)^{1/\theta'}({}^{6}\|f\|_B + \varepsilon) =$$
$$= c\,({}^{6}\|f\|_B + \varepsilon), \qquad (22)$$

поэтому в силу произвольности ε из (21) и (22) следует, что (для любой допустимой пары k, ρ)

$${}^{6}B \to {}^{1}B'. \qquad (23)$$

Наконец, с помощью (7) следует, что ($|s| = \rho < r$)

$$\|f^{(s)}\| \ll \sum_{l=0}^{\infty} a^{l\rho}\left\|Q_{a^l}\right\| = \sum_{l=0}^{\infty} a^{-l\,(r-\rho)}a^{lr}\left\|Q_{a^l}\right\| \ll$$
$$\ll \left(\sum_{0}^{\infty} a^{\theta lr}\left\|Q_{a^l}\right\|^{\theta}\right)^{1/\theta} = ({}^{6}\|f\|_B + \varepsilon), \qquad (24)$$

и так как функция $t^{-\theta\,(r-\rho)-1}$ интегрируема на $(1, \infty)$ и ($|s| = \rho$)

$$\Omega^k\,(f^{(s)},\ t) \ll \|f^{(s)}\|,$$

то

$$\int_{\eta}^{\infty} t^{-\theta(r-\rho)-1}\Omega^k(f^{(s)},\, t)\, dt \leqslant ({}^6\|f\|_B+\varepsilon),$$

откуда в силу произвольности ε имеет место более сильное, чем (23), вложение

$$ {}^6B \to {}^1B, \tag{25}$$

верное для любой допустимой пары k, ρ.

Пусть теперь k, ρ — допустимая пара. Собрав вместе (8), (9), (13), (15), (25), получим

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & {}^1b' \arrow[r] & {}^3b' \arrow[dr] & \\ {}^1b \arrow[ur] \arrow[dr] & & & {}^4b' \\ & {}^1b' \arrow[r] & {}^2b' \arrow[ur] & \end{tikzcd}, \qquad {}^4B' \to {}^5B \to {}^6B \to {}^1B.$$

Так как здесь всюду можно заменить b на B (потому что это означает только, что соответствующее неравенство не изменяется, если прибавить к обеим его частям $\|f\|$), то

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & {}^3B' \arrow[dr] & & & & \\ {}^1B \arrow[r] & {}^1B' \arrow[ur] \arrow[dr] & & {}^4B' \arrow[r] & {}^5B \arrow[r] & {}^6B \arrow[r] & {}^1B. \\ & & {}^2B' \arrow[ur] & & & & \end{tikzcd}$$

С другой стороны, очевидно (цепи (8), (9) верны, если в них всюду опустить штрихи),

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & {}^3B \arrow[dr] & & & \\ {}^1B \arrow[ur] \arrow[dr] & & {}^4B \arrow[r] & {}^4B' \arrow[r] & {}^1B. \\ & {}^2B \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Это показывает, что все входящие в обе цепи классы эквивалентны. Для другой допустимой пары k', ρ' снова получим эквивалентность этих классов, и так как класс ${}^5B$, так же как ${}^6B$, не зависит от (допустимых) k, ρ, то, очевидно, все указанные классы (${}^jB$ $(j=1, \ldots, 6)$, ${}^jB'$ $(j=1, \ldots, 4)$) эквивалентны между собой независимо от того, какими парами k, ρ или параметром $\eta>0$ они определяются. Конечно, возникающие здесь константы вложения зависят вообще от k, ρ, η, a. Отметим еще, что классы ${}^5B$, ${}^6B$ остаются эквивалентными при изменении $a>1$. Это следует из того, например, что они эквивалентны (но с константами, зависящими от a) классу ${}^1B$, не зависящему от a.

Замечание. Пусть $f\in{}^1B$. Определим для f функции g_ν при помощи равенства (10). Легко видеть, что g_ν получается из f при помощи линейной операции $g_\nu=A_\nu(f)$ (см. 5.2.1 (4)). Из цепочки неравенств (11), которую надо читать, начиная с третьего члена, и из дальнейших оценок (см. (12)) следует неравенство

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a^{jr\theta}\|g_{a^j}-f\|^{\theta}\right)^{1/\theta} \leqslant {}^4\|f\| \leqslant {}^1\|f\|.$$

Поэтому, если положить ($Q_\nu = Q_{u\nu}$!)

$$Q_{a^0}=g_{a^0}, \quad Q_{a^i}=g_{a^i}-g_{a^{i-1}} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots)$$

и учесть, что

$$\|Q_{a^i}\| \leqslant \|g_{a^i}-f\|+\|f-g_{a^{i-1}}\|,$$

то легко получить неравенство

$${}^6\|f\|_B \leqslant \left(\sum_{i=0}^{\infty} a^{ir\theta}\|Q_{a^i}\|^{\theta}\right)^{1/\theta} \leqslant {}^1\|f\|_B. \tag{26}$$

Это рассуждение показывает, что выражение

$${}^7\|f\|_B=\left(\sum_{i=0}^{\infty} a^{ir\theta}\|Q_{a^i}\|^{\theta}\right)^{1/\theta} \tag{27}$$

может служить эквивалентной нормой для $B^r_{up\theta}(\varepsilon)$. При этом функции Q_s удовлетворяют (7) и получаются из f при помощи линейной операции 5.2.1 (4) или какой-либо другой операции, для которой верно второе неравенство (26). Важно еще отметить, что для данного $r_0>0$ для всех $r<r_0$ эти операции для каждого s можно взять одними и теми же.

В дальнейших рассуждениях мы будем широко пользоваться нормой (27), не оговаривая каждый раз происхождение Q_ν.

5.6.1. Анизотропный случай. Зададим функцию $f \in B^{\boldsymbol r}_{\boldsymbol p\boldsymbol\theta}(\mathscr{E})$, где

$$\boldsymbol p=(p_1,\ \ldots,\ p_m), \quad \boldsymbol\theta=(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_m), \quad \boldsymbol r=(r_1,\ \ldots,\ r_m),$$
$$1 \leqslant m \leqslant n, \quad 1 \leqslant p_j,\ \theta_j \leqslant \infty, \quad r_j>0, \quad a>1, \quad \mathscr{E}=R_m \times \mathscr{E}'.$$

Определим для нее семейство функций $g_{\nu_1,\ \ldots,\ \nu_m}$ целых экспоненциального типа ν_j по x_j по формулам 5.2.4 (1), где $0<\nu_j\leqslant \leqslant\infty$, и введем постоянную $a>1$. Докажем, что имеют место неравенства, обобщающие неравенство 5.2.4 (2) на случай конечных $\boldsymbol\theta$:

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{\theta_1 s}\|f-g_{a^{s/r_1},\ \infty,\ \ldots,\ \infty}\|^{\theta_1}_{L_{p_1}(\mathscr{E})}\right)^{1/\theta_1} \leqslant c\|f\|_{b^{\boldsymbol r}_{\boldsymbol p\boldsymbol\theta}(\mathscr{E})},$$
$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{\theta_2 s}\|g_{a^{s/r_1},\ \infty,\ \ldots,\ \infty}-g_{a^{s/r_1},\ a^{s/r_2},\ \infty,\ \ldots,\ \infty}\|^{\theta_2}_{L_{p_2}(\mathscr{E})}\right)^{1/\theta_2} \leqslant c\|f\|_{b^{\boldsymbol r}_{\boldsymbol p\boldsymbol\theta}(\mathscr{E})}, \tag{1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{\theta_m s}\|g_{a^{s/r_1},\ \ldots,\ a^{s/r_{m-1}},\ \infty}-g_{a^{s/r_1},\ \ldots,\ a^{s/r_m}}\|^{\theta_m}_{L_{p_m}(\mathscr{E})}\right)^{1/\theta_m} \leqslant c\|f\|_{b^{\boldsymbol r}_{\boldsymbol p\boldsymbol\theta}(\mathscr{E})}.$$

При $\theta_j=\infty$ соответствующее j-е неравенство имеет вид

$$a^s \left\| g_{a^{s/r_1}, \ldots, a^{s/r_{j-1}}, \infty, \ldots, \infty} - g_{a^{s/r_1}, \ldots, a^{s/r_j}, \infty, \ldots, \infty} \right\|_{L_{p_j}(\mathscr{E})} \leqslant c \| f \|_{h_p^r(\mathscr{E})}.$$

Оно непосредственно следует из 5.2.4 (2). Если же θ_j конечно, то $(r_j-\rho_j>0,\ \rho_j\geqslant 0$, см. 5.2.4 (2); 5.6)

$$\sum_{s=0}^{\infty} a^{\theta_j s} \left\| g_{a^{s/r_1}, \ldots, a^{s/r_{j-1}}, \infty, \ldots, \infty} - g_{a^{s/r_1}, \ldots, a^{s/r_j}, \infty, \ldots, \infty} \right\|_{L_{p_j}(\mathscr{E})}^{\theta_j} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{\infty} a^{\theta_j \frac{r_j-\rho_j}{r_j} s} \omega_{x_j}^{k_j}\left(f_{x_j}^{(\rho_j)}, a^{-s/r_j}\right)_{L_{p_j}(\mathscr{E})}^{\theta_j} \ll$$

$$\ll \int_0^1 t^{-(r_j-\rho_j)\theta_j-1} \omega_{x_j}^{k_j}\left(f_{x_j}^{(\rho_j)}, t\right)^{\theta_j} dt \leqslant \| f \|_{b_{p\theta}^r(\mathscr{E})}^{\theta_j}$$

и мы доказали (1).

Пусть теперь $p=p_1=\ldots=p_n$, $\theta=\theta_1=\ldots=\theta_m$. Введем нормы $(\|f\|=\|f\|_{L_p(\mathscr{E})})$:

$${}^j\|f\|_B=\|f\|+{}^j\|f\|_b \qquad (j=1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Мы считаем, что ${}^1b=b_{p\theta}^r(\mathscr{E})$, т. е. это уже известный класс,

$${}^2\|f\|_b=\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{\theta s} E_{a^{s/r_1}, \ldots, a^{s/r_m}}(f)_{L_p(\mathscr{E})}^{\theta}\right)^{1/\theta} \tag{3}$$

и

$${}^3\|f\|_B=\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{\theta s} \|Q_s\|^{\theta}\right)^{1/\theta}, \tag{4}$$

где предполагается, что f представима в виде сходящегося к ней в смысле $L_p(\mathscr{E})$ ряда

$$f=\sum_{s=0}^{\infty} Q_s, \tag{5}$$

члены которого Q_s — функции целые типа a^{s/r_j} соответственно по x_j $(j=1, \ldots, m)$.

Нормы (2) (классы B), но не ${}^j\|\cdot\|_b$, эквивалентны.

В самом деле, пусть $f \in {}^1B=B_{p\theta}^r(\mathscr{E})$

$${}^2\|f\|_b \leqslant \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{\theta s} \left\| f-g_{a^{s/r_1}, \ldots, a^{s/r_m}} \right\|_{L_p(\mathscr{E})}^{\theta}\right)^{1/\theta} \leqslant {}^1\|f\|_B \tag{6}$$

(средняя часть (6) не превышает сумму левых частей неравенств (1) при равных p_j и равных θ_j).

С другой стороны,

$$^{2}\|f\|_B=\|f\|_{L_p(\mathscr{E})}+\left(\sum_0^\infty a^{\theta s}E_{x_j a^{s/r_j}}(f)^\theta\right)^{1/\theta}\geqslant\|f\|_{B^{r_j}_{x_j p\theta}(\mathscr{E})},\tag{7}$$

где второе неравенство верно в силу эквивалентности норм, соответствующих полунормам 5.6 (1) и 5.6 (5).

Из (6), (7) следует, что $^{1}B={}^{2}B$.

Переходим к доказательству эквивалентности $^{1}B={}^{3}B$. Пусть $f\in{}^{1}B$. Определим для f семейство целых функций $g_s=g_{a^{s/r_1},\ldots,a^{s/r_m}}$ ($a>1$, $s=0, 1, \ldots$), для которых имеет место (6):

$$\left(\sum_{s=0}^\infty a^{\theta s}\|f-g_s\|^\theta\right)^{1/\theta}\leqslant{}^{1}\|f\|_B.\tag{8}$$

Отсюда, в частности, следует

$$\|f-g_0\|\leqslant{}^{1}\|f\|_B \quad \text{и} \quad \|g_0\|\leqslant{}^{1}\|f\|_B.$$

Положим

$$Q_0=g_0,\ Q_s=g_s-g_{s-1}\quad (s=1,\ 2,\ \ldots).\tag{9}$$

Из сходимости ряда, входящего в (8), следует, что функция представима в виде сходящегося к ней в смысле $L_p(\mathscr{E})$ ряда (5).

Далее,

$$^{3}\|f\|_B=\left(\sum_{s=0}^\infty a^{\theta s}\ \|Q_s\|^\theta\right)^{1/\theta}\leqslant$$

$$\leqslant\|Q_0\|+\left(\sum_{s=1}^\infty a^{\theta s}\|g_s-f\|^\theta\right)^{1/\theta}+\left(\sum_{s=1}^\infty a^{\theta s}\|g_{s-1}-f\|^\theta\right)^{1/\theta}\leqslant 3\|f\|_{^{1}B}.$$

Наконец, если $f\in{}^{3}B$, то f представима в виде ряда (5) с конечной нормой (4). Но Q_s для каждого j есть целая типа a^{s/r_j} по x_j, поэтому $f\in B^{r_j}_{x_j p}(\mathscr{E})$ (см. 5.6 (6), заменить a^r на a и положить $m=1$, $R_m=R_{x_j}$) и

$$\|f\|_{B^{r_j}_{x_j p}}\leqslant{}^{3}\|f\|_B\quad (j=1,\ \ldots,\ m).$$

Таким образом, $f\in B^r_p(\mathscr{E})$ и

$$^{1}\|f\|=\|f\|_{B^r_p(\mathscr{E})}\leqslant{}^{3}\|f\|_B.$$

Мы доказали, что $^{1}B={}^{3}B$.

В заключение подчеркнем, что нормы классов $^{1}B=B^r_p(\mathscr{E})$ выражаются (4.3.4) через нормы $B^{r_j}_{x_j p}(\mathscr{E})$ ($j=1, \ldots, m$), которые можно мыслить в любых эквивалентных формах, описанных в 5.6 (при $m=1$, $R_m=R_{x_j}$).

Отметим, что мы всюду здесь считали, что θ_j и θ может равняться ∞, поэтому, в частности, доказано, что в обозначениях п. 5.5.6 имеет место ${}^3H = {}^4H$.

5.6.2. Покажем эквивалентность классов

$$B_{p\theta}^{r,\ldots,r}(\mathscr{E}) = B_{p\theta}^{r}(\mathscr{E}) \qquad (1 \leqslant \theta \leqslant \infty). \tag{1}$$

Первый из них обозначим через B, второй через B'. Выберем число a так, чтобы $a^{1/r} \geqslant \sqrt{m}$, тогда $\sqrt{m}\, a^{s/r} \leqslant a^{s+1/r}$ $(s = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m)$. Заметим, что целая функция $Q_{a^{s/r}, \ldots, a^{s/r}}$ типа $a^{s/r}$ по каждой переменной x_j $(j = 1, \ldots, m)$ в то же время есть сферического типа $\sqrt{m}\, a^{s/r}$ по $\boldsymbol{u}$, тем более сферического типа $a^{(s+1)/r}$ по $\boldsymbol{u}$:

$$Q_{a^{s/r}, \ldots, a^{s/r}} = Q_{ua^{(s+1)/r}}.$$

Пусть теперь $f \in B$. Тогда

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^{s/r}, \ldots, a^{s/r}} = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{ua^{(s+1)/r}}$$

и

$$\|f\|_B = \left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{\theta s} \left\| Q_{ua^{(s+1)/r}} \right\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{\theta(s+1)} \left\| Q_{ua^{(s+1)/r}} \right\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \leqslant \frac{1}{a}\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{\theta s} \left\| Q_{ua^{s/r}} \right\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} = \frac{1}{a}\|f\|_{B'},$$

где мы положили $Q_{ua^0} = Q_{u1} \equiv 0$.

Итак, доказано, что если функция $f \in B$, то она представляется в виде ряда

$$f \in \sum_{0}^{\infty} Q_{ua^{s/r}}$$

целых функций сферического типа $a^{s/r}$ по $\boldsymbol{u}$ так, что

$$\|f\|_{B'} \leqslant \|f\|_B,$$

т. е. доказано, что $B \to B'$. Обратное вложение тривиально, и мы доказали (1).

5.6.3. Т е о р е м а*). *Пусть $f \in B_{p\theta}^{r}(\mathscr{E})$ и $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_m)$ — целочисленный неотрицательный вектор $(l_j \geqslant 0)$ такой, что*

$$\varkappa = 1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{l_j}{r_j} > 0. \tag{1}$$

---

*) См. замечания в конце книги к п. 5.6.2—5.6.3.

Тогда существует производная

$$f^{(l)} \in B^{\varkappa r}_{p\theta}(\mathscr{E}) \tag{2}$$

и

$$\|f^{(l)}\|_{B^{\varkappa r}_{p\theta}(\mathscr{E})} \leqslant c\|f\|_{B^{r}_{p\theta}(\mathscr{E})}, \tag{3}$$

где c не зависит от f.

Теорема перестает быть верной при замене $\rho=\varkappa r$ на $\rho+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ (см. 7.5). Кроме того, она, вообще говоря, неверна при $\varkappa=0$ (см. замечание к 5.6.3).

Доказательство. В силу условия теоремы

$$f=\sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^{s/r_1},\ldots,a^{s/r_m}}=\sum_{0}^{\infty} Q_s \qquad (a>1),$$

где члены ряда — целые функции экспоненциального типа a^{s/r_j} по x_j $(j=1,\ldots,m)$, причем

$$\|f\|_B=\left(\sum_{0}^{\infty} a^{\theta s}\|Q_s\|^{\theta}\right)^{1/\theta}$$

$$\left(B=B^{r}_{p\theta}(\mathscr{E}),\ \|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_p(\mathscr{E})},\ a>1\right).$$

Имеем пока формально

$$f^{(k)}=\sum_{0}^{\infty} Q_s^{(k)}, \tag{4}$$

где k — любой из векторов $(l_1, 0, \ldots, 0)$, $(l_1, l_2, 0, \ldots, 0)$, ..., $l=(l_1, \ldots, l_n)$. Заметим, что

$$\|Q_s^{(k)}\|\leqslant a^{s\sum_{1}^{m}\frac{l_j}{r_j}}\|Q_s\|=a^{s(1-\varkappa)}\|Q_s\|.$$

Поэтому

$$\left(\sum_{0}^{\infty} a^{s\varkappa\theta}\|Q_s^{(k)}\|^{\theta}\right)^{1/\theta}\leqslant\left(\sum_{0}^{\infty} a^{s\theta}\|Q_s\|^{\theta}\right)^{1/\theta}=\|f\|_B. \tag{5}$$

Из (5) следует, что ряды (4) сходятся в смысле L_p, поэтому на основании леммы 4.4.7 почленное дифференцирование в (4) (в обобщенном смысле) законно.

Заметим, что $Q_s^{(l)}$, так же как Q_s, есть целая типа a^{s/r_j} по x_j $(j=1, \ldots, m)$. Если положить $a^{\varkappa}=b$ $(b>1)$, то неравенство (5) для $k=l$ запишется в виде

$$\left(\sum_{0}^{\infty} b^{s\theta}\|Q_s^{(l)}\|^{\theta}\right)^{1/\theta}\leqslant\|f\|_B,$$

где $Q_s^{(l)}$ — целая типа $b^{s/r_j\varkappa}$ по x_j. В таком случае $f^{(l)}\in B^{\varkappa r}_{p\theta}(\mathscr{E})$, и выполняется неравенство (3).

Сделаем еще следующее добавление. Допустим, что мы пожелали производную $f^{(l)}$, о которой шла речь в теореме, продифференцировать еще $l'=(l'_1, \ldots, l'_m)$ «раз». Согласно этой теореме это возможно, если величина

$$\varkappa' = 1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{l'_j}{r_j \varkappa} > 0.$$

Отсюда

$$\varkappa\varkappa' = \varkappa - \sum_{j=0}^{m} \frac{l'_j}{r_j} = 1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{l_j + l'_j}{r_j} = \varkappa_* > 0.$$

Но величина $\varkappa_*$ в свою очередь представляет собой константу $\varkappa$, возникающую в теореме, если в ней l заменить на $l + l'$.

В этом смысле рассматриваемая теорема носит транзитивный характер.

5.6.4 Пример. Ниже приводится пример, показывающий, что полунормы ${}^3b$ и ${}^3b'$, вообще говоря, не эквивалентны (см. 5.6 (3), (4)). Ограничимся одномерным случаем

$$m=1, \quad r = 1 - \frac{1}{p} < 1, \quad \rho = 0, \ k = 1, \quad \theta = p.$$

Пусть $f_N(x)$ — четная функция, равная

$$f_N(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{N}, & 0 \leqslant x \leqslant N, \\ 1, & N < x. \end{cases}$$

Тогда

$${}^3\|f_N\|_b^p = 2\int_0^\infty dh \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f_N(x+h) - f_N(x)}{h} \right|^p dx \geqslant 2\int_0^N dx \int_0^{N-x} \frac{dh}{N^p} = N^{2-p},$$

$$\frac{1}{2}\,{}^3\|f_N\|_{b'}^p = \int_0^1 dh \left\{ \int_0^\infty + \int_{-\infty}^{-h} + \int_{-h}^{0} \right\} dx = J_1 + J_2 + J_3 = O(N^{1-p}),$$

потому что

$$J_2 = J_1 \leqslant \int_0^{N-1} dx \int_0^1 \frac{dh}{N^p} + \int_{N-1}^{N} dx \left\{ \int_0^{N-x} \frac{dh}{N^p} + \int_{N-x}^{1} \left| \frac{1 - \frac{x}{N}}{h} \right|^p dh \right\} = O(N^{1-p}),$$

$$J_3 = \int_0^1 dh \int_{-h}^{0} \left| \frac{\frac{x+h}{N} + \frac{x}{N}}{h} \right|^p dx = O(N^{1-p}).$$

Отсюда видно, что не существует константы c такой, что для всех $N>0$ было бы выполнено неравенство ${}^{3}\|f_N\|_b \leqslant c\,{}^{3}\|f_N\|_{b'}$.

5.6.5. Непрерывность по сдвигу. Теорема. *При* $h\to 0$

$$\|f(x+h)-f(x)\|_W\to 0 \quad (f\in W=W_p^l(R_n),\ 1\leqslant p<\infty,\ l\geqslant 0), \tag{1}$$

$$\|f(x+h)-f(x)\|_B\to 0 \quad (f\in B=B_p^r(R_n),\ 1\leqslant p,\ \theta<\infty,\ r\geqslant 0). \tag{2}$$

Утверждение (1) при $p=\infty$ не имеет места, так же как (2) при $\theta=\infty$ $\left(B_{p\infty}^r=H_p^r,\right.$ см. далее 7.4.1$\left.\right)$; при $p=\infty$ $1\leqslant\theta<\infty$ (2) остается верным.

Доказательство. В случае $l=0$ $(W_p^0=L_p(R_n))$ свойство (1) есть хорошо известный факт (неверный, однако, при $p=\infty$). К нему сводится и общий случай, потому что $\|f\|_W$ есть сумма норм f и $\frac{\partial^{l_j}f}{\partial x_j^{l_j}}$ в $L_p(R_n)$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$. Для функции $f\in B$ имеет место представление

$$f=\sum_0^\infty Q_s,$$

$$\|f\|_B=\left\{\sum_0^\infty 2^{s\theta}\|Q_s\|_p^\theta\right\}^{1/\theta},$$

где Q_s — целые функции типа $2^{s/r_j}$ по x_j. Поэтому

$$\|f(x+h)-f(x)\|_B\leqslant\left\{\sum_0^{N-1} 2^{s\theta}\|Q_s(x+h)-Q_s(x)\|_p^\theta\right\}^{1/\theta}+$$
$$+2\left\{\sum_N^\infty 2^{s\theta}\|Q_s\|_p^\theta\right\}^{1/\theta}<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\qquad |h|<\delta,$$

если взять N достаточно большим, а затем уже подобрать достаточно малое δ.

Примечание. В (1) и (2) можно заменить p на $\boldsymbol{p}=(p_1,\ \ldots$ $\ldots,\ p_n)$ $(1\leqslant p_j<\infty)$, потому что эти соотношения верны, в частности, для классов $W_{x_j,\,p_j}^{l_j}(R_n)$, $B_{x_j,\,p_j}^{r_j}(R_n)$, $j=1,\ \ldots,\ n$.

5.6.6. При условии, что $1\leqslant\theta$, $p<\infty$, $g\subset R_n$ — открытое множество, $g^N=g(R_n-V_N)$, где V_N — шар с центром в нулевой точке радиуса N, и $f\in B_{p\theta}^r(g)=B(g)$, имеет место

$$\|f\|_{B(g^N)}\to 0\qquad (N\to\infty). \tag{1}$$

Это видно из определения нормы $\|\cdot\|_B$, например, в форме 4.3.4 (2) ($\rho=0$, $k\geqslant 2$):

$$^2\|f\|_{b^r_{p\theta}(g^N)}=\left(\int\limits_0^\infty t^{-1-\theta r}\Omega^k_{R_m}(f,\ t)^\theta_{L_p(g^N)}\,dt\right)^{1/\theta}\to 0\qquad (N\to\infty).$$

Ведь $f\in L_p(g)$, поэтому $\Omega^k_{R_m}(f,\ t)_{L_p(g^N)}$ конечна при любом t и стремится к нулю, монотонно убывая, при $N\to\infty$, и можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

ГЛАВА 6

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ МЕТРИК И ИЗМЕРЕНИЙ

6.1. Введение

Начнем с того, что приведем формулировку теоремы вложения С. Л. Соболева [3] с последующими дополнениями В. И. Кондрашова [1] и В. П. Ильина [2] *). Применительно к пространству R_n и его координатному подпространству R_m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ эта теорема гласит:

Если функция $f \in W_p^l(R_n)$ *и*

$$0 < \rho = l - \frac{n}{p} + \frac{m}{p'}, \qquad 1 < p < p' < \infty, \tag{1}$$

то **)

$$W_p^l(R_n) \to W_{p'}^{[\rho]}(R_m), \tag{2}$$

где $[\rho]$ — *целая часть* ρ. *Это значит, что существует след функции* $f|_{R_m} = \varphi$, *принадлежащий к классу* $W_{p'}^{[\rho]}(R_m)$, *и выполняется неравенство*

$$\|\varphi\|_{W_{p'}^{[\rho]}(R_m)} \leqslant c\|f\|_{W_p^l(R_n)}, \tag{3}$$

где c *не зависит от* f **).

Понятие следа f будет объяснено в дальнейшем, а пока мы скажем, что во всяком случае, если f непрерывна на R_n, то ее следом на R_m называется функция $\varphi = f|_{R_m}$, индуцируемая функцией f на R_m.

В частности, при $m = n$ из (2) следует «чистое» вложение разных метрик:

$$W_p^l(R_n) \to W_{p'}^{[\rho]}(R_n), \tag{4}$$

*) См. замечание в конце книги к 6.1.

**) Общая теорема С. Л. Соболева может быть записана в виде формулы (2), где надо заменить R_n, R_m соответственно на g, $\Lambda_m = R_m g$ и считать, что g есть область звездная относительно некоторого n-мерного шара.

утверждающее, что если $f \in W_p^l(R_n)$, то $f \in W_{p'}^{[\rho]}(R_n)$ и

$$\|f\|_{W_{p'}^{[\rho]}(R_n)} \leqslant c \|f\|_{W_p^l(R_n)} \tag{5}$$

при условии, что выполняется (1) (при $m=n$).

Теоремы вложения С. Л. Соболева будут доказаны в главе 9.

В данной же главе мы собираемся рассмотреть указанные вопросы для классов $B_{p\theta}^r(R_n)$, в частности (при $\theta=\infty$) классов $H_p^r(R_n)$. Впрочем, из полученных в этой главе теорем, в частности, будут следовать сформулированные выше теоремы в случае, когда $\rho>0$ — нецелое, и тогда, как мы увидим, они верны при более широких условиях: $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$.

Приведем уже сейчас характерную теорему вложения разных метрик, которая, в частности, будет получена в этой главе:

$$B_{p\theta}^r(R_n) \to B_{p'\theta}^\rho(R_n), \tag{6}$$

если

$$1 \leqslant p < p' \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty, \quad \rho = r - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) > 0. \tag{7}$$

Таким образом, если функция f принадлежит к левому классу (6), то она принадлежит и к правому классу и, кроме того, выполняется неравенство

$$\|f\|_{B_{p'\theta}^\rho(R_n)} \leqslant c \|f\|_{B_{p\theta}^r(R_n)}, \tag{8}$$

где c не зависит от f.

Характерная (прямая) теорема вложения разных измерений, которая будет доказана в этой главе, записывается следующим образом:

$$B_{p\theta}^r(R_n) \to B_{p\theta}^\rho(R_m), \tag{9}$$

где

$$1 \leqslant p, \ \theta \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant m < n, \quad \rho = r - \frac{n-m}{p} > 0. \tag{10}$$

Она утверждает, что при условиях (10), если задана на R_n функция f класса $B_{p\theta}^r(R_n)$, то она имеет след φ на R_m, принадлежащий к классу $B_{p\theta}^\rho(R_m)$, и выполняется неравенство

$$\|\varphi\|_{B_{p\theta}^\rho(R_m)} \leqslant c \|f\|_{B_{p\theta}^r(R_n)}, \tag{11}$$

где c не зависит от f.

Неравенство (11) важно для приложений, оно указывает на определенную (устойчивую) зависимость норм следов функций f от норм f.

Теоремы вложения разных измерений для классов $B_{p\theta}^r$ характерны тем, что они полностью обратимы. Приведем в качестве примера теорему, обратную теореме (9). Она записывается следующим образом:

$$B^{\rho}_{p\theta}(R_m) \to B^{r}_{p\theta}(R_n) \tag{12}$$

(при условиях (10)) и читается так: *каждой функции* φ, *определенной на* R_m *и принадлежащей к классу* $B^{\rho}_{p\theta}(R_m)$, *можно привести в соответствие ее продолжение на* R_n — *функцию* $f \in B^{r}_{p\theta}(R_n)$ — *так, что* $f|_{R_m} = \varphi$ *и*

$$\|f\|_{B^{r}_{p\theta}(R_n)} \leq c \|\varphi\|_{B^{\rho}_{p\theta}(R_m)}, \tag{13}$$

где c *не зависит от* φ.

Более общие теоремы вложения разных измерений, которые найдет читатель в данной главе, также соответственно обращаются. Это показывает, в частности, неулучшаемость этих теорем. Что же касается теорем вложения разных метрик, то они тоже неулучшаемы (в терминах, в которых они высказываются); это доказывается в следующей главе. Там же читатель прочтет о некоторых интересных так называемых транзитивных свойствах теорем вложения.

Данную главу мы начинаем с установления простейших связей между классами W, H, B, выражаемых при помощи вложений.

Здесь мы отметим только следующие связи:

$$H^{r+\varepsilon}_p \to W^r_p \to H^r_p \quad (\varepsilon > 0,\ r = 0, 1, \ldots), \tag{14}$$

вторая из которых нам уже известна.

Из (14), (6) и (9) следует $\left(\rho = l - \frac{n}{p} + \frac{m}{p'} > 0 - \text{нецелое}\right)$:

$$W^l_p(R_n) \to H^l_p(R_n) \to H^{l-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}_{p'}(R_n) \to H^{\rho}_{p'}(R_m) \to W^{[\rho]}_{p'}(R_m), \tag{15}$$

т. е. (2).

Для классов $H^r_p(R_n)$ теоремы вложения разных метрик и измерений так же как обратные теоремы вложения разных измерений, доказаны С. М. Никольским [3] методами приближений целыми функциями экспоненциального типа. Они обобщены О. В. Бесовым [2], [3] на введенные им классы $B^r_{p\theta}(R_n)$ $(H^r_p = B^r_{p\infty})$. О. В. Бесов также базировался на методе приближений целыми функциями экспоненциального типа. Некоторые теоремы вложения разных метрик для одномерных классов H^r_p были известны Харди и Литтлвуду [1]. Для более общих классов $H^r_p(R_n)$ (p_j, вообще говоря, различные) теорема вложения разных измерений также доказана С. М. Никольским [10] методами приближения. Затем она обобщена на классы $B^r_{p\theta}$ В. П. Ильиным и В. А. Солонниковым [1], [2], но уже другими методами.

Ниже мы всюду при доказательстве базируемся на методах приближения, в том числе и при рассмотрении указанной теоремы для общих классов $B^r_{p\theta}$ *).

6.2. Связи между классами B, H, W

Функции этих классов мы будем рассматривать на цилиндрическом измеримом множестве $\mathscr{E}=\mathscr{E}_m\times\mathscr{E}'$ $(1\leqslant m\leqslant n,\ u=(x_1, \ldots, x_m),\ w=(x_{m+1}, \ldots, x_n))$.

Положим для краткости

$$B^r_{up\theta}(\mathscr{E})=B^r_{p\theta},\quad H^r_{up}(\mathscr{E})=H^r_p,\quad W^r_{up}(\mathscr{E})=W^r_p,$$
$$\|f\|_{L_p(\mathscr{E})}=\|f\|,\quad r>0,\quad 1\leqslant\theta\leqslant\infty.$$

Имеют место вложения $(r=\bar r+\alpha,\ 0<\alpha\leqslant 1,\ \bar r$ — целое)

$$B^r_{p1}\to B^r_{p\theta}\to B^r_{p\theta'}\to B^r_{p\infty}=H^r_p\qquad (1\leqslant\theta<\theta'\leqslant\infty), \tag{1}$$

$$W^r_p\to H^r_p\qquad (r=1, 2, \ldots), \tag{2}$$

$$H^{r+\varepsilon}_p\to B^r_{p\theta}\to H^r_p\qquad (\varepsilon>0), \tag{3}$$

$$H^r_p\to W^\rho_p\qquad (\rho=0, 1, \ldots, \bar r), \tag{4}$$

$$B^{r+\varepsilon}_{p\theta}\to B^r_{p\theta}\qquad (\varepsilon>0). \tag{5}$$

Вложения (1) показывают, что при возрастании θ классы $B^r_{p\theta}$ расширяются. Доказательство (1) непосредственно вытекает из того, что (см. 5.6 (6), (7)) функция $f\in B^r_{p\theta}$ может быть определена как сумма сходящегося к ней в смысле L_p ряда

$$f=\sum_{s=0}^{\infty} Q_s, \tag{6}$$

члены которого функции Q_s — целые сферического типа a^s $(a>1)$ по u так, что (см. 5.6 (27))

$$\|f\|_{B^r_{p\theta}}=\left(\sum_{s=0}^{\infty} a^{sr\theta}\|Q_s\|^\theta\right)^{1/\theta}\qquad (a>1). \tag{7}$$

Ведь при возрастании θ правая часть (7) убывает (см. 3.3.3). Из цепочки (1) видно также, что при фиксированных r и p «наихудшим» классом является класс H^r_p и «наилучшим» B^r_{p1}.

Вложения (3), из которых следует, что

$$B^{r+\varepsilon}_{p\theta'}\to B^r_{p\theta}\to B^{r-\varepsilon}_{p\theta''}$$

*) См. Т. И. Аманов [3].

для любых $1 \leqslant \theta'$, θ, $\theta'' \leqslant \infty$, каким бы малым ни было $\varepsilon > 0$, показывают, что класс $B^r_{p\theta}$ более существенно зависит от r, нежели от θ. Второе вложение (3) уже доказано в (1). Пусть $f \in H^{r+\varepsilon}_p$; тогда

$$\|f\|_{H^{r+\varepsilon}_p} = \sup_s a^{s(r+\varepsilon)} \|Q_s\| = M < \infty,$$

поэтому

$$\|f\|_{B^r_{p\theta}} \leqslant \left\{\sum_{s=0}^{\infty} \left(a^{sr} \frac{M}{a^{s(r+\varepsilon)}}\right)^{\theta}\right\}^{1/\theta} \leqslant cM,$$

где c не зависит от M, откуда следует первое вложение (3). Вложение (5) вытекает из того, что правая часть (7) возрастает вместе с r. Надо иметь в виду, что для данного $r_0 > 0$ для всех $r < r_0$ функции Q_s можно считать одними и теми же (см. замечание в конце § 5.6).

Вложение (2) следует из неравенств ($\boldsymbol{h} \in R_m$):

$$\|\Delta^k_{\boldsymbol{h}} f^{(\bar r)}(\boldsymbol{x})\| \leqslant 2^{k-1} \|\Delta_{\boldsymbol{h}} f^{(\bar r)}(\boldsymbol{x})\| \leqslant 2^{k-1} |\boldsymbol{h}| \left\|\frac{\partial}{\partial h} f^{(\bar r)}(\boldsymbol{x})\right\| \leqslant |\boldsymbol{h}| \sum \|f^{(r)}\|$$
$$(\bar r = r - 1),$$

где сумма распространена на все производные $f^{(r)}$ от f порядка r.

Из (1) и (4) следует, что

$$B^r_{p\theta} \to H^r_p \to W^\rho_p \qquad (\rho = 0,\ 1,\ \ldots,\ \bar r). \tag{8}$$

Для анизотропных классов

$$B^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{u}p\theta}(\mathscr{E}) = B^{\boldsymbol{r}}_{p\theta},\quad H^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{u}p}(\mathscr{E}) = H^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{u}p},\quad W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{u}p}(\mathscr{E}) = W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p}}$$

имеют место вложения ($\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$)

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p1} \to B^{\boldsymbol{r}}_{p\theta} \to B^{\boldsymbol{r}}_{p\theta'} \to B^{\boldsymbol{r}}_{p\infty} = H^{\boldsymbol{r}}_p, \qquad 1 \leqslant \theta < \theta' < \infty, \tag{9}$$

$$W^{\boldsymbol{\rho}}_p \to H^{\boldsymbol{\rho}}_p \qquad (\boldsymbol{\rho} \text{ — целый вектор}), \tag{10}$$

$$H^{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\varepsilon}}_p \to B^{\boldsymbol{r}}_{p\theta} \to H^{\boldsymbol{r}}_p \qquad (\boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}, \text{ т. е. } \varepsilon_j > 0), \tag{11}$$

$$B^{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\varepsilon}}_{p\theta} \to B^{\boldsymbol{r}}_{p\theta} \qquad (\boldsymbol{r} > \boldsymbol{0}), \tag{12}$$

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p\theta} \to H^{\boldsymbol{r}}_p \to W^{\boldsymbol{\rho}}_p \qquad (\boldsymbol{\rho} < \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{\rho} \text{ — целый вектор}). \tag{13}$$

Они аналогичны вложениям (1) — (5), (8) и немедленно из них следуют. Если $p = p_1 = \ldots = p_n$, то всюду $\boldsymbol{p}$ заменяется на p.

6.3. Вложение разных метрик

Имеет место *)

$$B^r_{p\theta}(R_n) \to B^{r'}_{p'\theta}(R_n), \tag{1}$$

если выполняются следующие условия:

$$1 \leqslant p < p' \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty, \tag{2}$$

$$\varkappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) \sum_1^n \frac{1}{r_i} > 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{r}' = \varkappa \boldsymbol{r}. \tag{4}$$

(Мы считаем, что $\boldsymbol{r} > 0$.)

В частности, если учесть, что $B^r_p(R_n) = B^{r, \ldots, r}_p(R_n)$ (см. 5.6.2), имеет место

$$B^r_{p\theta}(R_n) \to B^{r'}_{p\theta}(R_n) \tag{1'}$$

при условиях

$$1 \leqslant p < p' \leqslant \infty, \tag{2'}$$

$$\varkappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) \frac{n}{r} > 0, \tag{3'}$$

$$r' = \varkappa r. \tag{4'}$$

Например, при $p' = \infty$ и

$$r' = r - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\infty}\right) = r - \frac{n}{p} > 0,$$

$$B^r_{p\theta}(R_n) \to B^{r'}_{\infty\theta}(R_n) \to H^{r'}_\infty(R_n)$$

и, следовательно, если функция $f \in B^r_{p\theta}(R_n)$, то она непрерывна и ограничена на R_n вместе со своими частными производными порядка, меньшего чем r'. Больше того, если, например, $r' = \rho + \alpha$, ρ — целое и $0 < \alpha < 1$, то производные $f^{(\rho)}$ порядка ρ удовлетворяют на R_n условию Липшица степени α.

Докажем (1). Пусть B, B' соответственно обозначают первый и второй классы (1) и $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(R_m)}$. Зададим функцию $f \in B$ и число $a > 1$. Функцию f можно представить в виде ряда

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s, \tag{5}$$

---

*) С. М. Никольский [3], случай $H^r_p(R_n) = B^r_{p\infty}(R_n)$; О. В. Бесов [2], [3], случай $1 \leqslant \theta < \infty$; для некоторых одномерных классов H^r_p — Харди и Литтлвуд [1].

члены которого Q_s — целые типа a^{s/r_j} по x_j ($j=1, \ldots, n$) функции, и при этом

$$\|f\|_B=\left(\sum_0^\infty a^{\theta s}\|Q_s\|_p^\theta\right)^{1/\theta}<\infty \qquad (a>1). \tag{6}$$

Для функций Q_s выполняется неравенство разных метрик (3.3.5 (1))

$$\|Q_s\|_{p'}\leqslant 2^n a^{(1-\varkappa)s}\|Q_s\|_p,$$

поэтому

$$\left(\sum_0^\infty a^{\theta\varkappa s}\|Q_s\|_{p'}^\theta\right)^{1/\theta}\leqslant\left(\sum_0^\infty a^{\theta s}\|Q_s\|_p^\theta\right)^{1/\theta}=\|f\|_B.$$

Но если положить $a^\varkappa=b$ ($b>1$), то получим неравенство

$$\left(\sum_0^\infty b^{\theta s}(\|Q_s\|_{p'})^\theta\right)^{1/\theta}\leqslant\|f\|_B, \tag{7}$$

где Q_s — целые типа $b^{s/r_j'}$ по x_j. Из него следует, что ряд (5) сходится в метрике $L_{p'}$ и при этом к f, потому что он сходится уже к f в метрике L_p (см. (1.3.7)). Больше того, из (7) следует, что $f\in B'$ и левая часть (7) есть $\|f\|_{B'}$. Мы доказали, что

$$\|f\|_{B'}\leqslant\|f\|_B,$$

и вложение (1) доказано.

В данном случае условия (2′) — (4′) эквивалентны следующим:

$$r,\ r'>0,\ 1\leqslant p<p'\leqslant\infty,\ r-\frac{n}{p}=r'-\frac{n}{p'}.$$

В них существенно входит величина $r-\frac{n}{p}$, которая должна быть инвариантной, чтобы можно было гарантировать вложение. В общем случае по этому поводу см. 7.1.

Заметим, что в (1) нельзя заменить R_n на $R_n\times\mathscr{E}'$, так как в этом случае нет неравенства, подобного (7). Да и по существу это нельзя, что легко обнаружить на примерах.

6.4. След функции

Функция f, принадлежащая к тому или иному классу $B(R_n)$, $W(R_n)$, определена на R_n только с точностью до множества n-мерной меры нуль или, как мы еще будем говорить, с точностью до эквивалентности относительно R_n или в смысле R_n. Поэтому след функции f

$$f|_{R_m}=\varphi=\varphi(x_1, \ldots, x_m) \tag{1}$$

на каком-либо подпространстве $R_m \subset R_n$ $(m < n)$, не имеет смысла, если его понимать буквально.

Ниже мы даем определение следа функции f на R_m, приводящее к единственной функции φ с точностью до эквивалентности относительно R_m.

Будем обозначать каждую точку $\boldsymbol{x} \in R_n$ в виде пары $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$, где $\boldsymbol{u} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\boldsymbol{w} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, и пусть $R_m(\boldsymbol{w})$ есть m-мерное подпространство точек $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$, где $\boldsymbol{w}$ фиксировано, а $\boldsymbol{u}$ пробегает всевозможные значения. В частности, пусть $R_m(0) = R_m$.

Пусть $f(\boldsymbol{x})$ — измеримая на R_n функция.

Будем говорить, что функция

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{u}) = f|_{R_m} \tag{2}$$

есть след f на R_m, если f можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль так, что после этого при некотором p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, будут выполняться следующие свойства:

1) $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in L_p(R_m(\boldsymbol{w}))$, $|\boldsymbol{w}| < \delta$,

2) $f(\boldsymbol{u}, 0) = \varphi(\boldsymbol{u})$,

3) $\|f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) - \varphi(\boldsymbol{u})\|_{L_p(R_m(\boldsymbol{w}))} \to 0$, $|\boldsymbol{w}| \to 0$,

где δ достаточно мало.

Покажем, что определенный таким образом след f на R_m единствен с точностью до эквивалентности в смысле R_m.

В самом деле, пусть удалось найти два видоизменения f_1 и f_2 функции f на множестве n-мерной меры нуль и такие числа p_1 и p_2 $(1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty)$, что для f_1, φ_1, p_1 и f_2, φ_2, p_2 отдельно выполняются соотношения 1) — 3), и пусть $g \subset R_m$ — произвольное ограниченное открытое множество. Тогда

$$\begin{aligned} \|\varphi_2(\boldsymbol{u}) - \varphi_1(\boldsymbol{u})\|_{L_{p_1}(g)} \leqslant \|\varphi_1(\boldsymbol{u}) - f_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})\|_{L_{p_1}(g)} + \\ + \|f_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) - f_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})\|_{L_{p_1}(g)} + c\|f_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) - \varphi_2(\boldsymbol{u})\|_{L_{p_2}(g)}, \end{aligned} \tag{3}$$

где c — константа, зависящая от меры g. Функции f_1 и f_2 эквивалентны в смысле R_n, поэтому

$$\iint_{R_n} |f_1 - f_2|^{p_1}\, du\, dw = 0$$

и по теореме Фубини почти для всех $\boldsymbol{w}$

$$\int_{R_m(\boldsymbol{w})} |f_1 - f_2|^{p_1}\, du = 0.$$

Но из множества точек $\boldsymbol{w}$, для которых выполняется это равенство, можно всегда выбрать последовательность $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, ... с $|\boldsymbol{w}_k| \to 0$. Правая часть (3), когда $\boldsymbol{w}$ пробегает эту последовательность, стремится к нулю, но тогда левая часть равна нулю, и так как $g \subset R_m$ произвольно, то $\varphi_1 = \varphi_2$ на R_m.

Нетрудно видеть, что если функция f не только измерима на R_n, но и непрерывна в n-мерной окрестности R_m, то ее след φ с точностью до эквивалентности в смысле R_m совпадает со следом f на R_m в обычном понимании этого слова. Заметим далее, что если для двух измеримых функций f_1, f_2 возможна при некотором p определенная выше операция взятия следа (2), которую мы еще обозначим так:

$$\varphi = A(f) = f|_{R_m}, \tag{4}$$

то она возможна также для любой линейной комбинации

$$c_1f_1 + c_2f_2,$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные числа и имеет место равенство

$$A(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1A(f_1) + c_2A(f_2).$$

Таким образом, множество всех измеримых функций f, для которых операция (4) при некотором p возможна, линейно и (4) есть определенная на нем линейная операция (оператор). Как будет видно из дальнейшего, функции классов $B^r_{p\theta}$ и W^r_p при соответствующих значениях параметров p, r имеют следы на R_m в указанном выше смысле.

Пусть область $g \subset R_n$ и $g' \subset \bar{g}$, так что, в частности, g' может быть границей g. Пусть далее на g' определен класс функций $\mathfrak{M}$. Зададим на g функцию f и допустим, что она имеет на g' след:

$$\varphi = f|_{g'},$$

принадлежащий к $\mathfrak{M}$. Тогда мы будем не только писать: $\varphi = f|_{g'} \in \mathfrak{M}$, но и $f \in \mathfrak{M}$.

6.5. Вложения разных измерений

Имеет место *)

$$B^r_{p\theta}(R_n) \to B^{r'}_{p\theta}(R_m) \tag{1}$$

при условиях

$$0 \leqslant m < n, \qquad 1 \leqslant p, \ \theta \leqslant \infty, \tag{2}$$

$$\varkappa = 1 - \frac{1}{p} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{r_j} > 0, \tag{3}$$

$$r' = (r'_1, \ldots, r'_m), \qquad r'_j = \varkappa r_j. \tag{4}$$

*) С. М. Никольский [3], случай $H^r_p = B^r_{p\infty}$; О. В. Бесов [2], [3], случай $1 \leqslant \theta < \infty$.

Здесь R_m обозначает m-мерное подпространство точек

$$x=(u,\ y)=(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ x_{m+1},\ \ldots,\ x_n),$$

$u=(x_1,\ \ldots,\ x_m)$, $y=(x_{m+1},\ \ldots,\ x_n)$, где y фиксировано. Пусть B, B' — соответственно первый и второй классы в (1) и $\|\cdot\|^m=\|\cdot\|_{L_p(R_m)}$. Вложение (1) утверждает, что всякая функция $f\in B$ имеет след

$$f|_{R_m}=\varphi\in B',$$

и выполняется неравенство *)

$$\|\varphi\|_{B'}\leqslant c\|f\|_B,$$

где c не зависит от f.

В случае, если $m=0$, предполагается, что

$$B^{r'}_{p\theta}(R_0)=B^{r'}_{\infty,\theta}(R_n).$$

Таким образом, в этом случае речь идет о вложении в разных метриках (от p к $p'=\infty$), оно уже доказано в 6.2.

Если учесть, что $B^r_p(R_n)=B^{r,\ \ldots,\ r}_p(R_n)$, $B^r_p(R_m)=B^{r,\ \ldots,\ r}_p(R_m)$, то из (1), в частности, следует, что

$$B^r_{p\theta}(R_n)\to B^{r'}_{p\theta}(R_m) \tag{1'}$$

при условиях

$$0\leqslant m<n,\qquad 1\leqslant p,\ \theta\leqslant\infty, \tag{2'}$$

$$\varkappa=1-\frac{n-m}{rp}>0, \tag{3'}$$

$$r'=r\varkappa=r-\frac{n-m}{p}. \tag{4'}$$

Переходим к доказательству при $1\leqslant m<n$. Функцию $f\in B^r_{p\theta}(R_n)$ представляем в виде ряда

$$f=\sum_0^\infty Q_s \tag{5}$$

функций целых типа a^{s/r_j} $(a>1)$ по x_j $(j=1,\ \ldots,\ n)$ с нормой

$$\|f\|_B=\left(\sum_0^\infty a^{s\theta}(\|Q_s\|^n)^\theta\right)^{1/\theta}. \tag{6}$$

Для Q_s применяем оценку (3.4.2 (1))

$$\|Q_s\|^m\leqslant 2^{n-m}a^{s(1-\varkappa)}\|Q_s\|^n,$$

*) При некоторых оговорках имеет место более точное неравенство $\|f\|_{b'}\leqslant c\|f\|_b$ (см. 7.2 (10) и (11)).

откуда

$$\left(\sum_0^\infty a^{\theta\varkappa s}(\|Q_s\|^m)^\theta\right)^{1/\theta} \leqslant \left(\sum_0^\infty a^{s\theta}(\|Q_s\|^n)^\theta\right)^{1/\theta} = \|f\|_B.$$

Полагая $a^\varkappa = b\ (b > 1)$, получим

$$\left(\sum_0^\infty b^{\theta s}(\|Q_s\|^m)^\theta\right)^{1/\theta} \leqslant \|f\|_B \qquad \left(Q_s = Q_{b^{s/r'_1}, \ldots, b^{s/r'_m}}\right). \tag{7}$$

Это неравенство, в частности, показывает, что ряд (5) сходится при любом фиксированном y в смысле $L_p(R_m)$ по $u = (x_1, \ldots, x_m)$ к некоторой функции $f_1(x) = f_1(u, y) \in L_p(R_m)$. Но тогда $f_1 = f$ почти всюду в смысле n-мерной меры (см. 1.3.9).

В силу неравенства (7) $f_1(u, y) \in B'$ при любом y

$$\|f_1(u, y)\|_{B'} \leqslant \|f\|_B. \tag{8}$$

Константа в этом неравенстве не зависит от y.

Если будет доказано, что $f_1(u, y)$ есть след f на R_m при любом y, то вместе с неравенством (7) это приводит к требуемому вложению (1). Так как (см. 6.1 (14))

$$B = B^r_{p\theta}(R_n) \to H^r_p(R_n),$$

то

$$\|Q_s\|^n \leqslant a^{-s}. \tag{9}$$

Приращение $Q_s(x)$ в свою очередь есть целая функция типа a^{s/r_j} по x_j $(j = 1, \ldots, n)$, поэтому на основании 3.4.2 (1), 3.2.2 (7) и 4.4.4 (2)

$$\|\Delta_{x_j h} Q_s\|^m \leqslant 2^{n-m} a^{s(1-\varkappa)} \|\Delta_{x_j h} Q_s\|^n \leqslant 2^{n-m} a^{s\left(1-\varkappa+\frac{1}{r_j}\right)} \|Q_s\|^n |h|.$$

Справедливо неравенство

$$\|\Delta_{x_j h} f_1\|^m \leqslant \sigma'_\mu + \sigma''_\mu,$$

где

$$\sigma'_\mu = \sum_0^{\mu-1} \|\Delta_{x_j h} Q_s\|^m, \qquad \sigma''_\mu = \sum_\mu^\infty \|\Delta_{x_j h} Q_s\|^m.$$

Зададим число h с $|h| \leqslant 1$ и подберем целое μ так, чтобы

$$a^{-\mu/r_j} < |h| \leqslant a^{-(\mu-1)/r_j}. \tag{10}$$

Тогда (см. (9))

$$\sigma'_\mu \leqslant 2^{n-m} \sum_0^{\mu-1} a^{s\left(1-\varkappa+\frac{1}{r_j}\right)} \|Q_s\|^n |h| \leqslant |h| \sum_0^{\mu-1} \frac{1}{a^{s\delta}}, \tag{11}$$

где

$$\delta = \varkappa - \frac{1}{r_j}.$$

Если $\delta < 0$, иначе говоря, если $r'_j = r_j \varkappa < 1$, то

$$\sigma'_\mu \leqslant |h| \, |a^{-\mu\delta}| \leqslant |h|^{r'_j},$$

а если $\delta > 0$, т. е. если $1 < r'_j$, то

$$\sigma'_\mu \leqslant |h|.$$

При $\delta = 0$, т. е. $r'_j = 1$

$$\sigma'_\mu \leqslant |h| \, \mu \leqslant |h| \, |\ln |h| \, |.$$

С другой стороны,

$$\sigma''_\mu \leqslant 2 \sum_\mu^\infty \|Q_s\|^m \leqslant \sum_\mu^\infty a^{s(1-\varkappa)} \|Q_s\|^n \leqslant \sum_\mu^\infty \frac{1}{a^{\varkappa s}} \leqslant a^{-\varkappa\mu} \leqslant |h|^{r'_j}. \qquad (12)$$

Из полученных оценок, очевидно, следует, что *)

$$\|\Delta_{x_j h} f_1(x)\|^m = \begin{cases} O\left(|h|^{r'_j}\right), & 0 < r'_j < 1, \\ O(|h| \, |\ln |h| \, |), & r'_j = 1, \\ O(|h|), & r'_j > 1. \end{cases} \qquad (13)$$

Правые части (13) стремятся к нулю вместе с h, поэтому $f_1(u, y)$ есть при любом y след $f(u, y)$.

Подчеркнем, что исходная функция $f(x) = f(u, y)$ была известна с точностью до множества n-мерной меры нуль, поэтому рассматривать ее как функцию от u при фиксированном y не имеет смысла. Выше был указан способ получения следа функции $f \in B$. Для этого надо f разложить в ряд (5) с конечной нормой (6) и зафиксировать y в его членах Q_s. Тогда полученный ряд функций от u сходится в смысле $L_p(R_m)$, именно к следу $f_1(u, y)$ функции f.

Обычно в неравенствах такого рода, как (13), все же пишут f вместо f_1, понимая это в том смысле, что f можно видоизменить на множестве n-мерной меры так, что после этого для любого y имеет место (13) и притом с константой, не зависящей от y.

6.5.1. Примечание. Вложение 6.5 (1) остается верным при тех же условиях 6.5 (2) — (4), если в нем заменить R_n, R_m соответственно на измеримые цилиндрические множества $\mathscr{E}_n = R_n \times \mathscr{E}'$,

*) Л. Д. Кудрявцев [2], ч. 1.

$\mathscr{E}_m = R_m \times \mathscr{E}'$, где по-прежнему $R_m \subset R_n$ и $z = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{x} \in R_n$, $\boldsymbol{w} \in \mathscr{E}'$. Действительно, при конечном p почти для любого $\boldsymbol{w}$ справедливо неравенство, соответствующее 6.5 (1), где константа c не зависит не только от $\boldsymbol{y}$, но и от $\boldsymbol{w}$. Возведем обе его части в степень p, проинтегрируем по $\boldsymbol{w}$, а затем возведем в степень $\frac{1}{p}$. В результате получим нужное неравенство. При $p = \infty$ это утверждение тривиально.

6.5.2. Неравенства 6.5 (13) сами по себе интересны. Они указывают для функций класса $H_p^r(R_m)$ порядок стремления их следов в среднем. Этот порядок неулучшаем (см. 7.6).

Нетрудно показать, что имеет место неравенство

$$\|\Delta_{x_j h}^k f_1(\boldsymbol{x})\|^m = O(|h|) \qquad (r_j' = 1,\ k > 1) \tag{1}$$

(уже без ln), дополняющее второе неравенство 6.5 (13).

Так как

$$W_p^r(R_n) \to H_p^r(R_n)$$
$$(\boldsymbol{r} \text{ — целый вектор}),$$

то оценки 6.5 (13) применимы и к $W_p^r(R_n)$*). Они и в этом случае неулучшаемы в том смысле, что нельзя в их правых частях указанные там степени $|h|$ заменить бо́льшими. Однако для каждой индивидуальной функции $f \in W_p^r(R_n)$ имеют место следующие оценки:

$$\|\Delta_{x_j h} f(\boldsymbol{x})\|^m = \begin{cases} o\left(|h|^{r_j'}\right) & (|h| \to 0), & 0 < r_j' < 1, \\ o(|h|\,|\ln|h||) & (|h| \to 0), & r_j' = 1, \\ O(|h|) & (|h| < 1), & r_j' > 1, \end{cases} \tag{2}$$

улучшающие при $r_j' \leqslant 1$ оценки 6.5 (13).

В самом деле (см. 5.6.1 (9) и 5.2.4 (5)), в этом случае

$$\|Q_s\|^n \leqslant \|g_{a^{s/r_1}, \ldots, a^{s/r_n}} - f\| + \|f - g_{a^{(s-1)/r_1}, \ldots, a^{(s-1)/r_n}}\| = o(a^{-s})$$
$$(s \to \infty),$$

и тогда неравенства 6.5 (11), (12) заменяются на такие:

$$\sigma_\mu' \leqslant o\left(|h|^{r_j'}\right)\ (r_j' < 1),\quad \sigma_\mu' \leqslant o(|h|\,|\ln|h||)\ (r_j' = 1),\quad \sigma_\mu'' \leqslant o\left(|h|^{r_j'}\right).$$

Оценку же $O(|h|)$ улучшить нельзя. Это легко проверить на примере $f = g(x)\,g(y)$, где $g(x) \in L_p(R_1)$ — целая типа 1 такая, что $g'(0) \neq 0$ и $R_m = R_1$.

---

*) Оценки (13) для классов W_p^l $(l = 1, 2, \ldots)$ получил непосредственно В. И. Кондрашов [1].

6.6. Простейшая обратная теорема вложения разных измерений

Пусть $1 \leqslant m < n$ и R_m — координатное подпространство R_n. Для определенности будем считать, что оно состоит из точек $(\boldsymbol{u},\ 0) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. В § 6.5 была доказана теорема:

$$B^r_{p\theta}(R_n) \to B^{r'}_{p\theta}(R_m) \tag{1}$$

при условии, что

$$r' = r\varkappa = r - \frac{n-m}{p} > 0. \tag{2}$$

Ниже доказывается, что имеет место теорема, полностью ее обращающая *):

$$B^{r'}_{p\theta}(R_m) \to B^r_{p\theta}(R_n) \tag{3}$$

при условии (2). Пояснение см. 6.1 (12).

Обозначим через B, B' соответственно первый и второй классы (1). Зададим произвольную функцию $\varphi \in B'$. Ее можно представить в виде сходящегося к ней в смысле $L_p(R_m)$ ряда

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{a^{s/r}},$$

где $Q_{a^{s/r}}$ — целые сферического типа $a^{s/r}$ $(a > 1)$ и

$$\|\varphi\|_{B'} = \left\{\sum_0^{\infty} a^{\varkappa s\theta} (\|Q_s\|^m)^\theta\right\}^{1/\theta}, \quad \|\cdot\|^m = \|\cdot\|_{L_p(R_m)}. \tag{4}$$

Положим

$$F_\nu(t) = \left(\frac{\sin\frac{\nu t}{2}}{\frac{\nu t}{2}}\right)^2 \quad (\nu > 0).$$

Это целая функция от одной переменной t типа ν такая, что

$$\|F_\nu\|_{L_p(R_1)} = \left(\int \left(\frac{\cos\frac{\nu t}{2}}{\frac{\nu t}{2}}\right)^{2p} d\left(\frac{\nu t}{2}\right)\right)^{1/p} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/p} = \frac{c_p}{\nu^{1/p}} \quad (\nu > 0).$$

Введем новую функцию от $\boldsymbol{x} \in R_n$, определяемую рядом

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_0^{\infty} q_{a^{s/r}}(\boldsymbol{x}), \tag{5}$$

---

*) С. М. Никольский [5], случай $H^r_p = B^r_{p\infty}$; О. В. Бесов [2], [3], случай $1 \leqslant \theta < \infty$.

где

$$q_{a^{s/r}}(\boldsymbol{x}) = Q_{a^{s/r}}(\boldsymbol{u}) \prod_{m+1}^{n} F_{a^{s/r}}(x_j). \qquad (6)$$

Очевидно (см. (2)),

$$\| q_{a^{s/r}} \|^n = \| Q_{a^{s/r}} \|^m a^{-(1-\varkappa)s} c_p^{n-m}.$$

В таком случае

$$\left(\sum_0^\infty a^{s\theta} \left(\| q_{a^{s/r}} \|^n \right)^\theta \right)^{1/\theta} = c_p^{n-m} \left(\sum_0^\infty a^{\varkappa s\theta} \left(\| Q_{a^{s/r}} \|^m \right)^\theta \right)^{1/\theta} = c_p^{n-m} \| \varphi \|_{B'}. \qquad (7)$$

Так как функции $q_{a^{s/r}}$ — целые (экспоненциального) типа $a^{s/r}$ по каждой переменной $x_1, \ldots, x_n$, то в силу 5.6.1 (4), (5) слева в (7) стоит норма f в смысле $B_{p\theta}^{r, \ldots, r}(R_n)$. Но $B_{p\theta}^{r, \ldots, r}(R_n) \to B_{p\theta}^r(R_n) = B$, и мы доказали, что $f \in B$, $\| f \|_B \leqslant \| \varphi \|_{B'}$.

Функция f определяется рядом (5), сходящимся к ней в смысле $L_p(R_n)$. Но этот ряд при всяком $y = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ сходится также в смысле $L_p(R_m)$ к некоторой функции $f_1(\boldsymbol{x})$, которая может отличаться от $f(x)$ только на множестве n-мерной меры нуль (1.3.9). Очевидно,

$$f_1(\boldsymbol{u}, 0) = \varphi(\boldsymbol{u})$$

в смысле R_m, т. е. почти для всех $\boldsymbol{u}$ в смысле m-мерной меры. Далее, учитывая, что $F_\nu(0) = 1$, $F_\nu(t)$ ограничены по ν и t и $\sum_0^\infty \| Q_{a^{s/r}} \|^n < \infty$, получим

$$\| f_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}) - f_1(\boldsymbol{u}, 0) \|^m \leqslant \sum_0^\infty \left| \prod_{m+1}^n F_{a^{s/r}}(x_j) - 1 \right| \| Q_{a^{s/r}} \|^m \to 0$$

$$(\boldsymbol{y} = (x_{m+1}, \ldots, x_n) \to 0).$$

Это рассуждение показывает, что φ есть след f (6.3). Этим утверждение (3) доказано полностью.

Отметим, что класс $B = B_{p\theta}^r(R_n)$ представляет собой банахово пространство. Если

$$r' = r - \frac{n-m}{p} > 0,$$

то, согласно (1), для функций $f \in B$ имеет смысл операция получения следа

$$Af = f|_{R_m} = \varphi \qquad (8)$$

на $R_m \subset R_n$ $(1 \leqslant m < n)$. Эта операция линейна; более того, согласно (1), она ограниченно отображает B в B', причем в силу обратимости вложения (1) даже не в B', а на B'. Выше мы доказали, что в свою очередь B' можно отобразить на некоторую часть B при помощи некоторого ограниченного линейного оператора. Этот последний не единственный, можно указать бесконечное множество таких операторов.

На языке функционального анализа линейный ограниченный оператор A, отображающий банахово пространство B на банахово пространство B', называется непрерывно обратимым *).

В последующих пунктах мы доказываем более общую чем 6.5 (1) теорему вложения, в которой речь идет о граничных свойствах не только самой функции f на подпространстве $R_m \subset R_n$, но и ее некоторых частных производных. Эту теорему мы затем полностью обращаем.

6.7. Общая теорема вложения разных измерений

Теорема **). *Пусть $f \in B^r_{p\theta}(R_n)$, $0 \leqslant m < n$ и для некоторого вектора $\lambda = (\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$ с неотрицательными целочисленными координатами выполняются неравенства*

$$\rho_i^{(\lambda)} = r_i \left(1 - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\lambda_j}{r_j} - \frac{1}{p} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{r_j}\right) > 0. \qquad (1)$$

Пусть, кроме того,

$$\psi = \frac{\partial^{\lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_n} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}}$$

и R_m обозначает m-мерное подпространство R_n, полученное при фиксировании вектора $y = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, а $\rho(\lambda) = (\rho_1^{(\lambda)}, \ldots, \rho_n^{(\lambda)})$.

Тогда

$$\psi|_{R_m} = \varphi \in B^{\rho(\lambda)}_{p\theta}(R_m)$$

и выполняется неравенство

$$\|\varphi\|_{B^{\rho(\lambda)}_{p\theta}(R_m)} \leqslant c \|f\|_{B^r_{p\theta}(R_n)}$$

с константой c, не зависящей от f и y.

Доказательство. Из (1) следует, что

$$\sum_{j=m+1}^{n} \frac{\lambda_j}{r_j} < 1,$$

*) Ф. Хаусдорф [1], добавление.

**) С. М. Никольский [5], случай $H^r_p = B^r_{p\infty}$; О. В. Бесов [2], [3], случай $1 \leqslant \theta < \infty$.

поэтому на основании теоремы 5.6.3

$$\psi \in B^{r'}_{p\theta}(R_n),$$

$$r' = (r'_1, \ldots, r'_n), \quad r'_i = r_i\left(1 - \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\lambda_k}{r_k}\right) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и выполняется неравенство

$$\|\psi\|_{B^{r'}_{p\theta}(R_n)} \leqslant \|f\|_{B^{r}_{p\theta}(R_n)}.$$

Чтобы увидеть, к какому классу принадлежит след ψ на R_m, воспользуемся теоремой вложения 6.5 (1). Она применима, потому что

$$\varkappa = 1 - \frac{1}{p}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{r'_j} = \frac{1 - \sum\limits_{m+1}^{n}\frac{\lambda_j}{r_j} - \frac{1}{p}\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{r_j}}{1 - \sum\limits_{m+1}^{n}\frac{\lambda_j}{r_j}} > 0,$$

и имеет место утверждение теоремы.

6.8. Общая обратная теорема вложения

Теорема*). *Пусть задан вектор* $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) > 0$ *и всевозможные векторы*

$$\lambda = (\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n) \tag{1}$$

с неотрицательными целочисленными координатами, для которых определяемые формулой 6.7 (1) *векторы* $\rho(\lambda) = (\rho_1^{(\lambda)}, \ldots, \rho_n^{(\lambda)})$ *положительны.*

Пусть, кроме того, каждому вектору λ *приведена в соответствие функция*

$$\varphi_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_m) \in B^{\rho^{(\lambda)}}_{p\theta}(R_m). \tag{2}$$

Тогда можно построить на R_n *функцию* $f \in B^r_{p\theta}(R_n)$ *такую, что*

$$\|f\|_{B^r_{p\theta}(R_n)} \leqslant c\sum_{\lambda}\|\varphi_{(\lambda)}\|_{B^{\rho^{(\lambda)}}_{p\theta}(R_m)}, \tag{3}$$

где c *не зависит от* $\varphi(\lambda)$, *сумма распространена на всевозможные указанные векторы* λ *и* $\varphi_{(\lambda)}$ *суть следы частных производных*

*) С. М. Никольский [5], случай $H^r_p = B^r_{p\infty}$; О. В. Бесов [2], [3], случай $1 \leqslant \theta < \infty$.

функции f:

$$\left.\frac{\partial^{\lambda_{m+1}+\ldots+\lambda_n} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}}\right|_{R_m} = \varphi_{(\lambda)}. \tag{4}$$

Доказательство. Положим

$$r_i^{(\lambda)} = r_i\left(1 - \sum_{m+1}^{n} \frac{\lambda_j}{r_j}\right) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

$$\varkappa^{(\lambda)} = 1 - \frac{1}{p} \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{r_i^{(\lambda)}}. \tag{6}$$

Тогда, очевидно,

$$\rho_i^{(\lambda)} = r_i^{(\lambda)} \varkappa^{(\lambda)}. \tag{7}$$

Пусть $\varphi_{(\lambda)} \in B_{p\theta}^{\rho(\lambda)}(R_m) = B^{(\lambda)}$. Тогда

$$\varphi_{(\lambda)} = \sum_{0}^{\infty} Q_{s\,(\lambda)},$$

где $Q_{s\,(\lambda)}$ — целые типа $2^{s/r_i^{(\lambda)}}$ по x_i $(i = 1, \ldots, m)$ и

$$\|\varphi_{(\lambda)}\|_{B^{(\lambda)}} = \left(\sum_{0}^{\infty} 2^{\theta\varkappa(\lambda)s} (\|Q_s\|^m)^\theta\right)^{1/\theta}, \tag{8}$$

$$(\|\cdot\|^m = \|\cdot\|_{L_p(R_m)}).$$

Введем тригонометрические полиномы $T_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, l)$, где l обозначает наибольшее из чисел λ_j, встречающихся в различных рассматриваемых векторах $\lambda = (\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$. Пусть эти полиномы обладают следующими свойствами: функция

$$\Phi_\nu(x) = \frac{T_\nu(x)}{x^2}$$

целая и, кроме того,

$$\Phi_\nu^{(\nu)}(0) = \left.\frac{d^\nu}{dx^\nu} \Phi_\nu(x)\right|_{x=0} = 1, \quad \Phi_\nu^{(k)}(0) = 0 \tag{9}$$

$$(k = 0, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, l).$$

О величине степени тригонометрического полинома мы не заботимся, поэтому указанные выше условия его однозначно не определяют. Будем считать, что мы выбрали вполне определенные полиномы, имеющие степень $\mu(\nu)$. Тогда $\Phi_\nu(x)$ — целая типа $\mu(\nu)$, а $\Phi_\nu\left(\frac{k}{\mu(\nu)}x\right)$ — целая типа k. Очевидно, далее

$$\left\|\Phi_\nu\left(\frac{k}{\mu(\nu)}x\right)\right\|_{L_p(R_1)}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Phi_\nu\left(\frac{k}{\mu(\nu)}x\right)\right|^p dx\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\frac{\mu(\nu)}{k}\right)^{1/p}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_\nu(u)|^p du\right)^{1/p}=\frac{A_\nu}{k^{1/p}},\qquad(10)$$

где A_ν зависит только от ν.

Определим функции $f_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_n)$, соответствующие различным векторам λ при помощи рядов

$$f_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_n)=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty} Q_{s(\lambda)}\prod_{j=m+1}^{n}\left(\frac{\mu(\lambda_j)}{2^{s/r_j(\lambda)}}\right)^{\lambda_j}\Phi_{\lambda_j}\left(2^{s/r_j(\lambda)}\frac{x_j}{\mu(\lambda_j)}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}R_{s(\lambda)},\qquad(11)$$

где, очевидно, $R_{s(\lambda)}$ — целые типа $2^{s/r_i(\lambda)}$ по x_i $(i=1, \ldots, n)$.

Учитывая (5)—(8), (10), имеем

$$\|R_{s(\lambda)}\|^m\leqslant\frac{\|Q_{s(\lambda)}\|^m}{2^{s\left[\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{\lambda_j}{r_j(\lambda)}+\frac{1}{p}\sum\limits_{m+1}^{n}\frac{1}{r_j(\lambda)}\right]}}=\frac{\|Q_{s(\lambda)}\|^m 2^{s\varkappa(\lambda)}}{2^{s\frac{r_i(\lambda)}{r_i}}},$$

или

$$2^{s\frac{r_i(\lambda)}{r_i}}\|R_{s(\lambda)}\|^n\leqslant\|Q_{s(\lambda)}\|^m 2^{s\varkappa(\lambda)},$$

поэтому в силу (8), учитывая еще, что

$$\frac{r_i(\lambda)}{r_i}=1-\sum_{m+1}^{n}\frac{\lambda_j}{r_j}$$

на самом деле не зависит от i, получим неравенство

$$\|f_{(\lambda)}\|_{B^r_{p\theta}(R_n)}\leqslant\|\varphi_{(\lambda)}\|_{B^{(\lambda)}}.$$

Заметим еще, что в силу свойств функции Φ_ν для функции $f_{(\lambda)}$, если вектор λ допустим, т. е. удовлетворяет условиям 6.7 (1), имеет место равенство

$$\left.\frac{\partial^{\lambda_{m+1}+\ldots+\lambda_n}f_{(\lambda)}}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}}\ldots\partial x_n^{\lambda_n}}\right|_{R_m}=\varphi_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_n).\qquad(12)$$

В самом деле, если формально продифференцировать почленно ряд (11) по $x_{m+1}, \ldots, x_n$ соответственно $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ раз, то получим

$$\frac{\partial^{\lambda_{m+1}+\ldots+\lambda_n}}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}}\ldots\partial x_n^{\lambda_n}}f=\sum_{s=0}^{\infty}Q_{s(\lambda)}\prod_{j=m+1}^{n}\Phi_{\lambda_j}^{(\lambda_j)}\left(2^{s/r_i(\lambda)}\frac{x_j}{\mu_j(\lambda)}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu_{s(\lambda)}.\qquad(13)$$

Из приведенных оценок для $R_{s(\lambda)}$ следует, что на любом этапе дифференцирования получаются сходящиеся в смысле $L_p(R_n)$ ряды, поэтому равенство (13) действительно имеет место в смысле сходимости $L_p(R_n)$ (см. лемму 4.4.7). Далее, в силу ограниченности Φ_{λ_j} ограничены также производные $\Phi_{\lambda_j}^{(\lambda_j)}$, поэтому

$$\left\| \sum_0^\infty (\mu_{s(\lambda)} - Q_{s(\lambda)}) \right\|_{L_p(R_m)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_0^N \|Q_{s(\lambda)}\|_{L_p(R_m)} \left| \Phi_{\lambda_j}^{(\lambda_j)} \left(2^{s/r_j(\lambda)} \frac{x_j}{\mu_j(\lambda)}\right) - 1 \right| + 2c \sum_{N+1}^\infty \|Q_{s(\lambda)}\|_{L_p(R_m)}. \quad (14)$$

Задаем теперь $\varepsilon > 0$ и подбираем N достаточно большим, чтобы второе слагаемое правой части (14) было меньшим ε, а теперь подбираем (см. (9)) δ настолько малым, чтобы для $|x_j| < \delta$ ($j = m+1$ ..., n) первое слагаемое было меньшим ε.

Если же $\{\lambda'\}$ — другой допустимый вектор $(\lambda'_{m+1}, \ldots, \lambda'_n)$, то подобными рассуждениями получим

$$\left. \frac{\partial^{\lambda'_{m+1} + \ldots + \lambda'_n} f_{(\lambda)}}{\partial x_{n+1}^{\lambda'_{n+1}} \ldots \partial x_n^{\lambda'_n}} \right|_{R_m} = 0.$$

В таком случае функция

$$f = \sum_\lambda f_{(\lambda)},$$

где суммирование распространено на всевозможные допустимые векторы λ, удовлетворяет всем требованиям теоремы.

6.9. Обобщение теоремы вложения разных метрик

Ниже дается обобщение теоремы вложения 6.3 (1) на случай классов $B_{p\theta}^r(R_n)$.

Теорема*). *Пусть для рассматриваемых ниже чисел выполняются неравенства* $(r_j > 0)$

$$1 \leqslant p_j \leqslant p' \leqslant \infty, \quad (1)$$

$$\varkappa' = 1 - \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p'}\right) \frac{1}{r_l} > 0, \quad (2)$$

$$\varkappa_i = 1 - \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p_i}\right) \frac{1}{r_l} > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \quad (3)$$

*) С. М. Никольский [10], случай $H_p^r = B_{p\infty}^r$; В. П. Ильин и В. А. Солонников [1], [2], случай $1 \leqslant \theta < \infty$ (методом теории приближения Т. И. Аманов [3]).

и

$$\rho_l = \frac{r_l\varkappa'}{\varkappa_l} \text{*)}. \tag{4}$$

Пусть далее $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. *Тогда имеет место вложение*

$$B^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p}\theta}(R_n) \to B^{\boldsymbol{\rho}}_{p'\theta}(R_n). \tag{5}$$

Из (5) при $p = p_1 = \ldots = p_n$ следует (6.3) (1), $\rho = r'$. Заметим еще, что из того, что $\varkappa' > 0$, следует, что $\varkappa_i > 0$ для всех i, так как $p' \geqslant p_l$.

Доказательство. Вводим семейство функций $g_\nu = g_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ $(0 < \nu_j \leqslant \infty;\ j = 1, \ldots, n)$ целых экспоненциального типа ν_j по переменной x_j, определяемых последним равенством в 5.2.4 (1) при $m = n$.

Положим

$$\nu_k = \nu_k(s) = 2^{s/\rho_k} \qquad (k = 1, \ldots, n;\ s = 0, 1, \ldots, \text{ и } s = \infty)$$

и

$$Q_0 = g_{\nu(0)}, \quad Q_s = g_{\nu(s)} - g_{\nu(s-1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Очевидно,

$$Q_s = \sum_{i=1}^{n} Q_s^{(i)} \qquad (s = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

где

$$Q_s^{(i)} = g_{\nu_1(s), \ldots, \nu_i(s), \nu_{i+1}(s-1), \ldots, \nu_n(s-1)} - \\ - g_{\nu_1(s), \ldots, \nu_{i-1}(s), \nu_i(s-1), \ldots, \nu_n(s-1)}. \tag{8}$$

Имеем

$$\|Q_s\|_{p'} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|Q_s^{(i)}\|_{p'} \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

$$(\|\cdot\|_{p'} = \|\cdot\|_{L_{p'}(R_n)}).$$

Применим к каждому i-му слагаемому этой суммы неравенство разных метрик (3.3.5)

$$\|Q_s^{(i)}\|_{p'} \leqslant 2^n 2^{s\left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p'}\right)\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{\rho_j}} \|Q_s^{(i)}\|_{p_l} = \\ = 2^n 2^{-s\left[\frac{r_l}{\rho_l} - \left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p'}\right)\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\rho_l}\right]} 2^{s\frac{r_l}{\rho_l}} \|Q_s^{(i)}\|_{p_l} \qquad (l = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

---

*) Можно в этой теореме исходить из условия, что все $\rho_j > 0$, так как для того i, для которого p_l принимает наименьшее значение, $\varkappa_l > 0$, но тогда и $\varkappa' > 0$, следовательно, остальные $\varkappa_l > 0$.

Подберем теперь числа ρ_j так, чтобы выражения в скобках были равны единице:

$$1=\frac{r_i}{\rho_i}-\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{p'}\right)\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\rho_l} \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{11}$$

Деля все равенства на r_i, заменяя i на l и суммируя по l, получим

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{r_l}=\left(1-\sum_{l=1}^{n}\frac{\frac{1}{p_l}-\frac{1}{p'}}{r_l}\right)\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\rho_l}. \tag{12}$$

Исключив сумму из (11) и (12), получим

$$\rho_l=r_l\frac{\varkappa}{\varkappa_l} \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{13}$$

Поэтому суммирование (10) по i приводит (см. (7)) к неравенству

$$2^s\|Q_s\|_{p'}\leqslant 2^n\sum_{i=1}^{n}2^{s\frac{r_l}{\rho_l}}\|Q_s^{(i)}\|_{p_l},$$

из которого следует, что (пояснения ниже)

$$\begin{aligned}\left\{\sum_1^\infty 2^{\theta s}\|Q_s\|_{p'}^\theta\right\}^{1/\theta}&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}2^{\theta s\frac{r_l}{\rho_l}}\|Q_s^{(i)}\|_{p_l}^\theta\right\}^{1/\theta}\leqslant\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{\infty}2^{\theta s\frac{\alpha_l}{\rho_l}}\omega_{x_l}^k\left(f_{x_l}^{\bar r_l},\ 2^{-\frac{s}{\rho_l}}\right)_{p_l}^\theta\right)^{1/\theta}\leqslant\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^\infty 2^{\theta s\frac{\alpha_l}{\rho_l}}\omega_{x_l}^k\left(f_{x_l}^{\bar r_l},\ 2^{-\frac{s}{\rho_l}}\right)_{p_l}^\theta ds\right)^{1/\theta}\leqslant\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1\frac{\omega_{x_l}^k\left(f_{x_l}^{\bar r},\ t\right)_{p_l}^\theta}{t^{1+\theta\alpha_l}}dt\right)^{1/p_l}\leqslant\|f\|_{B_{p\theta}^r(R_n)}.\end{aligned} \tag{14}$$

Второе неравенство (14) следует из того, что если $\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n$ и ν_n' — произвольные числа и $\nu_n\leqslant\nu_n'$, то в силу 5.2.4 (2)

$$\begin{aligned}\|g_{\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n}-g_{\nu_1,\ \ldots,\ \nu_{n-1},\ \nu_n'}\|_{p_n}&\leqslant\|g_{\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n}-f\|_{p_n}+\\&+\|f-g_{\nu_1,\ \ldots,\ \nu_{n-1},\ \nu_n'}\|_{p_n}\leqslant\frac{2c\omega_{x_n}^k\left(f_{x_n}^{\bar r_n},\ \frac{1}{\nu_n}\right)_{p_n}}{\nu_n^{\bar r_n}} \qquad (r_n-\bar r_n=\alpha_n).\end{aligned}$$

Далее, так как $f \in L_{p_l}$, то также $Q_0 \in L_{p_l}$ (см. интегральное представление 5.2.4 (1)), тем более $Q_0 \in L_{p'}$, так как $p_l \leqslant p'$ и

$$\|Q_0\|_{p'} \leqslant \|f\|_{p_l} \leqslant \|f\|_{B^r_{p\theta}(R_n)}. \tag{15}$$

Из (14) и (15), в частности, следует, что ряд

$$\sum_0^\infty Q_s \tag{16}$$

сходится в смысле $L_{p'}$. Он заведомо сходится в смысле L_{p_l} к f, потому что

$$\left\| f - \sum_0^N Q_s \right\|_{p_l} = \|f - g_{\nu(N)}\|_{p_l} \leqslant \frac{\omega^k_{x_l}\left(f^{\bar r_l}_{x_l}, \nu_l(N)^{-1}\right)_{p_l}}{\nu_l^{\bar r_l}} <$$

$$\leqslant \frac{1}{\nu_l(N)^{r_l}} \to 0 \qquad (N \to \infty),$$

так как $B^r_{p\theta} \to H^r_p \to H^{r_l}_{x_l p_l}$.

Итак, ряд (16) сходится к f, справедливы неравенства (14) и (15) и Q_s — целые типа $2^{s/\rho_l}$ по x_l ($l = 1, \ldots, n$), следовательно, $f \in B^\rho_{p'}(R_n)$ и имеет место вложение (5).

6.9.1. Пусть вместо числа p' (см. 6.9) задан вектор $p' = (p'_1, \ldots, p'_n)$ такой, что $p'_l \geqslant p_j$ ($l, j = 1, \ldots, n$). Положим

$$\varkappa'_l = 1 - \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p'_l}\right)\frac{1}{r_l} > 0 \tag{1}$$

и

$$r'_l = \frac{r_l \varkappa'_l}{\varkappa_l}, \tag{2}$$

где $\varkappa_l$ определяются, как в 6.9 (3).

Тогда, согласно теореме 6.9,

$$B^r_{p\theta}(R_n) \to B^{r'_l}_{x_l p'_l \theta}(R_n) \qquad (l = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

и, следовательно,

$$B^r_{p\theta}(R_n) \to B^{r'}_{p'\theta}(R_n). \tag{4}$$

6.10. Дополнительные сведения

6.10.1. Полученные в этой главе теоремы автоматически переносятся на периодический случай. Их формулировки останутся верными, если в них символы W, H, B заменить соответственно на $W*$, $H*$, $B*$.

При доказательстве в периодическом случае роль целых функций экспоненциального типа теперь уже играют, конечно, тригонометрические полиномы. В нашем изложении было существенно, что целые функции экспоненциального типа обладают специальными свойствами: для них справедливы неравенства 1) для производных (типа неравенства Бернштейна), 2) неравенства различных метрик и 3) неравенства разных измерений. Подобными свойствами обладают тригонометрические полиномы. Кроме того, для периодических и непериодических функций можно, как мы знаем (ср. 5.2.1 (6) и 5.3.1 (11)), построить аналогичные методы их приближений тригонометрическими полиномами и соответственно функциями экспоненциального типа. Этими методами мы и пользовались, излагая теорию в непериодическом случае.

6.10.2. Можно указать способ получения общих систем функций не аналитических, но таких, что для них выполняются неравенства, очень похожие на дискутируемые выше неравенства для производных, неравенства разных метрик и разных измерений.

Пусть (О. В. Бесов) *)

$$\boldsymbol{h}=(h_1, \ldots, h_n), \quad h_i>0, \quad \boldsymbol{y}:\boldsymbol{h}=\left(\frac{y_1}{h_1}, \ldots, \frac{y_n}{h_n}\right),$$

$$\varphi_h(\boldsymbol{x})=\int\limits_{R_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} \chi(\boldsymbol{y}:\boldsymbol{h}) \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}, \tag{1}$$

где функция $\chi(\boldsymbol{y})$ бесконечно дифференцируема на R_n и сосредоточена (имеет носитель) внутри первого координатного угла, и

$$\int\limits_{R_n} \chi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}=1. \tag{2}$$

Функцию $\varphi_h(x)$ назовем *средней для* $\varphi(\boldsymbol{x})$ *с векторным шагом* $\boldsymbol{h}=(h_1, \ldots, h_n)$.

Для средних функций справедливо неравенство

$$\|D^{\alpha}\varphi_h(\boldsymbol{x})\|_{L_q(R_m)} \leqslant c_1 \left(\prod_1^n h_i^{-\alpha_i}\right)\left(\prod_1^n h_i^{-\frac{1}{p}}\right)\left(\prod_1^m h_i^{\frac{1}{q}}\right)\|\varphi\|_{L_p(R_n)}. \tag{3}$$

Неравенство (3) в известной мере **) аналогично соответствующим оценкам для целых функций конечных степеней $\nu_i=1/h_i$, что позволяет перенести без существенных изменений излагаемую теорию на случай приближения средними функциями φ_h (или

*) См. О. В. Бесов, В. П. Ильин и С. М. Никольский [1].

**) Некоторое отличие заключается в том, что в первой части (3) под знаком нормы стоит φ, а не φ_h. Выход из положения находят в том, что неравенство (3) применяют для φ_h, и тогда в левой части вместо φ_h будет фигурировать φ_{hh}.

вторыми средними $\varphi_{hh}=(\varphi_h)_h$), взяв в 5.2.1 (5) вместо

$$g(t)=\mu\left(\frac{\sin\frac{t}{\lambda}}{t}\right)^{\lambda}$$

гладкую финитную функцию $\xi(t)$.

Этим путем, например, можно прийти к (полученному из других соображений) интегральному представлению В. П. Ильина [6] функции через ее разности. Отметим, что при построении (1) средней функции $\varphi_h(\boldsymbol{x})$ участвуют лишь значения функции $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ для точек $\boldsymbol{y}$ из части окрестности точки $y=0$, лежащей в первом координатном угле. Этим обеспечивается возможность создания соответствующей «локальной» теории.

Докажем неравенство (3). Можно считать, очевидно, что $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$. С помощью неравенства Гёльдера для трех функций

$$|\chi|^{1-\varepsilon},\ |\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^{\frac{q-p}{q}},\ |\chi|^{\varepsilon}|\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^{\frac{p}{q}}\quad(\varepsilon>0)$$

с показателями $\lambda_1=\frac{p}{p-1}$, $\lambda_2=\frac{pq}{q-p}$, $\lambda_3=q$ имеем *)

$$\left|\int_{R_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i}\chi(\boldsymbol{y}:\boldsymbol{h})\,\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i}\right)\left(\int_{R_n}|\chi(\boldsymbol{y}:\boldsymbol{h})|^{\frac{1-\varepsilon}{p-1}p}\,d\boldsymbol{y}\right)^{1-\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\|\varphi\|_{L_p(R_n)}^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_{R_n}|\chi(\boldsymbol{y}:\boldsymbol{h})|^{\varepsilon q}|\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^{p}\,d\boldsymbol{y}\right)^{\frac{1}{q}};$$

отсюда

$$\|\varphi_h\|_{L_q(R_m)}\leqslant c_1\left(\prod_{i=1}^{n}h_i\right)^{-\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{L_p(R_n)}^{1-\frac{p}{q}}\times$$

$$\times\operatorname*{supvrai}_{x_{m+1},\ldots,x_n}\left\{\int_{R_n}|\chi(\boldsymbol{y}:\boldsymbol{h})|^{\varepsilon q}\int_{R_m}|\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^{p}\,dx_1\ldots dx_n\,d\boldsymbol{y}\right\}^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant c\left(\prod_{1}^{n}h_i^{-\frac{1}{p}}\right)\left(\prod_{1}^{m}h_i^{\frac{1}{q}}\right)\|\varphi\|_{L_p(R_n)}.$$

6.10.3. Полезно иметь в виду следующую лемму.

Лемма. *Пусть на $R_n=R_m\times R_{n-m}$, $(\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{u}\in R_m$, $\boldsymbol{w}\in R_{n-m})$ заданы две функции $f\in L_p(R_n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ и f_* и*

---

*) Для показателей λ_1, λ_2, λ_3 выполнены соотношения $1\leqslant\lambda_i\leqslant\infty$, $\lambda_1^{-1}+\lambda_2^{-1}+\lambda_3^{-1}=1$.

последовательность непрерывных на R_n функций f_k $(k=1, 2, \ldots)$, так что выполняются свойства:

1) $\|f_k - f\|_{L_p(R_n)} \to 0 \quad (k \to \infty)$;

2) $\|f_k(u, w) - f_*(u, w)\|_{L_p(R_m)} \to 0 \quad (k \to \infty)$

равномерно относительно w $(|w| < a)$;

3) $\|f_k(u, w) - f_k(u, w')\|_{L_p(R_m)} \to 0$

$$(|w - w'| \to 0, \ |w|, \ |w'| < a)$$

равномерно относительно $k = 1, 2, \ldots$

Тогда f_* *при любом фиксированном* w $(|w| < a)$ *есть след функции* f *на соответствующем m-мерном подпространстве* $R_m(w)$.

Доказательство. Из свойств 1), 2) следует в силу леммы 1.3.9, что f и f_* эквивалентны на R_n: $f = f_*$ почти всюду на R_n. Далее, для указанных w, w'

$$\|f_*(u, w) - f_*(u, w')\|_{L_p(R_m)} \leqslant \|f_*(u, w) - f_k(u, w)\|_{L_p(R_m)} + \\ + \|f_k(u, w) - f_k(u, w')\|_{L_p(R_m)} + \|f_k(u, w') - f_*(u, w')\|_{L_p(R_m)} < \\ < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \quad (k > k_0, \ |w - w'| < \delta)$$

при достаточно малом δ и большом k_0. Это возможно в силу свойств 1), 2), 3).

Чтобы было ясно, какое может иметь значение приведенная лемма, вернемся к теореме вложения разных измерений, для простоты ограничившись изотропным случаем. С помощью этой леммы легко заключить, что достаточно доказать теорему о следах только для непрерывных или даже бесконечно дифференцируемых функций соответствующего класса, как она автоматически будет верна для всех функций этого класса. Поясним эту мысль.

Пусть $B = B^r_{p\theta}(R_n)$, $B' = B^\rho_{p\theta}(R_m(w))$ $\left(\rho = r - \frac{n-m}{p} > 0, \ 1 \leqslant m < n\right)$ и $\mathfrak{M} \subset B$ — множество непрерывных функций, плотное в B (в метрике B) *). Пусть далее доказаны неравенства

$$\|f\|_{B'} \leqslant c\|f\|_B, \tag{1}$$

$$\|f(u, w) - f(u, w')\|_{L_p(R_m)} \leqslant \|f\|_B \ \lambda(|w - w'|), \tag{2}$$

$$(\lambda(\delta) \to 0, \ \delta \to 0),$$

где c не зависит от w и указанных f, так же как функция $\lambda(\delta)$

*) В этом рассуждении можно B заменить на $W^l_p(R_n)$ $(l = 1, 2, \ldots)$.

не зависит от f и w и w'. Тогда эти неравенства с той же константой c и функцией $\lambda(\delta)$ имеют место для всех $f \in B$. В самом деле, пусть $f_k \in \mathfrak{M}$ $(k=1, 2, \ldots)$ и $\|f_k - f\|_B \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда

$$\|f_k\|_{B'} \leqslant c \|f_k\|, \tag{3}$$

$$\|f_k(u, w) - f_k(u, w')\|_{L_p(R_m)} \leqslant K\lambda(|w - w'|), \tag{4}$$

где константа K не зависит от k. Из (3) еще следует, что

$$\|f_k - f_l\|_{B'} \leqslant c \|f_k - f_l\|_B,$$

откуда вследствие полноты B' при любом w существует функция $f_*(x) = f_*(u, w)$ такая, что

$$\|f_k - f_*\|_{L_p(R_m)} \leqslant \|f_k - f_*\|_{B'} \leqslant c \|f_k - f_*\|_B \to 0, \quad (k \to \infty),$$

$$\|f_*(u, w) - f_*(u, w')\|_{L_p(R_m)} \leqslant K\lambda(|w - w'|),$$

$$\|f_*\|_{B'} \leqslant c \|f\|_B. \tag{5}$$

Таким образом, для f, f_*, f_k выполняются условия 1) — 3) леммы, и, следовательно, f_* при любом w есть след f на $R_m(w)$. Этим доказаны неравенства (1), (2) для произвольной функции $f \in B$ (надо учесть, что константа K в (4) при достаточно больших k, l может быть взята как угодно мало отличающейся от $\|f\|_B$).

Подобное рассуждение можно провести в случае обратной теоремы вложения. Пусть $\mathfrak{M}' \subset B'$ — множество непрерывных функций, плотное в B', и пусть каждой определенной на $R_m = R_m(0)$ непрерывной функции $\varphi \in \mathfrak{M}'$ приведена в соответствие непрерывная функция $A\varphi = f(x) \in B$, определенная на R_n, такая, что след f на R_m есть φ, и выполняется неравенство *)

$$\|f\|_B \leqslant c \|\varphi\|_{B'}, \tag{6}$$

где c не зависит от $\varphi \in \mathfrak{M}'$. Зададим произвольную функцию $\varphi \in B'$, и пусть $\varphi_k \in \mathfrak{M}'$, $\|\varphi - \varphi_k\|_{B'} \to 0$ $(k \to \infty)$, $A\varphi_k = f_k$, тогда

$$\|f_k - f_l\|_B \leqslant c \|\varphi_k - \varphi_l\|_{B'} \to 0 \quad (k, l \to \infty)$$

и существует $f \in B$ (B полно), так что $\|f - f_k\|_B \to 0$. Очевидно, что для функций φ, f выполняется неравенство (6) (с той же константой c).

Отметим, что при конечном θ множество $\mathfrak{M}$ целых функций $f \in L_p(R_n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ экспоненциальных сферических типов (всех) плотно в любом $B = B^r_{p\theta}(R_n)$ (в метрике B). В самом деле

*) Снова здесь B можно заменить на $W^l_p(R_n)$ $(l = 1, 2, \ldots)$. Соответствующая теорема о продолжении с R_m на R_n доказана в 9.5.2.

оно плотно в любом $B=B^r_{p\theta}(R_n)$ $(1\leqslant\theta<\infty)$, потому что если $f\in B$, то (см. 6.2 (6))

$$f=\sum_0^\infty Q_s,\quad \|f\|_B=\left(\sum_0^\infty a^{sr\theta}\|Q_s\|^\theta\right)^{1/\theta}$$

и

$$\|f-f_k\|_B=\left(\sum_{k+1}^\infty a^{sr\theta}\|Q_s\|^\theta\right)^{1/\theta}\to 0\quad (k\to\infty),$$

где

$$f_k=\sum_0^k Q_s\in\mathfrak{M}.$$

При $1\leqslant p<\infty$ $\mathfrak{M}$ также плотно в $W^l_p(R_n)$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, что следует из оценок 5.2.2 (4).

Конечно, из сказанного следует, что множество всех бесконечно дифференцируемых функций класса $B^r_{p\theta}(R_n)$ $(1\leqslant\theta<\infty)$ или $W^l_p(R_n)$ плотно в соответствующем классе, потому что оно содержит в себе множество функций экспоненциальных типов, принадлежащих к $L_p(R_n)$.

ГЛАВА 7

ТРАНЗИТИВНОСТЬ И НЕУЛУЧШАЕМОСТЬ ТЕОРЕМ ВЛОЖЕНИЯ. КОМПАКТНОСТЬ

7.1. Транзитивные свойства теорем вложения *)

Зададим системы чисел

$$\boldsymbol{r}=(r_1, \ldots, r_n)>0, \quad \boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n) \quad (1 \leqslant p_i \leqslant \infty) \tag{1}$$

и числа p', p'', удовлетворяющие неравенствам

$$p_i \leqslant p' < p'' \leqslant \infty. \tag{2}$$

Если выполняются условия

$$\rho_i' = \frac{r_i \varkappa}{\varkappa_i}, \tag{3}$$

$$\varkappa = 1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p'}}{r_l} > 0, \tag{4}$$

$$\varkappa_i = 1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p_i}}{r_l} > 0 \quad (i=1, \ldots, n), \tag{5}$$

то имеет место теорема вложения (6.8)

$$B_{p\theta}^{r}(R_n) \to B_{p'\theta}^{\rho'}(R_n),$$

осуществляющая переход от системы чисел (1) к системе чисел

$$\boldsymbol{\rho}' = (\rho_1', \ldots, \rho_n'), \ p'.$$

Надо иметь в виду, что $\varkappa \leqslant \varkappa_i$, и потому неравенство (5) есть следствие неравенства (4).

*) С. М. Никольский [3], [10].

Но теперь можно класс $B^{\rho'}_{p'\theta}(R_n)$ считать исходным и при наличии неравенства

$$\varkappa' = 1 - \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p''}\right)\sum_1^n \frac{1}{\rho'_k} > 0$$

заключить, что имеет место дальнейшее вложение классов

$$B^{(\rho')}_{p'\theta}(R_n) \to B^{(\rho'')}_{p''\theta}(R_n),$$

где

$$\rho'' = (\rho''_1, \ldots, \rho''_n) = \varkappa'\rho'.$$

Таким образом, мы преобразовали систему $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ в систему (ρ', p'), которую в свою очередь преобразовали в систему (ρ'', p''). Надо иметь в виду, что ρ' определяется через $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ и p', а ρ'' — через ρ', p' и p''. Замечательно, что эти преобразования носят *транзитивный* характер: переход от первой системы ко второй, а затем от второй к третьей может быть заменен одним переходом от первой системы к третьей.

В самом деле,

$$\rho''_k = \frac{r_k\varkappa\varkappa'}{\varkappa_k} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

где предположено, что

$$\varkappa, \ \varkappa', \ \varkappa_k > 0 \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

С другой стороны, пусть $p_k \leqslant p''$ $(k = 1, \ldots, n)$, и пусть имеют место неравенства

$$\varkappa'', \ \varkappa_k > 0 \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

где

$$\varkappa'' = 1 - \sum_{l=1}^n \frac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p''}}{r_l}.$$

Тогда имеет место вложение

$$B^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p}\theta}(R_n) \to B^{(\rho''_*)}_{p''\theta}(R_n),$$

т. е. переход от $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ непосредственно к (ρ''_*, p''), где

$$\rho''_* = \{\rho''_{*1}, \ldots, \rho''_{*n}\}$$

и

$$\rho''_{*k} = \frac{r_k\varkappa''}{\varkappa_k} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Но легко подсчитать, что

$$\varkappa'' = \varkappa\varkappa', \tag{8}$$

поэтому

$$\rho''_* = \rho''.$$

Кроме того, в силу неравенства $p' < p''$, очевидно, $\varkappa' > \varkappa''$, т. е. $\varkappa' > 0$. Но тогда вследствие (8) $\varkappa > 0$, и транзитивность доказана.

Транзитивность теорем вложения разных измерений

$$B^{r}_{p\theta}(R_n) \to B^{r'}_{p\theta}(R_{m_1}) \to B^{r''}_{p\theta}(R_{m_2})$$
$$(1 \leqslant m_2 < m_1 < n),$$

где

$$r'_i = r_i \varkappa' \quad (i = 1, \ldots, m_1),$$
$$\varkappa' = 1 - \frac{1}{p} \sum_{m_1+1}^{n} \frac{1}{r_j} > 0,$$
$$r''_i = r'_i \varkappa'' \quad (i = 1, \ldots, m_2),$$
$$\varkappa'' = 1 - \frac{1}{p} \sum_{m_2+1}^{m_1} \frac{1}{r'_j},$$

следует из легко проверяемого равенства

$$\varkappa = 1 - \frac{1}{p} \sum_{m_2+1}^{n} \frac{1}{r_j} = \varkappa' \varkappa''.$$

7.2. Неравенства с параметром ε. Мультипликативные неравенства

Зададим функцию $f(\boldsymbol{x}) \in H^r_p(R_n) = H^r_p$ и положительный вектор $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Положим $F(\boldsymbol{x}) = f(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n) = f_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{x})$. Очевидно ($k_j > r_j - \rho_j > 0$),

$$\frac{\left\| \Delta_h^{k_j} F_{x_j}^{(\rho_j)} \right\|_p}{h^{r_j - \rho_j}} = \frac{\varepsilon_j^{r_j} \left\| \Delta_{x_j \varepsilon_j h}^{k_j} f_{x_j}^{(\rho_j)}(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n) \right\|_p}{(\varepsilon_j h)^{r_j - \rho_j}} = \frac{\varepsilon_j^{r_j} \boldsymbol{\varepsilon}^{-\frac{1}{p}} \left\| \Delta_{x_j \varepsilon_j h}^{k} f_{x_j}^{(\rho_j)}(\boldsymbol{x}) \right\|_p}{(\varepsilon_j h)^{r_j - \rho_j}}$$
$$(\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha} = \varepsilon_1^{\alpha} \ldots \varepsilon_n^{\alpha}).$$

Беря верхнюю грань от обеих частей неравенства по h, получим

$$\| f_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{x}) \|_{h_{x_j p}^{r_j}} = \varepsilon_j^{r_j} \boldsymbol{\varepsilon}^{-\frac{1}{p}} \| f \|_{h_{x_j p}^{r_j}}, \tag{1}$$

каково бы ни было $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$.

Рассмотрим еще полунорму $b_{x_j p}^{r_j} = b_{x_j p\theta}^{r_j}(R_n)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$:

$$\|f\|_{b_{x_j p}^{r_j}} = \left(\int_0^\infty t^{1-\theta(r_j-\rho_j)} \Omega_{x_j}^{k_j}\left(f_{x_j}^{(\rho_j)},\ t\right)_{L_p(R_n)}^\theta dt\right)^{1/\theta}. \tag{2}$$

В нее тоже можно внести функцию f_ε и произвести замену переменных в интеграле под знаком Ω. В результате получим равенство, аналогичное (1):

$$\|f_\varepsilon(x)\|_{b_{x_j p}^{r_j}} = \varepsilon_j^{r_j} \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{b_{x_j p}^{r_j}}. \tag{3}$$

Оио, таким образом, верно для любых θ $(1 \leqslant \theta \leqslant \infty)$.

Очевидно, далее, что

$$\|f_\varepsilon\|_p = \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p, \tag{4}$$

поэтому

$$\|f_\varepsilon\|_{B_p^r} = \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \left\{\|f\|_p + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^{r_j} \|f\|_{b_{x_j p}^{r_j}}\right\}. \tag{5}$$

Для функций f, принадлежащих к изотропным классам, полагая $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$, где теперь ε — положительный скаляр, и рассуждая, как выше, получим

$$\|f(\varepsilon x)\|_p = \varepsilon^{-\frac{n}{p}} \|f\|_p, \quad \|f(\varepsilon x)\|_{h_p^r} = \varepsilon^{r-\frac{n}{p}} \|f\|_{h_p^r}, \tag{6}$$

$$\|f(\varepsilon x)\|_{b_p^r} = \varepsilon^{r-\frac{n}{p}} \|f\|_{b_p^r}.$$

Приведем примеры применения формул (3) — (6).

С вложением $B_p^r \to B_p^\rho$ $(0 < \rho < r)$ связано неравенство

$$\|f\|_{B_p^\rho} \leqslant c\,(\|f\|_p + \|f\|_{b_p^r}), \tag{7}$$

из которого в силу (6) следует неравенство

$$\|f\|_{B_p^\rho} \leqslant c\,(\varepsilon^{-\rho} \|f\|_p + \varepsilon^{r-\rho} \|f\|_{b_p^r}) \tag{7'}$$

с произвольным параметром ε.

Наоборот, из (7′) при $\varepsilon = 1$ следует (7). В приложеииях неравенством (7′) пользуются, когда хотят, чтобы определенный один из членов его правой части был достаточно малым. Минимизируя правую часть (7′) по ε, получим неравенство

$$\|f\|_{b_p^\rho} \leqslant c\left[\left(\frac{r-\rho}{\rho}\right)^{\rho/r} + \left(\frac{\rho}{r-\rho}\right)^{1-\rho/r}\right] \|f\|_p^{1-\frac{\rho}{r}} (\|f\|_{b_p^r})^{\rho/r}, \tag{7''}$$

которое называют *мультипликативным неравенством*. Из (7″), очевидно, обратно, следует (7′).

Рассмотрим еще связанные с вложениями разных измерений и метрик неравенства

$$\|f\|_{B_p^\rho(R_m)} \leqslant c\,(\|f\|_{L_p(R_n)} + \|f\|_{b_p^r(R_n)}) \tag{8}$$

$$\left(1 \leqslant m < n,\quad \rho = r - \frac{n-m}{p} > 0\right),$$

$$\|f\|_{B_{p'}^{r'}(R_n)} \leqslant c\,(\|f\|_{L_p(R_n)} + \|f\|_{b_p^r(R_n)}), \tag{9}$$

$$r' = r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) n > 0,$$

где R_m — подпространство точек $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ с произвольным фиксированным $y = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ и c не зависит от f и φ. Если в этих неравенствах заменить f на f_ε, а затем изгнать из-под норм ε при помощи (6), то получим соответственно

$$\|f\|_{b_p^\rho(R_m)} \leqslant c\left(\varepsilon^{-r}\|f\|_{L_p(R_n)} + \|f\|_{b_p^r(R_n)}\right),$$

$$\|f\|_{b_{p'}^{r'}(R_n)} \leqslant c\left(\varepsilon^{-r}\|f\|_{L_p(R_n)} + \|f\|_{b_p^r(R_n)}\right).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to \infty$, получим неравенства

$$\|f\|_{b_p^\rho(R_m)} \leqslant c\,\|f\|_{b_p^r(R_n)}, \tag{10}$$

$$\|f\|_{b_{p'}^{r'}(R_n)} \leqslant c\,\|f\|_{b_p^r(R_n)}, \tag{11}$$

уточняющие неравенства (8), (9), потому что в них входит та же константа c, но они уже не содержат слагаемое $\|f\|_{L_p(R_n)}$, которое предполагалось конечным. Однако если $\|f\|_{L_p(R_n)} = \infty$, то неравенства (10), (11), вообще говоря, неверны. Так, при $r - \rho \geqslant 1$ многочлен

$$P_l(x) = \sum_{|k| \leqslant l} a_k x^k,$$

где $l = \bar{r}$, если r — нецелое, и $l = \bar{r} + 1$, если r — целое, обращает правую часть неравенства (10) в нуль, в то время как его левая часть вообще не равна нулю. При $r - \rho < 1$ неравенства (10) могут выполняться без того, чтобы норма была конечной (см. замечание к 7.2).

Можно в духе формул (10) — (11) дать уточнение теоремы об оценке смешанных производных. Например, для $W_p^2\,(1 < p < \infty)$ имеет место неравенство (см. 9.2.2)

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right\| \leqslant c\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right\| + \|u\|\right),$$

откуда

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right\| \leqslant c\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right\| + \varepsilon^{-2}\|u\|\right),$$

и после перехода к пределу при $\varepsilon \to \infty$ получим неравенство

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right\| \leqslant c\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right\|\right),$$

справедливое при условии, что $\|u\| < \infty$.

Подобные уточнения не всегда имеют место. Например, в неравенстве (7) первый член его правой части опустить нельзя, это видно из эквивалентного ему неравенства (7′). Если бы в последнем первый член отсутствовал, то после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ мы получили бы, что левая часть равна 0, что возможно, лишь когда f — многочлен.

Рассмотрим еще пример, относящийся к анизотропному случаю.

В неравенстве разных измерений

$$\|f\|_{b^{\rho_j}_{x_j p}(R_m)} \leqslant c\left(\|f\|_{L_p} + \|f\|_{b^r_p(R_n)}\right), \tag{12}$$

$$\varkappa = 1 - \frac{1}{p}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{r_j} > 0, \quad \rho_j = \varkappa r_j \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{13}$$

первое слагаемое в правой части лишнее. В самом деле, беря для удобства $j = 1$ и подставляя f_ε в (12), на основании (3) получим

$$\varepsilon_1^{\rho_1}(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m)^{-1/p}\|f\|_{b^{\rho_1}_{x_1 p}(R_m)} \leqslant$$

$$\leqslant c\,(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)^{-1/p}\left\{\|f\|_{L_p(R_n)} + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^{r_j}\|f\|_{b^{r_j}_{x_j p}(R_n)}\right\}.$$

Сокращаем на $(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m)^{-1/p}$, переходим к пределу при $\varepsilon_j \to 0$, только для $j = 2, \ldots, m$, и полагаем $\varepsilon_j = \varepsilon_1^{\frac{\rho_1}{r_j}}$, $j = m+1, \ldots, n$. Тогда

$$\|f\|_{b^{\rho_1}_{x_1 p}(R_m)} \leqslant c\left\{\varepsilon_1^{-r_1}\|f\|_{L_p(R_n)} + \sum_{j=m+1}^{n}\|f\|_{b^{r_j}_{x_j p}(R_n)}\right\}.$$

Переход к пределу при $\varepsilon_1 \to \infty$ приводит к неравенству (12), но уже без первого слагаемого в правой части при $j = 1$. Но то же можно сделать при любом $j = 1, \ldots, m$. Суммируя по j, получим (если $\|f\|_{L_p} < \infty$) неравенство

$$\|f\|_{b_p^\varrho(R_m)} \leqslant c_1 \|f\|_{b_p^r(R_n)},$$

уточняющее соответствующую теорему вложения разных измерений.

7.3. Крайние функции в H_p^r. Неулучшаемость теорем вложения

Будем писать $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) > 0$, если для всех $\varepsilon_j \geqslant 0$ и хотя бы одна из компонент $\varepsilon_j > 0$. Функцию f будем называть *крайней функцией* в классе $H_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{r}}$, если она принадлежит к $H_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{r}}$ и не принадлежит к $H_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\varepsilon}}$, каков бы ни был вектор $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$.

Мы будем рассматривать класс $H_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{r}}(R_n)$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) > 0$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \leqslant p_j \leqslant \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Как всегда, если $p = p_1 = \ldots = p_n$, то вместо вектора $\boldsymbol{p}$ будем говорить о числе p и вместо $H_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{r}}$ писать $H_p^{\boldsymbol{r}}$. На вектор $\boldsymbol{p}$ наложим условие

$$\varkappa_j = \varkappa_j(\boldsymbol{p}) = 1 - \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p_j}\right) \frac{1}{r_l} > 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

В частности,

$$\varkappa_j(p) = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

и в случае классов $H_p^{\boldsymbol{r}}(R_n)$ условие (1) автоматически выполняется.

Отметим, что

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j}{r_j} = \sum_j \frac{1}{r_j} + \sum_j \sum_l \left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p_j}\right) \frac{1}{r_l r_j} = \sum_j \frac{1}{r_j}.$$

Положим

$$F(t) = \left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2 \tag{2}$$

и

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \psi_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}}(a, \boldsymbol{x}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n} F\left(a^{s\varkappa_j/r_j} x_j\right)}{a^{s\left(1 - \sum \frac{1}{p_l r_l}\right)}} \tag{3}$$

$$(a > 1, \ \varkappa_j = \varkappa_j(\boldsymbol{p})).$$

В частности,

$$\psi_{p,r}(a, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n} F\left(a^{s/r_j} x_j\right)}{a^{s\left(1-\frac{1}{p}\sum\frac{1}{r_l}\right)}}. \tag{4}$$

Покажем, что $\psi_{p,r}(a, x) \in H_p^r(R_n)$. В самом деле, пусть Q_s есть s-й член ряда (3). Так как F — целая функция типа 1 от одной переменной, то Q_s — целая функция типа $\nu_j(s) = a^{s\frac{\varkappa_j}{r_j}}$ по x_j и при этом

$$\|Q_s\|_{L_{p_j}(R_n)} \sim a^{-s\varkappa_j} \quad (s = 0, 1, \ldots), \tag{5}$$

потому что

$$1 - \sum_1^n \frac{1}{p_l r_l} + \frac{1}{p_l}\sum_1^n \frac{\varkappa_l}{r_l} = 1 - \sum_1^n \left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p_l}\right)\frac{1}{r_l} = \varkappa_l. \tag{6}$$

Следовательно *),

$$\nu_l(s)^{r_l} \|Q_s\|_{L_{p_l}(R_n)} = \left(a^{s\frac{\varkappa_l}{r_l}}\right)^{r_l} \|Q_s\|_{L_{p_l}(R_n)} \sim 1 \quad (s = 0, 1, \ldots). \tag{7}$$

Таким образом, левая часть (7) ограничена для $\nu_j(s)$, пробегающих возрастающую прогрессию. Это показывает (см. 5.5.3 (6)), что $\psi \in H_{x_l p_l}^{r_l}(R_n)$ для любого $i = 1, \ldots, n$, т. е. $\psi \in H_p^r(R_n)$.

Но ниже (см. 7.4) будет доказано, что во всяком случае при достаточно большом $a > 1$ функция $\psi_{p,r}$ не только принадлежит к $H_p^r(R_n)$, но и является *крайней* в этом классе, а пока мы сделаем некоторые вытекающие отсюда выводы.

Зададим число $p' \geqslant p_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, которое, в частности, может равняться ∞, такое, что

$$\varkappa = 1 - \sum_1^n \left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p'}\right)\frac{1}{r_l} > 0$$

(тогда автоматически $\varkappa_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$), и определим, как в теореме вложения разных метрик числа

$$\rho_l = \frac{r_l \varkappa}{\varkappa_l} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

*) По определению $a_s \sim b_s$ $(s \in e)$, если существуют положительные не зависящие от $s \in e$ константы c_1, c_2 такие, что $c_1 a_s \leqslant b_s \leqslant c_2 a_s$ $(s \in e)$.

Если положить

$$b = a^{\varkappa}, \quad a^{s\frac{\varkappa_j}{r_j}} = b^{s/\rho_j} \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

то получим

$$\psi(x) = \psi_{p', \varrho}(b, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n} F\left(b^{s\frac{1}{\rho_j}} x_j\right)}{b^{s\left(1 - \frac{1}{p'} \sum \frac{1}{\rho_l}\right)}}. \tag{9}$$

В самом деле,

$$\varkappa\left(1 - \frac{1}{p'} \sum_l \frac{1}{\rho_l}\right) = \varkappa - \frac{1}{p'} \sum_l \frac{\varkappa_l}{r_l} =$$
$$= 1 - \sum_l \left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p'}\right) \frac{1}{r_l} - \frac{1}{p'} \sum_l \frac{1}{r_l} = 1 - \sum_l \frac{1}{p_l r_l}.$$

Равенства (3) и (9) указывают на тот факт, что ψ являются одновременно функциями $\psi_{p, r}(a, x)$ и $\psi_{p', \varrho}(b, x)$, где b и a связаны равенством (8). Но если a достаточно велико, то $\psi_{p, r} \in H_p^r(R_n)$ и $\psi_{p', \varrho} \in H_{p'}^{\varrho}(R_n)$, что согласуется с теоремой вложения. Но $\psi_{p', \varrho}$ крайняя функция в классе $H_{p'}^{\varrho}(R_n)$. Она не принадлежит ни к какому классу $H_{p'}^{\varrho + \varepsilon}(R_n)$, где $\varepsilon > 0$. Это доказывает, что вложение $H_p^r(R_n) \to H_{p'}^{\varrho + \varepsilon}(R_n)$ $(\varepsilon > 0)$ неверно. Но тогда неверно также вложение $B_{p\theta}^r(R_n) \to B_{p'}^{\varrho + \varepsilon}(R_n)$, потому что, если допустить, что оно верно, то имели бы

$$H_p^{r + \frac{1}{2}\varepsilon}(R_n) \to B_{p\theta}^r(R_n) \to B_{p'\theta}^{\varrho + \varepsilon}(R_n) \to H_{p'}^{\varrho + \varepsilon}(R_n),$$

что, как мы доказали, невозможно. Будем исходить теперь из функции $\psi_{p, r}(a, x)$ (см. (3)), и пусть

$$\varkappa = 1 - \frac{1}{p} \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{r_l} > 0 \qquad (1 \leqslant m < n). \tag{10}$$

Будем считать, что вектор $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$, теперь уже m-мерный, определяется, как в теореме вложения разных измерений равенствами

$$\rho_j = r_j \varkappa \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

и пусть $x = (u, y)$, $u = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $\psi(x) = \psi(u, y)$. Обозначим через R_m координатное подпространство точек $(u, 0)$. След ψ на R_m есть функция $(F(0)=1)$

$$\psi(u, 0)=\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m} F\left(a^{\frac{s}{r_j}} x_j\right)}{a^{s\left(1-\frac{1}{p} \sum_{1}^{n} \frac{1}{r_l}\right)}}=\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m} F\left(b^{\frac{s}{\rho_j}} x_j\right)}{b^{s\left(1-\frac{1}{p} \sum_{1}^{m} \frac{1}{\rho_l}\right)}}=\psi_{p, \varrho}(u) \quad (11)$$

$$(b=a^{\varkappa}),$$

потому что

$$\varkappa\left(1-\frac{1}{p} \sum_{1}^{m} \frac{1}{\rho_l}\right)=\varkappa-\frac{1}{p} \sum_{1}^{m} \frac{1}{r_l}=1-\frac{1}{p} \sum_{1}^{n} \frac{1}{r_l}.$$

Из (11) мы видим, что след $\psi_{p, r}(x)$ на R_m есть $\psi_{p, \varrho}(u)$. При этом $\psi_{p, r}(x) \in H_p^r(R_n)$, $\psi_{p, \varrho}(u) \in H_p^{\varrho}(R_m)$, что сообразуется с теоремой вложения разных измерений. Но ψ_p^{ϱ} — крайняя функция в $H_p^{\varrho}(R_m)$ и не принадлежит к $H_p^{\varrho+\varepsilon}(R_m)$ $(\varepsilon>0)$, поэтому вложение $H_p^r(R_n) \rightarrow H_p^{\varrho+\varepsilon}(R_m)$ неверно. Рассуждая, как выше, мы приходим к выводу, что неверно также вложение $B_{p\theta}^r(R_n) \rightarrow$ $\rightarrow B_{p\theta}^{\varrho+\varepsilon}(R_m)$. Этим доказано, что теорема вложения разных метрик в указанном смысле неулучшаема. Однако улучшение возможно в терминах более общих классов. Например, А. С. Джафаров [1] получил уточнения теорем вложений для классов H_p^r, рассматривая более общие классы $H_p^{r, s}$ $(H_p^{r, 0}=H_p^r)$ функций f, которые, например, при $n=1$, $r<1$ определяются так: $f \in H_p^{r, s}$, если $f \in L_p$ и

$$\|f(x+h)-f(x)\|_{L_p} \leqslant M|h|^r\left|\ln \frac{1}{|h|}\right|^s.$$

Мы видели, что заключение о невозможности указанного вложения свелось к доказательству невозможности сопутствующего ему неравенства. Однако осталось неясным, существует ли в классе $B_{p\theta}^r(R_n)$ функция, не принадлежащая к $B_{p\theta}^{\varrho+\varepsilon}(R_m)$. В 7.6 будет показано, что такая функция существует.

7.4. Еще о крайних функциях в H_p^r

Переходим к доказательству того, что $\psi=\psi_{pr}(a, x)$ (7.3 (3)) при достаточно большом a есть крайняя функция в $H_p^r(R_n)$.

Отметим, что функция $F(t)$ обладает следующими свойствами: для каждого натурального l можно указать такие, зависящие от l числа c, δ, что

1) производная $F^{(l)}(t)$ сохраняет знак на $(0, \delta)$;
2) на $(0, \delta)$ выполняется неравенство

$$|F^{(l)}(t)| \geqslant ct. \tag{1}$$

Первое свойство вытекает из аналитичности F. Второе из того, что

$$F(t) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \ldots,$$

где $a_{2l} \neq 0$ для любых $i = 0, 1, \ldots$

Положим

$$\gamma = 1 - \sum_1^n \frac{1}{p_l r_l} \tag{2}$$

и заметим, что

$$\frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j}{r_j} - \varkappa_i = \frac{1}{p_i} \sum_l \frac{1}{r_l} - \left(1 - \sum_l \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_l}\right)\frac{1}{r_l}\right) = -\gamma. \tag{3}$$

Зададим последовательность

$$h = h_\mu = \frac{\delta}{2} a^{-\mu \frac{\varkappa_1}{r_1}} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots), \tag{4}$$

где δ — число, о котором сказано выше, подобранное для $l = \bar{r}_1 + 2$ ($r_1 = \bar{r}_1 + \alpha$, $\bar{r}_1$ — целое, $0 < \alpha \leqslant 1$).

Наша функция записывается в виде

$$\psi = \sum_0^\infty Q_s, \qquad Q_s = a^{-s\gamma} \prod_{j=1}^{n} F\left(a^{s \frac{\varkappa_j}{r_j}} x_j\right).$$

Нашей целью является оценка снизу нормы $\Delta_{x_1 h}^2 \psi_{x_1}^{(\bar{r}_1)}(\boldsymbol{x})$ в метрике $L_{p_1}(R_n)$, где $\psi_{x_1}^{(\bar{r}_1)}$ обозначает производную от ψ по x_1 порядка $\bar{r}_1$.

Имеем

$$\Delta_{x_1 h}^2 \psi_{x_1}^{(\bar{r}_1)} = \sum_{s \leqslant \mu} \Delta_{x_1 h}^2 Q_{s x_1}^{(\bar{r}_1)} + \sum_{s > \mu} \Delta_{x_1 h}^2 Q_{s x_1}^{(\bar{r}_1)} = s(h) + \sigma(h), \tag{5}$$

$$\|\sigma(h)\|_{L_{p_1}(R_n)} \leqslant 4 \sum_{s > \mu} \|Q_{s x_1}^{(\bar{r}_1)}\|_{L_{p_1}(R_n)} \leqslant 4 \sum_{s > \mu} a^{-s\varkappa_1\left(1 - \frac{\bar{r}_1}{r_1}\right)} =$$

$$= 4 a^{-(\mu+1)\frac{\varkappa_1}{r_1}\alpha} \sum_0^\infty a^{-s\frac{\varkappa_1}{r_1}\alpha} = \left(\frac{2}{\delta} h\right)^\alpha \frac{4}{a^{\frac{\varkappa_1}{r_1}\alpha}\left(1 - a^{-\frac{\varkappa_1}{r_1}\alpha}\right)}. \tag{6}$$

Во втором неравенстве мы воспользовались оценкой 7.3 (5), в последнем же равенстве произведена замена на $h = h_\mu$ по формуле (4). Мы вычислили константу при h^α не зря — теперь видно, что она стремится к нулю при $a\to\infty$.

С другой стороны (пояснения ниже),

$$\|s(h)\|_{L_{p_1}(R_n)}=\Bigg\|\sum_{s\leqslant\mu} a^{-s\gamma}\left(ha^{s\frac{\varkappa_1}{r_1}}\right)^2 a^{s\bar r_1\frac{\varkappa_1}{r_1}} F_{x_1}^{(\bar r_1+2)}\left(a^{s\frac{\varkappa_1}{r_1}}(x_1+\theta h)\right)\times$$

$$\times\prod_{j=2}^{n}F\left(a^{s\frac{\varkappa_j}{r_j}}x_j\right)\Bigg\|_{L_{p_1}(R_n)}\geqslant\|\cdot\|_{L_{p_1}[(0,h)\times R_{n-1}]}\geqslant$$

$$\geqslant\left(ha^{\mu\frac{\varkappa_1}{r_1}}\right)^2 a^{-\mu\left(\gamma-\bar r_1\frac{\varkappa_1}{r_1}\right)}\times$$

$$\times\left\|F_{x_1}^{(\bar r_1+2)}\left(a^{\mu\frac{\varkappa_1}{r_1}}(x_1+\theta h)\right)\prod_{j=2}^{n}F\left(a^{\mu\frac{\varkappa_j}{r_j}}x_j\right)\right\|_{L_{p_1}[(0,h)\times R_{n-1}]}\geqslant$$

$$\geqslant c_1\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 a^{-\mu\left(\gamma-\varkappa_1+\frac{\alpha\varkappa_1}{r_1}\right)}\left(\int_0^h\left|ca^{\mu\frac{\varkappa_1}{r_1}}x_1\right|^{p_1}dx_1\right)^{1/p_1} a^{-\mu\frac{1}{p_1}\sum_2^n\frac{\varkappa_j}{r_j}}=$$

$$=c_2\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\left(ha^{\mu\frac{\varkappa_1}{r_1}}\right)^{1+\frac{1}{p_1}}\left(ha^{\mu\frac{\varkappa_1}{r_1}}\right)^{-\alpha}h^\alpha=c_2\left(\frac{\delta}{2}\right)^{3-\alpha+\frac{1}{p_1}}h^\alpha. \tag{7}$$

Во втором соотношении (неравенстве) область интегрирования R_n заменена на ее часть $(0,h)\times R_{n-1}$, состоящую из точек $\boldsymbol{x}$, где $0<x_1<h$, $-\infty<x_j<\infty$ при $j=2,\ldots,n$. В таком случае при $s\leqslant\mu$ в силу (4) $a^{s\frac{\varkappa_1}{r_1}}(x_1+\theta h)\leqslant a^{\mu\frac{\varkappa_1}{r_1}}2h\leqslant\delta$ и потому функции $F_{x_1}^{(\bar r_1+2)}\left(a^{s\frac{\varkappa_1}{r_1}}(x_1+\theta h)\right)$ сохраняют знак и, так как еще $F\geqslant 0$, то норма, к которой мы пришли, может только уменьшиться, если в сумме оставить одно слагаемое, соответствующее $s=\mu$. Это объясняет переход от третьего члена к четвертому. Переход от четвертого к пятому члену осуществляется в силу (4) и неравенства (1) при $l=\bar r_1+2$; при интегрировании по R_{n-1} надо учесть, что

$$\left(\int|F(Nx)|^p dx\right)^{1/p}=\frac{1}{N^{1/p}}\left(\int|F(u)|^p du\right)^{1/p}=c_1N^{-1/p}.$$

Переход от пятого члена к шестому основан на применении (3). Наконец, в последнем равенстве применяем (4). Существенно заметить, что константы c, c_1, c_2 в (7) не зависят не только от h, μ, но и от a. С другой стороны, как уже было отмечено выше, константа при h^α в неравенстве (6) может быть сделана при достаточно большом a как угодно малой. Следовательно, из

(5), (6) и (7) вытекает, что при достаточно большом a выполняется неравенство

$$\|\Delta^2_{x_1 h}\psi^{\bar r_1}_{x_1}\|_{L_p(R_n)} \geqslant \|s(h)\|_{L_p(R_n)} - \|\sigma(h)\|_{L_p(R_n)} \geqslant c(a)\,h^\alpha, \tag{8}$$

где h пробегает убывающую к нулю последовательность (4). Но тогда функция ψ не может принадлежать к классу $H^{r_1+\varepsilon}_{p_1 x_1}(R_n)$ ($\varepsilon > 0$). В самом деле, допустим, что $\psi \in H^{r_1+\varepsilon}_{p_1 x_1}(R_n)$, и пусть $0 < \eta < \min\{\varepsilon, 1\}$. Тогда также $\psi \in H^{r_1+\eta}_{p_1 x_1}(R_n)$ и при этом $r_1 + \eta - \bar r_1 = \alpha + \eta < 2 = k$, поэтому должно выполняться неравенство

$$\|\Delta^2_{x_1 h}\psi^{\bar r_1}_{x_1}\|_{L_{p_1}(R_n)} \leqslant M\,|h|^{\alpha+\eta}$$

для всех h, что противоречит (8). Аналогично доказывается, что $\psi \notin H^{r_i+\varepsilon}_{p_i x_i}(R_n)$ для любого $i = 1, \ldots, n$, если $\varepsilon > 0$.

Мы доказали, что функция $\psi_{p,r}(a, \boldsymbol{x})$ при достаточно большом a не принадлежит ни к какому классу

$$H^{r+\varepsilon}_p(R_n), \quad \text{где} \quad \varepsilon > 0.$$

7.4.1. Для крайней в $H^{\boldsymbol r}_p(R_n) = H$ ($\boldsymbol r > 0$) функции ψ норма $\|\psi(\boldsymbol x + \boldsymbol h) - \psi(\boldsymbol x)\|_H$ не стремится к нулю при $\boldsymbol h \to \boldsymbol 0$. В самом деле, пусть $r_1 > 0$ и $r_1 = \bar r_1 + \alpha$ ($\bar r_1$ — целое, $0 < \alpha < 1$). В силу 7.4 (8) для действительных $h > 0$, пробегающих некоторую сходящуюся к нулю последовательность $\left(\|\cdot\|_{L_p(R_n)} = \|\cdot\|_p\right)$:

$$\|\Delta_{x_1 h}\psi\|_H \geqslant \sup_{k>0} \frac{\|\Delta_{x_1 k}\Delta_{x_1 h}\psi^{\bar r_1}_{x_1}\|_p}{k^\alpha} \geqslant \frac{\|\Delta^2_{x_1 h}\psi^{\bar r_1}_{x_1}\|_p}{h^\alpha} \geqslant m > 0. \tag{1}$$

При $\alpha = 1$ пришлось бы оперировать в (1) второй разностью по k (вместо первой), что приводит к необходимости доказать неравенство 7.4 (8) для третьей разности (вместо второй). Это делается аналогично.

7.5. Неулучшаемость неравенств для смешанных производных

В 5.6.3 было доказано неравенство

$$\|f^{(l)}\|_{B^{\rho}_{p\theta}(R_n)} \leqslant c\,\|f\|_{B^{\boldsymbol r}_{p\theta}(R_n)} \tag{1}$$

при условии, что

$$\rho = \varkappa \boldsymbol r, \quad \varkappa = 1 - \sum_1^n \frac{l_k}{r_k} > 0. \tag{2}$$

Оно перестает быть верным, если в нем заменить ρ на $\rho+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$). Это тоже можно доказать, рассматривая крайнюю функцию

$$\psi=\psi_{p,r}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n}F\left(a^{s/r_j}x_j\right)}{a^{s\left(1-\frac{1}{p}\sum\frac{1}{r_l}\right)}}\qquad (a>1).$$

Ее производная

$$\psi^{(l)}(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n}F^{(l_j)}\left(b^{s/\rho_j}x_j\right)}{b^{s\left(1-\frac{1}{p}\sum\frac{1}{\rho_l}\right)}}\qquad (a^{\varkappa}=b)$$

хотя и не является частным случаем рассмотренных нами семейств крайних функций, но все же является крайней в классе $H_p^{\rho}(R_n)$, и это доказывается совершенно аналогично тому, как это делалось в 7.4, где надо считать $p=p_1=\ldots=p_n$. То обстоятельство, что теперь под знаком произведения находятся разные функции $F^{(l_j)}$, не имеет существенного значения.

Это доказывает наше утверждение для H-классов *), но тогда и для B-классов.

7.6. Другое доказательство неулучшаемости теорем вложения

Рассмотрим вопрос, относящийся к общей теории функциональных пространств. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, которые как линейные множества принадлежат к одному и тому же линейному множеству E.

Теорема 1 **). *Если линейный ограниченный оператор A взаимно однозначно отображает E_1 на E_2, то обратный к нему оператор A^{-1}, очевидно, линейный и отображающий E_2 на E_1, в свою очередь ограничен.*

Пусть банаховы пространства E_1 и E_2 имеют непустое пересечение E_1E_2. Элементам $x\in E_1E_2$ мы припишем норму

$$\|x\|_{E_1E_2}=\|x\|_{E_1}+\|x\|_{E_2}. \tag{1}$$

Тогда E_1E_2 есть нормированное пространство.

Теорема 2. *Если E_1E_2 — полное пространство, т. е. банахово, и если не существует константы $c>0$ такой, что*

$$\|x\|_{E_2}\leqslant c\|x\|_{E_1}$$

---

*) С. М. Никольский [2], случай $p=\infty$.

**) См. Хаусдорф [1], Добавление.

для всех $x \in E_1E_2$, то в E_1 существует элемент, не принадлежащий к E_2.

Доказательство. В самом деле, допустим, что это не так, т. е. $E_1 \subset E_2$. Каждый элемент x банахова пространства E_1E_2 можно считать отображенным (одно-однозначно) в x же, но принадлежащий к E_1. Эта операция линейна и ограничена:

$$\|x\|_{E_1} \leqslant \|x\|_{E_1} + \|x\|_{E_2} = \|x\|_{E_1E_2},$$

и отображает E_1E_2 на E_1. Но тогда на основании теоремы 1 должна существовать постоянная c такая, что

$$\|x\|_{E_1} + \|x\|_{E_2} \leqslant c\|x\|_{E_1}$$

или

$$\|x\|_{E_2} \leqslant c\|x\|_{E_1}, \qquad x \in E_1E_2,$$

и мы пришли в противоречие с условием теоремы.

Применение теоремы 2 требует проверки полноты E_1E_2.

Если $E_1 = B_p^r(R_n)$, $E_2 = B_{p'}^{\varrho}(R_n)$ (здесь $B_p = B_{p\theta}$), то полнота E_1E_2 имеет место, потому что в этом случае из того, что $\|f_k - f_l\|_{E_1E_2} \to 0$, k, $l \to \infty$, в силу полноты E_1 и E_2 следует существование $f \in E_1$ и $F \in E_2$ так, что $\|f - f_k\|_{E_1} \to 0$, $\|F - f_k\|_{E_2} \to 0$ $(k \to \infty)$, но тогда и

$$\|f - f_k\|_{L_{p_i}(R_n)} \to 0, \quad \|F - f_k\|_{L_{p'}(R_n)} \to 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Отсюда (см. 1.3.9) $f = F$ почти всюду, и мы доказали существование $f \in E_1E_2$ так, что

$$\|f - f_k\|_{E_1E_2} \to 0.$$

Пусть $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) > 0$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \leqslant p_j \leqslant \infty$, $\varkappa_j = \varkappa_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) > 0$ (см. 7.3 (1)).

Введем функцию $F(t)$ от одной переменной, финитную и бесконечно дифференцируемую.

Ее нормы в метрике $B_p^{\varrho}(R_1)$ $(0 < \varrho \leqslant l)$ положительны, иначе она была бы нулем.

Построим семейство функций $\left(\text{см. 7.4 (2)}, \ \gamma = 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j r_j}\right)$

$$\Phi_N = \Phi_{N,\,p,\,r}(x) = \frac{1}{N^{\gamma}} \prod_{j=1}^{n} F\left(N^{\frac{\varkappa_j}{r_j}} x_j\right), \tag{2}$$

зависящих от параметра $N > 0$.

На основании формул 7.2 (1) и (6)

$$\|\Phi_{N,\,p,\,r}\|_{p_i} \sim N^{-\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\varkappa_j}{r_j}-\gamma} = N^{-\varkappa_i} \qquad (N>0), \tag{3}$$

$$\|\Phi_{N,\,p,\,r}\|_{b^{r_i}_{x_i p_i}} \sim N^{\frac{r_i\varkappa_i}{r_i}} N^{-\varkappa_i} = N^0 = 1 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n)$$

$$\left(b^{r_i}_{x_i p_i} \equiv b^{r_i}_{x_i p_i \theta}\right).$$

Зафиксируем внимание на определенном i и зададим числа $p_* \geqslant p_i$, $r^* \geqslant r_i$, где хотя бы одно из этих неравенств строгое. Вычислим для сравнения нормы

$$\|\Phi_{N,\,p,\,r}\|_{p_*} \sim N^{-\frac{1}{p_*}\sum_{1}^{n}\frac{\varkappa_j}{r_j}-\gamma} = N^{-(\varkappa_i-\varepsilon)},$$

$$\|\Phi_{N,\,p,\,r}\|_{b^{r^*}_{x_i p_*}} \sim N^{-(\varkappa_i-\varepsilon)} N^{\frac{r^*\varkappa_i}{r_i}} = N^{\left(\frac{r^*}{r_i}-1\right)\varkappa_i+\varepsilon}$$

$$\left(N>0,\quad \varepsilon = \left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{p_*}\right)\sum_{1}^{n}\frac{\varkappa_j}{r_j} \geqslant 0\right).$$

Так как $\varkappa_i > 0$, то в силу соглашения о p_* и r^* получим

$$\|\Phi_{N,\,p,\,r}\|_{b^{r^*}_{x_i p_*}} \to \infty \qquad (N \to \infty). \tag{4}$$

Итак, каждой паре векторов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}$, удовлетворяющих указанным выше условиям, мы привели в соответствие семейство функций $\Phi(N,\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{r})$, нормы которых

$$\|\Phi(N,\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{r})\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p}}(R_n)} \leqslant c < \infty \qquad (N>0)$$

ограничены, и в тоже время для любого i выполняется свойство (4), если только $r^* \geqslant r_i$, $p_* \geqslant p_i$ и одно из этих неравенств строгое.

Семейство $\Phi(N,\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{r})$ мы будем называть *граничным семейством функций* в классе $B^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p}}(R_n)$.

Покажем, что (доказанное в 6.9) вложение

$$B^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p}\theta}(R_n) \to B^{\boldsymbol{\rho}}_{p'\theta}(R_n)$$

при условиях $1 \leqslant p_j \leqslant p' \leqslant \infty$, $\varkappa > 0$ (следовательно, и $\varkappa_j > 0$, см. 7.1 (4),(5)),

$$\rho_j = \frac{r_j\varkappa}{\varkappa_j} \qquad (j=1,\ \ldots,\ n) \tag{5}$$

перестает быть верным, если в нем увеличить хотя бы одну из компонент ρ_j или число p' или сделать и то и другое. В самом деле, если считать $N_1 = N^{\varkappa}$, то (пояснения ниже)

$$\Phi_{N,\,p,\,r} = \frac{1}{N^{\gamma}} \prod_{j=1}^{n} F\left(N^{\frac{\varkappa_j}{r_j}} x_j\right) = \\ = \frac{1}{N_1^{\gamma_1}} \prod_{j=1}^{n} F\left(N_1^{1/\rho_j} x_j\right) = \Phi_{N_1,\,p,\,\rho} \qquad (N_1 = N^{\varkappa}). \tag{6}$$

Здесь

$$\gamma_1 = 1 - \frac{1}{p'} \sum_{1}^{n} \frac{1}{\rho_l} = \gamma(\rho,\ p'),$$

потому что

$$\varkappa\gamma_1 = \varkappa - \frac{1}{p'} \sum \frac{\varkappa_j}{r_j} = 1 - \sum \frac{1}{p_l r_l} + \frac{1}{p'} \sum \frac{1}{r_l} - \frac{1}{p'} \sum \frac{1}{r_l} - \\ - \frac{1}{p'} \sum \frac{1}{r_l} + \frac{1}{p'} \sum_j \sum_l \left(\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p_j}\right) \frac{1}{r_l r_j} = 1 - \sum \frac{1}{p_l r_l} = \gamma,$$

далее

$$\varkappa_j(\rho,\ p') = 1 - \sum \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p'}\right) \frac{1}{r_l} = 1.$$

Это доказывает равенства (6).

Таким образом, семейство функций Φ_N является одновременно граничным в классах B_p^r и $B_{p'}^{\rho}$ и нормы Φ_N в метриках этих классов равномерно ограничены по N. Однако нормы Φ_N в метрике $B_{p'+\eta}^{\rho+\varepsilon}$ не ограничены. Но тогда не существует константы c, не зависящей от N и такой, чтобы

$$\|\Phi_N\|_{B_{p'+\eta}^{\rho+\varepsilon}} \leqslant c \|\Phi_N\|_{B_p^r},$$

и мы доказали наше утверждение.

В силу теоремы 2 в таком случае следует, что для любых $\varepsilon \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, где одно из неравенств строгое, в классе $B_p^r(R_n)$ существует функция, не принадлежащая к $B_{p'+\eta}^{\rho+\varepsilon}(R_n)$. В частности, в классе $B_p^r(R_n)$ существует функция, не принадлежащая к $B_{p+\eta}^{r+\varepsilon}(R_n)$.

Вложение (доказанное в 6.5)

$$B_p^r(R_n) \to B_p^{\rho}(R_m), \tag{7}$$

$$1 \leqslant m < n, \quad \rho_j = \varkappa r_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$\varkappa = 1 - \frac{1}{p} \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{r_l},$$

перестает быть верным, если в нем заменить ρ, p на $\rho^* \geqslant \rho$, $p^* \geqslant p$, где одно из неравенств строгое.

В самом деле, существует функция $\varphi \in B_p^{\varrho}(R_m)$, но не принадлежащая к $B_{p+\eta}^{\varrho+\varepsilon}$. На основании теоремы о продолжении φ можно продолжить с R_m на R_n так, что продолженная функция $f \in B_p^r(R_n)$. Так как $f|_{R_m} = \varphi$, то f есть пример функции $f \in B_p^r(R_n)$, след которой на R_m не принадлежит к $B_{p+\eta}^{\varrho+\varepsilon}(R_m)$.

Из сказанного попутно следует, что теорема о продолжении

$$B_p^{\varrho}(R_m) \to B_p^r(R_n)$$

тоже не может быть улучшена в терминах рассматриваемых классов. Однако это не значит, что эта теорема не может быть улучшена в других терминах. Например, в гл. 9 будет доказано, что при той же связи между r и ρ, n и m имеют место взаимно обратные вложения

$$B_p^{\varrho}(R_m) \rightleftarrows L_p^r(R_n),$$

где класс L_p^r при $p \neq 2$ не эквивалентен $B_p^r(R_n)$.

Зададим еще семейство (граничное в $B_p^r(R_n)$)

$$\Phi_N = \Phi_{N,\, p,\, r} = \frac{1}{N^{\gamma}} \prod_{j=1}^{n} F\left(N^{1/r_j} x_j\right).$$

В данном случае

$$\gamma = 1 - \frac{1}{p} \sum_{1}^{n} \frac{1}{r_l} > 0, \qquad \varkappa_j(p,\ r) = 1$$

$$(j = 1, \ldots, n).$$

Допустим еще, что $F(t)$, кроме того, что она финитна и бесконечно дифференцируема, имеет тейлорово разложение

$$F(t) = 1 + a_1 t + \ldots + a_{l+1} t^{l+1} + R_{l+1}$$

с неравными нулю коэффициентами, стоящими на нечетных местах или четных. Тогда, как легко видеть, можно указать положительное число δ и константу B так, что

$$|F^{(k)}(t)| \geqslant Bt \qquad (k = 0,\ 1, \ldots, l, \qquad |t| < \delta).$$

Пусть R_m есть подпространство точек $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = (u,\ 0)$, $u = (x_1, \ldots, x_m)$. Тогда

$$\Phi_N(u,\ 0) = \frac{1}{N_1^{\gamma_1}} \prod_{j=1}^{m} F\left(N_1^{\frac{1}{\rho_j}} x_j\right) = \Phi_{N_1,\, p,\, \varrho} \qquad (N_1 = N^{\varkappa}),$$

где

$$\gamma_1 = \gamma_1(p, \rho) = 1 - \frac{1}{p}\sum_{1}^{m}\frac{1}{\rho_l}$$

(учесть, что $\gamma = \varkappa\gamma_1$).

Пусть $h > 0$ и $i = m+1, \ldots, n$. Рассмотрим приращение

$$\Delta_{x_i h}\Phi_N(\boldsymbol{u}, 0) = \frac{1}{N_1^{\gamma_1}}\prod_{j=1}^{m} F\left(N_1^{\frac{1}{\rho_j}}x_j\right)\left[F\left(N_1^{\frac{1}{\rho_i}}h\right) - F(0)\right] =$$

$$= \Phi_{N_1, p, \varrho}(\boldsymbol{u})\left[F\left(N_1^{\frac{1}{\rho_i}}h\right) - F(0)\right].$$

Функция F не равна нулю тождественно, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что $|F(\delta) - F(0)| = K > 0$. Будем рассматривать значения h, N_1, связанные равенством $\delta = N_1^{\frac{1}{\rho_i}}h$. В силу первой оценки (3) имеем (в нашем случае $\varkappa_l = 1$)

$$\|\Delta_{x_i h}\Phi_N(\boldsymbol{u}, 0)\|_{L_p(R_m)} = \|\Phi_{N_1, p, \varrho}\|_{L_p(R_m)}K \gg \frac{1}{N} \gg |h|^{\rho_i}.$$

Эта оценка снизу показывает, что выведенное ранее первое неравенство 6.5 (13) ($\rho_i = r_i'$) достигается и притом не только для класса $H_p^{\boldsymbol{r}}(R_n)$, но и для $B_{p\theta}^{\boldsymbol{r}}(R)$.

7.7. Теоремы о компактности

Теорема. *Пусть задана последовательность функций* $\{f_l\}$, *обладающая одним из следующих свойств*:

а) $$\|f_l\|_{L_p(R_n)} \leqslant M, \quad \|f_l\|_{w_p^{\boldsymbol{r}}(R_n)} \leqslant N \qquad (1)$$

($\boldsymbol{r}$ — *целый вектор*)

б) $$\|f_l\|_{L_p(R_n)} \leqslant M, \quad \|f_l\|_{b_{p\theta}^{\boldsymbol{r}}(R_n)} \leqslant N \qquad (1')$$

$(1 \leqslant p, \ \theta \leqslant \infty)$.

Тогда можно выделить подпоследовательность $\{f_{l_k}\}$ *и такую функцию* f, *удовлетворяющую* *) *соответственно условиям* (1), (1′), *что*,

*) Функция f удовлетворяет (1) или (1′) с той же константой N, если понимать норму в одном и том же смысле; в случае б) ниже доказательство проведено для варианта нормы $\|\cdot\|_B$, $\rho = \bar{r}$ (см. 5.6).

каковы бы ни были числа r'_j, $0 < r'_j < r_j$ $(j=1, \ldots, n)$, *имеет место*

$$\|f_{l_k} - f\|_{H_p^{r'}(g)} \to 0 \qquad (l_k \to \infty) \tag{2}$$

для любой ограниченной области $g \subset R_n$.

Доказательство этой теоремы будет базироваться на следующей лемме из функционального анализа.

Лемма. *Пусть одно и то же линейное множество элементов* $\boldsymbol{x}$ *нормировано двумя нормами* $\|\cdot\|$ *и* $\|\cdot\|_*$, *причем получающиеся нормированные пространства* E *и* E_* *являются полными и* $\|\boldsymbol{x}\|_* \leqslant c\|\boldsymbol{x}\|$, *где константа* c *не зависит от* $\boldsymbol{x}$.

Пусть в E *задано ограниченное множество* F *и последовательность операторов* $A_n(\boldsymbol{x})$ $(n=1, 2, \ldots)$, *отображающих* E *в* E_*, *определяемых равенствами*

$$A_n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - U_n(\boldsymbol{x})$$

и удовлетворяющих условиям:

1) *операторы* $\boldsymbol{y} = U_n(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in E,\ \boldsymbol{y} \in E_*)$ *вполне непрерывны (линейность* U_n *не требуется)*;

2) $\sup\limits_{x \in F} \|A_n(\boldsymbol{x})\| = \eta_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Тогда множество F *компактно в* E_*.

Доказательство. Зададим произвольную последовательность элементов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$, принадлежащих к F. Она ограничена и вследствие свойства 1) из нее можно выбрать подпоследовательность $\boldsymbol{x}_1^{(1)}, \boldsymbol{x}_2^{(1)}, \ldots$, для которой $U_1(\boldsymbol{x}_k^{(1)})$ $(k=1, 2, \ldots)$ сходится в E_*. Из этой последовательнсcти можно выбрать в свою очередь подпоследовательность $\boldsymbol{x}_1^{(2)}, \boldsymbol{x}_2^{(2)}, \ldots$, для которой $U_2(\boldsymbol{x}_k^{(2)})$ $(k=1, 2, \ldots)$ сходится в E_*. Продолжив этот процесс неограниченно и взяв диагональную последовательность $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{x}_1^{(1)}$, $\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{x}_2^{(2)}, \ldots$, мы получим, что $U_n(\boldsymbol{z}_k)$ сходится в E_* при $k \to \infty$ и любом n. Зададим теперь $\varepsilon > 0$. В силу условия 2) при некотором $n = N$ выполняется неравенство

$$\|A_N(\boldsymbol{x})\|_* \leqslant c\|A_N(\boldsymbol{x})\| < \varepsilon$$

для всех $\boldsymbol{x} \in F$. Если p, q превышают достаточно большое число, то

$$\|\boldsymbol{z}_p - \boldsymbol{z}_q\|_* \leqslant \|A_N(\boldsymbol{z}_p)\|_* + \|U_N(\boldsymbol{z}_p) - U_N(\boldsymbol{z}_q)\|_* + \|A_N(\boldsymbol{z}_q)\|_* < 3\varepsilon,$$

и компактность F в E_* доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $K = M + N$. Рассмотрим сначала случай б) при $\theta = \infty$, т. е. случай класса $H_p^r = H_p^r(R_n)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех функций f, для которых выполняется неравенство (1′) (при $\theta = \infty$). Для каждой из них имеет место разложение (5.5.3 (6), (7))

$$f=\sum_{s=0}^{\infty} Q_s,$$

где

$$Q_s=Q_{a^{s/r_1},\ \dots,\ a^{s/r_n}} \qquad (a>1)$$

— целые функции экспоненциального типа a^{s/r_j} соответственно по x_j ($j=1, \dots, n$) и

$$\sup_s a^s \|Q_s\|_p=\|f\|_{H_p^r}\leqslant cK.$$

Зададим число γ, удовлетворяющее неравенствам $0<\gamma<1$ и положим

$$T_m(f)=T_m=\sum_0^{m-1} Q_s, \qquad a^\gamma=b.$$

Тогда $(\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L_p(R_n)})$

$$\|f-T_m\|_{H_p^{\gamma r}}=\sup_{s\geqslant m} b^s \left\|Q_{b^{\frac{s}{\gamma r_1}},\ \dots,\ b^{\frac{s}{\gamma r_n}}}\right\|_p=$$

$$=\sup_{s\geqslant m} a^{\gamma s}\|Q_s\|_p\leqslant\frac{1}{a^{(1-\gamma)m}}\sup_s a^s\|Q_s\|_p\leqslant\frac{cK}{a^{(1-\gamma)m}}. \qquad (3)$$

Кроме того,

$$\|f\|_{H_p^{\gamma r}}\leqslant c\|f\|_{H_p^r}\leqslant cK$$

(см. 6.2 (3)).

Функции f из пространства

$$E=H_p^{\gamma r}=H_p^{\gamma r}(R_n)$$

мы будем рассматривать также как элементы пространства

$$E_*=H_p^{\gamma r}(g) \qquad (g\subset R_n),$$

причем, очевидно,

$$\|f\|_{E_*}\leqslant\|f\|_E.$$

Имеем

$$f=T_m(f)+(f-T_m(f)),$$

где для $f\in\mathfrak{M}$

$$\|f-T_m(f)\|_E\leqslant\frac{cK}{a^{(1-\gamma)m}}\to 0 \qquad (m\to\infty).$$

Далее

$$\|T_m(f)\|_p\leqslant\|T_m(f)\|_{H_p^{\gamma r}}\leqslant\|f\|_E+\frac{cK}{a^{(1-\gamma)m}}.$$

Поэтому образ любой сферы E при преобразовании T_m есть ограниченное в смысле $L_p = L_p(R_n)$ множество функций $T_m(f)$ экспоненциального типа a^{m/r_j} по x_j. В таком случае это множество компактно на любом ограниченном множестве $g \subset R_n$ в смысле метрики $c^l(g)$ (см. 3.3.6 *)), при любом натуральном l, следовательно, оно компактно также в смысле $E_* = H_p^{\gamma r}(g)$. Мы доказали, что $T_m(f)$ есть вполне непрерывный оператор (вообще нелинейный).

Вследствие доказанной выше леммы $\mathfrak{M}$ есть компактное в $H_p^{\gamma r}(g)$ множество. Так как это рассуждение годится для любого γ с $0<\gamma<1$, то $\mathfrak{M}$ компактно в смысле $H_p^{\gamma r}$ при любом указанном γ. Выберем определенную последовательность чисел $\{\gamma_k\}$, монотонно стремящуюся к 1, и зададим произвольную последовательность функций $\{f_l\}$ из $F(\subset \mathfrak{M})$. В силу доказанного и полноты $H_p^{\gamma_1 r}$ (см. 4.7) из нее можно выделить подпоследовательность $\left\{f_{l_k^1}\right\}$, сходящуюся в метрике $H_p^{\gamma_1 r}$ к некоторой функции $f \in H_p^{\gamma_1 r}$. Из полученной подпоследовательности можно в свою очередь выделить подпоследовательность $\left\{f_{l_k^2}\right\}$, сходящуюся в метрике $H_p^{\gamma_2 r}$ к функции $f \in H_p^{\gamma_2 r}$, очевидно, к той же. Продолжив этот процесс неограниченно и взяв диагональную последовательность, которую мы обозначим через $\{f_{l_k}\}$, получим, что $f_{l_k} \to f$ в смысле метрики $H_p^{\gamma_s r}$, каково бы ни было s, но тогда (6.2 (3)) и в смысле метрики $H_p^{r'}$, где $r'_j < r_j$ $(j=1, \ldots, n)$.

Мы доказали (2) в случае б) при $\theta=\infty$, к этому случаю сводятся остальные случаи а) и б) при $1 \leqslant \theta < \infty$, потому что W_p^r, $B_{p\theta}^r \to H_p^r$. Но нам еще осталось доказать более тонкий факт, что предельная функция f принадлежит соответственно к W_p^r, $B_{p\theta}^r$ и выполняются соответственно неравенства

$$\|f\|_{w_p^r}, \|f\|_{b_{p\theta}^r} \leqslant N.$$

Неравенство $\|f\|_p \leqslant M$ следует из (1), (1′), (2).

Как всегда, будем считать, что $r_j = \bar{r}_j + \alpha_j$, где $\bar{r}_j$ — целое и $0<\alpha_j \leqslant 1$. Пусть $f_{x_j}^{\bar{r}_j}$ обозначает частную производную от f порядка $\bar{r}_j$ по x_j $(\bar{r}_j < r'_j < r_j)$.

*) Из ограниченности (в смысле L_p) функций $T_m(f_k)$ $(k=1, 2, \ldots)$ следует ограниченность их производных любого заданного порядка. Применение 3.3.6 не только к функциям, но и к их производным до порядка l включительно и диагональный процесс приводят к компактности не только в смысле $c(g)$, но и в смысле $c^l(g)$.

Тогда (6.2 (3))

$$\|f_{l_k}-f\|_p,\ \left\|f^{\bar{r}_j}_{l_k x_j}-f^{\bar{r}_j}_{x_j}\right\|_p \leqslant c\,\|f_{l_k}-f\|_{H_p^{r'}}\to 0\quad (l_k\to\infty). \tag{4}$$

В случае б) функции f_{l_k} подчиняются неравенству (1′), поэтому

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{-1-\theta\alpha_j}\left\|\Delta^2_{x_j u}f^{\bar{r}_j}_{l_k x_j}(\boldsymbol{x})\right\|_p^{\theta}du\right)^{1/\theta}=m_j^{(k)}\quad (1\leqslant\theta<\infty), \tag{5}$$

$$\left\|\Delta^2_{x_j u}f^{\bar{r}_j}_{l_k x_j}(\boldsymbol{x})\right\|_p\leqslant m_j^{(k)}\,|u|^{\alpha_j}\quad (\theta=\infty),$$

где

$$\sum_{j=1}^{n}m_j^{(k)}\leqslant N\quad (j=1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Переходя в (5) к пределу при $k\to\infty$, на основании (4) получим

$$m_j=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{-1-\theta\alpha_j}\left\|\Delta^2_{x_j u}f^{\bar{r}_j}_{x_j}(\boldsymbol{x})\right\|_p^{\theta}du\right)^{1/\theta}\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\,m_j^{(k)}$$

$$(1\leqslant\theta<\infty),$$

$$\left\|\Delta^2_{x_j u}f^{\bar{r}_j}_{l_k x_j}(\boldsymbol{x})\right\|_p\leqslant\overline{\lim}\,m_j^{(k)}\,|u|^{\alpha_j}\quad (\theta=\infty),$$

поэтому ($f\in L_p$) $f\in B^r_{p\theta}$,

$$\|f\|_{b^r_{p\theta}}=\sum_{j=1}^{n}m_j\leqslant N.$$

В случае а) функции f_{l_k} подчиняются неравенствам

$$\left\|\frac{\Delta_{x_j u}f^{\bar{r}_j}_{l_k x_j}}{u}\right\|_p\leqslant\left\|f^{\bar{r}_j}_{l_k x_j}\right\|_p\leqslant m_j^{(k)}, \tag{6}$$

где

$$\sum_{j=1}^{n}m_j^{(k)}\leqslant N.$$

Переходя к пределу в (6) при $k\to\infty$, получим

$$m_j=\left\|\frac{\Delta_{x_j u}f^{\bar{r}_j}_{x_j}}{u}\right\|_p\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\,m_j^{(k)},$$

и так как еще $f\in L_p$, то (см. 4.8) $f\in W^r_p$ и

$$\|f\|_{w^r_p}=\sum_{j=1}^{n}m_j\leqslant N.$$

Примечание. В доказанной теореме $W_p^{\mathbf{r}}$, $B_{p\theta}^{\mathbf{r}}$ можно заменить соответственно на W_p^r, $B_{p\theta}^r$, и тогда в (2) надо заменить $\mathbf{r}'$ на r', $0<r'<r$. Случай W_p^r и подобные случаи, которые могут быть доказаны по аналогии, находят применение в теории вариационных методов. Для применений очень существенно то, что неравенство типа (1) влечет за собой то же неравенство для предельной функции с той же константой. В этой теореме можно также рассмотренные классы заменить на соответствующие периодические классы.

7.7.1. Теорема. *Для того чтобы множество $\mathfrak{M}$ функций $f\in L_p=L_p(g)$, где $g\subset R_n$ — произвольная область, было компактным в $L_p(g)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было:* 1) *ограничено в L_p,* 2) *равностепенно непрерывно по сдвигу в L_p:*

$$\Lambda(\delta)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\omega(\delta,\ f)_p\to 0\quad(\delta\to 0,\quad 1\leqslant p<\infty),$$

$$\omega(\delta,\ f)_p=\sup_{|\boldsymbol{h}|<\delta}\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})\|_p\quad(f=0 \text{ на } R_n\setminus g),$$

3) *чтобы функции $f\in\mathfrak{M}$ равномерно убывали по норме в L_p на бесконечности*

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}}\|f\|_{L_p(|\boldsymbol{x}|>N,\ \boldsymbol{x}\in g)}\to 0\ \ (N\to\infty).$$

Эта теорема доказана в книге С. Л. Соболева [4], гл. 1, § 4.3. Для ограниченной области g свойство 3), очевидно, отпадает. При $p=\infty$ теорема вообще перестает быть верной. В этом случае норма сдвига отдельной функции вообще не стремится к нулю при $\boldsymbol{h}\to 0$.

7.7.2. Теорема. *Для того чтобы ограниченное в $L_p=L_p(R_n)$ множество $\mathfrak{M}$ функций $f\in W=W_p^{\boldsymbol{l}}(R_n)$ $(1\leqslant p<\infty,\ \boldsymbol{l}\geqslant 0)$ было компактным в W, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}$ было равностепенно непрерывно по сдвигу:*

$$\Lambda(\delta)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\sup_{|\boldsymbol{h}|<\delta}\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})\|_W\to 0\quad(\delta\to 0)\tag{1}$$

и чтобы функции $f\in\mathfrak{M}$ равномерно убывали по норме на бесконечности:

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}}\|f\|_{L_p(|\boldsymbol{x}|>N)}\to 0\quad(N\to\infty).\tag{2}$$

В приведенной формулировке W можно заменить на $B=B_{p\theta}^{\mathbf{r}}(R_n)$ $(1\leqslant p,\ \theta<\infty,\ \mathbf{r}\geqslant 0)$.

Доказательство. Будет рассматриваться пространство W, но всюду можно заменить W на B. Пусть $\mathfrak{M}$ компактно в W. Тогда оно компактно и в L_p, поэтому (см. 7.7.1) выполняется свойство (2). Согласно общему критерию компактности (Хаусдорф [1]) для заданного $\varepsilon > 0$ можно указать конечную систему функций f_j $(j=1, \ldots, N)$ так, что для любой функции $f \in \mathfrak{M}$ найдется j (зависящее от f), для которого

$$\|f-f_j\|_W < \varepsilon.$$

Можно также указать δ и N так, что будут выполняться неравенства (см. 5.6.5)

$$\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})\|_W < \varepsilon, \quad \|f\|_{L_p(|\boldsymbol{x}|>N)} < \varepsilon, \quad |\boldsymbol{h}| < \delta$$

для всех f_j $(j=1, \ldots, N)$. Но тогда для любой $f \in \mathfrak{M}$ при соответствующем j

$$\begin{aligned}\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})\|_W \leqslant \|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\|_W + \\ + \|f_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f_j(\boldsymbol{x})\|_W + \|f_j(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\|_W < 3\varepsilon \quad (|\boldsymbol{h}|<\delta),\end{aligned}$$

если δ достаточно мало, и мы доказали (1). Необходимость условий теоремы доказана.

Пусть, наоборот, $\mathfrak{M}$ — множество, ограниченное в L_p, и удовлетворяет условиям (1) и (2). Тогда на основании 7.7.1 оно компактно в L_p $(\|\cdot\|_W \geqslant \|\cdot\|_{L_p})$. Введем новое понятие — *модуль непрерывности* $f \in W$:

$$\omega(t) = \omega(f, t) = \sup_{|\boldsymbol{h}|<t} \|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})\|_W.$$

Он удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}0 \leqslant \omega(\delta_2)-\omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2-\delta_1) \quad (0<\delta_1<\delta_2), \\ \omega(l\delta) \leqslant (l+1)\,\omega(\delta) \quad (l, \delta > 0).\end{aligned} \tag{3}$$

Это доказывается в точности так же, как для модуля непрерывности f в L_p (см. 4.2). Из (3) следует, что для функции $\Lambda(\delta)$ (см. (1)) также выполняется неравенство

$$\Lambda(l\delta) \leqslant (l+1)\,\Lambda(\delta) \quad (l, \delta > 0). \tag{4}$$

Введем еще функцию от одной переменной

$$K_k(t) = a_k\left(\frac{\sin kt}{t}\right)^{\lambda} \quad (k > 1)$$

целую экспоненциального типа $k\lambda$, где $\lambda > n+1$ — четное натуральное число и константа a_k определяется из равенства

$$1 = \int_{R_n} K_k(|\boldsymbol{u}|)\,d\boldsymbol{u} = a_k \varkappa_n \int_0^\infty \left(\frac{\sin kt}{t}\right)^{\lambda} t^{n-1}\,dt =$$

$$= k^{\lambda-n} a_k \varkappa_n \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\lambda} t^{n-1}\,dt = c k^{\lambda-n} a_k$$

($\varkappa_n$ — площадь единичной сферы в R_n, c не зависит от k). Отсюда следует, что

$$a_k = O(k^{n-\lambda}) \quad (k > 1).$$

Полагаем

$$U_k f = \int K_k(|u|) f(x+u)\,du,$$

откуда

$$\|U_k f\|_p \leqslant \|K_k\|_L \|f\|_p. \tag{5}$$

Для $f \in \mathfrak{M}$

$$f - U_k f = \int K_k(|u|)[f(x) - f(x+u)]\,du,$$

поэтому

$$\|f - U_k f\|_W \leqslant \int K_k(|u|) \|f(x) - f(x+u)\|_{x,W}\,du \leqslant$$

$$\leqslant \int K_k(|u|)\Lambda(|u|)\,du \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|u|<\delta} K_k(|u|)\Lambda(|u|)\,du + \int\limits_{|u|>\delta} K_k(|u|)\Lambda\left(\frac{|u|}{\delta}\delta\right)du \leqslant$$

$$\leqslant \Lambda(\delta) + \Lambda(\delta)\int\limits_{|u|>\delta} K_k(|u|)\left(1+\frac{|u|}{\delta}\right)du < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad (k > k_0), \tag{6}$$

где k_0 достаточно велико, потому что в силу (1) можно указать такое δ, что $\Lambda(\delta) < \varepsilon$, и при этом δ второе слагаемое предпоследнего члена в (6) можно сделать при достаточно больших k также меньшим ε:

$$\int\limits_{|u|>\delta} K_k(|u|)\left(1+\frac{|u|}{\delta}\right)du \leqslant k^{n-\lambda}\int\limits_{\delta}^{\infty}\left(\frac{\sin kt}{t}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{t}{\delta}\right)t^{n-1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant k^{n-\lambda}\int\limits_{\delta}^{\infty}\left(1+\frac{t}{\delta}\right)t^{n-\lambda-1}\,dt = c_\delta k^{n-\lambda} \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Мы доказали, что

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}} \|f - U_k f\|_W \to 0 \quad (k\to\infty). \tag{7}$$

Пусть теперь задана последовательность функций $f_l \in \mathfrak{M}$. Она компактна в L_p, поэтому из нее можно выделить подпоследовательность, которую мы снова обозначим через $\{f_l\}$, сходящуюся к некоторой функции $f \in L_p$. При любом фиксированном k (см. (5))

$$U_k f_l \to U_k f \quad (l\to\infty)$$

в L_p, но тогда и в W, потому что при фиксированном k функции $U_k f_l$ $(l=1, 2, \ldots)$ — целые экспоненциального сферического типа $k\lambda$ (см. 3.6.2 и лемму 7.7.3 ниже).

В силу (7) для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать k так, что

$$\|f_l - U_k f_l\|_W < \varepsilon \text{ (для всех } l=1, 2, \ldots).$$

Следовательно, последовательность $\{f_l\}$ обладает тем свойством, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое k, что

$$f_l = U_k f_l + (f_l - U_k f_l),$$

где первое слагаемое сходится при $l\to\infty$ в смысле W, а второе по норме W не превышает ε для любых $l=1, 2, \ldots$. Но тогда вследствие полноты W

$$f_l \to f \quad (l\to\infty)$$

в W. Теорема доказана.

7.7.3. Лемма. *В обозначениях теоремы из 7.7.2 имеют место неравенства*

$$\|g_\nu\|_W \leqslant \left(1+\sum_1^n \nu_j^{l_j}\right)\|g_\nu\|_{L_p}, \tag{1}$$

$$\|g_\nu\|_B \leqslant c\left(1+\sum_1^n \nu_j^{r_j}\right)\|g_\nu\|_{L_p}, \tag{2}$$

где c — константа, не зависящая от рядом стоящего множителя, g_ν — целая функция экспоненциального типа $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)\geqslant 0$. В неравенстве (2) B можно заменить на $H=H_p^{\mathbf{r}}(R_n)$.

Таким образом, если последовательность g_ν^l целых функций одного и того же типа стремится к некоторой функции g_ν (см. 3.5) в смысле L_p, то она стремится и в смысле W, H и B.

Доказательство. Неравенство (1) непосредственно следует из определения W и неравенства Бернштейна 3.2.2 (9). Функция $g=g_\nu$ есть целая типа ν_j по x_j, а следовательно, и типа $2^s>1+\nu_j$, где s есть наименьшее натуральное число, при котором выполняется это неравенство. Положим

$$g_{2^0}=g_2=\ldots=g_{2^{s-1}}=0, \quad g_{2^s}=g,$$

тогда (см. 5.6.6 (6))

$$g=g_{2^0}+\sum_1^s (g_{2^j}-g_{2^{j-1}}),$$

$$\|g\|_{B^{r_j}_{x_j p\theta}} = 2^{s r_j}\|g\|_{L_p} \leqslant 2^{r_j}(1+\nu_j)^{r_j}\|g\|_p \leqslant c\left(1+\nu_j^{r_j}\right)\|g\|_p$$

$$(j=1, \ldots, m),$$

откуда следует (2). В этих рассуждениях, очевидно, можно заменить B на H.

7.7.4. Теорема из 7.7.2 остается верной и доказывается в точности так же, если в ней заменить W на $H=H_p^{\boldsymbol{r}}(R_n)$ ($\boldsymbol{r}\geqslant\boldsymbol{0}$, $1\leqslant p<\infty$), но предположить, что для каждой функции $f\in\mathfrak{M}$ имеет место

$$\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})\|_H\to 0 \qquad (|\boldsymbol{h}|\to 0) \tag{1}$$

(что вообще не имеет места).

В случае $p=\infty$ справедлива

7.7.5. Теорема. *Пусть задано множество $\mathfrak{M}\subset H=H_\infty^{\boldsymbol{r}}(R_n)$ ($\boldsymbol{r}\geqslant\boldsymbol{0}$) функций f, каждая из которых принадлежит еще к классу $\tilde{C}=\tilde{C}(R_n)$ функций, непрерывных на R_n и имеющих конечный предел в точке $\boldsymbol{x}=\infty$. Тогда для каждой функции $f\in\mathfrak{M}$, очевидно, имеет место* 7.7.4 (1). *Пусть, кроме того, $\mathfrak{M}$ ограничено в C.*

Для того чтобы $\mathfrak{M}$ было компактным в H, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\Lambda(\delta)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\ \sup_{|\boldsymbol{h}|<\delta}\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})\|_H\to 0 \qquad (\delta\to 0)$$

и чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое $N>0$, что

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}')|<\varepsilon, \tag{1}$$

каковы бы ни были $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$, удовлетворяющие неравенствам $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{x}'|>N$ для всех $f\in\mathfrak{M}$.

Доказательство также в точности такое же, как доказательство в 7.7.2, если принять во внимание, что имеет место утверждение: для того чтобы множество $\mathfrak{M}\subset\tilde{C}$ функций было компактным в $\tilde{C}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было: 1) ограниченным, 2) равностепенно непрерывным (на R_n) и чтобы 3) для любого $\varepsilon>0$ нашлось N так, чтобы имело место свойство (1).

Это последнее утверждение легко получить, базируясь на теореме Арцела́: выполнение для $\mathfrak{M}$ условий 1), 2) на произвольном шаре $|\boldsymbol{x}|\leqslant N$ необходимо и достаточно для компактности $\mathfrak{M}$ на этом шаре.

ГЛАВА 8

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ИЗОМОРФИЗМ ИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ

8.1. Ядра Бесселя — Макдональда

Преобразование Фурье фуикции $(1+|x|^2)^{-r/2}$ при достаточно большом $r>0$ можно получить эффективно; так как она есть функция от $|x|$, то к ней применима известная формула *)

$$\widehat{(1+|x|^2)^{-r/2}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \frac{e^{iu\xi}\, d\xi}{(1+|\xi|^2)^{r/2}} =$$

$$= \frac{1}{|u|^{\frac{n-r}{2}}} \int_0^\infty \frac{\rho^{n/2}}{(1+\rho^2)^{r/2}} I_{\frac{n-2}{2}}(|u|\rho)\, d\rho$$

где I_μ есть бесселева функция порядка μ.

Этот интеграл (типа Ханкеля) подсчитан, например, в книге Титчмарша **), где надо считать $\mu+1=\frac{r}{2}$, $\nu+1=\frac{n}{2}$, что дает

$$\widehat{(1+|x|^2)^{-r/2}} = \frac{1}{2^{\frac{r-2}{2}}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \frac{K_{\frac{n-r}{2}}(|x|)}{|x|^{\frac{n-r}{2}}} = G_r(|x|), \tag{1}$$

$$K_\nu(z) = K_{-\nu}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \xi^{-\nu-1} e^{-\xi-\frac{z^2}{4\xi}}\, d\xi. \tag{2}$$

Функция $K_\nu(z)$ называется функцией Макдональда порядка ν или модифицированной функцией Бесселя порядка ν.

Для ядра $K_\nu(x)$ как функции от одной переменной x известны асимптотические оценки. Здесь мы приведем их без доказатель-

---

*) Бохнер [1], теорема 5.6, стр. 263.

**) Титчмарш [1], 7.11.6, стр. 264, см. еще Ватсон [1], § 13.6 (2), стр. 476 и Н. Я. Сонин [1].

ства, ссылаясь на книгу Ватсона [1]. Имеют место асимптотические равенства:

$$K_\nu(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2}e^{-x}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\qquad(1<x)$$

(Ватсон [1], 7.2.3 (1), стр. 226),

$$K_0(x)=\ln\frac{1}{x}+O(1)\qquad(0<x<1)$$

(Ватсон [1], 3.7.1 (14), стр. 95),

$$K_n(x)=\frac{1}{2}\frac{(n-1)!}{\left(\frac{x}{2}\right)^n}+O\left(\frac{1}{x^{n-2}}\right)\qquad(0<x<1,\ n\neq 0-\text{целое})$$

(Ватсон [1], 3.7.1 (15), стр. 95),

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin|\nu|\pi\,\Gamma(-|\nu|+1)}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-|\nu|}+O(x^{-|\nu|})$$

$$(x\to 0,\ \nu-\text{нецелое})$$

(Ватсон [1], 3.7 (6), стр. 92; 3.1 (8), стр. 51).

Для наших целей будет вполне достаточно иметь в виду, что из приведенных оценок следует, что

$$\begin{aligned}&|K_\nu(x)|\leqslant\frac{ce^{-x}}{x^{1/2}} && (1<x),\\ &|K_0(x)|\leqslant c\left(\ln\frac{1}{x}+1\right) && (0<x<1),\\ &|K_\nu(x)|\leqslant\frac{c}{x^{|\nu|}} && (0<x<1,\ \nu\neq 0-\text{любое}),\end{aligned}\tag{3}$$

где c зависит от ν, но не от x.

Впрочем, неравенства (3) легко получить непосредственно, оценивая интеграл

$$\Phi(\nu,x)=\int_0^\infty \xi^{-\nu-1}e^{-\xi-\frac{x^2}{4\xi}}\,d\xi.\tag{4}$$

В интеграле (4) можно считать параметр $\nu=\lambda+i\mu$ комплексным. Если учесть, что

$$|\xi^{-\nu}|=|\xi^{-\lambda}|,\tag{5}$$

то оценки (3) остаются верными при замене в них ν на λ и при комплексных ν. Отметим, что интеграл имеет только две особенности $\xi=\infty$ и $\xi=0$, а подынтегральная функция непрерывна относительно (ξ, x, ν) $(\xi>0)$ для любых действительных x и комплексных ν, кроме того, интеграл равномерно сходится относительно указанных x, ν в достаточно малой окрестности любой указанной точки x_0, ν_0. Это показывает, что $\Phi(\nu, x)$ непрерывна относительно ν, x. Подобные факты имеют место и для формально продифференцированного по ν интеграла. Это показывает, что функция $\Phi(\nu, x)$ имеет производную $\frac{\partial}{\partial\nu}\Phi(\nu, x)$ по ν, непрерывную по (ν, x). Таким образом, $\Phi(\nu, x)$ аналитическая по ν.

В равенстве (1) его левая часть, если ее рассматривать как обобщенную функцию, имеет смысл для любого комплексного r. Правая часть, выражаемая с помощью интеграла (2), также имеет смысл как обычная функция от $(r, \boldsymbol{x})$, каковы бы ни были комплексное число $r\,(\operatorname{Re} r > 0)$ и точки $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}_n$, $\boldsymbol{x} \neq 0$. Кроме того, $G_r(|\boldsymbol{x}|)$ непрерывна относительно указанных $(r, \boldsymbol{x})$, так же как и ее производная по r. Таким образом, она аналитическая по r.

Из оценок (3) и равенства (1) следует, что

$$|G_r(|\boldsymbol{x}|)| \leqslant c_r \begin{cases} \dfrac{e^{-|\boldsymbol{x}|}}{|\boldsymbol{x}|^{\frac{n-r+1}{2}}} & (|\boldsymbol{x}|>1,\ n,\ r\text{ — любые}),\\ \ln\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|}+1 & (|\boldsymbol{x}|<1,\ n-r=0),\\ \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-r}} & (|\boldsymbol{x}|<1,\ n-r>0),\\ 1 & (|\boldsymbol{x}|<1,\ n-r<0), \end{cases} \tag{6}$$

где $c_r > 0$ — непрерывная функция от r.

Мы считали в этих неравенствах r действительными. Они верны также в силу (5), если в левых их частях считать r комплексным, а в правой заменить всюду $r = \lambda + i\mu$ на λ.

Легко видеть из (6), что $G_r(|\boldsymbol{x}|) \in L(\mathrm{R}_n) = L$. Из сказанного следует, что равенство (1) на самом деле верно при любом комплексном r, если $\operatorname{Re} r = \lambda > 0$. В самом деле, пусть $\varphi \in S$, тогда функция

$$(\widehat{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{-r/2}}, \varphi) = ((1+|\boldsymbol{x}|^2)^{-r/2}, \hat{\varphi}) = \psi(r)$$

есть, как легко проверить, аналитическая функция от r. С другой стороны, с помощью оценок (6) непосредственно устанавливается, что функция $G_r(|\boldsymbol{x}|)$ по модулю не превышает равномерно относительно r, удовлетворяющих неравенству $|r - r_0| < \delta\ (\lambda_0 > \delta > 0)$, суммируемую функцию *), и так как $G_r(|\boldsymbol{x}|)\,\varphi(\boldsymbol{x})$ непрерывна от $(r, \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \neq 0$, и φ ограничена, то, согласно признаку Вейерштрасса, функция

$$\psi_1(r) = (G_r(|\boldsymbol{x}|),\ \varphi(\boldsymbol{x})) = \int G_r(|\boldsymbol{x}|)\,\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

*) Константы c_r в неравенстве (6) ограничены для указанных r.

есть конечная непрерывная функция по r ($\lambda>0$). С помощью оценок (3), (6) аналогичный факт*) устанавливается для производной

$$\frac{d}{dr}\psi_1(r)=\left(\frac{d}{dr}G_r(|\boldsymbol{x}|),\ \varphi(\boldsymbol{x})\right).$$

Это показывает, что $\psi_1(r)$ аналитическая для $\lambda>0$. Она, кроме того, равна $\psi(r)$ для достаточно больших действительных r, следовательно, и для любого комплексного r с $\lambda>0$, какова бы ни была $\varphi\in S$. Это влечет равенство (1). Покажем, что для производных от $G_r(|\boldsymbol{x}|)$ порядка $\boldsymbol{s}=(s_1,\ \ldots,\ s_n)$ имеют место следующие оценки:

$$|D^{\boldsymbol{s}}G_r(|\boldsymbol{x}|)|\leqslant$$
$$\leqslant c\begin{cases} \dfrac{e^{-|\boldsymbol{x}|}}{|\boldsymbol{x}|^{\frac{n-r+1}{2}}} & (|\boldsymbol{x}|>1,\ n,\ r,\ \boldsymbol{s}\text{ — любые}),\\ \ln\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|}+1 & (|\boldsymbol{x}|<1,\ n-r+|\boldsymbol{s}|=0,\ |\boldsymbol{s}|\text{ — четное})\\ \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-r+|\boldsymbol{s}|}} & (|\boldsymbol{x}|<1,\ n-r+|\boldsymbol{s}|>0 \text{ и } n-r+|\boldsymbol{s}|=0,\\ & \qquad \text{а } |\boldsymbol{s}|\text{ — нечетное}),\\ 1 & (|\boldsymbol{x}|<1,\ n-r+|\boldsymbol{s}|<0), \end{cases} \tag{7}$$

где c (непрерывно) зависит от n, r, $\boldsymbol{s}$, но не зависит от $\boldsymbol{x}$.

Заметим, что по индукции легко проверяется, что

$$D^{\boldsymbol{s}}e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4\xi}}=e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4\xi}}\sum\frac{A_{\boldsymbol{k},l}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}}{\xi^l}\quad (2l-|\boldsymbol{k}|\leqslant|\boldsymbol{s}|;\ |\boldsymbol{k}|\leqslant l\leqslant|\boldsymbol{s}|), \tag{8}$$

где $D^{\boldsymbol{s}}$ — оператор дифференцирования порядка $\boldsymbol{s}=(s_1,\ \ldots,\ s_n)$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}=x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$, $\boldsymbol{k}=(k_1,\ \ldots,\ k_n)$ — целые неотрицательные векторы, $A_{\boldsymbol{k},l}$ — постоянные, и сумма распространена на пары $\boldsymbol{k}$, l, удовлетворяющие неравенствам, указанным в скобках.

Поэтому

$$|D^{\boldsymbol{s}}G_r(|\boldsymbol{x}|)|\leqslant\left|D^{\boldsymbol{s}}\int_0^\infty \xi^{\frac{n-r}{2}}e^{-\xi-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4\xi}}d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum\left|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\int_0^\infty \xi^{-\frac{n-r+2l}{2}-1}e^{-\xi-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4\xi}}d\xi\right|\leqslant\sum|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}G_{r-2l}(|\boldsymbol{x}|)|, \tag{9}$$

где суммы распространены на указанные в (8) пары $\boldsymbol{k}$, l.

*) В 9.4 подробно рассмотрен аналогичный анизотропный случай.

Если $|x|>1$, то в силу первой оценки (6)

$$|D^s G_r(|x|)| \leqslant \sum \frac{|x^k|\, e^{-|x|}}{|x|^{\frac{n-(r-2l)+1}{2}}} \leqslant \sum \frac{e^{-|x|}}{|x|^{\frac{n-r+1}{2}+l-|k|}} \leqslant \frac{e^{-|x|}}{|x|^{\frac{n-r+1}{2}}},$$

потому что $l-|k|\geqslant 0$. Мы доказали первое неравенство (7).

Пусть теперь $|x|<1$. Если, кроме того, $n-r+2l>0$, то в силу третьей оценки (6)

$$|x^k G_{r-2l}(|x|)| \leqslant \frac{|x^k|}{|x|^{n-r+2l}} = \frac{1}{|x|^{n-r+2l-|k|}} \leqslant \frac{1}{|x|^{n-r+|s|}}, \qquad (10)$$

потому что $2l-|k|\leqslant|s|$.

Далее, если $n-r+2l<0$, то в силу четвертой оценки (6)

$$|x^k G_{r-2l}(|x|)| \leqslant |x^k| \leqslant 1. \qquad (11)$$

Если же для некоторого l (одного) $n-r+2l=0$, то в силу второй оценки (6)

$$|x^k G_{r-2l}(|x|)| \leqslant |x^k| \ln\frac{1}{|x|}. \qquad (12)$$

Далее, если $n-r+|s|>0$, правая часть (10) больше правых частей (11) и (12) ($|k|\geqslant 0$). Мы доказали для $n-r+|s|\geqslant 0$ третью оценку. Если же $n-r+|s|=0$ и $|s|$ — нечетное, то нет натурального l, для которого $n-r+2l=0$, и в этом случае оценка (12) не возникает, а оценки (10) и (11) дают 1. Этим третья оценка (7) доказана полностью. Если же $n-r+|s|=0$ ($|s|$ — четное), то может возникнуть и оценка (12). Этим доказано второе неравенство (7).

Наконец, если $n-r+|s|<0$, то правые части (10), (11) и при $|k|>0$ (12) оцениваются единицей. Остается только исследовать случай (12) при $k=0$, но он невозможен, потому что из $n-r+|s|<0=n-r+2l$ следует $|s|<2l$, что противоречит тому факту, что наряду с этим должно выполняться при $|k|=0$ неравенство $2l-|k|\leqslant|s|$, т. е. $2l\leqslant|s|$. Этим доказано последнее неравенство (7).

Из неравенств (7) легко видеть, что $G_r(|x|)$ при любом $r>0$ и любом натуральном n принадлежит к $L(R_n)=L$, поэтому для функций $f\in L_p(R_n)=L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ имеет смысл свертка

$$F(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int G_r(|x-u|)\, f(u)\, du = \widehat{(1+|u|^2)^{-r/2}\tilde{f}} = I_r f. \qquad (13)$$

При этом, очевидно, $F\in L_p$. На самом деле функция F обладает, как мы увидим, значительно лучшими свойствами.

8.2. Изоморфизм классов W_p^l

Будем говорить, что банаховы пространства E_1 и E_2 *изоморфны*, если существуют линейный оператор A, отображающий E_1 на E_2 взаимно однозначно, и две положительные не зависящие от $x \in E_1$ константы c_1 и c_2 такие, что

$$c_1 \| x \|_{E_1} \leqslant \| A(x) \|_{E_2} \leqslant c_2 \| x \|_{E_1} \tag{1}$$

для всех $x \in E_1$.

Про оператор A будем говорить, что он осуществляет изоморфизм E_1 и E_2:

$$A(E_1) = E_2. \tag{2}$$

Тогда обратный оператор A^{-1}, очевидно, существует, линеен и в свою очередь осуществляет изоморфизм

$$A^{-1}(E_2) = E_1.$$

Докажем, что операция I_l при натуральном l осуществляет изоморфизм

$$I_l(L_p) = W_p^l \tag{3}$$

$$\left(1 < p < \infty; \quad W_p^l = W_p^l(R_n), \quad L_p = W_p^0, \quad l = 0,\ 1,\ \ldots\right).$$

Пусть $F \in W_p^l$. Тогда

$$\widehat{(iu_j)^l \tilde{F}} = \frac{\partial^l F}{\partial x_j^l} \in L_p \qquad (j = 1,\ \ldots,\ n),$$

и в силу того, что $(i^3 \operatorname{sign} u_j)^l$ есть множитель Марцинкевича (см. 1.5.5, пример 1 и 1.5.4.1),

$$\| \widehat{| u_j |^l \tilde{F}} \|_p \leqslant c_1 \left\| \frac{\partial^l F}{\partial x_j^l} \right\|_p .$$

Поэтому, учитывая еще, что $F \in L_p$, получим

$$\left\| \widehat{\left(1 + \sum_{j=1}^n | u_j |^l\right) \tilde{F}} \right\|_p \leqslant c_2 \| F \|_{W_p^l} .$$

Но функция $(1 + | u |^2)^{l/2} \left(1 + \sum_1^n | u_j |\right)^{-l}$ есть множитель Марцинкевича (1.5.5, пример 7), поэтому

$$f = \widehat{(1 + | u |^2)^{l/2} \tilde{F}} \in L_p$$

и

$$\| f \|_p \leqslant c_3 \| F \|_{W_p^l} . \tag{4}$$

Пусть теперь $f \in L_p$; тогда $\tilde{F} = \tilde{G}_l \tilde{f} = (1+|\lambda|^2)^{-l/2}\tilde{f}$ и, следовательно (1.5 (10)),

$$\widetilde{F^{(k)}} = (i\lambda)^k (1+|\lambda|^2)^{-\frac{l}{2}} \tilde{f}.$$

Но при $|k| = l$ функция

$$(i\lambda)^k (1+|\lambda|^2)^{-l/2}$$

есть множитель Марцинкевича (см. 1.5.5, пример 5). Поэтому

$$\|F^{(k)}\|_p \leqslant c_4 \|f\|_p. \tag{5}$$

Но также (8.1 (13)) $\|F\|_p \leqslant c_5 \|f\|_p$, поэтому $F \in W_p^l$ и

$$\|F\|_{W_p^l} \leqslant c \|f\|_p.$$

Мы доказали, что операция I_l осуществляет изоморфизм (3). В дальнейшем будет показано, что она может служить средством для определения и осуществления изоморфизмов других классов дифференцируемых функций.

8.3. Свойства ядра Бесселя — Макдональда

Ниже доказывается для ядра $G_r(|x|)$ Бесселя — Макдональда при $r > 0$ оценка (s — натуральное число, $-\infty < h < \infty$)

$$\Lambda = \int \left| \Delta_{hx_j}^2 \frac{\partial^s G_r(|x|)}{\partial x_j^s} \right| dx \leqslant M_r |h|^\alpha \tag{1}$$

($j = 1, \ldots, n$; $s = \bar{r}$, $r = \bar{r} + \alpha$, $\bar{r}$ — целое, $0 < \alpha \leqslant 1$).

Так как $G_r(|x|) \in L = L(R_n)$ при $r > 0$, то из (1) следует (см. определение классов H_p^r в 4.3.3 и 5.6.2), что

$$G_r(|x|) \in H_1^r = H_1^r(R_n) \tag{2}$$

и

$$\|G_r(|x|)\|_{H_1^r} = \|G_r(|x|)\|_L + M_r, \tag{3}$$

где M_r — наименьшая константа, для которой выполняются неравенства (1).

Положим $u = (u_j, u^j)$, $u^j = (u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n)$,

$$g^{(s)}(x) = \frac{\partial^s G_r(|x|)}{\partial x_j^s}, \qquad \Delta_h^2 \varphi(t) = \varphi(t+h) - 2\varphi(t) + \varphi(t-h).$$

Будем пользоваться четырьмя оценками 8.1 (7) (обозначим их соответственно 1), 2), 3), 4)).

Согласно 1)—3)

$$\Lambda \leqslant 4\int |g^{(s)}(u)|\,du <$$

$$< \int\limits_{|u|<1} \left(\ln\frac{1}{|u|} + \frac{1}{|u|^{n-r+s}}\right) du + \int\limits_{|u|\geqslant 1} e^{-\frac{|u|}{2}}\,du \leqslant c < \infty,$$

потому что $n-(r-s)=n-\alpha<n$. Следовательно, для $|h|\geqslant 1$

$$\Lambda \leqslant c \leqslant c\,|h|^{\alpha}. \tag{4}$$

Переходим к случаю $|h|<1$. Будем для определенности считать, что $0<h<1$. Имеем

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \tag{5}$$

где Λ_1 такой же, как Λ интеграл, но взятый не по всему пространству, а по шару $|u|<4h$. Тогда

$$\Lambda_1 \leqslant 4 \int\limits_{|u|<2h} |g^{(s)}(u)|\,du < \int\limits_{|u|<2h} \frac{du}{|u|^{n+s-r}} < \int\limits_0^{2h} \rho^{\alpha-1}\,d\rho < h^{\alpha} \tag{6}$$

в силу оценки (3).

Однако остался случай $n-r+s=0$, s — четное. Так как $0<r-s\leqslant 1$, то это может быть, лишь если $n=1, s=r-1$ — четное, т. е. $\alpha=r-s=1$.

Нужная оценка тогда получается следующим образом (интегралы одномерные):

$$\Lambda_1 \leqslant \int\limits_{|u|<4h} |g^{(s)}(u+h)-g^{(s)}(u)|\,du +$$

$$+ \int\limits_{|u|<4h} |g^{(s)}(u)-g^{(s)}(u-h)|\,du <$$

$$< 2 \int\limits_{|u|<5h} |g^{(s)}(u+h)-g^{(s)}(u)|\,du =$$

$$= 2\int\limits_{-5h}^{-h} |g^{(s)}(u+h)-g^{(s)}(u)|\,du + 2\int\limits_{-h}^{0} |g^{(s)}(u+h)-g^{(s)}(u)|\,du +$$

$$+ 2\int\limits_0^{5h} |g^{(s)}(u+h)-g^{(s)}(u)|\,du = \Lambda_1^{(1)} + \Lambda_1^{(2)} + \Lambda_1^{(3)},$$

где

$$\Lambda_1^{(3)} = 2\int\limits_0^{5h} du \left| \int\limits_u^{u+h} g^{(s+1)}(t)\,dt \right| < \int\limits_0^{5h} du \int\limits_u^{u+h} \frac{dt}{t} =$$

$$= \int\limits_0^{5h} \ln\left(1+\frac{h}{u}\right) du = h\int\limits_0^{5} \ln(1+t)\,dt < h,$$

и аналогично

$$\Lambda_1^{(1)} \ll h,$$

и (учитывая, что $G_r(|u|)$ — четная функция, а потому при $s = r-1$ четном функция $g^{(s)}(u)$ тоже четная)

$$\Lambda_1^{(2)} = 2\int\limits_{-h}^{0} |g^{(s)}(u+h) - g^{(s)}(u)|\,du =$$

$$= 2\int\limits_{-h}^{0} |g^{(s)}(u+h) - g^{(s)}(-u)|\,du =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{h} |g^{(s)}(u) - g^{(s)}(h-u)|\,du = 2\int\limits_{0}^{h} du \left| \int\limits_{h-u}^{u} g^{(s+1)}(t)\,dt \right| \ll$$

$$\ll \int\limits_{0}^{h} du \left| \int\limits_{h-u}^{u} \frac{dt}{t} \right| = 2\int\limits_{0}^{h} \left| \ln \frac{u}{h-u} \right| du = 2h \int\limits_{0}^{1} \left| \ln \frac{t}{1-t} \right| dt \ll h.$$

Этим полностью доказано (6). Переходим к оценке

$$\Lambda_2 = \int\limits_{|u|>4h} |\Delta_{h,\,x_j}^2 g^{(s)}|\,du =$$

$$= \int\limits_{|u|>4h} \left| \int\limits_0^h \int\limits_0^h \frac{\partial^2 g^{(s)}}{\partial x_j^2}(u_j+v+t,\ u^j)\,dv\,dt \right| du =$$

$$= \int\limits_{\substack{|u|>4h\\ u_j>0}} + \int\limits_{\substack{|u|>4h\\ -2h<u_j<0}} + \int\limits_{\substack{|u|>4h\\ u_j<-2h}} = \Lambda_2^{(1)} + \Lambda_2^{(2)} + \Lambda_2^{(3)},$$

где в силу 3) (учесть, что $n+s-r+2 = n-\alpha+2 \geqslant n+1 > 0$)

$$\Lambda_2^{(1)},\ \Lambda_2^{(3)} \ll h^2 \int\limits_{\substack{|u|<2h\\ u_j>0}} \frac{du}{|u|^{n+s-r+2}} \ll h^2 \int\limits_{2h}^{\infty} \rho^{\alpha-3}\,d\rho \ll h^{\alpha}, \tag{7}$$

и принимая во внимание, что для $|u|>4h$, $-2h<u_j<0$ $|u^j| \geqslant |u| - |u_j| \geqslant 4h-2h = 2h$, получим

$$\Lambda_2^{(2)} \ll h^3 \int\limits_{|u^j|>2h} \frac{du^j}{|u^j|^{n+s-r+2}} \ll h^3 \int\limits_{2h}^{\infty} \frac{\rho^{n-2}\,d\rho}{\rho^{n+s-r+2}} \ll$$

$$\ll h^3 \int\limits_{2h}^{\infty} \rho^{\alpha-4}\,d\rho \ll h^{\alpha}. \tag{8}$$

Из (4), (6), (7) и (8) следует (1).

8.4. Оценка наилучшего приближения для $I_r f$

Пусть функция $f \in L_p = L_p(R_n)$, $r > 0$ и (8.1 (13))

$$F = I_r f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int G_r(|u|) f(x-u)\,du. \qquad (1)$$

Пусть далее $\omega_\nu \in L$, $\lambda_\nu \in L_p$ — произвольные функции экспоненциального сферического типа ν. Таким образом, $\omega_\nu \in S\mathfrak{M}_{\nu 1}$, $\lambda_\nu \in S\mathfrak{M}_{\nu p}$. Положим

$$F(x) - \Omega_\nu(x) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int [G_r(|u|) - \omega_\nu(u)][f(x-u) - \lambda_\nu(x-u)]\,du.$$

Очевидно, $\Omega_\nu \in S\mathfrak{M}_{\nu p}$ (см. 3.6.2) и

$$\|F - \Omega_\nu\|_p \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|G_r(|x|) - \omega_\nu(x)\|_L \|f - \lambda_\nu\|_p.$$

Поэтому, учитывая, что функция $G_r(|x|) \in H_1^r$ (см. 8.3) и что, следовательно, ее наилучшее приближение в метрике L при помощи целых функций сферической степени ν имеет порядок $O(\nu^{-r})$ (см. 5.5.4), будем иметь

$$E_\nu(F)_p \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} E_\nu(G_r(|x|))_L E_\nu(f)_p = \frac{b_r}{\nu^r} E_\nu(f)_p, \qquad (2)$$

где $E_\nu(\varphi)_p$, $E_\nu(\varphi)_L$ обозначают наилучшие приближения φ при помощи целых функций сферического типа ν соответственно в метриках L_p, L, а константа b_r не зависит от рядом стоящего множителя.

Пусть снова $f \in L_p$ и, кроме того, преобразование Фурье $\tilde{f}$ (вообще обобщенная функция) равно нулю на шаре v_ν с центром в начале координат радиуса ν (см. 3.2.6 (5)):

$$\tilde{f} = 0 \quad \text{на} \quad v_\nu. \qquad (3)$$

Тогда (см. 3.2.6 (6)), если $0 < \lambda < \nu$, то свертка любой функции $\omega_\lambda \in S\mathfrak{M}_{\nu 1}$ с f равна нулю:

$$\omega_\lambda * f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \omega_\lambda(u) f(x-u)\,du = 0,$$

поэтому

$$F(x) = I_r f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int [G_r(|u|) - \omega_\lambda(u)] f(x-u)\,du$$

и

$$\|F\|_p \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|G_r - \omega_\lambda\|_L \|f\|_p.$$

Но тогда, беря нижнюю грань по ω_λ, получим неравенство

$$\|F\|_p \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} E_\lambda (G_r)_L \|f\|_p = \frac{b_r \|f\|_p}{\lambda^r},$$

справедливое для всех $\lambda < \nu$, поэтому

$$\|I_r f\|_p = \|F\|_p \leqslant \frac{b_r \|f\|_p}{\nu^r} \qquad (\nu > 0, \ (\tilde{f})_{v_\nu} = 0), \tag{4}$$

где b_r — константа, входящая в неравенство (2). Она не зависит от $\nu > 0$ и рассматриваемых f.

8.5. Мультипликатор, равный единице на области

По определению обобщенная функция $f \in S'$ равна нулю на открытом множестве $g \subset R_n$, если для любой финитной в g функции φ имеет место

$$(f, \varphi) = 0.$$

Если при этом f не только принадлежит к S', но есть также локально суммируемая на g функция, то почти всюду

$$f(x) = 0 \quad \text{на} \quad g.$$

В самом деле, пусть $\sigma \subset g$ — произвольный шар. Существует (см. 1.4.2) последовательность финитных в σ функций φ_N, для которой имеет место ограниченная сходимость

$$\lim_{N \to \infty} \varphi_N(x) = \operatorname{sign} f(x) \ \text{ почти всюду на } \sigma.$$

Поэтому в силу теоремы Лебега

$$0 = (f, \varphi_N) = \int_\sigma f(x) \varphi_N(x)\, dx \to \int_\sigma |f(x)|\, dx \qquad (N \to \infty),$$

т. е. $f(x) = 0$ на σ почти всюду, следовательно, и на g.

Если $f_1, f_2 \in S'$ и $f_1 - f_2 = 0$ на открытом множестве g, то естественно говорить, что $f_1 = f_2$ на g.

8.5.1. Лемма. *Пусть μ — мультипликатор в L_p* ($1 \leqslant p \leqslant \infty$; $\hat{\mu} \in L$ *при* $p = \infty$; *см.* 1.5.1, 1.5.1.1), *равный единице на открытом множестве $g \subset R_n$. Тогда для $f \in L_p$ и вообще для регулярной в смысле L_p функции f*

$$\widetilde{K * f} = \mu \tilde{f} = \tilde{f} \quad \text{на } g \qquad (K = \hat{\mu}). \tag{1}$$

Доказательство. Для $\varphi \in S$, имеющей носитель в g, и бесконечно дифференцируемой финитной функции $\tilde{f}$

$$(\mu \tilde{f}, \varphi) = (\mu, \tilde{f}\varphi) = (1, \tilde{f}\varphi) = (\tilde{f}, \varphi). \tag{2}$$

Здесь надо учесть, что μ (по определению мультипликатора) есть обычная измеримая функция по условию леммы, равная единице на g, и потому второй член в (2) есть интеграл Лебега; кроме того, по условию леммы $\mu(x)=1$ на g, а $\tilde{f}\varphi$ имеет носитель в g, что доказывает второе равенство.

Если $f\in L_p$, то найдется последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций f_l такая, что $f_l\to f$, $\mu\tilde{f}_l\to\mu\tilde{f}$ слабо. Подставив в (2) f_l вместо f и перейдя к пределу при $l\to\infty$, получим снова (2), но уже для $f\in L_p$.

Если теперь f — регулярная в смысле L_p функция, то для $\varphi\in S$ с носителем в g для достаточно большого ρ получим

$$(\widetilde{K*f},\ \varphi)=(I_{-\rho}(\widetilde{K*I_\rho f}),\ \varphi)=(\widetilde{K*I_\rho f},\ (1+|\lambda|^2)^{\rho/2}\varphi)=$$
$$=(\widetilde{I_\rho f},\ (1+|\lambda|^2)^{\rho/2}\varphi)=(\tilde{f},\ \varphi),$$

т. е. (1).

8.5.2. Лемма. *Пусть мультипликатор $\mu=\mu_N=1$ на $\Delta_N=\{|x_j|<N;\ j=1,\ \ldots,\ n\}$. Тогда, если $N'<N$ и функция $\omega_{N'}\in\mathfrak{M}_{N'p}$ (целая экспоненциального типа N' по всем переменным, принадлежащая к L_p), то*

$$K*\omega_{N'}=\widehat{\mu\tilde{\omega}_{N'}}=\omega_{N'}\qquad (K=\hat{\mu}). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ и $N'+\varepsilon<N$. Так как ψ_ε экспоненциального типа ε, $\psi_\varepsilon\omega_{N'}\in\mathfrak{M}_{N+\varepsilon,\,p}$. Кроме того, $\psi_\varepsilon\omega_{N'}\in S$, потому что $\psi_\varepsilon\in S$, а $\omega_{N'}$ вместе со своими любыми производными ограничена ($\omega_{N'}$ полиномиального роста). Поэтому

$$(\mu\widetilde{\psi_\varepsilon\omega_{N'}},\ \varphi)=(\mu,\ \widetilde{\psi_\varepsilon\omega_{N'}}\varphi)=(1,\ \widetilde{\psi_\varepsilon\omega_{N'}}\varphi)=(\widetilde{\psi_\varepsilon\omega_{N'}},\ \varphi),$$

где второе равенство имеет место потому, что носитель $\widetilde{\psi_\varepsilon\omega_{N'}}\varphi$ принадлежит к Δ_N. Следовательно,

$$\widehat{\mu\widetilde{\psi_\varepsilon\omega_{N'}}}=\psi_\varepsilon\omega_{N'}. \tag{2}$$

Переходя к пределу в (2) в слабом смысле при $\varepsilon\to 0$, получим (1). Для правой части (1) это следует из 1.5.8 (6). Что касается левой, то надо учесть, что

$$\|\psi_\varepsilon\omega_{N'}-\omega_{N'}\|_p^p=\int|(\psi_\varepsilon(x)-1)\,\omega_{N'}(x)|^p\,dx\to 0\qquad(\varepsilon\to 0)$$

по теореме Лебега, откуда в силу того, что μ есть мультипликатор, левая часть (2) стремится к левой части (1) не только слабо, но даже в L_p.

8.6. Суммы Валле-Пуссена регулярной функции

В теории интеграла Фурье ядро

$$\frac{\sin Nt}{t} = \int_0^N \cos nt\, dn \tag{1}$$

при целом N соответствует тригонометрическому полиному

$$D_N^*(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nt = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \quad (N = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{2}$$

называемому ядром Дирихле порядка N.

Среднее арифметическое

$$v_N^* = v_N^*(t) = \frac{D_{N+1}^* + \ldots + D_{2N}^*}{N} = \frac{1}{2} + \sum_{0}^{N} \cos kt +$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{N+1}^{2N} (2N+1-k)\cos kt = \frac{\cos(N+1)t - \cos(2N+1)t}{4N\sin^2\frac{t}{2}} \tag{3}$$

называется *ядром Валле-Пуссена* *). Мы будем говорить, что оно имеет порядок N.

Важные свойства ядра Валле-Пуссена заключаются в следующем:

1*) v_N^* — четный тригонометрический полином порядка $2N$;

2*) коэффициенты Фурье v_N^* с индексами $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N$ равны единице;

3*) $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_N^*(t)\, dt = 1$;

4*) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |v_N^*(t)|\, dt = \frac{1}{2N\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\cos(N+1)t - \cos(2N+1)t|}{\sin^2\frac{t}{2}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{N}\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\frac{N}{2}t\sin\left(\frac{3N}{2}+1\right)t\right|}{t^2}\, dt \leqslant \frac{\pi}{N}\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\frac{N}{2}t\sin\frac{3N}{2}t\right|dt}{t^2} +$$

$$+ \frac{\pi}{N}\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\frac{N}{2}t\right|}{t}\, dt \leqslant \pi\int_0^{N\pi} \frac{\left|\sin\frac{u}{2}\sin\frac{3}{2}u\right|}{u^2}\, du + \frac{\pi^2}{2} < A < \infty,$$

где A не зависит от $N \geqslant 1$.

---

*) Валле-Пуссен [1].

Ниже будет рассмотрен соответствующий аналог ядра Валле-Пуссена в случае интегралов Фурье в n-мерном случае.

Начнем с того, что рассмотрим обычную измеримую и ограниченную на $R=R_n$ функцию $g(x)$ такую, что ее преобразование Фурье $\tilde{g}$ в свою очередь есть обычная ограниченная функция. Пусть еще $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ есть векторный параметр, который будет изменяться на прямоугольнике $\Omega_a=\{a<\lambda_j<2a;\ j=1, \ldots, n\}$, где $a>0$. Имеет место равенство

$$\widetilde{\int\limits_{\Omega_a} g(\lambda_1x_1, \ldots, \lambda_nx_n)\, d\lambda} = \int\limits_{\Omega_a} \widetilde{g(\lambda_1x_1, \ldots, \lambda_nx_n)}\, d\lambda. \tag{4}$$

В самом деле, если $\varphi\in S$, то

$$\left(\widetilde{\int\limits_{\Omega_a} g(\lambda_1x_1, \ldots, \lambda_nx_n)\, d\lambda},\ \varphi\right) = \int\limits_{\Omega_a} d\lambda \int \widetilde{g(\lambda_1x_1, \ldots, \lambda_nx_n)}\, \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int \left(\int\limits_{\Omega_a} \widetilde{g(\lambda_1x_1, \ldots, \lambda_nx_n)}\, d\lambda\right) \varphi(x)\, dx =$$

$$= \left(\int\limits_{\Omega_a} \widetilde{g(\lambda_1x_1, \ldots, \lambda_nx_n)}\, d\lambda,\ \varphi(x)\right).$$

Все равенства здесь очевидны, требует пояснения только тот факт, что $\widetilde{g(\lambda_1x_1, \ldots, \lambda_nx_n)}$ есть при $\lambda\in\Omega_a$ обычная ограниченная функция. Но это вытекает из равенств

$$\widetilde{g(\lambda_1x_1, \ldots, \lambda_nx_n)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int g(\lambda_1u_1, \ldots, \lambda_nu_n)\, e^{-ixu}\, du =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_1^n \lambda_j\, (2\pi)^{n/2}} \int g(u)\, e^{-i\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_ju_j}{\lambda_j}}\, du$$

и предположения, что $\tilde{g}$ есть обычная ограниченная измеримая функция.

Аналог ядра Валле-Пуссена определяется с помощью равенства, аналогичного (3):

$$V_N(t) = \frac{1}{N^n} \int\limits_{\Omega_N} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin\lambda_jt_j}{t_j}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{N^n} \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{N}^{2N} \frac{\sin\nu t_j}{t_j}\, d\nu = \frac{1}{N^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\cos Nt_j - \cos 2Nt_j}{t_j^2}. \tag{5}$$

Ядро V_N удовлетворяет свойствам, аналогичным свойствам 1*)—4*):

1) $V_N(z)$ — целая функция экспоненциального типа степени $2N$ по каждой из переменных z_j ($j=1, \ldots, n$), ограниченная и суммируемая на R;

2) $$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \tilde{V}_N = \frac{1}{\pi^n} \int V_N(t) e^{-ixt}\, dt = 1 \text{ на } \Delta_N, \tag{6}$$

$$\Delta_N = \{|x_j| \leqslant N;\ j=1, \ldots, n\},$$

3) $$\frac{1}{\pi^n} \int V_N(t)\, dt = 1, \tag{7}$$

4) $$\frac{1}{\pi^n} \int |V_N(t)|\, dt \leqslant M \qquad (N \geqslant 1). \tag{8}$$

Свойство 1) устанавливается без труда. Свойство 3) вытекает из равенства

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{\sin \nu t}{t}\, dt = 1 \qquad (\nu > 0),$$

где несобственный риманов интеграл равномерно сходится относительно $\nu \in [N, 2N]$, вследствие чего интегрирование этого интеграла по параметру ν законно произвести под знаком интеграла:

$$\frac{1}{\pi^n} \int V_N(t)\, dt = \frac{1}{(\pi N)^n} \prod_{j=1}^{n} \int dt_j \int_N^{2N} \frac{\sin \nu t_j}{t_j}\, d\nu =$$

$$= \frac{1}{N^n} \left(\int_N^{2N} d\nu \frac{1}{\pi} \int \frac{\sin \nu t}{t}\, dt \right)^n = 1.$$

Свойство 4) очевидно:

$$\frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\cos Nt - \cos 2Nt|}{t^2}\, dt = \frac{2}{N} \int_0^{\infty} \frac{\left|\sin \frac{N}{2} t \sin \frac{3}{2} Nt\right|}{t^2}\, dt =$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{\left|\sin \frac{u}{2} \sin \frac{3}{2} u\right|}{u^2}\, du < \infty.$$

Рассмотрим функцию

$$D_\lambda(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \lambda_j t_j}{t_j},$$

являющуюся аналогом ядра Дирихле в n-мерном случае. Ее преобразование Фурье (см. 1.5.7 (10))

$$\widetilde{D_\lambda(t)} = \widetilde{\prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \lambda_j t_j}{t_j}} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^n (1)_{\Delta_\lambda},$$

$(1)_{\Delta_\lambda}$ — функция, равная единице на $\Delta_\lambda = \{|x_j| < \lambda_j;\ j = 1, \ldots, n\}$ и нулю вне Δ_λ. Она, таким образом, ограничена вместе со своим преобразованием Фурье, поэтому к ней применимо равенство (4) при $a = N$, следовательно, приняв во внимание, что

$$(1)_{\Delta_\lambda}(x) = \prod_{j=1}^{n} (1)_{\lambda_j}(x_j),$$

где $(1)_{\lambda_j}$ — функция от одной переменной x_j, равная единице на интервале $|x_j| < \lambda_j$ и нулю для остальных x_j, получим

$$\tilde{V}_N = \frac{1}{N^n} \int\limits_{\Omega_N} \overline{\prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \lambda_j t_j}{t_j}}\, d\lambda = \left(\frac{1}{N}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^n \int\limits_{\Omega_N} (1)_{\Delta_\lambda}(x)\, d\lambda =$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{N}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{N}^{2N} (1)_{\lambda_j}(x_j)\, d\lambda_j = \prod_{j=1}^{n} \mu(x_j), \qquad (9)$$

где

$$\mu(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{cases} 1 & (|\xi| < N), \\ \frac{1}{N}(2N - \xi) & (N < |\xi| \leqslant 2N), \\ 0 & (2N < |\xi|). \end{cases} \qquad (10)$$

Мы получили эффективную формулу для $\tilde{V}_N$. Из нее немедленно следует (6).

Пусть $f \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Тогда

$$\sigma_N(f, x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} (V_N * f) = \frac{1}{\pi^n} \int V_N(x - u) f(u)\, du \qquad (11)$$

есть принадлежащая к L_p функция, только постоянным множителем отличающаяся от свертки $V_N * f$. Эта функция является аналогом периодической суммы Валле-Пуссена порядка N. Так как $V_N \in \mathfrak{M}_{2N}$ (целая экспоненциального типа $2N$ по всем x_j, принадлежащая к L), то $\sigma_N(f, x) \in \mathfrak{M}_{2N, p}$ (см. 3.6.2) для всех $f \in L_p$. Более того, если $\omega_N \in \mathfrak{M}_{N, p}$, то имеет место тождество

$$\sigma_N(\omega_N, x) = \omega_N(x). \qquad (12)$$

В самом деле, $V_N \in L$, следовательно, $\tilde{V}_N$ есть мультипликатор. Кроме того, в силу (9) и (10) $\tilde{V}_N = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$ на Δ_N, поэтому, согласно лемме из 8.5.2

$$\sigma_{N_0}(\omega_N, x) = \omega_N(x) \qquad (N < N_0).$$

Из полученного равенства при $N_0 \to N$ следует (12). Законность перехода к пределу легко заключить из рассмотрения эффективной формулы (5) для V_N.

Если $f \in L_p$ и $\omega_N \in L_p$ — целая функция экспоненциального типа N, то в силу (12)

$$\sigma_N(f, x) - f(x) = \sigma_N(f - \omega_N, x) + \omega_N(x) - f(x),$$

откуда

$$\|\sigma_N(f, x) - f(x)\|_p \leqslant (1 + M) E_N(f)_p, \tag{13}$$

т. е. приближение f при помощи $\sigma_N(f)$ имеет порядок наилучшего приближения f при помощи функций экспоненциального типа N.

Если p конечно, то правая часть (13) стремится к нулю при $N \to \infty$ (см. 5.5.1), откуда следует, что

$$\sigma_N(f) \to f \quad (N \to \infty) \text{ слабо.} \tag{14}$$

При $p = \infty$ величина $E_N(f)$ уже не стремится к нулю, но свойство (14) все равно имеет место. В самом деле, на основании 8.3 (1) $(0 < \alpha \leqslant 1)$

$$\int |\Delta^2_{hx_j} G_\alpha(|u|)| \, du \leqslant M |h|^\alpha.$$

Поэтому

$$\left|\Delta^2_{hx_j} \int G_\alpha(|x - u|) f(u) \, du\right| =$$
$$= \int |\Delta^2_{hx_j} G_\alpha(u) f(x - u) \, du| \leqslant \|f\|_{L_\infty} M |h|^\alpha \quad (j = 1, \ldots, n),$$
$$\|f\|_{L_\infty} = \underset{x \in R}{\operatorname{supvrai}} |f(x)|.$$

Мы видим, что функция $F(x) = I_\alpha(f)$ удовлетворяет условию

$$|\Delta^2_{hx_j} F(x)| \leqslant c |h|^\alpha \quad (j = 1, \ldots, n),$$

и так как она, кроме того, ограничена, то принадлежит к $H^\alpha_\infty(R)$ и, следовательно, равномерно непрерывна на R, т. е. принадлежит к C.

Но тогда

$$E_N(I_\alpha f)_\infty = E_N(F)_\infty \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Это показывает, что

$$\sigma_N(F) \to F \quad \text{слабо,}$$

поэтому

$$(\sigma_N(f), \varphi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} (V_N * f, \varphi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} (I_{-\alpha}(V_N * I_\alpha f), \varphi) =$$
$$= (\sigma_N(I_\alpha f), I^*_{-\alpha}\varphi) \to (I_\alpha f, I^*_{-\alpha}\varphi) = (f, \varphi), \quad N \to \infty, \tag{15}$$

и мы доказали (14) и в случае $p = \infty$.

Итак, (14) имеет место для любой $f \in L_p$ и любого p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Важно заметить, что это свойство сохраняется для любой регулярной в смысле L_p функции f. Чтобы убедиться в этом, достаточно проделать над f приведенные выше выкладки (15).

Наконец, отметим следующие важные для нас неравенства ($f \in L_p$):

$$\| I_r [\sigma_N(f) - \sigma_{2N}(f)] \|_p \leqslant \gamma_r N^{-r} \| \sigma_N(f) - \sigma_{2N}(f) \|_p, \tag{16}$$

$$\| I_r \sigma_1(f) \|_p \leqslant \gamma_r \| \sigma_1(f) \|_p, \tag{17}$$

где r — любое действительное число и γ_r не зависит от N и f.

При $r > 0$ неравенство (17) следует из того, что операция I_r имеет ядро, принадлежащее к L (см. 8.1 (13) и 1.5.1 (5)), а неравенство (16) — из того, что (см. 8.5.1 и 8.6 (6))

$$\widetilde{\sigma_N}(f) - \widetilde{\sigma_{2N}}(f) = 0 \quad \text{на} \quad \Delta_N.$$

При r же отрицательном неравенства (16) и (17) вытекают из неравенства, которое будет доказано в следующем параграфе, если учесть, что

$$\sigma_N(f) - \sigma_{2N}(f) \in \mathfrak{M}_{4N,\,p}.$$

В § 8.8 будет доказано, что неравенства (16), (17) сохраняются для любой регулярной в смысле L_p (обобщенной) функции.

8.7. Неравенство для операции I_{-r} ($r > 0$) над функциями экспоненциального типа

Пусть $g = g_\nu \in \mathfrak{M}_{\nu p}(R_n) = \mathfrak{M}_{\nu p}$, т. е. g есть функция экспоненциального типа ν по каждой переменной x_j, принадлежащая к $L_p = L_p(R_n)$. Применим к ней операцию (см. 1.5.9)

$$I_{-r} g = \widehat{(1 + |x|^2)^{r/2} \tilde{g}}. \tag{1}$$

Основная цель этого параграфа показать, что имеет место неравенство

$$\| I_{-r} g \|_{L_p(R_n)} \leqslant \varkappa_r (1 + \nu)^r \| g \|_{L_p(R_n)} \tag{2}$$

$$(r,\ \nu > 0, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

где $\varkappa_r$ — константа, не зависящая от ν.

Положим $\omega(x) = (1 + |x|^2)^{r/2}$ и для любого $\nu > 0$ введем функцию $\omega_\nu(x)$ периода 2ν (по каждой переменной x_j), определяемую равенством

$$\omega_\nu(x) = (1 + |x|^2)^{r/2} \quad \{ |x_j| \leqslant \nu, \quad j = 1, \ldots, n \}. \tag{3}$$

Пусть

$$\omega_\nu(x) = \sum_k c_k^\nu e^{i \frac{\pi}{\nu} kx} \tag{4}$$

ее ряд Фурье. Мы покажем, что для $r>r_0$, где r_0 достаточно велико, имеет место неравенство

$$\sum_k |c_k^\nu| \leq \varkappa_r (1+\nu^2)^{r/2}, \tag{5}$$

где $\varkappa_r$ не зависит от ν, откуда вследствие теоремы 3.2.1 следует справедливость интерполяционной формулы

$$I_{-r}g = \sum c_k^\nu g\left(x+\frac{k\pi}{\nu}\right), \tag{6}$$

из которой немедленно вытекает неравенство (2):

$$\|I_{-r}g\|_p = \sum_k |c_k^\nu| \, \|g\|_p \leq \varkappa_r (1+\nu^2)^{r/2} \|g\|_p \tag{7}$$

и тот факт, что $I_{-r}g$ — целая функция экспоненциального типа ν (см. 3.5).

При малых r рассуждения, связанные с оценкой суммы $\sum |c_k^\nu|$, становятся более сложными. Но из того факта, что неравенство (2) верно при больших r, мы выведем из общих соображений, что оно верно с соответствующей константой $\varkappa_r$ и для любых $r>0$.

Ограничимся рассмотрением двумерного случая. При $n \geq 2$ рассуждение сложнее, но аналогично.

Имеем $\left(\sum_k{}' = \sum_{k \neq 0}\right)$

$$\sum |c_{kl}^\nu| = |c_{00}^\nu| + \sum_k{}' |c_{k0}^\nu| + \sum_l{}' |c_{0l}^\nu| + \sum_k{}' \sum_l{}' |c_{kl}^\nu| = J_0 + J_1 + J_2 + J_3,$$

$$J_0 = \frac{1}{\nu^2} \int_{-\nu}^{\nu} \int_{-\nu}^{\nu} (1+u^2+v^2)^{r/2} \, du \, dv \leq (1+2\nu^2)^{r/2} \leq c_1 (1+\nu^2)^{r/2},$$

$$J_1 = \frac{1}{\nu^2} \sum_k{}' \left| \int_{-\nu}^{\nu} \int_{-\nu}^{\nu} \omega(u, v) e^{-\frac{ik\pi}{\nu}u} \, du \, dv \right| \leq$$

$$\leq \max_{|v| \leq \nu} \frac{2}{\nu} \sum_k{}' \left| \int_{-\nu}^{\nu} \omega(u, v) e^{-\frac{ik\pi}{\nu}u} \, du \right| =$$

$$= \max_v c \sum_k{}' \frac{1}{k} \left| \int_{-\nu}^{\nu} \frac{\partial\omega}{\partial u} e^{-\frac{ik\pi u}{\nu}} \, du \right| \leq$$

$$\leq \max_v c_2 \left\{ \sum_k{}' \left| \int_{-\nu}^{\nu} \frac{\partial\omega}{\partial u} e^{-\frac{ik\pi u}{\nu}} \, du \right|^2 \right\}^{1/2} \leq \max_v c_3 \left\{ \nu \int_{-\nu}^{\nu} \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2 du \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \max_v c_4 \left\{ \nu \int_0^{\nu} (1+u^2+v^2)^{r-2} u^2 \, du \right\}^{1/2} \leq c_5 (1+\nu^2)^{r/2} \quad (r \geq 2).$$

Здесь мы применили интегрирование по частям и неравенство Парсеваля по переменной u. Аналогично

$$J_3 \leqslant c_5 (1+\nu^2)^{r/2} \qquad (r \geqslant 2).$$

Наконец, применение интегрирования по частям и равенства Парсеваля по обеим переменным u и v дает

$$J_3 = \sum_k{}' \sum_l{}' \frac{1}{kl\pi^2} \left| \int_{-\nu}^{\nu} \int_{-\nu}^{\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} e^{-\frac{i\pi}{\nu}(ku+lv)} du\, dv \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_6 \left\{ \sum{}' \sum{}' \left| \int_{-\nu}^{\nu} \int_{-\nu}^{\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} e^{-\frac{i\pi}{\nu}(ku+lv)} du\, dv \right|^2 \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_7 \left\{ \nu^2 \int_0^{\nu} \int_0^{\nu} u^2 v^2 (1+u^2+v^2)^{r-4} du\, dv \right\}^{1/2} \leqslant c_8 (1+\nu^2)^{r/2}$$

$$(r \geqslant 4).$$

Мы доказали (5) при $r \geqslant 4$.

Пусть теперь r — произвольное положительное число и по-прежнему $g = \mathfrak{M}_{\nu p}$. Подберем натуральное s так, чтобы

$$2^{s-1} < 1+\nu \leqslant 2^s,$$

и представим g в виде (см. 8.6 (11), (12))

$$g(x) = \sigma_{2^s}(g, x) = \sum_{j=0}^{s} q_j,$$

где

$$q_0 = \sigma_{2^0}(g, x), \quad q_j = \sigma_{2^j}(g, x) - \sigma_{2^{j-1}}(g, x) \quad (j = 1, \ldots, s).$$

Пусть число $\rho > r$ достаточно большое, чтобы для него выполнялось неравенство (2). Тогда имеем

$$I_{-r} g = \sum_0^s J_{\rho - r} J_{-\rho} q_j$$

и (пояснения ниже)

$$\|I_{-r} g\|_p < \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{2^{(\rho-r)j}} \|I_{-\rho} q_j\|_p < \sum_{j=0}^{s} \frac{1}{2^{(\rho-r)j}} 2^{\rho j} <$$

$$< \sum_{j=0}^{s} 2^{rj} \leqslant 2^{sj} \leqslant (1+\nu)^r. \tag{8}$$

Первое соотношение в этой цепи имеет место на основании уже установленных неравенств 8.6 (16), (17) ($\rho - r > 0$). Второе соотношение следует из того, что ρ есть такое число, что для него неравенство (2) (при $r = \rho$) верно.

Этим неравенство (2) доказано при любом r. Конечно, приведенные рассуждения дают грубую константу $\varkappa_r$. Но известны случаи, когда можно получить точное (наименьшее) ее значение. Рассмотрим для примера случай $n=1$.

Вследствие четности $\omega(t)=(1+t^2)^{r/2}$ $\left(\theta_i=\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{\nu}{k}\right)$

$$c_{-k}^{\nu}=c_k^{\nu}=\frac{1}{\nu}\int_0^{\nu}\omega(t)\cos\frac{k\pi}{\nu}t\,dt=\frac{1}{\nu}\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\theta_j-\frac{\nu}{2k}}^{\theta_j+\frac{\nu}{2k}}\omega(t)\cos\frac{k\pi}{\nu}t\,dt=$$

$$=\frac{1}{\nu}\sum_{0}^{k-1}(-1)^{j-1}\int_0^{\frac{\nu}{2k}}[\omega(\theta_i+t)-\omega(\theta_i-t)]\sin\frac{k\pi}{\nu}t\,dt. \tag{9}$$

Если $r\geqslant 1$, то подсчеты показывают, что

$$\omega''(t)>0,$$

и потому разность, стоящая в квадратных скобках под интегралом в правой части (9), монотонно возрастает вместе с j. Отсюда следует, что слагаемые в правой части (9) по абсолютной величине возрастают, последовательно меняя знак, и знак c_k совпадает со знаком последнего слагаемого, соответствующего $j=k-1$. Этим доказано, что

$$(-1)^k c_k^{\nu}\geqslant 0 \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots;\ r\geqslant 1). \tag{10}$$

Из четности $\omega_\nu(t)$ следует, что

$$\omega_\nu(t)=c_0^{\nu}+2\sum_1^{\infty}c_k^{\nu}\cos\frac{k\pi}{\nu}t,$$

поэтому в силу (10) имеет место замечательное равенство *)

$$(1+\nu^2)^{r/2}=\omega_\nu(\nu)=c_0^{\nu}+2\sum_1^{\infty}(-1)^k c_k^{\nu}=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k^{\nu}|.$$

Этим доказано, что при $r\geqslant 1$ и $n=1$ в неравенстве (7) можно считать $\varkappa_r=1$. В таком виде эта константа является неулучшаемой *), но на доказательстве этого мы здесь останавливаться не будем.

*) П. И. Лизоркин [8].

8.8. Разложение регулярной функции в ряд по суммам Валле-Пуссена

Если f — обобщенная регулярная в смысле L_p функция, то естественно положить (см. 1.5.10)

$$\sigma_N(f) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2}(V_N * f) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} I_{-\rho}(V_N * I_\rho f), \tag{1}$$

где $\rho > 0$ достаточно большое, чтобы $I_\rho f \in L_p$. Но $V_N \in L$, поэтому $V_N * I_\rho f$ принадлежит к L_p, а в силу того, что функция V_N экспоненциального типа $2N$ (см. 3.6.2), $V_N * I_\rho f \in \mathfrak{M}_{2N,p}$. Применение к этой последней функции операции $J_{-\rho}$ (см. 8.7) не выводит из класса $\mathfrak{M}_{2N,p}$.

Таким образом,

$$\sigma_N(f) \in \mathfrak{M}_{2N,p}, \tag{2}$$

какова бы ни была регулярная (в смысле L_p) функция f.

Далее при любом действительном λ

$$I_\lambda \sigma_N(f) = \sigma_N(I_\lambda f) \tag{3}$$

(см. 1.5.10 (5)). Так как для регулярной функции f $\sigma_N(f) \in \mathfrak{M}_{2N,p}$, то при $r > 0$ для нее, очевидно, выполняются неравенства 8.6 (16) и (17). При $r < 0$ они также имеют место для любой регулярной функции f, потому что для нее $\sigma_N(f) - \sigma_{2N}(f) \in L_p$ и $\tilde{\sigma}_N(f) - \tilde{\sigma}_{2N}(f) = 0$ на Δ_N (см. 8.5.1 и 8.6 (6)).

Нам будет удобно связывать с каждой регулярной функцией следующий ряд:

$$f = \sigma_{2^0}(f) + \sum_{k=1}^{\infty} [\sigma_{2^k}(f) - \sigma_{2^{k-1}}(f)], \tag{4}$$

сходящийся, как мы выяснили, к f слабо. Этот ряд мы еще будем называть *разложением регулярной функции f по суммам типа Валле-Пуссена.*

При любом действительном r к нему законно применять почленно операцию

$$I_r f = I_r \sigma_{2^0}(f) + \sum_{k=1}^{\infty} I_r [\sigma_{2^k}(f) - \sigma_{2^{k-1}}(f)] =$$

$$= \sigma_{2^0}(I_r f) + \sum_{k=1}^{\infty} [\sigma_{2^k}(I_r f) - \sigma_{2^{k-1}}(I_r f)], \tag{5}$$

потому что, если f — регулярная функция, то $I_r f$ тоже, и потому $I_r f$ разлагается в виде слабо сходящегося к ней ее ряда Валле-Пуссена — второго ряда в (5). Члены второго и первого ряда соответственно равны в силу (3).

8.9. Представление функций классов $B^r_{p\theta}$ через ряды Валле-Пуссена. Нулевые классы ($1 \leqslant p \leqslant \infty$)

Мы предполагаем, что $r > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $B^r_{p\theta}(R_n) = B^r_{p\theta}$ $(B^r_{p\infty} = H^r_p)$. Будем исходить из следующего определения класса $B^r_{p\theta}$ (5.6 (5)): функция f принадлежит к $B^r_{p\theta}$, если для нее конечна норма

$$ {}^{5}\|f\| = \|f\|_{B^r_{p\theta}} = \|f\|_p + \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{s\theta r} E_{2^s}(f)_p^\theta\right)^{1/\theta}. \tag{1}$$

Другое эквивалентное этому определение (5.6 (6)) заключается в том, что $f \in B^r_{p\theta}$, если возможно представление f в виде сходящегося к f в смысле L_p ряда

$$ f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s $$

такого, что норма

$$ {}^{6}\|f\| = \|f\|_{B^r_{p\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{s\theta r} \|Q_s\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \tag{2}$$

конечна (здесь Q_s — целые функции экспоненциального типа сферической степени 2^s, линейно зависящие от f).

Покажем, что этим определениям эквивалентно также и следующее.

Функция $f \in B^r_{p\theta}$, если f есть регулярная в смысле L_p (обобщенная) функция и если соответствующий ей ряд Валле-Пуссена (сходящийся к ней слабо)

$$ f = \sum_{s=0}^{\infty} q_s, \tag{3}$$

$$ q_0 = \sigma_{2^0}(f), \quad q_s = \sigma_{2^s}(f) - \sigma_{2^{s-1}}(f) \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

таков, что

$$ {}^{7}\|f\| = \|f\|_{B^r_{p\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \|q_s\|_p^\theta\right)^{1/\theta} < \infty. \tag{5}$$

В самом деле, пусть f — регулярная функция в смысле L_p, для которой имеет место (3) — (5). Тогда q_s есть целая функция экспоненциального типа 2^{s+1} по всем переменным, но тогда и экспоненциального сферического типа $\sqrt{n}\, 2^{s+1}$ (см. 3.2.6) и, следовательно, типа 2^{s+l}, где мы считаем, что l есть натуральное число такое, что $2\sqrt{n} \leqslant 2^l$. Полагая $q_s^* = 0$ $(s = 0, 1, \ldots, l)$ и

$q_{s+1}^*=q_s$ $(s=1,\ 2,\ \ldots)$, получим, что $f=\sum\limits_{s=0}^{\infty} q_s^*$, q_s^* сферического типа 2^s и

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta}\|q_s^*\|_p^\theta\right)^{1/\theta}<\infty,$$

т. е. ${}^6\|f\|<\infty$ и $f\in B_{p\theta}^r$.

Пусть теперь ${}^5\|f\|<\infty$, тогда $f\in L_p$ и (см. 8.6 (13))

$$\begin{gathered}\|q_s\|_p\leqslant\|\sigma_{2^s}(f)-f\|_p+\|\sigma_{2^{s-1}}(f)-f\|_p\leqslant\\ \leqslant 2ME_{2^{s-1}}(f)_p\quad (s=1,\ 2,\ \ldots),\\ \|q_0\|\leqslant M\|f\|_p.\end{gathered}\tag{6}$$

Поэтому ${}^7\|f\|\leqslant{}^5\|f\|$, и мы доказали эквивалентность норм (5) с нормами (1) и (2).

Примечание. Эквивалентность сохраняется, если суммы Валле-Пуссена $\sigma_{2^s}(f)$ заменить соответственно суммами Дирихле $S_{2^s}(f)$ (см. далее 8.10), однако при условии, что $1<p<\infty$. При $p=1,\ \infty$ в неравенствах (6) константа M зависит от s и притом не ограничена при $s\to\infty$.

Введем *нулевой класс* $B_{p\theta}^0$ вообще обобщенных функций.

По определению $f\in B_{p\theta}^0$, *если f регулярна в смысле L_p и если ее ряд Валле-Пуссена* (3) *таков, что*

$$\|f\|_{B_{p\theta}^0}=\left(\sum_{s=0}^{\infty}\|q_s\|_p^\theta\right)^{1/\theta}<\infty.\tag{7}$$

В частности,

$$\|f\|_{H_p^0}=\sup_s\|q_s\|_p<\infty.\tag{8}$$

Приведенные здесь определения (7) и (8) нулевых классов имеют то преимущество, что они не зависят от определений соответствующих классов для положительных значений r. Но возможно такое определение $B_{p\theta}^0$: *это есть класс функций f вида $I_{-r}\varphi$, где $\varphi\in B_{p\theta}^r$, а $r>0$ — любое число.* Заметим еще, что аппарат, с помощью которого были даны исходные определения H- и B-классов для положительных r, по-видимому, не приспособлен для непосредственных обобщений на случай $r\leqslant 0$.

8.9.1. Изоморфизм классов $B_{p\theta}^r$ для разных r.

Теорема. *Операция I_r $(r>0)$ осуществляет изоморфизм*

$$I_r(B_{p\theta}^0)=B_{p\theta}^r\qquad (1\leqslant p,\ \theta\leqslant\infty,\ B_{p\infty}^r=H_p^r).\tag{1}$$

Равенство (1) *дает представление функций класса $B_{p\theta}^r$ через свертку ядра Бесселя — Макдональда G_r с функциями класса $B_{p\theta}^0$, вообще говоря, обобщенными.*

Доказательство. Пусть $f \in B^r_{p\theta}$, тогда f есть регулярная в смысле L_p функция, разлагающаяся в ряд

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} q_s, \quad q_0 = \sigma_{2^0}(f), \quad q_s = \sigma_{2^s}(f) - \sigma_{2^{s-1}}(f) \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где

$$\|f\|_{B^0_{p\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \|q_s\|^{\theta}\right)^{1/\theta} < \infty. \tag{2}$$

Но

$$F = I_r f$$

есть также регулярная функция, разлагающаяся в ряд

$$F = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s, \tag{3}$$

$$Q_0 = \sigma_{2^0}(F), \quad Q_s = \sigma_{2^s}(F) - \sigma_{2^{s-1}}(F) \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

При этом

$$\|Q_s\|_p = \|I_r q_s\|_p \leqslant c \cdot 2^{-rs} \|q_s\|_p.$$

Следовательно,

$$\|F\|_{B^r_{p\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{s\theta r} \|Q_s\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \leqslant c \left(\sum_{s=0}^{\infty} \|q_s\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} = \|f\|_{B^0_{p\theta}}. \tag{4}$$

Наоборот, если $F \in B^r_{p\theta}$, то для F существует разложение (3) такое, что

$$\|F\|_{B^r_{p\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \|Q_s\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} < \infty,$$

а для $f = I_{-r} F$ — разложение (1) и (см. 8.6 (16))

$$\|q_s\|_p = \|I_{-r} Q_s\|_p \leqslant c \cdot 2^{sr} \|Q_s\| \quad (s = 0, 1, \ldots),$$

поэтому

$$\|f\|_{B^0_{p\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \|q_s\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \leqslant c \|F\|_{B^r_{p\theta}}. \tag{5}$$

Теорема доказана.

8.9.2. **Классы $B^r_{p\theta}$ при $r < 0$.** Понятие регулярной функции и ее разложения в ряд Валле-Пуссена дает возможность расширить классы $B^r_{p\theta}$ на отрицательные r. Естественно считать, что *функция $f \in B^r_{p\theta}$, где r — произвольное действительное число* *если f регулярна (в смысле L_p) и ее разложение в ряд Валле-Пуссена*

$$f=\sum_{s=0}^{\infty} q_s=\sigma_{2^0}(f)+\sum_{s=1}^{\infty}\left[\sigma_{2^s}(f)-\sigma_{2^{s-1}}(f)\right] \tag{1}$$

таково, что

$$\|f\|_{B^r_{p\theta}}=\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta}\|q_s\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta}<\infty. \tag{2}$$

Легко видеть, рассуждая, как в предыдущем параграфе, что при любых действительных r и r_1 операция I_{r_1-r} осуществляет изоморфизм

$$I_{r_1-r}(B^r_{p\theta})=B^{r_1}_{p\theta} \qquad (1\leqslant p,\ \theta\leqslant\infty;\ B^r_{p\infty}=H^r_p). \tag{3}$$

8.10. Ряды по суммам Дирихле ($1<p<\infty$)

Если p удовлетворяет неравенствам $1<p<\infty$, то изложенная выше теорема может быть развита на основе ядер Дирихле

$$D_N(t)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin Nt_j}{t_j}, \tag{1}$$

являющихся аналогами периодических сумм Дирихле.

Ядра $D_N(z)$ обладают следующими свойствами:

1) $D_N(z)$ — целая функция экспоненциального типа N по каждой переменной z_j ($j=1, \ldots, n$), принадлежащая к L_p, где $1<p\leqslant\infty$.

2) $$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2}\tilde{D}_N=(1)_{\Delta_N}=\begin{cases}1 & \text{на } \Delta_N=\{|x_j|<N\},\\ 0 & \text{вне } \Delta_N\end{cases} \tag{2}$$

(см. 1.5.7 (10)).

3) $$\frac{1}{\pi^n}\int D_N(t)\,dt=1 \qquad (N>0). \tag{3}$$

4) Свертка

$$S_N(f,\ x)=D_N*f=\frac{1}{(2\pi)^n}\int D_N(x-t)f(t)\,dt$$

для $f\in L_p$ ($1<p<\infty$) есть целая функция экспоненциального типа N по каждой переменной (см. 3.6.2), принадлежащая к L_p (см. 1.5.7 (9), (13); 3.6.2; $S_N(f)\in\mathfrak{M}_{Np}$). При этом

$$\|D_N*f\|_p\leqslant\varkappa_p\|f\|_p, \tag{4}$$

где $\varkappa_p$ зависит только от p. При $p=1, \infty$ этот факт перестает быть верным.

5) Если $\omega_N \in \mathfrak{M}_{Np}$, то

$$S_N(\omega_N) = \omega_N. \tag{5}$$

Тот факт, что

$$D_{N_0} * \omega_N = \frac{1}{(2\pi)^n} \int D_{N_0}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t})\, \omega_N(\boldsymbol{t})\, d\boldsymbol{t} = \omega_N(\boldsymbol{x}) \quad (N < N_0), \tag{6}$$

следует из 8.5.2. Далее

$$\left| \frac{\sin N_0 t_j}{t_j} \right| \leqslant \varphi(t_j) = \begin{cases} N_1, & |t_j| \leqslant 1, \\ \frac{1}{|t_j|}, & |t_j| > 1 \end{cases} \qquad (N < N_0 < N_1),$$

поэтому

$$|D_{N_0}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t})\, \omega_N(\boldsymbol{t})| \leqslant \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t})\, |\omega_N(\boldsymbol{t})| \in L(R_n), \quad \varphi(\boldsymbol{t}) = \prod_{j=1}^{n} \varphi(t_j)$$

$\left(\omega_N \in L_p(R_n),\ \varphi \in L_q(R_n),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. Кроме того, для всех $\boldsymbol{t}$ $D_{N_0}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) \to D_N(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t})$ $(N_0 \to N)$. Следовательно, по теореме Лебега в (6) можно заменить N_0 на N.

6) $\widetilde{D_N * f} = \tilde{f}$ на Δ_N (см. (2) и 8.5.1).

Из (4) и (5) следует, что если $f \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ и ω_N — ее приближающая в смысле L_p наилучшая функция класса $\mathfrak{M}_{Np}$, то $(1 < p < \infty)$

$$\begin{aligned} \|f - S_N(f)\|_p \leqslant \|f - \omega_N\|_p + \|S_N(\omega_N) - f\|_p \leqslant \\ \leqslant (1 + \varkappa_p)\, E_N(f)_p \to 0 \quad (N \to \infty). \end{aligned} \tag{7}$$

В частности, таким образом,

$$S_N(f) \to f \ (N \to \infty) \text{ слабо.} \tag{8}$$

Рассуждая, как при доказательстве 8.6 (14) (см. 8.6 (15)), где V_N надо заменить на D_N, получим, что свойство (8) сохраняется для любой регулярной в смысле L_p функции.

В таком случае регулярную в смысле L_p функцию f можно разложить в ряд

$$f = S_{2^0}(f) + \sum_{k=1}^{\infty} [S_{2^k}(f) - S_{2^{k-1}}(f)], \tag{9}$$

сходящийся к ней слабо (аналог 8.8 (4)). К этому ряду законно почленное применение операции I_ρ, где ρ — любое действительное число. Важно отметить, что k-й член ряда (9) есть обычная функция класса $\mathfrak{M}_{2^k p}$, кроме того, важно, что

$$\widetilde{S_{2^k}(f)} - \widetilde{S_{2^{k-1}}(f)} = 0 \text{ на } \Delta_{2^{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

и имеют место неравенства

$$\| I_r [S_N(f) - S_{2N}(f)] \|_p \leqslant \lambda_r N^{-r} \| S_N(f) - S_{2N}(f) \|_p, \tag{10}$$

$$\| I_r S_1(f) \| \leqslant \lambda_r \| S_1(f) \|_p \tag{11}$$

для любых действительных r и регулярной в смысле L_p функции f.

Рассуждая, как в 8.9, где надо всюду заменить $\sigma_l(f)$ на $S_l(f)$, получим на основании сказанного следующую теорему.

8.10.1. Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *и* r — *произвольное действительное число. Тогда* $f \in B^r_{p\theta}$ $(B^r_{p\infty} = H^r_p)$ *тогда и только тогда, когда* f *регулярна в смысле* L_p *и ее (сходящийся к ней слабо) ряд*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_s, \tag{1}$$

$$\beta_0 = S_{2^0}(f), \quad \beta_s = S_{2^s}(f) - S_{2^{s-1}}(f) \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

таков, что

$$\| f \|_{B^r_{p\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \| \beta_s \|_p^\theta \right)^{1/\theta} < \infty, \tag{2}$$

$$\| f \|_{H^r_p} = \| f \|_{B^r_{p\infty}} = \sup_s 2^{sr} \| \beta_s \|_p < \infty \tag{3}$$

(см. примечание в 8.9).

Докажем лемму, дополняющую результаты 1.5.6 (в тех же обозначениях).

8.10.2. Лемма. *Пусть* f *есть регулярная в смысле* L_p $(1 < p < \infty)$ *обобщенная функция, для которой*

$$\left\| \left\{ \sum_k | \delta_k(f) |^2 \right\} \right\|_p^{1/2} < \infty. \tag{1}$$

Тогда $f \in L_p$.

Доказательство. Для произвольного числа $N > 0$ определим множество целочисленных векторов k:

$$\Omega_N = \{ k : \ |k_j| \leqslant N; \ j = 1, \ldots, n \}$$

и сумму $f_N = \sum_{k \in \Omega_N} \delta_k$, $\delta_k = \delta_k(f)$. Так как f регулярна, то $f_N \to f$ $(N \to \infty)$ слабо. С другой стороны, в силу (1) f_N сходится в смысле L_p:

$$\| f_{N'} - f_N \|_p < c \left\| \left(\sum_{k \in \Omega_{N'} \setminus \Omega_N} | \delta_k |^2 \right)^{1/2} \right\|_p \to 0 \qquad (N, N' \to \infty).$$

Поэтому f_N стремится к f в смысле L_p и $f \in L_p$.

Аналогично доказывается (обозначения см. в 1.5.6.1)

8.10.3. Теорема. *Если функция $f(x)$ от одной переменной — регулярная в смысле $L_p(-\infty, \infty)$, $1<p<\infty$, обобщенная функция, для которой*

$$\left\| \left\{ \sum_{l>0} |\beta_l(f)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p < \infty, \tag{1}$$

то она принадлежит к L_p.

8.10.4. Пример. Ниже приводится пример функции $g(x) \in L_p(-\infty, \infty) = L_p$ ($2<p<\infty$) целой экспоненциального типа 1, преобразование Фурье которой есть обобщенная функция, не суммируемая ни на каком интервале $(a, b) \subset (-1, +1)$.

Пусть

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \alpha_k & \left(2^k - \frac{1}{2} < |x| < 2^k + \frac{1}{2}\right), \\ 0 & \text{(для остальных } k) \qquad (k=1, 2, \ldots), \end{cases} \tag{1}$$

где числа $\alpha_k > 0$ такие, что

$$\sum_1^\infty \alpha_k^2 = \infty, \quad \sum_1^\infty \alpha_k^p < \infty \qquad (2<p<\infty). \tag{2}$$

Положим еще $f_N = \sum_1^N \psi_k$ и

$$f(x) = \sum_1^\infty \psi_k(x). \tag{3}$$

Ряд (3), очевидно, сходится в смысле $L_p = L_p(-\infty, \infty)$, а следовательно, и в смысле S', и $f \in L_p \subset S'$, $\|f\|_p = \left(2\sum |\alpha_k|^p\right)^{1/p} < \infty$. Пусть еще

$$\lambda_k(x) = \alpha_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{2^k - \frac{1}{2}}^{2^k + \frac{1}{2}} \frac{\sin xy}{y}\, dy \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Легко проверить (см. 1.5.7 (10)), что

$$\lambda_k'(x) = 2\alpha_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2^k x \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \alpha_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(e^{i2^k x} + e^{-i2^k x}\right) \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \tilde{\psi}_k(x).$$

Положим еще

$$F_N(x) = \sum_1^N \lambda_k(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \sum_1^N \psi_k(y) \frac{\sin xy}{y}\, dy,$$

$$F(x) = \sum_1^\infty \lambda_k(x).$$

Тогда

$$|F_N(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left|\frac{\sin xy}{y}\right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_p \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin xy}{y}\right|^q dy\right)^{1/q} \leqslant \|f\|_p |x|^{1-\frac{1}{q}}, \tag{4}$$

где константы, входящие в эти неравенства, не зависят от N, $\|f\|_p$ и x. Поэтому

$$|F(x)-F_N(x)| \leqslant c \left\|\sum_N^{\infty} \psi_k\right\|_p |x|^{1-\frac{1}{q}} \tag{5}$$

и $F_N(x) \to F(x)$ равномерно на любом конечном отрезке. Но тогда $F(x)$ — непрерывная функция. Из (4), (5) легко также следует, что $F \in S'$ и $F_N \to F\ (S')$.

В таком случае

$$F' = \sum_1^{\infty} \lambda_k' = \sum_1^{\infty} \tilde{\psi}_k = \tilde{f},$$

где все операции (дифференцирования, суммирования и преобразования Фурье) понимаются в смысле S'.

Можно доказать (доказательство см. в книге Зигмунда [2], ч. II, гл. XV, в конце п. 3.14), что функция $F(x)$ (понимаемая как обычная функция) не имеет производной почти всюду. Но тогда обобщенная производная F' на любом интервале (a, b) не есть суммируемая функция, иначе говоря, каков бы ни был интервал (a, b), не существует суммируемой на (a, b) функции $\alpha(x)$ такой, что

$$(F', \varphi) = \int_a^b \alpha(x) \varphi(x)\, dx \tag{6}$$

для всех функций $\varphi \in S$, имеющих носитель на (a, b). В самом деле, если бы такая функция α существовала, то, интегрируя по частям правую часть (6), получили бы равенство

$$\int_a^b F(x) \varphi'(x)\, dx = \int_a^b \int_a^x \alpha(t)\, dt\, \varphi'(x)\, dx,$$

т. е.

$$\int_a^b \psi(x) \varphi'(x)\, dx = 0, \qquad \psi(x) = F(x) - \int_a^x \alpha(t)\, dt,$$

какова бы ни была функция $\varphi \in S$ с носителем на (a, b). Но тогда $\psi(x) \doteq C$ есть константа и F была бы дифференцируемой почти всюду на (a, b). Тот факт, что $\psi = \text{const}$, можно доказать следующим образом. Если бы это было не так, то можно было бы подобрать такую константу c_1, что функция $\lambda(x) = \psi(x) + c_1$ принимала бы значения разных знаков в некоторых двух точках. Пусть для определенности $a < x_1 < x_2 < b$ и $\lambda(x_1) < 0 < \lambda(x_2)$. Для рассматриваемых функций φ, очевидно,

$$\int_a^b \lambda(x) \varphi'(x)\, dx = 0,$$

потому что $\int_a^b \varphi'(x)\,dx = 0$. Подберем $\delta > 0$ настолько малым, что $\lambda(x) < 0$ на $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ и $\lambda(x) > 0$ на $(x_2 - \delta, x_2 + \delta)$, и пусть $\omega(x)$ есть непрерывная на (a, b) функция, равная нулю, для $x < x_1 - \frac{\delta}{2}$ и $x > x_2 + \frac{\delta}{2}$ и такая, что $\omega'(x) = -1$ на $\left(x_1 - \frac{\delta}{2}, x_1 + \frac{\delta}{2}\right)$, $\omega'(x) = 0$ на $\left(x_1 + \frac{\delta}{2}, x_2 - \frac{\delta}{2}\right)$, $\omega'(x) = 1$ на $\left(x_2 - \frac{\delta}{2}, x_2 + \frac{\delta}{2}\right)$. Ее ε-усреднение $\omega_\varepsilon(x)$ принадлежит, очевидно, к классу рассматриваемых здесь функций φ, и потому

$$0 = \int_a^b \lambda(x)\,\omega_\varepsilon'(x)\,dx \to \int_a^b \lambda(x)\,\omega'(x)\,dx > 0 \qquad (\varepsilon \to 0),$$

и мы пришли к противоречию.

Положим

$$g(x) = \widehat{(1)_\Delta \tilde{f}} = \frac{1}{\pi} \int D_1(x - t) f(t)\,dt, \qquad \Delta = \{|x| < 1\}.$$

Так как $f \in L_p$, то функция $g \in L_p$ и есть целая экспоненциального типа 1. Ее преобразование Фурье

$$\tilde{g} = (1)_\Delta \tilde{f}$$

есть обобщенная функция, равная $\tilde{f}$ на Δ. Это значит, что

$$(\tilde{g}, \varphi) = (\tilde{f}, \varphi)$$

для всех $\varphi \in S$ с носителем иа Δ. Но тогда $\tilde{f}$, а следовательно и $\tilde{g}$ не представляется ни на одном интервале $(a, b) \subset \Delta$ суммируемой функцией.

ГЛАВА 9

ЛИУВИЛЛЕВСКИЕ КЛАССЫ L

9.1. Введение

Лиувиллевские классы мы обозначаем через $L_p^r(R_n)$ $(r \geqslant 0$, $L_p^0(R_n) = L_p(R_n))$ в изотропном случае и через $L_p^{\mathbf{r}}(R_n)$ — в анизотропном. При целых r, $\mathbf{r}$ они совпадают с классами Соболева W:

$$W_p^r(R_n) = L_p^r(R_n) \quad (r = 0,\ 1,\ \ldots),$$

$$W_p^{\mathbf{r}}(R_n) = L_p^{\mathbf{r}}(R_n) \quad (r_j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ j = 1,\ \ldots,\ n).$$

Возможны обобщения на случай, когда p имеет векторный характер.

Классы L^r, $L^{\mathbf{r}}$ при дробных r, $\mathbf{r}$ являются наиболее естественными продолжениями классов W^r, $W^{\mathbf{r}}$.

Для ориентировки мы уже сейчас отметим их основные свойства.

Функции $F \in L_p^r(R_n)$ определяются в виде уже известных читателю интегралов

$$F(\boldsymbol{x}) = I_r f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int G_r(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}|) f(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u}, \quad f \in L_p(R_n), \qquad (1)$$

где (см. 8.1) G_r — ядро Бесселя — Макдональда. Если r — натуральное, то (см. 8.2) F пробегает класс $W_p^r(R_n)$, когда f пробегает $L_p(R_n)$, при этом имеет место изоморфизм $I_r L_p(R_n) = W_p^r(R_n)$. Для дробных r равенство (1) ставится в определение класса $L_p^r(R_n)$ (по крайней мере в этой книге, см. 9.2.3), т. е. мы считаем, что $F \in L_p^r(R_n)$ тогда и только тогда, когда $F = I_r f$, где $f \in L_p(R_n)$, и полагаем

$$\|F\|_{L_p^r(R_n)} = \|f\|_{L_p(R_n)}.$$

Для любого $r > 0$ $L_p^r \subset H_p^r$, больше того, «с точностью до любых малых ε» классы L_p^r, так же как B_p^r, совпадают с H_p^r, а именно

$$H_p^{r+\varepsilon} \to L_p^r \to H_p^r.$$

Поэтому «с точностью до ε» для классов L_p^r справедливы те же теоремы вложения, что и для классов H_p^r. Например, $(0<m<n,$ $1 \leqslant p \leqslant q < \infty,\ r - n/p + m/q > \varepsilon > 0)$

$$L_p^r(R_n) \to H_p^r(R_n) \to H_q^{r-\frac{n}{p}+\frac{m}{q}}(R_m) \to L_q^{r-\frac{n}{p}+\frac{m}{q}-\varepsilon}(R_m).$$

Справедливы вложения (см. 9.3, $B_p^r = B_{pp}^r$)

$$B_p^r \to L_p^r \quad (1 \leqslant p \leqslant 2), \qquad L_p^r \to B_p^r \quad (2 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{2}$$

Совпадение классов B и L имеет место только при $p=2$ $(B_2^r = L_2^r)$. При $p \neq 2$ они существенно отличаются друг от друга.

Классы L_p^r объединяются единым интегральным представлением через функции $f \in L_p$. Классы B_p^r объединяются этим же представлением, но через функции $f \in B_p^0$, где B_p^0 есть класс, существенно отличный от L_p, при $p > 2$ он содержит в себе обобщенные функции (см. 8.9.1).

Семейство классов L_p^r замечательно еще тем, что оно замкнуто по отношению к таким теоремам вложения, где происходит переход от одной метрики к другой. Так, имеет место вложение разных метрик

$$L_p^r(R_n) \to L_q^\rho(R_n) \tag{3}$$

$$\left(\rho = r - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \geqslant 0,\ 1 < p < q < \infty\right).$$

Другой, более общий случай представляет собой вложение

$$L_p^r(R_n) \to L_q^\rho(R_m) \tag{4}$$

$$\left(\rho = r - \frac{n}{p} + \frac{m}{q} \geqslant 0, \qquad 1 < p < q < \infty\right),$$

где наряду с изменением измерения происходит переход от одной метрики к другой. Что же касается теорем вложения, где изменяется число измерений без изменения метрики, то соответствующая прямая теорема выглядит так $\left(1 \leqslant m < n,\ 1 < p < \infty,\ \rho = \right.$ $\left. = r - \frac{n-m}{p} > 0\right)$:

$$L_p^r(R_n) \to B_p^\rho(R_m), \tag{5}$$

а обратная так:

$$B_p^\rho(R_m) \to L_p^r(R_n). \tag{6}$$

На основании сказанного выше B можно заменить на L при $p=2$ в (5) и (6), кроме того, в (5), если $1<p<2$, и в (6), если $2<p<\infty$. В остальных случаях такая замена неверна. Таким образом, теорема вложения разных измерений вообще не замкнута по отношению к классам L.

Имеет место следующая ситуация:

$$B_p^r(R_n) \to L_p^r(R_n) \to B_p^\rho(R_m) \to B_p^r(R_n) \qquad (1<p\leqslant 2),$$
$$L_p^r(R_n) \to B_p^r(R_n) \to B_p^\rho(R_m) \to L_p^r(R_n) \qquad (2\leqslant p<\infty),$$

показывающая, что два различных класса $B_p^r(R_n)$ и $L_p^r(R_n)$ функций, определенных на R_n, дают одно и то же множество следов на R_m (класс $B_p^\rho(R_m)$).

Следует отметить, что вложения

$$B_p^r(R_n) \rightleftarrows B_p^\rho(R_m)$$

при указанных m, n, p, r, ρ можно получить как следствие вложений (5) и (6). В самом деле,

$$B_p^r(R_n) \rightleftarrows L_p^{r+\frac{1}{p}}(R_{n+1}) \rightleftarrows B_p^\rho(R_m).$$

Факты, которые мы здесь изложили, являются характерными. В анизотропном случае имеют место подобные же факты. Они также будут доказаны в этой главе.

9.2. Определения и основные свойства классов L_p^r и L_p^r

Пусть $1\leqslant m\leqslant n$, $x=(u, y)$, $u=(x_1, \ldots, x_m)\in R_m$, $y=(x_{m+1}, \ldots, x_n)\in R_{n-m}$. Для функций $\varphi(x)=\varphi(u, y)$ класса S (см. 1.5) будем обозначать их преобразования Фурье (прямое и обратное) по переменной u через $\tilde\varphi^u$, $\hat\varphi^u$ ($\tilde\varphi^u=\tilde\varphi$, $\hat\varphi^u=\hat\varphi$ при $m=n$). Например,

$$\tilde\varphi^u(u, y)=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int \varphi(t, y)\, e^{-itu}\,dt. \tag{1}$$

Операции $\tilde\varphi^u$, $\hat\varphi^u$ отображают S на S и слабо непрерывны (см. далее 9.2.1), поэтому для произвольных обобщенных функций $f\in S'$ (определенных на R_n) соответствующие преобразования Фурье $\tilde f^u$, $\hat f^u$ корректно определяются функционалами

$$(\tilde f^u, \quad)=(f, \tilde\varphi^u),$$
$$(\hat f^u, \varphi)=(f, \hat\varphi^u).$$

Если $\lambda(u)$ есть бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, зависящая только от u, то для $f\in S'$

$$\widehat{\lambda\tilde f^u}^u=\widehat{\lambda\tilde f},\quad \widetilde{\lambda\hat f^u}^u=\widetilde{\lambda\hat f},$$

что непосредственно следует из справедливости этих равенств для $\varphi \in S$.

Введем операцию

$$F = I_{ur}f = \widetilde{(1+|u|^2)^{-r/2}\hat{f}^u} = \widetilde{(1+|u|^2)^{-r/2}\hat{f}} \tag{2}$$

$\left(|u|^2 = \sum_1^m u_j^2,\ I_{ur} = I_r \text{ при } m=n,\ f \in S'\right)$, соответствующую действительному числу r, отображающую S' на S' взаимно однозначно. При $m=1$, когда $R_m = R_{x_j}$ есть ось координат x_j, будем обозначать ее еще через $I_{x_j r}$.

Для функций $f \in L_p = L_p(R_n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ эта операция при $r > 0$ сводится к свертке

$$F = I_{ur}f = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{R_m} G_r(|u-t|_m) f(t, y)\, dt \qquad \left(|t|_m^2 = \sum_1^m t_j^2\right), \tag{3}$$

где G_r — ядро Бесселя — Макдональда, что доказывается следующим образом.

Для $f \in S'$ имеют место равенства

$$\tilde{\hat{f}}(x) = \hat{f}(-x) = \widetilde{\hat{f}(-x)},$$

которые следуют с помощью обычных «перебросок» из того, что они, очевидно, верны для любых $\varphi \in S$. Далее, если $\hat{\Lambda} \in L$ и $f \in L_p$, то

$$\widetilde{\Lambda \hat{f}} = \widetilde{\Lambda \hat{f}(-u)}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{\Lambda}(-x-u) f(-u)\, du.$$

В частности, если $\hat{\Lambda}(u) = \hat{\Lambda}(-u)$, то $\widehat{\Lambda \tilde{f}} = \widetilde{\Lambda \hat{f}}$. Поэтому для $f \in L_p$, $\varphi \in S$, учитывая, что $G_r(|u|_m) = G_r(|-u|_m) \in L_p(R_m)$, получим

$$\begin{aligned}(I_{ur}f, \varphi) &= \left(f, \overline{(1+|u|^2)^{-r/2}\hat{\varphi}}\right) = \\ &= \left(f, \widetilde{(1+|u|^2)^{-r/2}\tilde{\varphi}}\right) = \left(f, \widetilde{(1+|u|^2)^{-r/2}\tilde{\varphi}^{u}}\right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int f(u, y)\, du\, dy \int G_r(|u-t|_m)\, \varphi(t, y)\, dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int \varphi(x)\, dx \int G_r(|t-u|_m) f(u, y)\, du \quad (dx = dt\, dy),\end{aligned}$$

что и доказывает (3).

Введем функциональные классы $L_{up}^r = L_{up}^r(R_n)$,

$$L_{x_j p}^r = L_{x_j p}^r(R_n), \quad L_{up}^r = L_{up}^r(R_n), \quad \boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m).$$

По определению *функция* $F \in S'$ *принадлежит к* $L^r_{up} = L^r_{up}(R_n)$, $L^r_{x_jp} = L^r_{x_jp}(R_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $-\infty < r < \infty$, *если она представима соответственно в виде*

$$F = I_{ur}f, \qquad F = I_{x_jr}f,$$

где $f \in L_p$. *При этом вводятся нормы* $\|F\|_{L^r_{up}} = \|f\|_p$, *в частности,* $\|F\|_{L^r_{x_jp}} = \|f\|_p$, *тривиальным образом указывающие на изоморфизмы*

$$I_{ur}(L_p) = L^r_{up}, \quad I_{x_jr}(L_p) = L^r_{x_jp},$$

осуществляемые операциями I_{ur}, I_{x_jr}. *Класс* $L^{\boldsymbol r}_{up} = L^{\boldsymbol r}_{up}(R_n)$, *соответствующий произвольному действительному вектору* $\boldsymbol r$, *определяется как пересечение*

$$L^{\boldsymbol r}_{up} = \bigcap_{j=1}^{m} L^{r_j}_{x_jp}$$

с нормой

$$\|f\|_{L^{\boldsymbol r}_{up}} = \sum_{j=1}^{m} \|f\|_{L^{r_j}_{x_jp}}.$$

В силу сказанного выше класс L^r_{up} можно определить еще как класс функций, представимых (почти для всех $\boldsymbol y$) в виде интеграла (3), где $f(\boldsymbol x) = f(\boldsymbol u, \boldsymbol y) \in L_p(R_n)$.

При условии $1 < p < \infty$

$$L^r_{up} = L^{r, \ldots, r}_{up} \qquad (r \geqslant 0), \tag{4}$$

$$L^r_{up} = W^r_{up} = W^{r, \ldots, r}_{up} \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

$$L^{\boldsymbol r}_{up} = W^{\boldsymbol r}_{up} \qquad (\boldsymbol r = (r_1, \ldots, r_m), \tag{6}$$

r_i — целые неотрицательные).

Равенства (5) и (6) показывают, что классы L^r_{up}, $L^{\boldsymbol r}_{up}$ можно рассматривать как распространения на любые действительные r, $\boldsymbol r$ соболевских классов W^r_{up}, $W^{\boldsymbol r}_{up}$. Но надо иметь в виду, что функции классов L^r_{up}, $L^{\boldsymbol r}_{up}$ определены нами на всем пространстве R_n, в то время как функции соболевских классов можно задавать на произвольных открытых множествах $g \subset R_n$.

Первое равенство (5) при $m = n$ доказано в 8.2. Если же $m < n$, то пусть пока $f \in S$ (класс основных функций). Тогда $f \in W^r_p(R_m)$ для любого $\boldsymbol y$. Очевидно также, что $f \in L^r_p(R_m)$ для любого $\boldsymbol y$, ведь функция $f(\boldsymbol u, \boldsymbol y)$ по $\boldsymbol u$ принадлежит к $S = S(R_m)$, а операция I_r (по $\boldsymbol u$) отображает ее в функцию класса $S(R_m)$, таким образом, в $L_p(R_m)$. Поэтому в силу уже доказанного в 8.2

$$c_1\|f\|_{W_p^r(R_m)} \leqslant \|I_{u(-r)}f\|_{L_p(R_m)} \leqslant c_2\|f\|_{W_p^r(R_m)}, \tag{7}$$

где c_1, c_2 не зависят от f и y.

Возведение этих неравенств в степень p, применение элементарных неравенств *), интегрирование по y и повторное применение этих неравенств приводит к неравенствам

$$c'\|f\|_{W_{up}^r} \leqslant \|I_{u(-r)}f\|_{L_p} \leqslant c''\|f\|_{W_{up}^r} \tag{8}$$

пока для функций $f \in S$.

Если теперь $f \in W_{up}^r(R_n)$, то определяем последовательность финитных (принадлежащих к S') функций f_l $(l=1, 2, \ldots)$ таких, что $\|f_l - f\|_{W_{up}^r(R_n)} \to 0$ $(l\to\infty)$.

Из (8) следует, что

$$c'\|f_k - f_l\|_{W_{up}^r} \leqslant \|\varphi_k - \varphi_l\|_{L_p} \leqslant$$
$$\leqslant c''\|f_k - f_l\|_{W_{up}^r} \to 0 \quad (k,\ l\to\infty) \quad (\varphi_k = I_{u(-r)}f_k),$$

и в силу полноты W_{up}^r и того факта, что (см. (3))

$$f_l(u,\ y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int G_r(|u-t|_m)\,\varphi_l(t,\ y)\,dt,$$

где $G_r(|u|_m) \in L_p(R_m)$, имеет место второе неравенство (8), где

$$\|I_{u(-r)}f\|_{L_p} = \|f\|_{L_{up}^r}.$$

Если же $f \in L_{up}^r$ и $I_{u(-r)}f = \varphi$, то можно подобрать последовательность финитных (принадлежащих к S') функций φ_l таких, что $\|\varphi_k - \varphi\|_{L_p} \to 0$, поэтому в силу первого неравенства (8) и полноты W_{up}^r получим первое неравенство (8). Этим доказано первое равенство (5).

Из первого равенства (5), примененного к каждой оси R_{x_j} $(j=1, \ldots, n)$, очевидно, следует (6).

Переходим к доказательству (4). Пусть $F \in L_{up}^{r,\ldots,r}$ $(r \geqslant 0)$, тогда

$$\psi = \widehat{\sum_{j=1}^{m}(1+u_j^2)^{r/2}\tilde{F}} \in L_p, \qquad \|\psi\|_p \leqslant \|F\|_{L_{up}^{r,\ldots,r}}$$

*) Имеются в виду неравенства

$$c\left|\sum a_k\right|^p \leqslant \sum a_k^p \leqslant c_1\left|\sum a_k\right|^p,$$

где числа $a_k > 0$ и c, c_1 зависят только от p и количества (конечного) слагаемых под знаком суммы.

и, так как функция

$$(1+|u|^2)^{r/2}\left(\sum_{j=1}^{m}(1+u_j^2)^{r/2}\right)^{-1}$$

есть множитель Марцинкевича (см. 1.5.5, пример 9 при $r=r_j$, $\sigma=1$; учесть здесь и ниже примечание 1.5.4.1), то

$$I_{u(-r)}F=\widehat{(1+|u|^2)^{r/2}\tilde{F}}\in L_p,$$

$$\|F\|_{L_{up}^r}=\|I_{u(-r)}F\|_p\leqslant\|\psi\|_p\leqslant\|F\|_{L_{up}^{r,\ldots,r}},$$

откуда следует, что $L_{up}^{r,\ldots,r}\to L_{up}^r$. Наоборот, если $F\in L_{up}^r$, то

$$f=\widehat{(1+|u|^2)^{r/2}\tilde{F}}\in L_p,\qquad |f|_p=\|F\|_{L_{up}^r}$$

и, так как функция

$$(1+|u|^2)^{-r/2}(1+u_j^2)^{r/2}\qquad(r\geqslant 0)$$

есть множитель Марцинкевича (см. 1.5.5, пример 3), то

$$f_j=\widehat{(1+u_j^2)^{r/2}\tilde{F}}\in L_p,\qquad\|f_j\|_p\leqslant\|f\|_p=\|F\|_{L_{up}^r},$$

поэтому $L_{up}^r\to L_{up}^{r,\ldots,r}$, и (6) доказано.

Из сказанного следует

$$W_{up}^r\rightleftarrows L_{up}^r\rightleftarrows L_{up}^{r,\ldots,r}\rightleftarrows W_{up}^{r,\ldots,r}\qquad(r=0,\ 1,\ \ldots),$$

что влечет второе равенство (5). Нетривиальная его часть есть вложение $W_{up}^{r,\ldots,r}\to W_{up}^r$ $(1<p<\infty)$, выражающее, что если функция $f\in L_p$ и имеет несмешанные производные порядка r по переменным $x_1,\ \ldots,\ x_m$ в отдельности, принадлежащие к L_p, то она имеет также любые смешанные производные порядка r по указанным переменным, принадлежащие также к L_p. Существуют примеры, показывающие, что это вложение при $p=1$ и $p=\infty$ не имеет места (Б. С. Митягин [1]).

9.2.1. Слабая непрерывность операции $\tilde{\varphi}^u$ $(\varphi\in S)$ вытекает из следующих соображений. Будем писать $\tilde{\varphi}$ вместо $\tilde{\varphi}^u$. Зададим натуральное l и целочисленный неотрицательный вектор $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\rho}$, где $\boldsymbol{s}=(k_1,\ \ldots,\ k_m,\ 0,\ldots,\ 0)$, $\boldsymbol{\rho}=(0,\ \ldots,\ 0,\ k_{m+1},\ \ldots,\ k_n)$. Тогда, очевидно, производная

$$D^{\boldsymbol{k}}\tilde{\varphi}=D^{\boldsymbol{s}}\widetilde{\varphi^{(\boldsymbol{\rho})}}.$$

Имеем (пояснения ниже)

$$(1+|x|^2)^l\,|D^{(k)}\tilde{\varphi}|\leqslant(1+|y|^2)^l\,(1+|u|^2)^l\,|D^s\widetilde{\varphi^{(\varrho)}}|\leqslant$$
$$\leqslant c\,(1+|y|^2)^l\sum_{(l',\,s')\in\mathscr{E}_{l,\,s}}\max_u\,(1+|u|^2)^{l'}\,|D^{(s')}\varphi^{(\varrho)}(u,\,y)|=$$
$$=c\,(1+|y|^2)^l\sum(1+|u_0|^2)^{l'}\,|D^{(s'+\varrho)}\varphi(u_0,\,y)|\leqslant$$
$$\leqslant c\sum(1+|y|^2+|u_0|^2)^{2l}\,|D^{(s'+\varrho)}\varphi(u_0,\,y)|\leqslant$$
$$\leqslant c\sum\varkappa(2l,\ s'+\rho,\ \varphi). \qquad (1)$$

Второе неравенство следует из 1.5 (4), в третьем члене константа c зависит от l и k, но не от φ и y, сумма в третьем и последующих членах распространена на некоторое (зависящее от l и ρ) конечное множество $\mathscr{E}_{l;\,s}$ пар $(l',\ s')$ натуральных чисел l' и неотрицательных s'. В четвертом члене $u_0\in R_m$ на самом деле зависит от соответствующего слагаемого и от y; u_0 — это точка максимума (по u) соответствующего слагаемого при фиксированном y. Из неравенств (1) следует слабая непрерывность $\tilde{\varphi}^u$.

9.2.2. Теорема о смешанных производных. *Пусть* $1<p<\infty$, $F\in L_p^r=L_p^r(R)$, $R=R_n$, $\boldsymbol{r}=(r_1,\ \ldots,\ r_n)>0$ $(r_j>0)$ *и* $\boldsymbol{l}=(l_1,\ \ldots,\ l_n)\geqslant 0$ — *целый вектор* $(l_j\geqslant 0$ — *целые*), *для которого*

$$\varkappa=1-\sum_{j=1}^n\frac{l_j}{r_j}\geqslant 0. \qquad (1)$$

Пусть далее

$$\rho=\varkappa\boldsymbol{r}. \qquad (2)$$

Тогда производная

$$F^{(l)}=\widehat{(ix)^l\tilde{F}}\in L_p^\varrho \qquad (3)$$

и

$$\|F^{(l)}\|_{L_p^\varrho}\leqslant c\,\|F\|_{L_p^r}. \qquad (4)$$

Доказательство. По условию $F\in L_p^r$, поэтому

$$\psi=\widehat{\Lambda\tilde{F}}\in L_p,\quad \Lambda=\sum_{j=1}^n(1+x_j^2)^{r_j/2},\quad \|\psi\|_p\leqslant c\,\|F\|_{L_p^r}. \qquad (5)$$

Чтобы доказать (3), (4), мы должны установить, что для любого $s=1,\ \ldots,\ n$

$$\widehat{(1+x_s^2)^{\frac{\varkappa r_s}{2}}\widetilde{F^{(l)}}}=\widehat{(1+x_s^2)^{\varkappa r_s}(ix)^l\tilde{F}}\in L_p,$$

но это следует из (5), если принять во внимание, что функции

$$(1+x_s^2)^{\frac{\varkappa r_s}{2}}(ix)^l\Lambda^{-1}$$

суть множители Марцинкевича (см. 1.5.5, пример 6).

Доказанная теорема 9.2.2 в определенном смысле аналогична теореме 5.6.3 для B-классов. Однако теорема 9.2.2 верна при $1<p<\infty$ и $\varkappa\geqslant 0$, в то время как теорема 5.6.3 верна при $1\leqslant p\leqslant\infty$, но при $\varkappa>0$.

Пример. Пусть f есть функция, определенная на круге $\sigma=\{\rho^2=x^2+y^2\leqslant 1\}$ равенствами

$$f=xy\ln\rho^2\ (\rho>0),\quad f=0\ \ (\rho=0) \tag{1}$$

и продолженная на всю плоскость R так, чтобы она вместе со своими частными производными до второго порядка включительно была ограниченной и непрерывной на области $\rho>\frac{1}{2}$ (см. теорему 3 в замечаниях к 4.3.6).

Легко проверить, что f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны и ограничены, а $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ограничены на R, в то время как $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ непрерывна для $\rho>0$, но неограничена в окрестности нулевой точки.

Этот пример показывает, что при $p=\infty$ теорема 9.2.2 вообще неверна.

9.2.3. Замечание о производных дробного порядка. Мы оперировали выражениями вида

$$\widehat{(ix)^\alpha\tilde{f}}=f^{(\alpha)}\quad (f\in S') \tag{1}$$

только в случае целых векторов α. Если $\alpha\geqslant 0$, то $f^{(\alpha)}$ есть производная от $f\in S'$ порядка α. Функция $(ix)^\alpha$ при целых α бесконечно дифференцируема и полиномиального роста, поэтому выражение (1) корректно определяет $f^{(\alpha)}\in S'$.

Если действительное число α нецелое, то функция $(it)^\alpha$ $(-\infty<t<\infty)$ многозначна, но можно условиться понимать под этим выражением однозначную ветвь этой функции

$$(it)^\alpha=|t|^\alpha\exp\left\{\frac{1}{2}\pi i\alpha\operatorname{sign}t\right\},$$

и тогда при α натуральном

$$(it)^\alpha=\underbrace{(it)\dots(it)}_{\alpha\text{ раз}}.$$

Если далее α, β — действительные числа, то

$$(it)^{\alpha+\beta}=(it)^\alpha(it)^\beta.$$

Если теперь $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — действительные векторы и $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ — действительная векторная переменная, то положим

$$(i\boldsymbol{x})^\alpha=(ix_1)^{\alpha_1} \ldots (ix_n)^{\alpha_n},$$

и тогда, очевидно, будет выполняться равенство

$$(i\boldsymbol{x})^\alpha (i\boldsymbol{x})^\beta=(i\boldsymbol{x})^{\alpha+\beta}.$$

Теперь естественно определить производную $f^{(\alpha)}$ порядка α для произвольных не обязательно целых векторов α при помощи выражения (1). Однако здесь возникает затруднение, заключающееся в том, что для дробных α функция $(i\boldsymbol{x})^\alpha$ не является бесконечно дифференцируемой; она также не является множителем Марцинкевича и, таким образом, неприменима в смысле рассматриваемых в этой книге определений, даже если $f \in L_p$. Выход из положения находят в том, что вместо S рассматривается другой класс Ω основных функций, состоящий из функций, ортогональных многочленам (П. И. Лизоркин [5]).

Над Ω определяется класс функционалов (обобщенных функций) Ω'. В терминах Ω' имеет смысл понятие $\widehat{(i\boldsymbol{x})^\alpha \tilde{f}}$ для дробных векторов α. При этом доказывается, что класс $L^r_{x_j p}$, где $r>0$ вообще дробное, можно определить как состоящий из функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p}+\|\widehat{(ix_j)^r \tilde{f}}\|_{L_p}.$$

Эта норма оказывается эквивалентной введенной нами норме $\|f\|_{L^r_{x_j p}}$.

9.3. Взаимоотношения лиувиллевских и других классов

Будем считать, что $R=R_n$, $L=L(R)$, $H=H(R)$, ... и

$$B^r_{pp}=B^r_p, \quad B^{\mathbf{r}}_{pp}=B^{\mathbf{r}}_p.$$

Справедливы вложения $(r \geqslant 0,\ \mathbf{r} \geqslant 0)$

$$L^r_p \to H^r_p, \quad L^{\mathbf{r}}_p \to H^{\mathbf{r}}_p \qquad (2 \leqslant p \leqslant \infty), \tag{1}$$

$$B^r_p \to L^r_p, \quad B^{\mathbf{r}}_p \to L^{\mathbf{r}}_p \qquad (1 \leqslant p \leqslant 2)\ ^*), \tag{2}$$

$$L^r_p \to B^r_p, \quad L^{\mathbf{r}}_p \to B^{\mathbf{r}}_p \qquad (2 \leqslant p \leqslant \infty,\ B^{\mathbf{r}}_\infty = B^{\mathbf{r}}_{\infty\infty} = H^{\mathbf{r}}_\infty)\ ^*). \tag{3}$$

---

*) О. В. Бесов [5] — целые r, $\mathbf{r}$, $1<p<\infty$; П. И. Лизоркин [8] — общий случай, $1<p<\infty$. См. еще замечание к 9.3.

Из (2) и (3) следует, что

$$B_2^r = L_2^r, \quad B_2^{\mathbf{r}} = L_2^{\mathbf{r}} \tag{4}$$

и, в частности,

$$B_2^r = W_2^r, \; B_2^{\mathbf{r}} = W_2^{\mathbf{r}} \quad (r, \; r_j = 0, \; 1, \ldots). \tag{5}$$

Таким образом, значение параметра $p=2$ является исключительным — для него соответствующие классы B и L, а для натуральных r, $\mathbf{r}$ и W совпадают.

Приведем доказательства (1) — (3) пока при $n=1$. В этом случае вложения, входящие в каждую из пар (1), (2) или (3), соответственно совпадают.

Пусть функция $f \in L_p = L_p(R_1)$ и $\sigma_N(f)$ есть ее сумма Валле-Пуссена. Тогда

$$\| \sigma_{2^0}(f) \|_p \leqslant M \| f \|_p,$$

$$\left\| \sigma_{2^k}(f) - \sigma_{2^{k-1}}(f) \right\|_p \leqslant 2M \| f \|_p,$$

а это показывает, что (см. 8.9.1 (1))

$$\| f \|_{H_p^0} = \sup_k \left\{ \left\| \sigma_{2^0}(f) \right\|_p, \; \left\| \sigma_{2^k}(f) - \sigma_{2^{k-1}}(f) \right\|_p \right\} \leqslant 2M \| f \|_p,$$

т. е. $L_p \to H_p^0$, но так как операция I_r осуществляет изоморфизмы:

$$I_r(L_p) = L_p^r, \quad I_r(H_p^0) = H_p^r,$$

то

$$L_p^r \to H_p^r.$$

Докажем (3). Случай $p = \infty$ уже рассмотрен. Пусть $2 \leqslant p < \infty$ и функция $f \in L_p = L_p(-\infty, \infty)$, следовательно, регулярная в смысле L_p.

Тогда, считая, что $\beta_k(f)$ имеет такой же смысл, как в 8.10.1, получим (пояснения ниже)

$$\| f \|_p^p \gg \left\| \left\{ \sum_0^\infty | \beta_k(f) |^2 \right\}^{1/2} \right\|_p^p \geqslant \left\| \left\{ \sum_0^\infty | \beta_k(f) |^p \right\}^{1/p} \right\|_p^p =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_0^\infty | \beta_k(f) |^p dx = \sum_0^\infty \| \beta_k(f) \|_p^p = \| f \|_{B_p^0}^p.$$

Первое неравенство следует из 1.5.6.1, второе — из 3.3.3 и, наконец, последнее — из теоремы 8.10.1. Следовательно, $L_p \to B_p^0$.

Пусть теперь при тех же обозначениях $f \in B_p^0$, $1 < p \leqslant 2$. Тогда (пояснения ниже)

$$\| f \|_{B_p^0}^p = \sum_0^\infty \| \beta_k(f) \|_p^p = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_0^\infty | \beta_k(f) |^p dx \geqslant \int \left\{ \sum_0^\infty | \beta_k(f) |^2 \right\}^{p/2} dx \gg \| f \|_p^p.$$

Первое соотношение следует из 8.10.1, предпоследнее из 3.3.3 и последнее из 1.5.6.1. Следовательно, $B_p^0 \to L_p$.

При $p=1$ рассуждаем иначе. Пусть функция $f \in B_1^0$, тогда она регулярна в смысле L и представляется в виде слабо сходящегося в смысле S' ряда 8.9 (3) Валле-Пуссена

$$f=\sum_0^\infty q_s,$$

где $\sum_0^\infty \|q_s\|_L < \infty$. Но тогда, очевидно, $f \in L$ и

$$\|f\|_L \leqslant \|f\|_{B_1^0}.$$

Мы доказали (1) — (3) при $n=1$. Но тогда верны также вложения

$$L_{x_j p}^r(R_n) \to H_{x_j p}^r(R_n), \tag{6}$$

$$B_{x_j p}^r(R_n) \to L_{x_j p}^r(R_n) \quad (1 \leqslant p \leqslant 2), \tag{7}$$

$$L_{x_j p}^r(R_n) \to B_{x_j p}^r(R_n) \quad (2 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{8}$$

В самом деле, непосредственно из определения H- и B-классов видно, что если функция $F(x)=F(x_1, y)$, $y=(x_2, \ldots, x_n)$, принадлежит к $H_{x_1 p}^r(R_n)$, $B_{x_1 p}^r(R_n)$, то почти для всех y она как функция от x_1 принадлежит соответственно к $H_p^r(R_{x_1})$, $B_p^r(R_{x_1})$, где R_{x_1} ось x_1; аналогично, если $F(x) \in L_{x_1 p}^r(R_n)$, то почти для всех y она принадлежит к $L_p^r(R_{x_1})$ (это следует из интегрального представления 9.2 (3) функций класса $L_{x_1 p}^r(R_{x_1})$).

Справедливы при этом с точностью до эквивалентности равенства

$$\|F\|_{\Lambda_{x_1 p}^r(R_n)} = \left(\int \|F(x_1, y)\|^p_{\Lambda_p^r(R_{x_1})} dy\right)^{1/p}, \tag{9}$$

$$\|F\|_{L_{x_1 p}^r(R_n)} = \left(\int \|f(x_1, y)\|^p_{L_p(R_{x_1})} dy\right)^{1/p}, \tag{10}$$

где вместо Λ можно подставить H или B, а в (10) F и f связаны равенством 9.2 (3) при $m=1$. Неравенства, определяющие вложения (6) — (8), следуют тогда из соответствующих уже доказанных в одномерном случае неравенств между нормами под интегралами в (9), (10).

Из (6) — (8), где можно x_1 заменить еще на x_i $(i=1, \ldots, n)$, тривиальным образом следуют вложения (1) — (3)), если учесть (при доказательстве первых вложений (1)—(3)), что

$$H_p^r = H_p^{r, \ldots, r} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty), \quad B_p^r = B_p^{r, \ldots, r} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$
$$L_p^r = L_p^{r, \ldots, r} \quad (1 < p < \infty).$$

9.4. Интегральное представление анизотропных классов

В этом параграфе мы займемся изучением операции

$$F = \widehat{\Lambda_r \tilde{f}} = I_r f, \tag{1}$$

$$\Lambda = \Lambda_r = \left\{ \sum_{j=1}^{n} (1 + x_j^2)^{r_j \sigma/2} \right\}^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{2}$$

$$(\sigma > 0, \ r = (r_1, \ \ldots, \ r_n) > 0),$$

зависящей от положительного вектора r и параметра σ. Она аналогична уже изученной операции I_r (r — число), и в одномерном случае они при $r = r_1$ и $\sigma = 1$ совпадают. В случае $n > 1$, $r_1 = \ldots = r_n = r$ операции I_r и I_r даже при $\sigma = 1$ не совпадают, однако они имеют аналогичные свойства, что, например, видно из того, что функция

$$(1 + |x|^2)^{r/2} \Lambda_r(x) \tag{3}$$

и величина, ей обратная при любом $\sigma > 0$, есть множитель Марцинкевича (при $1 < p < \infty$, см. 1.5.5, примеры 9, 8).

Мы будем писать еще

$$I_{-r} F = f. \tag{4}$$

Так как множитель Λ_r — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, так же как величина ей обратная, то I_r трансформирует взаимно однозначно S' на S'.

Операция I_r замечательна тем, что она осуществляет изоморфизм

$$L_p^r = I_r(L_p) \qquad (1 < p < \infty). \tag{5}$$

В самом деле, если $f \in L_p$, то

$$\| I_{-r_i} F \|_p \leqslant \| f \|_p,$$

что следует из того, что функции

$$(1 + x_i^2)^{r_i/2} \Lambda_r(x) \qquad (i = 1, \ \ldots, \ n) \tag{6}$$

суть множители Марцинкевича (см. 1.5.5, пример 10). Поэтому $F \in L_p^r$ и

$$\| F \|_{L_p^r} \leqslant \| f \|_p.$$

Наоборот, если $F \in L_p^r$, то

$$\|f\|_p \leqslant \|F\|_{L_p^r}.$$

Это следует из того, что функция (см. 1.5.5, пример 11)

$$\Lambda_r^{-1}(x)\left\{\sum_{j=1}^{n}(1+x_j^2)^{r_j/2}\right\}^{-1} \tag{7}$$

есть множитель Марцинкевича.

Пусть $r>0$, λ, $\delta>0$, тогда, как мы доказали, имеет место изоморфизм

$$I_{(\lambda+\delta)r}(L_p)=L_p^{(\lambda+\delta)r} \quad (1<p<\infty). \tag{8}$$

Замечательно, что хотя операция

$$I_{\lambda r}I_{\delta r}$$

вообще отличается от операции $I_{(\lambda+\delta)r}$, но они эквивалентны в том смысле, что наряду с (8) имеет место изоморфизм

$$I_{\lambda r}I_{\delta r}(L_p)=L_p^{(\lambda+\delta)r} \quad (1<p<\infty).$$

Это следует из того, что функции μ, μ^{-1}, рассматриваемые в примере (1.5.5, пример 12), являются множителями Марцинкевича.

9.4.1. Оценки анизотропных ядер. Зададим $r=(r_1, \ldots, r_n)>0$ и $l=(l_1, \ldots, l_n)$, и пусть $\sigma>0$ настолько велико, что выполняются неравенства

$$\sum_1^n \frac{l_j}{r_j}<\sigma-\sum_1^n \frac{1}{r_j}+\frac{1}{r_i} \quad (i=1, \ldots, n).$$

Ближайшей нашей целью будет показать, что в таком случае преобразование Фурье (см. 9.4 (2))

$$\hat{\Lambda}=\hat{\Lambda}_r(x)=G_r(x) \tag{1}$$

есть обычная функция, обладающая «производной» *)

$$I_{-l}G_r=\widehat{\prod_1^n(1+x_j^2)^{l_j/2}\Lambda}$$

*) Можно показать, что это утверждение сохранится, если в нем операцию I_{-l} при целых l заменить на операцию производной $D^lG_r=\widehat{(ix)^l\Lambda}$ (П. И. Лизоркин [12]).

(обычной функцией), подчиняющейся неравенствам

$$|I_{-l}G_r(x)|\leqslant c\begin{cases}\left\{\sum_1^n |x_j|^{r_j\varkappa}\right\}^{-1} & \left(\varkappa=\sum_1^n \frac{1+l_j}{r_j}-1>0\right),\\ \ln\left(\frac{1}{|x|}+1\right) & (\varkappa=0),\\ 1 & (\varkappa<0),\end{cases} \tag{2}$$

$$|I_{-l}G_r(x)|\leqslant ce^{-c_1|x|} \quad (|x|>1), \tag{3}$$

где $c_1>0$ достаточно мало и σ входит только в константу c, из которых следует, что $G_r\in L$. Это, в частности, показывает, что

$$I_r f=\int G_r(x-u)f(u)\,du \tag{4}$$

обычная свертка для $f\in L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

9.4.2. Пусть Ω обозначает комплексную плоскость с вырезом $-\infty<x\leqslant 0$ и $\rho=\lambda+i\mu$ — комплексное число. Будем в дальнейшем считать без пояснений, что z^ρ есть однозначная, определенная на Ω ветвь многозначной функции z^ρ, равная $x^\rho=x^\lambda e^{i\mu\ln x}$ на луче $0<x<\infty$. Иначе говоря, если $z=x+iy\in\Omega$, то предполагается всегда, что $z^\rho=|z|^\rho e^{i\rho\arg z}$, где $|\arg z|<\pi$.

Лемма 1. Пусть $0<\alpha\leqslant 1$. *Тогда*

$$|z^\alpha-A^\alpha|\leqslant M|z-A|^\alpha \quad (z\in\Omega,\ A\geqslant 0), \tag{1}$$

где M не зависит от z и A.

Доказательство. Рассмотрим сначала однозначную аналитическую функцию

$$f(z)=\frac{z^\alpha-1}{(z-1)^\alpha} \tag{2}$$

на области Ω^* комплексной плоскости с двумя разрезами $-\infty<x\leqslant 0$, $1\leqslant x<\infty$, равную

$$f(x)=\frac{x^\alpha-1}{(x-1)^\alpha}$$

на верхнем берегу разреза $1\leqslant x<\infty$.

Чтобы сконструировать такую функцию, надо считать, что функция z^α, стоящая в числителе (2), определяется формулой $z^\alpha=\rho^\alpha e^{i\alpha\theta}$ $(z=\rho e^{i\theta},\ \rho>0,\ -\pi<\theta<\pi)$; т. е. что z^α (в числителе) понимается как однозначная ветвь z^α, определенная на Ω, равная x^α для $0<x<\infty$; что же касается функции $(z-1)^\alpha$ в знаменателе, то она понимается в смысле $(z-1)^\alpha=r^\alpha e^{i\alpha\varphi}$ $(z-1=re^{i\varphi},\ r>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

Определенная таким образом функция $f(z)$ имеет предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=1$, кроме того, она ограничена на всех берегах обоих разрезов. Таким образом, она ограничена на всей границе Ω^* и, согласно принципу максимума, ограничена на Ω^*:

$$M \geqslant \left| \frac{z^\alpha - 1}{(z-1)^\alpha} \right| = \frac{|z^\alpha - 1|}{|(z-1)^\alpha|} = \frac{|z^\alpha - 1|}{|z-1|^\alpha},$$

и мы доказали неравенство (1) при $A=1$ и всех $z \in \Omega^*$, но тогда и для $z \in \Omega$, потому что для действительных $z = x > 1$ неравенство

$$|x^\alpha - 1| \leqslant |x-1|^\alpha \qquad (0 < \alpha \leqslant 1)$$

хорошо известно.

Если теперь A — произвольное положительное число, то для $z \in \Omega$

$$|z^\alpha - A^\alpha| = A^\alpha \left| \left(\frac{z}{A}\right)^\alpha - 1 \right| \leqslant MA^\alpha \left| \frac{z}{A} - 1 \right|^\alpha = M|z-A|^\alpha,$$

и мы доказали (1).

Лемма 2. *Пусть $\alpha \geqslant 1$, тогда для $z \in \Omega$ и любого $A > 0$ имеет место*

$$|z^\alpha - A^\alpha| \leqslant M|z-A|(A^{\alpha-1} + |z|^{\alpha-1}), \tag{3}$$

где M не зависит от z и A.

Доказательство. В самом деле, соединим точки A и z отрезком c:

$$\zeta = A + t(z-A) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

принадлежащим, очевидно, к Ω. Тогда

$$z^\alpha - A^\alpha = \alpha \int_c z^{\alpha-1}\,dz = \alpha \int_0^1 [A + t(z-A)]^{\alpha-1}(z-A)\,dt,$$

откуда и следует (3) ($(a+b)^\beta \leqslant c(a^\beta + b^\beta)$, $\beta > 0$, c не зависит от a и b).

9.4.3. Введем обозначения

$$V = \sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}, \quad U = \sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j}{2r_n}} \qquad (r_j > 0) \tag{1}$$

и отметим неравенства

$$U^{r_n\sigma} \leqslant cV, \tag{2}$$

где c не зависит от V,

$$|u_n| \leqslant (1+u_n^2)^{1/2} = (1+u_n^2)^{\frac{r_n}{2r_n}} \leqslant U. \tag{3}$$

Здесь (2) следует из того, что для $\beta > 0$ и любых $x_j > 0$

$$\left(\sum_1^n x_j^\beta\right)^{1/\beta} \leqslant c_\beta \sum_1^n x_j,$$

а c_β не зависит от x_j.

В плоскости комплексной переменной $w_n = u_n + iv_n$ введем кривую $L_{u'}$

$$u_n + ikU \quad (0 < k < 1, \ -\infty < u_n < \infty), \tag{4}$$

зависящую от k и векторного параметра $u' = (u_1, \ldots, u_{n-1})$. Введем, кроме того, кривую $L_{u'}^*$. Пусть

$$B = k\left(\sum_1^{n-1} (1+u_j^2)^{\frac{r_j}{2r_n}} + 1\right), \tag{5}$$

где k — постоянная. Если $B \leqslant 1$, то будем считать, что $L_{u'}^* = L_{u'}$, если же $B > 1$, т. е. когда $L_{u'}$ находится выше точки i, то пусть

$$L_{u'}^* = L_{u'} + l_{u'},$$

где $l_{u'}$ есть проходимый два раза отрезок $[i, iB]$. Точнее, мы считаем, что ориентированная кривая $L_{u'}^*$ получается следующим движением: сначала точка $L_{u'}^*$ пробегает левый кусок $L_{u'}$, соответствующий возрастанию u_n на интервале $(-\infty, 0)$, затем она спускается по отрезку $l_{u'}$ вниз до i, огибает i, поднимается до $L_{u'}$ и уходит к $+\infty$ по правому куску $L_{u'}$.

Обозначим через $E_{u'}$ множество точек w_n, заполняющее часть комплексной плоскости w_n между действительной осью u_n и кривой $L_{u'}^*$.

Так как $\Lambda = V^{-\frac{1}{\sigma}}$ есть бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, то имеет смысл $\hat{\Lambda} \in S'$. При малых r_j интеграл

$$\hat{\Lambda}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ixu} \Lambda(u)\, du$$

уж во всяком случае может не сходиться абсолютно, поэтому изучение функции $\hat{\Lambda}$ будет производиться окольным путем введения вспомогательной функции

$$V^{-\frac{\rho}{\sigma}}=\Lambda_{\rho,r,\sigma}\qquad(\rho=\lambda+i\mu,\ \lambda>0,\qquad \Lambda_{1,r,\sigma}=\Lambda_r=\Lambda)\tag{6}$$

с комплексным параметром ρ. Для достаточно больших λ имеет смысл непосредственная запись через лебегов (абсолютно сходящийся) интеграл *)

$$I_{-l}\hat{\Lambda}_{\rho,r,\sigma}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\frac{\prod\limits_1^n(1+u_j^2)^{l_j/2}e^{ixu}\,du}{V^{\rho/\sigma}}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{ix'u'}\,du'\int\frac{\prod\limits_1^n(1+u_j^2)^{l_j/2}e^{ix_nu_n}}{V^{\rho/\sigma}}\,du_n\tag{7}$$

$$(x'=(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}),\ u'=(u_1,\ \ldots,\ u_{n-1})).$$

Наряду с (7) мы будем рассматривать еще при $x_n>0$ функцию

$$\mu_\rho^{(l)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{ix'u'}\,du'\int\limits_{L_{u'}^*}\frac{\prod\limits_1^n(1+u_j^2)^{l_j/2}e^{ix_nu_n}}{V^{\rho/\sigma}}\,du_n.\tag{8}$$

Если $x_n<0$, то $\mu_\rho^{(l)}(x)$ определяется аналогично, но в качестве $L_{u'}^*$ берется кривая в комплексной плоскости, симметричная ей относительно действительной оси. Рассмотрение для этого второго интеграла, который мы также обозначим через $\mu_\rho^{(l)}(x)$, аналогично, и приводит к аналогичным результатам.

При $x_n>0$ и действительных $\rho>\rho_0$, где ρ_0 достаточно велико, внутренние интегралы (7) и (8) равны между собой. В самом деле, в (8) в V входит комплексное слагаемое

$$(1+z^2)^{\frac{r_n\sigma}{2}}=[1+(x+iy)^2]^{\frac{r_n\sigma}{2}}=(\xi+i\eta)^{\frac{r_n\sigma}{2}}\qquad(z\in E_{u'}),$$

$$\xi=1+x^2-y^2,\qquad \eta=2xy.$$

---

*) При рассмотрении операции $D^l\hat{\Lambda}_\rho$ в (7), (8) произведение $\prod\limits_1^n(1+x_j^2)^{l_j/2}$ заменяется на $(ix)^l$.

Число $\xi+i\eta$ может принадлежать к разрезу $-\infty<\xi\leqslant 0$ тогда и только тогда, когда $x=0$, $y^2\geqslant 1$, т. е. если

$$z=iy, \qquad y^2\geqslant 1. \tag{9}$$

Но точки вида (9) не принадлежат к $E_{u'}$, что показывает, что V есть однозначная аналитическая функция от w_n на $E_{u'}$. В дальнейшем (см. 9.4.6 (7)) будет показано, что при этом при достаточно малом k

$$-\pi<\arg V<\pi \tag{10}$$

(если *a priori* считать, что $|\arg V|\leqslant\pi$), что показывает, что когда w_n пробегает $E_{u'}$, точка V принадлежит к Ω (плоскости с разрезом $-\infty<x\leqslant 0$), но тогда и $V^{\rho/\sigma}$ (при действительных σ и комплексных ρ) есть однозначная аналитическая функция. Таким образом, под знаком внутренних интегралов (7) и (8) стоит однозначная аналитическая в области $E_{u'}$ функция. Равенство их следует из того, что интеграл по отрезку c_ξ точек $\xi+i\eta$ $(0\leqslant\eta\leqslant kU)$ стремится к нулю при $|\xi|\to\infty$:

$$\left|\int_{c_\xi}\frac{(1+u_n^2)^{l_n/2}e^{ix_nu_n}}{V^{\rho/\sigma}}\,du_n\right|\leqslant\int_0^{kV}\frac{e^{-x_n\eta}\,d\eta}{|1+(\xi+i\eta)^2|^{\frac{r_n\rho-l_n}{2}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(|\xi|-1)^{\frac{r_n\rho-l_n}{2}}}\int_0^\infty e^{-x_n\eta}\,d\eta\to 0.$$

Подобным образом доказывается равенство внутренних интегралов в (7) и в выражении, соответствующем (8) при $x_n<0$. Это показывает, что

$$I_l\hat{\Lambda}_{\rho,r,\sigma}(\boldsymbol{x})=\mu_\rho^{(l)}(\boldsymbol{x}) \qquad (x_n\neq 0,\ \rho>\rho_0), \tag{11}$$

если $\rho_0>0$ достаточно велико.

В 9.4.6 будут получены оценки для функции $\mu_\rho^{(l)}(\boldsymbol{x})$.

На основании этих оценок и аналитических свойств $I_{-l}\hat{\Lambda}_{\rho,r,\sigma}$ и $\mu_\rho^{(l)}$ удается показать (см. 9.4.7), что равенство (11) на самом деле имеет место для всех комплексных $\rho=\lambda+i\mu$, в частности для $\rho=1$. Таким образом, обобщенная функция $\hat{\Lambda}$ представляет обычную суммируемую на R_n функцию $\hat{\Lambda}(\boldsymbol{x})=\mu_1(\boldsymbol{x})=\mu_1^{(0)}$. Оценки, которые будут получены для $\mu_1^{(l)}(\boldsymbol{x})$, непосредственно переносятся на $I_{-l}\hat{\Lambda}^{(l)}(\boldsymbol{x})$, что и приводит к неравенствам 9.4.1 (1), (2).

9.4.4. Начнем с того, что оценим n-кратный интеграл (где r_j, $s>0$, $l=(l_1, \ldots, l_n)\geqslant 0$, пояснения ниже)

$$\int \frac{\prod_1^n (1+u_j^2)^{l_j/2}}{V^{\frac{s}{\sigma}}}\,du = \int \frac{\prod_1^n (1+u_j^2)^{l_j/2}\,du}{\left\{\sum_1^n (1+u_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}\right\}^{\frac{s}{\sigma}}} =$$

$$= \int_{|u|<1} + \int_{|u|>1} \leqslant 1 + \int_{\substack{|u|>1\\ u_j>0}} \frac{\prod_1^n (1+u_j^2)^{l_j/2}}{\left\{\sum_1^n u_j^{r_j\sigma}\right\}^{s/\sigma}}\,du \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \int_{\substack{|\xi|>\beta>0\\ \xi_j>0}} \frac{\sum_{j=1}^n (1+\xi_j^{2/r_j})^{l_j/2}\,\xi_j^{\frac{1}{r_j}-1}}{\left(\sum_1^n \xi_j\right)^s}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \int_\beta^\infty \frac{\rho^{\sum_1^n \frac{1+l_j}{r_j}-n}\,\rho^{n-1}\,d\rho}{\rho^s} = 1 + \int_\beta^\infty \frac{d\rho}{\rho^{1+\left(s-\sum_1^n \frac{1+l_j}{r_j}\right)}} < \infty, \tag{1}$$

если

$$s > \sum_1^n \frac{1+l_j}{r_j}. \tag{2}$$

В третьем соотношении оценка интеграла на $\{|u|>1\}$ сведена к оценке на $\{|u|>1,\ u_j>0;\ j=1, \ldots, n\}$ вследствие симметричных свойств функции V. В четвертом введена замена переменных $u_j^{r_j}=\xi_j$ с якобианом, стоящим в числителе под интегралом в пятом члене; при этом еще использовано неравенство $\left(\sum_1^n \xi_j^\sigma\right)^{1/\sigma} \geqslant \sum_1^n \xi_j$ $(\sigma>0)$; здесь $\beta>0$ — достаточно малое число, чтобы шар $|u|<1$ содержал в себе шар $|\xi|<\beta$. В пятом вводится переход к полярным координатам. Из (1), (2) следует, что при $\rho=\lambda+i\mu$, $l=0$ и

$$\lambda > \sum_1^n \frac{1}{r_j} \tag{3}$$

интеграл 9.4.3 (7) абсолютно сходится и может быть записан в виде

$$\int\limits_R = \int\limits_{R'} du' \int du_n, \quad u' = (u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

где внутренний интеграл (по u_n) абсолютно сходится при любых u' ($|V^\rho| = |V|^\lambda > |u_n|^{\lambda r_n}$, $\lambda r_n > 1$, см. (3)).

9.4.5. Покажем, что, какова бы ни была $\varphi \in S$, функция

$$\Phi(\rho) = (I_{-l}\hat{\Lambda}_{\rho, r, \sigma}, \varphi) \qquad (\rho = \lambda + i\mu, \ \lambda > 0), \tag{1}$$

аналитическая на $\{\lambda > 0\}$. Имеем, очевидно,

$$\Phi(\rho) = (\Lambda_{\rho, r, \sigma}, \psi) = \int \frac{\psi(u)\, du}{V^{\rho/\sigma}} \left(\psi = \prod_1^n (1 + u_j^2)^{l_j/2} \hat{\varphi} \in S\right). \tag{2}$$

Производная от Φ формально имеет вид

$$\Phi'(\rho) = -\frac{1}{\sigma} \int \frac{\psi \ln V}{V^{\rho/\sigma}} du. \tag{3}$$

Под интегралами в (2) и (3) находятся непрерывные функции ($V \geqslant 1$) и, кроме того,

$$\left|\frac{\psi(u)}{V^{\rho/\sigma}}\right| = \frac{|\psi(u)|}{V^{\lambda/\sigma}} \leqslant |\psi(u)| \in L,$$

$$\left|\frac{\ln V \psi(u)}{V^{\rho/\sigma}}\right| = \frac{|\ln V \psi(u)|}{V^{\lambda/\sigma}} \ll |\psi(u)| \in L,$$

где правые части не зависят от ρ. Это доказывает, что дифференцирование (3) законно и что $\Phi'(\rho)$ непрерывна, а следовательно, Φ аналитична при $\lambda > 0$.

9.4.6. Ниже доказывается, что если параметр σ достаточно велик $\left(\text{точнее, } r_n(\varkappa - \sigma) < 1, \ \varkappa = \sum\limits_1^n \frac{1 + l_j}{r_j} - \lambda\ {}^*)\right)$, то интеграл (см. 9.4.3 (8))

$$\mu_\rho^{(l)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ix'u'} du' \int\limits_{L_{u'}^*} \frac{\sum\limits_1^n (1 + u_j^2)^{l_j/2} e^{ix_n u_n}}{V^{\rho/\sigma}} du_n \tag{1}$$

$$(\rho = \lambda + i\mu, \ \lambda > 0, \ \text{кроме того}\ {}^{**}), \ |\mu| < 1)$$

---

*) Здесь $\varkappa = \varkappa(\lambda)$, но $\varkappa(1)$ обращается в рассмотренную в 9.4.1 (2) величину $\varkappa$.

**) Ограничение $|\mu| < 1$ на самом деле несущественно.

есть непрерывная по $(\rho, \boldsymbol{x})$ функция на множестве $\{\lambda>0, |\mu|<1, x_n \neq 0\}$, аналитическая по ρ, и справедливы оценки

$$|\mu_\rho^{(l)}(\boldsymbol{x})| \leqslant \begin{cases} |x_n^{-r_n\varkappa}| & (\varkappa>0), \\ |\ln|x_n||+1 & (\varkappa=0), \ (|x_n|<1), \\ 1 & (\varkappa<0), \end{cases} \tag{2}$$

$$|\mu_\rho^{(l)}(\boldsymbol{x})| \leqslant e^{-c|x_n|} \quad (c>0, \ |x_n|>1). \tag{3}$$

Обозначим через V_* результат подстановки в V вместо u_n комплексной переменной $u_n+i\eta_n \in E_{u'}$, где $E_{u'}$ — область между $L_{u'}$ и осью $\eta_n=0$, т. е.

$$E_{u'}=\{u_n+i\eta_n\colon \ -\infty<u_n<\infty, \ 0 \leqslant \eta_n \leqslant kU\}$$

(см. 9.4.3 (4)). Очевидно,

$$V_*=V+\omega,$$

где $(\eta_n=\eta)$

$$\omega=(1+(u_n+i\eta)^2)^{\frac{r_n\sigma}{2}}-(1+u_n^2)^{\frac{r_n\sigma}{2}}=$$
$$=(1+u_n^2+2u_n\eta i-\eta^2)^{\frac{r_n\sigma}{2}}-(1+u_n^2)^{\frac{r_n\sigma}{2}}.$$

Оценим ω сверху. Если $0<r_n\sigma \leqslant 2$, то в силу 9.4.2 (1) (пояснения ниже)

$$|\omega| \leqslant M|2u_n\eta i-\eta^2|^{\frac{r_n\sigma}{2}} \leqslant ||u_n|\eta+\eta^2|^{\frac{r_n\sigma}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant (|u_n|kU)^{\frac{r_n\sigma}{2}}+k^{r_n\sigma}U^{r_n\sigma} \leqslant k^{\frac{r_n\sigma}{2}}U^{r_n\sigma} \leqslant k^{\frac{r_n\sigma}{2}}V. \tag{4}$$

Применение неравенства 9.4.2 (1) законно, потому что было выяснено в 9.4.3, что комплексная точка в первой скобке, определяющей ω, принадлежит к Ω (плоскости с разрезом $-\infty<u_n \leqslant 0$).

Мы считаем, что константы, входящие в неравенства $\leqslant$, не зависят от k. Третье неравенство следует из того, что $(x+y)^\alpha \leqslant x^\alpha+y^\alpha$ $(x, \ y>0)$; предпоследнее из того, что $|u_n| \leqslant U$ (см. 9.4.3 (3)) и последнее — из 9.4.3 (2).

Если же $r_n\sigma \geqslant 2$, то (см. 9.4.2 (3))

$$|\omega| \leqslant |2u_n\eta i-\eta^2|\left[(1+u_n^2)^{\frac{r_n\sigma}{2}-1}+|2u_n\eta i-\eta^2|^{\frac{r_n\sigma}{2}-1}\right] \leqslant$$
$$\leqslant kV^{r_n\sigma} \leqslant kV, \tag{5}$$

потому что (см. 9.4.3 (3) и 9.4.3 (4), учесть, что $0 \leqslant \eta \leqslant kU$)

$$|2u_n\eta i-\eta^2| \leqslant |u_nkU|+k^2U^2 \leqslant kU^2$$

и

$$(1+u_n^2)^{\frac{r_n\sigma}{2}-1}\leqslant U^{r_n\sigma-2}.$$

Из (4) и (5) следует, что при достаточно малом k можно достигнуть того, что для всех $u_n+i\eta\in E_{u'}$

$$|\omega|<\gamma V \quad \left(\gamma<\frac{1}{2}\right), \tag{6}$$

где γ может быть как угодно малым, откуда

$$(1-\gamma)V\leqslant|V_*|\leqslant(1+\gamma)V. \tag{7}$$

Неравенства (6), (7), в частности, выполняются на кривой $L_{u'}^*$ (верхней границе $E_{u'}$). Для дифференциала длины дуги $L_{u'}^*$ имеет место оценка:

$$\text{на } L_{u'}: dL_{u'}^*=\sqrt{1+\left(k\frac{\partial\eta}{\partial u_n}\right)^2}\,du_n=$$

$$=\sqrt{1+(ku_n)^2(1+u_n^2)^{-1}}\,du_n\leqslant\sqrt{2}\,du_n, \tag{8}$$

на $l_{u'}: dL_{u'}^*=|d\eta|$.

Аргумент V_* (т. е. V на $E_{u'}$) при достаточно малом k оценивается так (считая *a priori*, что $|\arg V_*|\leqslant\pi$):

$$|\arg V_*|\leqslant\left|\frac{\operatorname{Im}V_*}{\operatorname{Re}V_*}\right|\leqslant\frac{|\omega|}{V-|\omega|}\leqslant\frac{\gamma V}{(1-\gamma)V}<1. \tag{9}$$

Этим доказано неравенство 9.4.3 (10), которое понадобилось нам, чтобы показать, что $V^{\rho/\sigma}$ есть однозначная аналитическая функция от комплексной переменной $w_n\in E_{u'}$. Из (9) и (7) следует также, что

$$|V_*^{\rho/\sigma}|=\left|\left(|V_*|e^{i\arg V_*}\right)^{\frac{\lambda+i\mu}{\sigma}}\right|=|V_*|^{\frac{\lambda}{\sigma}}e^{-\frac{\mu}{\sigma}\arg V_*}\geqslant$$

$$\geqslant e^{-\frac{1}{\sigma}}|V_*|^{\frac{\lambda}{\sigma}}\geqslant cV^{\frac{\lambda}{\sigma}} \quad (|\mu|<1), \tag{10}$$

где, таким образом, c не зависит от $\lambda>0$ и $|\mu|<1$.

Имеем

$$\mu_\rho^{(l)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{ix'u'}\,du'\times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum_1^n(1+u_j^2)^{l_j/2}e^{ix_n(u_n+ikU)}\sqrt{1+ku_n(1+u_n^2)^{-1}}\,du_n}{V_*^{\rho/\sigma}}+\right.$$

$$\left.+\int_{l_{u'}}\frac{\sum_1^n(1+u_j^2)^{l_j/2}e^{ix_nw_n}}{V^{\rho/\sigma}}\,dw_n\right)=I_1^{(l)}+I_2^{(l)}, \tag{11}$$

где V_* здесь понимается как V на $L_{u'}$. Второй интеграл возникает, если только

$$k\left(\sum_1^{n-1}(1+u_j^2)^{\frac{r_j}{2r_n}}+1\right)>1.$$

Модуль подынтегральной функции в $I_1^{(l)}$ не превышает

$$c\frac{\sum_1^n (1+u_j^2)^{l_j/2}e^{-kx_nU}}{V^{\lambda/\sigma}}=\alpha(\lambda,\ x_n,\ u), \tag{12}$$

где c не зависит от u, x_n, $\rho=\lambda+i\mu$ ($\lambda>0$, $|\mu|<1$). Интеграл по $u\in R_n$ от (12) мы и будем оценивать. Мы увидим, что он конечен при любых $l\geqslant 0$, $x_n>0$, $\lambda>0$. Если учесть, что $\alpha(\lambda,\ x_n,\ u)$ возрастает с уменьшением x_n и λ ($V\geqslant 1$), то имеет место

$$\alpha(\lambda,\ x_n,\ u)\leqslant\alpha(\lambda_0,\ x_n^0,\ u)\in L(R_n)=L$$
$$(\lambda\geqslant\lambda_0>0,\ x_n\geqslant x_n^0>0).$$

Кроме того, подынтегральная функция в $I_1^{(l)}$ непрерывна по (ρ, x, u). В таком случае на основании признака Вейерштрасса $I_1^{(l)}=I_1^{(l)}(\rho,\ x)$ есть непрерывная функция от (ρ, x). Если подынтегральное выражение в $I_1^{(l)}$ продифференцировать по (комплексному) ρ, то модуль полученной производной с точностью до постоянного коэффициента будет равен

$$\frac{|u^l|\,e^{-kx_nU}\,|\ln V_*|}{|V_*^{\rho/\sigma}|}\leqslant c\frac{|u^l|\,e^{-kx_n^0U}}{V^{\frac{\lambda_0-\varepsilon}{\sigma}}}=\alpha(\lambda_0-\varepsilon,\ x_n^0,\ u) \tag{13}$$

$$\left(\lambda>\lambda_0-\frac{\varepsilon}{2}>\lambda_0-\varepsilon>0;\ |\mu|<1,\ x_n\geqslant x_0>0\right)$$

и, так как правая часть (13) по u принадлежит к L, то вследствие признака Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла можно сказать, что для указанных ρ и x существует непрерывная по (ρ, x) производная $\frac{\partial}{\partial\rho}I_1^{(l)}$. Это показывает, что функция $I_1^{(l)}(\rho,\ x)$ аналитична по ρ ($l\geqslant 0$, $\lambda>0$, $|\mu|<1$, $x_n>0$).

Отметим, что константы в неравенствах (12) и (13) (так же, как в последующих неравенствах при оценке $I_2^{(l)}$) непрерывно зависят от ρ.

Для $0<x_n<1$ (пояснения такие же, как в 9.4.4)

$$|I_1^{(l)}|\leqslant \int \frac{\prod\limits_1^n (1+u_j^2)^{l_j/2}\, e^{-kx_nU}}{V^{\lambda/\sigma}}\,du\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|u|<1}+\int\limits_{|u|>1} \frac{\prod\limits_1^n (1+u_j^2)^{l_j/2}\, e^{-kx_n\sum\limits_1^n u_j^{r_j/r_n}}}{\left(\sum\limits_1^n u_j^{r_j/\sigma}\right)^{\lambda/\sigma}}\,du\leqslant$$

$$\leqslant 1+\int\limits_{\substack{|\xi|>\beta>0\\ \xi_j>0}} \frac{\prod\limits_1^n (1+\xi_j^{2/r_j})^{l_j/2}\,\xi_j^{\frac{1}{r_j}-1}\, e^{-kx_n\sum\limits_1^n \xi_j^{1/r_n}}}{\left|\sum \xi_j\right|^{\lambda}}\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant 1+\int\limits_{\beta}^{\infty} \rho^{\varkappa-1} e^{-cx_n\rho^{\frac{1}{r_n}}}\,d\rho\leqslant 1+\int\limits_{\gamma x_n}^{\infty} e^{-cz} z^{r_n\varkappa-1}\,dz\,\frac{1}{x_n^{r_n\varkappa}}\leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} x_n^{-r_n\varkappa} & (\varkappa>0),\\ 1 & (\varkappa<0),\\ |\ln x_n|+1 & (\varkappa=0), \end{cases}\quad 0<x_n<1. \tag{14}$$

Надо принять во внимание, что интеграл в предпоследнем из этих соотношений, взятый по $(1,\infty)$, сходится, а по $(\gamma x_n, 1)$ он не превышает

$$c\int\limits_{\gamma x_n}^{1} z^{r_n\varkappa-1}\,dz\leqslant \begin{cases} 1 & (\varkappa>0),\\ x_n^{r_n\varkappa} & (\varkappa<0),\\ |\ln x_n|+1 & (\varkappa=0), \end{cases}\quad 0<x_n<\frac{1}{\gamma}. \tag{15}$$

Теперь для $x_n>1$

$$|I_1^{(l)}|\leqslant \int\limits_{|u|<1} e^{-kx_n}\,du+\int\limits_{\substack{|u|>1\\ u_j>0}} (1+u_j^2)^{\frac{l_j}{2}}\, e^{-kx_n\sum\limits_1^n u_j^{r_j/r_n}}\,du\leqslant$$

$$\leqslant e^{-kx_n}+\int\limits_{\substack{|\xi|>\beta\\ \xi_j>0}} \prod_{j=1}^{n}\left(1+\xi_j^{\frac{2r_n}{r_j}}\right)^{l_j/2} \xi_j^{\frac{r_n}{r_j}-1}\, e^{-kx_n\sum\limits_1^n \xi_j}\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant e^{-kx_n}+\int\limits_{\beta}^{\infty} \rho^{r_n(\varkappa+\lambda)-1} e^{-cx_n\rho}\,d\rho\leqslant e^{-kx_n}+\int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-\frac{c}{2}x_n\rho}\leqslant e^{-c_1x_n}\ (c_1>0). \tag{16}$$

Переходим к оценке $I_2^{(l)}$. Теперь внутренний интеграл берется вдоль разреза (i, iB), где

$$B = k\left(\sum_1^{n-1}(1+u_j^2)^{\frac{r_j}{2r_n}}+1\right).$$

Число B зависит от u', при $u'=0$ оно минимально и равно kn. Если $kn>1$, то при вычислении $I_2^{(l)}$ внешнее интегрирование производится по всем $u' \in R_{n-1}$, однако если $kn<1$, то интегрирование по u' ведется по внешности некоторой ограниченной окрестности точки $u'=0$. На (i, iB) имеем $u_n = iy\,(1 \leqslant y \leqslant B)$, при этом входящее в V слагаемое $(1+u_n^2)^{\frac{r_n\sigma}{2}}$ на одном берегу $l_{u'}$ надо понимать как $(y^2-1)^{\frac{r_n\sigma}{2}}e^{i\frac{r_n\sigma}{2}\pi}$, а на другом как $(y^2-1)^{\frac{r_n\sigma}{2}}e^{-i\frac{r_n\sigma}{2}\pi}$. Соответствующие значения V на разных берегах $l_{u'}$ комплексно сопряжены друг к другу, следовательно, их произведение равно квадрату их модуля, и внутренний интеграл в $I_2^{(l)}$ равен

$$-\int_1^B\prod_1^{n-1}(1+u_j^2)^{l_j/2}y^{l_n}e^{-x_ny}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\left\{A+[(y^2-1)\,e^{-i\pi}]^{\frac{r_n\sigma}{2}}\right\}^{\rho/\sigma}}-\frac{1}{\left\{A+[(y^2-1)\,e^{i\pi}]^{\frac{r_n\sigma}{2}}\right\}^{\rho/\sigma}}\right\}dy, \tag{17}$$
$$A=\sum_1^{n-1}(1+u_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}\qquad(\rho=\lambda+i\mu,\ \lambda>0).$$

Модуль выражения в фигурных скобках не превышает (пояснения ниже)

$$\frac{\left|\left(A+[(y^2-1)\,e^{i\pi}]^{\frac{r_n\sigma}{2}}\right)^{\rho/\sigma}-\left(A+[(y^2-1)\,e^{-i\pi}]^{\frac{r_n\sigma}{2}}\right)^{\rho/\sigma}\right|}{\left|A-(y^2-1)^{\frac{r_n\sigma}{2}}\right|^{2\lambda/\sigma}}=$$
$$=A^{-\frac{\lambda}{\sigma}}\frac{\left|\left\{1+\left(\tau e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{r_n\sigma}\right\}^{\rho/\sigma}-\left\{1+\left(\tau e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{r_n\sigma}\right\}^{\rho/\sigma}\right|}{\left|1-\tau^{r_n\sigma}\right|^{2\lambda/\sigma}}\leqslant$$
$$\leqslant a^{-r_n\lambda}\tau^{r_n\sigma}\left|\sin\frac{r_n\sigma\pi}{2}\right|\leqslant a^{-r_n\lambda}\tau^{r_n\sigma},$$

где константы в неравенствах во всяком случае можно считать локально не зависящими от $\rho=\lambda+i\mu$; здесь

$$\tau=a^{-1}\sqrt{y^2-1},\qquad a=A^{\frac{1}{r_n\sigma}}, \tag{18}$$

и так как $1<y<B$, то

$$0<\tau<a^{-1}\sqrt{B^2-1}\leqslant a^{-1}B=$$
$$=\frac{k\left\{\sum\limits_{1}^{n-1}(1+u_j^2)^{\frac{r_j}{2r_n}}+1\right\}}{\left\{\sum\limits_{1}^{n-1}(1+u_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}\right\}^{\frac{1}{r_n\sigma}}}\leqslant ck=\omega<1, \tag{19}$$

где ω можно считать меньшим единицы, взяв достаточно малое k. На этом основании мы опустили знаменатель во втором члене, ограниченный снизу положительной константой. Функция под знаком модуля в числителе аналитична на интервале $|\tau|<1$, равна нулю при $\tau=0$. К ней применена теорема о среднем. Итак, подынтегральное выражение в $I_2^{(l)}$ не превышает по модулю

$$c\prod_{1}^{n-1}(1+u_j^2)^{l_j/2}y^{l_n}e^{-x_ny}a^{-r_n\lambda}\tau^{r_n\sigma}, \tag{20}$$

где c не зависит от u', y, $x_n>0$ и во всяком случае локально от $\lambda>0$.

Мы покажем, что функция (20) суммируема по области (u', y) определения интеграла $I_2^{(l)}$ при любых указанных x, ρ, кроме того, непосредственно видно, что она возрастает с уменьшением x_n и λ. Это приводит к тому, что $I_2^{(l)}(\rho, x)$ непрерывна по указанным (ρ, x) и есть действительно производная (по x) порядка l от I_2. Наконец, если продифференцировать подынтегральное выражение в (17) по ρ, то получим

$$\prod_{1}^{n-1}(1+u_j^2)^{l_j/2}y^{l_n}e^{-x_ny}\frac{1}{\sigma}\left\{\frac{\ln\left(A+[(y^2-1)e^{-i\pi}]^{\frac{r_n\sigma}{2}}\right)}{\left(A+[(y^2-1)e^{-i\pi}]^{\frac{r_n\sigma}{2}}\right)^{\rho/\sigma}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\ln\left(A+[(y^2-1)e^{i\pi}]^{\frac{r_n\sigma}{2}}\right)^{\rho/\sigma}}{\left(A+[(y^2-1)e^{i\pi}]^{\frac{r_n\sigma}{2}}\right)^{\rho/\sigma}}\right\}.$$

Если выражение в фигурных скобках привести к общему знаменателю, взять от него модуль и вынести всюду за скобки A, то, как мы знаем, при оценке (сверху) знаменатель можно опустить как ограниченный снизу положительной константой, что же касается числителя, то он, очевидно, оценивается сверху следующим образом:

$$\ln A \left| \left\{ 1+\left(\tau e^{+i\frac{\pi}{2}}\right)^{r_n\sigma} \right\}^{\rho/\sigma} - \left\{ 1+\left(\tau e^{-\frac{i\pi}{2}}\right)^{r_n\sigma} \right\}^{\rho/\sigma} \right| +$$

$$+ \left| \left\{ 1+\left(\tau e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{r_n\sigma} \right\}^{\rho/\sigma} \ln \left\{ 1+\left(\tau e^{-\frac{i\pi}{2}}\right)^{r_n\sigma} \right\} -\right.$$

$$\left. - \left\{ 1+\left(\tau e^{-\frac{i\pi}{2}}\right)^{r_n\sigma} \right\}^{\rho/\sigma} \ln \left(1+\left(\tau e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{r_n\sigma} \right\} \right| \leqslant (\ln A+1)\,\tau^{r_n\sigma} =$$

$$= (\ln a^{r_n\sigma}+1)\,\tau^{r_n\sigma} \leqslant a^{\varepsilon}\tau^{r_n\sigma} \qquad (\varepsilon>0,\ a\geqslant 1).$$

Константа в правой части зависит от (произвольно малого) ε, но можно считать, что она не зависит от ρ из некоторой малой окрестности ρ_0. В результате получается, что продифференцированное по ρ (непрерывное по (u', y, ρ, x_n), $x_n>0$, $\lambda>0$) подынтегральное выражение не превышает по модулю функцию, аналогичную (20),

$$c\prod_{1}^{n-1}(1+u_j^2)^{l_j/2}y^{l_n}e^{-x_n y}a^{\varepsilon-r_n\lambda}\tau^{r_n\sigma} \in L. \tag{20'}$$

Это показывает, что функция $I_2^{(l)}(\rho, x)$ аналитична по ρ.

Итак (пояснения ниже),

$$|I_2^{(l)}| \leqslant \int \prod_{1}^{n-1}(1+u_j^2)^{l_j/2}a^{-r_n\lambda}\int_1^B y^{l_n}e^{-x_n y}\tau^{r_n\sigma}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int \prod_{1}^{n-1}(1+u_j^2)^{l_j/2}a^{1-r_n\lambda}\,du' \int_0^{\omega}(1+a^2\tau^2)^{l_n/2}e^{-x_n\sqrt{1+a^2\tau^2}}\tau^{r_n\sigma}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 1+\int\limits_{\substack{|\xi|>\beta>0\\ \xi_j>0}} \prod_{1}^{n-1}\left(1+\xi_j^{\frac{2r_n}{r_j}}\right)^{\frac{l_j}{2}}\xi_j^{\frac{r_n}{r_j}-1}a^{1-r_n\lambda}\,d\xi \times$$

$$\times \int_0^{\omega}(1+a^2\tau^2)^{l_n/2}e^{-x_n\sqrt{1+a^2\tau^2}}\tau^{r_n\sigma}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 1+\int_0^{\omega}\tau^{r_n\sigma}\,d\tau\int_{\beta}^{\infty}\rho^{\,l_n+1-r_n\lambda+r_n\sum\limits_{1}^{n-1}\frac{1+l_j}{r_j}-1}e^{-x_n\sqrt{1+c^2\rho^2\tau^2}}\,d\rho =$$

$$= 1+\int_0^{\omega}\tau^{r_n\sigma}\,d\tau\int_{\beta}^{\infty}\rho^{r_n\varkappa-1}e^{-x_n\sqrt{1+c^2\rho^2\tau^2}}\,d\rho \leqslant$$

$$\leqslant 1+\frac{1}{x_n^{r_n\varkappa}}\int_0^{\omega}\frac{d\tau}{\tau^{r_n(\varkappa-\sigma)}}\int_{\beta x_n\tau}^{\omega}\zeta^{r_n\varkappa-1}e^{-c\zeta}\,d\zeta \qquad (c>0). \tag{21}$$

В первом соотношении мы воспользовались оценкой (20); во втором произвели во внутреннем интеграле замену y на τ по формуле (18), учтено также неравенство (19); в третьем интеграл по u' разбивается на два по $|u'|<1$ и $|u'|>1$, из коих первый, очевидно, ограниченный; кроме того, учтены симметрические свойства по u' подынтегральной функции; вопрос сведен к интегрированию по $u_j>0$, при этом введена замена переменных

$$\xi_j=u_j^{r_j/r_n},\quad du_j=\frac{r_n}{r_j}\,\xi_j^{\frac{r_n}{r_j}-1}d\xi_j \qquad (j=1,\ \ldots,\ n-1);$$

в четвертом изменен порядок интегрирования, введены в пространстве ξ полярные координаты ($|\xi|=\rho$), использован тот факт, что переменные a и ρ имеют один и тот же порядок:

$$\rho=\left(\sum_1^{n-1}u_j^{2r_j/r_n}\right)^{1/2}\leqslant\left\{\sum_1^{n-1}(1+u_j^2)^{\frac{r_j\sigma}{2}}\right\}^{\frac{1}{r_n\sigma}}=a\leqslant\rho,$$

и применено неравенство $(1+\rho^2\tau^2)^{l_n/2}\leqslant\rho^{l_n}$ $(\rho>\beta,\quad 0<\tau<\omega)$.

Наконец, в последнем соотношении использовано неравенство $\sqrt{1+c^2\rho^2\tau^2}>c\rho\tau$ и введена замена $x_n\rho\tau=\zeta$, $x_n\tau\,d\rho=d\zeta$.

Пусть $\varkappa>0$ и параметр σ подобран так, чтобы $r_n(\varkappa-\sigma)<1$, тогда интеграл по ζ в правой части (21) по интервалу $(0,\infty)$ конечен, так же как конечен интеграл по τ, поэтому

$$|I_2^{(l)}|\leqslant x_n^{-r_n\varkappa}.$$

Если $\varkappa=0$, то интеграл по ζ имеет при малых x_n порядок $\ln(x_n\tau)$, поэтому при $\sigma>0$ будем иметь

$$|I_2^{(l)}|\leqslant|\ln x_n|+1.$$

Наконец, при $\varkappa<0$ интеграл по ζ при малых x_n имеет порядок $x_n^{r_n\varkappa}$, поэтому при $\sigma>0$

$$|I_2^{(l)}|\leqslant 1.$$

Мы доказали, что (при соответствующем σ)

$$|I_2^{(l)}|\leqslant\begin{cases}x_n^{-r_n\varkappa}, & \varkappa>0,\\ 1, & \varkappa<0,\\ \ln\dfrac{1}{x_n}, & \varkappa=0,\end{cases}\qquad 0<x_n<1.$$

Наконец, чтобы получить оценку $I_2^{(l)}$ для больших x_n, разбиваем интеграл $I_2^{(l)}$ на два интеграла: по $|u'|<1$ и по $|u'|>1$. Первый интеграл (см. третий член в формуле (21)) имеет порядок

e^{-x_n} $(x_n > 1)$. Чтобы оценить второй, воспользуемся предпоследним интегралом (21). Тогда получим

$$|I_2^{(l)}| \leqslant e^{-x_n} + \int_0^\omega \tau^{r_n\sigma}\, d\tau \int_\beta^\infty \rho^{r_n\varkappa-1} e^{-x_n\sqrt{1+c^2\rho^2\tau^2}}\, d\rho =$$

$$= e^{-x_n} + \int_0^\omega \frac{d\tau}{\tau^{r_n(\varkappa-\sigma)}} \int_{\beta\tau}^\infty \xi^{r_n\varkappa-1} e^{-x_n\sqrt{1+c^2\xi^2}}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant e^{-x_n} + \int_0^\omega \frac{d\tau}{\tau^{r_n(\varkappa-\sigma)}} \left(\int_{\beta\tau}^{\beta\omega} \xi^{r_n\varkappa-1}\, d\xi e^{-x_n} + \int_{\beta\omega}^\infty e^{-x_n c_1 \xi}\, d\xi \right) \leqslant e^{-c_2 x_n}$$

$(r_n(\varkappa-\sigma) < 1;\ c_1,\ c_2,\ \sigma > 0)$.

В случае $x_n < 0$ кривая $L_{u'}^*$ (см. (1)) в комплексной плоскости u_n берется симметричной по отношению к оси $u_n = 0$, доказательство в этом случае аналогично.

Итак, мы доказали неравенства (2), (3), при этом уже отмечалось, что константа в них непрерывно зависит от ρ.

9.4.7. При определении $\mu_\rho(\boldsymbol{x}) = \mu_\rho^{(0)}$ по формуле 9.4.3 (8) была выделена роль переменной u_n. Имея это в виду, положим $\mu_\rho(\boldsymbol{x}) = \mu_{\rho n}(\boldsymbol{x})$. С таким же успехом можно ввести функции $\mu_{\rho j}(\boldsymbol{x})$ $(j = 1, \ldots, n)$, где роль u_n играет u_j. Если $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка, у которой $x_i \neq 0$, $x_j \neq 0$, то

$$\mu_{\rho i}(\boldsymbol{x}) = \mu_{\rho j}(\boldsymbol{x}),$$

потому что это равенство имеет место во всяком случае для больших действительных ρ, но тогда и для любых комплексных $\rho = \lambda + i\mu$ $(\lambda > 0)$, вследствие аналитичности обеих функций по ρ при фиксированном $\boldsymbol{x}$. Для заданного j функция $\mu_{\rho j}(\boldsymbol{x})$ определена и непрерывна (по $\boldsymbol{x}$) в любой точке $\boldsymbol{x}$, имеющей координату $x_j \neq 0$. Из сказанного ясно, что $\mu_{\rho j}(\boldsymbol{x})$ можно продолжить по непрерывности в любую точку $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, и тогда

$$\mu_\rho(\boldsymbol{x}) = \mu_{\rho 1}(\boldsymbol{x}) = \ldots = \mu_{\rho n}(\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}). \tag{1}$$

При этом для вектора $\boldsymbol{l} \geqslant \boldsymbol{0}$ существует такое $\sigma_0 > 0$, что для $\sigma > \sigma_0$ функция $\mu_\rho^{(l)}(\boldsymbol{x})$ непрерывна и

$$|\mu_\rho^{(l)}(\boldsymbol{x})| \leqslant \begin{cases} |x_j|^{-r_j\varkappa} & (\varkappa > 0), \\ |\ln|x_j|| + 1 & (\varkappa = 0), \\ 1 & (\varkappa < 0) \end{cases} \tag{2}$$

$$\left(\varkappa = \sum_1^n \frac{1+l_j}{r_j} - \lambda,\ |x_j| < 1,\ \rho = \lambda + i\mu,\ \lambda > 0\right),$$

$$|\mu_\rho^{(l)}(\boldsymbol{x})| \leqslant e^{-c|x_j|} \qquad (|x_j| > 1,\ c > 0).$$

Отсюда немедленно следуют оценки

$$|\mu_\rho^{(l)}(x)| \leqslant c \begin{cases} \left(\sum_1^n |x_j|^{r_j\varkappa}\right)^{-1} & (\varkappa > 0), \\ |\ln|x||+1 & (\varkappa = 0), \qquad |x|<1, \\ 1 & (\varkappa < 0), \end{cases} \tag{3}$$

$$|\mu_\rho^{(l)}(x)| \leqslant c e^{-c'|x|} \qquad (|x|>1,\ c'>0), \tag{4}$$

где положительные константы c и c', входящие в неравенства, непрерывно зависят от ρ.

При $l=0$ из этих оценок следует, что

$$\mu_\rho(x) = \mu_\rho^{(0)}(x) \in L = L(R_n).$$

В самом деле, при $\varkappa \leqslant 0$ это очевидно, если же $\varkappa > 0$, то в силу того, что $\lambda > 0$,

$$\frac{1}{\varkappa}\sum_1^n \frac{1}{r_j} - 1 = \frac{\lambda}{\varkappa} > 0$$

и, следовательно (пояснения, как в 9.4.4),

$$\int |\mu_\rho(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{|x|<1} \left\{\sum_1^n |x_j|^{r_j\varkappa}\right\}^{-1} dx + \int\limits_{|x|>1} e^{-c'|x|}dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\substack{|\xi|<\beta \\ \xi_j>0}} \left(\sum_1^n \xi_j\right)^{-1} \prod_1^n \xi_j^{\frac{1}{r_j\varkappa}-1}\,d\xi + 1 \leqslant \int_0^\beta \rho^{\frac{1}{\varkappa}\sum_1^n \frac{1}{r_j}-2}\,d\rho + 1 \leqslant 1.$$

Пусть теперь $\varphi \in S$, тогда имеет смысл ($\mu_\rho \in L$)

$$(\mu_\rho,\ \varphi) = \int \mu_\rho(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (\lambda > 0). \tag{5}$$

Обозначим через $\mu_{\rho *}^{(l)}(x)$ правую часть (3) без множителя $c = c(\rho)$. Легко видеть в силу монотонных свойств функции $\varkappa$ (по λ) и непрерывности $c(\rho)$ (по ρ), что для любого $\rho_0 = \lambda_0 + i\mu_0$ ($\lambda_0 > 0$, $|\mu_0| < 1$) найдется $\delta > 0$ так, что если $|\rho - \rho_0| < \delta$ ($\rho = \lambda + i\mu$, $\lambda > 0$, $|\mu| < 1$), то (c, $c_1 > 0$)

$$\begin{aligned} &|\mu_\rho^{(l)}(x)| \leqslant c\mu_{\lambda_0-\delta *}^{(l)}(x) \in L\ (|x|<1), \\ &|\mu_\rho^{(l)}(x)| \leqslant c e^{-c_1|x|} \in L\ (|x|>1), \end{aligned} \tag{6}$$

где c, c_1 не зависят от указанных ρ. Поэтому выполняется признак Вейерштрасса равномерной сходимости (локально по ρ)

интеграла (5) и (μ_ρ, φ) зависит непрерывно от комплексных $\rho\,(\lambda > 0)$. Производная от $\varphi\mu_\rho$ по ρ также непрерывна по $(\rho, \boldsymbol{x})$, и для нее имеют место такие же оценки, как (6) (см. 9.4.6 (13) и (20)). Это показывает, что функция (μ_ρ, φ) дифференцируема, следовательно, аналитична по ρ.

9.4.8. Для любых комплексных $\rho = \lambda + i\mu$ $(\lambda > 0)$, а следовательно, и для $\rho = 1$ имеет место при достаточно большом σ $(r_n(\varkappa - \sigma) < 1)$ равенство

$$\hat{\Lambda}_{\rho,\, r,\, \sigma} = \mu_\rho(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

В самом деле, функции

$$(\hat{\Lambda}_{\rho,\, r,\, \sigma}, \ \varphi) \text{ и } (\mu_\rho, \ \varphi) \quad (\varphi \in S)$$

аналитичны по $\rho\,(\lambda > 0)$ и совпадают для действительных достаточно больших ρ, поэтому они совпадают для любых ρ, но также и для любых $\varphi \in S$, что влечет (1).

9.4.9. **Другие оценки анизотропных ядер.** В нижеследующей лемме оцениваются разности ядра G_r в метрике $L_p(R_{n-1})$. Эти оценки будут использованы при доказательстве теорем вложения. Введем обозначения:

$$\boldsymbol{x} = (\eta, \ \zeta), \quad \eta = (x_1, \ \ldots, \ x_{n-1}), \quad x_n = \zeta.$$

Лемма*). *Пусть* $\boldsymbol{r} = (r_1, \ \ldots, \ r_n) > 0$, $1 < p < \infty$, *и задано нецелое положительное число* L *такое, что при некотором* j, $j = 1, \ \ldots, \ n-1$ *выполняются неравенства* (см. 9.4, 9.4.1)

$$1 - \frac{1}{r_n} < \frac{L}{r_j} < \min_i \left\{ \sigma - \sum_1^n \frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_i} \right\}. \tag{1}$$

Тогда

$$\int\limits_{R_{n-1}} \left| \Delta_{x_j h}^{s+1} G_r(\eta, \ \zeta) \right| d\eta \leqslant c\, |h|^L\, |\zeta|^{-r_n\left(\frac{1}{r_n} + \frac{L}{r_j} - 1\right)}, \tag{2}$$

где s *— целая часть* L, *т. е.* $L = s + l$, $0 \leqslant l < 1$, s *— целое.*

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать $h > 0$, $j = 1$, $G_r = G$ и введем ядро

$$K_\nu(t) = (1 + t^2)^{-\nu/2} \quad (-\infty < t < \infty).$$

---

*) П. И. Лизоркин [12].

Будем писать

$$G(t)=G(t,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$
$$I_{-l}G\ (t)=\psi(t);$$

s-ю разность с шагом h от функции $\varphi(\zeta)$ будем понимать в смысле

$$\Delta_h\varphi=\varphi(\zeta+h)-\varphi(\zeta),\quad \Delta_h^{s+1}\varphi=\Delta_h\Delta_h^s\varphi.$$

Из дальнейших оценок будет видно, что ψ есть суммируемая функция от t во всяком случае для почти всех $x_2,\ \ldots,\ x_{n+1}$.

Имеем

$$G(t)=\int K_{s+l}(t-\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi,$$

$$\Delta_h^{s+1}G(t)=\left\{\int_{-\infty}^{t}+\int_{t}^{t+(s+1)h}+\int_{t+(s+1)h}^{\infty}\right\}\Delta_h^{s+1}K_{s+l}(t-\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi=$$
$$=I_1+I_2+I_3,\quad (3)$$

$$\int|I_1|\,dt\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(\xi)|\,d\xi\int_{\xi}^{\infty}\left|\Delta_h^{s+1}K_{s+l}(t-\xi)\right|dt\leqslant$$
$$\leqslant\|\psi\|_L\int_0^{\infty}\left|\Delta_h^{s+1}K_{s+l}(t)\right|dt,\quad L=L(-\infty,\ \infty).$$

Но (пояснения ниже)

$$\int_0^{\infty}\left|\Delta_h^{s+1}K_{s+l}(t)\right|dt=\int_0^{\infty}dt\int_0^{h}\ldots\int_0^{h}\left|K_{s+l}^{(s+1)}\left(t+\sum_1^{s+1}t_k\right)\right|dt_1\ldots dt_{s+1}\ll$$
$$\ll\int_0^{\infty}dt\int_0^{h}\ldots\int_0^{h}\frac{dt_1\ldots dt_{s+1}}{\left(t+\sum\limits_1^{s+1}t_k\right)^{1-(s+l)+s+1}}\ll\int_0^{\infty}dt\int_0^{ch}\frac{\rho^s\,d\rho}{(t+\rho)^{2-l}}\ll$$
$$\ll\int_0^{ch}\rho^{s+l-1}\,d\rho\ll h^{s+l}.$$

Во втором соотношении (неравенстве) применена (третья) оценка 8.1 (7), в третьем в пространстве $t_1,\ \ldots,\ t_{s+1}$ введены полярные координаты и учтено, что $\sum\limits_1^{s+1}t_k\geqslant\left(\sum\limits_1^{s+1}t_k^2\right)^{1/2}$, в четвертом заменен порядок интегрирования.

Интеграл I_3 оценивается аналогично:

$$\int |I_j|\,dt \leqslant ch^{s+l}\|\psi\|_L \qquad (j=1,\ 3). \tag{4}$$

Далее

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |I_2|\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \int_t^{t+(s+1)h} \Delta_h^{s+1} K_{s+l}(t-\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi \right| \leqslant \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\xi)|\,d\xi \int_{\xi-(s+1)h}^{\xi} |\Delta_h^{s+1} K_{s+l}(t-\xi)|\,dt = \\
&= \|\psi\|_L \int_{-(s+1)h}^{0} |\Delta_h^{s+1} K_{s+l}(t)|\,dt = \\
&= \|\psi\|_L \int_{-(s+1)h}^{0} dt \left| \int_0^h \ldots \int_0^h \left\{ K_{s+l}^{(s)}\left(t + \sum_1^s t_k + h\right) - \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - K_{s+l}^{(s)}\left(t + \sum_1^s t_k\right)\right\} dt_1 \ldots dt_s \right| \leqslant \\
&\leqslant 2\|\psi\|_L \int_{-(s+1)h}^{(s+1)h} dt \int_0^h \ldots \int_0^h \left| K_{s+l}^{(s)}\left(t + \sum_1^s t_k\right)\right| dt_1 \ldots dt_s \leqslant \\
&\leqslant \|\psi\|_L \int_{-(s+1)h}^{(s+1)h} dt \int_0^{ch} \frac{\rho^{s-1}d\rho}{|t+\rho|^{1-l}} = \|\psi\|_L \int_0^{ch} \rho^{s+l-1}\,d\rho \int_{-(s+1)\frac{h}{\rho}}^{\frac{s+1}{\rho}h} \frac{du}{|1+u|^{1-l}} \leqslant \\
&\leqslant 2\|\psi\|_L \int_0^{ch} \rho^{s+l-1}\,d\rho \int_0^{\frac{s+1}{\rho}h+1} \frac{dv}{v^{1-l}} \leqslant \\
&\leqslant \|\psi\|_L \int_0^{ch} \rho^{s+l-1}\left[\left(\frac{h}{\rho}\right)^l + 1\right] d\rho \leqslant \|\psi\|_L h^{l+s}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Из (3) — (5) следует после дополнительного интегрирования неравенств по $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, что

$$\int_{R_{n-1}} |\Delta_{x_1 h}^s G_r(\eta,\ \xi)|\,d\eta \leqslant h^{s+l_1} \int_{R_{n-1}} |I_{x_1,\ -(s+l_1)} G_r|\,d\eta$$

$$(s=0,\ 1,\ \ldots;\ j=1,\ \ldots,\ n-1).$$

Воспользовавшись оценками 9.4.1 (2) $\left(\text{учесть, что } \varkappa=\frac{1+s+l_1}{r_1}+\right.$ $\left.+\sum_2^n \frac{1}{r_j}-1>0\right)$, получим

$$\int_{R_{n-1}} |I_{x_1,\,-(s+l_1)}\,G_r|\,d\eta \leqslant \int_{\xi_j>0} \frac{d\eta}{\xi^{r_n\varkappa}+\sum_1^{n-1} x_j^{r_j\varkappa}} \leqslant \int \frac{\prod_1^{n-1} \lambda_j^{\frac{1}{r_j\varkappa}-1}\,d\lambda}{\xi^{r_n\varkappa}+\sum_1^{n-1}\lambda_j} \leqslant$$

$$\leqslant \int \frac{\rho^{\sum_1^{n-1}\frac{1}{r_j\varkappa}-1}}{\xi^{r_n\varkappa}+\rho}\,d\rho=\frac{1}{\xi^{r_n\varkappa}} \int_{\rho<\xi^{r_n\varkappa}} \rho^{\sum_1^{n-1}\frac{1}{r_j\varkappa}-1}\,d\rho+\int_{\xi^{r_n\varkappa}<\rho} \rho^{\sum_1^{n-1}\frac{1}{r_j\varkappa}-2}\,d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\xi^{r_n\varkappa}}\,\xi^{r_n\sum_1^{n-1}\frac{1}{r_j}}+\xi^{r_n\left(\sum_1^{n-1}\frac{1}{r_j}-\varkappa\right)}=2\xi^{-r_n\left(\frac{s+l_1}{r_1}+\frac{1}{r_n}-1\right)}.$$

Первое неравенство следует из первого неравенства 9.4.1 (2) ($\varkappa>0$) и симметрии его правой части, во втором делается подстановка $x_j^{r_j\varkappa}=\lambda_j$, в третьем вводятся полярные координаты, в последнем надо учесть, что

$$\varkappa-\sum_1^{n-1}\frac{1}{r_j}=\frac{s+l_1}{r_1}+\frac{1}{r_n}-1>0.$$

9.5. Теоремы вложения

9.5.1. Теорема разных измерений. *Справедливо вложение*

$$L_p^r(R_n)\to B_p^\varrho(R_m), \tag{1}$$

$$\varrho=(\varrho_1,\ \ldots,\ \varrho_m),\quad \varrho_i=r_i\varkappa\ \ (i=1,\ \ldots,\ m), \tag{2}$$

$$1<p\leqslant\infty,\quad B_\infty^\varrho=H_\infty^\varrho,\quad 1\leqslant m<n,$$

$$\varkappa=1-\frac{1}{p}\sum_{m+1}^n\frac{1}{r_j}>0.$$

При условии $2\leqslant p\leqslant\infty$ имеет место $L_p^r\to B_p^r$ (см. 9.3 (3)) и теорема следует из соответствующей теоремы для B-классов (см. 6.5). Поэтому существенно доказать ее для $1<p<2$. Однако приводимое ниже доказательство годится для всех конечных p.

Доказательство. Достаточно провести доказательство в случае $m=n-1$, потому что если $m<n-1$, то можно перейти от n к $n-1$, пользуясь вложением (1), а переход от $n-1$ к m осуществить с помощью соответствующей теоремы для B классов (см. 6.5). Это возможно вследствие транзитивности соотношений (2) (см. 7.1).

Итак, надо только доказать вложение

$$L_p^r(R_n) \to B_p^\rho(R_{n-1}), \tag{3}$$

$$\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}), \quad \rho_i=r_i\varkappa, \tag{4}$$

$$\varkappa=1-\frac{1}{pr_n}>0. \tag{5}$$

Имеет место (см. 9.3 (1))

$$L_p^r(R_n) \to H_p^r(R_n) \to H_p^\rho(R_{n-1}) \to L_p(R_{n-1}).$$

Это показывает, что произвольная функция $f \in L_p^r(R_n)$ имеет след $g(x)=f|_{R_{n-1}}$ на R_{n-1}, принадлежащий к $L_p(R_{n-1})$ и выполняется неравенство

$$\|g\|_{L_p(R_{n-1})} \leqslant c\|f\|_{L_p^r(R_n)}. \tag{6}$$

Будем считать, что $y=(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in R_{n-1}$, $z=x_n$, и пусть (как всегда) $\bar{\rho}_1$ есть наибольшее целое число, меньшее ρ_1, и $f \in L_p^r(R_n)$. Согласно теореме 9.2.2

$$\frac{\partial^{\bar{\rho}_1} f}{\partial x_1^{\bar{\rho}_1}} \in L_p^{r'}(R_n),$$

где

$$r'=\varkappa' r, \quad \varkappa'=1-\frac{\bar{\rho}_1}{r_1}>0$$

(ведь $\bar{\rho}_1<\rho_1<r_1$), и

$$\left\|\frac{\partial^{\bar{\rho}_1} f}{\partial x_1^{\bar{\rho}_1}}\right\|_{L_p^{r'}(R_n)} \leqslant c\|f\|_{L_p^r(R_n)}.$$

Поэтому имеет место представление $(\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}))$

$$\frac{\partial^{\bar{\rho}_1} f}{\partial x_1^{\bar{\rho}_1}}=\int G_{r'}(y-\eta, z-\zeta)\, v(\eta, \zeta)\, d\eta\, d\zeta \quad (v \in L_p(R_n)) \tag{7}$$

и

$$\|v\|_{L_p(R_n)}=\left\|\frac{\partial^{\bar{\rho}_1} f}{\partial x_1^{\bar{\rho}_1}}\right\|_{L_p^{r'}(R_n)} \leqslant c\|f\|_{L_p^r(R_n)}. \tag{8}$$

Положим

$$w(y) = \int G_{r'}(y-\eta,\ \zeta)\,v(\eta,\ \zeta)\,d\eta\,d\zeta = \left.\frac{\partial^{\overline{\rho}_1} f}{\partial x_1^{\overline{\rho}_1}}\right|_{R_{n-1}} \tag{9}$$

(учесть четность $G_{r'}$). Пояснение того факта, что формальная замена $z=0$ в (7) приводит к следу $\dfrac{\partial^{\overline{\rho}_1} f}{\partial x_1^{\overline{\rho}_1}}$ на R_m, будет сделано в конце доказательства.

Пусть

$$\Lambda(y,\ z) = \Delta^2_{x_1 h} G_{r'}(y,\ z)$$

есть вторая разность $G_{r'}$ с шагом h в направлении оси x_1. Тогда

$$\Delta^2_{x_1 h}\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{R_{n-1}} \Lambda(y-\eta,\ \zeta)\,v(\eta,\ \zeta)\,d\eta\right)d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{R_{n-1}} \Lambda(\eta,\ \zeta)\,v(y-\eta,\ \zeta)\,d\eta\right)d\zeta,$$

откуда, применяя два раза неравенство Минковского, получим

$$\|\Delta^2_{x_1 h}\omega\|_{L_p(R_{n-1})} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{R_{n-1}} dy\left|\int_{R_{n-1}} \Lambda(\eta,\ \zeta)\,v(y-\eta,\ \zeta)\,d\eta\right|^p\right\}^{1/p} d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{R_{n-1}} |\Lambda(\eta,\ \zeta)|\,d\eta\left(\int |v(y-\eta,\ \zeta)|^p\,dy\right)^{1/p} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} I(h,\ \zeta)\,\|v(\eta,\ \zeta)\|_{L_p(R_{n-1})}\,d\zeta, \tag{10}$$

$$I(h,\ \zeta) = \int_{R_{n-1}} |\Delta^2_{x_1 h} G_{r'}(\eta,\ \zeta)|\,d\eta. \tag{11}$$

Положим

$$\alpha_1 = \rho_1 - \overline{\rho}_1$$

и заметим, что

$$\frac{1}{r_n'} + \frac{\alpha_1}{r_1'} = \frac{1}{1-\frac{\overline{\rho}_1}{r_1}}\left(\frac{1}{r_n} + \frac{\alpha_1}{r_1}\right) = \frac{\frac{1}{r_n} + \frac{\alpha_1}{r_1}}{\frac{1}{pr_n} + \frac{\alpha_1}{r_1}} > 1 \quad (p > 1),$$

поэтому можно определить l_1, удовлетворяющее неравенству $0 < l_1 < \alpha_1$ и такое, что

$$\frac{1}{r_n'} + \frac{l_1}{r_1'} > 1.$$

В таком случае в силу 9.4.9 (2) для $G_{r'}$ при $h = 1 + l_1$, l_1

$$I(h, \zeta) \leqslant |h|^{1+l_1} |\zeta|^{\beta'}, \tag{12}$$

$$I(h, \zeta) \leqslant |h|^{l_1} |\zeta|^{\beta} \tag{13}$$

(замена в (13) абсолютной величины второй разности на превышающую ее сумму абсолютных величин первых разностей), где

$$\beta = -r'_n\left(\frac{1}{r'_n} + \frac{l_1}{r'_1} - 1\right),$$

$$\beta' = -r'_n\left(\frac{1}{r'_n} + \frac{l_1+1}{r'_1} - 1\right) = \beta - \frac{r'_n}{r'_1}.$$

Введем еще числа

$$\alpha = \frac{r'_n}{r'_1} p (l_1 - \alpha_1) - 1 < -1,$$

$$\alpha' = \frac{r'_n}{r'_1} p (l_1 - \alpha_1 + 1) - 1 > -1, \quad \alpha' = \alpha + \frac{r'_n}{r'_1} p.$$

Числа α, α', β, β' связаны следующими соотношениями:

$$\alpha + p + p\beta = -1 - \frac{r'_n \alpha_1 p}{r'_1} + r'_n p = -1 - \frac{r_n \alpha_1 p}{r_1} + r_n p\left(1 - \frac{\delta_1}{r_1}\right) =$$

$$= -1 - \frac{r_n \alpha_1 p}{r_1} + r_n p\left(1 - \frac{\rho_1 - \alpha_1}{r_1}\right) = -1 + r_n p\left(1 - \frac{\rho_1}{r_1}\right) =$$

$$= -1 + r_n p\left(1 - 1 + \frac{1}{r_n p}\right) = 0,$$

$$\alpha' + p + p\beta' = 0.$$

Ниже мы воспользуемся *неравенством Харди* ($\varphi(t) \geqslant 0$):

$$\left\{\int_0^\infty t^\alpha \left(\int_{|\zeta| < t} \varphi(\zeta)\, d\zeta\right)^p dt\right\}^{1/p} = \left\{\int_0^\infty dt \left(\int_{|u| < 1} \varphi(tu)\, t^{\frac{\alpha}{p} + 1}\, du\right)^p\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|u| < 1} \left(\int_0^\infty \varphi(tu)^p\, t^{\alpha + p}\, dt\right)^{1/p} du = c\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta)^p |\zeta|^{\alpha+p}\, d\zeta\right)^{1/p},$$

$$c = \int_0^1 \frac{du}{u^{1 + \frac{\alpha+1}{p}}} < \infty, \quad \text{если} \quad \alpha < -1, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Доказательство его, таким образом, свелось к замене переменной $\zeta = tu$ и затем к применению неравенства Минковского *).

*) См. Харди, Литтлвуд и Полиа [1].

Аналогично доказывается неравенство

$$\int_0^\infty t^\alpha \left(\int_{|\zeta|>t} \varphi(\zeta)\, d\zeta\right)^p dt \leqslant c_1 \int_{-\infty}^\infty \varphi(\zeta)^p |\zeta|^{\alpha+p}\, d\zeta,$$

$$c_1 = \int_1^\infty \frac{du}{u^{1+\frac{\alpha+1}{p}}}, \quad \text{если } \alpha > -1, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Теперь имеем (полагая в третьем соотношении $t = h^{r_1/r_n}$)

$$\|f\|^p_{b^{\rho_1}_{x_1 p}(R_{n-1})} = \int_0^\infty h^{-1-p\alpha_1} \|\Delta^2_{x_1 h} w\|^p_{L_p(R_{n-1})}\, dh \leqslant \int_0^\infty h^{-1-p\alpha_1}\, dh \times$$

$$\times \left\{\left[\int_{|\zeta|<h^{r_1'/r_n'}} + \int_{|\zeta|>h^{r_1'/r_n'}}\right] I(h, \zeta) \|v(\eta, \zeta)\|_{L_p(R_{n-1})}\, d\zeta\right\}^p \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty h^{-1-p\alpha_1}\, dh \left(\int_{|\zeta|<h^{r_1'/r_n'}} h^{l_1} |\zeta|^\beta \|v(\eta, \zeta)\|_{L_p(R_{n-1})}\, d\zeta\right)^p +$$

$$+ \left(\int_{|\zeta|>h^{r_1'/r_n'}} h^{l_1+1} |\zeta|^{\beta'} \|v(h, \zeta)\|_{L_p(R_{n-1})}\, d\zeta\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty t^\alpha\, dt \left(\int_{|\zeta|<t} |\zeta|^\beta \|v(\eta, \zeta)\|_{L_p(R_{n-1})}\, d\zeta\right)^p +$$

$$+ \int_0^\infty t^{\alpha'}\, dt \left(\int_{|\zeta|>t} |\zeta|^{\beta'} \|v(\eta, \zeta)\|_{L_p(R_{n-1})}\, d\zeta\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^\infty \|v(\eta, \zeta)\|^p_{L_p(R_{n-1})}\, d\zeta = \|v\|^p_{L_p(R_n)}.$$

Так как в полученном неравенстве x_1 можно заменить на x_l, то мы доказали (см. еще (8)), что

$$\|f\|_{b^{\rho_l}_{x_l p}(R_n)} \leqslant \|v\|_{L_p(R_n)} \qquad (l = 1, \ldots, n-1),$$

откуда (см. еще (6)) при $z = 0$ имеет место

$$\|f(y, z)\|_{B^\rho_p(R_{n-1})} \leqslant \|f\|_{L^r_p(R_n)}. \tag{14}$$

Оно, очевидно, верно при любом z, не обязательно равном нулю, что доказывается аналогично. Этим доказано (3).

Функцию $f \in L_p^r(R_n)$ можно записать в виде

$$f(y, z) = \int G_r(y - \eta, z - \zeta)\, \lambda(\eta, \zeta)\, d\eta\, d\zeta,$$

$$\|f\|_{L_p^r(R_n)} = \|\lambda\|_{L_p(R_n)}.$$

Поэтому

$$f(y, z+h) - f(y, z) = \\ = \int G_r(y - \eta, z - \zeta)\, [\lambda(\eta, \zeta + h) - \lambda(\eta, \zeta)]\, d\eta\, d\zeta$$

и в силу (14)

$$\left\| \frac{\partial^{\bar\rho_1}}{\partial x_1^{\bar\rho_1}} [f(y, z+h) - f(y, z)] \right\|_{L_p(R_{n-1})} \leqslant \\ \leqslant \|f(y, z+h) - f(y, z)\|_{B_p^{\varrho}(R_{n-1})} \leqslant \|f(y, z+h) - f(y, z)\|_{L_p^r(R_n)} = \\ = \|\lambda(\eta, \zeta+h) - \lambda(\eta, \zeta)\|_{L_p(R_n)} \to 0 \quad (h \to 0) \qquad (1 \leqslant p < \infty).$$

Это показывает, что если в $\frac{\partial^{\bar\rho_1}}{\partial x_1^{\bar\rho_1}} f(y, z)$ зафиксировать z, то получится функция от $y \in R_{n-1}$, являющаяся следом $\frac{\partial^{\bar\rho_1} f}{\partial x_1^{\bar\rho_1}}$ на подпространстве $x_n = z$.

9.5.2. Обратная теорема разных измерений. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и заданы положительные числа r_i $(i = 1, \ldots, n)$ и всевозможные векторы λ с неотрицательными целочисленными координатами*

$$\lambda = (\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n),$$

для которых

$$\rho_i^{(\lambda)} = r_i \left(1 - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\lambda_j}{r_j} - \frac{1}{p} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{r_j}\right) = r_i \varkappa > 0 \tag{1}$$

$$(i = 1, \ldots, m).$$

Пусть еще каждому вектору λ приведена в соответствие функция

$$\varphi_{(\lambda)}(u) = \varphi_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_m) \in B_p^{\varrho^{(\lambda)}}(R_m).$$

Тогда можно построить функцию $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных, обладающую следующими свойствами:

$$f \in L_p^r(R_n), \tag{2}$$

$$\|f\|_{L_p^r(R_n)} \leqslant c \sum_{\lambda} \|\varphi_{(\lambda)}\|_{B_p^{\varrho^{(\lambda)}}(R_m)}, \tag{3}$$

$$f^{(\lambda)}|_{R_m} = \varphi_{(\lambda)}(u). \tag{4}$$

Доказательство. Покажем, что в качестве f можно взять уже определенную в 6.8 функцию

$$f=\sum_{\lambda} f_{(\lambda)}, \tag{5}$$

где сумма распространена на всевозможные допустимые векторы λ и

$$f_{(\lambda)}=\sum_{s=0}^{\infty} \varphi_{(\lambda)}^{s} \prod_{j=m+1}^{n} b^{-\frac{s\lambda_j}{r_j \varkappa}} \Phi_{\lambda_j}\left(b^{\frac{s}{r_j \varkappa}} x_j\right). \tag{6}$$

Существенно отметить, что функции

$$q_s=\varphi_{(\lambda)}^{s}=g_{b^{\frac{s}{r_1 \varkappa}}, \ldots, b^{\frac{s}{r_m \varkappa}}} \qquad (s=0,\ 1,\ \ldots)$$

целые экспоненциального типа $b^{\frac{s}{r_j \varkappa}}$ по x_j $(j=1, \ldots, m)$,

$$\varphi_{(\lambda)}=\sum_{s=0}^{\infty} \varphi_{(\lambda)}^{s}$$

и

$$\|\varphi_{(\lambda)}\|_{B_p^{\bar{\varrho}(\lambda)}(R_m)}=\left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{sp}\|q_s\|_{L_p(R_m)}^{p}\right)^{1/p}<\infty.$$

Что касается функций $\Phi_{\lambda_j}(t)$, то их можно считать равными

$$\Phi_{\lambda_j}(t)=\frac{T_{\lambda_j}(A_j t)}{t^3}, \tag{7}$$

где T_{λ_j} — соответствующим образом подобранные тригонометрические полиномы и A_j — числа. При этом Φ_{λ_j} суть целые функции экспоненциального типа 1. В отличие от 6.8, в знаменателе (7) поставлено t^3 (вместо t^2), что несущественно, зато теперь функции Φ_{λ_j} вместе со своими производными первого порядка принадлежат к $L=L(-\infty, \infty)$.

Тот факт, что $f \in B_p^r(R_n)$ и выполняются граничные свойства (4), доказан в 6.8. Остается доказать свойства (2), (3).

Обозначим через R_{n-1} подпространство точек $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Справедливо неравенство (пояснения ниже)

$$\|I_{x_i(-r_i)} f_{(\lambda)}(x)\|_{L_p(R_{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s}\|q_s\|_{L_p(R_m)} b^{\frac{s}{\varkappa}\left(1-\sum_{m+1}^{n} \frac{\lambda_j}{r_j}-\frac{1}{p} \sum_{m+1}^{n-1} \frac{1}{r_j}\right)} |\psi_s(x_n)|=$$

$$=\sum_{s} \lambda_s a^{s/p} |\psi_s(x_n)|, \tag{8}$$

где

$$\lambda_s = \|q_s\|_{L_p(R_m)} b^s, \quad a = b^{\frac{1}{r_n \varkappa}} \qquad (a > 1), \tag{9}$$

$$\psi_s(t) = \Phi(a^s t) \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \Phi = \Phi_{\lambda_i}, \tag{10}$$

$$\psi_s(t) = a^{-r_n s} I_{-r_n} \Phi(a^s t) \quad \text{при} \quad i = n, \ \Phi = \Phi_{\lambda_n}. \tag{11}$$

Норма в метрике $L_p(R_{n\,1})$ каждого члена ряда (6) равна произведению L_p-норм сомножителей, из которых он состоит (в соответствующих подпространствах переменных, от которых эти множители зависят). При этом надо учесть, что

$$\|I_{x_i(-r_i)} q_s\|_{L_p(R_m)} \leqslant b^{s/\varkappa} \|q_s\|_{L_p(R_m)} \qquad (i = 1, \ldots, m; \ s = 0, 1, \ldots)$$

(см. 8.7),

$$\left\| I_{x_i(-r_i)} \Phi_{\lambda_i}\left(b^{\frac{s}{r_i \varkappa}} x_i\right)\right\|_{L_p(R_{x_i})} \leqslant b^{\frac{s}{\varkappa}} \left\|\Phi_{\lambda_i}\left(b^{\frac{s}{r_i \varkappa}} x_i\right)\right\|_{L_p(R_{x_i})},$$

$$\left\|\Phi_{\lambda_i}\left(b^{\frac{s}{r_i \varkappa}} x_i\right)\right\|_{L_p(R_{x_i})} = c_i b^{-\frac{s}{p r_i \varkappa}} \qquad (i = m+1, \ldots, n-1),$$

где R_{x_i} — ось x_i и c_i не зависит от $s = 0, 1, 2, \ldots$

Из (8) следует (пояснения ниже)

$$\|I_{x_i(-r_i)} f_{(\lambda)}(x)\|_{L_p(R_{n\,1})} \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\sum_s \lambda_s a^{s/p} \psi_s(y)\right|^p dy\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_s \lambda_s^p\right)^{1/p} = \left(\sum_s b^{sp} \|q_s\|^p_{L_p(R_m)}\right)^{1/p} = \|\varphi_{(\lambda)}\|_{B_p^{\varrho(\lambda)}(R_m)},$$

что доказывает (2), (3). Но в этих соотношениях надо обосновать второе неравенство.

Отметим неравенства

$$|\psi_s(t)| < A, \tag{12}$$

$$|\psi_s(t)| < \frac{A}{a^s |t|} \qquad (a^s |t| > 1), \tag{13}$$

$$a^s \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_s(t)|\, dt < A, \tag{14}$$

где константа A не зависит от рядом стоящих множителей. В случае (10) эти неравенства немедленно следуют из того, что $\Phi(t)$ есть целая функция, представимая в виде (7). В случае же (11) это требует пояснений. Функция $\Phi(t)$ целая экспоненциального типа 1, принадлежит к L вместе со своей производной, поэтому ее преобразование Фурье $\sqrt{2\pi}\,\mu(x)$ имеет непрерывную производную и компактный носитель на $(-1, +1)$.

Таким образом, $\mu(1)=\mu(-1)=0$ и, следовательно $(r=r_n)$,

$$\Phi(t)=\int_{-1}^{+1}\mu(\lambda)\,e^{i\lambda t}\,d\lambda, \tag{15}$$

$$\Phi(a^s t)=\int_{-1}^{+1}\mu(\lambda)\,e^{i\lambda a^s t}\,d\lambda=a^{-s}\int_{-a^s}^{a^s}\mu(a^{-s}\xi)\,e^{i\xi t}\,d\xi,$$

$$|I_{t(-r)}\Phi(a^s t)|=a^{-s}\left|\int_{-a^s}^{a^s}(1+\xi^2)^{r/2}\,\mu(a^{-s}\xi)\,e^{i\xi t}\,d\xi\right|=$$

$$=\left|\frac{a^{-s}}{t}\int_{-a^s}^{a^s}\left[\mu'(a^{-s}\xi)\,a^{-s}(1+\xi^2)^{r/2}+r(1+\xi^2)^{r/2-1}\xi\mu(a^{-s}\xi)\right]e^{i\xi t}\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a^{-s}}{|t|}a^s\left(a^{-s}a^{rs}+a^{(r-2)s}a^s\right)=2\frac{a^{(r-1)s}}{|t|}.$$

Мы доказали (13) (см. (11)). Далее, если учесть, что $\Phi(a^s t)$ — целая типа a^s, получим

$$|\psi_s(t)|\leqslant a^{-r_n s}a^{r_n s}\max|\Phi(a^s t)|<A,$$

$$\int|\psi_s(t)|\,dt\leqslant a^{-r_n s}a^{r_n s}\int|\Phi(a^s t)|\,dt<Aa^{-s},$$

т. е. (12) и (14).

Теперь имеем

$$\int_0^\infty\left|\sum_s\lambda_s a^{s/r}\psi_s(y)\right|^p dy\leqslant\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3, \tag{16}$$

где

$$\Lambda_1=\sum_{m=0}^\infty\int_{a^{-m-1}}^{a^{-m}}\left|\sum_{s=0}^m\lambda_s a^{s/r}\psi_s(y)\right|^p dy,$$

$$\Lambda_2=\sum_{m=0}^\infty\int_{a^{-m-1}}^{a^{-m}}\left|\sum_{s=m+1}^\infty\lambda_s a^{s/r}\psi_s(y)\right|^p dy,$$

$$\Lambda_3=\int_1^\infty\left|\sum_{s=0}^\infty\lambda_s a^{s/r}\psi_s(y)\right|^p dy.$$

Но $\left(\text{см. (12), } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

$$\Lambda_1 \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} a^{-m}\left(\sum_{s=0}^{m} \lambda_s a^{\frac{s(1-\varepsilon)}{p}} a^{\frac{s\varepsilon}{p}}\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} a^{-m} \sum_{s=0}^{m} \lambda_s^p a^{s(1-\varepsilon)}\left(\sum_{s=0}^{m} a^{\frac{s\varepsilon q}{p}}\right)^{p/q} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} a^{-m} \sum_{s=0}^{m} \lambda_s^p a^{s(1-\varepsilon)} a^{m\varepsilon} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s^p a^{s(1-\varepsilon)} \sum_{m=s}^{\infty} a^{-m(1-\varepsilon)} \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s^p a^{s(1-\varepsilon)} a^{s(\varepsilon-1)} = \sum_{0}^{\infty} \lambda_s^p$$

(при $p=1$ третий член в этой цепи можно опустить).

Далее (см. (14), пояснения ниже)

$$\Lambda_2 \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \int_{a^{-m-1}}^{a^{-m}} \sum_{s=m+1}^{\infty} \lambda_s^p a^s |\psi_s(y)| \sum_{s=m+1}^{\infty} |\psi_s(y)|^{p-1}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \lambda_s^p a^s \int_{a^{-m-1}}^{a^{-m}} |\psi_s(y)|\, dy = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s^p a^s \sum_{m=0}^{s} \int_{a^{-m-1}}^{a^{-m}} |\psi_s|\, dy =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s^p a^s \int_0^1 |\psi_s|\, dy \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s^p,$$

потому что (см. 13))

$$\sum_{=m+1}^{\infty} |\psi_s(y)| \leqslant \frac{1}{|y|} \sum_{s=m+1}^{\infty} a^{-s} \leqslant a^m a^{-m-1} \leqslant 1 \qquad (a^{-m-1} < y). \quad (17)$$

Наконец (см. (14)),

$$\Lambda_3 \leqslant \int_1^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s^p a^s |\psi_s(y)| \left(\sum_{s=0}^{\infty} |\psi_s(y)|\right)^{p-1} dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s^p a^s \int_1^{\infty} |\psi_s|\, dy \leqslant \sum_s \lambda_s^p,$$

потому что

$$\sum_{s=0}^{\infty} |\psi_s(y)| = |\psi_0(y)| + \sum_{1}^{\infty} |\psi_s(y)| \leqslant 1 \qquad (1 \leqslant y < \infty)$$

(см. (12) и (17) при $m=0$).

Мы доказали, что интеграл (16) не превышает $\sum \lambda_s^p$. Подобный факт аналогично доказывается и для того же интеграла, распространенного на $\{-\infty < y < 0\}$.

9.5.3. Если считать, как мы условились, $B_{\infty}^{\rho}=H_{\infty}^{\rho}$, то теорема из 9.5.2 при $p=\infty$ перестает быть верной. В самом деле, произвольная функция

$$f(x,\ y)\in W_{\infty}^{1,\ 1}(R_2)=L_{\infty}^{1,\ 1}(R_2)\subset H_{\infty}^{1,\ 1}(R_2)\subset H_{\infty}^{\alpha,\ \alpha}(R_2),\quad 0<\alpha<1,$$

равномерно непрерывна (после надлежащего видоизменения ее на множестве плоской меры нуль). Она удовлетворяет на R_2, поэтому и на оси R_1, условию Липшица степени 1. Однако на оси R_1 можно определить функцию $\varphi(x_1)\in H_{\infty}^{1}(R_1)$, не удовлетворяющую условию Липшица (даже нигде не дифференцируемую, см. замечание к 5.6.2—5.6.3). Поэтому не существует функции $f(x_1,\ x_2)\in W_{\infty}^{1,\ 1}(R_2)$, которая продолжала бы φ с R_1 на R_2.

9.5.4 *). Из 9.5.1 и 9.5.2, как следствие, можно получить теоремы вложения:

$$B_p^{r}(R_n)\rightleftarrows B_p^{\rho}(R_m), \tag{1}$$

где $\rho=\varkappa r$, $\varkappa=1-\frac{1}{p}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{r_j}>0$, $1<p<\infty$. В самом деле (пояснения ниже),

$$B_p^{r}(R_n)\to L_p^{\frac{r_1}{\varkappa_1},\ \dots,\ \frac{r_n}{\varkappa_1},\ r_{n+1}}(R_{n+1})\to B_p^{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}r_1,\ \dots,\ \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}r_m}(R_m)=B_p^{\rho}(R_m), \tag{2}$$

где

$$\varkappa_1=1-\frac{1}{pr_{n+1}}>0,\qquad \varkappa_2=1-\frac{1}{p}\sum_{m+1}^{n}\frac{\varkappa_1}{r_j}-\frac{1}{pr_{n+1}}=\varkappa_1\varkappa;$$

$$B_p^{\rho}(R_m)\to L_p^{\frac{\rho_1}{\varkappa_2},\ \dots,\ \frac{\rho_m}{\varkappa_2},\ \frac{r_{m+1}}{\varkappa_1},\ \dots,\ \frac{r_n}{\varkappa_1},\ r_{n+1}}(R_{n+1})\to B_p^{r}(R_n). \tag{3}$$

Первое вложение в (2), так же как в (3), следует из 9.5.2, а второе в (2) и (3) — из 9.5.1.

9.6. Теорема вложения с предельным показателем

9.6.1. Лемма. Пусть $g\in L_{q'}(R_m)$, $f\in L_p(R_n)$,

$$1\leqslant m\leqslant n,\quad 1<p<q<\infty,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,$$

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\ \dots,\ x_n)\in R_n,\quad r(\xi)=\left(\sum_{1}^{n}|\xi_j|^{2/\varkappa_j}\right)^{1/2},\quad \varkappa_j>0,$$

$$\xi=(\xi_1,\ \dots,\ \xi_n),\quad \lambda=\frac{1}{p'}\sum_{1}^{n}\varkappa_j+\frac{1}{q}\sum_{1}^{m}\varkappa_j. \tag{1}$$

*) Это замечание принадлежит В. И. Буренкову.

Тогда справедливо неравенство *)

$$\left| \int_{R_m} dx \int_{R_n} \frac{g(x) f(y)\, dy}{r^{\lambda}(x-y)} \right| \leqslant c \| f \|_{L_p(R_n)} \| g \|_{L_{q'}(R_m)}, \tag{2}$$

где c не зависит от f, g и $(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in R_{n-m}$, из которого следует, что

$$\left\| \int_{R_n} \frac{f(y)\, dy}{r^{\lambda}(x-y)} \right\|_{L_q(R_m)} \leqslant c \| f \|_{L_p(R_n)}. \tag{3}$$

Доказательство. В одномерном случае ($n = m = 1$, $\varkappa_1 = 1$) (2) есть неравенство Харди — Литтлвуда

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi) f(\eta)\, d\xi\, d\eta}{|\xi - \eta|^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}}} \right| \leqslant c \| f \|_{L_p(R_1)} \| g \|_{L_{q'}(R_1)}. \tag{4}$$

Мы не будем его доказывать здесь **). Тот факт, что из (2) следует (3), есть теорема Ф. Риса (см. Банах [1]), гласящая, что *если измеримая на R_m функция F такова, что интеграл Лебега*

$$\int_{R_m} Fg\, dx$$

существует для любой $g \in L_{q'}(R_m)$, то

$$F \in L_q(R_m)$$

$$\| F \|_{L_q(R_m)} = \sup_{\| g \|_{L_{q'}(R_m)} \leqslant 1} \int_{R_m} Fg\, dx.$$

Оцениваемый интеграл запишем в виде

$$I = \int_{R_m} g(x)\, dx \int_{R_m} dy' \left[\int_{R_{n-m}} \frac{f(y)\, dy''}{r^{\lambda}} \right], \tag{5}$$

$y' = (y_1, \ldots, y_m)$, $y'' = (y_{m+1}, \ldots, y_n)$. К интегралу, стоящему в скобках, применим неравенство Гёльдера

$$|[\cdot]| \leqslant \left(\int_{R_{n-m}} |f(y)|^p\, dy'' \right)^{1/p} \left(\int_{R_{n-m}} \frac{dy''}{r^{\lambda p'}} \right)^{1/p'} = P(y')\, Q(y').$$

---

*) Харди и Литтлвуд [1], случай $n = m = 1$; В. П. Ильин [9], общий случай.

**) Доказательство имеется в книге Харди, Литтлвуда и Полиа [1], стр. 346.

Но (пояснения ниже)

$$Q^{p'}=\int\limits_{R_{n-m}}\frac{dy_{m+1}\ldots dy_n}{\left\{H^2+\sum\limits_{m+1}^{n}|y_j|^{2/\varkappa_j}\right\}^{1/2\left(\sum\limits_{m+1}^{n}\varkappa_j+\varepsilon\right)}}=$$

$$=\frac{1}{H^{\varepsilon}}\int\limits_{R_{n-m}}\frac{du_{m+1}\ldots du_n}{\left\{1+\sum\limits_{m+1}^{n}|u_j|^{2/\varkappa_j}\right\}^{1/2\left(\sum\limits_{m+1}^{n}\varkappa_j+\varepsilon\right)}}=\frac{c}{H^{\varepsilon}}=$$

$$=\frac{c}{\left\{\sum\limits_{1}^{m}|x_j-y_j|^{2/\varkappa_j}\right\}^{\frac{p'}{2}\sum\limits_{1}^{m}\varkappa_j\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)}}\leqslant\frac{c}{\left\{\prod\limits_{j=1}^{m}|x_j-y_j|\right\}^{p'\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)}}.$$

Выше использованы следующие обозначения:

$$H^2=\left\{\sum_{1}^{m}|x_j-y_j|^{2/\varkappa_j}\right\},$$

$$\varepsilon=\lambda p'-\sum_{m+1}^{n}\varkappa_j=\sum_{1}^{m}\varkappa_j+\frac{p'}{q}\sum_{1}^{m}\varkappa_j>0.$$

Во втором равенстве введена подстановка

$$u_j=\frac{y_j}{H^{\varkappa_j}}\qquad (j=1,\ \ldots,\ m-1);$$

интеграл в третьем члене обозначен через c; конечность его на единичной сфере R_{n-m} очевидна, вне же ее, если положить $u_j^{2/\varkappa_j}=\xi_j$, ограничиваясь положительными u_j, и ввести для $\xi=(\xi_{m+1},\ \ldots,\ \xi_n)$ полярные координаты, то соответствующий интеграл оценивается следующим образом:

$$\int\limits_{|\xi|>\beta>0}\frac{\prod\limits_{m+1}^{n}\xi_j^{\frac{\varkappa_j}{2}-1}\,d\xi}{\left(\sum\limits_{m+1}^{n}\xi_j\right)^{1/2\left(\sum\limits_{m+1}^{n}\varkappa_j+\varepsilon\right)}}\leqslant\int\limits_{\beta}^{\infty}\rho^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}\,d\rho<\infty\qquad(\varepsilon>0).$$

Последнее неравенство получается из очевидных неравенств ($\xi_j = |x_j - y_j|$)

$$\xi_j = \xi_j^{\frac{2}{\varkappa_j}\frac{\varkappa_j}{2}} \leqslant \left(\sum_{s=1}^{n} \xi_s^{2/\varkappa_s}\right)^{\varkappa_j/2} \qquad (j=1, \ldots, m),$$

которые остается перемножить и возвести в степень $p'\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)$.

Следовательно,

$$|I| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1\,dy_1}{|x_1-y_1|^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(x)|\,|P(y')|}{|x_m-y_m|^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}}\,dx_m\,dy_m,$$

откуда следует (2) путем последовательного m-кратного применения одномерного неравенства (4).

9.6.2. Обобщение теоремы вложения Соболева *).

Теорема. *При условиях* $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant m \leqslant n$,

$$r = (r_1, \ldots, r_n) \geqslant 0, \quad \varkappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\sum_{1}^{m}\frac{1}{r_j} - \frac{1}{p}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{r_j} \geqslant 0 \tag{1}$$

имеет место вложение

$$L_p^r(R_n) \to L_q^\rho(R_m), \tag{2}$$

$$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m), \quad \rho_j = \varkappa r_j \quad (j=1, \ldots, m).$$

Доказательство. Будем обозначать через I_{-r} операцию, обратную к I_r ($r \geqslant 0$, I_0 — единичный оператор), и учтем, что операции I_r, $I_{r'}$, I_{-r}, $I_{-r'}$ коммутативны. Пусть $f \in L_p^r(R_n)$ ($r > 0$), тогда

$$f = I_r g \qquad (g \in L_p(R_n))$$

и, следовательно,

$$f = I_\rho I_{r(1-\varkappa)} h,$$

где

$$h = I_{-\rho} I_{-r(1-\varkappa)} I_r g, \quad \|h\|_{L_p(R_n)} \leqslant c\|g\|_{L_p(R_n)},$$

потому что функция

$$\left\{\sum_{1}^{m}(1+u_j^2)^{\frac{r_j\varkappa}{2\sigma}}\right\}^{\sigma}\left\{\sum_{1}^{n}(1+u_j^2)^{\frac{r_j(1-\varkappa)}{2\sigma}}\right\}^{\sigma}\left\{\sum_{1}^{n}(1+u_j^2)^{r_j/2\sigma}\right\}^{-\sigma}$$

*) См. замечания к 6.1 и 9.6.2.

есть множитель Марцинкевича (см. 1.5.5, пример 12 и замечание в конце 1.5.5). Итак,

$$f = I_{\varrho} u, \tag{3}$$

$$u = \int G_{(1-\varkappa) r}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) h(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \tag{4}$$

и при достаточно большом значении параметра σ выполняются неравенства

$$|G_{(1-\varkappa) r}(\boldsymbol{x})| \leqslant \left\{ \sum_1^n |x_j|^{r_j(1-\varkappa)\left(\sum\limits_{s=1}^n \frac{1}{r_s(1-\varkappa)} - 1\right)} \right\}^{-1} =$$

$$= \left\{ \sum_1^n |x_j|^{r_j\left(\sum\limits_{s=1}^n \frac{1}{r_s} - 1 + \varkappa\right)} \right\}^{-1} \leqslant \left\{ \sum_1^n |x_j|^{2r_j} \right\}^{-1/2\left(\sum\limits_{s=1}^n \frac{1}{r_s} - 1 + \varkappa\right)} = r(\boldsymbol{x})^{-\lambda}. \tag{5}$$

Здесь надо иметь в виду, что $\varkappa < 1$ и

$$\lambda = \sum_{s=1}^n \frac{1}{r_s} - 1 + \varkappa = \frac{1}{p'} \sum_1^n \frac{1}{r_j} + \frac{1}{q} \sum_1^m \frac{1}{r_j}, \tag{6}$$

и можно применить оценку (первую) 9.4.1 (2). В последнем неравенстве мы применили обычную оценку $\left(\sum\limits_1^n \xi_j^\beta\right)^{1/\beta} \leqslant c \sum\limits_1^n \xi_j$, где $c = c_n$ — константа).

Из (4), (5), (6) в силу леммы из 9.6.1 (см. формулу 9.6.1 (3), где надо считать $\varkappa_j = 1/r_j$), получим

$$\|u\|_{L_q(R_m)} \leqslant c \|h\|_{L_p(R_n)}.$$

Но тогда из (3) следует, что $f \in L_q(R_m)$ при любых фиксированных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ и

$$\|f\|_{L_q^\varrho(R_m)} = \|u\|_{L_q(R_m)} \leqslant c_2 \|h\|_{L_p(R_n)} \leqslant c_3 \|g\|_{L_p(R_n)} = c_3 \|f\|_{L_p^r(R_n)},$$

и теорема доказана.

9.6.3 *). Из 9.6.2, если принять во внимание теоремы из 9.5.1 и 9.5.2, можно как следствие получить аналогичную теорему для пространств B:

$$B_p^r(R_n) \to B_q^\varrho(R_m) \tag{1}$$

*) Это замечание принадлежит В. И Буренкову.

при условиях $1<p<q<\infty$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $\boldsymbol{r}>0$, $\boldsymbol{\rho}=\varkappa \boldsymbol{r}$, $\varkappa>0$ ($\varkappa$ см. 9.6.2 (1)). В самом деле (пояснения ниже),

$$B_p^{\boldsymbol{r}}(R_n) \to L_p^{\frac{r_1}{\varkappa_1}, \ldots, \frac{r_n}{\varkappa_1}, r_{n+1}, r_{n+2}}(R_{n+2}) \to$$

$$\to L_q^{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} r_1, \ldots, \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} r_n, \varkappa_2 r_{n+1}}(R_{n+1}) \to B_q^{\frac{\varkappa_3\varkappa_2}{\varkappa_1} r_1, \ldots, \frac{\varkappa_3\varkappa_2}{\varkappa_1} r_m}(R_m) = B_q^{\boldsymbol{\rho}}(R_m), \quad (2)$$

где r_{n+1}, $r_{n+2}>0$ выбраны настолько большими, что

$$\varkappa_1 = 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r_{n+1}} + \frac{1}{r_{n+2}}\right) > 0,$$

$$\varkappa_2 = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(\sum_1^n \frac{\varkappa_1}{r_j} + \frac{1}{r_{n+1}}\right) - \frac{1}{p r_{n+2}} > 0.$$

При этом

$$\varkappa_3 = 1 - \frac{1}{q}\left(\sum_{m+1}^n \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2 r_j} + \frac{1}{\varkappa_2 r_{n+1}}\right) = \frac{\varkappa\varkappa_1}{\varkappa_2}.$$

Вложения (2) последовательно следуют из 9.5.2, 9.6.2, 9.5.1.

9.7. Неэквивалентность классов B_p^r и L_p^r

В заключение покажем, что классы B_p^r и L_p^r при $1 \leqslant p < \infty$, $p \neq 2$, не эквивалентны (существенно различны). Ограничимся рассмотрением одномерного случая.

Пусть сначала $1<p<\infty$. Рассмотрим последовательность функций

$$\Phi_N(t) = \sum_0^N \hat{\varphi}_k(t) = \varkappa \sum_0^N \cos\left[(2^k+1)\,t\right] \frac{\sin t}{t} \qquad (N = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 1 & (2^k < |t| < 2^k+2), \\ 0 & \text{для остальных } t \end{cases}$$

(см. 1.5.7 (10)).

Заметим, что при $1<p<\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_k(t)|^p\,dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^p dt = A < \infty, \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_k(t)|^p\,dt \geqslant \int_{\pi/3}^{\pi/2} |\cos(2^k+1)\,t|^p\,dt > B > 0 \quad (2)$$

(на $(\pi/2, \pi/3)$ функция $|t^{-1}\sin t|$ ограничена снизу положительной константой), где B не зависит от k.

Очевидно (см. 1.5.6.1),

$$\beta_k(\Phi_N)=\widehat{(1)_{\Lambda_k}\tilde{\Phi}_N}=\widehat{\varphi_k(t)},\quad \Lambda_k=\{2^k\leqslant|t|\leqslant 2^{k+1}\}$$

и имеет место

$$\|\Phi_N\|_p\ll\left\|\left(\sum_0^N\hat{\varphi}_k^2\right)^{1/2}\right\|_p\ll\|\Phi_N\|_p, \tag{3}$$

где входящие в неравенства константы здесь и ниже не зависят от N.

Из первого неравенства (3) следует

$$\|\Phi_N\|_p\ll\left(\int_{-\infty}^{\infty}N^{p/2}\left|\frac{\sin t}{t}\right|^p dt\right)^{1/p}\ll N^{1/2}. \tag{4}$$

Далее из второго неравенства (3) при $2\leqslant p<\infty$ (см. 3.3.3) следует

$$\|\Phi_N\|_p\gg\left\|\left(\sum_0^N|\hat{\varphi}_k|^p\right)^{1/p}\right\|_p=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sum_0^N|\hat{\varphi}_k|^p\,dt\right)^{1/p}>(NB)^{1/p}\gg N^{1/p} \tag{5}$$

и при $1<p\leqslant 2$ с помощью обобщенного неравенства Минковского 1.3.2 (1) с показателем $\alpha=\frac{2}{p}\geqslant 1$

$$\|\Phi_N\|_p^p\gg\left\|\left(\sum_0^N\hat{\varphi}_k^2\right)^{1/2}\right\|_p^p=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_0^N\hat{\varphi}_k^2\right)^{p/2}dt\geqslant$$

$$\geqslant\left\{\sum_0^N\left(\int|\hat{\varphi}_k|^p\,dt\right)^{2/p}\right\}^{p/2}\gg\left(\sum_0^N B^{2/p}\right)^{p/2}=BN^{p/2}. \tag{6}$$

Из (4), (5), (6) следует, что

$$N^{1/2}\ll\|\Phi_N\|_p\ll N^{1/2}\qquad(1<p<\infty). \tag{7}$$

С другой стороны (см. 8.9. (5)), в силу (1), (2) величина

$$\|\Phi_N\|_{B_p^0}=\left(\sum_{k=0}^N\|\hat{\varphi}_k\|_p^p\right)^{1/p}\approx N^{1/p}, \tag{8}$$

т. е. имеет строго порядок $N^{1/p}$.

Мы видим, что порядки величин (7) и (8) при $p\neq 2$ различны. Это показывает, что нулевые классы $L_p^0=L_p$ и B_p^0, а следовательно, и классы L_p^r и B_p^r при любом r не эквивалентны.

С помощью функций Φ_N аналогично доказывается, что и при любом $\theta \neq 2$ класс $B^0_{p\theta}$ не эквивалентен L_p (см. О. В. Бесов [5], которому принадлежит приведенное выше рассуждение). При $\theta = 2$, $p \neq 2$ также имеет место неэквивалентность, однако она доказывается иначе (см. К. К. Головкин [1]).

Переходим к случаю $p=1$. Одномерное ядро Валле-Пуссена (см. 8.6 (5), (10), (11))

$$V_N(t) = \frac{1}{N} \frac{\cos Nt - \cos 2Nt}{t^2}$$

имеет преобразование Фурье $\tilde{V}_N = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mu_N^*(t)$, где

$$\mu_N^*(t) = \begin{cases} 1 & (|t| < N), \\ \frac{1}{N}(2N - t) & (N < |t| < 2N), \\ 0 & (2N < |t|). \end{cases}$$

Если k и N — натуральные числа и $k \neq N$, то

$$\mu_{2^k}^*(t)\, \mu_{2^N}^*(t) = \mu_{2^l}^*(t), \quad l = \min(k, N).$$

Поэтому k-я сумма Валле-Пуссена функции V_{2^N} равна

$$\sigma_{2^k}(V_{2^N}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(V_{2^k} * V_{2^N}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\widehat{\tilde{V}_{2^k}\tilde{V}_{2^N}} = V_{2^k} \quad (k < N),$$
$$\sigma_{2^k}(V_{2^N}) = V_{2^N} \quad (k > N)$$

и разложение V_{2^N} в ряд по суммам Валле-Пуссена имеет вид

$$V_{2^N} = V_{2^0} + \sum_{1}^{N-1} (V_{2^k} - V_{2^{k-1}}) + (\sigma_{2^N} - V_{2^{N-1}}) + (V_{2^N} - \sigma_{2^N}),$$

где $\lambda_{2^N} = \sigma_{2^N}(V_{2^N})$. Отсюда

$$\| V_{2^N} \|_{B_1^0} \geq \| V_{2^0} \|_L + \sum_{k=1}^{N-1} \| V_{2^k} - V_{2^{k-1}} \|_L \to \infty \quad (N \to \infty),$$

потому что (после замены переменной $u = 2^{k-1}t$)

$$\| V_{2^k} - V_{2^{k-1}} \|_L = \int \left| \frac{\cos 2u - \cos 4u}{2u^2} - \frac{\cos u - \cos 2u}{u^2} \right| du = c > 0,$$

где c не зависит от $k = 1, 2 \ldots$ С другой стороны, норма

$$\| V_{2^N} \|_L = \int \frac{|\cos u - \cos 2u|}{u^2}\, du = c_1 < \infty$$

ограничена. Это показывает, что вложение $B_1^0 \to L$ необратимо.

ГЛАВА 10

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ

10.1. Введение

Мы будем рассматривать функции, заданные на ограниченной области $\Omega \subset R_n$ с гладкой $(n-1)$-мерной границей Γ, т. е. Γ есть ограниченное замкнутое дифференцируемое многообразие (см., например, книгу Никольского [19], том II, гл. 17, или книгу О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1], § 22).

Мы еще будем писать $\Gamma \in C^{(1)}$ в знак того, что Γ описывается (локально) непрерывно дифференцируемыми функциями. Если на самом деле они непрерывно дифференцируемы l раз, то будем писать $\Gamma \in C^{(l)}$.

Пусть r, p, α — действительные числа, причем r натуральное ($r=1, 2, \ldots$), $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Таким образом, может быть $p=\infty$. Обозначим через

$$W_{p\alpha}^{r}(\Omega) = W_{p\alpha}^{r}$$

класс функций f, определенных на Ω, с конечной нормой

$$\|f\|_{W_{p\alpha}^{r}(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{w_{p\alpha}^{r}(\Omega)}, \tag{1}$$

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(\boldsymbol{x})|^p \, d\boldsymbol{x}\right)^{1/p} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty), \tag{2}$$

$$\|f\|_{w_{p\alpha}^{r}(\Omega)} = \sum_{|\boldsymbol{k}|=r} \left\| \frac{f^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})}{\rho(\boldsymbol{x})^{\alpha}} \right\|_{L_p(\Omega)}, \tag{3}$$

где сумма распространена на всевозможные частные производные

$$f^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{|\boldsymbol{k}|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \qquad |\boldsymbol{k}| = \sum_{1}^{n} k_j,$$

от f порядка r, а $\rho(\boldsymbol{x})$ — расстояние от точки $x \in \Omega$ до Γ.

При $p=\infty$ левая и правая (!) части (2) понимаются как

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}\operatorname{vrai}|f(x)|.$$

Класс $W^r_{p\alpha}(\Omega)$ есть банахово пространство с указанной нормой, при $\alpha=0$ это пространство Соболева $W^r_p(\Omega)$ $(W^r_{p0}=W^r_p)$.

Цель этой главы доказать следующие утверждения 1) — 6).

1)
$$W^r_{p\alpha}(\Omega)\to W^{r-l}_{p\alpha_l}(\Omega) \tag{4}$$

при

$$\alpha_l<\frac{1}{p},\qquad \alpha_l\leqslant\alpha+l,\ \Gamma\in C^{(1)},\quad 0\leqslant l\leqslant r.$$

2) *Если*
$$0<r+\alpha<r,\quad \Gamma\in C^{(1)}, \tag{5}$$

то
$$W^r_{p\alpha}(\Omega)\to B^{r+\alpha}_p(\Omega). \tag{6}$$

Это вложение верно и при $\alpha=0$, если $2\leqslant p\leqslant\infty$. Для $\Omega=R_n$ это есть вложение 9.3 (1). Из него следует (6) для ограниченной области Ω с гладкой (даже липшицевой) $(n-1)$-мерной границей, потому что в этом случае функции $f\in W^r_p(\Omega)$, $B^r_p(\Omega)$ можно продолжить за пределы Ω на R_n с сохранением класса, т. е. для каждой такой функции f можно указать (продолжающую f) функцию $\bar f$, принадлежащую соответственно к $W^r_p(R_n)$, $B^r_p(R_n)$, так, что $\bar f(x)=f(x)$ на Ω и

$$\|\bar f\|_{W^r_p(R_n)}\leqslant c\|f\|_{W^r_p(\Omega)},$$

$$\|\bar f\|_{B^r_p(R_n)}\leqslant c\|f\|_{B^r_p(\Omega)},$$

соответственно, где c не зависит от f (см. замечания к 4.3.6).

Пусть теперь
$$0<r+\alpha-\frac{1}{p}<r \tag{7}$$

и s_0 — наименьшее натуральное число, не меньшее $r+\alpha-\frac{1}{p}$, т. е.

$$r+\alpha-\frac{1}{p}\leqslant s_0<r+\alpha-\frac{1}{p}+1. \tag{8}$$

Если наряду с (5) выполняется (7) и $\Gamma\in C^{(s_0+1)}$ (при $p=1$ и $r+\alpha-1=s_0$, $\Gamma\in C^{(s_0+1+\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$), то вложение (6) можно продолжить:

$$W^r_{p\alpha}(\Omega)\to B^{r+\alpha}_p(\Omega)\to B^{r+\alpha-1/p}_p(\Gamma), \tag{9}$$

как это следует из теорем вложения для классов B (см. книгу О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1], § 24).

Однако верно также следующее утверждение.

3) *Если выполняются неравенства* (7) *и* (8) *и*

$$\Gamma \in C^{(s_0+1+\varepsilon)}, \tag{10}$$

то

$$W^r_{p\alpha}(\Omega) \to B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma). \tag{11}$$

Таким образом, для справедливости вложения (11) требуется выполнение (7), но не обязательно (5).

На самом деле из (7) и (10) следует более общее утверждение: *если функция* $f \in W^r_{p\alpha}(\Omega)$, *то она имеет следы* (*граничные функции*)

$$\left.\frac{\partial^s f}{\partial n^s}\right|_\Gamma = \varphi_s \in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}-s}(\Gamma) \quad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ s_0-1) \tag{12}$$

и выполняются неравенства

$$\|\varphi_s\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}-s}(\Gamma)} \leqslant c\,\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)} \quad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ s_0-1), \tag{13}$$

где c не зависит от f.

4) *Имеет место обратное утверждение при условиях* (7), (8), (10): *если на Γ задана функция*

$$\varphi \in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma),$$

то существует функция $f \in W^r_{p\alpha}(\Omega)$, для которой $f|_\Gamma = \varphi$ и

$$\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)} \leqslant c\,\|\varphi\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma)}. \tag{14}$$

Более общее утверждение при тех же условиях гласит: *если заданы функции*

$$\varphi_s \in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}-s}(\Gamma) \quad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ s_0-1),$$

то существует функция $f \in W^r_{p\alpha}(\Omega)$, для которой выполняются условия (12) *и неравенство*

$$\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)} \leqslant c \sum_{s=0}^{s_0-1} \|\varphi_s\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}-s}(\Gamma)}, \tag{14'}$$

где c не зависит от φ_s.

5) *Условия* (7), (8), (10) *и неравенство*

$$r/2 \leqslant s_0 \tag{15}$$

влекут за собой неравенство

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant c\left\{\sum_{l+s<\frac{r}{2}} \|\varphi_s^{(l)}\|_{L_p(\Gamma)} + \|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)}\right\}, \tag{16}$$

где c *не зависит от* f (см. (12)).

6) *Если* $0 < r + \alpha - \frac{1}{p} < r$ *и* $\Gamma \in C^{(1)}$, *то норма*

$$\|f\|_{\overset{*}{W}{}^r_{p\alpha}(\Omega)} = \left\|\frac{f}{\rho^\alpha}\right\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{w^r_{p\alpha}(\Omega)} \tag{17}$$

эквивалентна *) *норме* (1):

$$\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)} \sim \|f\|_{\overset{*}{W}{}^r_{p\alpha}(\Omega)} \qquad (f \in W^r_{p\alpha}(\Omega)). \tag{18}$$

Утверждения 1) — 6) сопровождаются соответствующими неравенствами. Сначала они доказываются в одномерном случае, когда Ω есть конечный интервал, затем одномерные неравенства распространяются на многомерный случай, пользуясь леммой о покрытии $\overline{\Omega}$ конечным числом так называемых регулярных мостов.

10.1.1. Мы называем множество $\Lambda \subset R_n$ *простым множеством*, если найдется такая прямоугольная система координат $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, что в ней

$$\Lambda = \{\zeta\colon\ \varphi(\zeta') \leqslant \zeta_n \leqslant \psi(\zeta'),\ \zeta' \in \sigma\}, \tag{1}$$

где σ есть $(n-1)$-мерный шар точек

$$\zeta' = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}), \quad |\zeta'|^2 = \sum_1^{n-1} \zeta_j^2 < \delta^2,$$

а φ и ψ — функции от ζ', непрерывно дифференцируемые на его замыкании $\bar\sigma$.

Мы видим, что множество Λ замкнуто сверху и снизу (в направлении ζ_n), но открыто с боков.

Нижняя его граница $\zeta_n = \varphi(\zeta')$, $\zeta' \in \bar\sigma$, пусть будет γ_1, верхняя — $\zeta_n = \psi(\zeta')$, $\zeta' \in \bar\sigma$, — γ_2 и боковая — $\gamma_3 = (\partial\Lambda \setminus \gamma_1) \setminus \gamma_2$.

10.1.2. Вернемся к ограниченному множеству $\Omega \subset R_n$ с $(n-1)$-мерной гладкой границей Γ.

---

*) Мы пишем $\lambda(z) \sim \mu(z)$ $(z \in \mathscr{E})$, если существуют не зависящие от $z \in \mathscr{E}$ константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что $0 < c_1\lambda(z) \leqslant \mu(z) \leqslant c_2\lambda(z)$ $(z \in \mathscr{E})$.

Будем говорить, что множество Λ есть *регулярный мост* множества Ω, если

а) Λ — простое множество (см. 10.1.1),

б) $\Lambda \subset \bar{\Omega}$,

в) верхняя и нижняя части границы $\partial\Lambda$ множества Λ (в направлении соответствующей Λ оси ζ_n) принадлежат к Γ ($\gamma_1, \gamma_2 \subset \Gamma$), но боковая часть $\gamma_3 = \partial\Lambda$ принадлежит к Ω, т. е. все точки γ_3 не принадлежат к Γ.

10.1.3. Определение. Будем говорить, что *регулярный мост* Λ *опирается на площадку* σ, а круговой цилиндр G, опирающийся на σ (с осью ζ_n), называть *цилиндром, продолжающим* Λ.

10.2. Покрытие области регулярными мостами

10.2.1. Пусть $\Omega \subset R_n$ — ограниченная область с $(n-1)$-мерной гладкой границей ($\Gamma = \partial\Omega \in C^{(1)}$).

Зададим произвольную точку $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и выпустим из нее произвольный луч L. Так как граница Γ — замкнутое ограниченное множество, то существует на L точка $\boldsymbol{x}' \in \Gamma$ такая, что интервал $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$, соединяющий $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$, принадлежит к Ω ($(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \subset \Omega$). В связи с этим будем говорить, что *луч* L, *выходя из точки* $\boldsymbol{x} \in \Omega$, (*впервые*) *натыкается на* Γ. Если при этом L не касается Γ в $\boldsymbol{x}'$, то будем говорить, что L, *выходя из* $\boldsymbol{x} \in \Omega$, *натыкается на* Γ *в точке* $\boldsymbol{x}'$ *регулярно*.

Пусть L_- есть выходящий из $\boldsymbol{x}$ луч, направленный противоположно L.

Может случиться, что и L и L_- натыкаются на Γ регулярно. Введем прямоугольную систему координат $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, для которой положительной полуосью ξ_n служит луч L. Так как Γ есть непрерывно дифференцируемое многообразие, то существует $(n-1)$-мерный шар

$$\sigma = \left\{\xi' : \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 < \delta^2\right\}$$

точек $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ и определенные на его замыкании непрерывно дифференцируемые функции

$$\varphi(\xi') < \psi(\xi') \qquad (\xi' \in \bar{\sigma})$$

такие, что простое множество (см. 10.1.1)

$$\Lambda = \{\xi :\ \varphi(\xi') \leqslant \xi_n \leqslant \psi(\xi'),\ \xi' \in \sigma\} \tag{1}$$

принадлежит к $\bar{\Omega}$:

$$\Lambda \subset \bar{\Omega}, \tag{2}$$

нижняя его (в направлении ξ_n) граница

$$\gamma_1 = \{\xi :\ \xi_n = \varphi(\xi'),\ \xi' \in \bar{\sigma}\} \subset \Gamma, \tag{3}$$

верхняя —

$$\gamma_2 = \{\xi:\ \xi_n = \psi(\xi'),\ \xi' \in \bar{\sigma}\} \subset \Gamma \tag{4}$$

и боковая —

$$\gamma_3 = (\partial\Lambda \setminus \gamma_1) \setminus \gamma_2 \subset \Omega. \tag{5}$$

Иначе говоря, Λ есть регулярный мост области Ω, покрывающий x ($x \in \Lambda$, см. 10.1.2).

Пусть теперь точка $x \in \Gamma$ и из нее выходит не касающийся в ней к Γ луч L внутрь Ω. Последнее означает, что существует достаточно малый интервал $(x, y) \subset L\Omega$. Если точку y непрерывно двигать в направлении L, то она наткнется на Γ в некоторой точке $y = x' \in \Gamma$. Таким образом, имеет место следующая ситуация:

$$x \neq x', \quad (x, x') \subset L\Omega, \quad x,\ x' \in \Gamma$$

и L не касается Γ в x. В этом случае мы тоже будем говорить, что луч L, выходя из $x \in \Gamma$, натыкается (впервые) на Γ в точке x' и притом регулярно, если L не касается Γ также в x'.

При регулярном натыкании L на Γ в x' будет иметь место ситуация, уже разобранная выше, именно, если ввести прямоугольную систему координат $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с положительной полуосью ξ_n, совпадающей с L, то существует простое множество Λ вида (1) со свойствами (2), (3), (4), (5), являющееся регулярным мостом области Ω и покрывающее точку x. В системе ξ точка x есть нулевая точка (имеющая координаты $\xi_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$). Отметим, что в данном случае точка x принадлежит к γ_1, однако она не является точкой края γ_1 (см. книгу С. М. Никольского [22], т. II, 17.2).

Впрочем, может случиться, что луч L, выходя из $x \in \bar{\Omega}$, натыкается на Γ не регулярно. Тогда нам поможет лемма.

10.2.2. Лемма. *Пусть из точки $x \in \bar{\Omega}$ выходит луч L, натыкающийся на Γ не регулярно. В случае, если $x \in \Gamma$, он не касается Γ и выходит из x внутрь Ω. Тогда, каков бы ни был круговой полуконус K с вершиной в x и осью L, найдется принадлежащий к нему круговой полуконус K' с вершиной в x такой, что все принадлежащие к нему выходящие из x лучи L' натыкаются на Γ регулярно. Эти лучи в точке x не касаются Γ.*

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что x есть нулевая точка и луч L совпадает с положительной полуосью x_1. Координату x_1 точки x', в которой L впервые натыкается на Γ, обозначим через x_1' ($x' = (x_1', 0, \ldots, 0)$). Так как по условию луч L (или ось x_1) касается Γ в x', то Γ в окрестности точки x' не может описываться функцией, выражающей явную зависимость x_1 от остальных координат $x_2, \ldots, x_n$. Не нарушая общность, будем считать, что такая функция (описывающая Γ)

есть $x_n = \varphi(\boldsymbol{x}')$, $\boldsymbol{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Точнее, задав произвольное $\varepsilon > 0$, можно указать прямоугольник (δ, $\sigma < \varepsilon$)

$$\Delta = \{\boldsymbol{x}\colon |x_1 - x_1'| < \delta;\ |x_j| < \delta,\ j = 2, \ldots, n-1;\ |x_n| < \sigma\}$$

такой, что $\Gamma\Delta$ описывается функцией

$$x_n = \varphi(\boldsymbol{x}'), \tag{1}$$

непрерывно дифференцируемой на замыкании $(n-1)$-мерного прямоугольника

$$\Delta' = \{\boldsymbol{x}'\colon |x_1 - x_1'| < \delta;\ |x_j| < \delta,\ j = 2, \ldots, n-1\}.$$

К тому же (не нарушая общность!), мы будем считать, что область $\Omega\Delta$ расположена ниже Γ (в направлении x_n) и, таким образом, выше Γ точки Δ не принадлежат к Ω.

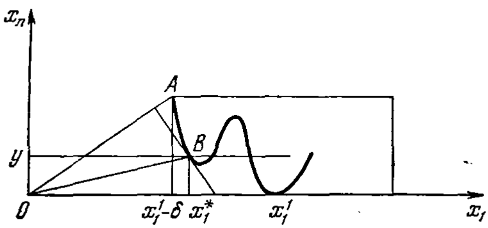

Рис. 1.

Сконцентрируем наше внимание на пересечении Ω плоскостью (x_1, x_n) $(x_j = 0$, $j = 2, \ldots, n-1$, см. рис. 1).

На отрезке $[x_1^1 - \delta, x_1^1]$ сечение Γ плоскостью (x_1, x_n) описывается непрерывно дифференцируемой функцией $x_n = \psi\ (x_1) = \psi(x_1, 0, \ldots, 0)$. Она положительна на $[x_1^1 - \delta, x_1^1)$ и равна нулю в x_1^1. Положим $M = \psi(x_1^1 - \delta)$. Уменьшая $\delta > 0$, можно достигнуть того, что

$$M = \max_{x_1^1 - \delta \leq x_1 \leq x_1^1} \psi(x_1).$$

Так как полуинтервал $(0, x_1' - \delta]$ оси x_1 принадлежит к Ω и точка O либо принадлежит к Ω, либо в ней ось x_1 не касается Γ, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ внутренние точки фигуры OAx_1^1 (см. рис. 1) принадлежат к Ω, а луч OA, вместе с лучами, заполняющими угол AOx_1 принадлежит к заданному полуконусу K, и, если $O \in \Gamma$, то эти лучи не касаются Γ в O.

Пусть $\mathscr{E}$ есть множество точек $x_1 \in [x_1^1 - \delta, x_1^1]$, для которых $\psi'(x_1) = 0$, а $\mathscr{E}' = \psi(\mathscr{E})$ — образ $\mathscr{E}$ при помощи ψ. Очевидно, $\mathscr{E}'$ измеримо как образ измеримого множества $\mathscr{E}$ при помощи непрерывно дифференцируемой функции ψ. При этом

$$\mathrm{m}\,\mathscr{E}' = \int\limits_{\mathscr{E}'} dx_n = \int\limits_{\mathscr{E}} \psi'(x_1)\, dx_1 = 0.$$

Зададим произвольную точку $y \in [0, M) \setminus \mathscr{E}'$. Пусть x_1^* есть наименьшее среди тех $x_1 \in [x_1^1 - \delta, x_1^1]$, для которых $y = \psi(x_1)$:

$$x_1^* = \min_{y = \psi(x_1)} x_1.$$

Производная $\psi'(x_1^*) \neq 0$, но она не может быть положительной, поэтому $\psi'(x_1^*) < 0$. Луч OB впервые натыкается на Γ в точке B.

Пусть $\boldsymbol{e} = (e_1, 0, \ldots, 0, e_n)$ — единичный вектор, направленный по лучу OB, и $\boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(B), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(B), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}(B), -1\right)$ (см. (1)). Очевидно, вектор $\boldsymbol{n}$ направлен по нормали к поверхности $x_n = \varphi(\boldsymbol{x}')$ в ее точке B. При этом

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(B) = \psi'(x_1^*) < 0.$$

Так как $e_1, e_n > 0$, то скалярное произведение

$$\boldsymbol{en} = e_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(B) - e_n < 0.$$

Это показывает, что луч OB натыкается на Γ в точке B регулярно, потому что иначе $\boldsymbol{en}$ равнялось бы нулю. Но тогда в силу непрерывной дифференцируемости функции φ существует полуконус $K' \subset K$, все лучи которого, выходя из O, натыкаются на границу Γ регулярно.

Лемма доказана.

Из нее непосредственно следует, что, какова бы ни была точка $\boldsymbol{x} \in \Omega$, найдется круговой полуконус K с вершиной в $\boldsymbol{x}$ такой, что все принадлежащие к нему лучи, выходя из $\boldsymbol{x}$, натыкаются на Γ регулярно. Из этой же леммы следует, что полуконус K_-, дополнительный к K, до полного конуса содержит в себе конус K'_- с вершиной в $\boldsymbol{x}$, все лучи которого натыкаются на Γ регулярно. Пусть L'_- есть один из этих лучей и L' — противоположный ему, выходящий из $\boldsymbol{x}$. Оба луча L'_- и L' натыкаются на Γ регулярно, и потому, как мы знаем, $\boldsymbol{x}$ покрывается регулярным мостом области Ω.

Сказанное доказывает следующую лемму.

10.2.3. Лемма. *Произвольную точку замыкания $\overline{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset R_n$ с гладкой $(n-1)$-мерной границей можно покрыть регулярным мостом области Ω.*

10.2.4. Пусть точка $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$. Пользуясь леммой из 10.2.2, нетрудно доказать, что из нее можно выпустить лучи $L_1, \ldots, L_n$, натыкающиеся на Γ регулярно и образующие линейно независимую систему. При этом можно считать, что если $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, то лучи L_j не касаются Γ в $\boldsymbol{x}$ и идут из $\boldsymbol{x}$ внутрь Ω.

В направлении каждого из лучей L_j определим покрывающий $\boldsymbol{x}$ регулярный мост Λ_j области Ω, задаваемый неравенствами вида 10.2.1 (1). Его цилиндрическое продолжение обозначим через G_j.

Пересечение этих мостов

$$\Lambda_x = \bigcap_{j=1}^{n} \Lambda_j \tag{1}$$

назовем *сердцевиной креста регулярных мостов* $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ *области* Ω.

10.2.5. Лемма. *Каждой точке $x \in \bar{\Omega}$ можно привести в соответствие прямоугольник Δ_x с центром в ней и область ω_x с гладкой $(n-1)$-мерной границей такие, что*

$$\bar{\Omega}\Delta_x \subset \bar{\omega}_x \subset \Lambda_x \tag{1}$$

(см. 10.2.4 (1)).

Доказательство. Пусть $x \in \Omega$, тогда x есть внутренняя точка любого Λ_j $(j=1, \ldots, n)$ и существует n-мерная сфера ω_x с центром в x, замыкание которой принадлежит ко всем Λ_j. Обозначим ее через ω_x. Обозначим далее через Δ_x любой прямоугольник с центром в x, лежащий в ω_x. Для Δ_x и ω_x, очевидно, выполняется (1).

Пусть теперь точка $x \in \Gamma$. Введем прямоугольную систему координат $z=(z_1, \ldots, z_n)=(z', z_n)$, $z'=(z_1, \ldots, z_{n-1})$ с положительной координатной полуосью z_n, совпадающей с внутренней нормалью в точке x к Γ. Начало координат этой системы, очевидно, есть точка x.

Существует прямоугольник

$$\Delta=\{z\colon |z_j|<\delta,\ j=1, \ldots, n-1;\ |z_n|<\sigma\}$$

как угодно малого диаметра, вырезающий из Γ кусок $\gamma=\Gamma\Delta$, описываемый функцией $z_n=\psi(z')$, $z' \in \Delta'$, непрерывно дифференцируемой на замыкании проекции Δ:

$$\Delta'=\{z'\colon |z_j|<\delta,\ j=1, \ldots, n-1\}.$$

γ делит Δ на две части: верхнюю $\Delta^+ \subset \Omega$, состоящую из точек $z \in \Delta$, расположенных выше γ (в направлении z_n), и нижнюю Δ^-, состоящую из точек $z \in \Delta$, расположенных ниже γ. Эти точки находятся вне $\bar{\Omega}$.

Уменьшая, если нужно, диаметр Δ, можно достичь того, что

$$\bar{\Delta}\bar{\Omega}=\bar{\Delta}^+ \subset \Lambda_x. \tag{2}$$

Множество $\bar{\Delta}^+$, если не считать точек гладкого куска γ, части его границы, погружено в открытое ядро множества Λ_x. Поэтому нетрудно видеть, что γ можно гладким образом продолжить внутрь $\Lambda_x \setminus \bar{\Delta}^+$ и образовать замкнутую гладкую $(n-1)$-мерную поверхность, ограничивающую некоторую область ω, и при этом так, что

$$\bar{\Delta}^+ \subset \bar{\omega} \subset \Lambda_x. \tag{3}$$

Это утверждение можно подкрепить формальными выкладками, но мы ограничимся рисунком в двумерном случае (см. рис. 2).

Если $\Delta_x=\Delta$, $\omega_x=\omega$, то получим (1). Лемма доказана.

10.2.6. Лемма. *Замыкание $\bar{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset R_n$ с гладкой $(n-1)$-мерной границей можно покрыть конечным числом регулярных мостов. Более того, $\bar{\Omega}$ можно покрыть конечным числом множеств $\bar{\omega}$, где ω — области, определенные в* 10.2.5.

На основании леммы Бореля среди прямоугольников Δ_x можно оставить их конечное число $\Delta_{x_1}, \ldots, \Delta_{x_N}$, покрывающих $\bar{\Omega}$. Но тогда и множества $\bar{\omega}_{x_1}, \ldots, \bar{\omega}_{x_N}$ покрывают $\bar{\Omega}$. При этом $\bar{\omega}_{x_k} \subset \subset \Lambda_{x_k}$ $(k=1, \ldots, N)$. Но тогда содержащие $\bar{\omega}_{x_k}$ регулярные мосты покрывают $\bar{\Omega}$.

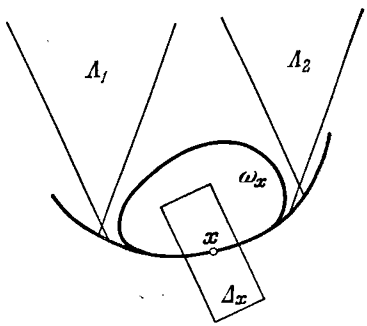

Рис. 2.

10.2.7. ρ **и** ρ_{ξ_n}. Регулярный мост Λ области Ω был описан в соответствующей ему прямоугольной системе координат $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при помощи соотношений 10.2.1 (1)—(5). В этих соотношениях участвует $(n-1)$-мерный открытый шар σ точек $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Мы условились в 10.1.3 говорить, что регулярный мост Λ опирается на шар σ. Если в этих рассмотрениях шар σ заменить на концентрический с ним шар $\sigma_* \subset \bar{\sigma}_* \subset \sigma$, то мы получим другой регулярный мост $\Lambda_* \subset \bar{\Lambda}_* \subset \Lambda$, опирающийся на σ_*.

Докажем лемму (см. С. М. Никольский [24]).

Лемма. *Для определенных выше регулярных мостов $\Lambda_* \subset \Lambda$ области Ω, опирающихся соответственно на концентрические шары σ_*, σ, где $\sigma_* \subset \bar{\sigma}_* \subset \sigma$, имеет место соотношение* *)

$$\rho(\xi) \sim \rho_{\xi_n}(\xi) \qquad (\xi \in \Lambda_*), \tag{1}$$

где $\rho_{\xi_n}(\xi)$ есть расстояние ξ до Γ в направлении ξ_n.

Доказательство. Позволим себе считать радиусы шаров σ_*, σ соответственно равными a, $2a$. Зададим точку $\xi^0 = (\xi^{0\prime}, \xi_n^0) \in \Lambda_*$. Будем для определенности считать, что ближайшая к ней точка Γ в направлении ξ_n находится на верхней границе γ_2^* моста Λ_*, т. е.

$$\rho_{\xi_n}(\xi^0) = \psi(\xi_0') - \xi_n^0 \leqslant \xi_n^0 - \varphi(\xi^{0\prime}). \tag{2}$$

Функция $\psi(\xi')$ имеет на $\bar{\sigma}$ непрерывные частные производные. Пусть $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ есть производная от ψ по направлению $\boldsymbol{n}$ и

$$M = \max_{\boldsymbol{n},\, \xi' \in \bar{\sigma}} \frac{\partial\psi}{\partial n}(\xi'),$$

*) См. сноску на стр. 262.

где максимум распространен на все указанные ξ' и всевозможные направления n.

Зададим коническую поверхность K:

$$\xi_n = -M|\xi' - \xi^{0\prime}| + \psi(\xi^{0\prime}),$$

$$|\xi' - \xi^{0\prime}|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} (\xi_j - \xi_j^0)^2.$$

Пусть $\varkappa$ — кусок этой поверхности, распространенный на $\xi' \in \bar{\sigma}$.

Поверхность

$$\gamma_2 = \{\xi: \xi_n = \psi(\xi'),\ \xi' \in \bar{\sigma}\}$$

находится не ниже (в направлении ξ_n) $\varkappa$. Это следует из неравенства

$$\psi(\xi') - \psi(\xi^{0\prime}) \geqslant -M|\xi' - \xi^{0\prime}| \qquad (\xi' \in \bar{\sigma}).$$

Пусть η^0 — точка Γ, ближайшая к ξ^0. Возможны три случая:

1) $\eta^0 \in \gamma_2$, 2) $\eta^0 \in \gamma_1$, 3) $\eta^0 \in (\Gamma \setminus \gamma_1) \setminus \gamma_2$.

В случае 1) отрезок $\overline{\xi^0\eta^0}$ пересекает $\varkappa$ и потому

$$\rho(\xi^0) = |\xi^0 - \eta^0| \geqslant \min_{y \in \varkappa} |\xi^0 - y| \geqslant \min_{y \in K} |\xi^0 - y| =$$
$$= \sin\alpha[\psi(\xi^{0\prime}) - \xi_n^0] = \sin\alpha\rho_{\xi_n}(\xi^0) = c\rho_{\xi_n}(\xi^0). \qquad (3)$$

Здесь α — угол между (направленными вниз) осью и образующей конуса K и

$$\sin\alpha = (1 + M^2)^{-1/2}.$$

В случае 2) (пояснения ниже)

$$\rho(\xi^0) \geqslant c[\xi_n^0 - \varphi(\xi^{0\prime})] \geqslant c[\psi(\xi^{0\prime}) - \xi_n^0] = c\rho_{\xi_n}(\xi^{0\prime}). \qquad (4)$$

Здесь первое неравенство можно получить, рассуждая как при получении первых четырех соотношений (3). Второе неравенство — см. (2).

В случае 3) точка $\eta^0 \in \Gamma$ находится вне цилиндра $\xi' \in \bar{\sigma}$, и так как ξ^0 принадлежит к цилиндру $\xi' \in \sigma_*$, то

$$\rho(\xi^0) = |\xi^0 - \eta^0| \geqslant a = \frac{a}{M} M \geqslant \frac{a}{M} \rho_{\xi_n}(\xi^0), \qquad (5)$$

где

$$M = \max_{\xi' \in \bar{\sigma}} [\psi(\xi') - \varphi(\xi')].$$

Имеет место также тривиальное неравенство

$$\rho(\xi) \leqslant \rho_{\xi_n}(\xi) \qquad (\xi \in \Lambda_*). \qquad (6)$$

Из (3)—(6) следует

$$c\rho_{\xi_n}(\xi) \leqslant \rho(\xi) \leqslant \rho_{\xi_n}(\xi) \qquad (\xi \in \Lambda),$$

т. е. (1).

10.2.8. Лемма*). *Пусть R_n и R_n^* — n-мерные евклидовы пространства точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ соответственно и $\Omega \subset R_n$, $\Omega^* \subset R_n^*$ — открытые ограниченные множества с гладкими $(n-1)$-мерными границами Γ, Γ^*.*

Пусть, далее, $y = Ax$ — непрерывно дифференцируемая операция

$$y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad x \in \overline{\Omega} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

преобразующая $\overline{\Omega}$ на $\overline{\Omega}^*$ взаимно однозначно о якобианом, удовлетворяющим неравенствам

$$0 < m < \frac{D(y)}{D(x)} < M \qquad (x \in \overline{\Omega}). \tag{2}$$

Тогда

$$c_1\rho(x) < \rho_*(y) < c_2\rho(x) \qquad (y = Ax,\ x \in \overline{\Omega}), \tag{3}$$

где $\rho(x)$, $\rho_*(y)$ — расстояния от x, y до Γ, Γ^* соответственно, и если операция Ax непрерывно дифференцируема r раз, то

$$c_1 \| f(x) \|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)} \leqslant \| f_*(y) \|_{W^r_{p\alpha}(\Omega^*)} \leqslant c_2 \| f(x) \|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)} \tag{4}$$

$$(1 \leqslant p \leqslant \infty,\ f(x) = f_*(Ax),\ x \in \Omega),$$

где положительные константы c_1 и c_2 не зависят от f.

Доказательство. Пусть точка $x \in \Omega$, x' — ее ближайшая точка на Γ ($x' \in \Gamma$) и γ — отрезок $\overline{xx'}$, определенный уравнениями

$$x_j = a_j t + b_j \qquad (j = 1, \ldots, n,\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta).$$

Тогда

$$\rho(x) = (\beta - \alpha)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2}.$$

Операция A отображает γ на гладкую кривую $\gamma_* = A\gamma$:

$$y_i = \varphi_i(a_1 t + b_1, \ldots, a_n t + b)$$
$$(i = 1, \ldots, n,\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

с концами $y = Ax$, $y' = Ax' \in \Gamma^*$. Пусть $|\gamma_*|$ есть длина γ_*, тогда

$$\rho(y) \leqslant |\gamma_*| = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} a_k\right)^2\right]^{1/2} dt \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}(\beta - \alpha) = M\rho(x),$$

*) См. С. М. Никольский [24].

где

$$M^2 = \max_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k}\right)^2.$$

Мы получили второе неравенство в (3). Первое можно получить теми же рассуждениями, поменяв местами x и y.

Первое неравенство (4) вытекает из следующих неравенств ($|k| = r$):

$$\|f(x)\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\Omega^*} |f_*(y)|^p \frac{D(x)}{D(y)} dy\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m}\left(\int_{\Omega^*} |f_*(y)|^p \, dy\right)^{1/p} = \frac{1}{m}\|f_*\|_{L_p(\Omega^*)},$$

$$\left\|\frac{f^{(k)}(x)}{\rho(x)^{\alpha}}\right\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \left\|\rho_*(y)^{-\alpha} \sum_{1 \leqslant |s| \leqslant r} \mu(y) f^{(s)}(y) \left(\frac{D(x)}{D(y)}\right)^{1/p}\right\|_{L_p(\Omega^*)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant |s| \leqslant r} \left\|\frac{f^{(s)}(y)}{\rho_*(y)^{\alpha + (r - |s|)}}\right\|_{L_p(\Omega^*)} \leqslant \|f(y)\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega^*)}. \qquad (5)$$

В первом соотношении в (5) мы заменяем x на y и $\rho(x)$ оцениваем через $\rho_*(y)$, пользуясь (3). Частная производная $f^{(k)}(x)$, $|k| = r$ есть линейная комбинация производных $f^{(s)}(y)$ порядков $|s| \leqslant r$ с непрерывными на $\overline{\Omega}$ коэффициентами $\mu(y)$. Во втором соотношении $\mu(y)$ и $\frac{D(x)}{D(y)}$ оценены константами и в третьем α заменено на $\alpha + (r - |s|)$, что, очевидно, законно при соответствующем подборе константы в $\leqslant$.

Второе неравенство (4) вытекает из первого посредством замены местами x и y.

10.3. Доказательство вложения

$$W^r_{p\alpha}(\Omega) \to W^{r-l}_{p, \alpha_l}(\Omega), \qquad (1)$$

где

$$\alpha_l < \frac{1}{p}, \quad \alpha_l \leqslant \alpha + l, \quad \Gamma \in C^{(1)}, \quad 0 \leqslant l \leqslant r \qquad (2)$$

(см. 10.1 (4)).

Начнем с неравенства Харди

$$\left(\int_0^a \left|\frac{1}{x^{\mu}} \int_x^a \varphi(t)\, dt\right|^p dx\right)^{1/p} \leqslant C(a) \left(\int_0^a \left|\frac{\varphi(t)}{t^{\beta}}\right|^p dt\right)^{1/p} \qquad (3)$$

(см. книгу Харди, Литтлвуда и Полиа [1]), верного при условии, что $\mu<\frac{1}{p}$, $\mu\leqslant\beta+1$. Здесь константа $C(a)$ непрерывно возрастает вместе с a. Таким образом, она ограничена при любом $a\in[0,\ a_0]$, где $a_0<\infty$.

Неравенство (3) верно и для $a=\infty$, но только при $\beta=\mu-1$ (см. стр. 351). Если $1\leqslant p<\infty$, то

$$\left(\int_0^a\left|\frac{1}{x^\mu}\int_x^a\varphi(t)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p}=\left(\int_0^a\left|\frac{1}{x^{\mu-1}}\int_1^{a/x}\varphi(xu)\,du\right|^p dx\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\int_1^\infty\left(\int_0^{a/u}\left|\frac{\varphi(xu)}{x^{\mu-1}}\right|^p dx\right)^{1/p}du=\int_1^\infty u^{\mu-1-\frac{1}{p}}\,du\left(\int_0^a\left|\frac{\varphi(x)}{x^{\mu-1}}\right|^p dx\right)^{1/p}=$$

$$=\int_1^\infty u^{\mu-1-\frac{1}{p}}\,du\left(\int_0^a\left|\frac{\varphi(x)}{x^\beta}x^{\beta-\mu+1}\right|^p dx\right)^{1/p}\leqslant C(a)\left(\int_0^a\left|\frac{\varphi(x)}{x^\beta}\right|^p dx\right)^{1/p},$$

где константа

$$C(a)=Ca^{\beta-\mu+1}\qquad(C(0)=0)$$

непрерывно возрастает вместе с a.

Если же $p=\infty$, то (3) следует из соотношений

$$\left|\frac{1}{x^\mu}\int_x^a\varphi(t)\,dt\right|=\left|\int_0^{a/x}\frac{\varphi(xu)}{(xu)^\beta}(xu)^{\beta-\mu+1}u^{\mu-1}\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant C(a)\operatorname*{supvrai}_{0\leqslant t\leqslant a}\left|\frac{\varphi(t)}{t^\beta}\right|,\quad C(a)=a^{\beta-\mu+1}\int_1^\infty u^{\mu-1}\,du.$$

Вложение (1) в одномерном случае сводится к неравенству

$$\left(\int_0^a\left|\frac{f^{(r-l)}(x)}{x^{\alpha_l}}\right|^p dx\right)^{1/p}\leqslant C(a)\left[\left(\int_0^a\left|\frac{f^{(r)}(x)}{x^\alpha}\right|^p dx\right)^{1/p}+\|f\|_{L_p(0,\,a)}\right],\quad(4)$$

где $C(a)$ не зависит от f, в предположении (2).

Докажем (4) сначала при $l=1$. Имеем (пояснения ниже, $\lessdot$ обозначает $\leqslant C(a)$, где $C(a)$ — константа)

$$f^{(r-1)}(x)=f^{(r-1)}(a)+\int_a^x f^{(r)}(t)\,dt,$$

откуда

$$\left\|\frac{f^{(r-1)}(x)}{x^{\alpha_1}}\right\|_{L_p(0,\,a)}\lessdot|f^{(r-1)}(a)|\left(\int_0^a x^{-\alpha_1 p}\,dx\right)^{1/p}+\left\|x^{-\alpha_1}\int_0^x f^{(r)}(t)\,dt\right\|_{L_p(0,\,a)}\lessdot$$

$$\lessdot\|f\|_{L_p(0,\,a)}+\left\|\frac{f^{(r)}}{x^\alpha}\right\|_{L_p(0,\,a)}.\quad(5)$$

Ведь при конечном p интеграл во втором члене цепи конечный ($\alpha_1 p < 1$!), если же $p=\infty$, то этот возведенный в степень $1/p$ интеграл заменяется на $\max\limits_x x^{-\alpha_1}$, тоже конечный, так как в этом случае $\alpha_1 < 0$.

Далее, при $p > 1$ (см. 4.4.3 (8))

$$|f^{(r-1)}(a)| \leqslant \|f\|_{H_\infty^{r-\frac{1}{p}}\left(\frac{a}{2},\, a\right)} \leqslant \|f\|_{W_p^r\left(\frac{a}{2},\, a\right)} \leqslant \|f\|_{L_p(0,\, a)} + \left\|\frac{f^{(r)}}{x^\alpha}\right\|_{L_p(0,\, a)}$$

и при $p=1$

$$|f^{(r-1)}(a)| \leqslant |f^{(r-1)}(x)| + \int_x^a |f^{(r)}(t)|\,dt \qquad \left(\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant a\right),$$

откуда, интегрируя по $x \in \left(\frac{a}{2},\, a\right)$ и деля на $a/2$, получим

$$|f^{(r-1)}(a)| \leqslant \int_{a/2}^a |f^{(r-1)}(x)|\,dx + \int_{a/2}^a |f^{(r)}(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{W_1^r\left(\frac{a}{2},\, a\right)} \leqslant \|f\|_{L_p(0,\, a)} + \left\|\frac{f^{(r)}(x)}{x^\alpha}\right\|_{L_p(0,\, a)}.$$

Таким образом, при любом рассматриваемом p первое слагаемое второго члена цепи (5) оценивается нормой, стоящей в правой части (4). Этой же нормой оценивается и второе слагаемое на основании (3). Следовательно, (4) доказано.

Неравенство (4) в общем случае сводится к проверке цепи вложений

$$\overline{W}_{p\alpha}^r \to \overline{W}_{p,\, \alpha_l-(l-1)}^{r-1} \to \overline{W}_{p,\, \alpha_l-(l-2)}^{r-2} \to \ldots \to \overline{W}_{p,\, \alpha_l}^{r-l}, \tag{6}$$

где мы обозначили через $\overline{W}_{p\lambda}^\rho$ пространство функций f, определенных на $(0,\, a]$, с нормой

$$\|f\|_{\overline{W}_{p\lambda}^\rho} = \|f\|_{L_p(0,\, a)} + \left\|\frac{f^{(\rho)}}{x^\lambda}\right\|_{L_p(0,\, a)}.$$

А это так, потому что

$$\alpha_l - l \leqslant \alpha_l < \frac{1}{p}, \quad \alpha_l - i = \alpha_l - (i+1) + 1 \qquad (i = 0,\, 1,\, \ldots,\, l-1).$$

Пусть теперь $\Lambda \subset R_n$ есть простое множество (см. 10.1.1) и на нем задана функция $f(\xi) = f(\xi',\, \xi_n)$, локально принадлежащая к L_p вместе со своими производными $\frac{\partial^\lambda f}{\partial \xi_n^\lambda}$ $(\lambda = 0,\, 1,\, \ldots,\, r-1)$ и имеющая конечную норму

$$\|f\|_{\overline{\overline{W}}^r_{p\alpha}(\Lambda)}=\|f\|_{L_p(\Lambda)}+\|f\|_{\overline{\overline{w}}^r_{p\alpha}(\Lambda)},$$

$$\|f\|_{\overline{\overline{w}}^r_{p\alpha}(\Lambda)}=\left\|\frac{\partial^r f}{\partial\xi_n^r}\rho_{\xi_n}^{-\alpha}\right\|_{L_p(\Lambda)}\sim\left\|\frac{\partial^r f}{\partial\xi_n^r}(\xi_n-\varphi)^{-\alpha}(\psi-\xi_n)^{-\alpha}\right\|_{L_p(\Lambda)}, \tag{7}$$

где $\rho_{\xi_n}(\xi)$ есть расстояние точки $\xi\in\Lambda$ в направлении ξ_n до границы Λ.

Заметим, что

$$\rho_{\xi_n}(\xi)\sim(\xi_n-\varphi(\xi'))(\psi(\xi')-\xi_n)\qquad(\xi\in\Lambda)$$

(см. сноску на стр. 369).

При условиях (2) имеют место вложения

$$\overline{\overline{W}}^r_{p\alpha}(\Lambda)\to\overline{\overline{W}}^{r-l}_{p\alpha_l}(\Lambda)\qquad(l=0,\ 1,\ \dots,\ r-1). \tag{8}$$

В самом деле, из (4) непосредственно следует неравенство $(a<b)$

$$\left(\int_a^b\left|\frac{f^{(r-l)}(x)}{(x-a)^{\alpha_l}(b-x)^{\alpha_l}}\right|^p dx\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant C(b-a)\left[\|f(x)\|_{L_p(a,b)}+\left(\int_a^b\left|\frac{f^{(r)}(x)}{(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\alpha}}\right|^p dx\right)^{1/p}\right].$$

Поэтому

$$\left(\int_{\varphi(\xi')}^{\psi(\xi')}\left|\frac{\partial^{r-l}f(\xi',\xi_n)}{\partial\xi_n^{r-l}}(\xi_n-\varphi(\xi'))^{-\alpha_l}(\psi(\xi')-\xi_n)^{-\alpha_l}\right|^p d\xi_n\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant C(\psi(\xi')-\varphi(\xi'))\left[\left(\int_{\varphi(\xi')}^{\psi(\xi')}|f(\xi',\xi_n)|^p d\xi_n\right)^{1/p}+\right.$$
$$\left.+\left(\int_{\varphi(\xi')}^{\psi(\xi')}\left|\frac{\partial^r f(\xi',\xi_n)}{\partial\xi_n^r}(\xi_n-\varphi(\xi'))^{-\alpha}(\psi(\xi')-\xi_n)^{-\alpha}\right|^p d\xi_n\right)^{1/p}\right]. \tag{9}$$

Положим

$$\max_{\xi'\in\bar\sigma}C(\psi(\xi')-\varphi(\xi'))=C<\infty.$$

Здесь константа C конечна, потому что функция $C(a)$ непрерывно зависит от $a>0$ и согласно определению простого множества

$$0<m<\psi(\xi')-\varphi(\xi')<M\qquad(\xi'\in\bar\sigma)$$

для некоторых констант m, M.

Если учесть, что функции $\frac{\partial^{r-l} f}{\partial \xi_n^{r-l}}$ $(l=0,\ 1,\ \ldots,\ r)$ измеримы на Λ и норма (7) конечна, то после возведения неравенства (9) в степень p, применения второго из неравенств

$$c_1 \sum_1^N \lambda_j^p \leqslant \left(\sum_1^N \lambda_j \right)^p \leqslant c_2 \sum_1^N \lambda_j^p \qquad (\lambda_j \geqslant 0), \tag{10}$$

где c_1, c_2 зависят только от N и p, интегрирования по $\xi' \in \sigma$ и наконец применения первого из неравенств (10) получим

$$\|f\|_{W_{p\alpha_l}^{r-l}(\Lambda)} \leqslant C \|f\|_{W_{p\alpha}^r(\Lambda)}.$$

И так как, кроме того,

$$\|f\|_{L_p(\Lambda)} \leqslant \|f\|_{W_{p\alpha}^r(\Lambda)},$$

то имеет место вложение (8).

Пусть теперь $\Omega \subset R$ есть ограниченная область с гладкой $(n-1)$-мерной границей и $f \in W_{p\alpha}^r(\Omega)$ и соблюдаются условия (2).

На основании 10.2.6 область $\bar{\Omega}$ можно покрыть конечным числом регулярных ее мостов $\Lambda_1^*,\ \ldots,\ \Lambda_N^*$, опирающихся соответственно на $(n-1)$-мерные шары $\sigma_1^*,\ \ldots,\ \sigma_N^*$. Уменьшая несколько эти шары, можно добиться того, что регулярные мосты $\Lambda_1,\ \ldots,\ \Lambda_N$, опирающиеся на уменьшенные шары $\sigma_1,\ \ldots$ $\ldots,\ \sigma_N$ $(\sigma_j \subset \bar{\sigma}_j \subset \sigma_j^*)$, тоже будут покрывать $\bar{\Omega}$.

Докажем вложение (1) при $l=1$

$$W_{p\alpha}^r(\Omega) \to W_{p,\,\alpha_1}^{r-1},\quad \alpha_1 < \frac{1}{p},\quad \alpha_1 \leqslant \alpha + 1,\quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{11}$$

Отсюда по индукции, которую мы не будем проводить, потому что она аналогична рассуждениям в (6), получается и общее вложение (1).

Чтобы доказать (11), достаточно доказать, что для любой частной производной $f_x^{(r-1)}$ порядка $r-1$ и моста $\Lambda \subset \bar{\Lambda} \subset \Lambda^*$ (индекс мы опускаем !) имеет место

$$\left\| \frac{f_x^{(r-1)}}{\rho^{\alpha_1}} \right\|_{L_p(\Lambda)} \leqslant c \|f\|_{W_{p\alpha}^r(\Omega)}. \tag{12}$$

Введем новую прямоугольную систему координат

$$(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n) = \xi \rightleftarrows x = (x_1,\ \ldots,\ x_n), \tag{13}$$

в которой описывается Λ^* (см. 10.1.1 (1)). Так как преобразование (13) линейное с постоянными коэффициентами, то любая частная производная $f_x^{(l)}$ порядка l по x есть некоторая линейная комбинация из производных $f^{(l)}_\xi$ по ξ того же порядка l. Учтя этот факт (при $l=r-1$) и тот факт, что определитель преобразования (13) равен 1, мы видим, что неравенство (12) будет доказано, если будет доказано неравенство

$$\left\|\frac{f^{(r-1)}_\xi}{\rho^{\alpha_1}}\right\|_{L_p(\Lambda)}\leqslant c\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)},\tag{14}$$

где $f^{(r-1)}_\xi$ есть какая-либо производная порядка $r-1$ по ξ, а интеграл слева взят по множеству $\Lambda\subset\Lambda^*$ точек ξ.

Здесь

$$\rho(\xi)=\rho(x)$$

— расстояние от точки x (или, что все равно, ξ) до Γ.

Итак, зададим $f^{(r-1)}_\xi$.

Имеем в силу 10.2.7 (1) и (8) при $l=1$ (пояснения ниже)

$$\left\|\frac{f^{(r-1)}_\xi}{\rho^{\alpha_1}}\right\|_{L_p(\Lambda)}\leqslant\left\|\frac{f^{(r-1)}_\xi}{\rho^{\alpha_1}_{\xi_n}}\right\|_{L_p(\Lambda)}\leqslant\|f\|_{L_p(\Lambda)}+\left\|\frac{\dfrac{\partial f^{(r-1)}_\xi}{\partial\xi^{r-1}_n}}{\rho^{\alpha}_{\xi_n}}\right\|_{L_p(\Lambda)}\leqslant$$

$$\leqslant\|f\|_{L_p(\Lambda)}+\left|\frac{\dfrac{\partial f^{(r-1)}_\xi}{\partial\xi^{r-1}_n}}{\rho^{\alpha}}\right|_{L_p(\Lambda)}\leqslant\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)}$$

и (14) доказано.

В первом члене этой цепи интегрирование происходит по x на Λ, здесь $\rho(x)$ — расстояние от x до Γ. Во втором члене совершается замена переменной x на ξ в интеграле и применяется 10.2.7 (1). В третьем — применяется вложение (8) при $l=1$. В четвертом — ρ_{ξ_n} заменяется на меньшую величину $c\rho$, пользуясь 10.2.7 (1). Переход к последнему члену сводится к обратной замене ξ на x, при этом $\dfrac{\partial f^{(r-1)}_\xi}{\partial\xi_n}$ заменяется на некоторую линейную комбинацию из частных производных $f^{(r)}_x$. Замена Λ на Ω только усиливает неравенство.

10.4. Доказательство вложения

$$W^r_{p\alpha}(\Omega)\to B^{r+\alpha}_p(\Omega)\qquad(0<r+\alpha<r)$$

Пусть s_0 есть наименьшее натуральное число, для которого $r+\alpha\leqslant s_0$. Рассмотрим два случая $r+\alpha<s_0$ и $r+\alpha=s_0$.

10.4.1. Случай 1:

$$s_0-1<r+\alpha<s_0.\tag{1}$$

Нам будет удобно вложение 10.4 (1) свести к следующим двум:

$$W^r_{p\alpha}(\Omega) \to W^{s_0}_{p,\ \alpha+r-s_0}(\Omega) \to B^{r+\alpha}_p(\Omega). \tag{2}$$

Первое из них верно, потому что $r+\alpha-s_0<0\leqslant\frac{1}{p}$ (см. 10.1 (4), (5)).

Положим $r+\alpha-s_0=\beta<0$, тогда $r+\alpha-s_0+1=1+\beta$,

$$0<1+\beta<1. \tag{3}$$

Второе вложение (2) в одномерном случае сводится к неравенству

$$\int\limits_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{dh\,\|f^{(s_0-1)}(x+h)-f^{(s_0-1)}(x)\|^p_{L_p(a,\ b-h)}}{h^{1+p(1+\beta)}}=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{dh}{h^{l+p(1+\beta)}}\int\limits_a^{b-h} dx\left|\int\limits_x^{x+h} f^{(s_0)}(t)\,dt\right|^p \leqslant c\,(b-a)\int\limits_a^b \left|\frac{f^{(s_0)}(x)}{\rho(x)^\beta}\right|^p dx, \tag{4}$$

которое нам предстоит доказать. Здесь $C(t)>0$ — непрерывная функция от $t>0$ и $\rho(x)\sim(x-a)(b-x)$, $x\in(a,\ b)$ — расстояние от точки x до границы $(a,\ b)$.

Мы начинаем с неравенства (пояснения ниже)

$$\int\limits_0^l \frac{dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\int\limits_0^{l-h} dx\left|\int\limits_x^{x+h}\psi(t)\,dt\right|^p \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^l \frac{dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\int\limits_0^{l-h} dx\int\limits_x^{x+h}\left|\frac{\psi(t)}{t^{\beta,q}}\right|^p dt\left(\int\limits_x^{x+h}\xi^\beta\,d\xi\right)^{p/q}=$$

$$=\int\limits_0^l \frac{dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\int\limits_0^{l-h} dx\int\limits_x^{x+h}\left|\frac{\psi(t)}{t^\beta}\right|^p t^\beta\,dt\left(\int\limits_x^{x+h}\xi^\beta\,d\xi\right)^{p-1}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^l\left|\frac{\psi(t)}{t^\beta}\right|^p g(t)\,dt\leqslant C(l)\int\limits_0^l\left|\frac{\psi(t)}{t^\beta}\right|^p dt, \tag{5}$$

где $C(l)>0$ — непрерывная функция от l.

В первом соотношении (5) применяется неравенство Гёльдера по $t\in(x,\ x+h)$. Во втором — надо учесть, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. В третьем — меняются местами $dx\,dt$ и $dt\,dx$, а затем $dh\,dt$ и

$dt\,dh$, при этом мы положили

$$g(t)=t^\beta\int\limits_0^l\frac{dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\int\limits_{\lambda(t,\,h)}^t\left(\int\limits_x^{x+h}\xi^\beta\,d\xi\right)^{p-1}dx,$$

где

$$\lambda(t,\,h)=\begin{cases}0, & 0<t<h,\\ t-h, & h<t<l.\end{cases}$$

Наконец, в последнем (пятом) соотношении надо учесть, что функция $g(t)$ ограничена на $[0,\,l]$ $(g(t)\leqslant C)$.

В самом деле, положим $g(t)=g_1(t)+g_2(t)$, где

$$g_1(t)=t^\beta\int\limits_0^{t/2}\frac{dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\int\limits_{\lambda(t,\,h)}^t\left(\int\limits_x^{x+h}\xi^\beta\,d\xi\right)^{p-1}dx.$$

Так как здесь $h<\frac{t}{2}<t$, то $\lambda(t,\,h)=t-h$. Кроме того, $\xi>x>t-h>t-\frac{t}{2}=\frac{t}{2}$ и $\beta<0$, поэтому $\xi^\beta\leqslant t^\beta$. Следовательно, учитывая, что $\int\limits_{t-h}^t x^\beta\,dx\leqslant h^{1+\beta}$, будем иметь

$$g_1(t)\leqslant t^\beta\int\limits_0^{t/2}\frac{dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\,t^{\beta(p-1)}\int\limits_{t-h}^t h^{p-1}\,dx\leqslant t^{\beta p}\int\limits_0^{t/2}\frac{dh}{h^{1+p\beta}}\leqslant t^{\beta p}t^{-p\beta}=1.$$

С другой стороны, если учесть, что $0\leqslant\lambda(t,\,h)$, то получим

$$g_2(t)=t^\beta\int\limits_{t/2}^l\frac{dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\int\limits_{\lambda(t,\,h)}^t\left(\int\limits_x^{x+h}\xi^\beta\,d\xi\right)^{p-1}dx\leqslant$$

$$\leqslant t^\beta\int\limits_{t/2}^l\frac{dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\int\limits_0^t dx\,h^{(1+\beta)(p-1)}\leqslant t^{1+\beta}\int\limits_{t/2}^l\frac{dh}{h^{2+\beta}}\leqslant t^{1+\beta}t^{-1-\beta}=1.$$

В третьем соотношении надо учесть, что $(x+h)^{1+\beta}-x^{1+\beta}\leqslant h^{1+\beta}$, так как $0<1+\beta<1$.

Конечно, рассматривая вместо $\psi(t)$ функцию $\psi(-t)$ на $(-l,\,0)$ и рассуждая, как в (5), мы легко получим

$$\int\limits_0^l\frac{dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\int\limits_0^{l-h}dx\left|\int\limits_x^{x+h}\psi(t)\,dt\right|^p\leqslant C(l)\int\limits_0^l\left|\frac{\psi(t)}{(l-t)^\beta}\right|^p dt. \qquad (5')$$

Пусть теперь $a<b$. Положим для краткости $c=\frac{a+b}{2}$, $d=$ $=a+\frac{b-a}{4}$,

$$\mu(\lambda,\,\nu)=\|f^{(s_0-1)}(x+h)-f^{(s_0-1)}(x)\|^p_{L_p(\lambda,\,\nu)}. \qquad (6)$$

Очевидно, что

$$\mu(\lambda, \nu) \leqslant \mu(\lambda_1, \nu_1), \text{ если } (\lambda, \nu) \subset (\lambda_1, \nu_1), \tag{7}$$

поэтому, учитывая еще (5) и (5′), будем иметь

$$\left(\int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{\mu(a, b-h)\,dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{\mu(a, c-h)\,dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{\mu(c-h, b-h)\,dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{\mu(a, c-h)\,dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\int_0^{\frac{3(b-a)}{4}} \frac{\mu(d, b-h)\,dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\right)^{1/p} \leqslant c_1(b-a)\left[\left(\int_a^c \left|\frac{f^{(s_0)}(x)}{(x-a)^\beta}\right|^p dx\right)^{1/p} +\right.$$

$$\left.+\left(\int_c^a \left|\frac{f^{(s_0)}(x)}{(b-x)^\beta}\right|^p dx\right)^{1/p}\right] \leqslant c_2(b-a)\left(\int_a^b \left|\frac{f^{(s_0)}(x)}{(x-a)^\beta (b-x)^\beta}\right|^p dx\right)^{1/p},$$

и мы доказали (4).

Переходим к доказательству 10.4 (1) (в случае 1).

10.4.1.1. На основании леммы 10.2.6 мы можем считать, что множество $\overline{\Omega}$ покрыто конечным числом множеств $\overline{\omega}$, каждое из которых обладает следующими свойствами: 1) ω — область с $(n-1)$-мерной гладкой границей, 2) $\overline{\omega}$ принадлежит к сердцевине

$$\Lambda_x = \bigcap_1^n \Lambda_j \qquad (\overline{\omega} \subset \Lambda_x)$$

некоторого креста регулярных мостов области Ω.

Зафиксируем внимание на определенной такой области ω. Введем для нее систему координат $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, вообще косоугольную, с положительными полуосями, совпадающими соответственно с лучами $L_1, \ldots, L_n$, определяющими крест $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ (см. 10.2.6).

Функцию $f(\boldsymbol{x})$ после замены $\boldsymbol{x} \rightleftarrows \zeta$ будем снова обозначать через $f(\zeta)$.

Если теперь задана функция $f(\boldsymbol{x}) \in W^r_{p\alpha}(\Omega)$, то для нее выполняются неравенства (пояснения ниже)

$$\left\| \frac{\dfrac{\partial^{s_0} f}{\partial \zeta_j^{s_0}}(\zeta)}{\rho_{\zeta_j}^{r+\alpha-s_0}} \right\|_{L_p(\tilde{\Lambda}_j)} \leqslant \left\| \frac{\dfrac{\partial^{s_0} f}{\partial \zeta_j^{s_0}}(\zeta)}{\rho(\zeta)^{r+\alpha-s_0}} \right\|_{L_p(\tilde{\Lambda}_j)} \leqslant \|f(\boldsymbol{x})\|_{W^{s_0}_{p,\, r+\alpha-s_0}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \|f(\boldsymbol{x})\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)} \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Здесь $\tilde\Lambda_j$ — отображение Λ_j при преобразовании $x \rightleftarrows \zeta$ и ρ_{ζ_j} есть расстояние от точки $\zeta\in\Lambda_j$ до Γ в направлении ζ_j. Первое соотношение в (1) верно в силу 10.2.7. Второе соотношение верно в силу того, что частная производная $\frac{\partial^{s_0}f}{\partial\zeta_j^{s_0}}$ есть линейная комбинация с постоянными коэффициентами из частных производных $f^{(s_0)}(x)$ по x порядка s_0, к тому же, в данном случае якобиан перехода от ζ к x есть постоянное число, а расширение нормы от $\tilde\Lambda_j$ к $\tilde\Omega$ только увеличивает ее. Наконец, последнее соотношение в (1) верно в силу первого вложения в 10.4.1 (2).

Будем считать, что

$$\Lambda_j=\{\zeta:\ \varphi(\zeta^j)\leqslant\zeta_j\leqslant\psi(\zeta^j),\quad \zeta^j\in\sigma_j'\},$$

где $\zeta^j=(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_{j-1},\ \zeta_{j+1},\ \ldots,\ \zeta_n)$ и σ_j' — $(n-1)$-мерный эллипс. При этом $\varphi(\zeta')$, $\psi(\zeta')$ непрерывно дифференцируемы на σ_j' и

$$m\leqslant\psi(\zeta^j)-\varphi(\zeta'^j)\leqslant M\qquad(\zeta^j\in\bar\sigma_j'). \tag{2}$$

В силу 10.4.1 (4) имеет место

$$\int_0^{\frac{m}{2}}\frac{dh}{h^{1+p(1+\beta)}}\int_{\varphi(\zeta^j)}^{\psi(\zeta^j)}\left|f_{\zeta_j}^{(s_0-1)}(\zeta^j,\ \zeta_j+h)-f_{\zeta_j}^{(s_0-1)}(\zeta^j,\ \zeta_j)\right|^p d\zeta_j\leqslant$$

$$\leqslant c\int_{\varphi(\zeta^j)}^{\psi(\zeta^j)}\left|\frac{f_{\zeta_j}^{(s_0)}(\zeta^j,\ \zeta_j)}{\rho_{\zeta_j}(\zeta)^\beta}\right|^p d\zeta_j,\qquad c=\max_{\zeta^j\in\bar\sigma_j'}[\psi(\zeta^j)-\varphi(\zeta^j)]. \tag{3}$$

После интегрирования этого неравенства по $\zeta^j\in\sigma_j'$ получим (см. 4.3.4, $\beta=r+\alpha-s_0$ (!))

$$\|f(\zeta)\|_{b^{r+\alpha}_{p,\zeta_j}(\omega)}\leqslant\|f(\zeta)\|_{b^{r+\alpha}_{p\zeta_j}(\Lambda_j)}\leqslant\left\|\frac{\dfrac{\partial^{s_0}f}{\partial\zeta_j^{s_0}}}{\rho_{\zeta_j}^{r+\alpha-s_0}}\right\|_{L_p(\tilde\Lambda_j)}\qquad(j=1,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Из (1) и (4) следует

$$\|f(\zeta)\|_{b^{r+\alpha}_{p\zeta_j}(\tilde\omega)}\leqslant\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)}\qquad(j=1,\ \ldots,\ n). \tag{5}$$

Но тогда в силу того, что ω ограничена и имеет гладкую $(n-1)$-мерную границу, функцию $f(\zeta)$ можно продолжить на все n-мерное пространство $\tilde R_n$ точек $\zeta=(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_n)$ с сохранением свойств (4) и (5). Точнее, существует функция $f_\omega(\zeta)\in B^{r+\alpha}_p(\tilde R_n)$

такая, что

$$f_\omega(\zeta)=f(\zeta),\quad \zeta\in\omega,\qquad \|f_\omega(\zeta)\|_{B_p^{r+\alpha}(\tilde R_n)}\leqslant\|f\|_{W_{p\alpha}^r(\Omega)} \tag{6}$$

(см. примечание к 4.3.6).

Так как преобразование $\zeta\rightleftarrows x$ линейное невырожденное с постоянными коэффициентами, то

$$\|f_\omega(x)\|_{B_p^{r+\alpha}(R_n)}\leqslant\|f\|_{W_{p\alpha}^r(\Omega)} \tag{7}$$

(см. О. В. Бесов, В. П. Ильин и С. М. Никольский [1], § 21).

Существует конечное число прямоугольников Δ_{x_k} (открытых) и им соответствующих множеств ω_k, о которых шла речь в лемме из 10.2.5 ($k=1,\ldots,N$). Каждому k можно привести в соответствие бесконечно дифференцируемую на R_n функцию $\varphi_k(x)$ со свойствами:

1) $0\leqslant\varphi_k(x)\leqslant 1$,

2) $\varphi_k(x)$ финитна в Δ_{x_k},

3) $\sum\limits_1^N\varphi_k(x)=1$ на $\overline{\Omega}$

(см., например, С. М. Никольский [22], т. II, § 18.4).

Положим

$$F(x)=\sum_1^N f_{\omega_k}(x)\,\varphi_k(x). \tag{8}$$

Очевидно,

$$\|F\|_{B_p^{r+\alpha}(R_n)}\leqslant\sum_1^N\|f_{\omega_k}(x)\|_{B_p^{r+\alpha}(R_n)}\leqslant\|f\|_{W_{p\alpha}^r(\Omega)}. \tag{9}$$

Пусть $x\in\overline{\Omega}$. Тогда для любого $k=1,\ldots,N$

$$f_{\omega_k}(x)\,\varphi_k(x)=f(x)\,\varphi_k(x), \tag{10}$$

потому что, если для этого k $x\in\Delta_{x_k}$, то $x\in\Delta_{x_k}\overline{\Omega}\subset\omega_k$ и $f_{\omega_k}(x)=f(x)$, если же $x\notin\Delta_{x_k}$, то $\varphi_k(x)=0$ и равенство (10) все равно выполняется. Но тогда

$$F(x)=f(x)\sum_{k=1}^N\varphi_k(x)=f(x)\ \text{для всех}\ x\in\overline{\Omega}. \tag{11}$$

Из (8) и (9) следует

$$\|f\|_{B_p^{r+\alpha}(\Omega)}\leqslant\|f\|_{W_{p\alpha}^r(\Omega)}$$

и вложение 10.4 (1) в случае 1 доказано.

10.4.2. Случай 2:

$$r+\alpha = s_0. \tag{1}$$

В этом случае

$$W^r_{p\alpha}(\Omega) \to W^{s_0+1}_{p,-1}(\Omega) \to B_p^{r+\alpha}(\Omega). \tag{2}$$

Первое соотношение в (2) верно (см. 10.1 (4)), потому что $s_0+1 \leqslant r$ и $r+\alpha-s_0-1=-1<0\leqslant \frac{1}{p}$. Второе — предстоит доказать.

Начнем с неравенства (пояснения ниже)

$$\int_0^{l/2} \frac{dh}{h^{1+p}} \int_0^{l-2h} |f^{(s_0-1)}(x+2h)-2f^{(s_0-1)}(x+h)+f^{(s_0-1)}(x)|^p\,dx =$$

$$= \int_0^{l/2} \frac{dh}{h^{1+p}} \int_0^{l-2h} \left| \int_0^h \int_0^h f^{(s_0+1)}(x+t+t_1)\,dt\,dt_1 \right|^p dx =$$

$$= \int_0^{l/2} \frac{dh}{h^{1+p}} \int_0^{l-2h} \left| \int_x^{x+h} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+h} f^{(s_0+1)}(t)\,dt \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{l/2} \frac{dh}{h^{1+p}} \int_0^{l-2h} dx \int_x^{x+h} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+h} \frac{|f^{(s_0+1)}(t)\,t|^p}{t}\,\gamma(x,h)\,dt =$$

$$= \int_0^{l/2} \frac{dh}{h^{1+p}} \int_0^{l-2h} dx \int_x^{x+2h} \frac{|f^{(s_0+1)}(t)\,t|^p}{t}\,\mu(t,x,h)\,\gamma(x,h)\,dt =$$

$$= \int_0^l |f^{(s_0+1)}(t)\,t|^p g(t)\,dt \leqslant \int_0^l |f^{(s_0+1)}(t)\,t|^p\,dt. \tag{3}$$

В третьем соотношении мы умножаем и делим $f^{(s_0+1)}(t)$ на $t^{1/q}$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ и применяем к интегралу по $dt\,dt_1$ неравенство Гёльдера; при этом полагаем

$$\gamma(x,h) = \left(\int_x^{x+h} d\nu \int_\nu^{\nu+h} \zeta^{-1}\,d\zeta \right)^{p-1}. \tag{4}$$

В четвертом соотношении меняется порядок интегрирования по $dt_1\,dt$ на $dt\,dt_1$. В результате после интегрирования по dt_1, которое возможно довести до конца, получим написанное равенство, где

$$\mu(t, x, h)=\begin{cases} t-x, & x<t<x+h, \\ x-t+2h, & x+h<t<x+2h. \end{cases} \tag{5}$$

Наконец меняем порядок интегрирования по $dx\,dt$ на $dt\,dx$, а затем $dh\,dt$ на $dt\,dh$ и после вынесения за скобки $|f^{(s_0+l)}(t)\,t|^p$ получаем предпоследний член (3), где

$$g(t)=\frac{1}{t}\int_0^{t/2}\frac{dh}{h^{1+p}}\int_{\lambda(t,\,2h)}^{t}\mu(t, x, h)\,\gamma(x, h)\,dx \qquad (0<t<l) \tag{6}$$

и

$$\lambda(t, 2h)=\begin{cases} 0, & 0<t<2h, \\ t-2h, & 2h<t<l. \end{cases} \tag{7}$$

Ниже мы доказываем ограниченность функции $g(t)$ на $(0, l)$, откуда следует последнее соотношение в (3). Полагаем

$$g(t)=g_1(t)+g_2(t), \tag{8}$$

где

$$g_1(t)=\frac{1}{t}\int_0^{t/4}\frac{dh}{h^{1+p}}\int_{\lambda(t,\,2h)}^{t}\mu(t, x, h)\,\gamma(x, h)\,dx=$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^{t/4}\frac{dh}{h^{1+p}}\int_{t-2h}^{t}\mu(t, x, h)\,\gamma(x, h)\,dx. \tag{9}$$

Здесь $2h<\frac{t}{2}<t$, и потому $\lambda(t, 2h)=t-2h$. Из (5) следует, что

$$\mu(t, x, h)<h. \tag{10}$$

Докажем, что

$$\gamma(x, h)\leqslant h^{p-1}. \tag{11}$$

В самом деле, переменяя порядок интегрирования в интеграле в правой части (4), получим (пояснения ниже)

$$\int_x^{x+h}dv\int_v^{v+h}\zeta^{-1}\,d\zeta=\int_x^{x+h}\frac{\zeta-x}{\zeta}\,d\zeta+\int_{x+h}^{x+2h}\frac{2h+x-\zeta}{x+h}\,d\zeta<$$

$$<\int_x^{x+h}1\,d\zeta+\int_{x+h}^{x+2h}1\,d\zeta=h+h=2h.$$

Ведь $\zeta - x < (\zeta - x) + x = \zeta$, так как $x > 0$, и $2h + x - \zeta = (x+h) - (\zeta - h) < x + h$, так как $x + h < \zeta$ и, следовательно, $\zeta - h > x > 0$.

Но тогда из (9), (10) и (11) следует

$$g_1(t) \leqslant \frac{1}{t}\int_0^{t/4} \frac{h \cdot hh^{p-1}}{h^{1+p}}\, dh \leqslant \frac{1}{t}\, t \leqslant 1. \tag{12}$$

Имеем далее (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} g_2(t) &\leqslant \frac{1}{t}\int_{t/4}^{l/2} \frac{dh}{h^{1+p}} \int_0^t \mu(t,\ x,\ h)\, \gamma(x,\ h)\, dx = \\ &= \frac{1}{t}\int_{t/4}^{l/2} \frac{dh}{h^{1+p}} \int_0^t (t-x)\, \gamma(x,\ h)\, dx \leqslant \frac{1}{t}\int_{t/4}^{l/2} \frac{h^{p-1}\, dh}{h^{1+p}} \int_0^t (t-x)\, dx \leqslant \\ &\leqslant t \int_{t/4}^{l/2} \frac{dh}{h^2} \leqslant t \cdot \frac{1}{t} \leqslant 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Так как здесь $x < t$, то $\mu(t,\ x,\ h) = t - x$. Во втором члене цепи мы расширили интервал интегрирования по dx, пользуясь тем, что $\lambda(t,\ 2h) \geqslant 0$ (см. (7)).

Из (8), (9) и (13) следует ограниченность $g(t)$ на $(0,\ l)$.

Этим неравенство (3) обосновано полностью.

Конечно, рассматривая вместо $f^{(s_0+1)}(t)$ функцию $f^{(s_0+1)}(-t)$ на $(-l,\ 0)$ и рассуждая, как в (3), мы легко получим

$$\int_0^{l/2} \frac{dh}{h^{1+p}} \int_0^{l-2h} \left| \int_0^h \int_0^h f^{(s_0+1)}(x + t_1 + t_2)\, dt_1\, dt_2 \right|^p dx \leqslant \leqslant \int_0^l |f^{(s_0+1)}(t)\,(l-t)|^p\, dt. \tag{3'}$$

Пусть теперь $a < b$. Положим $c = \frac{a+b}{2}$, $d = a + \frac{b-a}{4}$,

$$\mu(\lambda,\ \nu) = \int_\lambda^{\nu-2h} \left| \int_0^h \int_0^h f(x + t + t_1)\, dt\, dt_1 \right|^p dx.$$

Очевидно,

$$\mu(\lambda,\ \nu) \leqslant \mu(\lambda_1,\ \nu_1), \text{ если } (\lambda,\ \nu) \subset (\lambda_1,\ \nu_1),$$

и тогда в силу (3), (3′)

$$\left(\int_0^{\frac{b-a}{4}} \frac{dh}{h^{1+p}} \| f^{(s_0-1)}(x+2h) - 2f^{(s_0-1)}(x+h) + f^{(s_0-1)}(x) \|^p_{L_p(a,\, b-2h)}\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{b-a}{4}} \frac{\mu(a,\, b-2h)\, dh}{h^{1+p}}\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^{\frac{b-a}{4}} \frac{\mu(a,\, c-2h)\, dh}{h^{1+p}}\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_0^{\frac{b-a}{4}} \frac{\mu(c-2h,\, b-2h)\, dh}{h^{1+p}}\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^{\frac{b-a}{4}} \frac{\mu(a,\, c-2h)\, dh}{h^{1+p}}\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_0^{\frac{3(b-a)}{8}} \frac{\mu(d,\, b-2h)}{h^{1+p}}\, dh\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 (b-a)\left[\left(\int_a^c |f^{(s_0+1)}(t)(t-a)|^p\, dt\right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_d^b |f^{(s_0+1)}(t)(b-t)|^p\, dt\right)^{1/p}\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_2 (b-a)\left(\int_a^b |f^{(s_0+1)}(t)(t-a)(b-t)|^p\, dt\right)^{1/p}, \qquad (14)$$

и мы доказали второе вложение (2) в одномерном случае ($\Omega = (a,\, b)$).

Распространение его на случай произвольной ограниченной области $\Omega \subset R_n$ ведется рассуждениями, аналогичными приведенным в 10.4.1.1. Теперь уже для функции $f(x) \in W^r_{p\alpha}(\Omega)$, где $r+\alpha = s_0 < r$, неравенство соответствующее 10.4.1.1 (1) выглядит так $(r+\alpha-s_0-1 = -1$ (1)):

$$\left\| \frac{\dfrac{\partial^{s_0+1} f}{\partial \zeta_j^{s_0+1}}}{\rho_{\zeta_j}^{-1}} \right\|_{L_p(\tilde{\Lambda}_j)} \leqslant \| f(x) \|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)}.$$

А неравенство, соответствующее 10.4.1.1 (3), имеет вид (см. 10.4.1.1 (2))

$$\int_0^{\frac{m}{4}} \frac{dh}{h^{1+p}} \int_{\varphi(\zeta')}^{\psi(\zeta')} \left| f_{\zeta_j}^{(s_0-1)}(\zeta',\, \zeta_j+2h) - 2f_{\zeta_j}^{(s_0-1)}(\zeta',\, \zeta_j+h) + \right.$$

$$\left. + f_{\zeta_j}^{(s_0-1)}(\zeta',\, \zeta_j) \right|^p d\zeta_j \leqslant c \int_{\varphi(\zeta')}^{\psi(\zeta')} \left| f_{\zeta_j}^{(s_0+1)}(\zeta',\, \zeta_j)\, \rho_{\zeta_j} \right|^p d\zeta_j.$$

После его интегрирования по ζ' получаем неравенства, соответствующие 10.4.1.1 (4) и (5):

$$\|f(\zeta)\|_{b^{r+\alpha}_{p\zeta_j}(\omega)} \leqslant \left\| \frac{\dfrac{\partial^{s_0+1} f}{\partial \zeta_j^{s_0+1}}}{\rho_{\zeta_j}^{-1}} \right\|_{L_p(\tilde{\Lambda}_j)} \leqslant \|f(x)\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)}.$$

Чтобы окончательно получить вложение $W^r_{p\alpha}(\Omega) \to B_p^{r+\alpha}(\Omega)$, надо повторить рассуждения, приведенные в 10.4.1.1 после формулы (5).

10.5. Доказательство вложения

$$W^r_{p\alpha}(\Omega) \to B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma) \quad \left(0 < r+\alpha-\frac{1}{p} < r, \quad \Gamma \in C^{(\mu)}\right), \tag{1}$$

$\mu > r+\alpha$ — натуральное.

Отметим, что верность этого вложения при $\alpha = 0$ (в том числе и при $p = \infty$) следует из соответствующей теории для безвесовых классов, так как тогда

$$W^r_{p0}(\Omega) = W^r_p(\Omega) \to B_p^{r-\frac{1}{p}}(\Gamma) \tag{2}$$

(см. книгу О. В. Бесова, В. П. Ильина и С. М. Никольского [1], теорема 24.3).

Рассмотрим сначала случай

$$r+\alpha-\frac{1}{p} = s_0. \tag{3}$$

Так как $s_0 < r$, то $r+\alpha-\frac{1}{p} \leqslant r-1$ и $\alpha \leqslant \frac{1}{p} - 1 \leqslant 0$. Случай $\alpha = 0$ уже рассмотрен. Если же $\alpha < 0$, то, учитывая, что $s_0 > 0$, получим

$$0 \leqslant \frac{1}{p} < r+\alpha < r.$$

Следовательно (см. 10.4 (1) и теорему 24.3 упомянутой книги),

$$W^r_{p\alpha}(\Omega) \to B_p^{r+\alpha}(\Omega) \to B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma). \tag{4}$$

Отметим, что в условие этой теоремы входит $\Gamma \in C^{(\mu)}$ $(\mu > r+\alpha)$ (см. замечание перед теоремой 24.3 и формулу 21 (8') в указанной книге).

Переходим к случаю

$$r+\alpha-\frac{1}{p}<s_0. \tag{5}$$

Если на самом деле $r+\alpha<s_0$, то в силу неравенства $s_0 \leqslant r$ получим $\alpha<0$. Кроме того, из (1) следует, что $r+\alpha>\frac{1}{p}\geqslant 0$, поэтому $0<r+\alpha<r$ и в силу 10.4 (1) и теоремы 24.3 упомянутой книги

$$W_{p\alpha}^r(\Omega)\to B_p^{r+\alpha}(\Omega)\to B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma). \tag{6}$$

Если же

$$r+\alpha-s_0\geqslant 0, \tag{7}$$

то при $s_0-\frac{1}{p}>0$

$$W_{p\alpha}^r(\Omega)\to W_{p,\,r+\alpha-s_0}^{s_0}(\Omega)\to W_p^{s_0}(\Omega)\to B_p^{s_0-\frac{1}{p}}(\Gamma). \tag{8}$$

Здесь первое вложение следует из того, что $r+\alpha-s_0<\frac{1}{p}$ (см. 10.1 (4)). Второе — тривиально вытекает из (7). Третье — следует из теоремы 24.3 книги О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1].

Второе вложение грубое, и мы не получили точный класс для следа функции $f\in W_{p\alpha}^r(\Omega)$. Однако мы доказали, что существует след $f|_\Gamma=\varphi$, имеющий интегрируемые на Γ частные производные до порядка s_0-1 включительно, которые могут быть получены из соответствующих частных производных, определенных на Ω, как пределы в среднем (в смысле L_p), или почти всюду, как это описано в § 24 книги О. В. Бесова, В. П. Ильина и С. М. Никольского [1] (см. также С. М. Никольский [5]). Это утверждение верно и при $s_0-\frac{1}{p}=0$, т. е. при $s_0=p=1$, но в этом случае в цепи (8) надо заменить $B_p^{s_0-\frac{1}{p}}(\Gamma)=B_p^0(\Gamma)$ на $L_p(\Gamma)$.

10.5.1. Ниже мы займемся случаем 10.5 (5), который можно записать еще следующим образом:

$$s_0-1<r+\alpha-\frac{1}{p}<s_0. \tag{1}$$

Пусть

$$\Delta=\{x\colon\ 0\leqslant x_i\leqslant 1,\quad i=1,\ \ldots,\ n\}$$

— единичный куб в R_n и Δ' — его грань, принадлежащая плоскости $x_n=0$:

$$\Delta'=\{x'=(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})\colon\ 0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,\ \ldots,\ n-1;\ x_n=0\}.$$

Введем класс функций $\overline{W}^r_{p\alpha}(\Delta)$, определенный как $W^r_{p\alpha}(\Delta)$ в 10.1, но где $\rho(x)$ есть расстояние от $x\in\Delta$ до Δ', т. е. $\rho(x)=\rho_{x_n}(x)=x_n$. Произвольную точку $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ будем записывать еще так: $x=(x',\ x_n)=(x_1,\ x'',\ x_n)$, считая, таким образом, что $x'=(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})=(x_1,\ x'')$, $x''=(x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$.

Нам предстоит доказать, что

$$\overline{W}^r_{p\alpha}(\Delta)\to\overline{W}^{s_0}_{p,\,r+\alpha-s_0}(\Delta)\to B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Delta') \tag{2}$$

при условии (1). Первое вложение верно в силу 10.1 (4), потому что $r+\alpha-s_0<\frac{1}{p}$. Второе сводится к неравенству

$$\left(\int\limits_0^1\frac{dh}{h^{1+p\left(r+\alpha-\frac{1}{p}-s_0+1\right)}}\int\limits_{\Delta'_h}\left|\frac{\partial^{s_0-1}f(x_1+h,\ x'',\ 0)}{\partial x_1^{s_0-1}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial^{s_0-1}f(x_1,\ x'',\ 0)}{\partial x_1^{s_0-1}}\right|^p dx'\right)^{1/p}\leqslant\|f\|_{\overline{W}^{s_0}_{p,\,r+\alpha-s_0}(\Delta)}, \tag{3}$$

где $\Delta'_h=\{x''\colon\ 0\leqslant x_1\leqslant 1-h,\ 0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=2,\ \ldots,\ n-1\}$, и вообще к аналогичным неравенствам для частных производных $\frac{\partial^{s_0-1}f}{\partial x_i^{s_0-1}}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Положим для краткости

$$\psi(x)=\frac{\partial^{s_0-1}f(x)}{\partial x_1^{s_0-1}}. \tag{4}$$

Так как

$$\psi(x_1+h,\ x'',\ 0)-\psi(x_1,\ x'',\ 0)=$$
$$=-\int\limits_0^h\frac{\partial\psi}{\partial x_n}(x_1+h,\ x'',\ t)\,dt+\int\limits_0^h\frac{\partial\psi}{\partial t}(x_1+t,\ x'',\ t)\,dt,$$

где мы считаем $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_n}$, то левая часть (3)

$$\left(\int_0^1 \frac{dh}{h^{1+p(r+\alpha-s_0+1)}}\left|\int_{\Delta_h'} \psi(x_1+h,\, x'',\, 0)-\psi(x_1,\, x'',\, 0)\right|^p dx'\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant I_1+I_2, \qquad (5)$$

где (пояснения ниже)

$$I_1=\left(\int_0^1 dh\int_{\Delta_h'}\left|\int_0^h \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x_n}(x_1+h,\, x'',\, t)\,dt}{h^{r+\alpha-s_0+1}}\right|^p dx'\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\int_0^1 dh\int_{\Delta_h'}\left|\int_0^1 \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x_n}(x_1+h,\, x'',\, hu)\,du}{h^{r+\alpha-s_0}}\right|^p dx'\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1 du\left(\int_0^1 dh\int_{\Delta_h'}\left|\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x_n}(x_1+h,\, x'',\, hu)}{h^{r+\alpha-s_0}}\right|^p dx'\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1 u^{r+\alpha-s_0-\frac{1}{p}}\,du\left(\int_{\Delta}\left|\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x_n}(x)}{x_n^{r+\alpha-s_0}}\right|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\|f\|_{w_{p,\,r+\alpha-s_0}^{-s_0}(\Delta)}. \qquad (6)$$

Во втором соотношении (6) мы делаем замену переменной $t=hu$, $dt=h\,du$ в интеграле по dt.

В третьем — применяем обобщенное неравенство Минковского. В четвертом — в интеграле по $dh\,dx'$ вводим вместо x_1 и h новые переменные $x_1'=x_1+h$ и $x_n=hu$ с якобианом, равным u, и, следовательно, с обратным якобианом, равным u^{-1}. Теперь уже этот кратный интеграл берется по $dx_1\,dx''\,dx_n=dx$. При этом интегрирование берется по некоторому множеству $e\subset\Delta$ точек x. Если заменить e на Δ, то получим предпоследний член в (6). Интеграл по du в нем конечный, потому что $r+\alpha-s_0-\frac{1}{p}>-1$ (см. (1)), а возведенный в степень $1/p$ интеграл по dx не превышает полунорму

$$\|f\|_{w_{p,\,r+\alpha-s_0}^{r+\alpha}(\Delta)}, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}=\frac{\partial^{s_0}f}{\partial x_n^{s_0}}\right).$$

Оценим теперь

$$I_2=\left(\int_0^1 dh\int_{\Delta_h'}\left|\frac{\int_0^h \frac{\partial\psi}{\partial t_n}(x_1+t,\ x'',\ t)\,dt}{h^{r+\alpha-s_0+1}}\right|^p d\boldsymbol{x}'\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\int_0^1 dh\int_{\Delta_h'}\left|\int_0^1\frac{\frac{\partial\psi}{\partial t}(x_1+hu,\ x'',\ hu)\,du}{h^{r+\alpha-s_0}}\right|^p d\boldsymbol{x}'\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1 du\left(\int_0^1 dh\int_{\Delta_h'}\left|\frac{\frac{\partial\psi}{\partial t}(x_1+hu,\ x'',\ hu)}{h^{r+\alpha-s_0}}\right|^p d\boldsymbol{x}'\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1 u^{r+\alpha-s_0-\frac{1}{p}}\,du\left(\int_\Delta\left|\frac{\frac{\partial\psi}{\partial t}(x)}{x_n^{r+\alpha-s_0}}\right|^p d\boldsymbol{x}\right)^{1/p}\leqslant\|f\|_{\overline{w}_{p,\,r+\alpha-s_0}^{s_0}(\Delta)}. \qquad (7)$$

Эти рассуждения аналогичны приведенным выше для I_1. В четвертом соотношении в интеграле по $dh\,d\boldsymbol{x}'$ заменяем x_1, h на $x_1'=x_1+hu$, $x_n=hu$ и затем x_1' на x_1. Получается кратный интеграл по некоторому множеству $e_1\subset\Delta$ точек $\boldsymbol{x}$, который только увеличится при замене e_1 на Δ.

Из (5), (6), (7), учитывая (4), получим неравенство (3) для частной производной $\frac{\partial^{s_0-1}f}{\partial x_1^{s_0-1}}$. Аналогично, как уже было отмечено, можно получить подобные неравенства для производной $\frac{\partial^{s_0-1}f}{\partial x_i^{s_0-1}}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$.

Этим доказано второе вложение (2).

Пусть теперь задана функция $f(\boldsymbol{x})\in W_{p\alpha}^r(\Omega)$, где $\Omega\subset R_n$ — область с $(n-1)$-мерной границей $\Gamma\subset C^{s_0}$, и пусть Λ_* и Λ $(\Lambda_*\subset\overline{\Lambda}_*\subset\Lambda)$ — регулярные мосты $(\xi'=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1}))$ области Ω:

$$\Lambda=\{\xi\colon\ \varphi(\xi')\leqslant\xi_n\leqslant\psi(\xi'),\quad \xi'\in\sigma\},$$
$$\Lambda_*=\{\xi\colon\ \varphi(\xi')\leqslant\xi_n\leqslant\psi(\xi'),\quad \xi'\in\sigma_*),$$

определенные в некоторой прямоугольной системе координат $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$, где можно считать, что σ и σ_* — $(n-1)$-мерные кубы $(\sigma_*\subset\overline{\sigma}_*\subset\sigma)$. Так как $\Gamma\in C^{(s_0)}$, то φ, $\psi\in C^{(s_0)}(\overline{\sigma})$. Кроме того,

$$\psi(\xi')-\varphi(\xi')>m\qquad(\xi'\in\overline{\sigma}),$$

и потому множества

$$\lambda=\{\xi\colon\ \varphi(\xi')\leqslant\xi_n<\varphi(\xi')+m,\qquad \xi'\in\overline{\sigma}\}\subset\Lambda,$$
$$\lambda_*=\{\xi\colon\ \varphi(\xi')\leqslant\xi_n<\varphi(\xi')+m,\qquad \xi'\in\overline{\sigma}_*\}\subset\Lambda_*.$$

Введем еще новое отображение

$$\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n) \rightleftarrows (\eta_1, \ldots, \eta_n)=\eta$$

посредством равенств

$$\xi_j=\eta_j \quad (j=1, \ldots, n-1), \qquad \xi_n-\varphi(\xi')=\eta_n \qquad (\xi' \in \overline{\sigma}). \tag{8}$$

Имеем (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_{W^r_{p,\alpha}(\Omega)} \geqslant \|f(\xi)\|_{W^r_{p,\alpha}(\tilde{\Omega})} \geqslant \|f(\xi)\|_{W^{s_0}_{p,r+\alpha-s_0}(\tilde{\Omega})} \geqslant \\ \geqslant \|f(\xi)\|_{\overline{W}^{s_0}_{p,r+\alpha-s_0}(\lambda_*)} \geqslant \|f(\eta)\|_{\overline{W}^{s_0}_{p,r+\alpha-s_0}(\tilde{\tilde{\lambda}}_*)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Первое соотношение в (9) верно (см. 10.2.8 (4)) в силу того, что отображение $x \rightleftarrows \xi$ $(\Omega \rightleftarrows \tilde{\Omega})$ линейное невырожденное с постоянными коэффициентами; второе — на основании 10.1 (4), (5). В третьем — весовой класс $\overline{W}$ понимается с весом

$$\rho_{\xi_n}(\xi)=\xi_n-\varphi(\xi')=\eta_n;$$

надо учесть, что $\rho(\xi) \sim \rho_{\xi_n}(\xi)$ $(\xi \in \lambda_*)$ (см. 10.2.7 (1)). В четвертом (последнем) — $\tilde{\tilde{\lambda}}_*$ есть прямоугольник

$$\tilde{\tilde{\lambda}}_*=\{\eta\colon (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \in \sigma_*, \quad 0 \leqslant \eta_n \leqslant m\},$$

получаемый как образ λ_* при помощи отображения (8). Это отображение непрерывно дифференцируемо s_0 раз, потому что $\varphi(\xi) \in C^{(s_0)}(\lambda)$. Поэтому функция $f(\xi) \in \overline{W}^{s_0}_{p,r+\alpha-s_0}(\lambda_*)$ переходит в функцию $f(\eta)$ класса $\overline{W}^{s_0}_{p,r+\alpha-s_0}(\tilde{\tilde{\lambda}}_*)$, где роль ρ играет η_n. В таком случае, в силу второго вложения в (2) функция $f(\eta)$ имеет след на грани $\eta_n=0$ прямоугольника $\tilde{\tilde{\lambda}}_*$:

$$f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, 0) \in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\sigma_*)$$

$$\|f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, 0)\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\sigma_*)} \leqslant \|f(\eta)\|_{\overline{W}^{s_0}_{p,r+\alpha-s_0}(\tilde{\tilde{\lambda}}_*)} \leqslant \|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)}.$$

Если обозначить через γ_1^* нижнюю границу моста Λ_*, определяемую уравнением $\xi_n=\varphi(\xi')$, $\xi' \in \sigma_*$, то получим

$$\|f|_{\gamma_1}\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\gamma_1)} \leqslant \|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)},$$

и так как произвольную точку $x \in \Gamma$ можно покрыть регулярным мостом Λ (области Ω), точнее, нижней его границей γ_1, из которой выброшен край (см. 10.2.1 (3) и ниже), то имеет место (см. книгу О. В. Бесова, В. П. Ильина и С. М. Никольского [1], § 23)

$$f|_\Gamma \in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma), \quad \|f|_\Gamma\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma)} \leqslant \|f\|_{W_{p\alpha}^r(\Omega)},$$

и вложение 10.5 (1) доказано полностью.

10.6. Доказательство вложения

$$B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma)\to W_{p\alpha}^r(\Omega) \tag{1}$$

(см. 10.1 (14)),

$$0<r+\alpha-\frac{1}{p}<r, \quad \Gamma\in C^{(r)}. \tag{2}$$

Мы будем употреблять обозначения:

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}'', x_{n-1}, x_n)=(\boldsymbol{x}', x_n),$$

$$\boldsymbol{x}''=(x_1, \ldots, x_{n-2}), \quad \boldsymbol{x}'=(\boldsymbol{x}'', x_{n-1})=(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

$$\boldsymbol{x}'^2=\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2, \quad \boldsymbol{x}''^2=\sum_{j=1}^{n-2}x_j^2.$$

10.6.1. Лемма. *Пусть*

$$\Delta=\{\boldsymbol{x}:\ 0\leqslant x_j\leqslant 1, \quad j=1, \ldots, n\} \tag{1}$$

— единичный куб и

$$\Delta'=\{\boldsymbol{x}':\ 0\leqslant x_j\leqslant 1, \quad j=1, \ldots, n-1\} \tag{2}$$

— его проекция на плоскость $x_n=0$.

При условиях $0<r+\alpha-\frac{1}{p}<r$ для любой функции $f(\boldsymbol{x}')\in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Delta')$ найдется гармоническая на Δ функция $U\in\overline{W}_{p\alpha}^r(\Delta)$ такая, что

$$\|U\|_{\overline{W}_{p\alpha}^r(\Delta)}\leqslant C\|f\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Delta')}, \tag{3}$$

где C не зависит от f и

$$U|_{x_n=0}=f(\boldsymbol{x}') \quad (\boldsymbol{x}'\in\Delta'). \tag{4}$$

Здесь

$$\|U\|_{\overline{W}_{p\alpha}^r(\Delta)}=\|U\|_{L_p(\Delta)}+\sum_{|\boldsymbol{k}|=r}\left\|\frac{U^{(\boldsymbol{k})}}{x_n^\alpha}\right\|_{L_p(\Delta)}. \tag{5}$$

Так как всякую функцию $f \in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Delta')$ можно продолжить на R_{n-1} с сохранением нормы, т. е. можно построить функцию $\bar{f} \in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})$ такую, что $\bar{f}(x) = f(x)$ на Δ', то лемма 10.6.1 непосредственно вытекает из следующей леммы.

10.6.2. Лемма. *Пусть на верхнем полупространстве $R_n^+ = \{x\colon x_n > 0\}$ задана гармоническая функция*

$$U(x) = U(f, x) = kx_n \int_{R_{n-1}} \frac{f(t')\,dt'}{[(t'-x')^2 + x_n^2]^{n/2}}, \tag{1}$$

соответствующая граничной функции $f(t') \in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})$ $\left(0 < r + \alpha - \frac{1}{p} < r\right)$, где

$$1 = kx_n \int_{R_{n-1}} \frac{dt'}{[(t'-x')^2 + x_n^2]^{n/2}} = k \int_{R_{n-1}} \frac{du'}{(u'^2+1)^{n/2}}, \tag{2}$$

и пусть R_n^a обозначает полосу

$$R_n^a = \{x\colon 0 \leqslant x_n \leqslant a\} \tag{3}$$

ширины a.

Тогда $U \in \overline{W}_{p\alpha}^r(R_n^a)$,

$$\|U\|_{\overline{W}_{p\alpha}^r(R_n^a)} = \|U\|_{L_p(R_n^a)} + \sum_{|k|=r} \left\| \frac{U^{(k)}}{x_n^\alpha} \right\|_{L_p(R_n^a)} \leqslant \leqslant C(a)\|f\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})}, \tag{4}$$

где константа $C(a)$ зависит не только от r, α, p, но и от a, и $f(x')$ есть след функции U на подпространстве $x_n = 0$ (см. 6.4):

$$u\big|_{x_n=0} = f(x'). \tag{5}$$

10.6.3. Лемма. *Для определенной в лемме из 10.6.2 гармонической функции U выполняются неравенства*

$$\left\| \frac{U_{x'}^{(r)}}{x_n^\alpha} \right\|_{L_p(R_n^+)} \leqslant c\|f\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})}, \tag{1}$$

$$\left\| \frac{\frac{\partial^r U}{\partial x_n \partial x'^{r-1}}}{x_n^\alpha} \right\|_{L_p(R_n^+)} \leqslant c\|f\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})}, \tag{1'}$$

где C не зависит от f и a, $U_{x'}^{(r)}$ — частная производная от U порядка r по $x'=(x_1, \ldots, x_{n-1})$, а $\frac{\partial^r U}{\partial x_n\,\partial x'^{r-1}}$ — порядка $r-1$ по x' и только первого порядка по x_n.

Пусть s_0 — наименьшее натуральное, для которого

$$r+\alpha-\frac{1}{p}\leqslant s_0. \tag{2}$$

Докажем неравенство (1) для частной производной

$$U_{x'}^{(r)}=\frac{\partial^r U}{\partial x_1^{\lambda_1}\ldots\partial x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}}. \tag{3}$$

Не нарушая общность, будем считать $\lambda_{n-1}>0$.

Итак, пусть $f(t')\in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})$,

$$\beta=r+\alpha-\frac{1}{p}-s_0+1\ (>0!). \tag{4}$$

Имеем (пояснения ниже)

$$U_{x'}^{(r)}=kx_n\int\limits_{R_{n-1}} f(t')\frac{\partial^r}{\partial x'^r}\frac{1}{[(t'-x')^2+x_n^2]^{n/2}}\,dt'=$$

$$=(-1)^r kx_n\int\limits_{R_{n-1}} f(t')\frac{\partial^r}{\partial t'^r}\frac{1}{[(t'-x')^2+x_n^2]^{n/2}}\,dt'=$$

$$=(-1)^{r-s_0+1}kx_n\int\limits_{R_{n-1}} f^{(s_0-1)}(t'', x_{n-1}+t_{n-1})\times$$

$$\times\frac{\partial^{r-s_0+1}}{\partial t'^{r-s_0+1}}\frac{1}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{n/2}}\,dt'=(-1)^{r-s_0+1}kx_n\times$$

$$\times\int\limits_{R_{n-1}} f^{(s_0-1)}(t'', x_{n-1}-t_{n-1})\frac{\partial^{r-s_0+1}}{\partial t'^{r-s_0+1}}\frac{1}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{n/2}}\,dt'. \tag{5}$$

Так как $f^{(s_0-1)}(t')\in L_p(R_{n-1})$, то это дает возможность в третьем равенстве цепи (5) перекинуть s_0-1 производных на f. Безразлично, какие именно производные перекинуть. Позаботимся о том, чтобы при этом оставшаяся производная имела вид

$$\frac{\partial^{r-s_0+1}}{\partial t'^{r-s_0+1}}=\frac{\partial^{r-s_0+1}}{\partial t'^{r-s_0}\,\partial t_{n-1}},$$

что возможно, потому что $\lambda_{n-1}>0$ и $s_0\leqslant r$, следовательно, $s_0-1<r$. При переброске, для определенности производной $\frac{\partial}{\partial t_1}$, соответствующий интеграл (только по t_1!) преобразовывается по

следующей схеме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} dt_1 = \lim_{N \to \infty} \left\{ \psi\varphi \Big|_{t_1=-N}^{N} - \int_{-N}^{N} \frac{\partial \psi}{\partial t_1} \varphi \, dt_1 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial t_1} \varphi \, dt_1.$$

Ведь ψ абсолютно непрерывна по t_1 (почти для всех $(t_2, \ldots, t_{n-1})$) и $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t_1} \in L_p(-\infty, \infty)$, откуда

$$|\psi(N)| \leqslant \left| \psi(0) + \int_0^N \psi'(t_1) \, dt_1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\psi(0)| + \left(\int_0^{\infty} |\psi'|^p \, dt_1 \right)^{1/p} N^{1/q} = O(N^{1/q}).$$

Но $\varphi(t_1)$ при $t_1 \to \infty$ достаточно быстро стремится к нулю, чтобы $\psi(N)\varphi(N) \to 0$, $N \to \infty$ и, кроме того, $\varphi \in L_q(-\infty, \infty)$.

Имеем

$$kx_n \int_{R_{n-1}} f^{(s_0-1)}(t'', x_{n-1}) \frac{\partial^{r-s_0+1}}{\partial t'^{\,r-s_0+1}} \frac{1}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{n/2}} dt' =$$

$$= kx_n \int_{R_{n-2}} f^{(s_0-1)}(t'', x_{n-1}) \, dt'' \times$$

$$\times \frac{\partial^{r-s_0}}{\partial t'^{\,r-s_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} \frac{1}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{n/2}} dt_{n-1} = 0. \qquad (6)$$

Под знаком $\frac{\partial}{\partial t_{n-1}}$ стоит четная функция от t_{n-1}, после дифференцирования по t_{n-1} она становится нечетной функцией, следовательно, интеграл от нее по $t_{n-1} \in (-\infty, \infty)$ равен нулю для любых t'', x'', x_n.

Поэтому, полагая

$$\Delta_{n-1,t}^2 f^{(s_0-1)}(t'', x_{n-1}) =$$

$$= f^{(s_0-1)}(t'', x_{n-1}+t) - 2f^{(s_0-1)}(t'', x_{n-1}) + f^{(s_0-1)}(t'', x_{n-1}+t),$$

в силу (5), (6) получим

$$U_{x'}^r = (-1)^{r-s_0+1} \frac{kx_n}{2} \int_{R_{n-1}} \Delta_{n-1,t_{n-1}}^2 f^{(s_0-1)}(t'', x_{n-1}) \times$$

$$\times \frac{\partial^{r-s_0+1}}{\partial t'^{\,r-s_0+1}} \frac{1}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{n/2}} dt'. \qquad (7)$$

Справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial^{\mu+1}}{\partial x^{\mu+1}} \frac{x_n}{\rho_n} \right| \leqslant \frac{1}{\rho^{n+\mu}}, \quad \rho^2 = \sum_1^n x_j^2, \qquad (8)$$

где n — натуральное число, а $\frac{\partial^{\mu+1}}{\partial x^{\mu+1}}$ — операция какой-либо частной производной порядка $\mu+1$. Оно легко следует из равенства

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\frac{x_n}{\rho^n}=\frac{P_{\nu+1}}{\rho^{n+2\nu}}+\frac{P_{\nu-1}}{\rho^{n+2\nu-2}}+\frac{P_{\nu-3}}{\rho^{n+2\nu-4}}+\ldots=\begin{cases}\dfrac{P_0}{\rho^{n+\nu-1}} & (\nu \text{ нечетное}),\\ \dfrac{P_1}{\rho^{n+\nu}} & (\nu \text{ четное}),\end{cases}$$

которое может быть проверено по индукции. Здесь P_j — некоторый однородный многочлен от $x=(x_1, \ldots, x_n)$ степени j. Конечно, в неравенстве (7) можно заменить некоторые x_j на x_j-t_j и оно останется верным.

Из (6) и (7) следует $\left(\text{пояснения ниже, } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

$$\int_{R_n^+}\left|\frac{U_{x'}^{(r)}}{x_n^\alpha}\right|^p dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_{R_n^+}x_n^{-p\alpha}\,dx\left|\int_{R_{n-1}}\frac{\Delta^2_{n-1,\,t_{n-1}}f^{(s_0-1)}(t'',x_{n-1})}{\left[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2\right]^{\frac{n+r-s_0}{2}}}\,dt'\right|^p\leqslant$$

$$\leqslant\int_{R_n^+}x_n^{-p\alpha}\,dx\int_{R_{n-1}}\frac{\left|\Delta^2_{n-1,\,t_{n-1}}f^{(s_0-1)}(t'',x_{n-1})\right|^p}{\left[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2\right]^{\frac{\varepsilon p}{2}}}\,dt'\times$$

$$\times\left(\int_{R_{n-1}}\frac{dt'}{\left[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2\right]^{\frac{n+r-s_0-\varepsilon}{2}q}}\right)^{p/q}=$$

$$=\int_{R_n^+}dx\int_{R_{n-1}}\frac{\left|\Delta^2_{n-1,\,t_{n-1}}f^{(s_0-1)}(t'',x_{n-1})\right|^p x_n^{-p\beta-1}x_n^{-n+1+\varepsilon p}}{\left[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2\right]^{\frac{\varepsilon p}{2}}}\,dt'\cdot C=$$

$$=C\int_{-\infty}^{\infty}dt_{n-1}\int_{R_{n-2}}dt''\int_{-\infty}^{\infty}dx_{n-1}\left|\Delta^2_{n-1,\,t_{n-1}}f^{(s_0-1)}(t'',x_{n-1})\right|^p\times$$

$$\times\int_{R_{n-2}}dx''\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_n^{-p\beta-1}x_n^{-n+1+\varepsilon p}}{\left(x''+t_{n-1}^2+x_n^2\right)^{\frac{\varepsilon p}{2}}}\,dx_n=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}^{1+p\beta}}\int_{R_{n-1}}\left|\Delta^2_{n-1,\,t_{n-1}}f^{(s_0-1)}(t')\right|^p dt'\cdot C_1<$$

$$<\|f\|^p_{b_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})}. \tag{9}$$

Во втором члене (9) в интеграле в скобках мы заменили $t''-x''$ на t'', что не изменило интеграл, а затем произвели замену t' на u' при помощи равенств $t_j=x_n u_j$ $(j=1, \ldots, n-1)$. В результате после вынесения за знак интеграла множителя x_n в соответствующей степени возник интеграл

$$C=\int\limits_{R_{n-1}}\frac{du'}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n-1}u_j^2+1\right]^{\frac{n+r-s_0-\varepsilon}{2}q}}<\infty$$

конечный, если предположить, что

$$(n+r-s_0-\varepsilon)q>n-1,$$

т. е.

$$\varepsilon<\frac{n}{p}+r-s_0+\frac{1}{q}. \qquad (10)$$

В четвертом члене (9) мы изменили порядок интегрирования и заменили t_n на t. Теперь в интеграле по $dx''\,dx_n$ производится замена переменных $x_j=tv_j$ $(j=1, \ldots, n-2,\ x_n=tv_{n-1})$. В результате после вынесения за знак интеграла $t^{-1-p\beta}$ возникает интеграл

$$C_2=\int\limits_{R_{n-1}^+}\frac{v_{n-1}^{-p\beta-n+\varepsilon p}\,dv'}{\left(1+\sum\limits_1^{n-1}v_j^2\right)^{\frac{\varepsilon p}{2}}}=\int\limits_{|v|<1}+\int\limits_{|v|>1}<$$

$$<\int\limits_0^1 v_{n-1}^{-p\beta-n+\varepsilon p}\,dv_{n-1}+\int\limits_1^\infty\frac{\rho^{n-2-p\beta-n+\varepsilon p}}{\rho^{\varepsilon p}}\,d\rho<$$

$$<\int\limits_0^1 v_{n-1}^{-p\beta-n+\varepsilon p}\,dv_{n-1}+\int\limits_1^\infty \rho^{-2-p\beta}\,d\rho<\infty$$

(см. (4)), если

$$-p\beta-n+\varepsilon p>-1,$$

т. е.

$$\varepsilon>\frac{n-1}{p}+\beta=\frac{n-1}{p}+r+\alpha-\frac{1}{p}-s_0+1. \qquad (11)$$

Для существования ε, удовлетворяющего одновременно (10), (11), достаточно выполнения неравенства

$$\frac{n-1}{p}+r+\alpha-\frac{1}{p}-s_0+1<\frac{n}{p}+r-s_0+\frac{1}{q},$$

т. е. $\alpha<\frac{1}{p}$. Но выполнение этого неравенства всегда предполагалось.

Мы доказали (1).

Переходим к доказательству (1′). Имеем, как в (5),

$$\frac{\partial^r U}{\partial x'^{r-1}\,\partial x_n}=k\frac{\partial}{\partial x_n}x_n\int\limits_{R_{n-1}} f(t')\frac{\partial^{r-1}}{\partial x'^{r-1}}\frac{1}{[(t'-x')^2+x_n^2]^{n/2}}\,dt'=$$

$$=(-1)^{r-1}k\frac{\partial}{\partial x_n}x_n\int\limits_{R_{n-1}} f(t')\frac{\partial^{r-1}}{\partial t'^{r-1}}\frac{1}{[(t'-x')^2+x_n^2]^{n/2}}\,dt'=$$

$$=(-1)^{r-s_0}k\frac{\partial}{\partial x_n}x_n\int\limits_{R_{n-1}} f^{(s_0-1)}(t'',\ x_{n-1}+t_{n-1})\times$$

$$\times\frac{\partial^{r-s_0}}{\partial t'^{r-s_0}}\frac{1}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{n/2}}\,dt'=$$

$$=(-1)^{r-s_0}k\frac{\partial}{\partial x_n}x_n\int\limits_{R_{n-1}} f^{(s_0-1)}(t'',\ x_{n-1}+t_{n-1})\times$$

$$\times\frac{\partial^{r-s_0}}{\partial t'^{r-s_0}}\frac{1}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{n/2}}\,dt'.$$

Так как $r-s_0>0$, то $s_0-1<r-1$. Не ограничивая общность, будем считать, что производная $\frac{\partial^{r-s_0}}{\partial t'^{r-s_0}}$ содержит дифференцирование по t_{n-1}. Поэтому, как в (6),

$$\int\limits_{R_{n-1}} f^{(s_0-1)}(t'',\ x_{n-1})\frac{\partial^{r-s_0}}{\partial t'^{r-s_0}}\frac{1}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{n/2}}\,dt'=$$

$$=\int\limits_{R_{n-2}} f^{(s_0-1)}(t'',\ x_{n-1})\,dt''\times$$

$$\times\frac{\partial^{r-s_0-1}}{\partial t'^{r-s_0-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t_{n-1}}\frac{1}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{n/2}}\,dt'=0.$$

Теперь, как в (6), имеем

$$\frac{\partial^r U}{\partial x'^{r-1}\,\partial x_n}=(-1)^{r-s_0}\frac{k}{2}\int\limits_{R_{n-1}}\Delta^2_{n-1,\,t_{n-1}}f^{(s_0-1)}(t'',\ x_{n-1})\times$$

$$\times\frac{\partial^{r-s_0+1}}{\partial t'^{r-s_0}\,\partial x_n}\frac{x_n}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{n/2}}\,dt'.$$

На основании (7)

$$\frac{\partial^{r-s_0+1}}{\partial t'^{r-s_0}\,\partial x_n}\frac{x_n}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{n/2}}\leqslant\frac{1}{[(t''-x'')^2+t_{n-1}^2+x_n^2]^{\frac{n+r-s_0}{2}}},$$

поэтому остаются верными все неравенства (9), если в левой части (9) заменить $U_{x'}^{(r)}$ на $\frac{\partial^r U}{\partial x_n \partial x'^{r-1}}$. Этим неравенство (1′) доказано.

10.6.4. Лемма. *Для определенной в лемме из 10.6.2 гармонической функции U выполняется неравенство*

$$\left\| \frac{U^{(r)}}{x_n^{\alpha}} \right\|_{L_p(R_n^+)} \leqslant C \|f\|_{b_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})} \quad (r - s_0 > 0), \tag{1}$$

где константа C не зависит от f.

Доказательство. Рассматриваемая гармоническая функция U удовлетворяет на R_n^+ уравнению Лапласа

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0. \tag{2}$$

Будем считать, что $r \geqslant 2$. Продифференцировав (2) $(r-2)$ раз по $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, получим

$$U_{x'}^{(r)} + \frac{\partial^r U}{\partial x'^{r-2} \partial x_n^2} = 0. \tag{3}$$

Вместе с первым членом левой части (3) удовлетворяет неравенству (1) и второй $\frac{\partial^r U}{\partial x'^{r-2} \partial x_n^2}$. Но теперь при $r \geqslant 4$, если применить к (2) операцию $\frac{\partial^{r-2}}{\partial x'^{r-2} \partial x_n^2}$, то получим, что частная производная $\frac{\partial^r U}{\partial x'^{r-4} \partial x_n^4}$ удовлетворяет неравенству (1). Продолжив этот процесс по индукции, мы получим, что все производные вида $\frac{\partial^r U}{\partial x'^{r-2\nu} \partial x_n^{2\nu}}$ $(r \geqslant 2)$ удовлетворяют неравенству (1).

Но в нашем распоряжении имеется также неравенство 10.6.3 (1′), из которого при помощи подобного же рассуждения следует, что частная производная порядка $r \geqslant 2$ вида $\frac{\partial^r U}{\partial x'^{r-2\nu-1} \partial x_n^{2\nu+1}}$ тоже удовлетворяет неравенству (1). Впрочем, неравенство 10.6.3 (1′) было доказано при дополнительном условии $r - s_0 > 0$. Заметим, что так как $r - \alpha + \frac{1}{p} < r$, то при $r = 1$ и $s_0 = 1$, т. е. $r - s_0 = 0$.

Этим неравенство (1) доказано.

10.6.5. Введем положительное число $\lambda = \lambda(\mu)$, зависящее от $\mu > 0$, следующим образом:

$$\begin{aligned} &\lambda = \mu, \quad \text{если } 0 < \mu < 1, \\ &\text{любое } \lambda < 1, \quad \text{если } 1 \leqslant \mu. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда для функции $f\in B^{\mu}_p(R_m)$ выполняется неравенство

$$\|f(x+u)-f(x)\|_{L_p(R_m)}\leqslant C\|f\|_{B^{\mu}_p(R_m)}|u|^{\lambda}, \tag{2}$$

$$x=(x_1, \ldots, x_m)\in R_m,\ u=(u_1, \ldots, u_m),\ |u|^2=\sum_1^m u_j^2,$$

где константа C не зависит от f и u.

Неравенство (2) следует из вложения (см. 6.2 (9) и (11))

$$B^{\mu}_p(R_m)\to H^{\lambda}_p(R_m)\qquad (\lambda\leqslant\mu)$$

и того факта, что $0<\mu<1$.

10.6.6. Лемма. *Для определенной в* 10.6.2 *гармонической функции U выполняется неравенство* (см. 10.6.5)

$$\left(\int\limits_{R_{n-1}}|U(x', x_n)-f(x')|^p\,dx'\right)^{1/p}\leqslant C\|f\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})}x_n^{\lambda}, \tag{1}$$

где константа C не зависит от f $(x_n\geqslant 0)$.

Замечание. Заметим, что из (1) следует, что $f(x')$ есть след U на полупространстве $x_n=0$. Это доказывает утверждение (5) леммы 10.6.2.

Доказательство. Имеем (пояснения ниже)

$$\left(\int\limits_{R_{n-1}}|U(x', x_n)-f(x')|^p\,dx'\right)^{1/p}=$$
$$=\left(\int\limits_{R_{n-1}}dx'\left|k\int\limits_{R_{n-1}}\frac{x_n[f(x'+u')-f(x')]}{(u'^2+x_n^2)^{n/2}}du'\right|^p\right)^{1/p}=$$
$$=k\left(\int\limits_{R_{n-1}}dx'\left|\int\limits_{R_{n-1}}\frac{f(x'+x_nv')-f(x')}{(v'^2+1)^{n/2}}dv'\right|^p\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant k\int\limits_{R_{n-1}}\frac{dv'}{(v'^2+1)^{n/2}}\left(\int\limits_{R_{n-1}}|f(x'+x_nv')-f(x')|^p\,dx'\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{R_{n-1}}\frac{(x_n|v'|)^{\lambda}dv'}{(v'^2+1)^{n/2}}\|f\|_{B^{\mu}_p(R_{n-1})}=C_1\|f\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})}x_n^{\lambda}, \tag{2}$$

где $\mu=r+\alpha-\frac{1}{p}$, $\lambda=\lambda(\mu)$ (см. 10.6.5) и

$$C_1=\int\limits_{R_{n-1}}\frac{|v'|^{\lambda}dv'}{(v'^2+1)^{n/2}}\leqslant\int\limits_0^{\infty}\frac{\rho^{\lambda+n-2}d\rho}{(\rho^2+1)^{n/2}}\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^1\frac{d\rho}{(\rho^2+1)^{n/2}}+\int\limits_1^{\infty}\rho^{\lambda-2}d\rho<\infty,$$

потому что $\lambda+n-2>0$ $(n\geqslant 2!)$ и $\lambda-2<-1$.

Во втором члене (2) в представлении $U(\boldsymbol{x})$ по формуле 10.6.2 (1) мы заменили $\boldsymbol{t}' = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ на $\boldsymbol{u}' = (u_1, \ldots, u_{n-1})$, полагая $\boldsymbol{t}' - \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{u}'$.

Надо при этом учесть, что (см. 10.6.2 (2))

$$f(\boldsymbol{x}') = kx_n \int \frac{f(\boldsymbol{x}')\,d\boldsymbol{u}'}{(\boldsymbol{u}'^2 + x_n^2)^{n/2}}.$$

В третьем члене (2) заменяются переменные $\boldsymbol{u}' = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ на $\boldsymbol{v}' = (v_1, \ldots, v_{n-1})$ при помощи равенств $u_j = x_n v_j$ (или $\boldsymbol{u}' = x_n \boldsymbol{v}'$). В четвертом — применено неравенство Минковского, а в пятом — применено неравенство 10.6.5 (2).

10.6.7. Лемма. *Для определенной в* 10.6.2 *гармонической функции* U *выполняется неравенство* (см. 10.6.2 (3) и (4))

$$\|U\|_{\overline{W}^r_{p\alpha}(R_n^a)} \leqslant C(a)\,\|f\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})}. \tag{1}$$

Этим будет завершено доказательство леммы из 10.6.2 (см. еще замечание после формулировки леммы из 10.6.6), следовательно, и леммы из 10.6.1.

Доказательство. Если неравенство 10.6.6 (1) возвести в p-ю степень, проинтегрировать по $x_n \in [0, a]$ и результат возвести в степень $1/p$, то получим неравенство

$$\|U(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')\|_{L_p(R_n^a)} \leqslant C_1(a)\,\|f\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})}, \tag{2}$$

где константа $C_1(a)$ зависит от a.

Так как

$$\|f(\boldsymbol{x}')\|_{L_p(R_n^a)} \leqslant a^{1/p}\,\|f(\boldsymbol{x}')\|_{L_p(R_{n-1})},$$

то из (2) следует неравенство

$$\|U(\boldsymbol{x})\|_{L_p(R_n^a)} \leqslant C_2(a)\,\|f\|_{B^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})}. \tag{3}$$

Из (3) и неравенства 10.6.4 (1) тогда следует доказываемое нами неравенство (1), но пока при условии $r - s_0 > 0$. Но это условие можно снять.

В самом деле, пусть $r - s_0 = 0$. Таким образом, r есть наименьшее натуральное, не меньшее

$$r + \alpha - \frac{1}{p} = (r+1) + (\alpha - 1) - \frac{1}{p}.$$

Но $r < r+1$, и потому справедливо неравенство

$$\|U\|_{\overline{W}^{r+1}_{p,\alpha-1}(R_{n-1})} \leqslant C_3(a)\,\|f\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})}.$$

Но тогда, учитывая 10.1 (4), получим

$$\|U\|_{\overline{W}_{p\alpha}^r(R_n^a)}\leqslant C_4(a)\|U\|_{\overline{W}_{p,\alpha-1}^{r+1}(R_{n-1})}\leqslant C_5(a)\|f\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})},$$

т. е. (1) и при $r=s_0$.

10.6.8. Доказательство вложения 10.6 (1), (2). Пусть на границе $\Gamma\in C^{(r)}$ ограниченной области Ω задана функция $\mu\in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ (см. О. В. Бесов, В. П. Ильин и С. М. Никольский [1], § 23). Рассмотрим в соответствующей системе координат $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ регулярные мосты области Ω (см. 10.1.2):

$$\Lambda=\{\zeta:\varphi(\zeta')\leqslant\zeta_n\leqslant\psi(\zeta'),\quad \zeta'\in\sigma\},$$
$$\Lambda_*=\{\zeta:\varphi(\zeta')\leqslant\zeta_n\leqslant\psi(\zeta'),\quad \zeta'\in\sigma_*\},$$
$$\sigma\subset\bar\sigma\subset\sigma_*,\ 0<m\leqslant\psi(\zeta')-\varphi(\zeta'),\quad \zeta'\in\bar\sigma_*.$$

Таким образом, $\Lambda\subset\bar\Lambda\subset\Lambda_*$.

Введем еще множества

$$\mathfrak{M}=\{\zeta:\varphi(\zeta')\leqslant\zeta_n\leqslant\varphi(\zeta')+m,\quad \zeta'\in\sigma\},$$
$$\mathfrak{M}_*=\{\zeta:\varphi(\zeta')\leqslant\zeta_n\leqslant\varphi(\zeta')+m,\quad \zeta'\in\sigma_*\}$$

и отображение

$$(\zeta',\zeta_n)\rightleftarrows(\zeta',\eta),\tag{1}$$

осуществляемое при помощи равенства

$$\zeta_n=\varphi(\zeta')+\eta\qquad(\zeta'\in\bar\sigma_*).$$

Так как $\varphi(\zeta')\in C^{(r)}$ $(\zeta'\in\bar\sigma_*)$, то отображение осуществляет взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое r раз соответствие соответственно между множествами $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_*$ и

$$\Delta=\{(\zeta',\eta):\zeta'\in\sigma,\quad 0\leqslant\eta\leqslant m\},$$
$$\Delta^*=\{(\zeta',\eta):\zeta'\in\sigma_*,\quad 0\leqslant\eta\leqslant m\}$$

$(\mathfrak{M}\rightleftarrows\Delta,\ \mathfrak{M}_*\rightleftarrows\Delta^*)$ с единичным якобианом.

Нижние (в направлении ζ_n) границы Λ, Λ_*, которые мы обозначим соответственно через γ, γ_*, принадлежат к Γ. Они определяются в координатах (ζ',η) соотношениями $\eta=0$, $\zeta'\in\sigma$, соответственно $\eta=0$, $\zeta'\in\sigma_*$.

Исходная граничная функция $\mu\in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ на γ_* может быть рассматриваема как фуикция от $\zeta':\mu(\zeta')\in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\sigma_*)$.

На основании леммы 10.6.1 существует на Δ^* функция $U(\zeta', \eta)$, для которой

$$\|U(\zeta', \eta)\|_{\overline{W}^r_{p\alpha}(\Delta^*)} \ll \|\mu(\zeta')\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\sigma_*)} \leqslant \|\mu\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma)}, \tag{2}$$

$$U|_{\eta=0} = U(\zeta', 0) = \mu(\zeta'). \tag{3}$$

Так как преобразования

$$(\zeta', \eta) \rightleftarrows \zeta \rightleftarrows x$$

непрерывно дифференцируемы (на Δ^*) r раз, то (пояснения ниже; $\Gamma \in C^{(r)}$!)

$$\|U\|_{\overline{W}^r_{p\alpha}(\mathfrak{M})} = \|U(x)\|_{L_p(\mathfrak{M})} + \sum_{|k|=r} \left\| \frac{U^{(k)}(x)}{\rho(x)^\alpha} \right\|_{L_p(\mathfrak{M})} \ll$$

$$\ll \|U(\zeta)\|_{L_p(\mathfrak{M})} + \sum_{|k|=r} \left\| \frac{U^{(k)}(\zeta)}{(\xi_n - \varphi(\zeta'))^\alpha} \right\|_{L_p(\mathfrak{M})} \ll$$

$$\ll \|U(\zeta', \eta)\|_{L_p(\Delta)} + \sum_{|k|\leqslant r} \left\| \frac{U^{(k)}(\zeta', \eta)}{\eta^\alpha} \right\|_{L_p(\Delta)} =$$

$$= \|U(\zeta', \eta)\|_{\overline{W}^r_{p\alpha}(\Delta)} \ll \|\mu\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma)}, \tag{4}$$

$$U|_\gamma = \mu. \tag{5}$$

Во втором члене (2) мы заменим переменные x на ζ. В этом случае частные производные $U^{(k)}(x)$ от $U(x)$ порядка r суть линейные комбинации с постоянными коэффициентами частных производных от $U(\zeta)$ того же порядка r. Мы еще заменили $\rho(x)$ на $\zeta_n - \varphi(\zeta')$, воспользовавшись соотношением (см. 10.2.7(1)):

$$\rho(x) = \rho(\zeta) \sim \rho_{\zeta_n}(\zeta) = \zeta_n - \varphi(\zeta') \quad (\zeta' \in \mathfrak{M}).$$

В третьем члене совершена замена переменных ζ на (ζ', η), где $\eta = \zeta_n - \varphi(\zeta')$ (с единичным якобианом!). Теперь уже частная производная $U^{(k)}(\zeta)$ от $U(\zeta)$ порядка r есть некоторая линейная комбинация с непрерывными на $\overline{\Delta}$ коэффициентами частных производных $U^{(s)}(\zeta, \eta)$ различных порядков от 1 до r. Но

$$\left\| \frac{U^{(s)}(\zeta', \eta)}{\eta^\alpha} \right\|_{L_p(\Delta)} \ll \|U\|_{\overline{W}^r_{p,\,\alpha-(r-|s|)}(\Delta)} \ll \|U\|_{\overline{W}^r_{p\alpha}(\Delta)} \quad (|s| \leqslant r),$$

поэтому написана только эта последняя норма.

Так как норма $\|U\|_{\overline{W}^r_{p\alpha}(\Omega)}$ конечна и $0 < r + \alpha - \frac{1}{p} < r$, то функция U имеет на γ след (см. 10.5). В силу (3) этот след с точностью до множества $(n-1)$-й меры нуль равен $\mu(\zeta')$. Это доказывает (4).

Если шар σ и положительное число a взять достаточно малыми, то множество (открытое!)

$$A=\{\zeta:\ \varphi(\zeta')-a\zeta<_n<\psi(\zeta')+m\}$$

будет обладать следующим свойством:

$$A\Omega\Gamma=\gamma.$$

Произвольную точку $x^0\in\bar{\Omega}$ можно покрыть множеством вида $\mathfrak{M}$ (см. 10.2.3), а вместе с ним — множеством вида A. Существует конечное число множеств вида $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{M}_N,$$

а вместе с ними множеств вида A:

$$A_1,\ \ldots,\ A_N,$$

покрывающих $\bar{\Omega}$. По лемме о разбиении единицы можно указать бесконечно дифференцируемые функции $\psi_1(x),\ \ldots,\ \psi_N(x)$ со свойствами:

1) $0\leqslant\psi_j(x)\leqslant 1$, 2) $\psi_j(x)$ финитна в A_j, 3) $\sum\limits_1^N\psi_j(x)=1$ на Ω.

На основании сказанного выше на множестве $\mathfrak{M}_j$ можно определить функцию U_j, обладающую свойствами (4), (5) (где надо заменить U на U_j).

Положим $U_j(x)=0$, $x\notin\mathfrak{M}_j$ и

$$f(x)=\sum_1^N\psi_j(x)\,U_j(x). \tag{6}$$

Имеем

$$\|\psi_jU_j\|_{L_p(\Omega)}\leqslant\|U_j\|_{L_p(\mathfrak{M})}\leqslant\|\mu\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})}. \tag{7}$$

Далее,

$$(\mu_jU_j)^{(k)}=\sum_{0\leqslant s\leqslant k}V_s\psi_j^{(k-s)}U^{(s)}\qquad(|k|=r),$$

где V_s и $\psi_j^{(k-s)}$ — функции, непрерывные на $\overline{\mathfrak{M}}_j$, не зависящие от U_j. Поэтому

$$\left\|\frac{(\psi_jU_j)^{(k)}}{\rho^\alpha}\right\|_{L_p(\Omega)}=\left\|\frac{(\psi_jU_j)^{(k)}}{\rho^\alpha}\right\|_{L_p(\mathfrak{M}_j)}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{0\leqslant s\leqslant k}\left\|\frac{U^{(s)}}{\rho^\alpha}\right\|_{L_p(\mathfrak{M}_j)}\leqslant\|\mu\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma)}. \tag{8}$$

Из (6), (7), (8) следует, что

$$\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)} \leqslant \|\mu\|_{B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(\Gamma)}. \tag{9}$$

Кроме того,

$$f\Big|_\Gamma = \sum_1^N \psi_j\Big|_\Gamma U_j\Big|_\Gamma = \mu \sum_1^N \psi_j\Big|_\Gamma = \mu. \tag{10}$$

Мы доказали, что каждой функции $\mu \in B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})$ можно привести в соответствие функцию $A\mu = f \in W^r_{p\alpha}(\Omega)$ со свойствами (9), (10), т. е. доказано вложение 10.6.

Наши рассуждения были такими, что оператор $A\mu = f$ линейный. Вследствие (9) это линейный ограниченный оператор, отображающий банахово пространство $B_p^{r+\alpha-\frac{1}{p}}(R_{n-1})$ в банахово пространство $W^r_{p\alpha}(\Omega)$.

10.7. Связь между граничными функциями

Пусть в пространстве точек $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}, \zeta_n) = (\zeta', \zeta_n)$ задана поверхность γ:

$$\zeta_n = \varphi(\zeta') = \varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) \qquad (\zeta' \in \sigma), \tag{1}$$

где φ непрерывно дифференцируема μ раз на замыкании $\bar{\sigma}$ $(n-1)$-мерной сферы σ.

В окрестности γ задана μ раз непрерывно дифференцируемая функция $f(\zeta) = f(\zeta', \zeta_n)$.

Положим

$$\lambda_s(\zeta') = \frac{\partial^s f}{\partial \zeta_n^s}\Big|_\gamma = \frac{\partial^s f}{\partial \zeta_n^s}(\zeta', \varphi(\zeta')) \qquad (s = 0, 1, \ldots, \mu) \tag{2}$$

и докажем, что при любом натуральном $k \leqslant \mu$ любая частная производная $f^{(k)}$ от f порядка k на γ может быть записана в виде конечной суммы

$$f^{(k)}|_\gamma = \sum_{0 \leqslant s+l \leqslant k} \alpha(\zeta') \lambda_s^{(l)}(\zeta') \qquad (k \leqslant \mu), \tag{3}$$

где $\alpha(\zeta')$ непрерывно дифференцируемые $(\mu - k)$ раз функции от ζ' $(\alpha(\zeta') \in C^{(\mu-k)})$, а $\lambda_s^{(l)}(\zeta)$ — некоторые частные производные по ζ' от λ_s порядка l.

При $k=1$ это утверждение для $\frac{\partial f}{\partial \zeta_n}$ следует из (2) при $s=1$, а для $\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}$ $(j=1, \ldots, n-1)$ из того факта, что

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta_j} = \frac{\partial f}{\partial \zeta_j}\bigg|_\gamma + \frac{\partial f}{\partial \zeta_n}\varphi_j'(y), \qquad \varphi_j' = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_j} \qquad (j=1, \ldots, n-1), \tag{4}$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta_j}\bigg|_\gamma = f^{(1)}\Big|_\gamma = \lambda_0^{(1)} - \lambda_1\varphi_j' \qquad (j=1, \ldots, n-1). \tag{5}$$

Применяя теперь метод индукции, будем считать, что для некоторого $k<\mu$ утверждение (3) уже доказано, и рассмотрим какую-либо производную порядка $k+1$ $(k+1=\beta+\nu)$

$$f^{(k+1)} = \frac{\partial^{\beta+\nu} f}{\partial \zeta'^\beta \partial \zeta_n^\nu} \quad \left(\frac{\partial^\beta}{\partial \zeta'^\beta} = \frac{\partial^\beta}{\partial \zeta_1^{\beta_1} \ldots \partial \zeta_{n-1}^{\beta_{n-1}}}, \ \sum_1^{n-1} \beta_j = \beta\right).$$

Если $\beta=0$, то

$$f^{(k+1)}\big|_\gamma = \lambda_{k+1}$$

и (3) следует из (2) при $s=k+1$.

Применяя при фиксированном k индукцию по β, предполагаем, что (3) доказано для некоторого $\beta \leqslant k$, и рассматриваем производную

$$f^{(k+1)} = \frac{\partial^{\beta+\nu} f}{\partial \zeta'^{(\beta+1)} \partial \zeta_n^{\nu-1}} \qquad (\beta+\nu=k+1).$$

В силу (4), где надо заменить f на $\frac{\partial^{\beta+\nu-1} f}{\partial \zeta'^\beta \partial \zeta_n^\nu}$,

$$\frac{\partial^{\beta+\nu} f}{\partial \zeta'^{(\beta+1)} \partial \zeta_n^{\nu-1}}\bigg|_\gamma = \frac{\partial}{\partial \zeta'}\left(\frac{\partial^{\beta+\nu-1} f}{\partial \zeta'^\beta \partial \zeta_n^{\nu-1}}\bigg|_\gamma\right) - \frac{\partial^{\beta+\nu} f}{\partial \zeta'^\beta \partial \zeta_n^\nu}\bigg|_\gamma \varphi' =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \zeta'}\left(\sum_{s+l\leqslant k} \alpha(\zeta')\lambda_m^{(l)}\right) - \sum_{s+l\leqslant k+1} \alpha(\zeta')\lambda_m^{(l)} = \sum_{s+l\leqslant k+1} \alpha(\zeta')\lambda_m^{(l)}.$$

Этим утверждение (3) доказано.

10.7.1. Замечание. Равенство 10.7 (3) сохраняется почти для всех $\zeta' \in \sigma$ для

$$f(\zeta) \in H_p^{\mu+\lambda}(\omega) \qquad \left(\gamma \in \bar{\gamma} \subset \omega, \ \lambda > \frac{1}{p}\right),$$

где $\omega \subset R_n$ есть некоторая окрестность γ.

В самом деле, так как $f(\zeta)$ можно продолжить на R_n за пределы ω с сохранением класса, то, не уменьшая общность, можно считать, что $f(\zeta) \in H_p^{\mu+\lambda}(R_n)$. Задав $\varepsilon > 0$, где $\lambda - \varepsilon > \frac{1}{p}$, подберем последовательность бесконечно дифференцируемых на R_n функций f_ν ($\nu=1, 2, \ldots$) такую, что $\|f-f_\nu\|_{H_p^{\mu+\lambda-\varepsilon}(R_n)} \to 0$, $\nu\to\infty$ (см. 7.7 (3), где $f\in H_p^r(R_n)$).

Тогда

$$\|(f^{(l)}-f_\nu^{(l)})|_\gamma\|_{L_p(\gamma)} \leqslant \|f-f_\nu\|_{H_p^{\mu+\lambda-\varepsilon-\frac{1}{p}}(\gamma)} \leqslant \|f-f_\nu\|_{H_p^{\mu+\lambda-\varepsilon}(R_n)} \to 0$$

$$(l=0, 1, \ldots, \mu),$$

и из того факта, что равенство 10.7 (3) выполняется для f_ν ($\nu=1, 2, \ldots$), следует выполнение его почти всюду и для f.

10.7.2. Пусть функция $f(x)\in W_{p\alpha}^r(\Omega)$, где $0<r+\alpha-\frac{1}{p}<r$ и $\Omega\subset R_n$, — ограниченная область с границей $\Gamma\subset C^{(s_0+1)}$, а s_0 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $s_0\geqslant r+\alpha-\frac{1}{p}$. Для такой функции равенство 10.7 (3) выполняется при $k=0, 1, \ldots, s_0-1$ почти всюду.

Это утверждение следует из замечания 10.7.1, если учесть, что при сказанных условиях

$$W_{p\alpha}^r(\Omega) \to H_p^{s_0-1+\varepsilon}(\Omega) \qquad (\varepsilon>0). \tag{1}$$

Чтобы убедиться в верности (1), рассмотрим три возможных случая, которые уже рассматривались (см. 10.5 (3) — (8)). Учтем, что $s_0-1<r+\alpha-\frac{1}{p}<r+\alpha$ и $r+\alpha=s_0-1+\varepsilon$.

Случай 1: $r+\alpha-\frac{1}{p}=s_0$. Тогда $\alpha\leqslant 1$ (см. ниже 10.5 (3)). При $\alpha=0$ $W_{p0}^r=W_p^r\to H_p^{s_0-1+\varepsilon}$, а при $\alpha<0$ $W_{p\alpha}^r\to H_p^{r+\alpha}=H_p^{s_0-1+\varepsilon}$ (см. 10.5 (4)).

Случай 2: $r+\alpha-\frac{1}{p}<s_0$ и $r+\alpha<s_0$. Тогда $W_{p\alpha}^r\to H_p^{r+\alpha}=H_p^{s_0-1+\varepsilon}$ (см 10.5 (6)).

Случай 3: $r+\alpha-\frac{1}{p}<s_0$ и $r+\alpha-s_0\geqslant 0$. Тогда $W_{p\alpha}^r\to W_p^{s_0}\to H_p^{s_0-1+\varepsilon}$ (см. 10.5 (8)).

10.8. Доказательство неравенства 10.1 (16),

т. е.

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant c\left(\sum_{l+s<\frac{r}{2}} \|\varphi_s^{(l)}\|_{L_p(\Gamma)} + \|f\|_{w_{p\alpha}^r(\Omega)}\right), \tag{1}$$

$$\Gamma\in C^{(s_0+1)},\quad \varphi_s=\left.\frac{\partial^s f}{\partial n_s}\right|_\Gamma \qquad \left(0<r+\alpha-\frac{1}{p}<r,\ \frac{r}{2}\leqslant s_0\right), \tag{2}$$

где c не зависит от f и s_0 — наименьшее натуральное число, при котором $r+\alpha-\frac{1}{p}\leqslant s_0$, т. е.

$$s_0-1<r+\alpha-\frac{1}{p}\leqslant s_0. \tag{3}$$

В одномерном случае, когда Ω есть конечный интервал $(0, a)$, неравенство (1) имеет вид:

$$\|f\|_{L_p(a,\,b)}\leqslant c\left[\sum_{0\leqslant s<\frac{r}{2}}(|f^{(s)}(a)|+|f^{(s)}(b)|)+\left(\int_a^b\left|\frac{f^{(r)}(x)}{x^\alpha}\right|^p\right)^{1/p}\right]. \tag{1'}$$

10.8.1. Доказательство одномерного неравенства 10.8 (1').

Введем интерполяционный алгебраический многочлен Эрмита $Q(x)$ степени $r-1$ при r четном и степени r при r нечетном, обладающий свойствами

$$Q^{(s)}(0)=f^{(s)}(0),\qquad Q^{(s)}(a)=f^{(s)}(a)\qquad\left(0\leqslant s<\frac{r}{2}\right). \tag{1}$$

Этот многочлен, как известно, единственный и записывается по формуле

$$Q(x)=\sum_{0\leqslant s<\frac{r}{2}}(P_{0s}(x)f^{(s)}(0)+P_{1s}(x)f^{(s)}(a)),$$

где P_{0s}, P_{1s} — многочлены той же степени, что и Q, не зависящие от f.

Пусть $M=M(a)$ — константа (непрерывно зависящая от $a>0$), для которой при $0\leqslant s<\frac{r}{2}$, $0\leqslant l\leqslant r$, $|P_{0s}^{(l)}(x)|$, $|P_{1s}^{(l)}(x)|\leqslant M$ на отрезке $[0, a]$. Тогда, если положить

$$f(x)=Q(x)+F(x),$$

то получим

$$\|f\|_{L_p(0,\,a)}\leqslant\|Q\|_{L_p(0,\,a)}+\|F\|_{L_p(0,\,a)}\leqslant a^{1/p}MA(f)+\|F\|_{L_p(0,\,a)}, \tag{2}$$

где

$$A(f)=\sum_{0\leqslant s<\frac{r}{2}}(|f^{(s)}(0)|+|f^{(s)}(a)|), \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\|F^{(r)}(x)x^{-\alpha}(a-x)^{-\alpha}\|_{L_p(0,\,a)}&\leqslant\|Q^{(r)}(x)x^{-\alpha}(a-x)^{-\alpha}\|_{L_p(0,\,a)}+\\&+\|f^{(r)}(x)x^{-\alpha}(a-x)^{-\alpha}\|_{L_p(0,\,a)}\leqslant MA(f)\|x^{-\alpha}(a-x)^{-\alpha}\|_{L_p(0,\,a)}+\\&+\|f^{(r)}(x)x^{-\alpha}(a-x)^{-\alpha}\|_{L_p(0,\,a)}\leqslant c_1A(f)+\|f^{(r)}(x)x^{-\alpha}(a-x)^{-\alpha}\|_{L_p(0,\,a)},\end{aligned} \tag{4}$$

где последнее неравенство верно, потому что $\alpha<\frac{1}{p}$.

Применим формулу Тейлора:

$$F^{(\sigma)}(x)=\sum_{k=0}^{r-\sigma-1} B_k(x-a/2)^k+\frac{1}{\Gamma(r-\sigma)}\int_{a/2}^{x}(x-t)^{r-\sigma-1}F^{(r)}(t)\,dt \tag{5}$$

$$(0<x<a, \quad B_k=F^{(k+\sigma)}(a/2)/k!, \quad k=0,\,1,\,\ldots,\,r-\sigma-1).$$

Здесь σ — натуральное число, для которого удовлетворяются неравенства

$$\sigma-1<r/2\leqslant\sigma. \tag{6}$$

Так как $F^{(s)}(0)=0$ $(s=0,\,1,\,\ldots,\,\sigma-1\leqslant s_0-1)$, то интегрирование (5) $\sigma-s$ раз приводит к равенству

$$F^{(s)}(x)=\frac{1}{\Gamma(\sigma-s)}\int_0^x(x-t)^{\sigma-s-1}F^{(\sigma)}(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\sigma-s)}\sum_{k=0}^{r-\sigma-1}B_k\int_0^x(x-t)^{\sigma-s-1}(t-a/2)^k\,dt+R_s(x), \tag{7}$$

$$R_s(x)=\frac{1}{\Gamma(\sigma-s)\,\Gamma(r-\sigma)}\int_0^x\int_{a/2}^{t}(x-t)^{\sigma-s-1}(t-u)^{r-\sigma-1}F^{(r)}(u)\,du\,dt. \tag{8}$$

При этом

$$-\Gamma(\sigma-s)\,\Gamma(r-\sigma)\,R_s(x)=\int_0^{a/2}\int_{a/2}^{t}(x-t)^{\sigma-s-1}(t-u)^{r-\sigma-1}F^{(r)}(u)\,du\,dt+$$

$$+\int_{a/2}^{a}\int_{a/2}^{t}(x-t)^{\sigma-s-1}(t-u)^{r-\sigma-1}F^{(r)}(u)\,du\,dt=I_1(s,\,x)+I_2(s,\,x). \tag{9}$$

Считая $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, будем иметь

$$|I_1(s,\,x)|\leqslant\int_0^{a/2}\int_t^{a/2}(u-t)^{r-\sigma-1}\,|F^{(r)}(u)|\,du\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{a/2}\int_0^{u}(u-t)^{r-\sigma-1}\,dt\,|F^{(r)}(u)|\,du=\int_0^{a/2}u^{r-\sigma}\,|F^{(r)}(u)|\,du\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{a/2}u^{r-\sigma+\alpha}\,|F^{(r)}(u)|\,u^{-\alpha}\,du\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^{a/2}u^{q(r-\sigma+\alpha)}\,du\right)^{1/q}\|F^{(r)}(x)\,x^{-\alpha}\|_{L_p\left(0,\,\frac{a}{2}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\|F^{(r)}(x)\,x^{-\alpha}\|_{L_p\left(0,\,\frac{a}{2}\right)}, \tag{10}$$

потому что

$$r-\sigma+\alpha \geqslant r-s_0+\alpha > -\frac{1}{q}, \text{ т. е. } q(r-\sigma+\alpha) > -1. \qquad (11)$$

Здесь $s_0 \geqslant \frac{r}{2}$, а σ — наименьшее натуральное, не меньшее $r/2$, поэтому $s_0 \geqslant \sigma$ и справедливо первое неравенство в (11). Второе — следует из 10.7 (3).

Аналогично

$$|I_2(s, x)| \leqslant \int_{a/2}^{a}\int_{a/2}^{t}(t-u)^{r-\sigma-1}|F^{(r)}(u)|\,du\,dt =$$

$$= \int_{a/2}^{a}\int_{u}^{a}(t-u)^{r-\sigma-1}\,dt\,|F^{(r)}(u)|\,du \leqslant \int_{a/2}^{a}(a-u)^{r-\sigma}|F^{(r)}(u)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant \|F^{(r)}(x)(a-x)^{-\alpha}\|_{L_p\left(\frac{a}{2},\, a\right)}. \qquad (12)$$

Из (9), (10) и (12) следует

$$|R_s(x)| \leqslant \|F^{(r)}(x)\,x^{-\alpha}(a-x)^{-\alpha}\|_{L_p(0,\,a)} \qquad (13)$$

$$(s=0,\ 1,\ \ldots,\ \sigma-1).$$

Далее, в силу того, что $F^{(s)}(a)=0$ $(s=0,\ 1,\ \ldots,\ \sigma-1)$, из (7) следует, что

$$\sum_{k=0}^{r-\sigma-1}\lambda_{sk}B_k = R_s(a) \qquad (14)$$

$$(s=0,\ 1,\ \ldots,\ \sigma-1,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-\sigma-1),$$

где

$$\lambda_{sk} = \frac{1}{\Gamma(\sigma-s)}\int_0^a (a-t)^{\sigma-s-1}(t-a/2)^k\,dt =$$

$$= \frac{a^{\sigma-s+k}}{\Gamma(\sigma-s)}\int_0^1 (1-t)^{\sigma-s-1}(t-1/2)^k\,dt.$$

Матрица $\|\lambda_{sk}\|$ имеет σ строк и $r-\sigma$ столбцов и при этом $r-\sigma \leqslant \sigma$, потому что $r/2 \leqslant \sigma$. Ранг ее равен $r-\sigma$. Действительно, если бы это было не так, то существовала бы нетривиальная система чисел B_k, для которых

$$\sum_{k=0}^{r-\sigma-1}\lambda_{sk}B_k = 0 \qquad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ \sigma-1).$$

Определим для этих чисел многочлен

$$P(x)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\sum_{k=0}^{r-\sigma-1} B_k \int_0^x (x-t)^{\sigma-1}(t-a/2)^k\,dt$$

степени σ. При r четном $\sigma=\frac{r}{2}<r$, т. е. $\sigma\leqslant r-1$, при r нечетном $\sigma=\frac{r+1}{2}\leqslant r$. Поэтому степень $P(x)$ не выше степени $Q(x)$.

Очевидно,

$$P^{(s)}(x)=\frac{1}{\Gamma(\sigma-s)}\sum_{k=0}^{r-\sigma-1} B_k \int_0^x (x-t)^{\sigma-s-1}(t-a/2)^k\,dt$$

и

$$P^{(s)}(0)=P^{(s)}(a) \qquad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ \sigma-1).$$

Но такой многочлен единственный, тождественно равный нулю, т. е. $P(x)\equiv 0$ и

$$P^{(\sigma)}(x)=\sum_{k=0}^{r-\sigma-1} B_k(x-a/2)^k\equiv 0.$$

Следовательно, $B_k=0$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-\sigma-1)$, и мы пришли к противоречию.

Итак, матрица $\{\lambda_{sk}\}$ имеет ранг $r-\sigma$, поэтому из (14) и (13) следует

$$|B_k|\leqslant \max_s B_s(a)\leqslant \|f^{(r)}(x)\,x^{-\alpha}(a-x)^{-\alpha}\|_{L_p(0,\,a)}. \tag{15}$$

Обратимся теперь к формуле (7) при $s=0$:

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\sum_{k=0}^{r-\sigma-1} B_k \int_0^x (x-t)^{\sigma-1}\left(t-\frac{a}{2}\right)^k dt+R_0(x). \tag{16}$$

Так как $\sigma-1,\ k\geqslant 0$, то

$$\int_0^x (x-t)^{\sigma-1}\left(t-\frac{a}{2}\right)^k dt\leqslant c.$$

Поэтому в силу (16), (15), (13)

$$\|F\|_{L_p(0,\,a)}\leqslant \|F^{(r)}(x)\,x^{-\alpha}(a-x)^{-\alpha}\|_{L_p(0,\,a)} \tag{17}$$

и в силу (2), (17), (4)

$$\|f\|_{L_p(0,\,a)}\leqslant A(f)+\|F\|_{L_p(0,\,a)}\leqslant A(f)+\|f^{(r)}(x)\,x^{-\alpha}(a-x)^{-\alpha}\|_{L_p(0,\,a)},$$

и неравенство 10.8 (1′) доказано.

10.8.2. Доказательство неравенства 10.8 (1). Пусть Ω есть открытое ограниченное множество с гладкой границей $\Gamma \in C^{(s_0+1)}$ и $\Lambda \subset \bar{\Lambda} \subset \Lambda_*$ — регулярные мосты Ω, определенные в некоторой прямоугольной системе координат $\xi = (\xi', \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ соотношениями

$$\Lambda = \{\xi\colon\ \varphi(\xi') \leqslant \xi_n \leqslant \psi(\xi'),\ \xi' \in \sigma\}, \tag{1}$$

$$\Lambda_* = \{\xi\colon\ \varphi(\xi') \leqslant \xi_n \leqslant \psi(\xi'),\ \xi' \in \sigma_*\}, \tag{2}$$

$$\sigma \subset \bar{\sigma} \subset \sigma_*, \quad \psi(\xi') - \varphi(\xi') \geqslant m > 0 \text{ на } \bar{\sigma}_*,$$

$$\varphi(\xi),\ \psi(\xi') \in C^{(s_0+1)}(\bar{\sigma}_*).$$

Одну и ту же функцию F (от точек) мы будем рассматривать как функцию от x на некоторой области A и функцию от ξ в соответствующей области и нормы их в метрике L_p записывать соответственно через $\|F(x)\|_{L_p(A)}$, $\|F(\xi)\|_{L_p(A)}$.

Справедливы соотношения (пояснения ниже)

$$\|f(x)\|_{L_p(\Lambda)} = \|f(\xi)\|_{L_p(\Lambda)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{0 \leqslant \nu < \frac{r}{2}} \left(\|\lambda_\nu\|_{L_p(\sigma)} + \|\mu_\nu\|_{L_p(\sigma)} \right) + \left\| \frac{\frac{\partial^r f}{\partial \xi_n^r}(\xi)}{(\psi(\xi') - \xi_n)^\alpha (\xi_n - \varphi(\xi'))^\alpha} \right\|_{L_p(\Lambda)} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0 \leqslant m+s < \frac{r}{2}} \|\varphi_s^{(l)}\|_{L_p(\Gamma)} + \|f(x)\|_{w_{p\alpha}^r(\Omega)}, \tag{3}$$

которые доказывают неравенство 10.8 (1).

В первом соотношении (3) произведена замена переменных $x \rightleftarrows \xi$ в кратном интеграле (с якобианом, равным 1!). Во втором — применено к функции $f(\xi)$ неравенство 10.8 (1′). Здесь

$$\lambda_\nu(\xi') = \lim_{\xi_n \to \varphi(\xi') + 0} \frac{\partial^\nu f(\xi', \xi_n)}{\partial \xi_n^\nu} = \left. \frac{\partial^\nu f}{\partial \xi_n^\nu} \right|_{\gamma_1},$$

$$\mu_\nu(\xi') = \lim_{\xi_n \to \psi(\xi') - 0} \frac{\partial^\nu f(\xi', \xi_n)}{\partial \xi_n^\nu} = \left. \frac{\partial^\nu f}{\partial \xi_n^\nu} \right|_{\gamma_2}$$

и γ_1, γ_2 — нижняя и соответственно верхняя границы (описываемые равенствами $\xi_n = \varphi(\xi')$, $\xi_n = \psi(\xi')$, $\xi' \in \sigma$). В третьем соотношении (3) весовая норма от производной $\frac{\partial^r f}{\partial \xi_n^r}(\xi)$ в смысле $L_p(\Lambda)$ оценена полунормой

$$\|f(x)\|_{w_{p\alpha}^r(\Omega)} = \sum_{|k|=r} \left\| \frac{f^{(k)}(x)}{\rho(x)^\alpha} \right\|_{L_p(\Omega)}.$$

Здесь надо учесть, что

$$\frac{\partial^r f}{\partial \xi_n^r} = \sum \beta f^{(r)}(x),$$

где β — постоянные числа, а $f^{(r)}(x)$ — всевозможные частные производные от f по x порядка r. Кроме того, надо учесть, что

$$(\psi(\xi') - \xi_n)(\xi_n - \varphi(\xi')) \gg \rho(x) \qquad (\xi \in \Lambda)$$

(см. 10.2.7) и тот факт, что $\Lambda \subset \Omega$.

Неравенство

$$\sum_{0 \leqslant \nu < \frac{r}{2}} \left(\|\lambda_\nu\|_{L_p(\sigma)} + \|\mu_\nu\|_{L_p(\sigma)}\right) \ll \sum_{0 \leqslant s+l < \frac{r}{2}} \|\varphi_s^{(l)}\|_{L_p(\Gamma)} \tag{4}$$

непосредственно следует из равенства 10.7 (3). Ведь, например, $\left(\text{пояснения ниже, } \nu < \frac{r}{2}\right)$

$$\|\lambda_\nu\|_{L_p(\sigma)} = \left\| \frac{\partial^\nu f}{\partial \xi_n^\nu}\Big|_{\gamma_1} \right\|_{L_p(\sigma)} = \left\| \left(\sum_{k \leqslant \nu} \tau(\xi) f^{(k)}(\xi) \right)\Big|_{\gamma_1} \right\|_{L_p(\sigma)} \ll$$

$$\ll \sum_{k \leqslant \nu} \|f^{(k)}(\xi)|_{\gamma_1}\|_{L_p(\sigma)} = \sum_{k \leqslant \nu} \left\| \sum_{1 \leqslant s+l \leqslant k} \alpha(\xi') \varphi_s^{(l)}(\xi') \right\| \ll$$

$$\ll \sum_{s+l \leqslant \nu} \|\varphi_s^{(l)}(\xi')\|_{L_p(\sigma)}. \tag{5}$$

Из точки $P = (\zeta', \varphi(\zeta')) \in \gamma_1$ $(\zeta' = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) \in \sigma)$ выпустим нормаль к кривой γ_1 внутрь Λ_* и отметим на ней точку, отстоящую от P на расстоянии ζ_n. Эта точка имеет, с одной стороны, прямоугольные координаты $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, а с другой — криволинейные координаты $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, при этом при достаточно малом δ имеет место взаимно однозначное соответствие

$$\xi \rightleftarrows \zeta \qquad (0 \leqslant \zeta_n \leqslant \delta),$$

непрерывно дифференцируемое $(s_0 + 1)$ раз, потому что $\varphi(\xi') \in C^{(s_0+1)}$ (см. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский [1], § 24.5, или С. М. Никольский [22], т. I, 7.25). Справедливо равенство

$$\frac{\partial^\nu f}{\partial \xi_n^\nu} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \nu} \tau(\zeta) f^{(k)}(\zeta),$$

где $\tau(\zeta)$ — непрерывные на $\bar{\sigma}$ функции. Это объясняет второе соотношение (5). Четвертое соотношение вытекает из равенства 10.7 (3), верного почти всюду для нашей функции f (см. 10.7.2).

10.9. Доказательство эквивалентности норм

(см. сноску на стр. 369)

$$\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|_{w^r_{p\alpha}(\Omega)}\sim\left\|\frac{f}{\rho^\alpha}\right\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|_{w^r_{p\alpha}(\Omega)} \tag{1}$$

$$\left(0<r+\alpha-\frac{1}{p}<r\right)$$

для ограниченной области Ω с гладкой границей.

Имеем

$$\left\|\frac{f}{\rho^\alpha}\right\|_{L_p(\Omega)}\leqslant\|f\|_{W^r_{p,\alpha-r}(\Omega)}\leqslant\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)}, \tag{2}$$

где первое соотношение следует из 10.1 (4), а второе — тривиально, ведь $\alpha-r<\alpha$.

С другой стороны,

$$\|f\|_{L_p(\Omega)}\leqslant\|f\|_{W^r_{p,\alpha-r}(\Omega)}\leqslant\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)}, \tag{3}$$

где первое соотношение следует из 10.1 (4), а второе верно, потому что $0<r+\alpha-\frac{1}{p}\leqslant r+\alpha$ и, следовательно, $-r\leqslant\alpha$.

Из (2) и (3) следует (1).

ЗАМЕЧАНИЯ

К главе 1

1.1—1.4. Приведены, часто без доказательства, известные факты из теории функций действительного переменного и теории банаховых пространств, чтобы в дальнейшем на них ссылаться и чтобы читатель ознакомился с принятыми обозначениями. Эти факты можно найти в книгах: П. С. Александров и А. Н. Колмогоров [1], А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин [1], Банах [1], Л. А. Люстерник и В. И. Соболев [1], И. П. Натансон [1], В. И. Смирнов [1], С. Л. Соболев [3].

1.5. Мы привели с доказательствами элементарные сведения (только те, которые нужны для данной книги) из теории обобщенных функций над классом S так, как определил этот класс Л. Шварц [1]. Отметим статьи С. Л. Соболева [1], [2], где введено понятие обобщенной функции, и книги на русском языке по теории обобщенных функций Гальперина [1], В. С. Владимирова [1], И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [1].

Отметим еще книгу Хёрмандера [1], где получены далеко идущие результаты о мультипликаторах. Множитель μ заранее можно было бы не определять как ограниченную измеримую функцию, а считать, что $\mu \in S'$ и обладает тем свойством, что $\|\widehat{\mu \tilde{f}}\|_p \leqslant c_p \|f\|_p$ для всех $f \in S$. Хёрмандером доказано, что такая обобщенная функция μ необходимо представляет ограниченную измеримую функцию $\mu(x)$.

1.5.2. Неравенства (6) доказаны в работах Литтлвуда и Пэли [1]. Изложенные теоремы в периодическом одномерном случае имеются в гл. XV книги Зигмунда [2], в двумерном случае см. Марцинкевич [1].

1.5.3. Теорема Марцинкевича в периодическом двумерном случае доказана в его упомянутой статье [1] Переход на непериодический случай осуществлен С. Г. Михлиным [1]. Дальнейшее развитие см. П. И. Лизоркин [6]. Введенное в 1.5.4 условие, чтобы $D^k\lambda$ в каждом координатном замкнутом угле была непрерывной в любой точке x с $x_i \neq 0$, $i \in e_k$, применяется, например, в примере 1.5.5 (5), который используется в дальнейшей теории.

1.5.9. Операция I_r изучалась в ряде работ, среди них Л. Шварц [1], Кальдерон [1], Ароншайн и Смит [2], П. И. Лизоркин [1]—[8], С. М. Никольский, Ж. Лионс и П. И. Лизоркин [3], Тэйблсон [1].

1.5.10. Понятие регулярной в смысле L_p обобщенной функции см. С. М. Никольский [17], [18].

К главе 2

Сведения, излагаемые в 2.1—2.5, известны и носят здесь вспомогательный характер. В частности, об интерполяциях см., например, книги В. Л. Гончарова [1] и А. Ф. Тимана [1]. Отметим еще книги Н. И. Ахиезера [1], А. Зигмунда [2] и И. П. Натансона [2], где, так же как в упомянутых выше книгах, даются подробные сведения о тригонометрических полиномах от одной переменной.

К главе 3

3.1 О целых функциях одной переменной экспоненциального типа, ограниченных на действительной оси, см. книгу Н. И. Ахиезера [1]. В частности, там приводятся критерии 3.1 (5), (6) для целых функций экспоненциального типа и полное доказательство фактов, относящихся к теории интеграла Бореля, которые мы в своем изложении опустили.

3.2. При выводе интерполяционной формулы (4) для функций экспоненциального типа мы следовали схеме, приведенной в статье Сайвина [1]. Но рассуждения (см. 3.2.1) ведутся с привлечением обобщенных функций так, как это делал П. И. Лизоркин [10]. Мы их несколько совершенствуем.

3.2.2. Интерполяционная формула (2) для производной функции $f(z)$ экспоненциального типа, ограниченной на действительной оси, имеется в задачнике Полиа и Сеге [1] в предположении, что уже известно, что $|f(z)| \leqslant \leqslant Ae^{\sigma|y|}$ $(z=x+iy)$. Полный вывод дан в книге Н. И. Ахиезера [1], § 84.

3.2.3. Подход для получения неравенств типа неравенств Бернштейна в случае общих норм указан в книге Н. И. Ахиезера [1] (§ 81, теорема 3). Мы добавили к перечисленным там условиям 1), 2) условие 3).

3.3—3.5. Для тригонометрических полиномов неравенства 3.4.3 (2), (3), (4) получены С. М. Никольским [3] вместе с аналогичными неравенствами для целых функций экспоненциального типа (3.3.2 (2), 3.3.5 (1), 3.4.2 (1)). Для тригонометрических полиномов случай 3.4.3 (3) при $n=1$, $p'=\infty$ известен был еще Джексону [2]. Неравенства 3.4.3 (2) для тригонометрических полиномов в случае $n=p=1$ вытекают из результатов С. М. Лозинского [11].

Константы приведенных неравенств являются точными в смысле порядка, но они не точны абсолютно. В некоторых случаях известны более точные или абсолютно точные значения этих констант. В связи с этим укажем книгу И. И. Ибрагимова [1], см. еще Н. К. Бари [1].

Неравенство 3.4.1 (1) в предположении, что $g_\nu(x)=g_\nu(u, y)$ — целая экспоненциального типа ν по всем $x_1, \ldots, x_n$ см. С. М. Никольский [3]. Здесь рассматривается более общий случай, когда g есть целая только по u.

3.3.7. На неравенство $\|f\|_{L_{(p_1, \ldots, p_n)}} \leqslant \|f\|_{L_{(q_1, \ldots, q_n)}}$, где $q_1, \ldots, q_n$ — упорядоченная в неубывающем порядке перестановка чисел $p_1, \ldots, p_n$, обратил мое внимание В. И. Буренков.

К главе 4

4.1. Кроме уже отмеченных в тексте работ Беппо Леви [1] и С. Л. Соболева [1]—[5], обобщенная производная изучалась в работах Тонелли [1], Ивенса [1], [2], Никодима [1], Калкина [1], Морри [1], С. М. Никольского [3], [5], Дени и Лионса [1, 2], где имеется дальнейшая библиография по этому вопросу.

4.2. Формулу (2) и неравенство (6) для периодических функций от одной переменной см. С. Б. Стечкин [1].

4.3. Дробные классы $W_p^r(\Omega)=B_p^r(\Omega)$ (r — дробное) возникли естественным образом как классы следов функций из целых классов $W_p^l(g)$ на многообразии $\Omega \subset g$ или границе g измерения m, меньшего, чем измерение области g. Сначала эта задача о следах была решена при $p=2$ в работах Ароншайна [1], В. М. Бабича и Л. Н. Слободецкого [1], затем при $m=n-1$ Гальярдо [1], Л. Н. Слободецкого [1] и произвольных m и l О. В. Бесова [2]. В последнем случае потребовались не только дробные B-классы, но и целые.

Зигмунд [1] обратил внимание на тот факт, что с некоторых точек зрения, например с точки зрения задачи о порядке наилучших приближений функций тригонометрическими полиномами класс периодических периода 2π измеримых функций от одной переменной, удовлетворяющих условию

$$\left(\int_0^{2\pi} |\Delta_h^k f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant M|h|, \tag{1}$$

где $k>1$, более естественно дополняет классы функций от x периода 2π, удовлетворяющих условию

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant M|h|^\alpha \qquad (0<\alpha<1), \tag{2}$$

чем класс функций, для которых выполняется (2) при $\alpha=1$.

Теория вложений H- и B-классов дает ряд новых примеров, подтверждающих этот факт.

4.3.4. В настоящее время известен целый ряд эквивалентных способов определения пространств $B^r_{p\theta}$. Многие из них собраны в § 2 обзора В. И. Буренкова [3].

4.3.6. Введем понятие открытого множества $g\subset R_n$ с липшицевой границей. Если множество g ограничено, то ее граница Γ называется *липшицевой*, если, какова бы ни была точка $x^0\in\Gamma$, найдутся прямоугольная система координат $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ с началом в x^0 и прямоугольник

$$\Delta=\{|\xi_j|<\eta_j;\ j=1,\ldots,n\}, \tag{1}$$

вырезающий из Γ часть $\gamma=\Gamma\Delta$, описываемую уравнением

$$\xi_n=\psi(\lambda),\quad \lambda=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}), \tag{2}$$
$$\lambda\in\Delta'=\{|\xi_j|\leqslant\eta_j;\ j=1,\ldots,n-1\},$$

где $\psi(\lambda)$ удовлетворяет на Δ' условию Липшица, т. е. существует константа M такая, что

$$|\psi(\lambda')-\psi(\lambda)|\leqslant M|\lambda'-\lambda|, \tag{3}$$
$$\lambda,\ \lambda'\in\Delta'.$$

Если множество g не ограничено, то его граница Γ называется *липшицевой*, если существуют не зависящие от $x^0\in\Gamma$ положительные числа η и M и конечное множество e прямоугольных систем координат, получаемых поворотом данной прямоугольной системы $(x_1,\ldots,x_n)$, такие, что, какова бы ни была точка $x^0\in\Gamma$, найдется прямоугольная система координат $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ с началом в x^0, параллельная одной из систем множества e, и прямоугольник (1), вырезающий из Γ часть $\gamma=\Gamma\Delta$, описываемую уравнением (2), где $\psi(\lambda)$ удовлетворяет на Δ' условию Липшица (3).

Теорема 1. *Пусть открытое множество $\Omega\subset R_n$ имеет липшицеву границу. Любой из классов $W^l_p(\Omega)$ (l — целое, $1<p<\infty$), $H^r_p(\Omega)$ ($r>0$, $1\leqslant p\leqslant\infty$), $B^r_{p\theta}(\Omega)$ ($r>0$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$) можно продолжить линейным образом за пределы Ω на R_n с сохранением нормы.*

Области Ω, за пределы которых возможно продолжение функций анизотропных классов, существенно зависят от определяющего класс вектора r или, точнее, от той пропорции, в которой находятся его компоненты.

Зададим положительный вектор $r>0$ ($r_j>0$; $j=1,\ldots,n$), $\delta>0$ и еще положительный вектор $a>0$. Обозначим через $P(r)=P(r,\rho,a,\delta)$ множество (*рог* с вершиной в нулевой точке) точек $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R_n$, подчиняющихся условиям

$$a_jh<x_j^{r_j}<(a_j+\delta)h \qquad (j=1,\ldots,n), \tag{4}$$
$$0<h<\rho,$$

или любое множество, получаемое из (4) зеркальными отображениями (может быть, несколько раз) относительно $(n-1)$-мерных координатных плоскостей. Таким образом, произвольный рог $P(r)$ можно еще описать неравенствами

$$a_j h < |x_j|^{r_j} < (a_j+\delta) h, \quad \operatorname{sign} x_i = \text{const}, \qquad (5)$$
$$0 < h < \rho.$$

Обозначим символом

$$g_1 + g_2$$

векторную сумму множеств $g_1, g_2 \subset R_n$, т. е. множество всевозможных сумм $x+y$, где $x \in g_1$, $y \in g_2$.

Будем говорить, что открытое множество $\Omega \in A_\varepsilon(r)$ $(\varepsilon > 0)$, если: 1) его можно представить в виде двух сумм

$$\Omega = \bigcup_1^N U^k = \bigcup_1^N U^k_\varepsilon, \qquad (6)$$

где U^k_ε есть множество точек $x \in U^k$, отстоящих на расстоянии, большем чем ε, от границы $\Omega \setminus U^k$, и 2) существуют ρ, a, δ такие, что каждому k можно привести в соответствие рог $P^k = P^k(r, \rho, a, \delta)$ такой, что

$$U^k + P^k \subset \Omega \qquad (k = 1, \ldots, N). \qquad (7)$$

Соотношение (7) выражает, что, какова бы ни была точка $x \in U^k$, если рог P^k передвинуть параллельно самому себе так, чтобы его вершина совпала с x, то сдвинутый таким образом рог принадлежит к Ω.

Заметим, что в случае, если $r_1 = \ldots = r_n = r$, рог P представляет собой конус, опирающийся на некоторый многогранник, с вершиной в нулевой точке. Можно доказать, что в этом случае понятия области, имеющей липшицеву границу, и области класса $A_\varepsilon(r, \ldots, r)$ совпадают.

Теорема 2. *Пусть задана область* $\Omega \in A_\varepsilon(r)$ *и классы с нормами*

$$\|f\|_{W^l_p(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^{l_j} f}{\partial x_j^{l_j}} \right\|_{L_p(\Omega)} \qquad (8)$$

(l_j — *целые*, $1 < p < \infty$),

$$\|f\|_{B^r_{p\theta}(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^H \left\| \Delta^{k_j}_{x_j h} \frac{\partial^{\rho_j} f}{\partial x_j^{\rho_j}} \right\|^\theta_{L_p(\Omega_{k_j h})} \frac{dh}{h^{1+\theta(r_j-\rho_j)}} \right)^{1/\theta} \qquad (9)$$

$$(k_j > r_j - \rho_j > 0, \quad 1 \leqslant \theta < \infty, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

$$\|f\|_{H^r_p(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \sup_h \frac{\left\| \Delta^{k_j}_{x_j h} \frac{\partial^{\rho_j} f}{\partial x_j^{\rho_j}} \right\|_{L_p(\Omega_{k_j h})}}{h^{r_j - \rho_j}} \qquad (10)$$

$$(1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Любой из этих классов продолжается за Ω *на* R_n *линейным образом с сохранением нормы.*

Для $W^l_p(\Omega)$ при $l_1 = \ldots = l_n = l$ эта теорема доказана Смитом [1], усилившим результат Кальдерона [2], который доказал ее для более сильной нормы

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leqslant l} \|f^{(\alpha)}\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|^*_{W^l_p(\Omega)}.$$

Здесь имеют место вложения

$$W_p^l(\Omega) \to W_p^{l, \ldots, l}(\Omega) \to W_p^{l, \ldots, l}(R_n) \to W_p^l(R_n) \to$$
$$\to {}^*W_p^l(R_n) \to {}^*W_p^l(\Omega) \to W_p^l(\Omega), \qquad (11)$$

где первое и два последних тривиальны, второе есть отмеченный результат Смита, а третье доказывается в 9.2. Из (11) следует теорема 1 для пространств $W_p^l(\Omega)$.

При неодинаковых натуральных l_j эта теорема для $W_p^l(\Omega)$ доказана одновременно и независимо О. В. Бесовым [9], [10] и В. П. Ильиным [6].

Для норм $B_{p\theta}^r$ $(1 \leqslant \theta \leqslant \infty)$ эта теорема (таким образом, и теорема 1) доказана О. В. Бесовым [9], [10], см. также О. В. Бесов и В. П. Ильин [1]. Доказательство этих теорем приведено в книге О. В. Бесова, В. П. Ильина и С. М. Никольского [1], теоремы 18.5 и 18.6.

В. И. Буренков [4], [5] показал, что для каждого $r > 0$ можно указать область, не принадлежащую к $A_\varepsilon(r)$, для которой теорема 2 о продолжении уже не выполняется. Например, любой рог $P(k)$, где $k \neq cr$, является такой областью.

Там же доказано, что если теорема 2 имеет место для пространств $W_p^r(\Omega)$, $B_p^r(\Omega)$ для класса областей вида $A_\varepsilon(r)$, то только в том случае, когда вместо рога $P(r)$ рассматривается рог $P(r, p) = P(r, p, \rho, a, \delta)$, определяемый как множество точек $x \in R_n$, подчиняющихся неравенствам

$$a_i h < x_i^{\rho_i} < (a_i + \delta) h \qquad (i = 1, \ldots, n, \ 0 < h < \rho),$$

где

$$\rho_i = \frac{r_i}{\varkappa_i}, \quad \varkappa_i = 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{p_i}\right).$$

Отметим еще вытекающую из теорем 1 и 2 теорему.

Теорема 3. *Если $g \subset R_n$ — произвольное открытое множество и $g_1 \subset \bar{g}_1 \subset g$ — другое ограниченное открытое множество, то функции любого класса, упоминаемого в теоремах 1 и 2, который мы обозначим через $\Lambda(g)$, можно продолжить с g_1 на R_n линейным образом с сохранением нормы (по g). Это надо понимать в том смысле, что каждой функции $f \in \Lambda(g)$ можно привести в соответствие ее продолжение $\bar{f} \in \Lambda(R_n)$ с g_1 (не с g) так, что*

$$\|\bar{f}\|_{\Lambda(R_n)} \leqslant c \|f\|_{\Lambda(g)},$$

где c не зависит от f и зависимость $\bar{f}$ от f линейная.

В самом деле, зададим прямоугольную сетку, делящую R на кубики, и пусть Ω — множество, состоящее из кубиков сетки, содержащих точки $\bar{g}_1$. Граница Ω, очевидно, удовлетворяет условию $A_\varepsilon(r)$ при любом r и если сетка достаточно густа, то $g_1 \subset \Omega \subset g$. Функции $f \in \Lambda(g) \subset \Lambda(\Omega)$ продолжим, пользуясь высказанной теоремой, с сохранением нормы с Ω на R: для соответствующих продолжений $\bar{f}$ имеет место

$$\|\bar{f}\|_{\Lambda(R_n)} \ll \|f\|_{\Lambda(\Omega)} \ll \|f\|_{\Lambda(g)}.$$

Эту теорему 3 можно доказать более простым путем, полагая $\bar{f} = f\varphi$, где φ — «шапка», т. е бесконечно дифференцируемая на R_n функция, равная единице на g_1 и нулю вне g (для классов $H_p^r(g)$, см. С. М. Никольский [5]).

Частные случаи теорем 1 и 2, относящиеся к продолжению за область с достаточно гладкой границей и за пределы отрезка, рассматривались в более ранних работах С. М. Никольского [4], [7], В. К. Дзядыка [1], О. В. Бесова [4], см. еще В. М. Бабич [1].

4.4.1.—4.4.3. Об исследованиях этого рода см. С. М. Никольский [11]. Неравенство 4.4.3 (4) см. в книге С. Л. Соболева [4].

4.4.5. Если производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ понимать в смысле Соболева, то эта лемма доказывается немедленно. В самом деле, пусть на g заданы две последовательности функций f_k и $\lambda_k \in L_p(g)$ таких, что

$$\int f_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx = -\int \lambda_k \varphi \, dx \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{1}$$

для всех непрерывно дифференцируемых финитных на g функций φ. Если при этом $f_k \to f$, $\lambda_k \to \lambda$ в смысле $L_p(g)$, то из (1), очевидно, следует, что

$$\int f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx = -\int \lambda \varphi \, dx, \qquad f, \lambda \in L_p(g)$$

для всех указанных φ, т. е. λ есть производная от f по x_1 на g по Соболеву. С. Л. Соболев [4] широко пользовался этой леммой. Здесь она доказывается, исходя из принятого в этой книге в качестве основного определения обобщенной производной (см. начало § 4.1).

4.4.9. Эту теорему см. С. М. Никольский [5].

4.8. Эта теорема в периодическом случае доказана Харди и Литтлвудом [1], без доказательства сформулирована А. А. Дезиным [1], доказательство при $p=2$ приведено в диссертации А. С. Фохта [1].

К главе 5

5.2. Метод приближения 5.2.1 (4) изучал С. Н. Бернштейн [2], стр.421—432, доказавший неравенство 5.2.1 (7) при $p=\infty$, $m=1$ Случай $m=1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ см. С. М. Никольский [3]. Здесь рассмотрен более общий случай $m \leqslant n$ приближения целыми функциями сферического экспоненциального типа.

Само по себе неравенство 5.2.1 (7) при $m=n=1$, $1 \leqslant p < \infty$ получено другим методом Н. И. Ахиезером [1].

Периодические неравенства 5.3.2 (2) впервые получены ($n=k=1$, $p=\infty$) Джексоном [1]. Случай $n=1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ см. исследования Квада [1] и Н. И. Ахиезера [1]. Представления 5.3.1 (11) (аналоги 5.2.1 (4)) см. С. Б. Стечкин [1]. Неравенство 5.3.2 (5) в случае функций, удовлетворяющих условию Липшица для сумм Фейера ($p=\infty$), см. А. Зигмунд [3], § 4.7.9 и в общем случае ($p=\infty$) С. Б. Стечкин [1].

Теорема об аппроксимации 5.2.4 и изложенный в 5.3.3 ее периодический аналог в случае $p=p_1=\ldots=p_n=\infty$ см. С. Н. Бернштейн [2], стр. 421—432, а если числа $p_1, \ldots, p_n$ вообще разные — С. М. Никольский [10]. Неравенство 5.3.2 (6) для степенных модулей непрерывности см С. М. Никольский [6].

5.4. Обратная теорема С. Н. Бернштейна о приближении алгебраическими и тригонометрическими полиномами ($p=\infty$, $n=1$) доказана в его работе [1], стр. 11—104. Она уточнена в периодическом случае (при нецелых r) Валле-Пуссеном [1] и Зигмундом [1] (при целых r).

5.4.4. Я. С. Бугров [3], [4] получил также подобные неравенства для полигармонических функций в круге и полуплоскости и применил их при изучении дифференциальных свойств указанных функций вплоть до границы.

5.5.3. Эквивалентность норм $\|\cdot\|_H$ для различных допустимых пар (k, ρ) можно доказать прямым путем, не прибегая к методам приближения (см. в одномерном случае Маршу [1]). Более общие исследования в этом направлении см. К. К. Головкин [1], [2]. Методом приближений в периодическом одномерном случае она доказана Зигмундом [1]. Он обратил внимание на эквивалентность при целых r норм вида ${}^1\|\cdot\|_{H^*}$ с нормой ${}^5\|\cdot\|_{H^*}$, выражаемой через наилучшие приближения. В непериодическом случае см. С. Н. Бернштейн [2], стр. 421—432. Здесь рассмотрен этот вопрос для приближений целыми функциями экспоненциального сферического типа.

5.5.4. В периодическом одномерном случае при $p=\infty$ это есть классическая теорема, доказанная в работах С. Н. Бернштейна [1], стр. 11—104, Джексона [1], Валле-Пуссена [1], Зигмунда [1]. При $1\leqslant p<\infty$ см. Квад [1] и Зигмунд [1]. В непериодическом одномерном случае при $1\leqslant p\leqslant\infty$ см. Н. И. Ахиезер [1]. Здесь дается обобщение на случай приближения целыми функциями экспоненциального сферического типа.

5.5.8. В периодическом случае имеется много результатов, относящихся к этому вопросу.

5.6—5.6.1. При изложении этих параграфов мы существенно пользовались работой О. В. Бесова [5] и в случае 5.6.1 еще работой Т. И. Аманова [3]. О. В. Бесов предоставил в мое распоряжение новый (приведенный в тексте) вариант доказательства вложения ${}^4B'\to{}^5B$ Этот прием имеет то преимущество, что он свободно переносится на более общие случаи теорем этого рода (см. К. К. Головкин [2]).

Среди различных эквивалентных норм $\|\cdot\|_B$ (в частности, $\|\cdot\|_H$) мы ввели нормы ${}^2\|\cdot\|_B$ и ${}^4\|\cdot\|_B$, выражаемые через производные по направлению. В изотропном случае они имеют преимущество, во всяком случае, техническое — вместо суммы интегралов, соответствующих всевозможным частным производным порядков s с $|s|=\rho$, берется один интеграл. В случае $\rho=0$ такие нормы употреблялись в литературе нередко.

Эквивалентность классов ${}^1B^r_{p\theta}(R_n)$ и ${}^5B^r_{p\theta}(R_n)$ $(1\leqslant\theta<\infty)$ доказана О. В. Бесовым [3], [5], в периодическом одномерном случае — А. А. Конюшковым [1] и П. Л. Ульяновым [1]. Эквивалентность ${}^1B^r_{p\theta}(R_n)$ и ${}^3B^r_{p\theta}(R_n)$ доказана в тех же работах О. В. Бесова и при $\theta=p$, r_l целых в работе С. В. Успенского [4].

В частных случаях $\theta=p=2$ (для допустимых пар $(\bar r, 1)$, $(\bar r, 2)$) нормы ${}^3\|\cdot\|$ были введены и изучались в более ранних работах Ароншайна [1], В. М. Бабича и Л. Н. Слободецкого [1], а при $p=\theta\neq2$ для нецелых r Гальярдо [1] и Л. Н. Слободецкого [1].

Разложения функций f в виде рядов 5.6. (7) с нормой ${}^6\|\cdot\|_B$ см. О. В. Бесов [3], явным образом нормы ${}^6\|\cdot\|_B$ применялись в работе Т. И. Аманова [3].

5.6.2. — 5.6.3. Пусть функция $f(x)$ имеет производные $\dfrac{\partial^{\bar r_j}f}{\partial x_j^{\bar r_j}}$ $(j=1,\ldots,n)$, удовлетворяющие по x_j на ограниченной области Ω условию Липшица степени α_j $(0<\alpha_j\leqslant1,\ r_j=\bar r_j+\alpha_j)$ равномерно относительно остальных переменных, и пусть $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_n)$ — вектор (целый), для которого $\sum\limits_1^n\dfrac{\rho_j}{r_j}<1$. С. Н. Бернштейн (1911 г., см. [1], стр. 96—104) при $r=r_1=\ldots=r_n$ и Монтель (1918 г., см. [1]) при любых $r_j>0$ показали, что в таком случае на Ω существует смешанная непрерывная производная $f^{(\rho)}$, ограниченная на любой области $\Omega_1\subset\bar\Omega_1\subset\Omega$. С. Н. Бернштейн показал еще, что производные $f^{(\rho)}$ $(|\rho|=\bar r=r-\alpha,\ r=r_j)$ удовлетворяют на Ω_1 условию Липшица степени $\alpha'<\alpha$.

Теорема 5.6.3 усиливает эти результаты, указывая точно класс, к которому принадлежит $f^{(\rho)}$ и распространяет (при $\Omega=R_n$) на случай метрики L_p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ и B-классов. Для H-классов при $p=\infty$ и $r=r_1=\ldots=r_n$ эта теорема доказана С. Н. Бернштейном ([2], 426—432) и одновременно независимо для произвольных r_j $(j=1,\ldots,n)$ С. М. Никольским [2], показавшим еще ее неулучшаемость в терминах H-классов и им же [5] в метрике L_p. Для классов B она доказана О. В. Бесовым [5].

Вопрос о распространении теоремы 5.6.3 на случай областей $\Omega \subset R_n$ решается с помощью теорем о продолжении (см. 4.3.6). В упомянутой работе Монтеля на самом деле в качестве Ω рассматривается квадрат со сторонами, параллельными осям координат: ρ не обязательно целый вектор, и тогда $f^{(\varrho)}$ есть смешанная частная производная в смысле Лиувилля.

Теорема 5.6.2 об эквивалентности

$$B_{p\theta}^{r, \dots, r}(R_n) = B_{p\theta}^{r}(R_n),$$

при r нецелом следует из теоремы 5.6.3. В общем случае ее доказательство дано (другими методами) В. А. Солонниковым [1], см. еще С. М. Никольский, Ж. Лионс и П. И. Лизоркин [1]. При замене в (1) R_n на Ω свойство 5.6.2 (1) конечно сохраняется для областей $\Omega \subset R_n$, для которых справедлива теорема о продолжении функций классов $B_{p\theta}^{r, \dots, r}(\Omega)$ (см. 4.3.6 и замечание к 4.3.6). В. И. Буренков [2] исследовал области, для которых эквивалентность 5.6.2 (1) не имеет места.

Пусть $B_p^r = B_{pp}^r(R_n)$, $H_p^r = B_{p\infty}^r(R_n)$, $L_p = L_p(R_n)$. Условие теоремы 5.6.3 при $\varkappa = 0$ и $1 \leqslant p \leqslant 2$ $(\theta = p)$ влечет $f^{(l)} \in L_p$. Это следует из 9.2.2 и 9.3 (2). При $2 \leqslant p < \infty$ это уже не так: если, например, $f \in B_p^l(R_1)$, то отсюда вообще не следует, что $f^{(l)}$ существует и принадлежит к L_p (см. 9.7).

Для классов $H_p^r = B_{p\infty}^r$ теорема 5.6.3 в случае $\varkappa = 0$ тоже неверна. В самом деле, функция

$$f(\theta) = \sum_{s=1}^{\infty} b^{-s} \cos b^s \theta \quad (b > 1)$$

не имеет нигде производной (Вейерштрасс, Харди, см. Зигмунд [2], гл. II, 4.8—4.11) и в то же время она принадлежит к периодическому классу $\overset{1}{\underset{p}{H}}{}^{*}$. Последнее утверждение доказывается следующим образом. Легко проверяется, что

$$\| \cos b^s x \|_{L_p^*} = \| \cos b^s x \|_{L_p(0,\, 2\pi)} \leqslant K,$$

где K не зависит от $s = 1, 2, \dots$ Зададим $h > 0$ $(0 < h < 1)$ и подберем натуральное N так, чтобы

$$b^{-(N+1)} < h \leqslant b^{-N}.$$

Тогда

$$\| \Delta_h^2 f \|_{L_p^*} \ll \sum_{s=1}^{N} b^{-s} \| \Delta_h^2 \cos b^s \theta \|_{L_p^*} + \sum_{N}^{\infty} b^{-s} \ll$$
$$\ll h^2 \sum_{s=1}^{N-1} b^{-s} b^{2s} + b^{-N} \ll h^2 b^N \ll h^2 b^N + b^{-N} \ll h,$$

где применено неравенство 4.4.4 (3) для тригонометрических полиномов (см. ссылку на стр. 167).

5.6.4. Пример дан Ю. С. Никольским [1].

5.6.5. Свойства 5.6.5 (1), (2) выражают непрерывность по норме в соответствующих пространствах W_p^l, $B_{p\theta}^r$. В случае B-классов на это свойство обратил мое внимание П. И. Лизоркин.

К главе 6

6.1. Дополнение В. П. Ильина [2] в теореме вложения (1) относится к случаю предельного показателя (когда $\rho = 0, 1, 2, \ldots$) при $m < n$. Это утверждение в отдельных случаях предельного показателя было известно В. И. Кондрашову [1], он исследовал также некоторые случаи при $m < n$ и нецелом ρ.

С. Л. Соболевым доказано также, что в теореме (1) при $m = n$ можно считать $p = 1$.

В одномерном случае вопрос о следах не возникает и можно говорить только о «чистой» теореме разных метрик. Она доказана Харди и Литтлвудом [1], см. еще книгу Харди, Литтлвуда и Полиа [1].

6.4. Пусть $\Gamma \subset R_n$ — достаточно гладкая поверхность измерения $m < n$. Для нее корректно определяется след $f|_\Gamma$ функции $f \in H_p^r(R_n)$ во всяком случае при условии $r - \frac{n-m}{p} > 0$. При этом условии имеют место прямое и ему обратное вложения $H_p^r(R_n) \rightleftarrows H_p^{r - \frac{n-m}{p}}(\Gamma)$ (см. С. М. Никольский [5]). Соответствующее обобщение на B-классы см. О. В. Бесов [11].

6.7. Я. С. Бугров [4] показал, что вложение

$$H_p^{r'}(R_m) \to H_p^r(R_n), \qquad r' = r - \frac{n-m}{p},$$

верно не только при $r' > 0$, но и при $r' = 0$, если заменить в его левой части $H_p^0(R_m)$ на $L_p(R_m)$.

Различные усиления теоремы о продолжении могут быть получены, если требовать от продолжающей функции выполнения дополнительных свойств.

Л. Д. Кудрявцев [2] показал, что в теореме 6.6 функцию $f \in H_p^r(R_n)$, продолжающую на R_n функцию

$$\varphi \in H^{r - \frac{n-m}{p}}(R_m) \quad \left(1 \leqslant m < n,\ r - \frac{n-m}{p} > 0\right),$$

можно построить так, чтобы она была бесконечно дифференцируемой на $R_n - R_m$ и чтобы выполнялись свойства

$$\int_{R_n} \rho^{p(s-\alpha)+\varepsilon} \left| \frac{\partial^{\bar{r}+s} f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \right|^p dR_n < \infty, \tag{1}$$

$$\varepsilon > 0, \ \sum_1^n s_k = \bar{r} + s \ (1 \leqslant p < \infty), \quad \rho^2 = \sum_2^n x_j^2.$$

Эти неравенства перестают быть верными при $\varepsilon = 0$. Аналогичный результат получен им при $p = \infty$. Эти факты указывают на определенную связь рассматриваемых здесь классов с так называемыми весовыми классами функций, производные которых (или их разности) интегрируемы в p-й степени с весом. Если исходить не из H-, а из B-классов ($\theta < \infty$), то имеют место подобные факты уже при $\varepsilon = 0$ (С. В. Успенский [3]).

Систематическое изучение весовых классов было начато в отмеченной выше работе Л. Д. Кудрявцева [2], см. еще А. А. Вашарии [1], С. В. Успенский [4], И. А. Киприянов [1] и А. Куфнер [1]. Библиографию по этому вопросу см. В. И. Буренков [3], Л. Д. Кудрявцев [3], И. Нечас [1], С. М. Никольский [12].

Я. С. Бугров [1] доказал для единичного круга σ на плоскости в терминах классов H предельно точную теорему.

Пусть функции периода 2π

$$\varphi_k(\theta) \in H_{p*}^{r+l-k-1} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ l-1,\quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,\quad r>0).$$

Тогда полигармоническая функция $u(\rho, \theta)$ *от полярных координат* ($0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), *решающая в единичном круге* σ *краевую задачу*

$$\Delta^l u(\rho, \theta)=0, \quad \frac{\partial^k u}{\partial \rho^k}\bigg|_{\rho=1} = \varphi_k(\theta) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ l-1)$$

(Δ — *оператор Лапласа*), *принадлежит к классу* $H_p^{r+l+\frac{1}{p}-1}(\sigma)$.

Аналогичный результат получен для полуплоскости (Я. С. Бугров [3]). Этим теоремам предшествовали точные результаты Н. М. Гюнтера [1] и Келлога [1] для трехмерной области с гладкой границей при $p=\infty$ и r нецелого; О. В. Бесова [1] для полупространства при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и нецелых r; Н. И. Мозжеровой [1] для трехмерной области с гладкой границей при $1 \leqslant p < \infty$ и нецелых r; С. М. Никольского [4], [9] для круга при $p=2$ и любых r. См. еще Т. И. Аманов [2]. В настоящее время имеется много результатов этого рода с оценками решений различных краевых задач в терминах рассматриваемых здесь классов (см., например, В. А. Солонников [1], Нечас [1], [2] и И. Н. Векуа [1]).

6.9. Пусть $\boldsymbol{k}=(k_1, \ldots, k_n) \geqslant 0$ (т. е. $k_j \geqslant 0$ для всех j) — целочисленный вектор, $\boldsymbol{h}=(h_1, \ldots, h_n)$ — произвольный вектор ($h_j \neq 0$, $j=1, \ldots, n$). По определению

$$\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\boldsymbol{k}} f = \Delta_{h_1}^{k_1} \ldots \Delta_{h_n}^{k_n} f,$$

где $\Delta_{x_j h_j}^{k_j} f$ — разность f порядка k_j с шагом h_j по направлению x_j $\left(\Delta_{x_j h_j}^{0} f = f\right)$. Зададим вектор $\boldsymbol{r}=(r_1, \ldots, r_n) \geqslant 0$, и пусть e есть какое-либо подмножество множества натуральных чисел $e_n=\{1, \ldots, n\}$, а $\boldsymbol{r} = \left(r_1^e, \ldots, r_n^e\right)$ — вектор, компоненты которого подчиняются условию

$$r_j^e = \begin{cases} r_j, & j \in e, \\ 0, & j \notin e. \end{cases}$$

Положим

$$\overline{\boldsymbol{r}^e} = \left\{\overline{r_1^e}, \ \ldots, \ \overline{r_n^e}\right\},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^e = \boldsymbol{r}^e - \overline{\boldsymbol{r}^e} = \left\{\alpha_1^e, \ \ldots, \ \alpha_n^e\right\},$$

где, если $r_j^e > 0$, то $\overline{r_j^e}$ есть наибольшее целое, меньшее r_j^e, и если $r_j^e = 0$, то $\overline{r_j^e} = 0$.

Введем еще вектор $\boldsymbol{\omega}=(1, \ldots, 1)$. *По определению функция* $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *принадлежит к классу* $S_p^{\boldsymbol{r}}H = S_p^{\boldsymbol{r}}$, *если конечна норма*

$$\|f\|_{S_p^{\boldsymbol{r}}H} = \sum_e \sup_{\boldsymbol{h}} \left\| \frac{\Delta_{\boldsymbol{h}}^{2\boldsymbol{\omega}} f^{(\overline{\boldsymbol{r}^e})}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{\alpha}^e}} \right\|_{L_p(R_n)},$$

где сумма распространена на все подмножества e, $\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{\alpha}^e} = h_1^{\alpha_1^e} \ldots h_n^{\alpha_n^e}$ *и* $f^{(\overline{\boldsymbol{r}^e})}$ — *частная производная порядка* $\overline{\boldsymbol{r}^e}$. *Эта сумма содержит слагаемое* $\|f\|_{L_p(R_n)}$, *соответствующее пустому множеству* e.

Теорема о представлении. *Пусть* $r>0$ *Для того чтобы* $f(x)\in S_p^r H$, *необходимо и достаточно, чтобы имело место представление*

$$f(x)=\sum_{k\geqslant 0} Q_k(x), \tag{1}$$

где $Q_k(x)=Q_{2^{k_1 r_1},\,\ldots,\,2^{k_n r_n}}(x)$ — *целые функции экспоненциального типа* $2^{k_j r_j}$ *соответственно по* x_j, *для которых*

$$\|Q_k\|_{L_p(R_n)}\leqslant c2^{-kr} \quad \left(kr=\sum_{j=1}^{n} k_j r_j\right) \tag{2}$$

и c *не зависит от* k.

Имеют место вложения

$$S_p^r(R_n)\to S_{p'}^{\rho}(R_n) \quad \left(1\leqslant p<p'\leqslant\infty,\quad \rho=r-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)\omega>0\right), \tag{3}$$

$$S_p^r(R_n)\to S_p^{\overline{r^{e_m}}}(R_m) \tag{4}$$

$$\left(e_m=\{1,\ \ldots,\ m\};\quad 1\leqslant m<n;\quad r_j-\frac{1}{p}>0,\ \ j=m+1,\ \ldots,\ n\right).$$

В самом деле, если $f\in S_p^r(R_n)$, то справедливы (1), (2). Но тогда

$$\|Q_k\|_{L_{p'}(R_n)}\leqslant c_1 2^{-k\rho} \qquad (\rho>0)$$

и $f\in S_{p'}^{\rho}(R_n)$. Далее

$$\|Q_k\|_{L_p(R_m)}\leqslant c_1 2^{-kr+\frac{1}{p}\sum\limits_{m+1}^{n} k_j r_j}$$

и, если положить в (1) $x_{m+1}=\ldots=x_n=0$, то для следа f на R_m получим представление

$$\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_m)=f(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ 0,\ \ldots,\ 0)=\sum_{k^{e_m}\geqslant 0} q_{k^{e_m}},$$

где сумма распространена на m-мерные векторы $k^{(m)}\geqslant 0$ и

$$q_{k^{e_m}}=\sum_{\substack{k_j\geqslant 0\\ m+1\leqslant j\leqslant n}} Q_k(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

причем $\left(r_j-\frac{1}{p}>0\right)$

$$\left\|q_{k^{e_m}}\right\|\leqslant 2^{-\sum\limits_1^m k_j r_j}\sum_{\substack{k_j\geqslant 0\\ m+1\leqslant j\leqslant n}} 2^{-\sum\limits_{m+1}^{n} k_j\left(r_j-\frac{1}{p}\right)}\leqslant 2^{-\sum\limits_1^m k_j r_j},$$

что влечет (4) в силу обратной теоремы о представлении.

Для векторов $r^1, \ldots, r^N$ введем пространство

$$S^{r^1, \ldots, r^N} = S_p^{r^1, \ldots, r^N} = \bigcap_1^N S_p^{r^j}$$

с нормой

$$\|f\|_{S_p^{r^1, \ldots, r^N}} = \sum_{j=1}^N \|f\|_{S_p^{r^j}}.$$

Справедлива теорема об интерполяции:

$$S^{r^1, \ldots, r^N} \to S^{\sum_1^N \lambda_k r^k} \quad \left(\lambda_k \geqslant 0, \ \sum_1^N \lambda_k \leqslant 1\right). \tag{5}$$

Если $N=n$ и $r^l=(0, \ldots, 0, r_l, 0, \ldots, 0)$, то

$$S^{r^1, \ldots, r^N} \equiv S^{r^1, \ldots, r^N} H \equiv H_p^{r_1, \ldots, r_n}.$$

Эти результаты доказаны С. М. Никольским [15], [16].

Отметим работу Н. С. Бахвалова [1], где независимо доказана в одну сторону (необходимость) теорема о представлении функций периодического класса $S_{p*}^r H$: если $f \in S_{p*}^r H$, то имеет место (1), (2), где Q_s — тригонометрические полиномы. Распространения этих теорем с H- на B-классы принадлежат Т. И. Аманову [3] и (другими методами) А. Д. Джабраилову [1].

6.10.2. Это замечание о средних функциях сообщено мне О. В. Бесовым.

К главе 7

7.2. Неравенства между нормами частных производных с параметром ε и мультипликативные неравенства мы находим в работе В. П. Ильина [7] и в последующих его работах, В. А. Солонникова [1], К. К. Головкина [1], В. П. Ильина и В. А. Солонникова [1] и др.

Неравенства с ε применяются в теории дифференциальных уравнеиий, когда хотят, чтобы один из членов вида

$$\varepsilon^\alpha \|f\| + \frac{1}{\varepsilon^\beta} \|f^{(k)}\|$$

был меньшим наперед заданного числа.

Из результатов С. М. Никольского [11], относящихся к более общим теоремам вложения, следует, что неравенства между полунормами

$$\|f\|_{h_{p'}^{r'}(g)} \leqslant c \|f\|_{w_p^r(g)}, \tag{1}$$

$$\|f\|_{w_{p'}^l(g)} \leqslant c \|f\|_{w_p^r(g)} \tag{2}$$

$$\left(1 \leqslant p < p' \leqslant \infty, \quad r' = r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) n > 0, \ l < r'\right)$$

имеют место для произвольной области $g \subset R_n$, без предположення, что $\|f\|_{L_p(g)}$ конечна, если только $\bar{r} \leqslant r' < r$ (в случае (1)) и $\bar{r} < l < r' < r$ (в случае (2)).

Из работ Л. Д. Кудрявцева [4] и Ю. С. Никольского [1], посвященных весовым пространствам, следует неравенство

$$\| f \|_{w_p^{l-\frac{1}{p}}(R_{n-1})} \leqslant c \| f \|_{w_p^l (R_n)} \qquad (1 < p < \infty)$$

и утверждение о возможности продолжения функций $\varphi \in w_p^{l-\frac{1}{p}}(R_{n-1})$ на R_n, так что для продолжающих их функций имеет место

$$\| f \|_{w_p^l (R_n)} \leqslant c \| \varphi \|_{w_p^{l-\frac{1}{p}}(R_{n-1})} \qquad (1 < p < \infty)$$

без предположения, что нормы $\|f\|_{L_p(R_n)}$ и $\|\varphi\|_{L_p(R_{n-1})}$ конечны. В этих двух теоремах, так же как выше, $0 < l - \frac{1}{p} < l$.

7.3. Крайние функции введены и изучены в работах С. М. Никольского [2], [3], Т И. Аманова [1], П. Пилика [1]. С помощью них была установлена точность (неулучшаемость) приводимых здесь неравенств между H-нормами.

7.7. Проблеме компактности классов функций, идущей от работ Асколи [1] и Ариела́ [1], посвящено много исследований. Основная теорема Арцела́ о компактности относится к классу непрерывных функций. В метрике L_p ей соответствует теорема Колмогорова [1] (для $p > 1$) и Тулайкова [1] (для $p = 1$). К исследованиям по вопросу о компактности классов дифференцируемых функций относятся работы Реллиха [1], И. Г. Петровского и К. Н. Смирнова [1], В. И. Кондрашова [1], Пиконе [1], Пуччи [1], Л. Д. Кудрявцева [1], О. В. Бесова [12], В. П. Ильина [8] и др.

Приведенную здесь теорему для классов H_p^r, W_p^r см. С. М. Никольский [8]. В сущности здесь речь идет о слабой компактности: из ограниченной в метрике H_p^r или W_p^r последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в смысле $H_p^{r-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ к некоторой функции $f \in H_p^r$, W_p^r.

В теоремах 7.7.1—7.7.5 речь идет уже о компактности множества в метрике того пространства, к которому оно принадлежит. В частности, она охватывает теорему о компактности в L_p (см. С. Л. Соболев [4], гл. 1, § 4.3).

Теоремы 7.7.2—7.7.5 доказаны П. И. Лизоркиным и С. М. Никольским.

О. В. Бесов [12] изучал вопросы компактности множеств функций f в H-классах, налагая на f дополнительные условия. Например, в случае H_p^r $(r < 1)$ предполагалось, что

$$\| f(x+h) - f(x) \| \leqslant \alpha(h) |h|^r$$
$$(\alpha(h) \to 0, \quad |h| \to 0).$$

К главе 8

8.1. Операция I_l соответствует в известной мере операции Вейля (см. Зигмунд [2], гл. XII, 8)

$$f(x) = I_l^* \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_l(x-t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

$$K_l(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\nu t + \frac{l\pi}{2}\right)}{\nu^l} \quad (l > 0), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt = 0, \qquad \varphi \in L.$$

Она тесно связана с (непериодической) операцией

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt$$

Лиувилля. Ядра I_l, I_l^* имеют для малых t одну и ту же особенность $|t|^{\alpha-1}$ (мы имеем в виду одномерный случай, ср. 8.1 (6), (13) и Зигмунд [1], гл. V, 2.1). Эту же особенность имеет ядро Лиувилля $(x-t)^{\alpha-1}$ при $t=x$.

Оценки вида 8.1 (7) для частных производных от $G_r(|x|)$ см.Ароншайн и Смит [1].

8.2. Теорема об изоморфизме классов $W_p^l(R_n)$ доказана в работах Кальдерона [3] и Лионса и Мадженеса [1].

8.3. Оценки разностей производных от $G_r(|x|)$ см. Аронщайн и Смит [1], С. М. Никольский, Ж. Лионс и П. И. Лизоркин [1], гл. 1, С. М. Никольский (с добавлением Е. Носиловского) [18].

8.4. Неравенство (2) см. С. М. Никольский, Ж. Лионс и П. И. Лизоркин [1], гл. I, и С. М. Никольский (18), лемма 6.

В периодическом случае при $n=1$, $p=\infty$ оно было известно И. П. Натансону [2], 119—120, если считать, что $E_\nu^*(f)_\infty$ есть наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами со средним значением по периоду, равным нулю, и С. Б. Стечкину [2] при обычном понимании $E_\nu^*(f)_\infty$; см. еще Сунь Юн-Шен [1].

Неравенство (4) является аналогом соответствующего одномерного неравенства Фавара [1] в периодическом случае. Оно применяется при получении неравенства 8.6 (16) ($r>0$), и здесь мне был полезен совет моего коллеги С. А. Теляковского.

8.6. Н. И. Ахиезер и Б. М. Левитан изучали в других целях более общие чем $V_N(t)$ ядра, соответствующие более общим тригонометрическим суммам Валле-Пуссена $\frac{1}{p+1}\left(D_{N-p}^*+\ldots+D_N^*\right)$, где D_k^* — ядра Дирихле.

О разложениях, регулярных в смысле L_p функций по суммам Валле-Пуссена см. С. М. Никольский [17].

8.8 — **8.9.2.** Изложенные здесь факты, основанные на понятии регулярной в смысле L_p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ обобщенной функции и разложении ее в слабо сходящиеся ряды Валле-Пуссена, см. С. М. Никольский [17], [18]. Сами по себе понятия нулевых классов $B_{p\theta}^0$, изоморфизмы $B_{p\theta}^r$ для разных r и интегральные представления $B_{p\theta}^r$ через нулевые классы и отрицательные классы $B_{p\theta}^r$, были установлены из различных соображений в работах Кальдерона [3], Ароншайна, Муллы и Шептицкого [1], Тэйблсона [1], [2], С. М. Никольского, Лионса и П. И. Лизоркина [2].

8.9. Совокупность $S_p'=S_p'(R_n)$ всех регулярных (см. 1.5.10) в смысле L_p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ обобщенных функций можно определить еще как сумму

$$S_p'=\bigcup_k H_p^{r_k} \qquad (1)$$

$\left(H_p^r=H_p^r(R_n)\right)$, где $\{r_k\}$ — произвольная последовательность действительных чисел, стремящаяся к $-\infty$. В самом деле, если $f\in S_p'$, то для некоторого $\rho\geqslant 0$ имеет место $I_\rho f\in L_p$ (см. 1.5.10), поэтому (см. 8.2) $I_{\rho+1}f\in W_p^1\subset H_p^1$, но тогда $f\in H_p^{-\rho}\to H_p^{r_k}$, если k таково, что $r_k<-\rho$. Наоборот, если $f\in H_p^{r_k}$ для некоторого k, то $I_{-r_k+1}f\in H_p'\subset L_p$.

Ясно, что в (1) можно H заменить на B или L (см. 6.1).

Условимся говорить, что функция $f \in S'_p$ имеет *спектр* в области $G \subset R_n$, если ее преобразование Фурье $\tilde{f}$ имеет носитель на G, т. е. $\tilde{f}=0$ вне G.

Из сказанного следует, что если функция $f \in S'_p$, то и к H^r_p при некотором r и разлагается в ряд

$$f=\sum_0^\infty q_s \tag{2}$$

со следующими свойствами: а) $q_s \in L_p$ и имеет спектр в $\Delta_{s+1}-\Delta_{s-1}$ ($s=1, 2, \ldots$), Δ_0 (при $s=0$), где $\Delta_s=\{|x_j|<a^s\}$, $a>1$; б) выполняются неравенства

$$\|q_s\|_{L_p} \leqslant Ma^{-sr} \qquad (s=0, 1, \ldots), \tag{3}$$

где M не зависит от s.

В самом деле, в качестве q_s можно взять соответствующие суммы Валле-Пуссена функции f (см. 8.9). В случае $1<p<\infty$ свойство а) можно заменить на следующее: а) $q_s \in L_p$ и имеет спектр в $\Delta_s-\Delta_{s-1}$ ($s=1, 2, \ldots$), Δ_0 (при $s=0$) (см. 8.10.1).

Если функция f представлена в виде слабо сходящегося к ней ряда (2) с указанными свойствами а), б) при некотором действительном r, то будем говорить, что этот ряд есть *регулярное разложение* f.

Лемма. *Произвольный формально составленный ряд*

$$\sum_0^\infty u_s, \tag{4}$$

члены которого удовлетворяют свойствам: а*) $u_s \in L_p$ *и имеет спектр вне* Δ_{n_s} ($n_s=\varkappa s$, $\varkappa>0$, *— не зависящая от* s *константа*), б)

$$\|u_s\|_{L_p} \ll a^{-sr} \qquad (s=0, 1, \ldots), \tag{5}$$

слабо сходится к некоторой функции $f \in S'_p$. *Сами функции* u_s, *таким образом, образуют последовательность, сходящуюся слабо к нулю.*

В частности, ряд в правой части (2) со свойствами а) и б) слабо сходится к некоторой функции $f \in S'_p$, более точно, $f \in H^r_p$.

Доказательство. Пусть $\varkappa\rho>-r$, тогда (см. 8.4 (4)) $\|I_\rho u_s\|_{L_p} \ll a^{-s(\varkappa\rho+r)}$, и потому ряд

$$\sum_0^\infty I_\rho u_s=F$$

сходится в смысле L_p, а следовательно, слабо к некоторой $F \in L_p$, но тогда ряд (1) сходится слабо к $f \in I_{-\rho}F \in S'_p$.

Заметим, что при $r>0$ ряд (1) сходится в L_p в предположении, что удовлетворяется условие б) (без а*)).

Справедливы вложения

$$L^r_p(R_n) \to L^\rho_{p'}(R_n) \qquad (1<p<p'<\infty), \tag{6}$$

$$B^r_{p\theta}(R_n) \to B^\rho_{p'\theta}(R_n) \quad \left(1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty;\ 1 \leqslant \theta \leqslant \infty,\ B^r_{p\infty}=H^r_p\right), \tag{7}$$

$$\rho=r-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right),$$

где r *— произвольное действительное число.*

В самом деле, пусть Λ_p^r обозначает один из фигурирующих в левых частях (6), (7) классов, и пусть k — такое число, что $k+\rho>0$, тогда (см. 8.2, 8.7, 9.6.2, 6.2)

$$I_k\left(\Lambda_p^r\right)=\Lambda_p^{r+k}\to\Lambda_{p'}^{\rho+k},$$

откуда

$$\Lambda_p^r\to I_{-k}\left(\Lambda_{p'}^{\rho+k}\right)=\Lambda_{p'}^{\rho},$$

и мы доказали (6) и (7).

С теоремами вложений разных измерений дело обстоит сложнее, как это будет видно ниже.

Положим $x=(u, v)$, $u=(x_1, \ldots, x_m)$, $v=(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ $(1\leqslant m<n)$, и пусть $R_m(v^0)=R_m$ обозначает линейное подпространство R_n точек (u, v^0), где v^0 фиксировано, а u произвольно.

Определение. *Пусть функция* $f\in S_p'=S_p'(R_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ *и*

$$f(u, v)=\sum_{s=0}^{\infty}q_s(u, v) \tag{8}$$

— *ее регулярное разложение, обладающее тем свойством, что при любом* s *спектр* q_s *принадлежит к спектру* f. *(Заметим, что члены ряда Валле-Пуссена подчинены этому свойству.)*

Если, каково бы ни было определенное выше регулярное разложение f, *ряд*

$$f(u, v^0)=\sum_{s=0}^{\infty}q_s(u, v^0) \tag{9}$$

сходится слабо по u *(в смысле* $S(R_m)$*) к некоторой функции* $f(u, v^0)$, *не зависящей от разложения* f, *то эта функция (от* u*) называется следом* f *на* R_m.

Отметим, что если функция $f(u, v)$ целая экспоненциального типа, то любое ее регулярное разложение есть конечная сумма (8) и, очевидно, ее след на R_m есть $f(u, v^0)$.

Ниже приводится несколько утверждений без доказательства

Теорема. *Следы функции* $f(u, v)$ *на* R_m *в смысле сделанного определения и в смысле определения в 6.3 совпадают.*

Через $\mathfrak{M}_\lambda$ обозначим всякое множество точек $x=(u, v)$ вида

$$\mathfrak{M}_\lambda=A+\{|v|<|u|^\lambda\}\qquad(\lambda>0),$$

где A есть ограниченное множество в R_n, принадлежащее к кубу $\Delta_M=\{|x_j|<a^M,\ a>1\}$.

Теорема. *Если функция* $f(u, v)\in S_p'(R_n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ *имеет спектр, принадлежащий к множеству* $\mathfrak{M}_\lambda$, *то она имеет след* $f(u, v^0)\in S_p'(R_m)$.

Более точно, для классов функций $H_p^r(R_n)$, *имеющих спектр в* $\mathfrak{M}_\lambda$, *имеют место вложения с константами, зависящими от* M *и* λ:

$$H_p^r(R_n)\to\begin{cases} H_p^{\left(r-\frac{n-m}{p}\right)\lambda}(R_n) & \left(r-\dfrac{n-m}{p}<0,\ \lambda>1\right),\\ H_p^{-\varepsilon}(R_m) & \left(r-\dfrac{n-m}{p}=0,\ \lambda\geqslant1\right),\\ H_p^{\left(r-\frac{\lambda(n-m)}{p}\right)}(R_m) & \left(0<\lambda\leqslant1,\ \textit{кроме случая}\right.\\ & \qquad\left. r-\dfrac{n-m}{p}=0,\ \lambda=1\right).\end{cases} \tag{10}$$

Обратная теорема. *Функцию*

$$\varphi(u) \in H_p^{\left(r-\frac{\lambda(n-m)}{p}\right)}(R_m) \qquad (0<\lambda\leqslant 1)$$

или

$$\varphi(u) \in H_p^{\left(r-\frac{n-m}{p}\right)\lambda}(R_m) \qquad (\lambda>1)$$

можно продолжить на R_n так, что продолженная функция $f(u, v) \in H_p^r(R_n)$ имеет спектр, принадлежащий к множеству вида $\mathfrak{M}_\lambda$, и ее след $f(u, 0) = \varphi(u)$. При этом имеют место вложения (с соответствующими неравенствами, см. 6.0 (13))

$$H_p^{\left(r-\frac{\lambda(n-m)}{p}\right)}(R_m) \to H_p^r(R_n) \qquad (0<\lambda\leqslant 1), \tag{11}$$

$$H_p^{\left(r-\frac{n-m}{p}\right)\lambda}(R_m) \to H_p^r(R_n) \qquad (\lambda>1). \tag{12}$$

Вложение (11) при $\lambda=1$ и $r-\frac{n-m}{p}>0$ уже известно (см. 6.5), но здесь ему придана более сильная формулировка, включающая утверждение о характере спектра продолжающей функции. При $\lambda>1$ и $r-\frac{n-m}{p}=0$ (обратное) вложение (12) и соответствующее (прямое) вложение (10) уже не являются взаимно обратными.

Подчеркнем, что в соотношениях (11), (12) на спектры функций исходных (вкладываемых) классов никаких ограничений не накладывается.

В случае $0<\lambda\leqslant 1$ удовлетворяющая условию теоремы продолженная функция $f(u, v)$ может быть определена в виде слабо сходящегося ряда

$$f(u, v)=\sum_{s=0}^{\infty} Q_s(u, v),$$

$$Q_s(u, v)=\varphi_s(u)\prod_{j=m+1}^{M} F(2^{(s-k)\lambda}v_j), \quad F(t)=4\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\right)^2,$$

где

$$\varphi(u)=\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(u),$$

$$\varphi_0(u)=\sigma_{2^0}f, \qquad \varphi_s(u)=\left(\sigma_{2^s}-\sigma_{2^{s-1}}\right)\varphi$$

(см. 8.9).

В случае же $\lambda>1$ продолженная функция $f(u, v)$ определяется слабо сходящимся рядом

$$f(u, v)=\sum_{s=0}^{\infty} q_{n_s}(u, v),$$

$$q_{n_s}(u, v)=\varphi_s(u)\prod_{j=m+1}^{M}\alpha_s(v_j), \quad \alpha_s(\xi)=\cos 3\cdot 2^{n_s-1}\xi F\left(2^{n_s-1}\xi\right),$$

где n_s $(s=0, 1, \ldots)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $\frac{n_s}{s_\lambda} \to 1$ $(s \to \infty)$, а функции φ_s имеют прежний смысл.

Функция $\psi(x, y)$ от двух переменных, имеющая преобразование Фурье

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} u^{-1}v^{-1} & (u, v > 2), \\ 0 & \text{для остальных } (u, v), \end{cases}$$

принадлежит к $H_2^{1/2}(R_2)$ и в то же время не имеет следа на оси $v=0$.

Доказательство. В качестве ее регулярного разложения возьмем ряд

$$\psi = \sum_{s=1}^{\infty} q_s,$$

где

$$q_s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{\Delta_s - \Delta_{s-1}} u^{-1}v^{-1}e^{i(xu+yv)}\, du\, dv,$$

и

$$\| q_s \|^2_{L_2(R_2)} \leqslant 2 \int_{2^{s-1}}^{2^s} u^{-2}\, du \int_2^{2^s} v^{-2}\, dv \leqslant 2^{-s},$$

поэтому $\psi \in H_2^{1/2}(R_2)$. Далее

$$S_N(x) = \sum_1^N q_s(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{\Delta_N} u^{-1}v^{-1}e^{ixu}\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_2^{2^N} v^{-1}\, dv \int_2^{2^N} u^{-1}e^{ixu}\, du = cN \int_2^{2^N} u^{-1}e^{ixu}\, du.$$

Функция $S_N(x)$ не сходится слабо, потому что, например, для функции φ такой, что $\tilde{\varphi} = e^{-x^2} \in S'$ имеет место

$$(S_N, \varphi) = (\tilde{S}_N, \tilde{\varphi}) = cN \int_2^{2^N} u^{-1}e^{-u^2}\, du \to \infty \quad (N \to \infty).$$

Возможно построить пример, показывающий, что в (10) нельзя заменить $\varepsilon > 0$ на $\varepsilon = 0$.

Указанные выше утверждения могут быть распространены с классов H_p^r на $B_{p\theta}^r$.

Справедливы вложения (прямые и обратные $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant m < n$)

$$B_{p1}^{\frac{n-m}{p}}(R_n) \rightleftarrows L_p(R_m) \tag{1}$$

(Прямое см. книгу О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского; обратное — М. Л. Гольдман [1] и независимо В. И. Буренков. Отметим более ранний результат Гальярдо [1]: $L_1(R_m) \rightleftarrows W_1^{n-m}(R_n)$.)

$$B_{\infty 1}^0(R_n) \rightleftarrows C(R_m)$$

(М. Л. Гольдман [1]).

Прямая теорема (1) следует из неравенств (см. 3.4.2 и 8.9.5)

$$\|f\|_{L_p(R_m)} \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \|\beta_s\|_{L_p(R_m)} \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} 2^{s\frac{n-m}{p}} \|\beta_s\|_{L_p(R_n)} = \|f\|_{B_{p1}^{\frac{n-m}{p}}(R_n)}, \tag{3}$$

где

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \beta_s(x), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \tag{4}$$

— разложение f в ряд Валле-Пуссена.

Прямая теорема (2) тоже легко получается, если учесть, что для разложения $f \in B_{\infty 1}^{0}(R_n)$ имеет место

$$\|f\|_{B_{\infty 1}^{0}(R_n)} = \sum_{s=0}^{\infty} \max_{x \in R_n} |\beta_s(x)| < \infty,$$

откуда следует, что $f \in C(R_n) \to C(R_m)$.

Обратные теоремы (принадлежащие В. И. Буренкову и М. Л. Гольдману) не тривиальны — потребовалось построение нелинейных операторов продолжения на R_n функций, определенных на R_m. Обратное вложение (1) обобщает результат Я. С. Бугрова (см. замечание к 6.7).

Трибель [1] доказал, что при $1 < p < \infty$ пространство $B_{p\theta}^r(R_n)$ имеет безусловный базис, т. е. последовательность функций $\varphi_\nu(x) \in B_{p\theta}^r(R_n)$ ($\nu = 0, 1, \ldots$), которые можно любым образом переставить, обладающую следующим свойством: всякая функция $f \in B_{p\theta}^r(R_n)$ представляется единственным образом в виде ряда $f = \sum_{0}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu$, где $c_\nu = c_\nu(f)$ — линейные функционалы от f. При этом норма $\|f\|_{B_p^r(R_n)}$ эффективно выражается через c_ν.

П. И. Лизоркин [13] получил подобные результаты для пространства B_{p}^{r*} функций периода 2π. Формулы П. И. Лизоркина выглядят просто и эффективно, и это дает возможность нам сформулировать некоторые из них, ограничившись одномерным случаем.

П. И. Лизоркин доказывает, что произвольная функция $f \in B_{p\theta}^{r*}(R_1)$ представляется в виде сходящегося в метрике $B_p^{r*}(R_1)$ ряда

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Gamma_n E_n(x), \tag{5}$$

где $\Gamma_n = \Gamma_n(f)$ — числа, $E_{-1}(x) = e^{-ix}$, $E_0(x) = 1$, $E_1(x) = e^{ix}$, и если натуральное $n > 1$ представить в виде $n = 2^{m-1} + s$, где $m = m(n) > 1$ — натуральное, а $s = s(n)$ — одно из чисел $0, 1, \ldots, 2^{m-1} - 1$, то

$$E_n(x) = E_{2^{m-1}}^{(s)+}(x) = E_{2^{m-1}}^{+}\left(x - t_{2^{m-1}-1}^{(s)}\right), \qquad t_{2^{m-1}-1}^{(s)} = \frac{2s+1}{2^{m-1}},$$

$$E_{2^m-1}^{+}(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} e^{ikx}.$$

Если же $n<-1$, то находим натуральное $m>1$ и одно из чисел $0, 1, \ldots, 2^{m-1}-1$ так, чтобы $-n=2^{m-1}+s$, и полагаем

$$E_n(x)=E^{(s)\to}_{2^{m-1}-1}(x)=E^{\to}_{2^{m-1}-1}\left(x-t^{(s)}_{2^{m-1}-1}\right),$$

$$E^{\to}_{2^{m-1}-1}(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=-2^m+1}^{-2^{m-1}} e^{ikx}.$$

Система функций $\{E_n(x)\}$ ортогональна на $[0, 2\pi]$, потому что

$$\int_0^{2\pi} E_n(x)\,\overline{E}_m(x)\,dx=\int_0^{2\pi} E_nE_{-m}\,dx=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 2^{-m}\pi, & n=m.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\Gamma_n=\frac{2^{m-2}}{\pi}\int_0^{2\pi} fE_n\,dx.$$

Имеет место равенство (см. (5))

$$\|f\|_{B^{*r}_{p\theta}}=\left(|\Gamma_0|^\theta+\left(\beta^r_{p\theta}\right)^\theta\right)^{1/\theta},$$

де

$$\beta^r_{p\theta}=\left[\sum_{m=1}^{\infty}2^{m(r-1/p)\theta}\left\{\sum_{2^{m-1}\leqslant|k|\leqslant 2^m-1}|\Gamma_k|^p\right\}^{\theta/p}\right]^{1/\theta}\qquad (1\leqslant\theta\leqslant\infty),$$

$$\beta^r_{p\theta}=\sup_{m\geqslant 1}2^{m(r-1/p)}\left\{\sum_{2^{m-1}\leqslant k\leqslant 2^m-1}|\Gamma_k|^p\right\}^{1/p}\qquad (\theta=\infty).$$

Отметим, что система экспонент $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ образует тоже базис в $B^{*r}_{p\theta}$, однако не безусловный.

П. И. Лизоркин иа основании этих результатов получим просто формулируемые условия, необходимые и достаточные для того, чтобы ряд Фурье $\sum c_ke^{ikx}\in B^{*r}_p$ переходил в ряд $\sum_{-\infty}^{\infty}\tau_kc_ke^{ikx}\in B^{*r}_{p\theta}$, т. е. чтобы $B^{*r}_p\to B^{*r}_{p'\theta}$. В упомянутой работе Трибеля мы находим условия для перехода $B^r_{p\theta}(R_n)\to$ $\to B^r_{p\theta}(R_n)$ при помощи операции $\widehat{\tau(x)\tilde{f}(x)}$.

8.10—8.10.1. Изложенные здесь факты, отиосищиеся к разложениям функций классов $B^r_{p\theta}$ в ряды по суммам Дирихле в случае $1<p<\infty$, близки к результатам П. И. Лизоркина [9], а также к результатам М. Д. Рамазанова [1], исследовавшего с этой точки зрения классы функций, несколько отличные от $B^r_{p\theta}$.

К главе 9

9.1. Пусть

$$1<p<q<\infty, \tag{1}$$

$$1\leqslant m\leqslant n,\quad \rho=r-\frac{n}{p}+\frac{m}{q}\geqslant 0 \tag{2}$$

и r целое. Тогда из 9.1 (4) следует вложение

$$W_p^r(R_n) = L_p^r(R_n) \to L_q^\rho(R_m) \to W_q^{[\rho]}(R_m) \tag{3}$$

(С. Л. Соболева с дополнениями В. И. Кондрашова и В. И. Ильина, см. 6.1). При ρ нецелом и $p=q$ справедливо (см. 9.3 (1), 6.2 (4), 6.5 (1'))

$$L_p^r(R_n) \to H_p^r(R_n) \to H_p^\rho(R_m) \to W_p^{[\rho]}(R_m).$$

Интересен случай $\rho=0$, $p=1<q<\infty$; в этом случае для натурального r $\left(L_p^r = W_p^r\right)$ доказано (С. Л. Соболевым [4] при $m=n$ и Э. Гальярдо [2] при $m<n$), что вложение (3) также остается верным.

9.2.2. Теорема о производных доказана при $p=2$ С. Н. Бернштейном [1], стр. 98, для $l_1=l_2=2$ и Л. Н. Слободецким [3] в общем случае; при $1<p<\infty$ и целых $l=l_1=\ldots=l_n$—А. И. Кошелевым [1], и любых $l>0$—П. И. Лизоркиным [12]; при произвольных l в периодическом случае—Ю. Л. Бессоновым [1, 2].

9.4 — 9.6. Излагаемые здесь результаты, относящиеся к анизотропным классам $L_p^{\boldsymbol{r}}$, в основном принадлежат П. И. Лизоркину, опубликовавшему их без доказательства в заметке [10]. Он предоставил в мое распоряжение некоторые рукописные материалы, которые положены в основу моего изложения. Я всюду сводил вопрос к операции I_r, в то время как П. И. Лизоркин в соответствующих случаях действовал «чистыми» лиувиллевскими производными (см. 9.2.3). Основная цель этих исследований получить интегральные представления для (функций) анизотропных классов $L_p^{\boldsymbol{r}}$ при любом $\boldsymbol{r} \geqslant 0$ и на их основе получить полную систему теорем вложеняя для этих классов. Для изотропных классов интегральные представления этого рода были получены в предыдущей главе. Нужные оценки возникали там из фактов, относящихся к теории ядер Бесселя—Макдональда. В анизотропном случае соответствующие ядра усложняются. Конечно, теоремы вложения в изотропном случае получаются из соответствующей анизотропиой теории, если положить $r_1=\ldots=r_n=r$. При целых r, $\boldsymbol{r}$ получим соответствующие результаты для W-классов, в частности теоремы вложения С. Л. Соболева, с которых исторически началась эта миогомерная теория.

9.4.1. Оценки (2), (3) для $I_{-l}G_{\boldsymbol{r}}(x)$ эквивалентны в случае $r_1=\ldots=r_n=r$ изотропным оценкам 8.1 (7).

9.5.1 — 9.5.2. Теоремы 9.5.1 и 9.5.2 во всей их полноте получены П. И. Лизоркиным [12]. Они содержат в себе ряд предшествующих результатов, относящихся к случаю целых $\boldsymbol{r}$ $\left(W_p^{\boldsymbol{r}} = L_p^{\boldsymbol{r}}\right)$ и произвольных $\boldsymbol{r}$ при $p=2$, Ароншайна [1], Л. Н. Слободецкого [1] (см. еще В. М. Бабич и Л. Н. Слободецкий [1]), Гальярдо [1], О. В. Бесова [2], П. И. Лизоркина [11], С. В. Успенского [1] (подробнее см. обзор С. М. Никольского [12]).

Сюда же относятся соответствующие результаты для изотропных классов $L_p^{\boldsymbol{r}} = L_p^{r,\ldots,r}$, принадлежащие Стейну [1], Ароншайну, Мулле и Шептицкому [1] и П. И. Лизоркину [3] (подробнее см. В. И. Буренков [3]).

Эти результаты были получены различными методами.

В этой книге при продолжении функции с R_m на R_n применялся метод разложения ее в ряд по целым функциям экспоненциального типа и последующего наращивания его членов специальными функциями (С. М. Никольский [5]). В этих целях другие авторы также применяли другой метод, основанный на усреднении функции по Стеклову (см. А. А. Дезин [1], Гальярдо [1]).

Отметим достаточно простое прямое доказательство теоремы вложения разных измерений в анизотропном случае для целых классов $L_p^{\boldsymbol{r}} = W_p^{\boldsymbol{r}}$, принадлежащее В. А. Солонникову [1].

9.6.2. Теорема вложения С. Л. Соболева (с дополнениями В. И. Кондрашова и В. П. Ильина) (см. 6.1 и замечание к 6.1) входит в теорему 9.6.2 как частный случай и в терминах (целых) классов W_p^l является предельно точной.

В изотропном случае дробных l теорема 9.6.2 доказана Стейном [1] и П. И. Лизоркиным [17] и в анизотропном (приведенном в тексте) случае П. И. Лизоркиным [12].

В статье Садоски и Котляра [1] определены для рациональных векторов $r \geqslant 0$ классы, эквивалентные классам L_p^r, и для них доказаны некоторые теоремы вложения.

К главе 10

10.1. Первые систематические исследования по теории весовых классов принадлежат Л. Д. Кудрявцеву. Они изложены в его монографии [2]. В частности, Л. Д. Кудрявцев получил неравенства 10.3 (1) с точностью до ε и теоремы вложения о граничных функциях весовых классов в H-классы и им обратные для полупространства. Выражение граничных функций в терминах H-классов позволяло получить эти теоремы только с точностью до ε.

Мы рассматриваем ограниченные области Ω с гладкой $(n-1)$-мерной границей, хотя в литературе известны соответствующие исследования для m-мерных границ (или частей границ).

Отметим обзоры по весовым классам С. М. Никольского [12], а также О. В. Бесова, В. П. Ильина, Л. Д. Кудрявцева, П. И. Лизоркина и С. М. Никольского ([1], стр. 38—64), где рассматриваются также приложения этой теории к краевым задачам математической физики.

10.2. Теория покрытия области с гладкой границей регулярными мостами принадлежит С. М. Никольскому [19].

10.3. Вложение 10.3 (1) получено С. В. Успенским [1] для полупространства R_n. В этом случае, вследствие неограниченности R_n надо считать $\alpha_l = \alpha + l$ (вместо $\alpha_l \leqslant \alpha + l$). Для ограниченной области с гладкой границей см. С. М. Никольский [24].

10.4. Вложение 10.4 (1) сформулировано в статье С. В. Успенского [3], обзоре С. М. Никольского [12] $\left(\text{теорема 38, где считалось, что } -\frac{1}{p} \leqslant r + \alpha - \frac{1}{p} < r\right)$. Доказательства в п. 10.4.1 в существенном принадлежат В. В. Шанькову.

10.5. — 10.6. Вложение 10.5 (1) и ему обратное 10.6 (1) впервые получено А. А. Вашариным [1], [2] для класса $W_{2\alpha}^1(\Omega)$ и П. И. Лизоркиным [1] для более общего класса $W_{p\alpha}^1(\Omega)$ при условии (в нашей терминологии) $0 < 1 + \alpha$.

В заметках С. В. Успенского [3] и П. И. Лизоркина [2] эти теоремы сформулированы в общем виде для полупространства, если исключить случай целых $r + \alpha - \frac{1}{p}$, который на этом этапе был еще не выяснен. С. В. Успенский [3] сформулировал также соответствующие теоремы и для области с границей $\Gamma \in C^{(r+1)}$ при $p > 2$ для прямой теоремы и $1 < p < 2$ для обратной.

Теоремы 10.5 (1), 10.6 (1) затем полностью доказаны (в том числе и для $r + \alpha - \frac{1}{p}$ целых) С. В. Успенским [1]. Приведенное здесь доказательство прямой теоремы несколько иное. При доказательстве же обратной теоремы для прямоугольника мы существенно следовали рассуждениям С. В. Успенского, взявшего в качестве продолжающей на R_n^+ (граничные значения) функции гармоническую. Мы отдаем себе отчет, что использование этого результата при переходе от прямоугольника к области с кривой границей оказалось возможным лишь, если $\Gamma \in C^{(r)}$. Между тем как прямая теорема доказана при $\Gamma \in C^{(s_0+1)}$.

Мы не даем здесь доказательство более сложных теорем 10.1 (13), (14′) и отмечаем только статьи Л. Д. Кудрявцева [4] и Ю. С. Никольского [2], где они доказываются для полупространства в несколько другой ситуации.

10.8. Неравенство 10.8 (1) сформулировано в заметке С. М. Никольского и П. И. Лизоркина [1] и доказано для произвольного r С. М. Никольским [21]. Автор получил совместно с П. И. Лизоркиным соответствующее одномерное неравенство, которое оказалось нужным при исследовании одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Неравенство 10.8 (1) можно рассматривать как усиление невесового ($\alpha=0$) неравенства

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\left\{\sum_{l+s<r} \|\varphi_s^{(l)}\|_{L_p(\Gamma)} + \|f\|_{w_p^r(\Omega)}\right\}, \tag{1}$$

где сумма взята по l, s ($0 \leqslant l+s<r$). Неравенство (1) при $p=2$, $r=1$, $\varphi_0=0$ впервые доказано В. А. Стекловым [1] (см. В. С. Владимиров и И. И. Маркуш [1]), который при этом установил, что наименьшая входящая в это неравенство константа $c=c(\Omega)=\lambda_1$ есть наименьшее собственное значение проблемы $\Delta u-\lambda u=0$, $u|_\Gamma=0$.

ЛИТЕРАТУРА

Агмон (Agmon F.)

1. The L_p approach to the Dirichlet problem, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, ser. 3, **13**, № 4, 1959, 405—448.

Александров П. С.

1. Введенне в общую теорию множеств и функций, М., Гостехиздат, 1948, 1—411.

Александров П. С. и Колмогоров А. Н.

1. Введение в теорию функций действительного переменного, М.—Л., изд. 3, 1938, 1—268.

Аманов Т. И

1. Граничные функции классов $H_p^{r_1, \ldots, r_n}$ и $H_{*p}^{r_1, \ldots, r_n}$, Изв. АН СССР, сер. матем., **19**, № 1, 1955, 17—32.
2. К решению бигармонической задачи, ДАН СССР **87**, 1953, 389—392.
3. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S_{p\theta}^r B(R_n)$ и $S_{*p\theta}^r B$ $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi)$, Труды МИАН СССР 77, 1965, 5—34.
4. Исследование свойств классов функций с домнннрующими смешанными производными, теоремы представления, вложения, продолжения и интерполяции. Автореферат докт. диссертации, Новосибирск, 1967.

Аронштайн (Aronszajn N.)

1. Boundary values of functions with finite Dirichlet integral, Confer. partial diff. equat. Studies in eigenvalue problems, Univ. of Kansas, 1955.

Аронштайн и Смит (Aronszajn N. and Smith K. T.)

1. Functional spaces and functional complection, Ann. Inst. Fourier **6**, 1955—1956 (1956), 125—185.
2. Theory of Bessel potentials. I, Ann. Inst. Fourier **11**, 1961, 385—475.

Аронштайн, Мулла и Шептицкий (Aronszajn N., Mulla F., Szeptycki P.)

1. On spaces of potentials connected with L_p classes, Ann. Inst. Fourier **13**, № 2, 1963, 211—306.

Арцела́ (Arzela C.)

1. Existenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali, Acc. delle Science di Bologna **6**, № 3, 1936.

Асколи (Ascoli G.)

1. Le curve limiti di una varieta data di curve, Memoria Acc. del. Lincei **3**, № 18, 1884, 521—586.

Ахиезер Н. И.

1. Лекции по теории аппроксимации, М., «Наука», 1965, 1—407.

Бабич В. М.

1. К вопросу о распространении функций, УМН **8**, вып. 2 (54), 1953, 111—113.

Бабич В. М. и Слободецкий. Л Н.
1. Об ограниченности интеграла Дирихле, ДАН СССР **106**, 1956, 604—606.
Банах (Banach S.)
1. Theorie des operations lineaires, Warszawa, 1932, 1—254.
2. Курс функціонального аналізу, Київ, «Радянська школа», 1948, 1—216.
Бари Н. К.
1. Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., **18**, 1954, 59—176.
Бахвалов Н. С.
1. Теоремы вложения для классов функций с несколькими ограниченными производными, Вестник МГУ, матем., механ., № 3, 1963, 7—16.
Беппо Леви (Beppo Levi)
1. Sul principio di Dirichlet, Rend. Palermo **22**, 1906, 293—359.
Бернштейн С. Н.
1 Собрание сочинений, т. I, М., Изд-во АН СССР, 1952, 1—581.
2. Собрание сочинений, т. II, М., Изд-во АН СССР, 1954, 1—628.
Бесов О. В.
1. О некоторых свойствах гармонических функций, заданных на полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем., **20**, 1956, 469—484.
2. О некотором семействе функциональных пространств, Теоремы вложения и продолжения, ДАН СССР **126**, 1959, 1163—1165.
3. О некоторых условиях принадлежности к L_p производных периодических функций, Научные докл. высш. шк., № 1, 1959, 12—17.
4. О продолжении функций с сохранением свойств интегрального модуля гладкости второго порядка, Матем. сб. **58**, 1962, 673—684.
5. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения, Труды МИАН СССР **60**, 1961, 42—81.
6. О теоремах вложения пространств дифференцируемых функций, УМН **16**, № 5, 1961, 207—208.
7. Один пример к теории теорем вложения, ДАН СССР **143**, 1962, 1014—1016.
8. О плотности финитных функций в $\mathscr{L}^l_{p,\theta}$ и распространении функций, Труды МИАН СССР **89**, 1967, 18—30.
9. Продолжение функций из L^l_p и W^l_p, Труды МИАН СССР **89**, 1967, 5—17.
10. К теории вложения и продолжения классов дифференцируемых функций, Автореферат докт. диссертации, Матем. заметки **1**, № 2, 1967, 235—244.
11. Об одном семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения, Автореферат канд. диссертации, М., 1960.
12. О некоторых свойствах пространств $H_p^{r_1, \ldots, r_n}$, Изв. Высш. уч. завед., сер. матем., № 1 (14), 1960, 16—23.
Бесов О. В. и Ильин В. П.
1. Естественное расширение класса областей в теоремах вложения, Матем. сб. **75** (117) : 4, 1968, 483—495.
Бесов О. В., Ильин В. П., Кудрявцев Л. Д., Лизоркин П. И. и Никольский С. М.
V 1. Теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных. В кн.: Дифференциальные уравнения в частных производных, М. «Наука», 1970, 1—252.
V Бесов О. В., Ильин В. П. и Никольский С. М.
1. Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., «Наука», 1975, 1—480.

Бессонов Ю. Л.

1. Приближение периодических функций, принадлежащих классам $W_{p\theta}^{r_1, r_2}$, суммами Фурье, ДАН СССР **147**, 1962, 519—522.
2. О существовании смешанных производных дробного порядка в L_p, УМН **19**, вып. 4 (118), 1964, 163—170.

Бохнер С.

1. Лекции об интегралах Фурье, М., Физматгиз, 1962, 1—360.

Бугров Я. С.

1. Задача Дирихле для круга, ДАН СССР **115**, 1957, 639—642.
2. Свойства полигармонических функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 22, 1958, 491—514.
3. Полигармонические функции в полуплоскости, Матем. сб. **60**, 1963, 486—498.
4. К теоремам вложения для H-классов С. М. Никольского, Сибирск. матем. ж. **4**, 1963, 1012—1028.

Буренков В. И.

1. Локальные леммы для некоторых классов дифференцируемых функций, Труды МИАН СССР **77**, 1965, 65—71.
2. Некоторые свойства классов $W_p^{(r)}(\Omega)$ и $W_p^{(r,\, r)}(\Omega)$ при $0<r<1$, Труды МИАН СССР **77**, 1965, 72—88.
3. Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве, Итоги науки, Математический анализ, 1965, М., Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1966, 71—155.
4. Некоторые свойства классов дифференцируемых функций в связи с теоремами вложения и продолжения, Автореферат канд. диссертации, М., 1966.
5. О теоремах вложения для области $R_k=\left\{\alpha_i h<x_i^{k_i}<\beta_i h,\ 0<h<1\right\}$, Матем. сб. **75** (117) : 4, 1968, 496—501.

Валле-Пуссен (Ch. J. de la Vallée Poussin)

1. Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919, 1—150.

Ватсон Г.

1. Введение в теорию интегралов Фурье. Теория бесселевых функций, 1, М., ИЛ, 1949, 1—798.

Вашарин А. А.

1. Граничные свойства функций, имеющих конечный интеграл Дирихле с весом, ДАН СССР **117**, № 5, 1957, 742—744.
2. Граничные свойства функций класса $W_2^1(\alpha)$ и их приложение к решению одной краевой задачи математической физики, Изв. АН СССР, сер. матем., **23**, 1959, 421—454.

Векуа И. Н.

1. Обобщенные аналитические функции, М., Физматгиз, 1959, 1—628.

Владимиров В. С.

1. Методы теории функций многих комплексных переменных, М., «Наука», 1964, 1—411.

Владимиров В. С. и Маркуш И. И.

1. Академик В. А. Стеклов, М., «Знание», 1973, 1—63.

Гальперин И.

1. Введение в теорию обобщенных функций. На основе лекций Л. Шварца, М., ИЛ, 1954, 1—64.

Гальярдо (Gagliardo E.)

1. Caratterizazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, Rend. Semin. matem. un-ta di Padova **27**, 1957, 284—305.

Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е.
1. Обобщенные функции, вып. 1, 1—439; вып. 2, 1—337, М., 1959.
Головкин К. К.
1. О невозможности некоторых неравенств между функциональными нормами, Труды МИАН СССР **70**, 1964, 5—25.
2. Об эквивалентных нормировках дробных пространств, Труды МИАН СССР **66**, 1962, 364—383.
Гольдман М. Л.
1. Описание пространства следов для обобщенного гельдерова класса, ДАН СССР **231**, № 3, 1976, 13—16.
Гончаров В. Л.
1. Теория интерполирования и приближения функций, изд. 2, М., Гостехиздат, 1954, 1—328.
Гюнтер Н. М.
1. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., Гостехиздат, 1953, 1—416.
Дезин А. А.
1. К теоремам вложения и задаче о продолжении, ДАН СССР **88**, 1953, 741—743.
Дени и Лионс (Deny J., Lions J. L.)
1. Espaces de Beppo Levi et applications, C. R. Acad. Sc. **239**, 1954, 1174—1177.
2. Les espaces de type de Beppo Levi, Ann Inst. Fourier **5**, 1953—1954 (1955), 305—370.
Джабраилов А. Д.
1. О некоторых функциональных пространствах. Прямые и обратные теоремы вложения, ДАН СССР **159**, 1964, 254—257.
Джафаров А. С.
1. О некоторых свойствах функций многих переменных. В сб. «Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного», М., Физматгиз, 1960, 537—544.
Джексон (Jackson D.)
1. Über die Genauigkeit des Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegeben Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung, Diss., Göttingen, 1911.
2. The theory of approximation, Amer. Math. Soc. Colloqium Publications **11**, 1930.
Дзядык В. К.
1. О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица в метрике L_p, Матем. сб. **40** (82), 1956, 239—242.
Зигмунд (Zigmund A.)
1. Smooth functions, Duke Math. J. **12**, 1945, 47—76.
2. Тригонометрические ряды, М., «Мир», 1965, т. 1, 1—615; т. II, 1—537.
3. Тригонометрические ряды (старое изд.), М., ГОНТИ, 1939, 1—323.
Ибрагимов И. И.
1. Экстремальные свойства целых функций конечной степени, Баку, 1962, 1—315.
Ивенс (Evans G. C.)
1. Note on a theorem of Bochner, Amer. J. of Math. **50**, 1928, 123—126.
2. Compliments of potential theory. II, Amer. J. of Math. **55**, 1933, 29—49.
Ильин В. П.
1. Об одной теореме Г. Х. Харди и Дж. Е. Литтлвуда, Труды МИАН СССР **53**, 1959, 128—144.
2. О теореме вложения для предельного показателя, ДАН СССР **96**, 1954, 905—908.

3. Некоторые неравенства для дифференцируемых функций многих переменных, ДАН СССР **135**, 1960, 778—782.
4. К вопросу о неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных, ДАН СССР **150**, 1963, 975—977.
5. О неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных, Труды МИАН СССР **84**, 1965, 144—173.
6. Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^l(g)$, Сибирск. матем. ж. **7**, 1967, 573—586.
7. Оценки функций, имеющих производные, суммируемые с данной степенью на гиперплоскостях различных размерностей, ДАН СССР **78**, 1951, 633—636.
8. О полной непрерывности оператора вложения для случая неограниченной области, ДАН СССР **135**, 1960, 517—519.
9. Некоторые интегральные неравенства и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Матем. сб. **54**, 1961, 331—380.

Ильин В. П. и Солонников В. А.
1. О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных, ДАН СССР **136**, 1961, 538—541.
2. О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных, Труды МИАН СССР **66**, 1962, 205—226.

Калкин (Calkin J. W.)
1. Functions of several variables and absolute continuity. I, Duke Math. J. **6**, 1940, 176—186.

Кальдерон (Calderón A. P.)
1. Singular integrals, Notes on a course taught at the Massachussets Institute of Technology, 1959.
2. Lebesgue spaces of differentiable functions, Conference on partial diff. equations, Univ. of California, 1960.
3. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions, Partial Diff. Equations, Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 1961, 33—49.

Квад (Quade E.)
1. Trigonometric approximation in the mean, Duke Math. J. **3**, 1937.

Келлог (Kellog O. D.)
1. On the derivatives of harmonic functions on the boundary, Trans. Amer. Math. Soc. **33**, № 2, 1931.

Киприянов И. А.
1. Об одном классе теорем вложения с весом, ДАН СССР **147**, 1962, 540—543.

Колмогоров А. Н. (Kolmogoroff A.)
1. Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz in Mittel, Götting. Nachr., 1931, 60—63.

Колмогоров А. Н. и Фомин С. В.
1. Элементы теории функций и функционального анализа, М., «Наука», 1968, 1—496.

Кондрашов В. И.
1. О некоторых свойствах функций пространства L_p, ДАН СССР **48**, 1945, 563—566.
2. Поведение функций из L_p^ν на многообразиях различных размерностей, ДАН СССР **6**, 1950, 1005—1012.

Конюшков А. А.
1. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье, Матем сб. **44** (86), 1958, 53—84.

Кошелев А. И.
1. Дифференцируемость решений некоторых задач теории потенциала, Матем. сб. **32** (74), 1953, 653—664.

Кудрявцев Л. Д.
1. Об одном обобщении теоремы С. М. Никольского о компактности классов дифференцируемых функций, УМН **9**, № 2 (59), 1954, 111—120.
2. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений, Труды МИАН СССР **55**, 1959, 1—181.
3. Теоремы вложения для весовых пространств и их приложения к решению задачи Дирихле. Сб. «Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций», Баку, АН Азерб. ССР, 1965, 493—501.
4. Теоремы вложения для классов функций, определенных на всем пространстве или полупространстве. II, Матем. сб. **70** (112) : 1, 1966, 3—35.

Куфнер (Kufner A.)
1. Einige Eigenshaften der Sobolevschen Räume mit Belegungsfunction, Чехословацкий матем. журнал **15**, 1965, 597—620.

Лизоркин П. И.
1. Граничные свойства некоторого класса функций, ДАН СССР **126**, № 4, 1959, 703—706.
2. Граничные свойства функций из «весовых классов», ДАН СССР **132**, № 3, 1960, 514—517.
3. Теоремы вложения для функций из пространства L_p, ДАН СССР **143**, 1962, 1042—1045.
4. Пространства $L_p^r(\Omega)$. Теоремы продолжения и вложения, ДАН СССР **145**, 1962, 527—530.
5. Характеристика граничных значений функций из $L_p^r(E_n)$ на гиперплоскостях, ДАН СССР **150**, 1963, 984—986.
6. (L_p, L_q) — мультипликаторы интегралов Фурье, ДАН СССР **152**, 1963, 808—811.
7. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(R_n)$. Теоремы вложения, Матем. сб. **60** (102), 1963, 325—353.
8. Формулы типа Хиршмана и соотношения между пространствами $B_p^r(E_n)$ и $L_p^r(E_n)$. Матем. сб. **63**, 1964, 505—535.
9. О преобразовании Фурье в пространствах Бесова. Нулевая шкала $B_{p\theta}^0$, ДАН СССР **163**, 1965, 1318—1321.
10. Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных, Изв. АН СССР **29**, 1965, 109—126.
11. Граничные свойства функций из весовых классов, ДАН СССР, **132**, 1960, 514—517.
12. Неизотропные бесселевы потенциалы. Теоремы вложения для пространства Соболева $L_p^{r_1, \dots, r_n}$ с дробными производными, ДАН СССР **170**, 1966, 508—511.
13. О базисах и мультипликаторах в пространствах $B_{p\theta}^r$, Труды МИАН СССР **143**, 1977, 88—104.

Лионс и Мадженес (Lions J. L., Magenes E.)
1. Problèmes aux limites non homogènes (III), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. 3, **15**, 1961, 39—101.
2. Problèmes aux limits non homogène et applications. I, 1—372, Paris, 1968.

Литтлвуд и Пэли (Littlewood J. E. and Paley R. E. A. C.)
1. Theoremes on Fourier series and power series, I, J. London Math. Soc. **6**, 1931, 230—233; II, Proc. London Math. Soc. **42**, 1936, 52—89; III, тот же журнал **43**, 1937, 105—126.

Лозинский С. М.
1. On convergence and summability of Fourier series and interpolation processes, Матем. сб. **14** (56), 1944, 175—268.
2. Обобщение теоремы С. Н. Бернштейна о производной тригонометрического полинома, ДАН СССР **55**, 1947, 9—12.

Люстерник Л. А. и Соболев В. И.
1. Элементы функционального анализа, М., «Наука», 1965, 1—520.

Марцинкевич (Marcinkievicz J.)
1. Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, Studia Math. **8**, 1939, 78—91.

Маршу (Marchoud A.)
1. Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles, J. Math. pures et appl. **6**, 1927, 337—425.

Матвеев И. В. и Никольский С. М.
1. О склеивании функций класса $H_p^{(\alpha)}$, УМН **18**, № 5, 1963, 175—180.

Митягин Б. С.
1. О некоторых свойствах функций двух переменных, Вестник МГУ, сер. матем., мех., астр., физ., хим., № 5, 1959, 137—152.

Михлин С. Г.
1. Интегралы Фурье и кратные сингулярные интегралы, Вестник ЛГУ, сер. № 7, 1957, 143—155.

Мозжерова Н. И.
1. Граничные свойства гармонических функций в трехмерном пространстве, ДАН СССР **118**, 1958, 636—638.

Монтель (Montel P.)
1. Sur les polynomes d'approximation, Bull. Soc. Math. de France, 1918, 151—192.

Морри (Morrey C. B.)
1. Functions of several variables and absolute continuity. II, Duke Math. J. **6**, № 1, 1940, 187—215.

Натансон И. П.
1. Теория функций вещественной переменной, М., «Наука», 1974, 1—480.
2. Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949, 1—688.

Нечас (Nečas J.)
1. Sur les solutions des équations élliptiques aux dérivées partielles du second ordre avec intégrale de Dirichlet non bornée, Czechoslov. Math. J. **10**, 1960, 283—298.
2. Les méthodes directes en théorie des équations élliptiques, Académia, éditions de l'académie Tchécoslovaque des Sciences, Prague, 1967, 1—351.

Никодим (Nikodym O. M.)
1. Sur une classe de fonctions considerées dans le problème de Dirichlet, Fund. Math. **21**, 1933, 129—150.

Никольский С. М.
1. Теория приближения функций, 4, I, Функциональный анализ, Днепропетровский университет, 1947, 1—71.
2. Обобщение одного предложения С. Н. Бернштейна о дифференцируемых функциях многих переменных, ДАН СССР **59**, 1948, 1533—1536.
3. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды МИАН СССР **38**, 1951, 244—278.

4. К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом, ДАН СССР **33**, 1953, 409—411.
5. Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Матем. сб. **33** (75), 2, 1953, 261—326.
6. Об одном неравенстве для периодических функций, УМН **11**, № 1 (67), 1956, 219—222.
7. О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств, Матем. сб. **40** (82), 1956, 243—268.
8. Компактность классов $H_p^{r_1, \ldots, r_n}$ функций многих переменных, Изв. АН СССР **20**, 1956, 611—622.
9. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками, I, Матем. сб. **40** (82), 1956, 303—318; II, **44** (86), 1957, 127—144; III, **45** (87), 1958, 181—194.
10. Теорема вложения для функций с частными производными, рассматриваемыми в различных метриках, Изв. АН СССР, сер. матем., **22**, 1958, 321—336.
11. Некоторые свойства дифференцируемых функций, заданных на n-мерном открытом множестве, Изв. АН СССР, сер. матем., **23**, 1959, 213—242.
12. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных, УМН **16**, № 5 (101), 1961, 63—114.
13. Исправление к статье «Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях», Матем. сб. **57** (99), 1962, 527.
14. Об одной задаче С. Л. Соболева, Сибирск. матем. ж. **3**, 1962, 845—851.
15. Теорема о представлении одного класса дифференцируемых функций многих переменных посредством целых функций экспоненциального типа, ДАН СССР **150**, 1963, 484—487.
16. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера, Сибирск. матем. ж. **4**, 1963, 1342—1364.
17. Конструктивное представление нулевых классов дифференцируемых функций многих переменных, ДАН СССР **170**, 1966, 542—545.
18. Интегральное представление и изоморфизм классов дифференцируемых функций многих переменных. Третья летняя математическая школа (конструктивная теория функций), г. Кацевели, июнь — июль 1965, Киев, «Наукова думка», 1966, 135—238.
19. Об одном методе покрытия области и неравенства для многочленов от многих переменных, Mathematica Cluj **8**, № 2, 1966, 345—356.
20. Some boundary problem for the equations with strong degeneration. Acta Fac. Rerum Naturlium Univ., Comeniance, Equadiff II, **17**, 1967, 121—127. Slovenske pedagogicke nakladatelstvo, Bratislava, 1969.
21. Об одном неравенстве для функций из весовых классов. Математические структуры, вычислительная математика, математическое моделирование, София, 1975, 131—141.
22. Курс математического анализа, изд. 2, М., «Наука», 1975, т. I, 1—431; т. II, 1—407.
23. О краевой задаче первого рода с сильным вырождением, ДАН СССР **222**, № 2, 1975, 281—283.
24. Об одной теореме вложения для функций весовых классов, Проблемы вычислительной математики и математической физики, М., «Наука», 1977.

Никольский С. М. и Лизоркин П. И.

1. О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением на границе, ДАН СССР **159**, № 3, 1964, 512—515.

Никольский, Лионс и Лизоркин (Nikolsky S. M., Lions J. L. and Lisorkin P. I.)
1. Integral representation and isomorphism properties of some classes of functions, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. 3, **19**, № 11, 1965, 127—178.

Никольский Ю. С.
1. Граничные значения функций из весовых классов, ДАН СССР **164**, 1965, 503—506.
2. К теоремам вложения весовых классов, Труды МИАН СССР **105**, 1969, 178—189.

Петровский И. Г. и Смирнов К. Н.
1. Об условиях равностепенной непрерывности семейств функций, Бюлл. МГУ, секц. А, вып. 10, 1938, 1—15.

Пиконе (Picone M.)
1. Sulla derivazione parziale per serie, Bol. Un. Mat. It. III, № 5, 1950, 24—33.

Пилика (Pilika P.)
1. Граничные функции классов $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{(p_1, \ldots, p_n)}$, ДАН СССР **128**, 1959, 677—679.

Планшерель и Полиа (Plansherel M. et Polya G.)
1. Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples, Comment. Math.—Helvetici; I, 1937, 224—248; II, 1938, 110—163.

Полиа и Сеге
1. Задачи и теоремы из анализа, часть 1, М., Гостехиздат, 1937.

Пуччи (Pucci C.)
1. Compatezza du sucsesione di funzioni e derivabilita delle funzioni imita, Annali di Mathematica **37**, 1954, 1—25.

Пэли и Винер (Paley H. E. A. C. and Wiener N.)
1. Fourier transforms in the complex domain, 1934.

Рамазанов М. Д.
1. Априорные оценки типа L_p решений параболических уравнений, ДАН СССР **161**, 1965, 530—533.

Реллих (Rellich F.)
1. Ein Satz über mittlere Konvergenz, Gött. Nachr., 1930, 30—35.

Рис М. (Reisz M.)
1. Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier, C. r. Acad. Sc. **178**, 1924, 1464—1467.
2. Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeit. **27**, 1927, 218—244.

Садоски и Котляр (Sadosky C., Cotlar M.)
1. On quasi homogeneous Bessel Potentional Operators. Proceedings of symposium in pure mathematics. Singular Integrals. Providence, v. X, 1967, 275—287.

Сайвин (Civin P.)
1. Inequalities for trigonometric integrals, Duke Math. J. **8**, 1941, 656—665.

Слободецкий Л. Н.
1. Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложения к краевым задачам для дифференциального уравнения в частных производных, ДАН СССР **118**, 1958, 243—246.
2. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А И. Герцена **197**, 1958, 54—112.
3. Оценки решений эллиптических и параболических систем, ДАН СССР **120**, 1959, 468—471.

Смирнов В. И.
1. Курс высшей математнки, т. V, Гостехиздат, 1947, 1—584.

Смит (Smith K. T.)
1. Inequalities for formally positive integro-differential forms, Bull. Amer. Math. Soc. **67**, 1961, 368—370.

Соболев С. Л.
1. Задача Коши в пространстве функционалов, ДАН СССР **3**, 1935, 291—294.
2. Méthode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Матем. сб. **1** (43), 1936, 39—72.
3. Об одной теореме функционального анализа, Матем. сб. **4** (46), 1938, 471—497.
4. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950, 1—255; Новосибирск, 1962, 1—255.
5. Некоторые обобщения теорем вложения, Fund. Math. **47**, 1959, 277—324.

Солнцев Ю. К.
1. Об оценке смешанной производной в $L_p(g)$, Труды МИАН СССР **64**, 1961, 211—238.

Солонников В. А.
1. Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа, Труды МИАН СССР **70**, 1964, 132—212.

Сонин Н. Я. (Sonin N. Ja.)
1. Recherches sur les fonctions cylindriques et le dévelopment des fonctions continues en séries, Math. Ann. **16**, 1880, 1—80.

Стейн (Stein E. M.)
1. The characterization of functions arising as potentials, Bull. Amer Math. Soc., I, **67**, 1961, 102—104; II, **68**, 1962, 577—584.

Стеклов В. А.
1. О разложении данной функции в ряд по гармоническим функциям, Сообщения Харьковского математического общества **2**, серия 5, № 1—2, 1896, 60—73.

Стечкин С. Б.
1. О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., **15**, 1951, 219—242.
2. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами, Изв. АН СССР, сер. матем., **20**, 1956, 197—206.

Сунь Юн-шен
1. О наилучшем приближении классов функций, представленных в форме свертки, ДАН СССР **118**, 1958, 247—250.

Тиман А. Ф.
1. Теория приближения функций действительного переменного, М., Физматгиз, 1960, 1—624.

Титчмарш Е.
1. Введение в теорию интегралов Фурье, М., Гостехиздат, 1948, 1—479.

Тонелли (Tonelli L.)
1. Sulla quadratura dell superficie, Rend. R. Acad. Lincei. **6**, № 3, 1926, 633—638.

Трибель Г. (Triebel H.)
1. Multipliers and unconditional Schauder basis in Besov spaces, Препринт.

Тулайков А. Н.
1. Zur Kompaktheit in Raum L_p für $p=1$, Gött. Nachr., 1933, 167—170.

Тэйблсон (Taibleson M. N.)
1. Lipshitz classes of functions and distributions in E_n, Bull. Amer. Math. Soc. 69, 1965, 487—493.
2. On the theory of Lipshitz spaces of distributions on Euclidean n-space, I, Principal properties, J. Math and Mech **13**, № 3, 1964, 407—479.

Уитни (Whitney H.)
1. Analitic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans Amer Math Soc., I, **36**, 1934, 63—89; II, **40**, 1946, 309—317.

Ульянов П. Л.

1. О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, УМН 8, № 6 (58), 1953, 133—141.

Успенский С. В.

1. Свойства классов $W_p^{(r)}$ с дробной производной на дифференцируемых многообразиях, ДАН СССР **132**, 1960, 60—62.
2. Теорема о вложении классов С. Л. Соболева W_p^r дробного порядка, ДАН СССР **130**, 1960, 992—993.
3. О теоремах вложения для весовых классов, Труды МИАН СССР **50**, 1961, 282—303.

Фавар (Favard J.)

1. Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques ou presque-périodiques, Matematisk Tidskrift (B), 1936, 81—94.

Фохт А. С.

1. Оценки решений уравнений эллиптического типа вблизи границы области их задания, Автореферат канд. диссертации, М., 1963.
2. Некоторые неравенства для решений уравнений эллиптического типа и их производных вблизи границы области в метрике L_2, Труды МИАН СССР **77**, 1965, 168—191.

Харди и Литтлвуд (Hardy G. H. and Littlewood J. E.)

1. Some properties of fractional integrals. I, Math. Zeit. **27**, 1928, 565—606.
2. A convergence criterion for Fourier series, Math. Zeit. **28**, 1928, 122—147.

Харди, Литтлвуд и Полиа

1. Неравенства, М., 1948, 1—456.

Хаусдорф Ф.

1. Теория множеств, ОНТИ, 1937, 1—304.

Хермандер

1. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, М., ИЛ, 1962, 1—71.

Шагинян А. Л.

1. О наилучших приближениях гармоническими многочленами в пространстве, ДАН СССР **90**, 1953, 141.

Шварц Л. (Schwartz L.)

1. Théorie des distributions, I, II, Paris, 1957.

Яковлев Г. Н.

1. Граничные свойства функций класса $W_p^{(l)}$ на областях с угловыми точками, ДАН СССР **140**, 1961, 73—76.
2. Граничные свойства некоторого класса функций, Труды МИАН СССР **60**, 1961, 325—349.

Сергей Михайлович Никольский

Приближение функций многих переменных и теоремы вложения

М., 1977 г., 456 стр. с илл.

Редактор *В. И. Буренков*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева*

Корректор *Е. В. Сидоркина*

Сдано в набор 28/III 1977 г. Подписано к печати 9/IX 1977 г. Бумага $60 \times 90^1/_{16}$. тип. № 1. Физ. печ. л. 28,5. Условн. печ. л. 28,5. Уч.-изд. л. 27,25. Тираж 7000 экз. Т-07099. Цена книги 2 р. Заказ № 1194.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с матриц, изготовленных Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградским производственно-техническим объединением «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26, в 4-ой типографии издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25. Заказ № 740.