С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для слушателей подготовительных отделений вузов

Допущено Министерством просвещения СССР в качестве пособия для учителей

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

22.16
Н 64
УДК 517

Никольский С. М.
Н 64 Элементы математического анализа.— М.: Наука, 1981.— 160 с., 65 ил.

Основу книги представляют ее первая и вторая главы, посвященные собственно математическому анализу. Эти две главы можно рассматривать отдельно от других глав, как самостоятельные. В них математический анализ изучается на геометрической и физической основе. Непрерывный график и движение сами по себе служат основой для фундаментальных выводов. Излагается дифференциальное и интегральное исчисление и их приложения.

Остальные главы посвящены биному Ньютона, комбинаторике, элементам теории действительного и комплексного числа.

Н $\frac{20203-005}{053(02)-81}$ 79-81.1702050000

ББК 22.16
517.2

Н $\frac{20203-005}{053(02)-81}$ 79-81. 1702050000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга написана в помощь школьнику, изучающему математический анализ, а также учителю, преподающему в школе этот предмет. Она может оказаться полезной и учащимся техникумов, и просто для самообразования или повторения материала по математическому анализу на уровне требований, предъявляемых по этому предмету в наших школах.

Основу в этой книге представляют первая и вторая главы — математический анализ,— которые можно рассматривать и отдельно от других, как самостоятельные. В них математический анализ изучается на геометрической и физической основе. Непрерывный график и движение сами по себе служат основой для фундаментальных выводов. Мы даем представление (понятие) о пределе последовательности и функции, пользуясь примерами и формулируя только свойства этих понятий, чтобы ими пользоваться далее.

Определение функции дается по Лобачевскому и Дирихле. Я это подчеркиваю потому, что в наших школьных учебниках усложнили это простое определение без всякой на то надобности. Формулы дифференцирования выводятся для всех элементарных функций.

Из элементарных геометрических соображений (на графике) даются понятия возрастания, убывания функций (на отрезке), выпуклости и вогнутости их графиков, экстремальных точек и точек перегиба.

Теория неопределенных интегралов сводится к таблице и формуле замены переменных.

Определенный интеграл определяется как предел суммы. Существование его для непрерывных функций утверждается без доказательства, апеллируя к интуитивному представлению о площади криволинейной фигуры или работе переменной силы. Формула Ньютона — Лейбница разъясняется из механических соображений. Даются приложения. В частности, выводятся формулы для площади круга, длины окружности, объема и площади поверхности шара.

Первая глава соответствует школьным программам, предлагаемым в настоящее время компетентными комиссиями. Я следовал довольно точно одной из этих программ.

Вторая глава названа дополнительной, потому что она выходит за пределы программ. Однако я своему читателю горячо рекомендую ее изучить. Формула и ряд Тейлора наряду с производной и интегралом — фундаментальнейшие понятия математического анализа.

Четвертая глава посвящена формуле бинома Ньютона и комбинаторике. В последнее время в школе эти вопросы не изучались. Сейчас они вводятся.

Третья глава посвящена действительному числу. В ней в связанном виде изучается понятие действительного числа на базе представления его десятичной дробью. Выясняется периодичность десятичных разложений рациональных чисел. Остальные — не периодические разложения называются иррациональными числами. Показывается, как действительные числа интерпретируются на числовой прямой. Наконец, определяются арифметические действия над действительными числами, увязывая этот вопрос с соответствующими действиями над приближенными числами.

Глава 3 соответствует определенному разделу программы (в 9 классе). Однако я думаю, что отдельные параграфы этой главы целесообразно изучать в более младших классах. Например, п. 3.1.1 о десятичных разложениях рациональных чисел и, может быть, п. 3.1.2, где дается формальное определение иррационального числа, следовало бы ввести в арифметику. В старых изданиях учебника Киселева так и было. Там, где дается способ извлечения квадратного корня из числа, надо во всяком случае дать указанное определение. Идеи, изложенные в § 3.3 и 3.4, следовало бы учесть на уроках, посвященных измерению отрезков, а идеи § 3.6 — на уроках, посвященных приближенным вычислениям.

Я еще добавил параграфы о показательной и степенной функциях, уделив особое внимание определению показательной функции для иррациональных значений аргумента.

Трудный с педагогической точки зрения вопрос, что учащийся должен знать о числе a^x, когда x — иррациональное число. Я излагаю по этому вопросу свою точку зрения. Хорошо было бы, если бы учащийся знал об этом в пределах пп. 3.8.3 и 3.8.4 этой книги. Если это возможно, то не плохо добавить к этому пп. 3.8.5, 3.8.6. Впрочем, я не думаю, что это всегда возможно.

Наконец, в последней, пятой, главе читатель найдет краткие сведения о комплексных числах и роли их при решении алгебраических уравнений. Недавно комплексные числа были исключены из наших школьных программ. Это, конечно, привело только к неудобствам в изложении таких разделов алгебры, как квадратные уравнения. Сейчас это положение, по-видимому, изменяется. Однако и сейчас ощущается в этом вопросе некоторая робость. Считают, что школьники 7 класса еще не созрели для восприятия комплексных чисел, поэтому в 7 классе они должны проходить квадратные уравнения пока без комплексных чисел, а в 9 или в 10 классе надо вернуться к этим вопросам на базе комплексных чисел, которые в это время должны быть изложены.

Я имею опыт преподавания математического анализа на элементарной основе. В тридцатых годах я преподавал в технических вузах Днепропетровска, имея в качестве слушателей в большей своей части рабфаковцев. Сейчас я делюсь своим опытом. Я имею в виду главным образом главы 1 и 2 этой книги.

Эту книгу порекомендовали мне написать академик И. М. Виноградов, академик К. К. Марджанишвили и чл.-корр. АН СССР Е. Ф. Мищенко. Они ознакомились с написанной рукописью и дали весьма ценные советы. Рукопись была прочитана подробно проф. С. И. Адяном, проф. А. А. Карацубой и официальными рецензентами издательства «Наука» проф. А. В. Ефимовым и проф. М. К. Потаповым. Они дали много советов. Полезные замечания по рукописи я получил также от проф. С. А. Теляковского и Главного управления школ Министерства просвещения СССР, где она изучалась. Наконец, главу математический анализ с дополнением к ней подробно изучил академик Л. С. Понтрягин. Ряд его

замечаний я учел, в частности, дополнив рукопись (петитом) формальными доказательствами некоторых положений, объясненных из наглядных соображений. Редактор издательства А. Ф. Лапко добросовестно и квалифицированно выполнил свою работу по рукописи.

Всем указанным лицам и Главному управлению школ Министерства просвещения СССР я выражаю глубокую благодарность.

Наконец, я отмечаю, что Комиссия по реформе математического образования в средней школе при Бюро отделения математики Академии наук СССР под председательством академика И. М. Виноградова рекомендовала Министерству просвещения СССР допустить данную книгу как учебное пособие для учащихся средних школ.

Сейчас, когда книга находится в корректуре, стало известно, что она рекомендована в качестве пособия для учителей. Все же я не изменяю начало своего предисловия, потому что убежден, что эта книга вполне доступна и школьникам. Во всяком случае это замечание относится к главам 1, 2, 4, 5. При этом главы 1, 4 и 5 соответствуют предлагаемым в настоящее время программам.

Глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 1.1. Введение

Название «Математический анализ» — сокращенное видоизменение старого названия «Анализ бесконечно малых». Последнее больше говорит, но оно тоже сокращенное. Название «Анализ посредством бесконечно малых» характеризовало бы предмет более точно.

Было бы лучше, если бы название отражало те объекты, которые подвергаются анализу (изучению). В классическом математическом анализе такими объектами являются прежде всего функции, т. е. переменные величины, зависящие от других переменных величин. Функции мы всюду встречаем в практике, функции описывают движения, физические явления. Они встречаются в технике, геометрии, механике, химии, экономике. Изучая функции, мы изучаем конкретные явления, которые они описывают. Одна и та же функция может описывать явления совершенно различной природы и тем самым объединять в себе закономерности, которым эти явления подчиняются.

Математический анализ является средством изучения функций, но тогда и средством изучения окружающих нас явлений.

Важными понятиями математического анализа являются предел и непрерывность функции, производная и интеграл. В этой главе читатель получит начальные сведения об этих понятиях, их связи и их приложениях.

Дополнительная глава посвящена еще одному фундаментальному понятию математического анализа — формуле Тейлора.

§ 1.2. Функция

1.2.1. Примеры функций. В окружающей нас действительности мы всюду наблюдаем явления, органически связанные между собой. Нередко эти явления сопровождаются связями между теми или иными величинами; связями, заключающимися в том, что одна величина, вообще говоря переменная, зависит в силу определенного закона от другой переменной величины. В таких случаях говорят, что первая величина есть *функция* от второй. При этом вторую величину называют *независимой переменной* или *аргументом*, а первую — *зависимой*.

Приведем примеры функций.

1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ материальная точка находилась в покое, а затем (при $t > 0$) начала падать под воздействием силы тяжести. Тогда путь s, пройденный точкой за время t, выразится формулой

$$s = gt^2/2 \qquad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

где g — ускорение силы тяжести. В данном случае мы имеем дело с двумя величинами t и s. Каждому значению времени t в силу закона, выраженного формулой (1), приводится в соответствии определенное значение s. Если t изменяется, т. е. есть переменная, то соответственно изменяется s. Этим определена функция $s = gt^2/2$ для неотрицательных значений t.

2. Закон Бойля — Мариотта выражается формулой

$$v = c/p \qquad (p > 0), \tag{2}$$

где c — константа, p — давление данного количества газа, а v — соответствующий ему объем газа. Здесь v есть функция от p. В данном случае p теоретически может принимать только положительные значения, а v вычисляется однозначно по формуле (2).

3. Площадь круга радиуса r есть величина S, зависящая от r по формуле

$$S = \pi r^2 \qquad (r > 0). \tag{3}$$

Если изменять r, то соответственно будет изменяться S. Поскольку здесь речь идет о площади круга, данная функция, как говорят, определена для положительных r.

4. Колебательные процессы сопровождаются периодическими движениями, которые описываются обычно тригонометрическими функциями, изменяющимися, как мы знаем, периодически. Например, если вывести из равновесия подвешенную пружину, растянув ее в пределах упругости, то (рис. 1) ее точка A будет совершать вертикальные колебания, выражающиеся довольно точно законом

$$x = a\cos(pt + \alpha) \qquad (t \geqslant 0), \tag{4}$$

где x — отклонение точки A от положения равновесия, t — время, а числа a, p и α — постоянные, определенные материалом, размерами и начальным растяжением пружины.

Мы ограничимся пока этими примерами и дадим общее определение функции.

1.2.2. Обозначения множеств чисел. Начнем с обозначений.

Пусть a и b — действительные числа (точки числовой прямой), удовлетворяющие неравенствам $a < b$.

Отрезком $[a, b]$ называется множество чисел (точек) x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$.

Интервалом (a, b) называется множество чисел, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$.

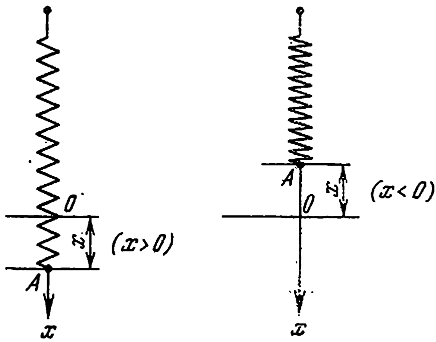


Рис. 1.

Интервалом $(-\infty, \infty)$ называется множество действительных чисел x (точек числовой прямой). Говорят еще, что это есть множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x < \infty$.

Интервалом (a, ∞) называется множество чисел x, бóльших числа a, или, как говорят, множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < \infty$.

Интервалом $(-\infty, b)$ называется множество чисел x, меньших числа b, или, как говорят, множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x < b$.

Нам встретятся и другие множества (совокупности) чисел, которые не обязательно имеют специальные названия. Их обозначают разными буквами: E, A, B,

1.2.3. Определение понятия функции. *Пусть E есть множество (совокупность) чисел, и пусть в силу некоторого вполне определённого закона каждому числу x из E приведено в соответствие (одно) число y; тогда говорят, что на E задана функция (однозначная), которую записывают так:*

$$y = f(x). \tag{5}$$

Это определение функции предложено Н. И. Лобачевским и Дирихле [1]). Множество E называют *областью задания* или *определения* функции $f(x)$. Говорят также, что задана *независимая переменная* x, которая может принимать частные значения x из множества E. Каждому такому значению в силу упомянутого закона приведено в соответствие определенное значение (число) другой переменной y, называемой *функцией* или *зависимой переменной.* Независимую переменную называют *аргументом.*

Для выражения понятия функции употребляют геометрический язык. Говорят, что задано множество E точек x действительной прямой — область определения или задания функции — и закон, в силу которого каждой точке множества E приводится в соответствие число $y = f(x)$. Если мы хотим говорить о функции как о некотором законе, приводящем в соответствие каждому числу x из E некоторое число y, то достаточно ее обозначить одной буквой f. Символ $f(x)$ обозначает число y, которое в силу закона f соответствует значению x. Если, например, число 1 принадлежит области E задания функции f, то $f(1)$ есть *значение функции* f в точке $x = 1$. Если 1 не принадлежит E, то говорят, что функция f *не определена в точке* $x = 1$.

Для функций f и φ, имеющих одну и ту же область задания E, определяются *сумма* $f + \varphi$, *разность* $f - \varphi$, *произведение* $f\varphi$, *частное* f/φ. Это новые функции, значения которых выражаются соответственно формулами

$$f(x) + \varphi(x),\quad f(x) - \varphi(x),\quad f(x)\,\varphi(x),\quad f(x)/\varphi(x),\quad x \in E,$$

где в случае частного предполагается, что $\varphi(x) \neq 0$ на E.

Для обозначения функции употребляют и любые другие буквы: F, Φ, Ψ, так же как вместо x, y можно писать z, u, v, w, ...

1.2.4. Сложная функция. С помощью арифметических действий можно конструировать по данным функциям новые функции. Но имеется еще и другое средство конструирования функции по данным функциям. Мы имеем в виду *операцию функции от функции.*

Пусть заданы две функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, где G есть область определения f, а E — область определения φ, и пусть каждому x из E соответствует при по-

[1]) Н. И. Лобачевский (1792—1856) — великий русский математик создатель неевклидовой геометрии. Лежен Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

мощи функции φ значение u, принадлежащее к G. Тогда можно сконструировать *сложную функцию*

$$y = f[\varphi(x)]$$

от x с областью определения E. Ее называют также *функцией от функции.*

Например, функцию

$$y = e^{u^2} \qquad (-\infty < u < \infty) \tag{6}$$

можно рассматривать как сложную функцию

$$y = e^z, \quad z = u^2 \qquad (-\infty < u < \infty),$$

определенную для всех точек u или, как говорят, определенную на интервале $(-\infty, \infty)$.

Возможна сложная функция, в образовании которой участвует n функций:

$$z = F_1(F_2(F_3(\ldots(F_n(x)) \quad))).$$

Например, функция

$$z = \sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \tag{7}$$

есть сложная функция, сконструированная из трех функций:

$$z = \sqrt{u}, \quad u = 1 - y, \quad y = x^2.$$

Так как функция $\sqrt{u}$ определена только для $u \geqslant 0$, то функция (7) определена для таких x, которые удовлетворяют неравенству

$$1 - x^2 \geqslant 0$$

или, что все равно, неравенствам $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

1.2.5. Элементарные функции. Возможны различные способы задания функции. Но среди них особенно важное значение имеет способ задания при помощи формулы.

Разъясним, что значит, что функция задана при помощи формулы.

Следующие функции мы называем *простейшими элементарными функциями.*

1) *Постоянная функция*

$$y = c \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Каждому действительному x соответствует одно и то же значение y, равное числу c.

2) *Степенная функция*

$$y = x^n \quad (-\infty < x < \infty) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

или еще (рис. 2)

$$y = x^p \quad (0 < x < \infty),$$

где $p \neq 0$ не натуральное. Мы здесь осторожно считаем, что $x > 0$, потому что, например, для $p = 1/2$ функция x^p

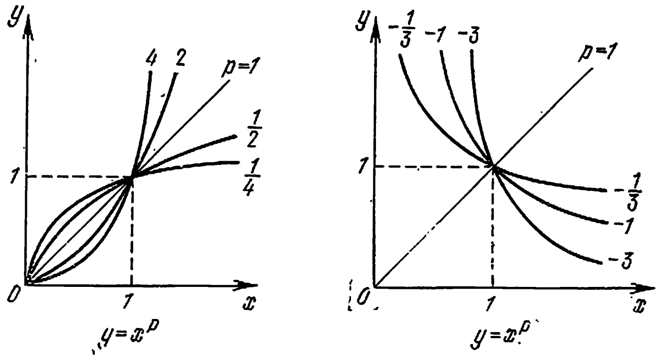


Рис. 2.

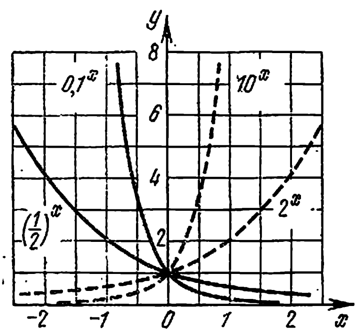


Рис. 3.

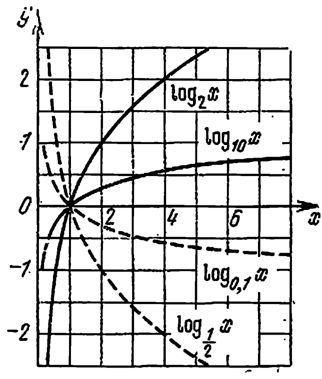


Рис. 4.

не имеет смысла при $x < 0$, а функция x^{-1} — для $x = 0$. Хотя бывают случаи, когда функция x^p определена и для $x \leqslant 0$, например: $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$.

3) *Показательная функция* (рис. 3)

$$y = a^x \quad (-\infty < x < \infty), \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

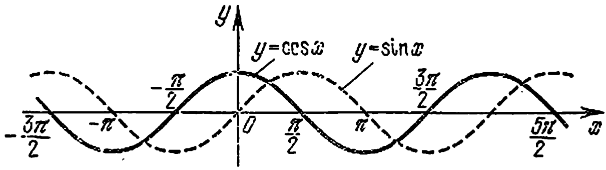
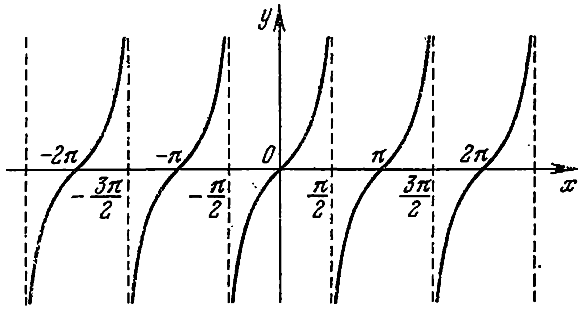


Рис.



$y = \operatorname{tg} x$

Рис. 6.

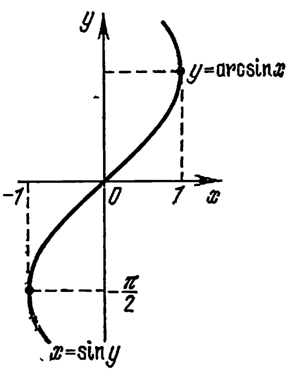


Рис. 7.

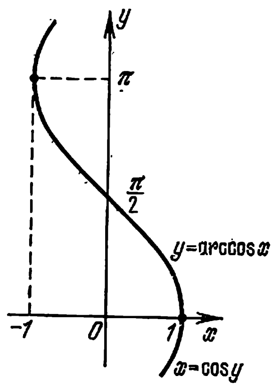


Рис. 8.

4) *Логарифмическая функция* (рис. 4)

$$y = \log_a x \quad (0 < x < \infty), \quad > 0, \quad a \neq 1.$$

5) $y = \sin x \quad (-\infty < x < \infty)$ (рис. 5).

6) $y = \cos x \quad (-\infty < x < \infty)$ (рис. 5).

7) $y = \operatorname{tg} x \quad \left(x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (рис. 6).

8) $y = \arcsin x \; (-1 \leqslant x \leqslant 1)$ (рис. 7).

9) $y = \arccos x \; (-1 \leqslant x \leqslant 1)$ (рис. 8).

10) $y = \operatorname{arctg} x \; (-\infty < x < \infty)$ (рис. 9).

Если простейшие элементарные функции комбинировать, разрешая применять конечное число раз операции сложения, вычитания, умножения, деления и функции от функции, то будем получать функции, которые называются *элементарными функциями*.

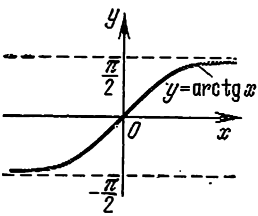


Рис. 9.

Если говорят, что функция

$$y = F(x)$$

задана формулой, то обычно под этим подразумевают, что $F(x)$ есть некоторая элементарная функция.

Ниже мы отмечаем некоторые часто встречающиеся функции, получившие специальные названия.

Линейная функция

$$y = kx + b.$$

График ее, как мы знаем, есть прямая, образующая с положительным направлением оси x угол, тангенс которого равен k, и пересекающая ось y в точке, ордината которой равна b.

Линейные функции встречаются в приложениях очень часто. Многие физические законы выражаются, и притом достаточно точно, линейными функциями. Например, длина l стержня с хорошим приближением рассматривается как линейная функция его температуры:

$$l = l_0 + \alpha t,$$

где α — коэффициент линейного расширения, l_0 — длина стержня при $t = 0$. Если x — время, а y — путь, пройденный за это время точкой, то линейная функция

$y = kx + b$ выражает тот факт, что точка движется равномерно со скоростью k, число же b есть расстояние точки от места отсчета пути в момент времени $x = 0$. Возможность приближенно считать равномерными различные изменения, хотя бы на малых участках, и простота линейной функции делают ее очень употребительной.

Функция второй степени

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (-\infty < x < \infty)$$

тоже часто встречается в приложениях. Вспомним о равномерно ускоренном движении.

График функции второй степени есть хорошо известная парабола.

Можно рассматривать функции третьей, четвертой и вообще n-й степени. Функция

$$y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

есть пример функции четвертой степени.

Функция n-й степени, или, как ее называют, *многочлен n-й степени*, получается из заданных постоянных и степенной функции $y = x$ при помощи действий сложения, вычитания и умножения, взятых в конечном числе. Если прибавить к этим действиям еще деление, то уже будем получать так называемые *рациональные функции*. Вот примеры рациональных функций:

$$y = \frac{1+x}{1-x}, \quad y = \frac{1+x^2}{x^2-5x+6}.$$

Рациональную функцию всегда можно записать в виде дроби, у которой числитель и знаменатель — многочлены. Рациональная функция определена для всех действительных x, исключая такие x, которые обращают знаменатель в нуль.

1.2.6. График. Важным средством задания функции является график. Зададим прямоугольную систему координат x, y (рис. 10), на оси x отметим отрезок $[a, b]$ и изобразим любую кривую Γ, обладающую следующим свойством: какова бы ни была точка x отрезка, прямая, проходящая через нее параллельно оси y, пересекают кривую Γ в единственной точке A. Такую заданную в прямоугольной (декартовой) системе координат кривую Γ мы будем называть *графиком*. График определяет функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следующим образом. Если x есть произвольная точка отрезка $[a, b]$, то соответствующее значение

$y = f(x)$ определяется как ордината точки A (см. рис. 10). Следовательно, при помощи графика дается вполне определенный закон соответствия между x и $y = f(x)$.

Для того чтобы узнать, как изменяется в течение суток температура воздуха, на метеорологических станциях пользуются прибором, называемым термографом.

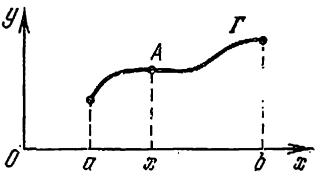


Рис. 10.

Термограф состоит из барабана, вращающегося вокруг своей оси при помощи часового механизма, и латунной изогнутой коробки, весьма чувствительной к изменениям температуры. При повышении температуры она разгибается, в результате этого прикрепленное к ней при помощи системы рычажков самопишущее перо поднимается вверх. Наоборот, понижение температуры влечет за собой опускание пера. На барабан навертывается соответствующим образом разграфленная бумажная лента, на которой перо вычерчивает непрерывную линию — график функции $T = f(t)$, выражающий зависимость между временем и температурой воздуха. При помощи полученного графика можно без вычислений определять значения температуры T для каждого момента времени t. Еще раз подчеркнем, что график сам по себе определяет функцию независимо от того, задана она формулой или нет.

Функция на различных частях области ее определения может быть задана различными формулами. Например, пусть поезд, вышедший из пункта A в момент $t = 0$, шел в течение двух часов со скоростью 100 км в час и, прибыв в пункт B, стоял там один час, а затем шел дальше в течение трех часов со скоростью 80 км в час. Тогда функция $s = f(t)$, выражающая расстояние (в километрах) поезда от A в момент времени t, очевидно будет определяться следующими тремя формулами:

$$f(t) = \begin{cases} 100t & (0 \leqslant t \leqslant 2), \\ 200 & (2 \leqslant t \leqslant 3), \\ 200 + 80(t - 3) & (3 \leqslant t \leqslant 6). \end{cases}$$

1.2.7. Таблица. Функция может быть задана в виде таблицы. Например, мы могли бы измерять температуру T воздуха через каждый час. Тогда каждому моменту времени $t = 0, 1, 2, \ldots, 24$ соответствовало бы определенное число T в виде таблицы:

t	0	1	2	3	...
T	T_0	T_1	T_2	T_3	...

Таким образом, мы получили бы функцию $T = f(t)$, определенную на множестве E целых чисел от 0 до 24, заданную таблицей.

1.2.8. Многозначная функция. До сих пор мы под функцией понимали «однозначную функцию». Согласно ее определению каждому значению x из некоторого множества E чисел соответствует *одно число* $y = f(x)$.

Но приходится иметь дело и с многозначными функциями, когда каждому x из множества E соответствует не обязательно одно, а, может быть, несколько, даже бесконечно много значений y.

Например, решая уравнение

$$y^2 = x, \tag{8}$$

мы получим для всякого $x \geqslant 0$ два решения

$$y = \pm\sqrt{x} \qquad (x \geqslant 0),$$

совпадающих, впрочем, при $x = 0$. Таким образом, решение y уравнения (8) есть двузначная функция от положительных x.

Вот еще пример:

$$y = \operatorname{Arcsin} x = (-1)^k \arcsin x + k\pi \tag{9}$$
$$(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Это уже бесконечнозначная функция. Функция $\operatorname{Arcsin} x$ есть дуга, синус которой равен x. Таких дуг бесконечное множество. Все они записаны формулой (9), где $\arcsin x = \varphi$ — определенная дуга, удовлетворяющая неравенствам $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, синус которого равен x, а k может принимать любое целое значение.

Указание. Многое из § 1.2 читатель, возможно, знает. Следует все же обратить внимание на п. 1.2.2, где даны стандартные обозначения часто встречающихся множеств чисел.

Надо обратить внимание на п. 1.2.3, где дано классическое определение функции по Лобачевскому и Дирихле. В наших школьных учебниках приводят это определение зачем-то в весьма усложненном виде. Важно еще знать излагаемое в п. 1.2.5 определение элементарной функции.

§ 1.3. Предел

1.3.1. Предел последовательности. Метод пределов — это основной метод, с которым оперирует математический анализ.

Чтобы уяснить, что такое предел, мы начнем с классической задачи. В прямоугольной системе координат задана фигура, ограниченная параболой (рис. 11) $y = x^2$, осью x и прямой $x = 1$. Требуется найти ее площадь. Вот как можно здесь поступить.

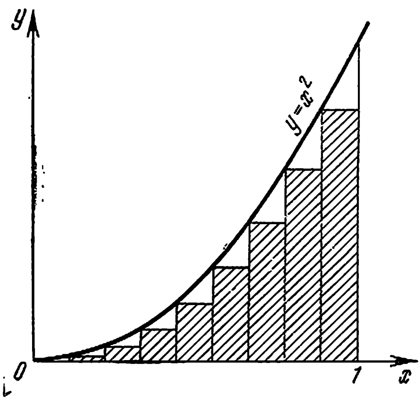


Рис. 11.

Разделим отрезок $[0, 1]$ оси x на n равных частей точками

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ 1$$

и построим на каждой из этих частей прямоугольник, левый верхний угол которого достигает параболы. Тогда получим заштрихованные на рис. 11 прямоугольники, сумма площадей которых S_n, очевидно, равна

$$S_n = 0\cdot\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6n^3}\ ^{1)}.$$

---

[1]) Мы воспользовались формулой

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6},$$

которая может быть введена следующим образом. Сложив левые и правые части равенств $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$, соответ-

Представим S_n в виде

$$S_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{3} + \alpha_n. \tag{1}$$

Величина α_n хотя и имеет сложный вид, но обладает замечательным свойством: она стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Такие величины называют *бесконечно малыми*.

Дадим формальное определение бесконечно малой величины.

Величина α_n, зависящая от натурального значения $n = 1, 2, 3, \ldots$, называется бесконечно малой, если, как бы ни было мало заданное положительное число ε, всегда найдется число $N > 0$ настолько большое, что выполняется неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon \text{ для всех } n > N.$$

В данном случае в силу неравенств

$$|\alpha_n| = \left|\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n}\right| \leqslant \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

как бы ни было мало $\varepsilon > 0$, для всех $n > 1/\varepsilon$

$$|\alpha_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

т. е. можно считать $N = 1/\varepsilon$.

Итак, сумма S_n площадей заштрихованных на рис. 11 прямоугольников может быть записана следующим образом:

$$S = \frac{1}{3} + \alpha_n,$$

где α_n есть бесконечно малая величина. Но тогда естественно считать, что S_n стремится при неограниченном возрастании n к числу 1/3, и естественно считать, что

$$S = 1/3$$

ствующих значениям $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, получим уравнение

$$n^3 - 1 = 3\sigma_{n-1} + \frac{3(n-1)n}{2} + n - 1, \text{ где } \sigma_{n-1} = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2.$$

Решив его, получим

$$\sigma_{n-1} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

есть площадь нашей фигуры. Мы решили поставленную задачу.

В ходе рассуждений мы, во-первых, дали определение площади нашей фигуры как числа S, к которому стремится сумма S_n площадей заштрихованных на рис. 11 прямоугольников при неограниченном возрастании n, а во-вторых, нашли это число. Оказалось, что $S = 1/3$.

Дадим определение предела. *Пусть задана переменная* x_n, *зависящая от натурального* $n = 1, 2, \ldots$ *Если* x_n *можно записать в виде суммы*

$$x_n = a + \alpha_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где a — *некоторое постоянное число, а* α_n — *бесконечно малая, то, говорят, что* x_n *имеет своим пределом число* a *или* x_n *стремится к* a, *и пишут*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

или

$$x_n \to a \qquad (n \to \infty).$$

Приведем примеры переменных величин, зависящих от натурального n:

$$x_n = 1/n, \quad y_n = -1/n, \quad z_n = (-1)^n/n,$$

$$u_n = q^n, \quad 0 < q < 1, \quad v_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}, \quad w_n = (-1)^n.$$

Переменные x_n, y_n, z_n и u_n — бесконечно малые; x_n и u_n стремятся к нулю, принимая положительные значения, убывая; y_n стремится к нулю, принимая отрицательные значения, возрастая; а z_n стремится к нулю, колеблясь. Величина же v_n стремится к 1 ($\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$). Что же касается величины w_n, то она ни к какому пределу не стремится, принимая последовательно значения $+1$ и -1 [1]).

Очевидно, если α_n есть бесконечно малая, то ее предел равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Упражнение 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

---

[1]) Если бы величина w_n имела предел, то разность $w_{n+1} - w_n$ стремилась бы к нулю (см. далее п. 1.3.3).

Задача 1. Найти пределы переменных, представляя их как сумму постоянной и бесконечно малой:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^3}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}$.

1.3.2. Бесконечно большая величина. Антиподами бесконечно малых величин являются бесконечно большие величины.

Переменная x_n называется бесконечно большой, если, как бы ни было велико число $M>0$, найдется такое N, что $|x_n|>M$ для всех $n>N$.

Если x_n бесконечно большая, то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{или} \quad x_n\to\infty \ (n\to\infty).$$

Может случиться, что бесконечно большая величина x_n, начиная с некоторого n, становится положительной, тогда пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,$$

или отрицательной, тогда пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Вот примеры бесконечно больших величин:

$$x_n = n,\quad y_n = -n,\ z_n = (-1)^n n,\ u_n = n^2,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} u_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$

Что же касается величины z_n, то про нее можно написать

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty,$$

но здесь нельзя символ ∞ заменить ни символом $+\infty$, ни символом $-\infty$.

1.3.3. Действия с пределами. Переменные x_n и y_n можно складывать, вычитать, умножать и делить, образуя величины

$$x_n+y_n,\ x_n-y_n,\ x_n y_n,\ x_n/y_n.$$

В случае частного надо предполагать, что $y_n\neq 0$ для любых $n=1, 2, 3,$

Справедливы следующие, в сущности очевидные, свойства пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \qquad (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0).$$

Эти свойства надо понимать в том смысле, что если существуют пределы, фигурирующие в правых частях равенств (2), то автоматически существуют пределы в левых частях соответствующих равенств и справедливы сами равенства.

Добавим еще, что

$$\lim_{x_n\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x_n\to A\neq 0\\ y_n\to\infty}}(x_n y_n) = \infty, \quad \lim_{\substack{x_n\to 0\\ x_n\neq 0}}\frac{1}{x_n} = \infty. \tag{3}$$

Более сложный вопрос возникает при вычислении предела частного x_n/y_n, когда и $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$ или если $x_n \to \infty$ и $y_n \to \infty$. В таких случаях заранее невозможно сказать, чему равен предел. В зависимости от индивидуальных свойств переменных x_n и y_n предел может быть любым конечным или бесконечным числом [1]). Может также случиться, что отношение x_n/y_n не имеет никакого предела, даже бесконечного.

Например, пусть $x_n = 1/n$, $y_n = 1/n^2$; тогда, очевидно, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n} = n \to +\infty, \quad \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Если же $x_n = (-1)^n/n$, $y_n = 1/n$, то отношение

$$\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$$

ни к какому пределу не стремится.

---

[1]) Символы $+\infty$, $-\infty$, ∞ удобно называть бесконечными числами, хотя это вовсе не числа, и тогда обычные числа называют конечными числами.

Мы рассматривали переменные x_n, зависящие от натурального n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Такие переменные называют *последовательностями*.

Пример 1 (пояснения ниже).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

У дроби

$$\frac{n+3}{n+1}$$

как числитель, так и знаменатель стремится к бесконечности, и непосредственно нельзя сказать, к какому пределу она стремится. Однако после деления числителя и знаменателя на n обнаружилось, что числитель стремится к 1 и знаменатель стремится к 1. Это дает возможность воспользоваться формулой о пределе частного.

Пример 2 (пояснения ниже).

$$\lim_{n\to\infty}(n^4 - 100n^3 - 2n^2 + 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n^4\left(1 - \frac{100}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)\right] = +\infty.$$

Сразу неясно, к чему стремится исходное выражение: первый член n^4 стремится к $+\infty$, а член $-100n^3 - 2n^2$ стремится к $-\infty$. Но после вынесения за скобки n^4 все проясняется: множитель $n^4 \to +\infty$, а $\left(1 - \frac{100}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) \to 1 \neq 0$. Но тогда произведение стремится к ∞ и даже к $+\infty$ (см. (3)).

Пример 3.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2 + \sqrt[3]{n+2}\,\sqrt[3]{n} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2 + \sqrt[3]{n+2}\,\sqrt[3]{n} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2} = 0,$$

потому что знаменатель последней дроби стремится к ∞.

Нет общего способа вычисления предела разности двух переменных, каждая из которых стремится к $+\infty$. В каждом конкретном случае приходится придумывать свой способ.

Пример 4. Сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем q ($q \neq 1$) и первым членом 1 равна

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} =$$

$$= \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - q^n \frac{1}{1 - q}. \qquad (4)$$

Если прогрессия убывающая, т. е. если $|q| < 1$, то второй член правой части (4) стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$-q^n \frac{1}{1 - q} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - q} \qquad (|q| < 1),$$

который называют *суммой ряда*

$$1 + q + q^2 + \qquad (5)$$

(состоящего из бесконечного числа членов!) и при этом пишут

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \cdots,$$

т. е. приписывают выражению (5) число, равное сумме ряда. В этом случае говорит, что *ряд* (5) *сходится*.

Если $|q| > 1$, то

$$q^n \frac{1}{1 - q} \to \infty \qquad (n \to \infty);$$

при $q = 1$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = 1 + \ldots + 1 = n \to \infty.$$

Если же $q = -1$, то

$$S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ S_5 = 1, \ldots$$

и S_n не стремится к пределу.

Из сказанного следует, что если условие $|q| < 1$ не выполняется, то S_n не стремится к конечному пределу при $n \to \infty$. В этом случае говорят, что ряд (5) расходится. Ему не приписывают никакого числа.

З а д а ч а 2. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-3n^2+1}{n^3-100n-5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{n^2-1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^3+n}$;

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^3-10n^2+2n-1)$; 6) $\lim\limits_{n\to-\infty} (n^3-10n^2+2n-1)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3-10n^2+1}$.

З а д а н и е. Обратите внимание на свойства переменных, имеющих предел (конечный и бесконечный), выраженные формулами (2) п. 1.3.3. Надо знать также, что

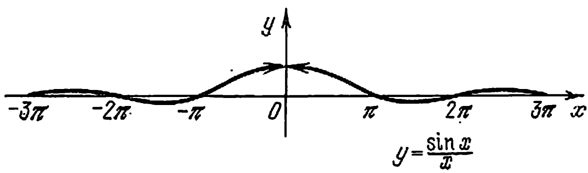


Рис. 12.

переменная, имеющая предел, равный a, есть сумма $a+\alpha_n$, где α_n — бесконечно малая. О самом же понятии бесконечно малой, хотя оно и было определено выше формально, для наших целей достаточно иметь чисто интуитивное представление, выясненное на примерах.

1.3.4. Предел $\frac{\sin x}{x}$. Рассмотрим функцию (рис. 12)

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

Она определена для всех значений x, за исключением $x=0$. Посмотрим, что делается с этой функцией, когда x приближается к нулю все ближе и ближе, оставаясь отличным от нуля. Вот таблица:

x	$\frac{\sin x}{x}$
0,50	0,9589
0,10	0,9983
0,05	0,9996

Эта таблица наводит на мысль, что, когда независимая переменная x приближается к 0, оставаясь положительной, наша функция приближается к 1.

Этот факт можно получить из геометрических соображений. На рис. 13 изображена окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Пусть $\breve{AC} = \alpha$. Тогда $AB = \sin\alpha$, $AD = \operatorname{tg}\alpha$.

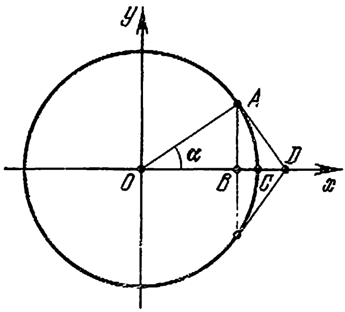


Рис. 13.

Но тогда как видно из рисунка (длина дуги окружности больше стягиваемой ею хорды и меньше объемлющей ее ломаной),

$$2\sin\alpha < 2\alpha < 2\operatorname{tg}\alpha,$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1.$$

Если теперь α приближать (стремить) к 0, то $\cos\alpha$, как это видно из графика функции $\cos\alpha$ (рис. 5), будет приближаться к 1. Но функция $(\sin\alpha)/\alpha$ находится все время между $\cos\alpha$ и 1. Это показывает, что она стремится к 1, когда α стремится к нулю, оставаясь положительной. Этот факт записывают так

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1, \tag{6'}$$

и говорят, что *предел функции* $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, *когда α стремится к нулю, принимая положительные значения, равен* 1.

Но если $\alpha \to 0$, принимая отрицательные значения, то указанный предел все равно существует и равен 1. Это получается из (6′) посредством замены переменной $\alpha = -t$, в силу которой, если $\alpha \to 0$, $\alpha < 0$, то $t \to 0$, $t > 0$:

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}} \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\sin t}{t} = 1. \tag{6''}$$

Равенства (6′) и (6″) объединяют в одно

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \tag{6}$$

и говорят, что предел $(\sin\alpha)/\alpha$ при $\alpha \to 0$ равен 1.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y/2}=\lim_{y\to 0}\left(2\,\frac{\sin y}{y}\right)=2\cdot 1=2.$$

Чтобы свести вычисление этого предела к известному нам пределу (6), делаем замену переменной x на y при помощи равенства $y = 2x$. Очевидно, $y \to 0$ при $x \to 0$.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/2)}{2\,(x/2)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

Здесь сделана замена $x/2 = y$, где $y \to 0$ при $x \to 0$.

Задача 3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}$.

Задание. Повторите вывод формулы (6) и запомните эту формулу.

1.3.5. Предел функции. Рассмотрим теперь произвольную функцию

$$y = f(x).$$

Пусть она определена в некоторой *правой окрестности точки a*, за исключением, быть может, самой точки a. Это значит, что она определена для значений x, удовлетворяющих неравенством $a < x < a + \delta$, где δ — некоторое положительное число.

Говорят, что *функция $y = f(x)$ имеет правый предел в точке a, равный A, если из того, что x приближается (стремится) к a, оставаясь в правой окрестности точки a, следует, что $f(x)$ приближается к A*. Это записывают так:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=A.$$

Аналогично, *если функция $y = f(x)$ определена в левой окрестности точки a, за исключением, быть может, точки a, т. е. она задана для значений x, удовлетворяю-*

щих неравенствам $a - \delta < x < a$ $(\delta > 0)$ *при некотором* $\delta > 0$, *то говорят, что она имеет левый предел в точке* a, *равный числу* B, *если из того, что* x *приближается к* a, *оставаясь в левой окрестности* a, *следует, что* $f(x)$ *приближается (стремится) к* B. *Этот факт записывают так:*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = B.$$

Если существуют левый и правый пределы функции $y = f(x)$ *в точке* a *и они равны одному и тому же числу* A, *то говорят, что функция имеет предел в точке* a, *равный* A, *и пишут:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

В этом случае само собой разумеется, что функция f определена в некоторой полной окрестности $a - \delta < x < a + \delta$ точки a, за исключением, быть может, самой точки a.

Функция $y = (\sin x)/x$, которую мы рассмотрели выше, определена для всех значений x, за исключением $x = 0$. Мы уже знаем, что эта функция имеет предел при $x \to 0$, равный 1.

Формально выражение «при x, стремящемся к a, функция $f(x)$ стремится к A» надо понимать следующим образом: для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

для всех x, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |x - a| < \delta.$$

О функции $f(x)$ говорят, что она стремится к ∞ при $x \to a$, если для значений x, достаточно близких к a, она может сделаться по абсолютной величине больше как угодно большого числа $M > 0$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Можно при этом говорить о правом и левом пределе в точке a и заменять символ ∞ на $+\infty$ или $-\infty$, если функция вблизи a положительна или, соответственно, отрицательна.

Например, мы знаем, что

$$\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x = \infty \qquad (7)$$

и, что точнее (см. рис. 6),

$$\lim_{\substack{x\to\pi/2\\x<\pi/2}} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to\pi/2\\x>\pi/2}} \operatorname{tg} x = -\infty. \qquad (7')$$

Заметим, наконец, что в этих определениях конечное число a (точку числовой прямой) можно заменить на символ ∞, или $+\infty$, или $-\infty$.

Вспомним, что функция

$$y = \operatorname{arctg} x$$

задана для всех значений x, т. е. на интервале $-\infty < x < \infty$. Для нее справедливы равенства (см. § 1.2, рис. 9)

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2.$$

1.3.6. Действия с пределами функций. Так же как для пределов переменных, пробегающих последовательности, для пределов функций имеют место аналогичные свойства:

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} \varphi(x), \qquad (8)$$

$$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} \varphi(x), \qquad (9)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)} \qquad \left(\lim_{x\to a} \varphi(x) \neq 0\right). \qquad (10)$$

В частности, если $f(x)$ есть постоянная ($f(x) = c$), и следовательно $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, то

$$\lim_{x\to a} [c\varphi(x)] = c \lim_{x\to a} \varphi(x). \qquad (11)$$

Эти свойства снова надо понимать в том смысле, что если существуют конечные пределы в правых частях равенств (8)—(11), то автоматически существуют пределы в левых частях равенств и выполняются сами равенства.

Верны также свойства ($f(x) \neq 0$):

если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$;

если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

Пример 1.

$$\lim_{x\to x_0}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to x_0}(ax^2)+\lim_{x\to x_0}(bx)+\lim_{x\to x_0}c=$$
$$=a(\lim_{x\to x_0}x)^2+b\lim_{x\to x_0}x+c=ax_0^2+bx_0+c.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}=\frac{4+4}{2+2}=2.$$

В этих примерах, чтобы вычислить предел функции при $x\to a$, достаточно подставить в нее $x=a$. В частности, в примере 2 это можно сделать потому, что как числитель, так и знаменатель стремятся к конечным пределам и при этом предел знаменателя не равен нулю.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x-3}=\infty.$$

Здесь нельзя применить свойство (10), выражающее, что предел частного равен частному пределов, потому что предел знаменателя равен нулю. С другой стороны, надо считать очевидным, что *если числитель дроби стремится к конечному числу, не равному нулю, а знаменатель стремится к нулю, то дробь стремится к бесконечности.*

Пример 4. Требуется вычислить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

В данном случае числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю и соображения, приведенные в примере 3, тоже неприменимы. Но вот как можно поступить. Для любого $x\neq 2$ имеем $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$, а так как при определении предела при $x\to 2$ совсем не принимаются во внимание значения f в точке $x=2$, то

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2).$$

Таким образом, вместо того чтобы вычислять предел более сложной функции $(x^2-4)/(x-2)$, достаточно вычислить предел более простой функции $x+2$. Последний при

$x \to 2$, очевидно, равен 4. Ведь

$$\lim_{x\to 2}(x+2) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2 = 2 + 2 = 4.$$

Вычисления, связанные с нахождением данного предела, обычно располагают следующим образом:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = \lim_{x\to 2} x + 2 = 4.$$

Подчеркнем, что функции $f(x) = (x^2-4)/(x-2)$ и $\varphi(x) = x+2$ являются разными функциями. Первая из

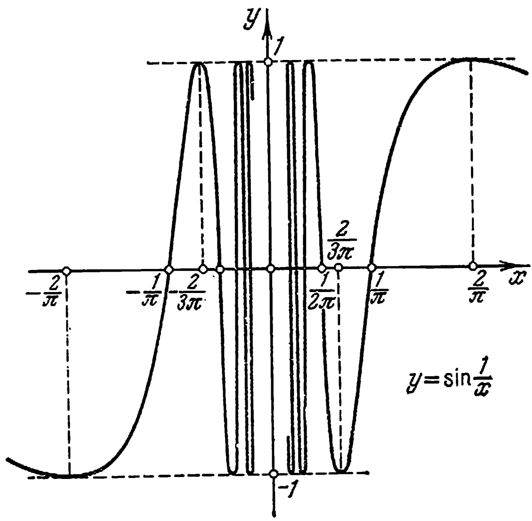


Рис. 14.

них определена для $x \neq 2$, в то время как вторая определена для всех x. Однако при вычислении предела функции при $x \to 2$ нас совершенно не интересует, определены или не определены эти функции в самой точке $x = 2$, и так как $f(x) = \varphi(x)$ для $x \neq 2$, то

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\varphi(x) = \varphi(2).$$

П р и м е р 5. Функция $y = \sin(1/x)$ (график ее изображен на рис. 14) определена для всех значений $x \neq 0$. Она определена, таким образом, в окрестности точки $x = 0$, за исключением самой точки $x = 0$. Эта функция не имеет предела при $x \to 0$, потому что последовательность отличных от нуля значений $x_k = 2/\pi(2k+1)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ стремится к нулю, и в то же время

$$f(x_k) = (-1)^k$$

не стремится при $k \to \infty$ ни к какому пределу.

З а д а ч а 4. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\operatorname{ctg} x$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\operatorname{ctg} x$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-1}{x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^3-20x^2+1)$; 8) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3-20x^2+1)$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1})$.

1.3.7. Число e. Рассмотрим переменную x_n, пробегающую последовательность чисел

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

О п р е д е л е н и е. *Переменная x_n ограничена сверху числом M, если выполняются неравенства $x_n \leqslant M$ для любых $n = 1, 2,$*

О п р е д е л е н и е. *Переменная x_n не убывает, если для любого n*

$$x_n \leqslant x_{n+1}.$$

Справедлива важная

Т е о р е м а 1. *Если переменная x_n не убывает и ограничена сверху числом M, то она имеет предел, равный некоторому числу a, не превышающему M:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \leqslant M. \qquad (12)$$

Наметим доказательство.

Если на числовой прямой отметить точки $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и точку M (рис. 15), то каждая последующая точка x_{n+1}

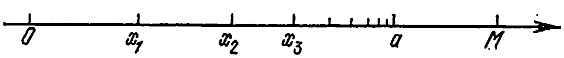


Рис. 15.

будет находиться правее предыдущей x_n или совпадать с ней и в то же время все точки x_n будут находиться левее M или, может быть, какая-либо из них совпадет с M (но тогда, очевидно, и все последующие за ней совпадут с M и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$).

Так как номеров n бесконечное множество, то точки x_n обязательно должны сгущаться около некоторой точки $a \leqslant M$, которая и будет пределом x_n.

Число a можно найти следующим путем. Пусть натуральное число $N > M$. Перебирая последовательно числа $0, 1, 2, \ldots, N-1$, мы обязательно наткнемся на целое число α_0, удовлетворяющее следующему свойству: отрезок $\sigma_0 = [\alpha_0, \alpha_0 + 1]$ содержит в себе хотя бы одну точку x_n, а правее $\alpha_0 + 1$ на числовой прямой нет точек x_n. Делим теперь отрезок σ_0 на десять частей точками $\alpha_0,0$; $\alpha_0,1$; $\alpha_0,2$; ...; $\alpha_0,9$ и, перебирая их, находим цифру α_1 такую, что отрезок $[\alpha_0,\alpha_1; \alpha_0,\alpha_1 + 10^{-1}]$ содержит в себе хотя бы одну точку x_n, а правее точки $\alpha_0,\alpha_1 + 10^{-1}$ нет точек x_n. Переберем далее точки

$$\alpha_0,\alpha_1 0;\ \alpha_0,\alpha_1 1;\ \ldots;\ \alpha_0,\alpha_1 9$$

и т. д.

В результате получим числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, с помощью которых строим число

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots,$$

которое и удовлетворяет свойству (12).

Замечание 1. В теореме 1 можно считать, что переменная x_n ограничена снизу числом m ($m \leqslant x_n$, $n = 1, 2, \ldots$) и не возрастает ($x_{n+1} \leqslant x_n$), и тогда тоже существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant m$.

Рассмотрим переменную

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Вот таблица первых ее значений:

$$u_1 = 2; \quad u_2 = 2{,}25; \quad u_3 \approx 2{,}37; \quad u_4 \approx 2{,}44; \ldots$$

Мы видим, что для малых n переменная u_n возрастает. Можно установить и в общем случае, разлагая выражение (13) по формуле бинома Ньютона (см. п. 4.1.2), что (доказательство см. ниже).

$$u_n < u_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Кроме того, с помощью разложения по биному Ньютона доказывается, что переменная u_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) ограничена сверху числом 3. Но тогда на основании теоремы 1 переменная u_n имеет предел, не превышающий 3.

Этот предел называется *числом e*. Он равен [1])

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots \,. \tag{14}$$

Если положить в формуле (14) $\alpha = 1/n$, то получим, что при $n \to \infty$ будет $\alpha \to 0$, и, следовательно,

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e. \tag{15}$$

Мы установили формулу (15) в предположении, что α стремится к нулю по закону $\alpha = 1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Но можно доказать, что эта формула, и этим мы будем пользоваться в дальнейшем, верна при любом способе стремления α к нулю.

Хорошо известно, что e — число иррациональное. В дальнейшем мы увидим, что с точки зрения дифференциального и интегрального исчисления *число e надо рассматривать как естественное основание для логарифмов*. Логарифм числа x при основании e имеет специальное обозначение:

$$\log_e x = \ln x,$$

и называется *натуральным логарифмом числа x*.

Докажем приведенные выше утверждения.

Согласно формуле бинома Ньютона для натурального n имеют место равенства

$$u(n) = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

$$u(n+1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^n}.$$

Члены суммы $u(n)$ меньше соответствующих членов $u(n+1)$ и, кроме того, $u(n+1)$ имеет на один (последний) положительный член больше чем $u(n)$. Поэтому $u(n) < u(n+1)$ ($n = 1, 2, \ldots$) и переменная $u(n)$ возрастает

[1]) Читатель, который ознакомится с дополнительной главой 2, может вычислить самостоятельно число e с любой степенью точности.

Далее

$$u(n)=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots<$$

$$<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

Это показывает, что переменная $u(n)$ ограничена сверху числом 3.

Таким образом, переменная $u(n)$ возрастает и ограничена сверху числом 3. По теореме 1 она имеет предел, не превышающий 3, который мы называем числом e.

Мы доказали равенство (14), когда n стремится к бесконечности, пробегая натуральные числа. Но равенство (14) верно и тогда, когда n стремится к ∞ любого знака и при том, пробегая любые числовые значения не обязательно натуральные. Докажем это.

Пусть сначала n стремится к $+\infty$, пробегая какие-либо значения не обязательно целые. Обозначим через $[n]$ целую часть n. Таким образом, например,

$$[7{,}3]=7,\qquad [7]=7.$$

Для любого положительного числа n имеют место очевидные неравенства

$$[n]\leqslant n<[n+1].$$

Но тогда

$$\left(1-\frac{1}{[n]+1}\right)^{[n]+1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{[n]}\right)^{[n]+2}<e\left(1+\frac{1}{[n]}\right)^{2}.$$

Деля на $1+\frac{1}{n}$ получим неравенства

$$\frac{\left(1+\frac{1}{[n]+1}\right)^{[n]+1}}{1+\frac{1}{n}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e\,\frac{\left(1+\frac{1}{[n]}\right)^{2}}{1+\frac{1}{n}}. \tag{16}$$

Будем n стремить к $+\infty$. Тогда переменное число $[n]+1$ будет тоже стремиться к $+\infty$, пробегая натуральные числа. Но тогда числитель в левой части соотношений (16) стремится к e. Что же касается знаменателя, то он стремится к 1. Следовательно, левая и правая части в (16) стремятся к e, но тогда средняя часть, равная $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ тоже стремится к e. Этим доказана верность равенства (14), когда положительное n стремится к $+\infty$ по любому закону.

Пусть теперь $n\to-\infty$, тогда $m=-n\to+\infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m}=$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)\right]=e\cdot 1=e.$$

Теперь уже равенство (14) доказано как в случае $n \to +\infty$, так и в случае $n \to -\infty$, где числа n не обязательно целые.

Введем теперь новую переменную α при помощи равенства

$$\alpha = \frac{1}{n}.$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

и мы доказали формулу (15), когда α стремится к нулю по любому закону.

Пример 1. Если $0 < q < 1$, то переменная q^n убывает $(q^{n+1} < q^n)$ и ограничена снизу числом 0 $(0 < q^n)$. Поэтому на основании замечания 1 существует предел

$$\lim_{n \to \infty} q^n = A \geqslant 0.$$

На самом деле $A = 0$, потому что

$$A = \lim_{n+1 \to \infty} q^{n+1} = \lim_{n \to \infty} q^{n+1} = \lim_{n \to \infty} (q^n \cdot q) = \lim_{n \to \infty} q^n \cdot q = Aq$$

и $A = Aq$, т. е. $A(1 - q) = 0$, откуда $A = 0$.

Пример 2.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2} \cdot 2} = \lim_{\alpha \to 0} [(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^2 =$$

$$= [\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^2 = e^2.$$

Задача 5. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; 4) $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + 2\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

(см. далее п. 1.4.2, пример 1).

§ 1.4. Непрерывность функции

1.4.1. Понятие непрерывности функции. На рис. 16 изображен график функции $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Его естественно назвать *непрерывным* графиком, потому что он может быть нарисован одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги. Зададим произвольную точку (число) x отрезка $[a, b]$. Близкая к ней другая точка x' отрезка $[a, b]$ может быть записана в виде $x' = x + \Delta x$, где Δx есть число положительное или отрицательное, называемое *приращением* x. Разность

$$\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением функции* f в точке x, соответствующим приращению Δx. На рис. 16 Δy равно длине отрезка BC.

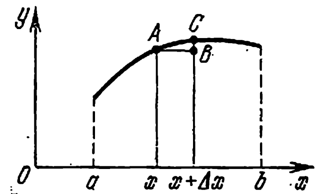


Рис. 16.

Будем стремить Δx непрерывно к нулю; тогда для рассматриваемой функции, очевидно, и Δy будет стремиться к нулю:

$$\Delta y \to 0 \qquad (\Delta x \to 0). \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь график функции $F(x)$, изображенный на рис. 17. Он состоит из двух непрерывных кусков PA и QR. Однако эти куски не соединены непрерывно, и потому график естественно назвать *разрывным*. В точке x_0 нам надо как-то определить нашу функцию; условимся, что $F(x_0)$ равно длине отрезка, соединяющего A и x_0; в знак этого точка A изображена на графике жирно, в то время как у точки Q нарисована стрелка, указывающая, что Q не принадлежит графику. Если бы точка Q принадлежала графику, то функция f была бы двузначной в точке x_0.

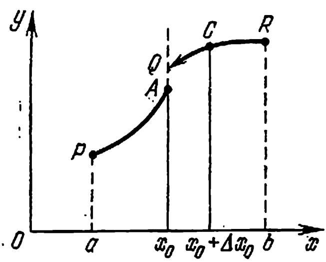


Рис. 17.

Придадим теперь x_0 приращение Δx_0 и определим соответствующее приращение функции:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0).$$

Если мы будем Δx_0 стремить непрерывно к нулю, то теперь уже нельзя сказать, что ΔF будет стремиться к нулю. Для отрицательных Δx_0, стремящихся к нулю, это так, но для положительных вовсе не так: из рисунка видно, что если Δx_0, оставаясь положительным, стремится к нулю, то соответствующее приращение ΔF при этом стремится к положительному числу, равному длине отрезка AQ.

После этих рассмотрений естественно ввести следующее определение. *Функция f, заданная на отрезке* $[a, b]$, *называется непрерывной в точке x этого отрезка, если приращение ее в этой точке, соответствующее приращению Δx* [1]), *стремится к нулю при любом способе стремления Δx к нулю при $\Delta x > 0$ и $\Delta x < 0$.* Это свойство (непрерывности в x) записывается в виде соотношения (1) или еще так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{2}$$

Запись (2) читается так: предел Δy равен нулю, когда Δx стремится к нулю по любому закону. Впрочем, выражение «по любому закону» обычно опускают, подразумевая его. В частности, Δx может пробегать любую стремящуюся к нулю последовательность, значения которой могут быть как положительными, так и отрицательными.

Если определенная на отрезке $[a, b]$ функция f не является непрерывной в точке x этого отрезка, т. е. в этой точке для нее не выполняется свойство (2) хотя бы при одном способе стремления Δx к нулю, то она называется *разрывной в точке x*.

Функция, изображенная на рис. 16, непрерывна в любой точке x отрезка $[a, b]$; функция же, изображенная на рис. 17, очевидно, непрерывна в любой точке x отрезка $[a, b]$, за исключением точки x_0, потому что для последней соотношение (2) не выполняется, когда $\Delta x_0 \to 0$, оставаясь положительным.

Функция, непрерывная в любой точке отрезка (интервала), называется *непрерывной* на нем.

Непрерывная функция математически выражает свойство, с которым нам приходится часто встречаться на практике, заключающееся в том, что малому приращению независимой переменной соответствует малое же приращение зависимой от нее переменной (функции).

Прекрасными примерами непрерывной функции могут служить различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимости пути s, пройденного телом, от времени t. Время и пространство непрерывны, при этом тот или иной закон движения $s = f(t)$ устанавливает между

---

[1]) Здесь имеется в виду Δx такое, что $x + \Delta x$ принадлежит $[a, b]$.

ними определенную непрерывную связь, характеризующуюся тем, что малому приращению времени соответствует малое приращение пути.

К абстракции непрерывности человек пришел, наблюдая окружающие его так называемые сплошные среды — твердые, жидкие или газообразные, например металлы, воду, воздух. На самом деле, всякая физическая среда представляет собой скопление большого числа отделенных друг от друга движущихся частиц. Однако эти частицы и расстояния между ними настолько малы по сравнению с объемами сред, с которыми приходится иметь дело в макроскопических физических явлениях, что многие такие явления можно достаточно хорошо изучать, если считать приближенно массу изучаемой среды непрерывно распределенной, без всяких просветов в занятом ею пространстве. На таком допущении базируются многие физические дисциплины, например гидродинамика, аэродинамика, теория упругости. Математическое понятие непрерывности, естественно, играет в этих дисциплинах, как и во многих других, большую роль.

Из (1) следует

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x_0) + (f(x) - f(x_0))] = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \\ + \lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = f(x_0) + 0 = f(x_0),$$

и мы получили равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{3}$$

которое может служить другим эквивалентным определением непрерывности f в точке x_0: *если функция f непрерывна в точке x_0, то она должна быть определена в окрестности этой точки, в том числе в самой точке x_0, должен существовать предел f в точке x_0 и должно выполняться равенство* (3).

Равенство (3) можно еще записать так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x). \tag{4}$$

Говорят, что если функция f непрерывна в точке x_0, то «предел $f(x)$ при $x \to x_0$ равен f от $\lim x$», или еще говорят, что в этом случае символы f и $\lim$ перестановочны.

1.4.2. Непрерывность элементарных функций. В § 1.2 был дан список простейших элементарных функций и приведены их графики. Они непрерывны на областях их определения (интервалах или отрезках). Это надо учитывать при вычислении пределов этих функций. Справедливы, например, равенства:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n \quad (n = 1, 2, \ldots, \quad -\infty < x_0 < \infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} x^p = x_0^p \quad (p \neq 0, \quad 0 < x_0 < \infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \quad (a > 0,\ a \neq 1, \quad -\infty < x_0 < \infty)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \ (a > 0, \quad a \neq 1, \quad 0 < x_0 < \infty)$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty)$;

6) $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \ (-\infty < x_0 < \infty)$;

7) $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$

$$\left(x_0 \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right);$$

8) $\lim\limits_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0 \ (-1 \leqslant x_0, x \leqslant 1)$;

9) $\lim\limits_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0 \quad (-1 \leqslant x_0, x \leqslant 1)$;

10) $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty)$.

Пример 1. Если $p \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}\cdot p} = \lim_{\alpha\to 0}\left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^p =$$

$$= \left[\lim_{\alpha\to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^p = e^p.$$

Здесь предпоследнее равенство верно в силу 2).

1.4.3. Непрерывность сложной функции. При вычислении пределов функции надо учитывать, что если функция $x = \varphi(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = \varphi(u_0)$, то функция

$$F(u) = f[\varphi(u)]$$

непрерывна в точке u_0. Ведь

$$\lim_{u\to u_0} F(u) = \lim_{u\to u_0} f[\varphi(u)] = \lim_{x=\varphi(u)\to x_0} f[\varphi(u)] = \lim_{x\to x_0} f(x) =$$

$$= f(x_0) = F[\varphi(u_0)]. \quad (5)$$

Пример 1. Функцию $y = \sin x^3$ можно записать через две непрерывные функции $y = \sin u$, $u = x^3$, поэтому она тоже непрерывна для всех x.

Пример 2. Функцию $y = e^{2x}$ можно записать через две непрерывные функции $y = e^u$, $u = 2x$, поэтому она тоже непрерывна для всех x.

Пример 3. Функцию

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

можно записать в виде цепи функций

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 1 - v, \quad v = x^2.$$

Первая из этих трех функций непрерывна для $u \geqslant 0$, вторая непрерывна для всех v, и третья непрерывна для всех x. Это показывает, что исходная функция непрерывна для всех тех x, для которых $1 - x^2 \geqslant 0$, т. е. для x, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Задача 1. Выяснить, для каких x непрерывны функции e^{x^2}, $\cos^2 x$, $\cos 3x$, $\ln(1 + x)$, 10^{x+1}, $\operatorname{tg} 2x$, $x^2 + 2x - 1$, $\frac{x+3}{x-1}$.

Непрерывные функции образуют основной класс функций, с которыми оперирует математический анализ.

1.4.4. Разрывные функции. Разрывные функции в математике отражают скачкообразные процессы, встречающиеся в природе. При ударе, например, величина скорости тела меняется скачкообразно. Многие качественные переходы сопровождаются скачками. Например, зависимость $Q = f(t)$ между температурой t одного грамма воды (льда) и количеством Q калорий находящегося в ней тепла, когда t изменяется между $-10°$ и $+10°$, если принять условно, что при $-10°$ величина $Q = 0$, выражается следующими формулами:

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}5t + 5, & -10 \leqslant t < 0, \\ t + 85\ ^{1)}, & 0 < t < 10. \end{cases}$$

Мы считаем, что теплоемкость льда равна 0,5. При $t = 0$ эта функция оказывается неопределенной — многозначной; можно для удобства условиться, что при $t = 0$ она принимает вполне определенное значение, например

1) Удельная теплота таяния льда при 0° равна 80 калориям.

$f(0) = 45$. Функция $Q = f(t)$, очевидно, разрывная при $t = 0$, изображена на рис. 18.

На рис. 6, 18, 12, 19 изображены графики некоторых функций, имеющих разрывы в отдельных точках. Стрелка означает, что в соответствующем месте на графике нет точки.

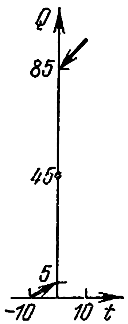


Рис. 18.

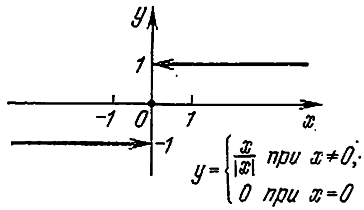


Рис. 19.

На рис. 6 изображен график функции $y = \operatorname{tg} x$. Он непрерывен во всех точках x, исключая точки $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Мы видим, например, что когда x стремится к $\pi/2$ возрастая, то $\operatorname{tg} x \to +\infty$; если же x стремится к $\pi/2$ убывая, то $\operatorname{tg} x \to -\infty$ (см. п. 1.3.5 (7) и (7')).

Поясним рис. 19. При $x > 0$

$$\frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1.$$

При $x < 0$

$$\frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1.$$

При $x = 0$ формула $x/|x|$ не имеет смысла. Но положено, что при $x = 0$ $y = 0$. Обозначим для удобства эту функцию через $f(x)$. Она непрерывна в любой точке $x \neq 0$. Кроме того,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 = 1, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-1) = -1$$

и $f(0) = 0$. Но тогда функция f в точке $x = 0$ разрывна. Существуют ее правый и левый пределы в этой точке, но предел не существует.

На рис. 12 изображен график функции $f(x) = (\sin x)/x$. Она определена и непрерывна для всех $x \neq 0$. Непрерывность следует из того, что функции $y = \sin x$ и $y = x$ отдельно непрерывны, поэтому их частное тоже есть непрерывная функция для тех x, для которых знаменатель не равен нулю, т. е. для всех x, исключая $x = 0$.

Из графика видно, и мы это подкрепили выше вычислениями, что

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Положив $f(0) = 1$, мы получим, что функция $f(x)$ будет определена и непрерывна для всех x, в том числе и $x = 0$.

Обратим внимание на график функции $y = \sin(1/x)$, изображенный на рис. 14. Эта функция не определена при $x = 0$, и ее пределы в точке $x = 0$ (правый и левый) не существуют. Следовательно, функция $\sin(1/x)$ будет иметь разрыв в точке $x = 0$, при любом доопределении ее в этой точке.

Часто встречаются функции $f(x)$, непрерывные на некотором интервале, за исключением отдельных точек x_0, где

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Говорят, что в таких точках функция f имеет *бесконечный разрыв*. Например, функция

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x+3)}$$

непрерывна на $(-\infty, \infty)$, за исключением точек $x = 2$, $x = -3$, где она имеет бесконечный разрыв:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{(x-2)(x+3)} = \infty, \quad \lim_{x\to -3} \frac{x^2+1}{(x-2)(x+3)} = \infty.$$

Задача 2. В каких точках имеют бесконечный разрыв функции

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{x+1}{x^2-3x+2}, \quad \frac{x^2+x+2}{x-3}, \quad \frac{x-2}{x+5}?$$

Задание. Надо знать два определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0: 1) на языке приращений (если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$) и 2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Надо знать также, что если функция $f(x)$ непрерывна в любой точке интервала (отрезка), то ее график непрерывен на этом интервале (отрезке), и обратно, непрерывность графика $f(x)$ на интервале (отрезке) влечет непрерывность $f(x)$ во всех его точках.

Обратите внимание на список основных элементарных функций, где указаны интервалы их непрерывности. Важно также обратить внимание на формулу (5) п. 1.4.3, выражающую непрерывность сложной функции.

§ 1.5. Производная

Понятие производной возникло как результат многовековых усилий, направленных на решение таких задач, как задача о проведении касательной к кривой, о вычислении скорости неравномерного движения. Подобными задачами и задачей о вычислении площади криволинейной фигуры занимались математики с древних времен. В XVII веке в работах Ньютона и Лейбница эта деятельность получила определенное теоретическое завершение. Ньютон и Лейбниц [1]) создали общие методы дифференцирования и интегрирования функций и доказали важную теорему, носящую их имя, устанавливающую тесную связь между операциями дифференцирования и интегрирования. Надо, однако, иметь в виду, что современное изложение этих вопросов существенно отличается от того, как они излагались во времена Ньютона и Лейбница. В рассуждениях и понятиях, которыми оперировали в то время, с нашей точки зрения, можно найти много неясного; да и сами математики того времени это сознавали, о чем свидетельствуют ожесточенные дискуссии, которые происходили по этим вопросам между ними.

Современный математический анализ базируется на понятии предела, которое выкристаллизовалось в четкую формулировку не так уж давно — в первой половине прошлого столетия. Большая заслуга в этом принадлежит французскому математику Коши [2]).

---

[1]) И. Ньютон (1643—1727) — гениальный английский физик и математик. Г. В. Лейбниц (1646—1716) — немецкий ученый, великий математик.

[2]) О. Л. Коши (1789—1857) — французский математик. В его трудах впервые определены понятия математического анализа (предел, непрерывность, интеграл,...) так, как это принято в современной математике.

Понятие предела существенно используется в определениях понятий непрерывности функции, производной, интеграла.

1.5.1. Мгновенная скорость. Пусть точка движется по прямой и функция $s = f(t)$ выражает зависимость от времени t $(a < t < b)$ ее расстояния (с учетом знака) до начальной точки O прямой. В момент времени t точка находится на расстоянии $s = f(t)$ от O. В момент же времени $t + \Delta t$ $(\Delta t \neq 0)$ она находится на расстоянии $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ от O. Средняя скорость ее на промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Мгновенную, или истинную, скорость v точки в момент времени t естественно определить как предел, к которому стремится $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Пример. Как известно, свободно падающее тело под влиянием силы притяжения Земли движется в безвоздушном пространстве по закону

$$s = g\frac{t^2}{2}$$

в предположении, что отсчет пути происходит с момента времени $t = 0$ и скорость тела в момент $t = 0$ равна нулю.

Мгновенная скорость тела в момент времени t $(t > 0)$ равна

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2}g \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \frac{g}{2}2t = gt,$$

и мы получили известную формулу для скорости равномерно ускоренного движения:

$$v = gt.$$

Задача 1. Вычислить мгновенную скорость в момент времени t точки, движущейся по закону:

$$\text{а) } s = 2t + 4; \quad \text{б) } s = t^3.$$

1.5.2. Касательная к кривой и сила тока. Рассмотрим какую-нибудь непрерывную кривую Г в плоскости или пространстве (рис. 20). Пусть A — лежащая на ней точка и A' — другая лежащая на Г точка. Прямую S, проходящую через A и A', будем называть *секущей* (кривую Г). Будем теперь точку A' двигать непрерывно по Г, неограниченно приближая к A. Тогда секущая S будет вращаться относительно A. Может случиться, что при этом S будет стремиться занять в пределе положение

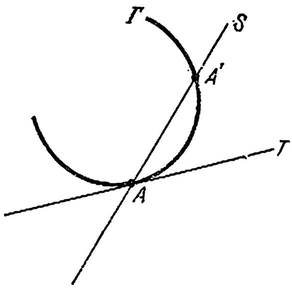


Рис. 20.

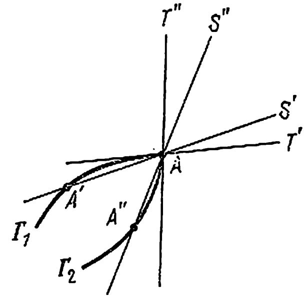


Рис. 21.

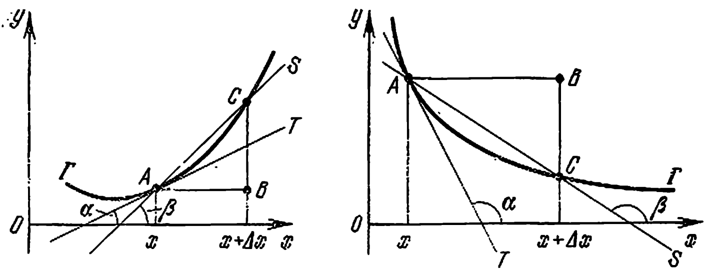
вполне определенной (проходящей, очевидно, через A) прямой, которую мы обозначили через T. Если это будет иметь место, то говорят, что кривая Г имеет в точке A *касательную*. Именно прямую T называют *касательной* к Г в точке A.

Не всякая непрерывная кривая в любой ее точке имеет касательную. Тривиальным примером этого может служить кривая, изображенная на рис. 21. Она состоит из двух гладких кусков Γ_1 и Γ_2, соединенных в точке A «под углом». На рисунке отмечены две другие точки A', A'', соответственно лежащие на Γ_1, Γ_2; через S' и S'' обозначены проходящие через A', A'' и A секущие.

Очевидно, что если A', A'', двигаясь соответственно по Γ_1, Γ_2, будут приближаться к A, то секущие S', S'' будут стремиться занять в пределе положение двух разных прямых T' и T''. Поэтому рассматриваемая кривая не имеет касательной в точке A. Впрочем, можно было бы, развивая введенное определение, сказать, что наша кривая имеет в точке A две односторонние касательные, но об этом речь сейчас не идет.

Пусть теперь кривая Γ есть график непрерывной на интервале (a, b) функции $y = f(x)$ (рис. 22, *а* или *б*).

Зададим на Γ точку A, имеющую абсциссу x и ординату y, и другую точку C, имеющую абсциссу $x + \Delta x$ $(\Delta x \neq 0)$ и соответствующую ординату $y + \Delta y$. Секущая S,



а) $\Delta x = AB$, $\Delta y = BC$ б) $\Delta x = AB$, $\Delta y = -BC$

Рис. 22.

проходящая через A и C, очевидно, образует с положительным направлением оси x угол β, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В случае рис. 22, *а* $0 < \beta < \pi/2$, а в случае рис. 22, *б* $\pi/2 < \beta < \pi$. Будем Δx стремить к нулю; тогда, вследствие непрерывности f, будет также Δy стремиться к нулю и точка C, двигаясь по Γ, будет стремиться к точке A. Если окажется (этого может и не быть!), что при этом отношение $\Delta y / \Delta x$ стремится при любом способе стремления Δx к нулю к одному и тому же конечному пределу (числу) k:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to k \qquad (\Delta x \to 0),$$

то тогда и угол β будет стремиться к некоторому отличному от $\pi/2$ углу α. Вместе с β и секущая S, вращаясь около точки A, будет стремиться занять в пределе положение прямой T, проходящей через A под углом α к положительному направлению оси x. Но тогда T есть касательная к Γ в точке A и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

(Для рис. 22, *а* $0<\alpha<\pi/2$ и для рис. 22, *б* $\pi/2<\alpha<\pi$.) Мы установили, что, *если отношение* $\Delta y/\Delta x$ *при* $\Delta x \to 0$ *стремится к конечному пределу, то кривая* Γ *имеет в точке* A *касательную, тангенс угла которой с положительным направлением оси* x *равен этому пределу.*

Задача 2. Нарисовать в прямоугольной системе координат параболу $y = x^2$ и касательную к ней в точке, имеющей абсциссу $x = 1$. Найти угловой коэффициент этой касательной, т. е. тангенс угла, образованного ею с положительным направлением оси x.

Сила тока. Допустим, что известна функция $Q = f(t)$, выражающая количество электричества, прошедшее через фиксированное сечение провода за время t. За период от t до $t + \Delta t$ через сечение протекает количество электричества $\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$. Средняя сила тока при этом равна

$$I_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ дает силу тока в момент t:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

1.5.3. Производная. Все три рассмотренные задачи, несмотря на то что они относятся к различным областям человеческого знания — механике, геометрии, теории электричества,— привели к одной и той же математической операции, которую нужно произвести над функцией. Надо найти предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Мы могли бы как угодно увеличить число задач, решение которых приводится к подобной операции. К ней приводят задачи о скорости химической реакции, о плотности неравномерно распределенной массы и др.

Естественно, что эта операция получила в математике специальное название. Она называется операцией *дифференцирования функции*. Результат ее называется *производной*.

Итак, *производной от функции* f, *заданной на некотором интервале* (a, b), *в точке* x *этого интервала, называется предел, к которому стремится отношение приращения функции* f *в этой точке к соответствующему при-*

ращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Производную принято обозначать так [1]:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Но широко употребляются и другие обозначения: y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$. Результаты рассмотренных примеров теперь можно сформулировать так:

Скорость точки, пройденный путь которой s есть функция $s = f(t)$ от времени t, равна производной от этой функции $s' = f'(t)$.

Тангенс угла α между касательной к кривой $y = f(x)$ в точке, имеющей абсциссу x, и положительным направлением оси x равен производной $f'(x)$.

Сила тока I в проводе в момент t, если функция $Q = f(t)$ выражает количество электричества, прошедшее за время t через сечение провода, равна производной $I = Q' = f'(t)$.

1.5.4. Непрерывность функции, имеющей производную. *Если функция f имеет в точке x производную, т. е. для нее отношение $\Delta y/\Delta x$ стремится при $\Delta x \to 0$ к конечному числу $f'(x)$:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x) \qquad (\Delta x \to 0), \tag{1}$$

то она необходимо непрерывна в этой точке.

В самом деле, из (1) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \tag{2}$$

где

$$\alpha(\Delta x) \to 0, \quad \Delta x \to 0.$$

Но тогда приращение Δy нашей функции можно записать в виде суммы

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

двух слагаемых, каждое из которых стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

---

[1] Предел $\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y/\Delta x)$, где рассматриваются только $\Delta x > 0$ или только $\Delta x < 0$, называется соответственно *правой* или *левой производной* от f в точке x. Про функцию f, заданную на отрезке $[a, b]$ принято говорить, что она имеет на этом отрезке производную, если она имеет производную в любой точке интервала (a, b) и, кроме того, правую производную в точке a и левую — в точке b.

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

т. е. функция f непрерывна в точке x.

Обратное утверждение не всегда верно. Если функция f непрерывна в точке x, то она может и не иметь производной в этой точке. Например, функция

$$y = |x| \quad (-\infty < x < \infty),$$

как видно из ее графика (рис. 23), непрерывна для всех x, но в точке $x = 0$ не имеет производной. В этой точке не существует касательной к графику. Есть правая касательная и левая, но они не совпадают.

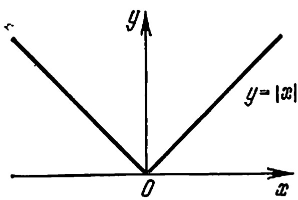


Рис. 23.

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла между этой прямой и положительным направлением оси x. Прямые S и T на рис. 22, *а* образуют острые углы β, α с положительным направлением оси x, а на рис. 22, *б* — тупые углы.

Задача 3. Найти угловые коэффициенты касательных к кривым (уравнения которых заданы ниже) в заданных точках x_0:

а) $y = x^2$, $x_0 = 1$;

б) $y = x^3$, $x_0 = 1$;

в) $y = \sin x$, $x_0 = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$.

Задача 4. Вычислить $f'(0)$, если $f(x) = \sqrt{1 + x}$ или $f(x) = 1/(1 + x)$.

Задание. Надо усвоить определение производной и хорошо понять ее геометрический и механический смысл.

1.5.5. Формулы дифференцирования. При любом натуральном n справедлива формула

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{3}$$

В самом деле, считая $\Delta x = h$, в силу формулы бинома Ньютона будем иметь (см. далее п. 4.1.2)

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n \right) =$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \lim_{h \to 0} h + \ldots + (\lim_{h \to 0} h)^{n-1} = nx^{n-1},$$

где мы воспользовались элементарными свойствами пределов.

На самом деле формула (3) верна при любом n положительном и отрицательном — не обязательно натуральном. Это будет доказано ниже.

Справедливы также формулы

$$(\sin x)' = \cos x, \tag{4}$$

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{5}$$

Докажем равенство (4), доказательство (5) предоставляем читателю

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(h/2)}{h/2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2}\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Мы воспользовались свойством $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ и тем фактом, что функция $\cos x$ непрерывна.

Производная от функции $f(x)$ есть в свою очередь функция $f'(x)$. Если производная от $f'(x)$ существует, то она называется *второй производной* от $f(x)$ и обозначается так: $f''(x)$.

Подобным же образом определяются *высшие производные* $f^{(n)}(x)$ от $f(x)$ порядка n, где n — любое натуральное число.

Вторая производная от функции $s = f(t)$, выражающей закон движения точки на прямой, равна, очевидно, ускорению этой точки в момент времени t.

Уже из сказанного видно, что понятие производной имеет громадное значение в прикладных вопросах, но оно является фундаментальным и в самой математике.

Отметим, что *постоянное число* C, рассматриваемое как функция от x, *имеет производную, равную нулю тождественно* (т. е. равную нулю для всех x). В самом деле,

$$f(x) = C, \quad f(x+\Delta x) = C, \quad C' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0. \tag{6}$$

Отметим еще, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некоторой точке x производную и A, B — постоянные числа, то функция

$$f(x) = Au(x) + Bv(x) \tag{7}$$

также имеет производную, равную

$$f'(x) = Au'(x) + Bv'(x). \tag{8}$$

В самом деле,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{Au(x+h)+Bv(x+h)-[Au(x)+Bv(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(A\,\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(B\,\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right) =$$

$$= A\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + B\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} =$$

$$= Au'(x) + Bv'(x). \tag{9}$$

Во втором равенстве в этой цепочке равенств мы воспользовались тем фактом, что предел суммы равен сумме пределов, и в третьем — что постоянную законно вынести за знак предела.

По индукции можно доказать более общее утверждение [1]):

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j'(x),$$

где a_j — постоянные числа, а про функции $u_j(x)$ предполагается, что они имеют производные.

В частности, получим производную от многочлена:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

(a_k — постоянные).

Задача 5. Вывести формулу (5).

Задача 6. Вычислить производные от функций $x^2 - 3x + 1$, $x^3 + 6x - x + 7$, $2\cos x - 3\sin x + x - 2$, $5\sin x + 4\cos x - x^2 + 7$.

Задание. Формулы производных от x^n, $\sin x$, $\cos x$ запомнить.

1.5.6. Производная от показательной функции. Производная от a^x вычисляется по формуле

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (a > 0, \quad a \neq 1). \tag{10}$$

---

[1]) Надо иметь в виду обозначение

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{1}^{n} \alpha_j.$$

В частности,

$$(e^x)' = e^x. \tag{11}$$

В самом деле,

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x\,\frac{a^h-1}{h} = a^x \lim_{z\to 0}\frac{z}{\log_a(1+z)} =$$

$$= a^x\,\frac{1}{\lim\limits_{z\to 0}\log_a(1+z)^{1/z}} = a^x\,\frac{1}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

Здесь мы воспользовались подстановкой $a^h - 1 = z \to 0$ $(h\to 0)$, откуда $h = \log_a(1+z)$. Надо учесть, что функция $\log_a u$ для $u > 0$, в частности при $u = e$, непрерывна $(\log_a u \xrightarrow[u\to e]{} \log_a e)$.

1.5.7. Производная от логарифмической функции. Производная от $\log_a x$ вычисляется по формуле

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}. \tag{12}$$

В частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{13}$$

В самом деле,

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+z)^{1/z} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

1.5.8. Производная от произведения и частного. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x, то их произведение и частное (при условии, что $v(x)\neq 0$) имеют производные и справедливы равенства

$$(uv)' = uv' + u'v, \tag{14}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu'-uv'}{v^2} \qquad (v\neq 0). \tag{15}$$

Придадим независимой переменной x приращение Δx. Пусть соответствующие приращения функций u и v будут

Δu и Δv. Тогда

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta (uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = uv' + vu',$$

потому что из того, что v имеет производную, следует, что она непрерывна, т. е. что $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

В частности, если C — постоянная, то

$$(Cu)' = Cu' + C'u = Cu', \tag{16}$$

потому что $C' = 0$.

Далее,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v (v + \Delta v)} =$$

$$= \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

1.5.9. Производная от $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\cos x \neq 0), \tag{17}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x (\cos x)' - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x \qquad (\sin x \neq 0). \tag{18}$$

1.5.10. Задачи. З а д а ч а 7. Доказать, что

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (x \neq 0);$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots; \quad x \neq 0).$$

Это показывает, что формула (3) верна и при отрицательных целых n. Дальше мы увидим, что она верна и для нецелых n.

З а д а ч а 8. Вычислить производные от следующих функций:

$$\frac{\cdot}{x-1}, \quad \frac{x-1}{x+1}, \quad \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad \frac{x^2+2x-1}{x}, \quad 2 \sin x \cos x,$$

$$2e^x + 3\ln x - 5,\quad \sec x,\quad e^x \sin x,\quad e^x \cos x,\quad xe^x,$$
$$x^2e^x,\quad \frac{e^x}{x},\quad \frac{\sin x}{x},\quad x\ln x,\quad x^2\ln x.$$

1.5.11. Производная сложной функции. Пусть

$$y = f(x) = \varphi[\psi(x)]$$

есть сложная функция, заданная на некотором интервале. При этом известно, что функции

$$y = \varphi(u), \qquad u = \psi(x)$$

имеют производные. Тогда функция $y = f(x)$ тоже имеет производную, вычисляемую по формуле

$$y'_x = y'_u u'_x, \tag{19}$$

где y'_x есть производная от y по x ($y'_x = f'(x)$), а y'_u есть производная от y по u ($y'_u = \varphi'(u)$), или,

$$f'(x) = \varphi'(u)\psi'(x). \tag{19'}$$

Чтобы доказать (19), зададим x и придадим ему произвольное приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда и $u = \psi(x)$ получит соответствующее приращение Δu, а y ($y = \varphi(u)$) получит в свою очередь определенное приращение Δy.

Имеем при условии, что $\Delta u \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (\Delta u \neq 0). \tag{20}$$

Если перейти в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, то получим

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u u'_x,$$

т. е. формулу (19).

Надо учесть, что так как функция $u = \psi(x)$ имеет по условию производную, то $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Замечание. В равенстве (20) мы предполагали, что каждому достаточно малому $\Delta x \neq 0$ соответствует $\Delta u \neq 0$. Если случится, что $\Delta u = 0$ при некотором Δx, то уже делить и умножать на Δu нельзя и надо доказывать формулу (19) другим путем. Это можно сделать, но мы соответствующее доказательство не приводим, тем более что этот случай встречается редко.

П р и м е р 1. $y = e^{2x}$. Полагаем $y = e^u$, $u = 2x$; поэтому

$$y'_x = (e^u)'_u (2x)'_x = e^u \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

П р и м е р 2. $y = e^{x^2}$. Полагаем $y = e^u$, $u = x^2$; поэтому

$$y'_x = (e^u)'_u (x^2)'_x = e^u 2x = e^{x^2} \cdot 2x.$$

П р и м е р 3. $y = \sin(kx + b)$. Полагаем $y = \sin u$, $u = kx + b$; поэтому

$$y'_x = (\sin u)'_u (kx + b)'_x = (\cos u)k = k \cos(kx + b).$$

П р и м е р 4. $y = x^a = e^{a \ln x}$ $(x > 0,\ a \neq 0)$. Полагаем $y = e^u$, $u = a \ln x$; поэтому

$$y'_x = (e^u)'(a \ln x)' = e^u \frac{a}{x} = \frac{ae^{a \ln x}}{x} = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}.$$

Мы получили формулу

$$(x^a)' = ax^{a-1},$$

верную при любом $a \neq 0$, не обязательно целом. Таким образом, например,

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

П р и м е р 5. $y = \sin^3 x^2$. Полагаем $y = u^3$, $u = \sin z$, $z = x^2$. Поэтому

$$y'_x = y'_u u'_x = y'_u u'_z z'_x = 3u^2 \cos z \cdot 2x =$$
$$= 6x \sin^2 z \cos z = 6x \sin^2 x^2 \cos x^2.$$

З а д а ч а 9. Вычислить производные от функций:

1) e^{-x^2}; 2) e^{-x}; 3) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

4) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$; 5) $\cos(kx + b)$; 6) $\sin^3 x$;

7) $\sin^3 2x$; 8) $\sqrt{x + 1}$; 9) $\sqrt{x^2 + x}$;

10) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$; 11) $\ln(2x - 3)$; 12) $\sqrt[3]{x^2 - 1}$;

13) e^{3x-5}; 14) $\sqrt{a^2 + x^2}$; 15) $\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

1.5.12. Производная обратной функции. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную и возрастающую на отрезке $[a, b]$. Последнее означает, что большему значению x из отрезка $[a, b]$ соответствует большее значение y (рис. 24).

Пусть $c = f(a)$, $d = f(b)$. На рис. 24 видно, что каждому значению y из отрезка $[c, d]$ соответствует, и притом одно, значение x из отрезка $[a, b]$ такое, что $y = f(x)$. Этим мы задали на отрезке $[c, d]$ вполне определенную функцию $x = \varphi(y)$, которая называется *обратной функцией* по отношению к функции $y = f(x)$. На рис. 24 видно, что функция $\varphi(y)$ непрерывна.

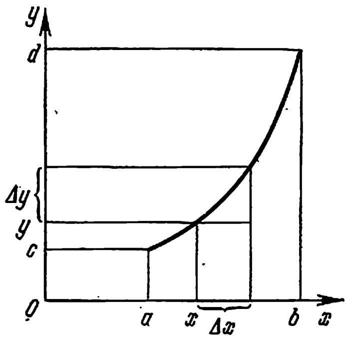


Рис. 24.

Так как функция $f(x)$ возрастает и непрерывна, то при $\Delta x \neq 0$ и $\Delta x \to 0$ будет $\Delta y \neq 0$ и $\Delta y \to 0$, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x/\Delta y}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta x/\Delta y}.$$

Мы получили формулу для производной обратной функции:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \qquad (x'_y \neq 0); \tag{21}$$

она верна, если существует производная $x'_y \neq 0$.

П р о и з в о д н а я $\arcsin x$. Пусть

$$y = \arcsin x \qquad (-1 < x < 1). \tag{22}$$

Это непрерывная, строго возрастающая функция на интервале $(-1, +1)$. Обратная к ней функция, тоже непрерывная и строго возрастающая, есть

$$x = \sin y \quad (-\pi/2 < y < \pi/2).$$

В силу формулы (21)

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1). \tag{23}$$

В данном случае $-\pi/2 < y < \pi/2$, поэтому $\cos y > 0$ и перед корнем должен быть знак $+$.

При $x = \pm 1$ правая часть (23) обращается в ∞. Касательная к кривой (22) в этих точках параллельна оси y.

Задача 10. Пользуясь формулой (21), доказать равенства:

1) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$;

2) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$;

3) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ (учесть, что $(e^x)' = e^x$, $x > 0$);

4) Вычислить производные от следующих функций:

$$\ln(2x), \quad \ln(ax), \quad \operatorname{arctg}\frac{x}{a} \quad (a > 0), \quad \arcsin x + \arccos x.$$

Задание. Запомните формулы производных суммы, разности, произведения и формулы производных основных элементарных функций: x^n, a^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, а также формулу производной сложной функции. Это даст вам возможность вычислить производную любой элементарной функции. Вся трудность здесь сводится к тому, чтобы уметь свести каждую данную элементарную функцию к цепочке основных (простейших) элементарных функций.

§ 1.6. Максимум и минимум функции

На рис. 25 изображена непрерывная функция $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, которую будем предполагать непрерывно дифференцируемой, т. е. имеющей непрерывную производную, на $[a, b]$.

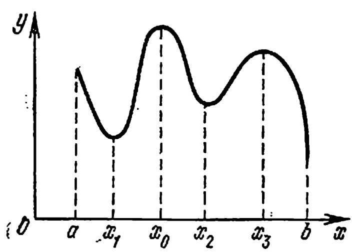


Рис. 25.

На отрезке $[a, b]$ имеются две замечательные точки x_0 и b. Именно ордината $f(x_0)$, соответствующая точке x_0, является наибольшей среди ординат $f(x)$, соответствующих любым точкам x отрезка $[a, b]$, а ордината $f(b)$ является наименьшей среди указанных $f(x)$.

Введем определения. Точка x_0 отрезка $[a, b]$ называется *точкой максимума функции f на этом отрезке*, если $f(x_0)$

есть наибольшее среди значений $f(x)$, соответствующих любым x из $[a, b]$:

$$f(x_0) \geqslant f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

(см. рис. 25). Точка x_1 отрезка $[a, b]$ называется *точкой минимума функции f на этом отрезке*, если $f(x_1)$ есть наименьшее среди значений $f(x)$, соответствующих любым x из $[a, b]$:

$$f(x_1) \leqslant f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Точка максимума или минимума f на отрезке $[a, b]$ называется *точкой экстремума* (extremum) на $[a, b]$.

Аналогично определяются точки экстремума (максимума или минимума) на интервале (a, b), т. е. на совокупности точек x оси x, для которых $a < x < b$.

Введем определения.

Окрестностью точки x_0 (оси x) называется любой интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (оси x) с центром в этой точке $(\delta > 0)$.

Левой окрестностью точки x_0 называется множество точек x, удовлетворяющих условиям $x_0 - \delta < x \leqslant x_0$.

Правой окрестностью точки x_0 называется множество точек x, удовлетворяющих условиям $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$.

На рис. 25 кроме точки x_0 отмечены еще три замечательные точки x_1, x_2, x_3. Точка x_3 не является точкой максимума на $[a, b]$. Однако можно указать ее окрестность $(x_3 - \delta, x_3 + \delta)$ настолько малую, что на ней x_3 есть точка максимума. Такую точку называют точкой *локального максимума* функции f.

Итак, точку x_0 отрезка $[a, b]$ называют *точкой локального максимума* f, если существует ее окрестность, принадлежащая к отрезку $[a, b]$, на которой x_0 есть точка максимума.

Соответственно точку x_0 отрезка $[a, b]$ называют *точкой локального минимума* f, если существует ее окрестность, принадлежащая к отрезку $[a, b]$, на которой x_0 есть точка минимума.

Мы видим (см. рис. 25), что x_1 и x_2 суть точки локального минимума f, а x_0, x_3 — точки локального максимума f. При этом x_0, кроме того, есть точка максимума на отрезке $[a, b]$.

Точки локального максимума и минимума f называют *точками локального экстремума* f.

В точках локального экстремума f, очевидно, *производная от f равна нулю* [1]). В случае рис. 25

$$f'(x_0) = 0, \quad f'(x_1) = 0, \quad f'(x_2) = 0, \quad f'(x_3) = 0.$$

Все же надо иметь в виду, что обратное утверждение не всегда верно. Если производная от f в некоторой точке x_0 равна нулю ($f'(x_0) = 0$), то x_0 может не быть точкой локального экстремума f (см. ниже пример 1).

Дадим формальное доказательство того факта, что *если функция $y = f(x)$ имеет производную* в *точке* x_0, *являющейся точкой локального экстремума f, то производная от f в этой точке равна нулю.*

В самом деле, пусть для определенности f имеет в x_0 локальный максимум. Тогда выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ для точек x, достаточно близких к x_0, независимо от того, будет ли x больше или меньше x_0. Следовательно, для точек x, достаточно близких к x_0,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0, \quad \text{если} \quad x - x_0 > 0, \tag{1}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0, \quad \text{если} \quad x - x_0 < 0. \tag{2}$$

По условию функция f имеет производную в точке x_0, и потому существует предел

$$\lim_{x - x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Но этот предел должен быть одним и тем же числом, будет ли разность $x - x_0$ стремиться к нулю, оставаясь положительной или отрицательной. Из (1) следует, что $f'(x_0) \leqslant 0$, а из (2) следует, что $f'(x_0) \geqslant 0$. Но это возможно, лишь если $f'(x_0) = 0$.

Пример 1. Функция (рис. 26) $f(x) = x^3$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ не имеет локальных экстремумов на отрезке $[-1, +1]$, но ее производная $f'(x) = 3x^2$ в точке $x = 0$ равна нулю ($f'(0) = 0$).

Сказанное поможет нам указать путь, следуя которому можно находить максимум и минимум (экстремумы) функции на отрезке.

Пусть надо найти экстремумы функции f на отрезке $[a, b]$, где она непрерывна и имеет непрерывную производную. Находим производную $f'(x)$; приравниваем ее нулю: $f'(x) = 0$; находим все корни полученного уравнения, принадлежащие к (a, b), считая, что их конечное число:

$$x_1, x_2, \quad \ldots, x_N;$$

[1]) Можно было бы сказать, что функция f имеет правый локальный максимум в точке x_0, если $f(x) \leqslant f(x_0)$ для всех x, принадлежащих к некоторой правой окрестности x_0 ($x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$), как это, например, имеет место для графика на рис. 25 при $x_0 = a$. Но производная $f'(x_0)$ в такой точке не обязательно равна нулю.

вычисляем числа

$$f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_N),\ f(b) \qquad (3)$$

и выбираем среди них наибольшее и наименьшее, которые обозначим соответственно через M и m.

Та из точек $a, x_1, x_2, \ldots, x_N, b$, для которой значения (3) достигают максимума, и есть точка максимума f на $[a, b]$, обозначим ее через x_0. Та же точка, для которой значения (3) достигают минимума, есть точка минимума f на $[a, b]$, обозначим ее через x_0'. Итак,

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) = f(x_0) = M,$$

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) = f(x_0') = m.$$

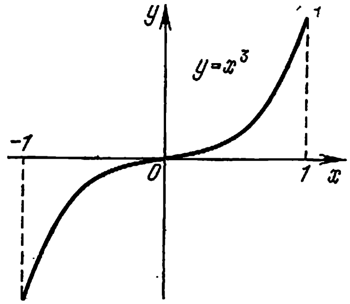


Рис. 26.

З а м е ч а н и е 1. Если на отрезке $[a, b]$ нет вовсе корней уравнения $f'(x) = 0$, то M есть максимальное, а m — минимальное среди чисел $f(a)$ и $f(b)$.

З а м е ч а н и е 2. Бывает, что надо искать экстремум на интервале (a, b), где может оказаться, что $a = -\infty$, а $b = +\infty$. Тогда роль чисел $f(a)$ и $f(b)$ будут играть пределы

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$$

и $M = \max\limits_{a<x<b} f(x)$, если $M > f(a)$ и $M > f(b)$. Иначе $M > f(x)$ для всех x интервала (a, b).

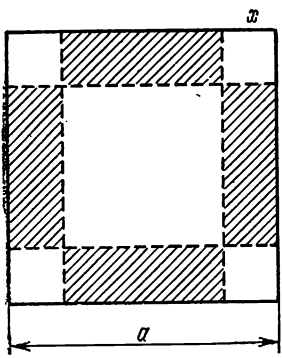


Рис. 27.

П р и м е р 2. Дан квадратный лист жести со стороной a. Из него в его углах вырезают одинаковые квадраты (рис. 27) и, загибая лист по пунктирным линиям, делают прямоугольную коробку. При каких размерах квадратов объем коробки будет наибольшим?

Длину стороны каждого из вырезанных квадратов обозначим через x. Тогда объем коробки V есть функция от

x, выражаемая формулой

$$V(x) = x(a - 2x)^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a/2).$$

Надо найти максимум этой функции на $[0, a/2]$. Имеем

$$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4(a - 2x)x = (a - 2x)(a - 6x).$$

Приравнивая нулю $V'(x)$, получим два корня: $x = a/2$, $x = a/6$, оба принадлежащие к отрезку $[0, a/2]$.

Наибольшее из следующих трех чисел

$$V(0) = 0, \quad V(a/6) = 2a^3/27, \quad V(a/2) = 0$$

и есть максимальный объем коробки, соответствующий $x = a/6$.

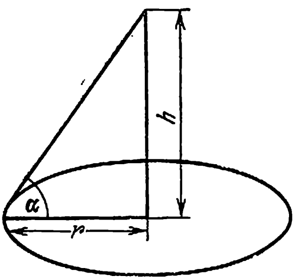


Рис. 28.

Пример 2. В центре круговой конькобежной дорожки радиуса r на высоте h подвешен фонарь. Освещенность дорожки можно выразить числом T которое вычисляется по формуле

$$T = \frac{k \sin \alpha}{h^2 + r^2},$$

где k — число, определяемое мощностью фонаря, а $\operatorname{tg} \alpha = h/r$ (рис. 28). Найти высоту h столба, при которой дорожка будет освещена максимально.

Решение. Выразим T через α, исключив h:

$$T = \frac{k}{r^2} \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{k}{r^2} \sin \alpha \cos^2 \alpha \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Надо найти максимум функции $T = T(\alpha)$ на интервале $(0, \pi/2)$, т. е. среди значений α, удовлетворяющих неравенствам $0 < \alpha < \pi/2$. Решаем уравнение

$$T'(\alpha) = \frac{k}{r^2} (\cos^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) = 0.$$

Оно распадается на два уравнения:

$$\cos \alpha = 0,$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = 1/2.$$

Первое уравнение на интервале $(0, \pi/2)$ не имеет корней; второе же имеет единственное решение

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{2}) \approx 35°15'.$$

Имеем

$$\lim_{\alpha\to 0} T(x) = 0, \quad \lim_{\alpha\to\pi/2} T(\alpha) = 0.$$

$$T(\alpha_0) = \frac{k}{r^2}\frac{\sin\alpha_0}{3/2} = \frac{2}{3}\frac{k}{r^2}\frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_0}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{k}{r^2},$$

Наибольшее среди этих чисел есть $T(\alpha_0)$. Ему соответствует высота столба, решающая задачу:

$$h = r\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Конечно, скорее всего, у администрации катка нет такого высокого столба. Придется поставить, какой есть. Пусть в распоряжении администрации имеется столб высотой $H < r/\sqrt{2}$. Ему соответствует угол

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{H}{r} < \alpha_0.$$

Производная $T'(\alpha)$ не обращается в нуль (не имеет корней) на интервале $(0, \alpha_1)$. Тогда максимум $T(\alpha)$ на $(0, \alpha_1)$ есть наибольшее среди чисел $T(0) = 0$ и $T(\alpha_1)$, т. е. число $T(\alpha_1)$, которому соответствует высота H.

Таким образом, уменьшать имеющийся столб (его длина $H < r/\sqrt{2}$) во всяком случае не нужно.

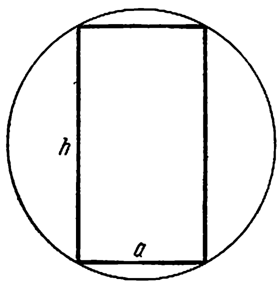


Рис. 29.

Задача 1. Число 12 разложить на два слагаемых, чтобы их сумма квадратов была наименьшей.

Задача 2. Число 12 разложить на два сомножителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Задача 3. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

Задача 4. Корабль стоит в 9 км от ближайшей точки прямолинейного берега; с него нужно послать курьера в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к кораблю точки берега (лагерь находится на берегу). В каком пункте берега курьер должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время, если он идет пешком со скоростью 5 км/ч, а на веслах со скоростью 4 км/ч?

Задача 5. Из круглого бревна диаметра d надо вырезать балку прямоугольного сечения с основанием a и высотой h (рис. 29). При каких значениях a и h прочность балки будет наибольшей, если известно, что прочность балки пропорциональна ah^2?

Задача 6. Найти наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R.

Вопросы.

1. Что такое точка максимума (минимума) функции $f(x)$ на отрезке?
2. Что такое точка локального максимума (минимума) функции $f(x)$?
3. Что такое точка экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и точка ее локального экстремума?
4. Может ли точка локального экстремума функции $f(x)$ быть концевой точкой отрезка $[a, b]$, где задана эта функция?
5. Чему равна производная от функции в точке ее локального экстремума?
6. Приведите два примера функций, которые имеют в некоторой точке x_0 производную, равную нулю ($f'(x_0) = 0$), и чтобы при этом x_0 не была бы точкой локального экстремума функции f.
7. В чем состоит метод нахождения экстремумов функции на отрезке?

§ 1.7. Приложения производной к изучению функций

1.7.1. Возрастание и убывание функции. Функция

$$y = f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

называется *возрастающей* (*убывающей*) на отрезке $[a, b]$, если большему значению x, принадлежащему к этому отрезку, соответствует большее (меньшее) значение y, т. е. если $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, то $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

На рис. 30, *а* (соответственно на рис. 30, *б*) изображен график непрерывной возрастающей (убывающей) на $[a, b]$ функции.

Если функция f не только непрерывна на отрезке $[a, b]$, но и имеет на нем непрерывную производную $f'(x)$, то по знаку производной можно заключить, возрастает или убывает f на $[a, b]$. Именно имеют место утверждения:

1) *Если $f'(x) > 0$ на (a, b), то f возрастает на $[a, b]$.*

2) *Если $f'(x) < 0$ на (a, b), то f убывает на $[a, b]$.*

В самом деле,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α есть угол между касательной к графику в точке x [1]) и положительным направлением оси x. Но если $f'(x) > 0$ на (a, b), то всюду на (a, b) [2]) угол α острый, и из графика

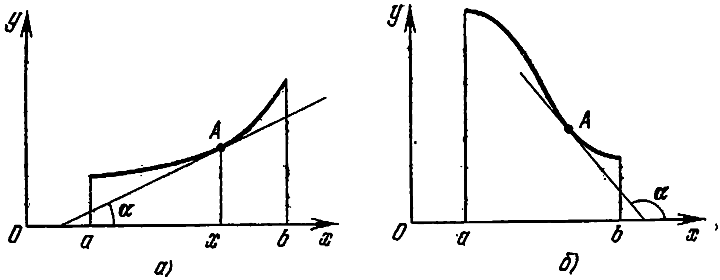


Рис. 30.

видно, что в этом случае функция должна возрастать на $[a, b]$.

Подчеркнем, что при этом первая производная в концевых точках $[a, b]$ может быть равна нулю.

Если же $f'(x) < 0$ на (a, b), то всюду на (a, b) угол α тупой, что, очевидно, может быть, лишь если f убывает на $[a, b]$ [3]).

Пример 1. Функция $y = e^x$ $(-\infty < x < \infty)$ возрастает на всей действительной оси, потому что $y' = e^x > 0$ $(-\infty < x < \infty)$.

Пример 2. Функция

$$y = x^2 + 2x + 1 \tag{1}$$

имеет производную $y' = 2x + 2$. Неравенство $2x + 2 > 0$ имеет место для $x > -1$, а неравенство $2x + 2 < 0$ имеет место для $x < -1$. Следовательно, функция (1) убывает для $x \leqslant -1$ и возрастает для $x \geqslant -1$.

Задача 1. Определить интервалы возрастания и убывания функций:

а) $x^2 - 4x + 2$; б) $-x^2 + 2x + 1$;

в) $\cos x$; г) $(x-1)^3 + 2$; д) $(x+2)^4$.

---

[1]) То есть в точке графика, имеющей абсциссу x.

[2]) То есть для всех значений x из интервала (a, b).

[3]) Формальное обоснование утверждений 1), 2) см. далее п. 1.7.4.

1.7.2. Выпуклость и вогнутость. Рассмотрим функцию

$$y = f''(x) \qquad (a < x < b).$$

Предположим, что она имеет вторую непрерывную производную $f''(x)$.

Вторая производная от $f(x)$ есть первая производная от $f'(x)$:

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Это показывает, что *если вторая производная от f на интервале (a, b) положительна*:

$$f''(x) > 0 \qquad (a < x < b), \tag{2}$$

то первая производная f' возрастает на этом интервале, а если вторая производная от f на (a, b) отрицательна:

$$f''(x) < 0 \qquad (a < x < b), \tag{3}$$

то первая производная f' убывает на (a, b).

На рис. 31, 32, 33 изображены графики функций, соответствующие первому случаю ($f''(x) > 0$, $a < x < b$; на концах $[a, b]$ вторая производная может равняться нулю!).

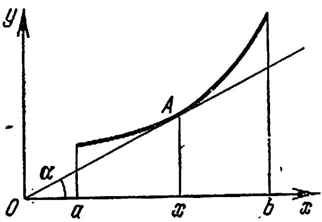


Рис. 31.

У всех трех графиков тангенс угла α наклона касательной к оси x ($\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$) возрастает вместе с x. На рис. 31 угол α острый для всех значений x из отрезка $[a, b]$. На рис. 32 он тупой; с возрастанием x угол становится все более и более тупым, а его тангенс (отрицательный) увеличивается. Наконец, на рис. 33 величина $\operatorname{tg}\alpha$ растет сначала, принимая отрицательные значения (на (a, c)), обращается в нуль при $c = 0$, а затем растет, принимая положительные значения (на (c, b)).

Рост $\operatorname{tg}\alpha$ вызван тем, что вторая производная от f положительна на $[a, b]$.

Мы видим, что во всех трех случаях график расположен выше касательной, проведенной в любой его точке.

График функции f называется *выпуклым книзу* (*кверху*) на интервале (a, b), если в любой точке (a, b) он расположен выше (ниже) касательной, проведенной к нему.

Рис. 34, 35, 36 дают примеры выпуклых кверху функций.

Справедливо утверждение:

Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную $f''(x)$ положительную (отрицательную), то ее график выпуклый книзу (кверху) на (a, b).

В случае, когда $f''(x) > 0$ $(a < x < b)$, это утверждение уже разъяснено, а в случае, когда $f''(x) < 0$ $(a < x < b)$, оно следует из рассмотрения графиков на рис. 34, 35, 36.

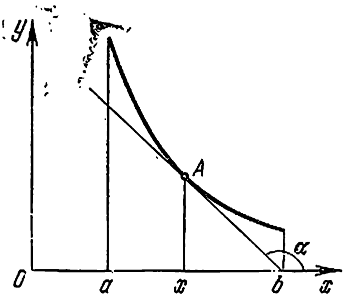


Рис. 32.

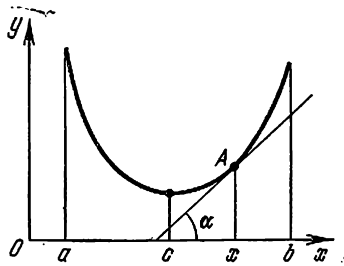


Рис. 33.

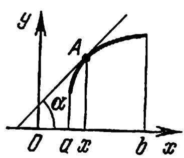


Рис. 34.

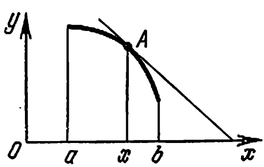


Рис. 35.

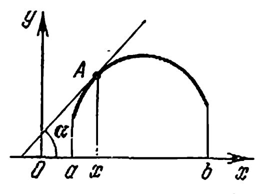


Рис. 36.

Отметим важное утверждение:

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 непрерывную вторую производную.

Если

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0,$$

то f имеет в точке x_0 локальный максимум.

Если же

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0,$$

то f имеет в x_0 локальный минимум.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из рассмотрения рис. 37 и 38 [1]). Надо учесть, что

---

[1]) Формальное обоснование этого утверждения см. далее п. 1.7.4.

из того, что вторая производная отрицательна (положительна) в точке x_0, следует в силу ее непрерывности, что она отрицательна (положительна) и в некоторой окрестности этой точки.

1.7.3. Черчение схематических графиков. Чтобы получить схематический график функции $y = f(x)$, надо прежде всего отдать себе отчет в том, какова ее область определения. Обычно это есть вся ось x, либо ось с выколотыми точками, либо множество, состоящее из нескольких интерва-

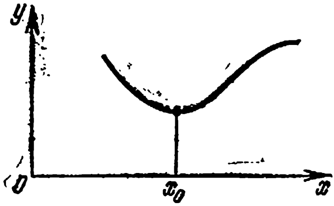


Рис. 37.

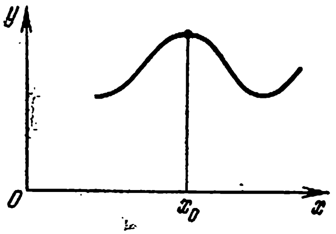


Рис. 38.

лов или отрезков. Полезно вычислением определить одну или несколько точек, через которые проходит график функции. Если область определения функции неограничена, то надо вычислить пределы функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, чтобы представить себе, как говорят, поведение функции на бесконечности.

Важно вычислить первую и вторую производные ($f'(x)$ и $f''(x)$) и найти корни уравнений

$$f'(x) = 0 \quad \text{и} \quad f''(x) = 0.$$

Для каждого значения x_0, где первая производная равна нулю, следует проверить, не будет ли для него локального максимума или минимума функции. Надо также вычислить для x_0 и соответствующее значение функции $f(x_0)$. Мы, таким образом, будем знать важные точки $(x_0, f(x_0))$, через которые проходит график функции. Знание этих точек поможет найти интервалы возрастания и убывания функции.

Наконец, если удастся найти корни уравнения $f''(x) = 0$, то последние помогут указать интервалы выпуклости функции кверху и книзу.

На основе этих данных уже нетрудно представить себе схематический вид графика исследуемой функции.

Но обратимся к примерам.

Пример 1. Надо нарисовать схематический график функции

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+1.$$

Эта функция определена и непрерывна на всей оси x.

Чтобы узнать, как она ведет себя на бесконечности, возьмем пределы

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left[\frac{1}{3}-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3\left[\frac{1}{3}-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right]=-\infty.$$

Имеем также

$$f(0)=1,$$
$$f'(x)=x^2-6x+5=(x-1)(x-5),$$
$$f''(x)=2x-6,$$

откуда

$$f''(3)=0,\quad f''(x)>0\ (x>3),\quad f''(x)<0\ (x<3).$$

Выпишем точки x, где $f'(x)=0$ и $f''(x)=0$, и точку $x=0$ и вычислим соответствующие этим точкам значения функции f:

x	0	1	3	5
$f(x)$	1	10/3	−2	−22/3

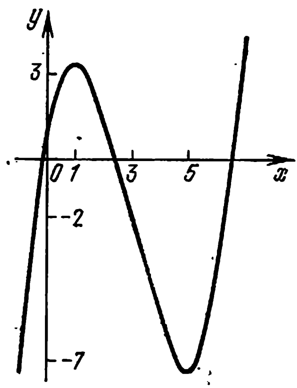


Рис. 39.

На основании этих данных нарисуем схематический график нашей функции (рис. 39).

На интервале $(-\infty, 1)$ (где $f'(x)>0$ и $f''(x)<0$) функция f возрастает от $-\infty$ до $y=10/3$, график обращен выпуклостью кверху. В точке $x=1$ функция f достигает локального максимума. На интервале $(1, 5)$ функция f убывает, достигая при $x=5$ локального минимума, равного $y=-22/3$, а затем на интервале $(5, \infty)$ она возрастает, стремясь к $+\infty$ при $x\to+\infty$. При этом на интервале $(1, 3)$ (где $f''(x)<0$) график продолжает иметь выпуклость кверху, а на интервале $(3, \infty)$ (где $f''(x) > 0$) он обращен выпуклостью книзу.

Точка графика [1]) с абсциссой $x = 3$ замечательная. При переходе x через эту точку выпуклость графика кверху заменяется на выпуклость книзу. Такая точка называется *точкой перегиба графика*. В точке перегиба вторая производная от f равна нулю. В данном случае $f''(3) = 0$.

Пример 2. Нарисовать схематический график функции

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

Имеем

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} > 0 \qquad (-\infty < x < 1,\ 1 < x < +\infty),$$

$$f''(x) = \frac{4}{(1-x)^3} \begin{cases} > 0 & (x < 1), \\ < 0 & (x > 1). \end{cases}$$

Наша функция не определена при $x = 1$ и

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-1 + \frac{1}{x}} = -1.$$

На рис. 40 на основании этих данных построен схематический график функции f.

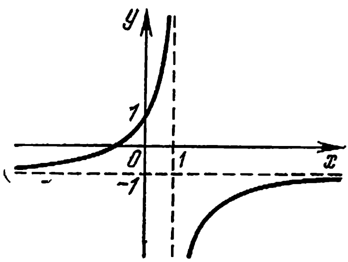


Рис. 40.

Задача 2. Нарисовать схематические графики функций:

1) $x^2 + x + 1$; 2) $x^2 - 5x + 6$;

3) $-x^2 + x + 2$; 4) $\dfrac{x-1}{x+1}$;

5) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x - 2$.

1.7.4. Теоремы о среднем. Ниже мы доказываем теоремы, имеющие большое значение в анализе — теорему Ролля и теорему Лагранжа. Их называют еще теоремами о

---

[1]) То есть точка графика, имеющая абсциссу $x = 3$.

среднем. С помощью этих теорем дается формальное обоснование утверждений, доказанных в п. 1.7.1 и п. 1.7.2.

Теорема 1 (Ролля). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах отрезка $[a, b]$ ($f(a) = f(b)$). Тогда на интервале (a, b) всегда найдется такая точка c, что в ней производная от f равна нулю:*

$$f'(c) = 0, \quad a < c < b.$$

На рисунках 41 и 42 изображены графики функций f, удовлетворяющих условию теоремы Ролля. У первой функции имеется одна

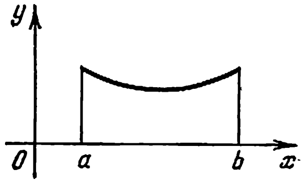


Рис. 41.

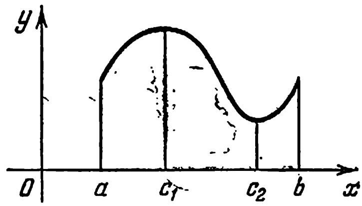


Рис. 42.

точка c интервала (a, b), в которой ее производная равна нулю ($f'(c) = 0$), у второй — имеются две такие точки c_1 и c_2 ($f'(c_1) = f'(c_2) = 0$).

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 суть точки, в которых f достигает на отрезке $[a, b]$ соответственно минимума и максимума.

Если $f(x_1) < f(a)$, то точка x_1 принадлежит очевидно к интервалу (a, b) и в ней функция f достигает локального минимума. Но тогда, как мы знаем, $f'(x_1) = 0$ и можно считать, что $c = x_1$.

Если $f(x_2) > f(a)$, то точка x_2 принадлежит к интервалу (a, b) и в ней функция f достигает локального максимума. Но тогда, как мы знаем, $f'(x_2) = 0$ и можно считать, что $c = x_2$.

Остается еще случай, когда $f(x_1) = f(x_2)$. Но тогда, очевидно, для всех x из отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ равна одной и той же константе $C = f(a)$. В этом случае в качестве c можно взять любую точку интервала (a, b) — в ней $f'(c) = 0$.

Теорема 2 (Лагранжа). *Пусть функция f имеет производную на отрезке $[a, b]$. Тогда на интервале $(a. b)$ найдется точка c такая, что в ней производная от f удовлетворяет равенству*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad (a < c < b) \tag{4}$$

или, что все равно, равенству

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \qquad (a < c < b) \tag{5}$$

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл (рис. 43). Левая часть равенства (4) есть тангенс угла наклона к оси x хорды, стягивающей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$, а правая часть есть тангенс угла наклона касательной к графику в некоторой точке c, принадлежащей к (a, b). Теорема Лагранжа утверждает что, если кривая есть график функции имеющий производную на $[a, b]$, то на этой кривой существует точка, соответствующая некоторой абсциссе c $(a < c < b)$, такая, что касательная к кривой в этой точке параллельна хорде, стягивающей концы кривой $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

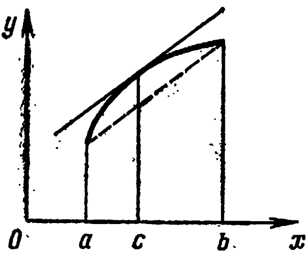


Рис. 43.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = [f(b) - f(a)]x - (b - a) f(x).$$

Она имеет производную на $[a, b]$ равную

$$F'(x) = [f(b) - f(a)] - (b - a) f'(x).$$

Кроме того,

$$F(b) = -f(a)\,b + a\,f(b),$$

$$F(a) = a\,f(b) - f(a)\,b,$$

и следовательно $F(a) = F(b)$. Но тогда по теореме Ролля должна существовать на интервале (a,b) точка c, для которой $F'(c) = 0$, т. е.

$$[f(b)-f(a)] - (b-a) f'(c) = 0 \qquad (a < c < b).$$

Откуда следует (4).

Пример 1. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, а производную имеет только на полуинтервале $(0,1]$. К ней применима теорема Лагранжа, потому, что для ее выполнения производная от f должна существовать на интервале $(0,1)$.

Докажем теперь теорему, которая дает обоснование утверждениям 1) и 2) п.1.7.1

Теорема 3. *Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция имеет положительную (отрицательную) производную на интервале (a, b), то она возрастает (убывает) на $[a, b]$. Если же производная равна тождественно нулю на (a, b), то $f(x) = C$, где C — постоянная.*

Подчеркнем, что в точках $x = a$ и $x = b$ производная может не существовать или быть равной нулю.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 произвольные точки, удовлетворяющие неравенствам $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. По теореме Лагранжа, примененной к отрезку $[x_1, x_2]$, найдется на (x_1, x_2) такая точка c, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, потому что по условию $f'(c) > 0$. Но тогда $f(x_1) < f(x_2)$, что доказывает, что f возрастает на $[a, b]$. В случае же, когда $f'(x) < 0$ на (a, b), получим $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$, а это доказывает, что f убывает на $[a, b]$.

Если же $f'(x) = 0$ на (a, b), то $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ и $f(x_1) = f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из $[a, b]$. Зафиксируем x_1 и будем считать $x_2 = x$ переменной, тогда $f(x) = C$, где $C = f(x_1)$.

Наконец докажем теорему, которая дает обоснование последнему утверждению п.1.7.2.

Теорема 4. *Если функция f имеет на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ положительную (отрицательную) производную f'' второго порядка и в точке x_0 первую производную, равную нулю ($f'(x_0) = 0$), то в этой точке f достигает локального минимума (максимума).*

Доказательство. Пусть $f''(x) > 0$ на $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ и $f'(x_0) = 0$. Так как вторая производная есть первая производная от первой производной: $f''(x) = (f'(x))'$, то на основании теоремы 3 функция $f'(x)$ на отрезке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ возрастает. Но $f'(x_0) = 0$. Поэтому

$$f'(x) < 0 \text{ на } [x_0-\delta, x_0)$$

и

$$f'(x) > 0 \text{ на } (x_0, x_0+\delta].$$

Применяем теперь теорему 3 к f. Так как функция f непрерывна на отрезке $[x_0-\delta, x_0]$ и имеет отрицательную производную на интервале $(x_0-\delta, x_0)$, то она убывает на отрезке $[x_0-\delta, x_0]$. Так как, далее, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_0+\delta]$ и имеет положительную производную на интервале $(x_0, x_0+\delta)$, то она возрастает на отрезке $[x_0, x_0+\delta]$. Но это показывает, что функция $f(x)$ имеет минимум в точке x_0. Подобным образом доказывается теорема в случае $f''(x) < 0$, приводящем к максимуму в x_0.

§ 1.8. Первообразная. Неопределенный интеграл

1.8.1. Первообразная. Мы знаем, что постоянное число C, рассматриваемое как функция от x, имеет производную, равную нулю тождественно (т. е. равную нулю для всех x).

Обратное утверждение также верно: *если про функцию известно, что ее производная равна нулю тождественно,* $f'(x) \equiv 0$, *то она есть постоянная.*

Из механических соображений это простое утверждение совершенно очевидно [1]). В самом деле, пусть функция $s = f(t)$ выражает закон движения точки по прямой, причем ее скорость тождественно равна нулю: $v = f'(t) = 0$. Тогда точка стоит на месте и расстояние s ее до начальной точки 0 равно постоянной при любом t. Тот факт, что в этом рассуждении мы x заменили на t, не имеет значения: время тоже можно обозначить через x.

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию f, заданную на интервале (a, b), т. е. на множестве значений x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$.

Функция F называется *первообразной* для f на интервале (a, b) [2]), если на нем производная от F равна f:

$$F'(x) = f(x).$$

---

[1]) Формальное доказательство: см. теорему 3 п. 1.7.4.

[2]) Аналогично определяется первообразная для f на отрезке $[a, b]$, т. е. множество значений x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$. Нужно только под производной в точке a понимать правую производную, а в точке b — левую производную:

$$F'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(a+h)-F(a)}{h}, \quad F'(b) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{F(b+h)-F(b)}{h}.$$

Очевидно, что если функция F есть первообразная для f на (a, b), а C — постоянная, то функция $F(x) + C$ есть также первообразная для f, потому что

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Обратно, если F и F_1 — первообразные для $f(x)$ на (a, b), то они необходимо отличаются друг от друга на всем интервале (a, b) на некоторую постоянную C:

$$F_1(x) = F(x) + C. \qquad (1)$$

В самом деле, $(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$. Но тогда, как отмечалось выше, существует такое (постоянное) число C, что $F_1(x) - F(x) = C$ на (a, b), откуда следует (1).

Итак, пользуясь механическими соображениями, мы установили важный факт: *если F есть какая-либо первообразная от f на интервале (a, b), то всевозможные первообразные от f на этом интервале выражаются формулой $F(x) + C$, где вместо C можно подставить любое число.*

1.8.2. Неопределенный интеграл. Дадим теперь следующее определение:

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале (a, b) функции f называется произвольная ее первообразная функция. Неопределенный интеграл обозначается так:

$$\int f(x)\,dx.$$

Из сказанного следует, что *если F есть некоторая определенная первообразная функция для f на интервале (a, b), то неопределенный интеграл от f на этом интервале равен*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

где C — постоянная.

Если f_1, f_2 — непрерывные на интервале (a, b) функции и A_1, A_2 — постоянные, то имеет место следующее равенство, выражающее основное свойство неопределенного интеграла:

$$\int (A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x))\,dx = A_1 \int f_1(x)\,dx + A_2 \int f_2(x)\,dx + C, \qquad (3)$$

где C есть некоторая постоянная.

В самом деле, по определению неопределенного интеграла слева в (3) стоит какая-то одна из первообразных функций от $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$. С другой стороны, имеет место равенство

$$(A_1 \int f_1(x)\,dx + A_2 \int f_2(x)\,dx)' =$$
$$= A_1 (\int f_1(x)\,dx)' + A_2 (\int f_2(x)\,dx)' = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x), \quad (4)$$

потому что интегралы $\int f_1 dx$, $\int f_2 dx$ обозначают соответственно некоторые первообразные функции от f_1 и f_2. Поэтому правая часть (3) без последнего члена C есть также первообразная для $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$, но тогда она отличается от левой части (3) на некоторую постоянную.

Свойство (3) по индукции распространяется на любое конечное число непрерывных на (a, b) функций $f_1, \ldots, f_n$ и постоянных $A_1, \ldots, A_n$:

$$\int \left(\sum_{j=1}^{n} A_j f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^{n} A_j \int f_j(x)\,dx + C. \quad (5)$$

Как следствие при $A_1 = 1$, $A_2 = \pm 1$, $n = 2$ вытекает равенство

$$\int (f_1 \pm f_2)\,dx = \int f_1 dx \pm \int f_2 dx + C,$$

а при $A_1 = A$ и $A_2 = 0$, $f_1 = f$ — равенство

$$\int Af\,dx = A \int f\,dx + C.$$

Примеры.

$$\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + C \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad (6)$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + C, \qquad a \neq 0, \quad (7)$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C, \qquad a \neq 0. \quad (8)$$

В самом деле,

$$\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \frac{1}{n}(x^n)' = x^{n-1},$$

$$\left(\frac{\sin ax}{a}\right)' = \frac{1}{a}(\sin ax)' = \frac{1}{a} a \cos ax = \cos ax,$$

$$\left(-\frac{\cos ax}{a}\right)' = -\frac{1}{a}(\cos ax)' = \sin ax.$$

Из (5) и (6) следует, что неопределенный интеграл от многочлена $P_n(x)=\sum\limits_0^n a_k x^k$ степени n (a_k — постоянные) равен

$$\int P_n(x)\,dx=\sum_0^n a_k\frac{x^{k+1}}{k+1}+C.$$

Приведем основную таблицу неопределенных интегралов, составленную непосредственно из формул производных от элементарных функций (см. пп. 1.5.5—1.5.12).

$$\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C\ (a\neq-1),\qquad \int\cos x\,dx=\sin x+C,$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C\,^{1)},\qquad \int\sec^2 x\,dx=\operatorname{tg}x+C,$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\ (a\neq1,\ a>0),\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C_1\ (C_1-C=\pi/2),$$

$$\int e^x dx=e^x+C,$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C,\qquad \int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C.$$

В каждом из этих равенств производная от правой части равна подынтегральной функции в левой.

З а д а ч а 1. Вычислить интегралы [2]:

1) $\int\sqrt{x}\,dx$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int\frac{dx}{x^2}$;

4) $\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx$; 5) $\int\frac{dx}{x^2+4}$;

6) $\int(2\sin x-3\cos x)\,dx$; 7) $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$;

8) $\int 2^x dx$; 9) $\int\frac{xe^x-x}{x}dx$; 10) $\int\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx$.

1.8.3. Замена переменной. При вычислении неопределенных интегралов нередко пользуются *методом подстановки* или *замены переменной*. Он сводится к формуле

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\,du+C, \tag{9}$$

---

[1]) Для $x>0$ имеем $(\ln|x|)'=(\ln x)'=1/x$, а для $x<0$ $(\ln|x|)'=[\ln(-x)]'=-1/(-x)=1/x$.

[2]) Решение задач 5), 10) можно отложить до п. 1.8.3.

где $f(u)$ — непрерывная функция, а $u = \varphi(x)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

Это надо понимать так. Если подынтегральное выражение интеграла удалось представить в виде

$$F(x)\,dx = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx,$$

то можно в этом интеграле чисто формально произвести замену $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)\,dx$, проинтегрировать полученное выражение $f(u)\,du$ по переменной u, а затем заменить u на $\varphi(x)$. Выражение $du = \varphi'(x)\,dx$ называется *дифференциалом функции* $\varphi(x)$. Оно имеет в анализе самостоятельное значение, но мы в этой книге пользуемся им только как обозначением.

Поясним формулу (9) на примере

$$\int \cos(kx)\,k\,dx = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin kx + C.$$

Мы сделали подстановку $u = kx$, $du = (kx)'dx = k\,dx$, в силу которой наш интеграл превратился в табличный.

Чтобы доказать формулу (9), надо убедиться в том, что производная по x от ее левой части равна производной по x от правой части. В самом деле,

$$\left(\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx\right)'_x = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x),$$

$$\left(\int f(u)\,du\right)'_x = \left(\int f(u)\,du\right)'_u u'_x = f(u)\,\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

Приведем несколько примеров на применение метода подстановки:

$$\int e^{kx}dx = \int e^t\,\frac{1}{k}\,dt = \frac{1}{k}\int e^t dt = \frac{1}{k}e^t + C = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

(подстановка $kx = t$, откуда $k\,dx = dt$).

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

(подстановка $t = \sqrt{a^2 - x^2}$, откуда $dt = -\dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$).

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u}\;a\cos u\,du =$$

$$= a^2\int \cos^2 u\,du = a^2\int \frac{1 + \cos 2u}{2}\,du = \frac{a^2}{2}\left(u + \frac{\sin 2u}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}(u + \sin u\cos u) + C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C$$

(подстановка $x = a \sin u$).

$$\int \cos kx\, dx = \frac{1}{k}\int \cos kx\, k\, dx = \frac{1}{k}\int \cos u\, du = \frac{1}{k}\sin u + C = \frac{1}{k}\sin kx + C,$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\, x\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}\cdot 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\, du = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} + C$$

(подстановка $u = 1 + x^2$, $du = 2x\, dx$).

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

(подстановка $u = 1 + x^2$, $du = 2x\, dx$).

Задача 2. Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}\, dx$; 2) $\int (x^2+1)^5 x\, dx$; 3) $\int \operatorname{tg} x\, dx$;

4) $\int e^{x^2} x\, dx$; 5) $\int e^{x^3} x^2 dx$; 6) $\int \cos^2 x\, dx$;

7) $\int e^{3x} dx$; 8) $\int \cos 3x\, dx$; 9) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 11) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 12) $\int e^{x^2-1} x\, dx$.

1.8.4. Проблема интегрирования элементарных функций. Как видно из примеров, метод замены переменных значительно расширяет класс тех элементарных функций, которые мы теперь можем проинтегрировать, т. е. получить для них первообразные, являющиеся снова элементарными функциями. Однако надо иметь в виду, что с вычислительной точки зрения с интегрированием обстоит дело, вообще говоря, гораздо хуже, чем с дифференцированием.

Из § 1.5 известно, что производная от любой элементарной функции есть снова элементарная функция, которую можно получить совершенно эффективно, воспользовавшись правилами дифференцирования. Но обратное утверждение, вообще говоря, неверно, так как существуют такие элементарные функции, неопределенные интегралы от которых не являются в свою очередь элементарными функциями. Например, такими функциями являются

e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$ и др. Для получения интегралов от них приходится пользоваться приближенными методами и вводить в обиход новые функции, не сводимые к элементарным. Мы не имеем возможности задерживаться на этом вопросе, заметим только, что уже в элементарной математике можно найти много примеров, когда прямая операция выполнима в некотором классе чисел, в то время как обратная ей операция в этом же классе не выполняется; так, квадрат любого рационального числа есть снова рациональное число, но корень квадратный из рационального числа далеко не всегда является рациональным числом.

Вопросы и задания.

1. Что такое первообразная функция для данной функции?
2. Что такое неопределенный интеграл от функции?
3. Запомните формулы (3) и (9), выражающие основные свойства неопределенного интеграла, и основную таблицу неопределенных интегралов (см. п. 1.8.2).
4. Приведите три примера применения метода замены переменных в неопределенном интеграле.

§ 1.9. Определенный интеграл

1.9.1. Площадь криволинейной фигуры. Определение определенного интеграла. Зададим на отрезке $[a, b]$ (a и b — конечные числа) неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. График ее изображен на рис. 44. Поставим задачу: требуется разумно определить понятие площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x, прямыми $x = a$ и $x = b$, и вычислить эту площадь. Поставленную задачу естественно решить так.

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

выберем на каждом из частичных отрезков

$$[x_j, x_{j+1}] \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

по произвольной точке ξ_j, определим значения $f(\xi_j)$ функции f в этих точках и составим сумму

$$S_n = \sum_0^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j \qquad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j), \tag{3}$$

которую называют *интегральной суммой* и которая, очевидно, равна сумме площадей заштрихованных прямоугольников (рис. 44).

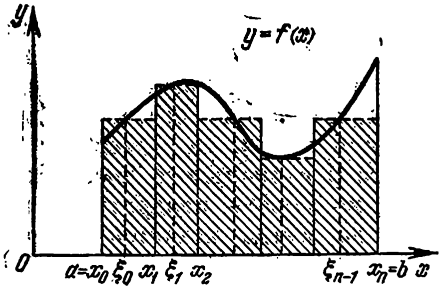


Рис. 44.

Будем теперь стремить все Δx_j к нулю, и притом так, чтобы максимальный (самый большой) частичный отрезок разбиения стремился к нулю. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S, не зависящему от способа разбиения (1) и выбора точек ξ_j на частичных отрезках, то величину S называют *площадью данной криволинейной фигуры*. Таким образом,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j. \tag{4}$$

Итак, мы дали определение площади нашей криволинейной фигуры. Возникает вопрос: имеет ли каждая такая фигура площадь, иначе говоря, стремится ли на самом деле к конечному пределу ее интегральная сумма S_n, когда $\max \Delta x_j \to 0$? Этот вопрос решается положительно: *каждая определенная выше криволинейная фигура, соответствующая некоторой непрерывной функции $f(x)$, действительно имеет площадь в смысле указанного определения, выражаемую зависящим от этой фигуры числом S.*

Другой возникающий здесь вопрос, насколько естественно данное определение площади, как всегда в таких случаях, решается практикой. Мы скажем только, что практика полностью оправдала это определение.

Но обратим внимание на выражение (4). Отвлекаясь от задачи нахождения площади, мы можем на него смотреть как на некоторую операцию, при помощи которой по данной функции f, заданной на $[a, b]$, определяется число S. Она называется *операцией интегрирования* функции f на (конечном) отрезке $[a, b]$, а результат ее, если он существует, называется *определенным интегралом* от f на $[a, b]$ и записывается так:

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (5)$$

В этом определении функция $f(x)$ не обязательно положительная на $[a, b]$. Она может быть отрицательной или менять знак на $[a, b]$.

Итак, *определенным интегралом от функции f на отрезке* $[a, b]$ *называется предел интегральной суммы* (4), *когда максимальный частичный отрезок разбиения* (1) *стремится к нулю.*

В теории определенного интеграла доказывается, что *всякая непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция интегрируема на нем, т. е. для нее предел* (5) *существует.* Отсюда и следует упомянутый факт, что всякая фигура рассмотренного выше типа (см. рис. 44) имеет площадь.

Пример. Площадь S (рис. 11), ограниченная параболой $y = x^2$, осью x, прямой $x = 1$, как доказано в п. 1.3.1, равна

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Тот факт, что сумма $\sum\limits_{0}^{n-1} (x_j)^2 \Delta x_j$, соответствующая произвольному разбиению $[0, 1]$ и произвольному выбору точек ξ_j, принадлежащих отрезкам $[x_j, x_{j+1}]$, стремится к $1/3$, когда $\max \Delta x_j \to 0$, непосредственно доказать элементарными методами не так уж просто. Это, однако, следует из упомянутого утверждения, что определенный интеграл от непрерывной на (конечном) отрезке функции всегда существует.

1.9.2. Работа. Масса стержня. Приведем другие примеры практических задач, решение которых сводится к вычислению определенных интегралов.

Работа. Пусть к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила $F = f(x)$, где $f(x)$ есть непрерывная функция от x — абсциссы движущейся точки. Работа силы F при передвижении точки от a до b равна

$$W = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$. В самом деле, в силу непрерывности f произведение $f(x_j)\,\Delta x_j$ близко к истинной работе на $[x_j, x_{j+1}]$, а сумма таких произведений близка к истинной работе на $[a, b]$, и притом тем ближе, чем меньше $\max\limits_j \Delta x_j$.

Масса стержня переменной плотности. Будем считать, что отрезок $[a, b]$ оси x имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x) \geqslant 0$, где $\rho(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Общая масса этого отрезка равна интегралу

$$M = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{0}^{n-1} \rho(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b \rho(x)\,dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$.

1.9.3. Теорема Ньютона — Лейбница. Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (5) связано с трудностями: интегральные суммы сколько-нибудь сложных функций имеют громоздкий вид, и зачастую нелегко преобразовывать их к виду, удобному для вычисления пределов. Во всяком случае, на этом пути не удалось создать общих методов. Интересно отметить, что впервые задачу этого рода решил Архимед. При помощи рассуждений, которые отдаленно напоминают современный метод пределов, он вычислил площадь сегмента параболы. В дальнейшем на протяжении веков многие математики решали задачи на вычисление площадей фигур и объемов тел. Все же еще в XVII веке постановка таких задач и методы их решения носили сугубо частный характер. Существенный сдвиг в этом вопросе внесли Ньютон и Лейбниц, указавшие общий метод решения таких задач. Они показали, что вычисление определенного интеграла от функции может быть сведено к отысканию ее первообразной.

Теорема Ньютона — Лейбница. *Пусть задана непрерывная на* $[a, b]$ *функция* $f(x)$, *и пусть* $F(x)$ *есть ее первообразная. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{6}$$

Формула (6) показывает, что если для функции f известна ее первообразная F, то вычисление определенного интеграла от f на $[a, b]$ сводится к простой подстановке чисел a и b в F. Дадим простое механическое толкование этой теоремы. Будем считать, что x есть время, а функция $y = F(x)$ выражает закон движения по прямой точки, т. е. y есть расстояние с соответствующим знаком в момент x движущейся точки до закрепленной нулевой точки.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $a \leqslant x \leqslant b$, очевидно, равен [1])

$$\Lambda = F(b) - F(a). \tag{7}$$

С другой стороны, он может быть вычислен интегрированием скорости $f(x) = F'(x)$ точки:

$$\Lambda = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\, \Delta x_j = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{8}$$

Мы разделили промежуток времени $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. В силу непрерывности функции f скорость точки на отрезке времени $[x_j, x_{j+1}]$ можно считать приближенно постоянной, равной числу $f(x_j)$. Тогда путь, пройденный точкой на этом отрезке времени, будет приближенно равен $f(x_j)\, \Delta x_j$, а весь путь будет приближенно равен сумме $\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j)\, \Delta x_j$. Если $\max \Delta x_j \to 0$, то эта сумма стремится к числу, равному истинной величине пути, пройденного точкой за промежуток времени $[a, b]$. В то же время это число есть, очевидно, определенный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b. Но тогда из (7) и (8) следует (6).

Обычно пишут, что

$$F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

П р и м е р ы.

$$\int_a^b x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n}\Big|_a^b = \frac{1}{n}(b^n - a^n) \quad (n \neq 0),$$

$$\int_a^b \cos \alpha x\, dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha}\Big|_a^b = \frac{1}{\alpha}(\sin \alpha b - \sin \alpha a), \quad \alpha \neq 0.$$

---

[1]) Впрочем, термин «путь, пройденный точкой», не совсем точно выражает данное явление. Если, например, закон движения таков, что точка сначала продвинулась вправо, пройдя путь Λ_1, а затем влево, пройдя путь Λ_2, то $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$.

Задача 1. Вычислить площадь, ограниченную синусоидой $y = \sin x$ на $[0, \pi]$ и осью x.

Задача 2. Определить площадь, ограниченную параболой $y = 4x - x^2$ и осью x.

Задача 3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\, dx$.

Задача 4. Вычислить площадь ограниченную синусоидой $y = \sin x$ на отрезке $[\pi, 2\pi]$ и осью x.

Задача 5. Вычислить путь, пройденный свободно падающим в пустоте телом за первые T секунд движения, если известно, что скорость свободного падения в пустоте $v = v_0 + gt$, где t — время, g — ускорение силы тяжести, v_0 — начальная скорость.

Задача 6. При растяжении пружины в пределах ее упругости сила сопротивления, возникающая в ней, равна $F = kx$, где x — удлинение пружины, а k — коэффициент, характеризующий свойства пружины. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы в результате получилось удлинение l.

Задача 7. Вычислить интегралы $\int\limits_{-1}^{1} x^2 dx$ и $\int\limits_{-1}^{1} x^3 dx$, нарисовать графики функций x^2 и x^3 и объяснить результаты.

Вопросы.

1. Что такое определенный интеграл от функции $f(x)$?
2. Как вычисляется определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ через первообразную от $f(x)$?
3. В чем заключается связь между определенным интегралом и площадью соответствующей фигуры?
4. Как вычисляется работа силы при помощи определенного интеграла?

1.9.4. Интеграл как функция верхнего предела.

Замечание. Пусть $f(x)$ есть непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, u — произвольная точка этого отрезка ($a \leqslant u \leqslant b$). Будем пока считать, что $u > a$. Если применить формулу Ньютона — Лейбница к отрезку $[a, u]$, то получим равенство

$$\int\limits_a^u f(x)\, dx = F(u) - F(a). \tag{9}$$

Будем считать, что

$$\int\limits_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Тогда формула (9) останется верной и при $u = a$.

Положим

$$\Phi(u) = \int_a^u f(x)\,dx \qquad (a \leqslant u \leqslant b). \tag{10}$$

Если u считать переменной со значениями из отрезка $[a, b]$, то $\Phi(u)$ есть функция от u. Ее называют *интегралом от f как функцией верхнего предела.*

Если $f(x)$ положительная функция, то $\Phi(u)$ есть площадь фигуры, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, лежащей над отрезком $[a, u]$ оси x. На рис. 45 эта площадь затушевана. Из равенств (9) и (10) следует, что

$$\Phi(u) = F(u) - F(a) \quad (a \leqslant u \leqslant b).$$

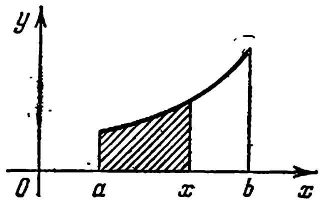


Рис. 45.

Мы видим, что функция $\Phi(u)$ отличается от $F(u)$ на постоянную, равную $-F(a)$. Но $F(u)$ есть первообразная от $f(u)$ на отрезке $[a, b]$. Следовательно и $\Phi(u)$ есть первообразная от $f(u)$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому, если продифференцировать $\Phi(u)$ по u, то получим $f(u)$:

$$\frac{d}{du}\int_a^u f(x)\,dx = f(u) \qquad (a \leqslant u \leqslant b). \tag{11}$$

Здесь символ $\frac{d}{du}$ обозначает операцию взятия производной по u.

Заменив в равенстве (11) буквы x, u соответственно на t, x, получим формулу

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{12}$$

§ 1.10. Свойства определенных интегралов

Основные свойства определенного интеграла выражаются формулами

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \text{ где } A \text{ — постоянная}, \tag{2}$$

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int_c^d f(u)\,du, \text{ где } c = \varphi(a),\ d = \varphi(b). \tag{4}$$

Свойство (1) (для случая $a < c < b$) видно из рис. 46: площадь криволинейной трапеции над $[a, b]$ равна площади над $[a, c]$ плюс площадь над $[c, b]$.

Свойство (2) выражает, что площадь криволинейной трапеции, определяемой функцией $f(x)$, увеличивается в A раз для функции $Af(x)$.

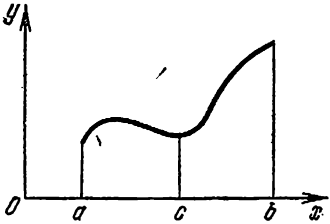


Рис. 46.

Свойство же (3) выражает, что площадь криволинейной трапеции, определяемой суммой $f(x) + \varphi(x)$, равна сумме площадей, соответствующих слагаемым $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Конечно, в этих пояснениях мы неявно предполагали, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, так же как и число A, неотрицательные. Ведь если, например, $f(x) < 0$ на $[a, b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади соответствующей криволинейной трапеции, взятой со знаком минус. Но и в этом и вообще в других случаях свойства (1), (2), (3) верны.

Из (2) следует

$$\int\limits_a^b [-f(x)]\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_a^b [Af(x) + B\varphi(x)]\,dx = \int\limits_a^b Af(x)\,dx + \int\limits_a^b B\varphi(x)\,dx = A\int\limits_a^b f(x)\,dx + B\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx,$$

где A и B — постоянные.

Последнее равенство легко по индукции распространить на любое конечное число слагаемых. Например,

$$\int\limits_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx = \int\limits_0^1 x^2dx - 2\int\limits_0^1 x\,dx + \int\limits_0^1 1\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3},$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} (2\cos x + 3\sin x)\,dx = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx + 3\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 2\sin x\Big|_0^{\pi/2} - 3\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 2 + 3 = 5.$$

Задача 1. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_1^3 (x^2-3x+2)\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi/2} (\cos 2x-\sin 3x)\,dx$; 4) $\int\limits_0^1 (e^{x^2}x+e^{-x})\,dx$;

5) $\int\limits_0^{2\pi} (\cos 3x+\sin 2x)\,dx$.

В формуле (4) $\varphi(x)$ есть возрастающая на $[a, b]$, непрерывно дифференцируемая функция, для которой $\varphi(a)=c$, $\varphi(b)=d$. Если $F(u)$ — первообразная для $f(u)$, то

$$(F[\varphi(x)])'_x = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x),$$

поэтому

$$\int\limits_c^d f(u)\,du = F(d)-F(c) = F[\varphi(b)]-F[\varphi(a)] = \int\limits_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx.$$

Пример.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\theta\cdot 2\,d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin u\,du = \frac{1}{2}(-\cos u)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}(1+1)=1$$

(подстановка $u=2\theta$; $\theta=0$, $u=0$; $\theta=\pi/2$, $u=\pi$).

Задача 2. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^1 e^{x^2}x\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 e^{3x}dx$; 3) $\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$;

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\sin x\,dx$; 5) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$;

6) $\int\limits_0^1 (x^2+1)^3 x\,dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$.

§ 1.11. Геометрические приложения интегралов

1.11.1. Площадь круга. Уравнение окружности (рис. 47) радиуса R с центром в начале координат x, y имеет вид

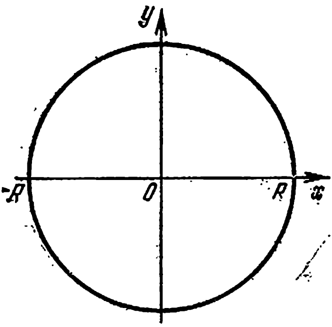


Рис. 47.

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Следовательно, уравнение ее части, расположенной выше оси x, записывается в виде

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leqslant x \leqslant R).$$

Но тогда площадь круга радиуса R равна (пояснения ниже)

$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2\theta}\, R\cos\theta\, d\theta =$$

$$= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= 2R^2 \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]\Bigg|_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} = 2R^2\frac{\pi}{2} = \pi R^2.$$

Во втором равенстве этой цепи сделана замена переменной

$$x = R\sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и использована формула (4) § 1.10, но примененная в обратном порядке. При возрастании переменной θ от $-\pi/2$ до $\pi/2$ переменная x возрастает от $-R$ до R. При этом

$$dx = R\cos\theta\, d\theta.$$

Отметим, что на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ функция $\cos\theta$ неотрицательная.

1.11.2. Длина окружности. Площадь круга есть функция $S = \pi R^2$ от R. Придадим R приращение $\Delta R > 0$. Тогда соответствующее приращение

$$\Delta S = S(R + \Delta R) - S(R)$$

будет представлять собою площадь заштрихованного кольца на рис. 48. Длина окружности $L(R)$ есть тоже функция от R. Очевидно,

$$L(R)\,\Delta R < \Delta S < L(R+\Delta R)\,\Delta R,$$

поэтому

$$L(R) < \frac{\Delta S}{\Delta R} < L(R+\Delta R).$$

Переходя к пределу в этих неравенствах при $\Delta R \to 0$, учитывая, что функция $L(R)$ непрерывна, получаем

$$\lim_{\Delta R\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta R} = L(R),$$

т. е.

$$L(R) = S'(R) = (\pi R^2)' = 2\pi R,$$

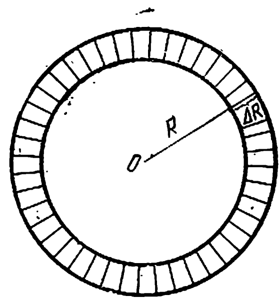


Рис. 48.

и мы получили формулу длины окружности.

1.11.3. Объем тела вращения. Пусть Г есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y непрерывной положительной функцией $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

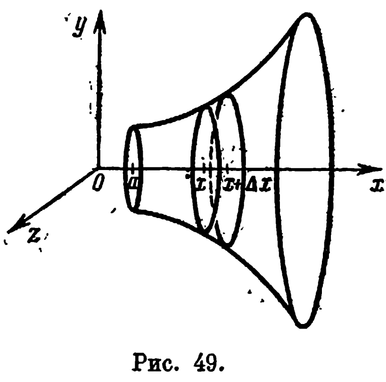


Рис. 49.

Вычислим объем V тела вращения, ограниченного поверхностью вращения кривой Г вокруг оси x и плоскостями, проходящими через точки $x = a$, $x = b$ перпендикулярно оси x (см. рис. 49).

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ и будем считать, что элемент объема ΔV_k тела вращения ограниченный плоскостями, проходящими через точки x_k и x_{k+1} перпендикулярно оси x, приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \approx \pi y_k^2 \Delta x_k = \pi (f(x_k))^2 \Delta x_k.$$

Но тогда объем V может быть записан при помощи приближенного равенства

$$V \approx \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k.$$

Чтобы получить точное равенство, надо взять предел

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx,$$

и мы получаем формулу для объема тела вращения:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx. \tag{1}$$

1.11.4. Объем шара. Объем V шара радиуса R равен

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

В самом деле, круг радиуса R в плоскости xOy имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

а верхняя полуокружность Γ имеет уравнение

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2} \qquad (-R \leqslant x \leqslant R).$$

Если вращать Γ вокруг оси x, то получим поверхность нашего шара. Но тогда согласно формуле (1)

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 \, dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, dx =$$

$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3} \pi R^3. \tag{2}$$

1.11.5. Площадь поверхности шара. Объем шара радиуса R

$$V(R) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

есть функция от R.

Площадь $S(R)$ поверхности этого шара можно получить как производную:

$$S(R) = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{V(R + \Delta R) - V(R)}{\Delta R} = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)' = 4\pi R^2.$$

Поясним эти выкладки. Приращение объема шара, соответствующее приращению ΔR,

$$\Delta V = V(R + \Delta R) - V(R),$$

очевидно, равно объему слоя, ограниченного изнутри шаровой поверхностью радиуса R и извне шаровой поверхностью радиуса $R + \Delta R$. Если $S(R)$ есть площадь поверхности шара радиуса R, то, очевидно,

$$S(R)\,\Delta R < \Delta V < S(R + \Delta R)\,\Delta R$$

или

$$S(R) < \frac{\Delta V}{\Delta R} < S(R + \Delta R).$$

Поэтому, учитывая непрерывность $S(R)$, получим

$$S(R) = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = V'(R).$$

Задача 1. Вычислить объем кругового цилиндра высоты H и радиуса основания R.

Задача 2. Вычислить объем тела вращения, ограниченного плоскостью, проходящей через точку $x = 1$ оси x перпендикулярно к ней, и поверхностью вращения около оси x кривой:

1) $y = x^2$ (рис. 50); 2) $y = x^3$; 3) $y = \sqrt{x}$.

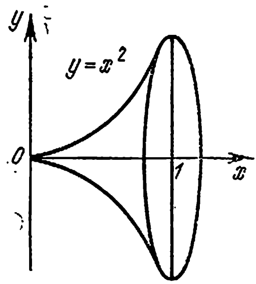


Рис. 50.

§ 1.12. Применение интегралов в физике и механике

1.12.1. Работа электрического заряда. Пусть c и c' — два заряда, находящиеся на прямой на расстоянии r друг от друга. Сила взаимодействия F между ними направлена вдоль этой прямой и равна $F = a/r^2$ ($a = kcc'$, где k — постоянная). Работу W этой силы, когда заряд c неподвижен, а заряд c' передвигается по отрезку $[R_1, R_2]$, можно подсчитать, разбивая отрезок $[R_1, R_2]$ на части длины Δr_i. На каждой из них приближенно считаем силу постоянной, тогда работа на таком участке равна $\frac{a}{r_i^2}\Delta r_i$. Делая частицы разбиения все более мелкими, убеждаемся, что работа W равна интегралу

$$W = \lim_{\Delta r \to 0} \sum \frac{a}{r^2}\,\Delta r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{a}{r^2}\,dr \qquad (0 < R_1 < R_2).$$

Этот интеграл мы сразу находим, принимая во внимание, что

$$\frac{a}{r^2} = \left(-\frac{a}{r}\right)';$$

отсюда

$$W = -\frac{a}{r}\Big|_{R_1}^{R_2} = a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

В частности, работа, выполненная силой F при передвижении заряда c', находившегося сначала на расстоянии R_1 от заряда c, на бесконечность, равна

$$W = \lim_{R_2\to 0} a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{a}{R_1} \qquad (0 < R_1).$$

При $c' = 1$ мы получили потенциал заряда c как функцию от R.

1.12.2. Давление жидкости на стенку. Бассейн высоты H наполнен водой. Вычислить давление воды на прямоугольную стенку бессейна, с основанием прямоугольника, равным a.

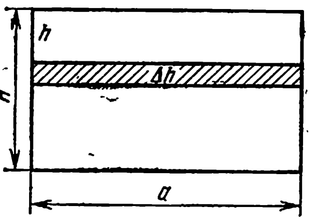


Рис. 51.

Делим высоту на равные малые части Δh. Стенка разделится на «элементы» (один из них заштрихован, рис. 51). Так как кубометр воды весит тонну, то давление столба жидкости высоты h_i м, имеющего сечение 1 м^2, равно h_i тоннам. Давление же воды на элемент, находящийся на глубине h_i, равно произведению h_i на площадь элемента: $h_i a\Delta h$. Величина давления на стену приближенно равна

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} a h_i \Delta h = a \sum_{i=1}^{n} h_i \Delta h,$$

где сумма распространена на все Δh. Точное же ее выражение равно интегралу

$$P = \lim_{\Delta h\to 0} a \sum_{i=1}^{n} h_i \Delta h = a\int_0^H h\,dh = a\frac{h^2}{2}\Big|_0^H = \frac{aH^2}{2}.$$

1.12.3. Центр тяжести. Центр тяжести системы материальных точек

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \ldots,\ (x_N,\ y_N),$$

соответственно с массами

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_N,$$

имеет координаты

$$x_0 = \frac{\sum_1^N m_j x_j}{\sum_1^N m_j}, \quad y_0 = \frac{\sum_1^N m_j y_j}{\sum_1^N m_j}.$$

Эти формулы распространяются на непрерывно распределенные по площади массы. Роль конечных сумм играют тогда интегралы.

Найдем центр тяжести сегмента параболы $y = 1 - x^2$ с равномерно распределенной по нему массой, ограниченного снизу осью x (рис. 52). Для этого отрезок $[-1, 1]$ оси x разделим на n равных частей, длины Δx. Одна такая часть заштрихована на рис. 52. Ввиду малости Δx можно считать, что масса заштрихованного элемента сегмента равна

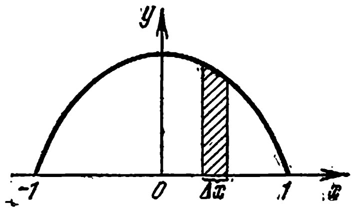


Рис. 52.

$$\rho f(x_i)\,\Delta x = \rho y_i \Delta x$$

и она сконцентрирована в точке $(x_i, y_i/2)$. Здесь ρ — плотность распределения массы.

Ввиду симметрии сегмента абсцисса его центра тяжести равна $x_0 = 0$. Ординату же можно приближенно записать в виде

$$y_0 \approx \frac{\rho \sum\limits_{i=1}^n \frac{y_i}{2}\, y_i \Delta x}{\rho \sum\limits_{i=1}^n y_i \Delta x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2 \Delta x}{\sum\limits_{i=1}^n y_i \Delta x},$$

где сумма распространена на все частичные отрезки деления $[-1, 1]$.

Точное выражение для ординаты центра тяжести нашей фигуры получим, перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$y_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2}\,\frac{\sum\limits_{i=1}^n y_i^2 \Delta x}{\sum\limits_{i=1}^n y_i \Delta x} = \frac{1}{2}\,\frac{\int\limits_a^b y^2 dx}{\int\limits_a^b y\, dx}, \qquad (1)$$

где в данном случае $a = -1$, $b = 1$. Таким образом,

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,dx}{\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{5}.$$

Выражение (1) можно рассматривать как общую формулу для ординаты центра тяжести фигуры, изображенной на рис. 53, с равномерно распределенной по ней массой. Соответствующая формула для x_0 имеет вид

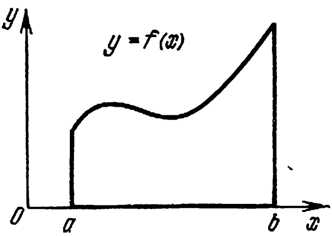


Рис. 53.

$$x_0 = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b xy\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}.$$

Задача 1. В бассейн с водой опущена полукруглая пластина радиуса R так, что ее диаметр находится на уровне воды (рис. 54). Определить давление воды на одну из сторон пластины.

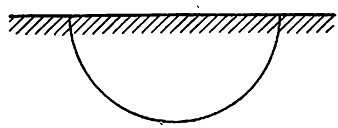


Рис. 54.

Задача 2. Найти координаты центра тяжести верхнего полукруга $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Задача 3. Найти координаты центра тяжести сегмента параболы $y = x^2$, ограниченного сверху прямой $y = 1$.

Задача 4. Сила тока в проводнике есть функция времени: $y = 1 + t^2$. Какое количество электричества проходит через сечение проводника за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant 3$?

Глава 2 (*дополнительная*)

ФОРМУЛА И РЯД ТЕЙЛОРА

§ 2.1. Интегрирование по частям

Нам понадобится важный метод интегрирования — интегрирование по частям. Он сводится к следующей формуле:

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx. \qquad (1)$$

Здесь $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$. Может случиться, что подынтегральную функцию в левой части (1) можно представить в виде произведения $u'(x)v(x)$, где u и v — некоторые функции. Тогда все трудности можно свести к вычислению интеграла от $u(x)v'(x)$, который может оказаться проще.

Доказательство формулы (1). Имеем

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \text{или} \quad u'v = (uv)' - uv'.$$

Интегрируя это равенство по $[a, b]$, получим (1).

Пример.

$$\int_0^1 e^x x\,dx = \int_0^1 (e^x)' x\,dx =$$

$$= (e^x x)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x 1\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

Задача 1. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^1 e^{-x}x\,dx$; 2) $\int_0^1 e^x x^2 dx$; 3) $\int \ln x\,dx$;

4) $\int_1^2 x \ln x\,dx$; 5) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; 6) $\int \arcsin x\,dx$.

§ 2.2. Неравенства для определенных интегралов

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и удовлетворяют на отрезке $[a, b]$ неравенству

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{1}$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

В самом деле, из (1) для интегральных сумм функций f и φ следует

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\xi_j)\,\Delta x_j,$$

а после перехода к пределу при $\max \Delta x_j \to 0$ это неравенство сохраняется, т. е. получим (2). Здесь надо учесть, что $\Delta x_j > 0$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Как следствие из (2) получим полезное утверждение: если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $\varphi(x) \geqslant 0$, а $\psi(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|\psi(x)| \leqslant M \tag{3}$$

для всех x, принадлежащих к $[a, b]$, где M — константа, то

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx\right| \leqslant M \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

В самом деле, из (3) следует

$$-M \leqslant \psi(x) \leqslant M.$$

Поэтому, учитывая, что $\varphi(x) \geqslant 0$, получим

$$-M\varphi(x) \leqslant \varphi(x)\,\psi(x) \leqslant M\varphi(x)$$

и, следовательно,

$$-M \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx \leqslant M \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Но эти два неравенства эквивалентны одному неравенству (4).

В частности, из (4) при $\varphi(x) \equiv 1$ получим

$$\left|\int_a^b \psi(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a).$$

§ 2.3. Формула Тейлора

Пусть на отрезке $[0, a]$ задана функция $f(x)$, имеющая непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно. Справедлива следующая формула, называемая *формулой Тейлора с интегральным остаточным членом*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$
$$+\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \quad (1)$$

Здесь

$$Q_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (2)$$

есть многочлен степени не выше n. Он называется *n-м многочленом Тейлора функции f по степеням x.*

Коэффициент при x^k в многочлене Тейлора вычисляется по формуле $\frac{f^{k}(0)}{k!}$, т. е. берется k-я производная от f, подставляется в нее $x=0$ и результат делится на $k!$.

Функция

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \quad (3)$$

называется *n-м остаточным членом* формулы Тейлора.

Интеграл (3) надо понимать следующим образом. Фиксируется (считается постоянным) произвольное значение x отрезка $[0, a]$, и производится интегрирование по t от 0 до x. Функция $(x-t)^n$ понимается как функция от t. В результате интеграл (3) будет некоторой функцией $R_n(x)$ от x, рассматриваемой на отрезке $[0, a]$.

Нередко остаточный член бывает мал, и тогда можно написать приближенное равенство

$$f(x)\approx Q_n(x).$$

Выпишем соответствующие приближенные равенства:

$n=0$: $f(x)\approx f(0)=Q_0(x)$,

$n=1$: $f(x)\approx f(0)+f'(0)x=Q_1(x)$,

$n=2$: $f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2=Q_2(x)$,

$n=3$: $f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=Q_3(x)$.

Равенство, соответствующее $n = 0$, используется для малых x. Всякий скажет, что если f непрерывна, то для достаточно малых x можно считать, что $f(x) \approx f(0)$. Но формула (1) имеет остаточный член $R_0(x)$, в который входит первая производная $f'(x)$. Этот член можно оценить, и тогда будет известна оценка ошибки, которую мы делаем, считая, что $f(x) \approx f(0)$.

Что касается многочлена $Q_1(x)$, то он еще теснее связан с $f(x)$. Мы видим, что $Q_1(0) = f(0)$, $Q_1'(0) = f'(0)$, т. е. графики Q_1 и f имеют не только общую ординату в точке $x = 0$, но и общую касательную в этой точке.

При $n = 2$ имеется еще более тесная связь: $f(0) = Q_2(0)$, $f'(0) = Q_2'(0)$, $f''(0) = Q_2''(0)$. Поэтому естественно ожидать, что приближенное равенство $f(x) \approx Q_2(x)$ лучше, чем равенство $f(x) \approx Q_1(x)$, по крайней мере для достаточно малых x. В обоих случаях по остаточным членам может быть оценена ошибка приближения. Подобные факты имеют место для произвольного n.

Пример 1. На рис. 55 изображена кривая $y = f(x)$. В качестве ее нулевого приближения в окрестности точки естественно взять график ее нулевого многочлена Тейлора $y = Q_0(x)$, представляющий собой прямую $y = f(0)$, параллельную оси x. В качестве же первого приближения к нашей кривой естественно взять касательную к ней в точке $x = 0$. Ее уравнение есть $y = Q_1(x)$, где $Q_1(x) = f(0) + f'(0)x$. Следующее приближение — это второе приближение $y = Q_2(x)$, где $Q_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$. Это многочлен Тейлора по степеням x второй степени, т. е. такой многочлен второй степени, что он и его производные первого и второго порядка в точке 0 совпадают соответственно с $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$. Мы видим, что графики последующих многочленов Тейлора функции f по степеням x прилегают все теснее к графику f, во всяком случае в достаточно малых окрестностях точки 0, если, конечно, функция достаточное число раз дифференцируема.

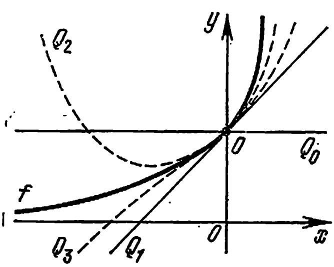


Рис. 55.

Доказательство формулы (1). Как объяснялось выше, интеграл (3) надо понимать следующим образом. Фиксируется (считается постоянным) произвольное значение x отрезка $[0, a]$, и производится интегрирование по t от 0 до x. Функция $(x - t)^n$ понимается как функция от t. Применяем последовательно интегрирование по частям:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_{t=0}^{t=x} + n\int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \right] =$$

$$= -\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt =$$

$$= -\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) - \frac{x^{n-1} f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} +$$

$$+ \frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)\,dt = \ldots = -\frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} -$$

$$- \frac{x^{n-1} f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} - \ldots - \frac{xf'(0)}{1} + \int_0^x f'(t)\,dt =$$

$$= -\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n - \ldots - \frac{f'(0)}{1} x - f(0) + f(x).$$

Отсюда получим формулу (1).

Отметим следующую оценку для остаточного члена: если существует положительная константа M такая, что

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M \tag{4}$$

для любого $n = 1, 2,$ и любого x, принадлежащего отрезку $[0, a]$, то

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{Ma^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{5}$$

В самом деле,

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n M\,dt = \frac{M}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,dt =$$

$$= \frac{-M}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{Ma^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{6}$$

В первом неравенстве этой цепи надо учесть неравенство (4) § 2.2.

Правая часть неравенства (6) стремится к нулю при $n \to \infty$, и притом очень быстро:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Ma^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

что очевидно при $0 \leqslant a \leqslant 1$[1]).

Этим пользуются для того, чтобы судить об ошибке приближения $f(x) \approx Q_n(x)$. На случай, если условие (4) не выполняется, имеются другие оценки, заменяющие оценку (5), но мы на этом вопросе останавливаться не будем.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$y = \sin x.$$

Напишем для нее формулу Тейлора при $n = 4$. Имеем

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x,$$
$$f'''(x) = -\cos x, \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x, \quad f^{\mathrm{V}}(x) = \cos x;$$
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0,$$
$$f'''(0) = -1, \quad f^{\mathrm{IV}}(0) = 0.$$

Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_4(x),$$

где согласно формуле (5), если ограничиться значениями x от 0 до $\pi/4$ (т. е. считать $a = \pi/4$), учитывая, что в данном случае $M = 1$ (см. (4)), выполняются неравенства

$$|R_4(x)| \leqslant \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 < \frac{1}{400}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, имеет место приближенное равенство

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$$

с точностью до 1/400.

Если в разложении $\sin x$ по формуле Тейлора взять больше членов, то получим многочлен более высокой степени, приближающий еще точнее.

---

[1]) Доказательство при $a > 1$ мы не приводим, но оно и не потребуется нам.

Подобными методами вычисляются тригонометрические и многие другие таблицы.

Задача 1. Показать, что формулы Тейлора для функций $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ при $n=4$ имеют вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x),$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4(x),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}x^4 + R_4(x).$$

Задача 2. Для функции $\cos x$ найти M и оценить остаток для $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

Задача 3. Для функции e^x найти M и оценить остаток для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Задача 4. Написать рассмотренные в задаче 1 формулы при $n = 6$.

Задача 5. Вычислить числа e, $e^{1/2}$, $\cos(1/100)$, $\sin(1/10)$ с точностью до 10^{-4}. Углы взяты в радианах.

Глава 3

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО

§ 3.1. Рациональные и иррациональные числа

3.1.1. Десятичные разложения рациональных чисел. Пусть задано положительное рациональное число p/q ($p>0$, $q>0$). Требуется превратить его в десятичную дробь.

Начнем с самого простого случая, когда q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.

Вот примеры:

$$\frac{7}{2^2\cdot 5^4}=\frac{7\cdot 2^2}{2^4\cdot 5^4}=\frac{28}{10^4}=0{,}0028,$$

$$\frac{3}{2^5\cdot 5^2}=\frac{3\cdot 125}{2^5\cdot 5^5}=\frac{375}{10^5}=0{,}00375.$$

Мы видим, что произвольное положительное рациональное число p/q, где q не имеет других делителей, кроме 2 и 5, разлагается в конечную десятичную дробь:

$$\frac{p}{q}=\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m. \tag{1}$$

Здесь α_0 — целое неотрицательное число, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — цифры, каждая из них может принимать одно из значений $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Но и обратное утверждение верно: произвольная конечная дробь $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m$ есть рациональное число:

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m=\frac{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_m}{10^m}.$$

Здесь $\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_m$ — целое число, состоящее из α_m единиц, α_{m-1} десятков, α_{m-2} сотен, ...

Мы доказали, что *для того, чтобы положительное рациональное число, выраженное несократимой дробью p/q, разлагалось в конечную десятичную дробь, необходимо и достаточно, чтобы знаменатель ее q не имел других простых делителей, кроме 2 и 5.*

Остальные дроби p/q могут иметь только бесконечные десятичные разложения $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots$, т. е. такие, что для любого натурального k найдется натуральное $l > k$ такое, что $\alpha_l > 0$.

Произвольную конечную десятичную дробь $\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_m$ $(\alpha_m > 0)$ мы будем записывать еще в виде

$$\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_m = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_m 000 \ldots$$

или в виде бесконечной десятичной дроби (как она определена выше):

$$\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_m = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)999 \ldots . \quad (2)$$

Например, будем писать

$$0{,}2365 = 0{,}2365000 \ldots = 0{,}2364999 \ldots .$$

Перейдем опять к примерам. Читатель сам проверит следующие бесконечные десятичные разложения:

$$\frac{5}{9} = 0{,}555 \ldots = 0{,}(5),$$

$$\frac{7}{9} = 0{,}777 \ldots = 0{,}(7),$$

$$\frac{23}{99} = 0{,}2323 \ldots = 0{,}(23),$$

$$\frac{71}{99} = 0{,}7171 \ldots = 0{,}(71),$$

$$\frac{7}{999} = 0{,}007007 \ldots = 0{,}(007).$$

Все это — периодические разложения. Например 5/9 есть, как говорят, нуль целых и 5 в периоде, а 71/99 — нуль целых и 71 в периоде.

Вообще, имеет место равенство

$$\frac{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{\underbrace{9 \ldots 9}_{m \text{ раз}}} = 0,(\alpha_1 \ldots \alpha_m).$$

Выясним его справедливость на примере дроби 17/99. Будем делить 17 на 99 по известному правилу. Однако припишем к числу 17 сразу два нуля. Имеем

$$1700 = 17\,(99 + 1) = 17 \cdot 99 + 17.$$

Следовательно, после второго этапа деления 17 на 99 получим такую картину:

$$\begin{array}{r|l} 17 & \underline{\ 99\ } \\ \underline{1700} & 0,17 \\ 17 & \end{array},$$

т. е. в частном получается 17 и в остатке 17. Теперь снова к остатку припишем два нуля и после деления получим снова в частном 17 и в остатке 17. Так наш процесс будет продолжаться периодически без конца:

$$\begin{array}{r|l} 17 & \underline{\ 99\ } \\ & 0,1717\ldots \end{array}.$$

Следовательно,

$$\frac{17}{99} = 0,1717\ldots$$

Ниже приводятся примеры десятичных периодических дробей более сложного вида:

$$1,21353535\ldots = 1,21(35) =$$
$$= \frac{121}{100} + 0,00(35) = \frac{121}{100} + \frac{35}{99}\frac{1}{100},$$

$$0,2(371) = \frac{2,(371)}{10} = \frac{2}{10} + \frac{371}{9990},$$

$$3,13(4) = \frac{313,(4)}{100} = \frac{313}{100} + \frac{4}{900}.$$

Мы видим, что *произвольную десятичную периодическую дробь* $\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_m(\beta_1 \ldots \beta_n)$ *можно рассматривать как десятичное разложение некоторого рационального числа*:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_m(\beta_1 \ldots \beta_n). \tag{3}$$

Но и обратно, *десятичное разложение произвольного положительного рационального числа* p/q *необходимо периодическое.*

В самом деле, будем делить p на q обычным способом:

$$\begin{array}{l|l} \underline{\ p\ } & \underline{\qquad q \qquad} \\ \ \beta_1 & \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_s\,\alpha_{s+1} \\ \ \underline{\ \ldots\ \ } & \\ \quad \underline{\beta_s} & \\ \quad \beta_{s+1} & \\ \quad \ldots & \end{array}. \tag{4}$$

Пусть на s-м этапе этого процесса получился остаток β_s и все цифры числа p оказались уже снесенными.

Рассмотрим остатки

$$\beta_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+q-1}.$$

Количество их q, и каждый из них меньше q. Но тогда какие-то два из них обязательно должны быть равны. Пусть равны β_m и β_n ($\beta_m = \beta_n$; $m < n$). Это показывает, что процесс (4), начиная с m-го этапа, становится периодическим ($\alpha_{m+1} = \alpha_{n+1}$, $\alpha_{m+2} = \alpha_{n+2}, \ldots$).

Итак, *каждому положительному рациональному числу p/q соответствует его бесконечное десятичное периодическое разложение вида* (3). Это разложение получается при помощи процесса (4), дополняемого в случае (1) процессом (2).

С другой стороны, *произвольное бесконечное периодическое разложение* (*вида* (3)) *соответствует, указанным путем, единственному положительному рациональному числу*.

Отрицательному рациональному числу $-p/q$ приводят в соответствие бесконечное десятичное разложение числа p/q, взятое со знаком «—».

Числу нуль (оно тоже рациональное) *естественно привести в соответствие разложение* $0 = +0{,}000\ldots = -0{,}00\ldots = 0{,}00\ldots$

3.1.2. Десятичные разложения иррациональных чисел. Кроме периодических десятичных дробей существуют непериодические, например: 0,1010010001...; 0,121122111222...

Вот еще пример: если извлекать корень квадратный из 2 по известному правилу, то получим непериодическую бесконечную десятичную дробь: $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$. Она определена в том смысле, что любому натуральному числу k соответствует определенная цифра α_k k-го разряда числа $\sqrt{2}$, однозначно вычисляемая согласно правилу извлечения квадратного корня.

Если наш читатель не знает это правило, то он может, чтобы получить десятичное разложение числа $\sqrt{2}$, рассуждать так. Сначала находим наибольшее целое число, квадрат которого меньше 2. Это, очевидно, число 1. Затем находим наибольшее число вида $1{,}\alpha_1$, квадрат которого меньше 2. Это есть число 1,4. Затем находим наибольшее число вида $1{,}4\alpha_2$, квадрат которого меньше 2. Это есть число 1,41. И так рассуждая, можно получить однозначно любое число цифр после запятой десятичного разложения числа $\sqrt{2}$.

Математический анализ дает много путей вычисления числа π с любой наперед заданной точностью. Это приводит к определенному бесконечному десятичному разложению π, которое, как оказывается, не является периодическим.

Дадим теперь определение иррационального числа, пока чисто формальное. *Иррациональным числом называется произвольная бесконечная непериодическая дробь*[1])

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots, \tag{5}$$

где α_0 — целое неотрицательное число, а α_k ($k=1, 2, \ldots$) — цифры, знак же равенства выражает, что мы обозначили правую часть (5) *через a*. Впрочем, удобно говорить, что правая часть (5) есть десятичное разложение числа a.

Рациональные и иррациональные числа называются действительными (*или вещественными*) *числами.*

Из сказанного следует, что всякое не равное нулю действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби (5). Если оно рационально, то его десятичное разложение есть бесконечная десятичная периодическая дробь. В противном случае, согласно нашему определению, выражение (5) само определяет иррациональное число.

Десятичная не равная нулю дробь может быть конечной, но она не определяет нового рационального числа: в силу соглашения, выраженного равенством (2), она может быть заменена равной ей бесконечной периодической дробью.

Число a, где не все α_k равны нулю, называется *положительным* или *отрицательным* в зависимости от того, будет ли в (5) фигурировать «+» или «—»; при этом, как обычно, «+» будем опускать.

Действительные числа определены пока формально, надо еще определить арифметические операции над ними, ввести для них понятие «$>$» и проверить, что эти операции и понятие «$>$» согласуются с уже имеющимися соответствующими операциями и понятием «$>$» для рациональных чисел, а также удовлетворяют свойствам, которые мы предъявляем к числам.

---

[1]) Конечно, знаку «+» соответствует одно число (положительное), а знаку «—» другое (отрицательное).

§ 3.2. Сравнение действительных чисел

По определению два числа

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots, \tag{1}$$

$$b = \pm\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots \tag{2}$$

разложенные оба в бесконечные десятичные дроби или разложенные оба в конечные не равные нулю десятичные дроби, равны между собой тогда и только тогда, когда их знаки одинаковы и

$$\alpha_k = \beta_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Для чисел, которые могут быть записаны и в виде бесконечной десятичной дроби и в виде конечной, оба определения не противоречат друг другу, потому что если

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m = \beta_0,\beta_1\ldots\beta_m,\ \alpha_m > 0,$$

то $\alpha_k = \beta_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ и

$$\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)99\ldots = \beta_0,\beta_1\ldots\beta_{m-1}(\beta_m - 1)99\ldots,$$

что соответствует признаку (3) для бесконечных десятичных дробей.

Для положительных чисел a и b по определению $a < b$, если $\alpha_0 < \beta_0$ или если найдется такой индекс (целое неотрицательное число) l, что

$$\alpha_k = \beta_k\ (k = 0, 1, \ldots, l) \quad \text{и} \quad \alpha_{l+1} < \beta_{l+1}. \tag{4}$$

Это определение годится как для двух конечных, так и для двух бесконечных разложений.

Упражнение 1. Между двумя действительными числами a и b $(a < b)$ имеется рациональное число r $(a < r < b)$, разлагающееся в конечную десятичную дробь. Если $a < 0$, $b > 0$, то можно считать $r = 0$.

Пусть $0 < a < b$ и

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\ b = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots$$

— бесконечные десятичные дроби. Если $\alpha_0 < \beta_0$, то

$$a \leqslant \alpha_0,99\ldots = \alpha_0 + 1 \leqslant \beta_0 < \beta_0,\beta_1\ldots\beta_k < \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots = b,$$

где k такое, что $\beta_k > 0$. Это показывает, что в данном случае можно положить $r = \beta_0,\beta_1\ldots\beta_k$.

Если же $\alpha_0 = \beta_0$, то при некотором l

$$\alpha_s = \beta_s\ (s = 0, 1, \ldots, l-1),\ \alpha_l < \beta_l; \tag{5}$$

поэтому

$$a \leqslant \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_l 99\ldots = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{l-1}(\alpha_l + 1) \leqslant$$
$$\leqslant \beta_0,\beta_1\ldots\beta_{l-1}\beta_l < \beta_0,\beta_1\ldots\beta_l\beta_{l+1}\ldots\beta_k <$$
$$< \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots = b \qquad (\beta_k > 0),$$

и, следовательно, можно считать $r = \beta_0,\beta_1\ldots\beta_k$.

Случай $a < b < 0$ сводится к предыдущему.

Задача 1. Между числами

$$0,(78) \text{ и } 0,935050050005\ldots.$$

найти: 1) рациональное число, 2) иррациональное число, 3) рациональное и иррациональное число, 4) два рациональных числа, 5) два иррациональных числа.

§ 3.3. Десятичное приближение действительного числа

Зададим произвольное положительное число

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \tag{1}$$

в виде десятичной дроби. Число

$$a^{(n)} = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

будем называть *n-м десятичным приближением числа a с недостатком.*

Справедливы неравенства

$$a^{(n)} \leqslant a \leqslant a^{(n)} + 10^{-n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

В самом деле,

$$a^{(n)} = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n \leqslant \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n 99\ldots = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n + 10^{-n} = a^{(n)} + 10^{-n}.$$

Число $a^{(n)} + 10^{-n}$ называют *n-м приближением числа a с избытком.*

Справедливы неравенства

$$a^{(1)} \leqslant a^{(2)} \leqslant a^{(3)} \leqslant \ldots,$$

т. е.

$$a^{(n)} \leqslant a^{(n+1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

В самом деле,

$$a^{(n)} = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \leqslant \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1} = a^{(n+1)}.$$

Имеют также место неравенства

$$a^{(1)} + 10^{-1} \geqslant a^{(2)} + 10^{-2} \geqslant a^{(3)} + 10^{-3} \geqslant \ldots,$$

т. е.

$$a^{(n)} + 10^{-n} \geqslant a^{(n+1)} + 10^{-(n+1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

В самом деле,

$$a^{(n+1)} + 10^{-(n+1)} = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}999 \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n 99\ldots = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n + 10^{-n} = a^{(n)} + 10^{-n}.$$

Мы видим, что числа $a^{(n)}$ не убывают при возрастании n, оставаясь все время не бо́льшими числа a. Числа же $a^{(n)}+10^{-n}$ не возрастают, оставаясь не меньшими числа a. Кроме того, разность

$$(a^{(n)}+10^{-n})-a^{(n)}=10^{-n}\to 0, \quad n\to\infty,$$

т. е. стремится к нулю при $n\to\infty$.

Числа $a^{(n)}$ и $a^{(n)}+10^{-n}$ рациональные, к тому же они разлагаются в конечные десятичные дроби. Современные счетные машины приспособлены к вычислениям с десятичными дробями [1]).

В практических вычислениях точные значения чисел заменяют приближенными, в частности приближениями $a^{(n)}$ и $a^{(n)}+10^{-n}$.

§ 3.4. Числовая прямая

Зададим отрезок, который будем считать единичным — имеющим длину 1. Мы хотим определить понятие длины произвольного отрезка AB относительно выбранной единицы (единичного отрезка).

Отрезок AB называется *соизмеримым* с единицей (с единичным отрезком), если существуют натуральные числа p и q такие, что если q-ю часть единичного отрезка отложить p раз от A в направлении к B, то придем в точности в точку B. Про такой *отрезок говорят, что он имеет длину* p/q.

Примером отрезка, не соизмеримого с единицей, является гипотенуза прямоугольного треугольника, имеющего единичные катеты. Длина этого отрезка равна $\sqrt{2}$.

Не соизмеримых с единицей отрезков имеется бесконечное множество. Дадим общий метод их измерения, т. е. определения их длины.

Нас интересует чисто теоретическая сторона вопроса. Мы отдаем себе отчет, что длину отрезка (соизмеримого или не соизмеримого с единицей) практически можно получить только приближенно, но мы хотим представить себе, как это можно сделать теоретически точно.

Зададим прямую L, для которой выберем положительное направление (указано стрелкой, рис. 56), единичный отрезок и начальную точку O. Такую прямую называют *числовой прямой* потому, что ее точки можно рассматри-

[1]) Впрочем, на самом деле широко применяется так называемое двоичное исчисление.

вать как иллюстрации действительных чисел. Каждому положительному рациональному числу p/q приведем в соответствие точку прямой L, называемую точкой p/q, лежащую справа от O на расстоянии p/q от O. Каждому же отрицательному рациональному числу $-p/q$ приведем в соответствие на L точку (точку $-p/q$), симметричную точке p/q относительно O. Числу 0 пусть соответствует точка O.

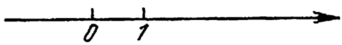


Рис. 56.

Будем называть A на L рациональной или иррациональной точкой в зависимости от того, будет ли отрезок OA, соединяющий ее с точкой O, соизмерим или не соизмерим с единицей.

Мы указали способ, в силу которого устанавливается взаимно однозначное соответствие между рациональными числами и рациональными точками прямой.

Будем пользоваться этим соответствием, чтобы решить более сложную задачу об измерении отрезка OA, где A — любая точка прямой L.

Зададим на положительном луче L_+ прямой L произвольную точку A (рациональную или иррациональную).

Чтобы определить длину $|OA|$ отрезка OA, рассуждаем следующим образом.

Подберем целое неотрицательное число α_0, приближающее длину $|OA|$ с точностью до единицы с недостатком (снизу). Это значит, что точка α_0 луча L_+ либо совпадает с A, либо находится левее A, однако точка α_0+1 находится на L_+ правее A.

Отрезок $[\alpha_0, \alpha_0+1]$, соединяющий точки α_0 и α_0+1, обозначим через $\sigma_0=[\alpha_0, \alpha_0+1]$. Он обладает следующими свойствами:

а) точка A принадлежит к σ_0 ($A \in \sigma_0$), но не является правым концом σ_0;

б) длина σ_0 равна единице: $|\sigma_0|=1$.

Приблизим теперь длину $|OA|$ снизу с точностью до одной десятой. Это значит, что мы подбираем цифру α_1 (т. е. одно из чисел 0, 1, . . ., 9) так, чтобы точка α_0,α_1 луча L_+ либо совпала с A, либо была левее A, но при этом чтобы точка $\alpha_0,\alpha_1+10^{-1}$ была правее A. Введем отрезок

$$\sigma_1=[\alpha_0,\alpha_1; \quad \alpha_0,\alpha_1+10^{-1}],$$

который, очевидно, обладает следующими свойствами:

а) точка A принадлежит к σ_1, но не является правым концом σ_1;

б) длина σ_1 равна $|\sigma_1| = 10^{-1}$.

Приближаем далее длину $|OA|$ снизу с точностью до одной сотой, т. е. находим цифру α_2 такую, что отрезок $\sigma_2 = [\alpha_0,\alpha_1\alpha_2; \ \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 + 10^{-2}]$ будет содержать в себе A, правый его конец не совпадает с A. Длина $|\sigma_2| = 10^{-2}$.

Этот процесс продолжим неограниченно. В результате получим последовательность чисел

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \tag{1}$$

где α_0 — неотрицательное целое число, а α_k ($k = 1, 2, \ldots$) — цифры. При этом для любого натурального k отрезок

$$\sigma_k = [\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_k; \ \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_k + 10^{-k}]$$

луча L_+ содержит в себе точку A, правый его конец не совпадает с A, а длина $|\sigma_k| = 10^{-k}$ ($k = 1, 2, \ldots$).

Итак, точка A принадлежит ко всем отрезкам σ_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) и длины их при неограниченном возрастании k, очевидно, стремятся к нулю: $|\sigma_k| \to 0$, $k \to \infty$.

Определим теперь число a при помощи десятичного разложения

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots, \tag{2}$$

где α_0 — целое неотрицательное число, α_k ($k = 1, 2, \ldots$) — цифры.

Число a удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_k \leqslant a < \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_k + 10^{-k} \tag{3}$$

при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$, а точка A при любом указанном k лежит на L_+ между точками $\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_k$ и $\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_k + 10^{-k}$. Это показывает, что именно число a есть длина $|OA|$ отрезка OA: $a = |OA|$.

Итак, каждой точке A луча L_+ при помощи процесса (1) *можно привести в соответствие положительное число $a = |OA|$. При этом, если какая-либо другая точка B луча L_+ находится правее A, то ей соответствует большее число ($b > a$). Число a называется еще координатой точки A на прямой L.*

Надо учесть, что раз точка A находится на L_+, т. е. лежит на L правее точки O, то в процессе (1) при достаточно большом n окажется, что $\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n > 0$, откуда $a > 0$.

Далее, если точка B лежит на L_+ правее точки A, то при достаточно большом n окажется, что $\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n+10^{-n}<\beta_0,\beta_1\ldots\beta_n$, откуда $a<b=\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots$.

Поставим обратную задачу. Задано положительное число [1])

$$a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots. \tag{4}$$

Спрашивается, существует ли на L_+ точка A такая, что $a=|OA|$? На основании сказанного этот вопрос можно выразить еще так: существует ли на L_+ точка A, одновременно принадлежащая ко всем отрезкам

$$\sigma_k=[\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_k;\quad \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_k+10^{-k}]\qquad (k=0,1,2,\ldots)? \tag{5}$$

Решение этого вопроса относится к геометрии. Геометрия решает его положительно, т. е. она утверждает, что *существует на L_+ единственная точка A, принадлежащая ко всем σ_k ($k=0,1,2,\ldots$)*.

Это утверждение обычно предлагается в виде одной из аксиом геометрии (принципа вложенных отрезков, см. § 3.5), либо оно есть следствие других исходных аксиом.

Заметим, что если

$$a=\frac{p}{q}=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

есть рациональное положительное число, то ему соответствует на L_+ рациональная точка p/q. Эта точка принадлежит ко всем отрезкам σ_k луча L_+ (см. (5)). Ее как раз мы и получили, применяя рассмотренный выше процесс. Ведь существует только одна точка, принадлежащая ко всем σ_k.

Точке O приписывается в качестве ее координаты число 0, а произвольной точке A' отрицательного луча L_- приписываем число $-a$, где a — координата точки A, симметричной A' относительно O.

На основании сказанного *между действительными числами и точками прямой L имеет место взаимно однозначное соответствие. При этом рациональные числа $\pm p/q$ переходят в рациональные точки $\pm p/q$, и обратно.* Далее, *если точка B находится на L правее точки A, то соответствующие им числа b и a находятся в соотношении $a<b$, и обратно.*

---

[1]) Мы считаем, что десятичное разложение (4) не состоит сплошь из девяток, начиная с некоторого разряда.

§ 3.5. Принцип вложенных, отрезков

Пусть по некоторому закону задана последовательность отрезков $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$, лежащих на прямой L и обладающих свойствами:

а) *отрезки σ_k вложены; это значит, что при любом n отрезок σ_{n+1} принадлежит к σ_n* ($\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$, $n = 1, 2, \ldots$);

б) *при неограниченном возрастании n длина $|\sigma_n|$ стремится к нулю* ($|\sigma_n| \to 0$, $n \to \infty$).

Тогда на L существует, и притом единственная, точка A, принадлежащая ко всем отрезкам σ_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Отрезки σ_n, о которых шла речь в § 3.4, как раз являются вложенными, и для них $|\sigma_n| = 10^{-n} \to 0$, $n \to \infty$.

Принцип вложенных отрезков утверждает *существование* точки A, принадлежащей ко всем σ_n, и ее *единственность*.

§ 3.6. Арифметические действия. Приближенные вычисления

Зададим два положительных числа

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots, \quad b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots,$$

определенных конечными или бесконечными десятичными дробями.

Читатель хорошо знает, как складываются конечные десятичные дроби. Он легко догадается, как это сделать в случае сложения конечной десятичной дроби и бесконечной. Если же оба слагаемых имеют бесконечные десятичные разложения, то возникают затруднения. Эти затруднения можно преодолеть — можно указать правило сложения дробей с бесконечными хвостами. Впрочем это правило носит чисто теоретический характер — оно практически неосуществимо до конца, потому что представляет собой некоторый бесконечный процесс.

На практике приходится числа a и b заменять их приближениями:

$$\bar{a} \approx a, \quad \bar{b} \approx b,$$

обычно конечными десятичными дробями $\bar{a}$, $\bar{b}$. Сумму $\bar{a} + \bar{b}$ считают приближением теоретической суммы $a + b$:

$$\bar{a} + \bar{b} \approx a + b.$$

Но тогда возникает вопрос об оценке ошибки приближения. Однако и для теории, и для практики важно отдать себе отчет в том, что сумма произвольных действительных чисел a и b может быть определена пусть теоретически, но точно. Тогда только имеет смысл говорить о приближении какого-либо числа, в данном случае числа $a+b$, когда мы уверены в том, что оно существует.

Сказанное можно распространить и на разность, и произведение, и частное чисел.

Ниже мы даем представление о том, как можно чисто теоретически определить арифметические действия над числами. Однако эти соображения полезны и для практики вычислений, потому что они показывают, как соответствующие действия надо производить приближенно и какие в этих случаях возникают оценки ошибок.

Положим

$$a^{(n)} = \alpha_0{,}\alpha_1 \ldots \alpha_n, \tag{1}$$
$$b^{(n)} = \beta_0{,}\beta_1 \ldots \beta_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

При неограниченном возрастании n числа $a^{(n)}$ стремятся к a, не убывая:

$$a^{(0)} \leqslant a^{(1)} \leqslant a^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant a, \tag{2}$$

а числа $a^{(n)} + 10^{-n}$,— не возрастая:

$$a^{(1)} + 10^{-1} > a^{(2)} + 10^{-2} > \ldots > a. \tag{3}$$

Сумма $a+b$ определяется как число, для которого удовлетворяются неравенства

$$a^{(n)} + b^{(n)} \leqslant a + b < (a^{(n)} + 10^{-n}) + (b^{(n)} + 10^{-n})$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$, или, выражаясь геометрическим языком, $a+b$ есть число, которому на числовой прямой соответствует точка, принадлежащая ко всем отрезкам

$$\sigma_n = [a^{(n)} + b^{(n)},\ a^{(n)} + b^{(n)} + 2\cdot 10^{-n}].$$

Такая точка есть, и притом единственная, потому что левые концы σ_n не убывают, правые же не возрастают и, следовательно, отрезки σ_n вложены $(\sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \ldots)$. Кроме того, $|\sigma_n| = 2\cdot 10^{-n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

На самом деле, если бы нам надо было сложить a и b практически, мы бы сложили $a^{(n)}$ и $b^{(n)}$ при достаточно больших n и считали бы, что число $a^{(n)} + b^{(n)}$ есть приближение $a+b$. Ошибка μ_n, которую мы при этом делаем, не превышает $2\cdot 10^{-n}$:

$$\mu_n \leqslant 2\cdot 10^{-n}.$$

Подобным образом разность $a - b$ $(a > b)$ определяется как число, удовлетворяющее неравенствам

$$a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) < a - b < (a^{(n)} + 10^{-n}) - b^{(n)}.$$

Этому числу соответствует точка на числовой прямой, принадлежащая ко всем отрезкам

$$\sigma_n = [a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}),\ \ a^{(n)} + 10^{-n} - b^{(n)}]$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Такая точка существует и единственная, потому что $|\sigma_n| = 2\cdot 10^{-n} \to 0$, $n \to \infty$, а отрезки σ_n вкладываются. Надо учесть, что $a^{(n)}$ не убывает, а $b^{(n)} + 10^{-n}$ не возрастает, следовательно, $a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n})$ не убывает. Далее, $a^{(n)} + 10^{-n}$ не возрастает, а $b^{(n)}$ не убывает, откуда $a^{(n)} + 10^{-n} - b^{(n)}$ не возрастает.

Если взять в качестве приближения $a - b$ число $a^{(n)} - b^{(n)}$, то ошибка не превысит $2\cdot 10^{-n}$, потому что точка $a^{(n)} - b^{(n)}$ принадлежит σ_n.

Естественно, далее, определить произведение ab как число, удовлетворяющее неравенствам

$$a^{(n)}b^{(n)} \leqslant ab < (a^{(n)} + 10^{-n})(b^{(n)} + 10^{-n})$$

для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ или как число, которому соответствует точка на числовой прямой, принадлежащая ко всем отрезкам

$$\sigma_n = [a^{(n)}b^{(n)},\ \ (a^{(n)} + 10^{-n})(b^{(n)} + 10^{-n})]$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Это определение корректно, потому что отрезки σ_n вложены и

$$|\sigma_n| = a^{(n)}10^{-n} + b^{(n)}10^{-n} + 10^{-2n} <$$
$$< (\alpha_0 + 1)10^{-n} + (\beta_0 + 1)10^{-n} + 10^{-2n} \to 0,\ n \to \infty.$$

В данном случае оценка приближения зависит не только от n, но и от α_0 и β_0.

Наконец, частное a/b $(a > 0,\ b > 0)$ определяется как число, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}} < \frac{a}{b} < \frac{a^{(n)} + 10^{-n}}{b^{(n)}} \quad (n \geqslant l).$$

Это определение тоже корректно, потому что отрезки

$$\sigma_n = \left[\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}+10^{-n}}, \frac{a^{(n)}+10^{-n}}{b^{(n)}}\right] \qquad (n \geqslant l)$$

вложены и

$$|\sigma_n| = \frac{a^{(n)}+10^{-n}}{b^{(n)}} - \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}+10^{-n}} = \frac{a^{(n)}\,10^{-n}+b^{(n)}\,10^{-n}+10^{-2n}}{b^{(n)}\,(b^{(n)}+10^{-n})} <$$

$$< \frac{(\alpha_0+1)\,10^{-n}+(\beta_0+1)\,10^{-n}+10^{-2n}}{(\beta_l)^2\,10^{-2l}} \to 0,\ n\to\infty\ (n\geqslant l). \quad (4)$$

Здесь надо объяснить, что такое l. Дело в том, что десятичное разложение числа b может начинаться с нулей, и тогда для малых n будет $b^{(n)} = 0$. Число l есть наименьшее целое неотрицательное, для которого $\beta_k > 0$. Таким образом, либо $\beta_0 > 0$, либо $\beta_k = 0$ ($k = 0, 1, \ldots, l-1$) и $\beta_l > 0$.

Мы видим, что в качестве приближения a/b можно взять число $a^{(n)}/b^{(n)}$, принадлежащее, очевидно, к σ_n, с оценкой приближения, указанной в (4).

На арифметических действиях с числами любого знака мы специально не останавливаемся. Как читатель знает, они сводятся к надлежащим действиям над положительными числами. Например, чтобы сложить два числа a и b разных знаков, где $|a| \geqslant |b|$, надо положить $a + b = \pm(|a| - |b|)$, где выбирается знак, одинаковый со знаком a.

§ 3.7. Свойства действительных чисел

Перечислим свойства действительных чисел, которые могут быть обоснованы методами, применявшимися выше. Эти свойства разделены на 5 групп (I—V).

К группам I, II, III относятся обычные элементарные свойства, с которыми нам всегда приходится иметь дело при вычислениях и при сравнении чисел.

Группа IV состоит из одного свойства (архимедова).

Группа V тоже состоит из одного свойства (непрерывности множества действительных чисел).

Мы привыкли к тому, что рациональные числа удовлетворяют свойствам I, II, III, IV. Сейчас утверждается, что свойствам I—IV удовлетворяют не только рациональные числа, но и вообще все действительные числа.

Что касается свойства V, то множество одних только рациональных чисел ему не удовлетворяет — оно недостаточно полно,

I. Свойства порядка

I_1. Для каждой пары действительных чисел a и b имеет место одно и только одно соотношение:

$$a = b, \; a > b, \; a < b.$$

I_2. Из $a < b$ и $b < c$ следует $a < c$.
I_3. Если $a < b$, то найдется такое рациональное число c, что $a < c < b$.

II. Свойства действий сложения и вычитания.

II_1. $a + b = b + a$.
II_2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
II_3. $a + 0 = a$.
II_4. $a + (b - a) = b$.
II_5. Из $a < b$ следует, что $a + c < b + c$ для любого c.

III. Свойство действий умножения и деления

III_1. $ab = ba$.
III_2. $(ab)\,c = a\,(bc)$.
III_3. $a \cdot 1 = a$.
III_4. $a \cdot \frac{b}{a} = b$, $a \neq 0$.
III_5. $(a + b)\,c = ac + bc$.
III_6. Из $a < b$, $c > 0$ следует $ac < bc$.

IV. Архимедово свойство

Каково бы ни было число $c > 0$, существует натуральное $n > c$.

V. Свойство непрерывности множества действительных чисел

Пусть задана последовательность вложенных отрезков (множеств чисел x, для которых $a_n \leqslant x \leqslant b_n$)

$$\sigma_n = [a_n, \; b_n] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е. таких, что $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, с длинами, стремящимися к нулю:

$$d_n = b_n - a_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Тогда существует, и притом единственное, число, принадлежащее ко всем σ_n.

С геометрическим аналогом свойства V мы познакомились в § 3.5. Там было сказано, что это свойство для натуральных отрезков σ_n на прямой в геометрии приходится постулировать. Здесь под отрезками понимаются соответствующие множества чисел, и в этом случае свойство проверяется (доказывается) на десятичных разложениях чисел, так же как все остальные свойства I—IV.

§ 3.8. Показательная функция a^x

3.8.1. Свойства функции a^x. Показательная функция a^x для положительного числа a, не равного 1 ($a > 0$, $a \neq 1$), определялась в школе на различных этапах обучения для значений x натуральных, рациональных, целых и, наконец, произвольных действительных.

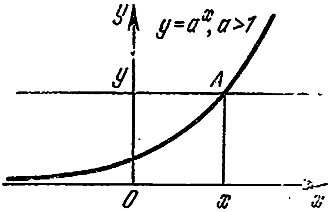


Рис. 57.

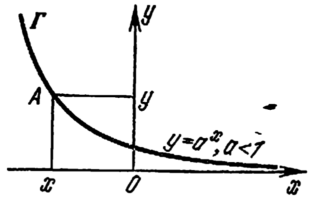


Рис. 58.

Имеют место следующие фундаментальные свойства показательной функции:

$$a^0 = 1, \tag{1}$$

$$a^x > 0 \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y \ (-\infty < x, y < \infty), \tag{3}$$

и если $a > 1$ (рис. 57), то

$$a^x < a^y \ (-\infty < x < y < \infty), \tag{4}$$

$$a^x \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \tag{5}$$

$$a^x \to 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty. \tag{6}$$

Если же $a < 1$ (рис. 58), то в силу равенства

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x},$$

и из (4), (5), (6) следует, что

$$a^x > a^y \ (-\infty < x < y < \infty), \tag{4'}$$

$$a^x \to 0, \text{ если } x \to +\infty, \tag{5'}$$

$$a^x \to +\infty, \text{ если } x \to -\infty. \tag{6'}$$

Кроме того, справедливо свойство: *показательная функция a^x непрерывна на всей действительной оси, т. е. имеет непрерывный график.*

На рис. 3 изображены графики a^x при $a = 2$, $a = 10$, $a = 0{,}1$, $a = 1/2$.

Ниже мы собираем в одно место определения a^x, распадающиеся на случаи целого, рационального и произвольного действительного x.

3.8.2. **a^x для целых и рациональных x.** Если n — натуральное число, то число a^n определяется как произведение $a^n = a \ldots a$ из n сомножителей, каждый из которых равен a, а число a^{-n} — при помощи равенства

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Полагают еще по определению, что

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a.$$

Этим функция a^x определена для любых целых n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Свойства (1) — (6) для целых x проверяются легко. Если q — натуральное, то число $a^{1/q}$ определяется как арифметическое значение корня q-й степени из a, т. е. $a^{1/q}$ есть такое неотрицательное число, q-я степень которого равна a:

$$(a^{1/q})^q = a.$$

На самом деле это число положительное, потому что q-я степень нуля есть нуль, а в данном случае $a > 0$.

Возникает вопрос о существовании числа $a^{1/q}$, т. е. есть ли на самом деле такое положительное число, q-я степень которого равна a. Да, есть. Убедимся в этом. Функция

$$y = x^q,$$

где q — натуральное число, имеет для значений $x \geqslant 0$ график Г вида, как на рис. 59. Ордината y точки Г непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$, когда ее абсцисса непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$. Проведем выше оси x прямую, параллельную оси x, на расстоянии, равном a. Она пересекает Г в одной-единственной точке A, абсциссу которой обозначим через b:

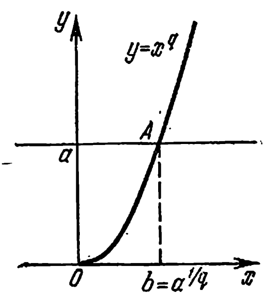


Рис. 59.

$$b^q = a.$$

Следовательно,

$$b = a^{1/q}.$$

Мы доказали существование числа $b = a^{1/q}$ графическим методом. Можно доказать это и формально, не обращаясь к графику. Число b — единственное: любое другое число, возведенное в степень q, дает число либо большее, чем a, либо меньшее, чем a.

Из единственности вытекает следующий факт: если A и B — положительные числа и

$$A^q = B^q,$$

то

$$A = B.$$

В самом деле, A и B суть арифметические значения корня q-й степени из одного и того же числа. Но тогда $A = B$, потому что арифметическое значение корня q-й степени из положительного числа единственно.

Пусть теперь p/q есть произвольное положительное рациональное число (p и q — целые, $p > 0$, $q > 0$).

По определению

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q}. \tag{7}$$

Здесь первое равенство дает определение $a^{p/q}$, второе же можно доказать. В самом деле, если возвести третий член в (7) в q-ю степень, то получим a^p, а если возвести второй член (7) в q-ю степень, то тоже получим a^p:

$$(a^{1/q})^{pq} = \underbrace{(\overbrace{a^{1/q}\ldots a^{1/q}}^{q\text{ раз}})\ldots(\overbrace{a^{1/q}\ldots a^{1/q}}^{q\text{ раз}})}_{p\text{ раз}} = \underbrace{a\ldots a}_{p\text{ раз}} \equiv a^p.$$

По определению также

$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}}. \tag{8}$$

Этим функция a^x определена для любых рациональных x.

На основании этих определений доказывают свойства (2) — (6) (см. учебник алгебры 8 класса, М.: «Просвещение», 1978) для рациональных x.

3.8.3. a^x для иррациональных x. Дадим формальное определение a^α, когда α — число иррациональное. Обоснование естественности этого определения будет сделано ниже, в пп. 3.8.4 и 3.8.5.

Пусть $a > 1$. Зададим иррациональное, пока положительное, число

$$\alpha = \alpha_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$$

и введем для произвольного натурального n числа

$$\alpha^{(n)} = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n \quad \text{и} \quad \alpha^{(n)} + 10^{-n},$$

приближающие α с недостатком и избытком. Для них выполняются соотношения

$$\alpha^{(n)} \leqslant \alpha < \alpha^{(n)} + 10^{-n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Число α можно определить как единственное число, удовлетворяющее этим соотношениям. С другой стороны, числа $\alpha^{(n)}$ и $\alpha^{(n)} + 10^{-n}$ рациональные и для них при $a > 1$ на основании свойства (4), которое мы на данном этапе считаем доказанным для рациональных чисел, выполняются неравенства

$$a^{\alpha^{(n)}} < a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

По определению a^α обозначает число, удовлетворяющее неравенствам

$$a^{\alpha^{(n)}} \leqslant a^\alpha < a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

каково бы ни было натуральное n.

Такое число существует и единственное (см. ниже п. 3.8.5).

Если α — отрицательное иррациональное число, то по определению

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}.$$

Примечание 1. Разность

$$a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}} - a^{\alpha^{(n)}} = a^{\alpha^{(n)}}[a^{10^{-n}} - 1] < a^{\alpha_0+1}[a^{10^{-n}} - 1].$$

стремится к нулю при неограниченном возрастании n, потому что величина

$$a^{10^{-n}} - 1 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(доказательство см. ниже, в п. 3.8.6). Это показывает, что число $a^{\alpha^{(n)}}$ стремится к числу a^α при $n \to \infty$:

$$a^{\alpha(n)} \to a^\alpha \qquad (n \to \infty),$$

или, как говорят, *величина $a^{\alpha^{(n)}}$ стремится при $n \to \infty$ к пределу*, и пишут

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha^{(n)}} = a^\alpha.$$

Таким образом, можно дать и такое определение числа a^α, эквивалентное сформулированному выше.

Если $\alpha = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, *то число* a^α *есть предел*:

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha^{(n)}}.$$

3.8.4. Функция a^x на действительной оси. В п. 3.8.2 функция a^x была определена для рациональных x, а в п. 3.8.3 — для иррациональных x. Следовательно, функция a^x теперь уже определена на всей действительной оси $(-\infty, \infty)$.

Можно показать, что она удовлетворяет свойствам (1) — (6), т. е. эти свойства выполняются не только для рациональных, но и для любых действительных x, y. Кроме того, можно показать, что функция a^x на оси $(-\infty, \infty)$ непрерывна — имеет непрерывный график. Формальное доказательство этих утверждений мы не проводим. Пояснения, которые мы делаем ниже, в п. 3.8.5, могут помочь убедиться в том, что эти утверждения верны. Можно дать и другое, эквивалентное определение функции a^x для действительных значений x:

a^x *есть определенная на действительной оси непрерывная функция, которая для рациональных значений* $x = \pm p/q$ $(p > 0,\ q > 0)$ *вычисляется по формулам* (7), (8), *а при* $x = 0$ *равна единице.*

Примечание 1. Таким образом, если некоторая функция непрерывна на действительной оси и для рациональных значений $x = \pm p/q$ вычисляется по формулам $a^{p/q} = (a^{1/q})^p$, $a^{-p/q} = 1/a^{p/q}$, то ее значение в произвольной иррациональной точке $\alpha = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$ необходимо есть число β, удовлетворяющее неравенствам

$$a^{\alpha^{(n)}} \leqslant \beta < a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}} \quad (a > 1).$$

Примечание 2. В учебнике алгебры для 8 класса (М.: «Просвещение», 1978) a^x при $a > 0$ для иррационального α определяется как такое число, которое удовлетворяет неравенствам $a^{r_1} < a^\alpha < a^{r_2}$ для всех рациональных r_1 и r_2, где $r_1 < r_2$. Это определение эквивалентно приведенному выше.

3.8.5. Обоснование определения a^x для иррационального x. Пусть

$$\alpha = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

— положительное иррациональное число и

$$\alpha^{(n)} = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Введем отрезки

$$\sigma_n = [\alpha_1^{(n)}, \alpha^{(n)} + 10^{-n}] \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Длины их стремятся к нулю:

$$|\sigma_n| = 10^{-n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

При неограниченном возрастании n число $\alpha^{(n)}$ стремится к α, не убывая, а $a^{(n)} + 10^{-n}$ стремится к α, не возрастая. Это можно записать в виде соотношений

$$\alpha^{(1)} \leqslant \alpha^{(2)} \leqslant \alpha^{(3)} \leqslant \ldots \leqslant \alpha < \ldots < \alpha^{(3)} + 10^{-3} < \\ < \alpha^{(2)} + 10^{-2} < \alpha^{(1)} + 10^{-1}, \quad (10)$$

из которых следует, что число α принадлежит одновременно ко всем отрезкам σ_n или, что все равно, удовлетворяет неравенствам

$$\alpha^{(n)} \leqslant \alpha < \alpha^{(n)} + 10^{-n}$$

для любого натурального n.

С другой стороны, в силу свойства (4) для показательной функции, которое мы считаем на данном этапе рассуждений верным для рациональных чисел, при $a > 1$ выполняются аналогичные соотношения:

$$a^{\alpha^{(1)}} \leqslant a^{\alpha^{(2)}} \leqslant a^{\alpha^{(3)}} \leqslant \ldots \\ \ldots < a^{\alpha^{(3)}+10^{-3}} < a^{\alpha^{(2)}+10^{-2}} < a^{\alpha^{(1)}+10^{-1}}. \quad (11)$$

Мы не поместили внутрь этих неравенств число a^{α}. Оно еще не определено пока, так как α — иррациональное. Мы его только собираемся определить.

Величина $a^{10^{-n}}$ стремится к 1, когда $n \to +\infty$:

$$a^{10^{-n}} \to 1 \quad (n \to +\infty),$$

или, как говорят, $a^{10^{-n}}$ имеет предел, равный 1, при $n \to +\infty$. (Это доказано ниже, в п. 3.8.6.)

Но тогда длина $\sigma'_n = [a^{\alpha^{(n)}}, a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}}]$ при неограниченном возрастании n стремится к нулю:

$$|\sigma'_n| = a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}} - a^{\alpha^{(n)}} = a^{\alpha^{(n)}} [a^{10^{-n}} - 1] < \\ < a^{\alpha_0+1} [a^{10^{-n}} - 1] \to 0, \quad (n \to \infty). \quad (12)$$

Кроме того, отрезки σ_n' на основании (11) вложены друг в друга:

$$\sigma_1' \supset \sigma_2' \supset \sigma_3' \supset \ldots$$

Но, как мы знаем, если задана последовательность отрезков, вложенных друг в друга, длины которых стремятся к нулю, то существует, и притом единственная, точка (число) β, принадлежащая ко всем этим отрезкам одновременно. Это число естественно обозначить символом a^{α}: $\beta = a^{\alpha}$.

Теперь мы можем это число вставить внутрь неравенств (11):

$$a^{\alpha^{(1)}} \leqslant a^{\alpha^{(2)}} \leqslant a^{\alpha^{(3)}} \leqslant \ldots \leqslant a^{\alpha} < \ldots < a^{\alpha^{(3)}+10^{-3}} < \\ < a^{\alpha^{(2)}+10^{-2}} < a^{\alpha^{(1)}+10^{-1}}. \quad (13)$$

Для отрицательного иррационального числа $-\alpha$, как это уже было отмечено в предыдущем пункте, полагают $a^{-\alpha} = 1/a^{\alpha}$.

Сказанное может помочь представить следующую картину. Для данного числа $a > 1$ в прямоугольной системе координат xOy отметим на плоскости все точки вида (r, a^r), где r — рациональные числа. Мы получим пунктирную кривую. Практически ее нарисовать невозможно, но можно представить себе теоретически. На основании подсчетов с числами a^r $(r = \pm p/q)$ следует заключить, что просветы у нашей пунктирной кривой можно заполнить точками, имеющими иррациональные абсциссы, так, что в результате получится непрерывная кривая. Такое заполнение для каждого иррационального $x = \alpha$ можно сделать только единственным образом, именно так, как было указано выше, иначе получится разрывная кривая.

Отметим, что из соотношений (12) и (13), следует, что число a^{α}, где $\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$, можно определить как предел:

$$a^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha^{(n)}}.$$

3.8.6. Поведение a^x возле точки $x = 0$. Покажем, что

$$\lim_{N\to\infty} a^{1/N} = 1,$$

где N пробегает натуральные числа. Так как $a > 1$, то

$$a^{1/N} - 1 = \mu_N > 0.$$

Далее,

$$a^{1/N} = 1 + \mu_n \tag{14}$$

и

$$a = (1 + \mu_N)^N = 1 + N\mu_N + \ldots > 1 + N\mu_N. \tag{15}$$

Мы применили формулу бинома Ньютона, выписав явно только первые ее два члена. Если отбросить остальные члены (они положительные), то получится меньшее число. Из (15) следует:

$$\mu_N < \frac{a-1}{N} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Но тогда

$$\lim_{N\to\infty} a^{1/N} = 1 + \lim_{N\to\infty} \mu_N = 1.$$

Что и требовалось доказать.

3.8.7. $a^{xy} = (a^x)^y$. При любых действительных x, y верна формула

$$a^{xy} = (a^x)^y. \tag{16}$$

Докажем ее. При натуральных m, p, q:

$$a^{mx} = a^{x+\ldots+x} = (a^x)^m \text{ или } a^x = (a^{mx})^{1/m},$$

$$a^{(p/q)x} = a^{p(x/q)} = (a^{x/q})^p = [(a^x)^{1/q}]^p = (a^x)^{p/q}.$$

Для произвольного $y > 0$ и рациональных y_n, где $y_n \to y$:

$$a^{xy} = \lim_{y_n\to y} a^{xy_n} = \lim_{y_n\to y} (a^x)^{y_n} = (a^x)^y.$$

Для $y < 0$

$$a^{xy} = \frac{1}{a^{x(-y)}} = \frac{1}{(a^x)^{-y}} = (a^x)^y.$$

§ 3.9. Логарифмическая функция

Пусть a есть положительное число, не равное единице ($0 < a$, $a \neq 1$) и y есть произвольное положительное число ($0 < y < \infty$). Мы знаем, что *логарифмом* y при основании a называется такое число $x = \log_a y$, что если возвести a в степень x, то получается y. Таким образом,

$$a^x = y. \tag{1}$$

Поэтому можно еще написать

$$a^{\log_a y} = y, \quad 0 < y < \infty, \tag{2}$$

или еще

$$\log_a a^x = x, \quad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

Возникает вопрос, всегда ли решается относительно x уравнение (1), или, что все равно, существует ли для положительного числа y его логарифм при основании a. Да, существует и единственный. В этом мы убедимся на основании свойств функции a^x, которые мы сейчас перечислим. Будем считать, что $a > 1$.

1) a^x непрерывна на $(-\infty, \infty)$, т. е. имеет непрерывный график;

2) a^x — возрастающая функция, т. е. $a^x < a^y$, если $x < y$;

3) $a^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$;

4) $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$.

На рис. 57 изображен график функции a^x $(a > 1)$. В силу 1) это непрерывная кривая, распространенная над всей осью x.

В силу 2), 3), 4), когда абсцисса x точки графика возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, ее ордината y возрастает от 0 до $+\infty$.

Значение x, удовлетворяющее уравнению (1), для данного $y > 0$ можно получить следующим образом. На оси ординат отложим вверх от начала координат на расстоянии, равном y, точку и через эту точку проведем прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая обязательно пересечет график, и притом в единственной точке A. Абсцисса x точки A и решает, очевидно, уравнение (1) для данного y (см. рис. 57).

Мы доказали существование логарифма y при основании a, применив графический метод. При этом мы получили новую функцию от x, зависящую от y, которая называется *логарифмом y при основании a* и обозначается так: $x = \log_a y$.

Итак,

$$x = \log_a y \qquad (0 < y < \infty)$$

есть функция, приводящая в соответствие каждому положительному числу y такое x, что $y = a^x$, т. е. выполняется равенство (2).

Благодаря свойствам (2) и (3) функция $\log_a y$ называется обратной по отношению к функции a^x, а функция a^x называется обратной по отношению к $\log_a y$.

Логарифмическая функция $x = \log_a y$ обладает следующими вытекающими непосредственно из приведенных рассмотрений свойствами:

1) $\log_a y$ непрерывна на $(0, \infty)$;

2) $\log_a y$ — возрастающая функция, т. е.

$$\log_a y_1 < \log_a y_2, \qquad (0 < y_1 < y_2 < \infty)$$

для любых указанных y_1, y_2;

3) $\log_a y \to \infty$ при $y \to +\infty$;

4) $\log_a y \to -\infty$ при $y \to 0$.

Если повернуть систему xOy на $90°$ против часовой стрелки, то получим систему координат yOx, где, впрочем, ось y направлена влево, но это не имеет существенного значения. Кривая Г теперь будет графиком функции $x = \log_a y$. Если мы повернем эту новую систему на $180°$ вокруг оси x, то получим график $x = \log_a y$ в привычной системе, у которой ось независимой переменной y направлена вправо. Ничто не мешает нам еще поменять местами x и y, и тогда получим рис. 60, на котором изображен график функции

$$y = \log_a x \quad (0 < x < \infty); \quad (4)$$

функция $\log_a x$, таким образом, задана на полуоси $(0, \infty)$, т. е. для положительных значений. Она непрерывна и возрастает, когда x возрастает от 0 до $+\infty$, соответственно y возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

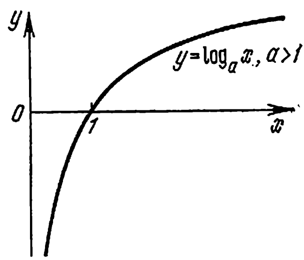


Рис. 60.

Можно еще сказать, что функция $\log_a x$ отображает интервал $(0, \infty)$ значений x на интервал $(-\infty, \infty)$ значений y.

Пусть теперь a удовлетворяет неравенствам $0 < a < 1$. Выпишем нужные нам свойства функции $y = a^x$:

1) a^x непрерывна на $(-\infty, \infty)$;

2) a^x — убывающая функция, т. е. $a^x > a^y$ $(x < y)$;

3) $a^x \to 0$ при $x \to +\infty$;

4) $a^x \to +\infty$ при $x \to -\infty$.

График a^x при $0 < a < 1$ изображен на рис. 58. Мы видим, что функция $y = a^x$ и в случае $0 < a < 1$ отображает интервал $(-\infty, \infty)$ значений x на интервал $(0, \infty)$ значений y.

Мы, как и выше, можем задать произвольное положительное (т. е. принадлежащее к интервалу $(0, \infty)$) значение y и привести ему в соответствие такое x, что будет выполняться равенство

$$x = \log_a y.$$

Чтобы получить x по данному y, мы должны взять на оси ординат (см. рис. 57) точку, имеющую ординату y, и провести через эту точку прямую, параллельную оси x. Последняя пересечет график Γ в единственной точке A, абсцисса которой и есть искомое значение x, т. е. такое x, для которого $y = a^x$.

Свойства функции $\log_a y$ при $0 < a < 1$ такие же, как в случае $a > 1$; однако есть исключение. Теперь, когда y возрастает от 0 до $+\infty$, соответственно x убывает от $+\infty$ до $-\infty$:

$$\log_a y_1 > \log_a y_2 \qquad (0 < y_1 < y_2 < \infty).$$

Выпишем формулы (2) и (3):

$$x = a^{\log_a x} \qquad (0 < x < \infty), \tag{5}$$

$$\log_a a^x = x \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{6}$$

Мы заменили в (2) y на x, но это не имеет значения.

Число a может быть здесь любым положительным числом, отличным от 1 ($a \neq 1$). Равенства (5) и (6) называют тождествами на указанных там интервалах, потому что они имеют место для любых x, принадлежащих к указанным интервалам.

Из равенства (5) на основании свойств показательной функции следует для любых $x, y > 0$:

$$a^{\log_a (xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}. \tag{7}$$

Но тогда

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \qquad (0 < x, y < \infty, \quad a > 0, \quad a \neq 1). \tag{8}$$

Из (7) следует (8), потому что если $a^{u_1} = a^{u_2}$, то $u_1 = u_2$. Если бы $u_1 \neq u_2$, то числа a^{u_1} и a^{u_2} были бы различны. Но можно и формально получить (8), взяв логарифм при основании a от левой и правой частей (7), т. е. воспользовавшись формулой (6).

Если в (8) заменить x на x/y, то получим

$$\log_a x = \log_a \frac{x}{y} + \log_a y,$$

или

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad (0 < x, y < \infty, \; a > 0, \; a \neq 1). \tag{9}$$

Далее (см. п. 3.8.7)

$$a^{\log_a x^y} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x},$$

поэтому

$$\log_a x^y = y \log_a x \quad (0 < x, y < \infty, \ a > 0, \ a \neq 1). \tag{10}$$

Наконец, отметим, что для положительных не равных 1 чисел a и b имеет место

$$a^{\log_a b \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a,$$

поэтому

$$\log_a b \log_b a = 1. \tag{11}$$

Формула (11) даст возможность вычислить $\log_a b$ через $\log_b a$ — это формула перехода от логарифмов при основании a к логарифмам при основании b.

Логарифм числа a при основании e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается так: $\log_e a = \ln a$.

Формулы (5) — (11) являются основными при вычислениях с логарифмами. Их надо усвоить и запомнить.

§ 3.10. Степенная функция

Функция вида

$$y = x^a \qquad (0 < x < \infty), \tag{1}$$

где $a \neq 0$, называется *степенной функцией*. При любом a степенная функция во всяком случае определена для положительных x.

Степенная функция непрерывна, т. е. ее график есть непрерывная кривая.

Если a положительное, то функция $y = x^a$ определена также и при $x = 0$, именно она равна нулю при $x = 0$, потому что в математике считают, что $0^a = 0$ $(a > 0)$.

Попутно скажем, что 0^0 не есть число, не есть также число 0^a, где $a < 0$.

Таким образом, при $a > 0$ функция

$$y = x^a \qquad (0 \leqslant x < \infty)$$

определена не только для положительных x, но и для $x = 0$. На левом рис. 2 даны графики функций

$$y = x^4, \quad y = x^2, \quad y = x, \quad y = x^{1/2}, \quad y = x^{1/4},$$
$$0 \leqslant x < \infty.$$

Они равны нулю при $x = 0$, поэтому их графики выходят из начала координат. При возрастании x от 0 до ∞ соответствующие ординаты y всех графиков возрастают тоже от 0 до ∞. Однако характер возрастания различный. Также очевидно, что

$$x^4 < x^2 < x < x^{1/2} < x^{1/4}, \quad 0 < x < 1,$$
$$x^4 > x^2 > x > x^{1/2} > x^{1/4}, \quad 1 < x < \infty.$$

Если $x = 1$, то $y = 1$ для всех графиков.

Функции x и $x^{1/3}$ можно рассматривать и для отрицательных x.

Что же касается функций $x^{1/2}$ и $x^{1/4}$, то они при $x < 0$ не имеют для нас смысла, потому что не существует действительного числа, квадрат или четвертая степень которого равнялись бы отрицательному числу x. Среди комплексных чисел есть такие числа, но мы о них сейчас не говорим.

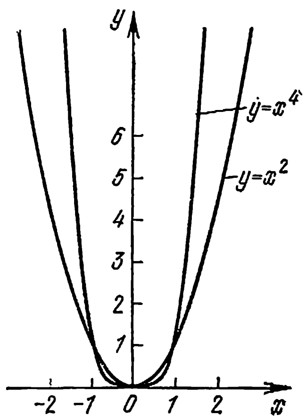


Рис. 61.

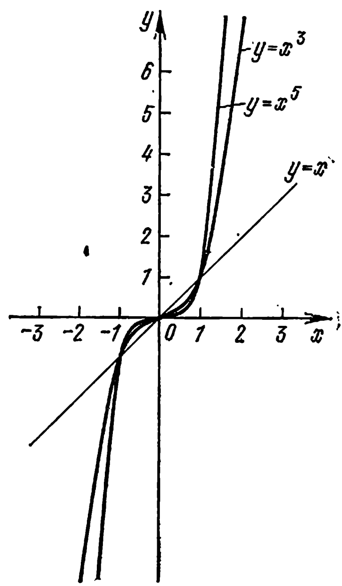


Рис. 62.

Выделим в особую группу степенные функции, соответствующие натуральным a ($a = 1, 2, 3, \ldots$). Они определены и непрерывны на всей действительной оси x. На рис. 61 даны графики функций x^2, x^4 действительного переменного, а на рис. 62 — графики x, x^3, x^5.

Степенную функцию можно записать в виде

$$y = x^a = b^{\log_b x^a} = b^{a \log_b x} \tag{2}$$

при любом положительном b ($b > 0$). Часто в качестве b берут неперово число e. Тогда формула (2) примет вид

$$y = x^a = e^{a \ln x}. \tag{2'}$$

Степенная функция x^a обладает следующим характерным для нее свойством:

$$(xy)^a = x^a y^a, \quad 0 < x, y < \infty. \tag{3}$$

Действительно,

$$(xy)^a = e^{a \ln (xy)} = e^{a \ln x + a \ln y} = e^{a \ln x} e^{a \ln y} = e^{\ln x^a} e^{\ln y^a} = x^a y^a.$$

Отметим, что степенная функция x^a при иррациональном a как функция действительного переменного для отрицательных x не имеет смысла. Более глубокое изучение показывает, что функция x^a при иррациональном a должна быть комплексной для отрицательных x. Однако на этом вопросе, относящемся к теории функций комплексного переменного, мы здесь останавливаться не можем.

Глава 4

ФОРМУЛА БИНОМА НЬЮТОНА. КОМБИНАТОРИКА

§ 4.1. Формула бинома Ньютона

4.1.1. Числа C_n^k. Произведение натуральных чисел от 1 до n называют *n-факториалом* и обозначают так:

$$1\cdot 2\cdot 3 \ldots n = n!.$$

В частности,

$$1! = 1.$$

По определению считают, что

$$0! = 1,$$

хотя сам по себе символ 0! не имеет никакого смысла.

Зададим натуральное число n, и пусть k есть одно из чисел $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. По определению

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \quad (1)$$

В частности,

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \quad C_n^n = \frac{n!}{n!\,0!} = 1 \quad (2)$$

(при $k = 0$ вторым равенством в (1) пользоваться нельзя).

Из первого равенства (1) непосредственно следует формула

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \quad (3)$$

Справедлива также формула

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \quad (4)$$

В самом деле,

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left[\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k+1}\right] =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\,\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,[(n+1)-(k+1)]!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Вот примеры чисел C_n^k:

$$\begin{array}{llllllll} n=2: & 1, & 2, & 1; \\ n=3: & 1, & 3, & 3, & 1; \\ n=4: & 1, & 4, & 6, & 4, & 1; \\ n=5: & 1, & 5, & 10, & 10, & 5, & 1; \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{5}$$

Мы видим здесь закономерность. В каждом ряду (5) числа C_n^k расположены симметрично относительно середины ряда — это следует из формулы (3), а по краям стоят единицы — это следует из (2). В каждом ряду числа C_n^k возрастают до середины ряда, затем убывают (см. в конце параграфа задачи 2, 4).

Задача 1. Написать числа C_n^k для $n = 6, 7, 8$.

4.1.2. Вывод формулы бинома Ньютона. Формула бинома Ньютона имеет вид

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-1} ax^{n-1} + x^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Слагаемые суммы в правой части называются *членами разложения бинома Ньютона*. Член a^n называют *нулевым членом разложения формулы Ньютона*, дальше идут первый, второй и т. д. члены до n-го включительно (равного x^n); k-й член бинома Ньютона имеет вид

$$C_n^k a^{n-k} x^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Формула (7) в силу свойства (2) годится и для $k = 0$, и $k = n$. Формулу (6) можно записать еще так:

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k. \tag{6'}$$

Правая часть (6′) читается так: *сумма слагаемых* $C_n^k a^{n-k} x^k$, *распространенная на целые* k *от* 0 *до* n.

Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Докажем формулу (6). При $n = 1$ она верна: $a + x = a + x$. При $n = 2$ тоже она верна:

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2.$$

Она также верна при $n = 3$:

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

(см. таблицу (5)).

Для доказательства формулы (6) в общем виде (при любом натуральном n) будет использован тот факт, что она верна при $n = 2$. Будем рассуждать так. Допустим, что формула (6) верна при некотором натуральном n; докажем, что она тогда необходимо верна и при $n + 1$. В самом деле,

$$
\begin{aligned}
(a + x)^{n+1} &= (a + x)(a + x)^n = \\
&= a^{n+1} + C_n^1 a^n x + C_n^2 a^{n-1} x^2 + \ldots + C_n^n a x^n \quad + \\
&\qquad\quad + C_n^0 a^n x + C_n^1 a^{n-1} x^2 + \ldots + C_n^{n-1} a x^n + x^{n+1} = \\
&= a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n x + C_{n+1}^2 a^{n-1} x^2 + \ldots + C_{n+1}^n a x^n + x^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Мы нарочно во втором равенстве справа второй ряд сдвинули так, чтобы в столбцах стояли подобные члены с одинаковыми произведениями $a^{n-k}x^{k+1}$. Сумма коэффициентов при них вычисляется по формуле (4).

Замечание. Мы применили при выводе формулы (6) *метод полной математической индукции*. Этот метод заключается в следующем. Пусть надо доказать некоторое утверждение для любого натурального числа n. Например, надо доказать формулу бинома Ньютона для произвольного натурального n. Допустим, что мы убедились, что это утверждение верно при $n = 1$, и, кроме того, убедились в том, что утверждение верно при натуральном $n + 1$, если предположить, что оно верно для n. Тогда надо считать наше утверждение доказанным для любого натурального n.

Задача 2. Написать разложения по формуле бинома Ньютона

$$(a + x)^5, \quad (a + x)^6, \quad (a + x)^7.$$

Задача 3. Доказать, что

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n-k}{k+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Задача 4. Сравнив дробь (8) с 1, доказать, что при n четном

$$1 = C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{n/2} > C_n^{(n+2)/2} > \ldots > C_n^n = 1$$

и при n нечетном

$$1 = C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{(n-1)/2} = C_n^{(n+1)/2} > \ldots > C_n^n = 1.$$

Задание. Повторить вывод формул (3), (4), (6). Запомнить формулы (1) и (6) и уметь применять их для частных значений n и k. Повторить метод индукции.

§ 4.2. Комбинаторика

4.2.1. Перестановки. Два элемента (две вещи) x_1 и x_2 могут быть расположены (записаны) двумя способами:

$$x_1,\ x_2; \tag{1}$$

$$x_2,\ x_1. \tag{2}$$

Будем говорить, что расположения (1) и (2) являются различными *перестановками* из двух элементов (x_1 и x_2). Таким образом, из двух элементов можно составить две (различные) перестановки.

Из трех элементов x_1, x_2, x_3 можно составить шесть перестановок:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,$$
$$x_1,\ x_3,\ x_2,$$
$$x_2,\ x_1,\ x_3,$$
$$x_2,\ x_3,\ x_1,$$
$$x_3,\ x_1,\ x_2,$$
$$x_3,\ x_2,\ x_1.$$

Других перестановок нет.

Рассмотрим теперь n элементов

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n.$$

Они расположены в порядке возрастания номеров и этим образуют определенную перестановку. При другом расположении, например, когда номера убывают:

$$x_n,\ x_{n-1},\ \ldots,\ x_1 \qquad (n \geqslant 2),$$

они образуют уже другую перестановку.

Перестановка из n элементов — это определенное расположение их (в ряд). Таким образом, *различные перестановки из n элементов соответствуют различным расположениям (в ряд) n элементов.*

Количество возможных перестановок из n элементов обозначают символом P_n; перестановка по-французски — permutation.

Покажем, что

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!. \qquad (3)$$

В самом деле, при $n = 1$ формула (3) очевидна: из одного элемента можно составить только одну перестановку. Теперь, рассуждая по индукции, допустим, что формула (3) верна для P_n; докажем ее верность для P_{n+1}. Чтобы получить всевозможные перестановки из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, поставим на первое место элемент x_j, а за ним остальные n элементов, расположенных любым образом. Количество таких расположений (перестановок из n элементов) равно $P_n = n!$. Так как количество элементов x_j $(j = 1, 2, \ldots, n + 1)$ равно $n + 1$, то количество всех перестановок из $n + 1$ элементов равно, очевидно,

$$P_{n+1} = (n + 1)\, n! = (n + 1)!.$$

Этим формула (3) доказана для любого натурального n.

Задача 1. Выписать все перестановки из элементов a_1, a_2, a_3, a_4.

Задача 2. Сколькими способами можно рассадить 10 человек на 10 стульях?

4.2.2. Размещения. Пусть n и k — натуральные числа и $k \leqslant n$. *Размещением из данных n элементов по k называется какая-либо группа из k элементов, взятых из данных n элементов, определенным образом расположенная (в ряд).*

Например, пусть дано три ($n = 3$) элемента x_1, x_2, x_3. Ниже переписаны возможные размещения данных трех элементов по два:

$$x_1, x_2,$$
$$x_2, x_1,$$
$$x_1, x_3,$$
$$x_3, x_1,$$
$$x_2, x_3,$$
$$x_3, x_2.$$

Других размещений нет. Мы видим, что два размещения отличаются либо хотя бы одним элементом, либо расположением входящих в них элементов.

Количество возможных размещений из данных n элементов по k $(k \leqslant n)$ обозначается символом A_n^k. Размещение по-французски — arrangement.

Справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1). \qquad (4)$$

В самом деле, при $k = 1$ она очевидна:

$$A_n^1 = n.$$

Рассуждая по индукции, будем считать, что формула (4) для k верна. Докажем, что она верна для $k+1$.

Произвольное размещение из данных n элементов по $k+1$ может быть получено следующим образом. На первом месте размещения ставим элемент x_j, а за ним располагаем всевозможные размещения из оставшихся $n-1$ элементов $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots x_n$ по k; количество их равно A_{n-1}^k.

Итак, количество возможных размещений из данных n элементов по $k+1$, имеющих на первом месте элемент x_j, равно A_{n-1}^k. Но так как j может принимать значения $j = 1, 2, \dots, n$, то количество всех размещений из данных n элементов по $k+1$ равно

$$A_n^{k+1} = nA_{n-1}^k = n(n-1)(n-2)\dots((n-1)-k+1) = \\ = n(n-1)\dots(n-(k+1)+1).$$

Этим формула (4) доказана для любого $k \geqslant 1$.

Задача 3. Выпишите все размещения из элементов x_1, x_2, x_3, x_4 по 2.

Задача 4. Сколькими возможными способами можно присудить семи лицам три премии разного значения (первую, вторую и третью)?

Задача 5. Сколькими возможными способами можно распределить между шестью лицами две разные путевки в санаторий?

4.2.3. Сочетания. *Сочетанием из данных n элементов по k называется какая-либо группа, состоящая из k этих элементов* ($k \leqslant n$).

Например, из трех элементов x_1, x_2, x_3 можно составить следующие сочетания по два:

$$x_1, x_2$$

$$x_1, x_3$$

$$x_2, x_3$$

Других сочетаний из рассматриваемых трех элементов по два нет. Вот еще сочетания по три из четырех элементов x_1, x_2, x_3, x_4:

$$x_2, x_3, x_4,$$

$$x_1, x_3, x_4,$$

$$x_1, x_2, x_4,$$

$$x_1, x_2, x_3.$$

Подчеркнем, что понятие сочетания не связано с расположением (порядком) элементов. Если в данном сочетании переставить каким-либо образом его элементы, то оно (как сочетание), не изменится.

Количество сочетаний из n элементов по k ($k \leqslant n$) обозначается символом C_n^k. Сочетание по-французски — combinaison.

Справедлива формула

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \quad (5)$$

В самом деле, в каждом сочетании из n элементов по k можно произвести всевозможные перестановки. Количество их равно $P_k = k!$, а количество всех сочетаний равно C_n^k. Очевидно,

$$A_n^k = C_n^k P_k,$$

потому, что перебирая все сочетания и сделав в каждом из них P_k перестановок, получим всевозможные размещения из n элементов по k. Этим формула (5) доказана.

З а д а ч а 6. Выпишите все сочетания из элементов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 по два.

З а д а ч а 7. Сколькими возможными способами можно присудить семи лицам три одинаковые премии?

З а д а ч а 8. Сколькими возможными способами можно распределить между шестью лицами две одинаковые путевки в санаторий?

4.2.4. Связь с биномиальными коэффициентами. Другой вывод формулы бинома Ньютона. Числа C_n^k мы назвали в п. 4.1.2 биномиальными коэффициентами, потому что они входят в разложение бинома Ньютона

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k \quad (6)$$

как коэффициенты при $a^{n-k}x^k$.

Конечно, формулу (6) можно вывести комбинаторным путем. Для этого представим ее левую часть в следующем виде:

$$(a + x_1)(a + x_2) \ldots (a + x_n), \qquad (7)$$

где отдельным x, входящим в произведение, приписан отдельный номер, несмотря на то что все они равны: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$.

Раскроем в (7) скобки:

$$(a + x)^n = (a + x_1) \ldots (a + x_n) = a^n + a^{n-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a^{n-2}(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) + a^{n-3}(x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) + \ldots + x_1 \ldots x_n. \qquad (8)$$

Заменив все x_m на x, получим

$$(a + x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

т. е. формулу (6).

В самом деле, количество слагаемых в первых скобках (правой части (8)) равно n (каждое слагаемое равно x). Слагаемые во вторых скобках суть всевозможные сочетания из n элементов $x_1, \ldots, x_n$ по два, количество их равно C_n^2 (каждое из них равно x^2). Слагаемые в третьих скобках суть всевозможные сочетания из указанных n элементов по три (каждое из них равно x^3) и т. д.

4.2.5. Вероятность события. Приведем примеры, на которых мы выясним понятие вероятности.

Пример 1. Из ящика, где было 2 черных и 5 белых шаров, вынут наугад один шар. Ниже мы вводим число, которое называется вероятностью того, что вынут черный шар.

Для удобства рассуждения представим себе, что шары в ящике перенумерованы. Возможны 7 различных случаев: мы могли вынуть первый шар, либо второй, либо третий и т. д., либо, наконец, седьмой шар. Все эти случаи равновозможны, и один из них должен произойти. Поэтому говорят, что они равновозможны и единственно возможны.

С другой стороны, только 2 из 7 указанных (равновозможных и единственно возможных) случаев благоприятствуют событию, заключающемуся в том, что вынут черный шар. Отношение 2 к 7 и называется *вероятностью указанного события.*

Таким образом, вероятность того, что при указанных обстоятельствах вынут черный шар, равна $P = 2/7$.

Пример 2. Из ящика, где было 3 черных и 5 белых шаров, вынуто наугад два шара. Какова вероятность, что оба шара черных?

Решение. Снова для удобства будем считать, что шары в ящике перенумерованы. Количество всевозможных способов выемки из ящика двух шаров равно числу сочетаний из 8 элементов по 2:

$$n = C_8^2 = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28.$$

Указанные способы равновозможны и единственно возможны.

Только

$$m = C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$$

из указанных способов благоприятствуют событию, заключающемуся в том, что вынуты на самом деле два черных шара. Например, если считать, что черные шары имеют номера 1, 2, 3, то это способы, соответствующие сочетаниям (1, 2), (1, 3), (2, 3).

Число

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3}{28}$$

и называется вероятностью того, что при указанных обстоятельствах вынуто 2 черных шара.

Пример 3. В первом ряду театра сидят 3 женщины и 27 мужчин. Какова вероятность, что все три женщины сидят рядом?

Решение. Возможно $n = 30!$ различных расположений (перестановок) указанных лиц в ряду. Эти перестановки будем считать равновозможными. С другой стороны, 3 женщины могут занимать места с номерами 1, 2, 3, либо с номерами 2, 3, 4 и т. д., либо, наконец, с номерами 28, 29, 30. Всего таких случаев 28. Но в каждом из этих случаев возможны $3!$ перестановок, характеризующих расположение женщин по отношению друг к другу. Каждой такой перестановке соответствует $27!$ перестановок мужчин на занимаемых ими местах. Следовательно, количество перестановок (из 30 лиц!), *благоприятных для события*, заключающегося в том, что 3 женщины сидят рядом, равно

$$m = 28\cdot 3!\,27! = 3!\,28!,$$

Отсюда следует, что вероятность указанного события

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3!\,28!}{30!} = \frac{6}{29 \cdot 30} = \frac{1}{145}.$$

Замечание. С точки зрения теории вероятностей в данном примере рассмотрено *случайное событие* A, заключающееся в том, что в первом ряду театра все три женщины оказались сидящими вместе. Это событие может произойти и не произойти *в различных возможных случаях, которые предположены равновозможными и единственно возможными.* В данном примере отдельным возможным случаем является перестановка из 30 лиц. Количество таких равновозможных случаев равно n. Некоторые из этих случаев, как говорят, *благоприятны событию* A: если произойдет один из них, то будет иметь место событие A. Пусть m — количество таких случаев.

В данном примере случаями, благоприятными событию A, являются те перестановки (расположения) из 30 указанных лиц, при которых все три женщины сидят вместе.

По определению *вероятностью P события A* называется число

$$P = \frac{m}{n}.$$

Пример 4. Из урны, где находятся 10 белых и 10 черных шаров, вынимают наугад 3 шара. Какая вероятность того, что будет вынуто а) 3 белых шара? б) 1 белый и 2 черных шара?

Равновозможными случаями здесь будут сочетания из 20 шаров по 3. Количество их равно

$$n = C_{20}^{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!}.$$

Среди этих сочетаний благоприятных событию а) будет

$$m = C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!},$$

откуда

$$P = \frac{m}{n} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{2}{19}.$$

Благоприятных же событию б) сочетаний будет

$$m = 10 \cdot C_{10}^{2} = 10 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 450,$$

откуда

$$P = \frac{m}{n} = \frac{450 \cdot 6}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{15}{38}.$$

Задача 9. Чему равна вероятность того, что случайная перестановка из цифр 0, 1, 2, 3 образует четырехзначное число (т. е. не начинается с цифры 0)?

Задача 10. В группе 32 ученика. Двое из них выбраны совсем случайно и посажены на первую скамью. Какова вероятность того, что оба они значатся в списке группы среди первых десяти учеников?

Задача 11. Положение плоскости в пространстве определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. Сколько различных плоскостей можно провести через каждые три точки, принадлежащие к заданной системе из 1) 4 точек, 2) 7 точек, 3) 10 точек, если никакие три точки не лежат на одной прямой и никакие 4 точки не лежат на одной плоскости?

Задание. Надо знать определения перестановок, размещений и сочетаний и формулы их количеств.

Усвоить понятие вероятности события на приведенных примерах.

Глава 5

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 5.1. Понятие комплексного числа

Рассмотрим уравнение

$$x^2 - 2x + 4 = 0. \tag{1}$$

Применив к нему известное правило нахождения корней квадратного уравнения, получим формально выражения

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-3}, \tag{2}$$

которые еще записывают следующим образом:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}\, i \quad (i = \sqrt{-1}). \tag{2'}$$

Но мы не получили действительного решения, ведь $\sqrt{-3}$ не есть действительное число. Не существует действительного числа, квадрат которого равен -3. Однако выражения вида (2) оказались полезными в математике, хотя они и не являются действительными числами. Их называют *комплексными числами.*

По определению *комплексным числом называется выражение*

$$a + bi, \tag{3}$$

где a и b — действительные числа, а i — специальный знак, при этом надо учесть следующие соглашения:

1) $$i^2 = -1, \tag{4}$$

2) $$a + 0i = a, \tag{5}$$

3) $$0 + bi = bi, \tag{6}$$

4) равенство $a + bi = c + di$, где a, b, c, d — действительные числа, имеет место тогда и только тогда, когда

$$a = c \quad \text{и} \quad b = d.$$

Число $0 + bi = bi$ называется *мнимым* или *чисто мнимым.*

Из сказанного следует, что любое действительное число a есть частный случай комплексного числа. Ведь на основании 2) его можно записать в виде $a = a + 0i$. В частности, $0 = 0 + 0i$, но тогда, если $a + bi = 0$, то $a + bi = 0 + 0i$, следовательно,

$$a = b = 0.$$

Таким образом, *комплексное число* $a + bi$ *равно нулю тогда и только тогда, когда* $a = 0$ *и* $b = 0$.

5) С выражениями (3) можно производить арифметические операции по правилам, которые приняты для буквенных выражений в алгебре.

Из сказанного следует, что при арифметических действиях над комплексными числами законно делать следующие преобразования:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d) i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi - bd = \\ = (ac - bd) + (bc + ad) i,$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2} i, \quad c + di \neq 0.$$

Мы видим, что сумма, разность, произведение и частное (где делитель не равен нулю) комплексных чисел есть в свою очередь комплексное число.

П р и м е р.

$$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{1 - i^2} = \frac{(1 - 1) + 2i}{2} = i.$$

Заметим еще, что из (4) следует:

$$i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = i^2 i^2 = 1,$$
$$i^5 = i^4 i = i, \quad i^6 = i^4 i^2 = -1, \ldots$$

З а д а ч и. Привести к виду $a + bi$, где a и b — действительные следующие комплексные числа:

1) $\frac{1}{i}$, 2) $\frac{1}{-i}$, 3) $\frac{1}{1 + i}$, 4) $\frac{1}{1 - i}$, 5) $i^3 - 2i^2 + i - 1$,

6) $\frac{1}{1 + i} + \frac{1}{1 - i}$, 7) $i^7 + i^{22} + i^2 + i^1 + i^{0} + i^{80}$.

Комплексные числа нередко обозначают одной буквой. Пишут

$$z = a + bi$$

и говорят: задано комплексное число z.

Число a называют *действительной частью* z и обозначают так:

$$\operatorname{Re} z = a,$$

число же b называют *мнимой частью* z и обозначают так:

$$\operatorname{Im} z = b;$$

reel — по французски реальный, действительный, imaginaire — мнимый, воображаемый.

Как видите, надо различать термины мнимая часть комплексного числа и мнимое число. Мнимая часть комплексного числа $a + bi$ есть действительное число b.

По определению, если $z = a + bi$ есть комплексное число (a, b — действительные), то $a - bi$ называют ему *сопряженным числом* и пишут $\bar{z} = a - bi$.

Конечно, если $b = 0$, т. е. если на самом деле z есть действительное число, то $z = \bar{z}$.

Числа z и $\bar{z}$ взаимно сопряжены друг к другу.

Задачи.

1) Убедиться в том, что:

а) числа $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ удовлетворяют уравнению $x^2 + x + 1 = 0$; б) числа $1 \pm i$ удовлетворяют уравнению $x^2 - 2x + 2 = 0$.

2) Вычислить выражения

$$(x + i)(x - i), \quad (1 - i)^4.$$

3) Показать, что $\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$, $\overline{u - v} = \bar{u} - \bar{v}$, где u и v — произвольные комплексные числа.

§ 5.2. Уравнение $x^2 = c$

Поставим задачу. Задано уравнение

$$x^2 = c, \tag{1}$$

где c — действительное число. Требуется решить его в комплексных числах, т. е. найти все комплексные $x = \alpha + \beta i$, которые удовлетворяют уравнению (1).

Будем рассуждать, как обычно. Допустим, что существует комплексное число $x = \alpha + \beta i$ (α и β — действительные), удовлетворяющее уравнению (1). Подставим его в (1) и будем делать законные для комплексных чисел преобразования:

$$(\alpha + \beta i)^2 = c,$$

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = c.$$

Так как c — действительное число, то

$$\alpha^2 - \beta^2 = c, \quad 2\alpha\beta = 0. \tag{2}$$

Из второго равенства в (2) следует, что по крайней мере одно из чисел α, β равно нулю.

Пусть $c = 0$, тогда $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ и $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, т. е. $\alpha = \beta = 0$.

Пусть $c > 0$. Так как из второго уравнения (2) следует, что одно из чисел α, β равно нулю, то из первого следует, что $\beta = 0$, и мы получим уравнение $\alpha^2 = c$, где надо искать действительные числа α. Это уравнение имеет два решения (корня):

$$\alpha = \pm \sqrt{c},$$

где $\sqrt{c}$ — арифметическое значение квадратного корня из c. Мы получили $x = \pm \sqrt{c}$.

Если теперь $c < 0$, то придется заключить, что $\alpha = 0$, а $\beta \neq 0$, и тогда $-\beta^2 = c$ или $\beta^2 = -c > 0$, откуда

$$\beta = \pm \sqrt{-c}$$

и, следовательно, $x = \pm \sqrt{-c}\, i$.

Мы решили поставленную задачу: если $c > 0$, то уравнение (1) имеет два действительных решения $\pm\sqrt{c}$ и комплексных решений не имеет, если же $c < 0$, то уравнение (1) имеет два чисто мнимых решения $\pm \sqrt{-c}\, i$, а действительных решений не имеет; при $c = 0$ имеется только одно решение: $x = 0$.

Замечание. Любое комплексное число x, удовлетворяющее уравнению (1), называют корнем квадратным из числа c и обозначают символом $\sqrt{c}$. Мы доказали, что

$$\sqrt{c} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad c = 0, \\ \pm\sqrt{c} & \text{при} \quad c > 0, \\ \pm\sqrt{c}\, i & \text{при} \quad c < 0, \end{cases}$$

где справа знак $\sqrt{\ }$ понимается в смысле арифметического значения.

Задачи. Решить в комплексных числах уравнения:

$$1)\ x^2 = 1,\ 2)\ x^2 = -1,\ 3)\ x^2 = 9,\ 4)\ x^2 = -9,$$
$$5)\ x^2 = 10,\ 6)\ x^2 = -10.$$

§ 5.3. Применение комплексных чисел в квадратных уравнениях

Рассмотрим квадратное уравнение в общем виде

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1}$$

где p и q — заданные действительные числа.

Будем искать комплексные решения этого уравнения. Пусть комплексное число $x = a + bi$ является решением (или корнем) уравнения (1).

Имеем

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) =,$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$
$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

где справа стоит любое комплексное число, квадрат которого равен $\frac{p^2}{4} - q$.

Отсюда (см. замечание в конце § 4.2)

$$\left.\begin{array}{lll} x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{при} & \frac{p^2}{4} - q \geqslant 0, \\ x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, i & \text{при} & \frac{p^2}{4} - q < 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Мы получили формулы решения квадратного уравнения.

Итак квадратное уравнение (1) в случае, когда $\frac{p^2}{4} - q > 0$ имеет два действительных решения, а в случае, когда $\frac{p^2}{4} - q < 0$ — два комплексных решения. В случае же $\frac{p^2}{4} - q = 0$ оно имеет одно решение, равное $-p/2$, но считают, что и в этом случае решений два, но они совпадают и называют решение (корень) уравнения (1) *кратным*.

Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (1). Покажем, что для любого действительного x

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2+px+q. \tag{3}$$

Это тождество, т. е. равенство, верное для всех x в случае, когда x_1 и x_2 — действительные корни, наш читатель, надо полагать, знает. Его называют *равенством* (или *теоремой*) *Виета*. Повторим его доказательство:

$$(x-x_1)(x-x_2) =$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=$$
$$=x^2+px+q.$$

Докажем теперь (3), когда x_1 и x_2 комплексные. В этом случае

$$x_1,\ x_2=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,i \qquad \left(q-\frac{p^2}{4}>0\right).$$

Поэтому

$$(x-x_1)(x-x_2)=$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,i\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,i\right)=$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=x^2+px+q.$$

Мы доказали тождество (3), где p и q — произвольные действительные числа, а x_1 и x_2 — корни уравнения (1).

Задачи. Решить в комплексных числах квадратные уравнения:

$$1)\ x^2+x+1=0, \qquad 2)\ x^2+3x+\frac{25}{4}=0,$$

$$3)\ x^2-5x+6=0, \qquad 4)\ x^2-2x+5=0.$$

Интересно, что равенство (3) может быть обобщено на многочлены любой степени: всякий многочлен

$$P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

степени n может быть представлен в виде произведения

$$P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа, вообще говоря, комплексные — корни многочлена ($P_n(x_j) = 0$; $j = 1, \ldots, n$). Если коэффициенты a_j действительные, то комплексные корни x_j обязательно попарно сопряженные.

§ 5.4. Геометрическое изображение комплексных чисел

Зададим в плоскости прямоугольную систему координат (x, y). Комплексное число $z = x + yi$ удобно изображать на плоскости точкой, с координатами (x, y). Эту точку называют точкой z.

Мы видим, что имеет место взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и комплексными числами, т. е. каждому комплексному числу соответствует (указанным путем) точка плоскости; двум разным комплексным числам соответствуют разные точки, и каждая точка соответствует (указанным путем) некоторому комплексному числу.

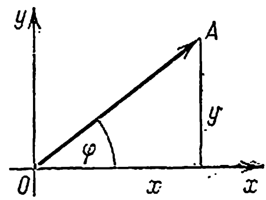


Рис. 63.

В силу этого соответствия координатную плоскость называют еще *комплексной плоскостью*.

На рис. 63 отмечена точка $z = x + iy$. Введем вектор с началом в нулевой точке O и концом в A. Длина его

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

называется *модулем комплексного числа* z. Угол φ, образуемый вектором $\overrightarrow{OA}$ с положительной полуосью x (отсчитываемый против часовой стрелки), называется *аргументом числа* z.

Таким образом, каждое комплексное число z имеет свой модуль, который записывают так:

$$\rho = |z|,$$

и аргумент φ, записываемый так:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Но аргумент определяется не однозначно. Если φ есть аргумент z, то $\varphi + 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ есть тоже аргумент z. Чтобы внести четкость в этот вопрос, можно искать аргумент z, удовлетворяющий неравенству $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Его обозначают так: $\arg z$ — и называют *главным значением аргумента* z или *аргументом* z *в приведенном виде*; $\arg z$ однозначно определяется числом z.

Любое значение аргумента z обозначается через $\operatorname{Arg} z$. Оно определяется по формуле

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,$$

где k — одно из чисел $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Очевидно,

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

и

$$z = x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \tag{2}$$

В связи с равенством (2) говорят, что *комплексное число записано в тригонометрической форме*.

§ 5.5. Показательная форма комплексного числа

Выражение в скобках в формуле (2) § 5.4 обозначают следующим образом:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

и тогда его можно записать в более компактной форме

$$z = \rho e^{i\varphi}, \tag{1}$$

называемой *показательной формой комплексного числа*.

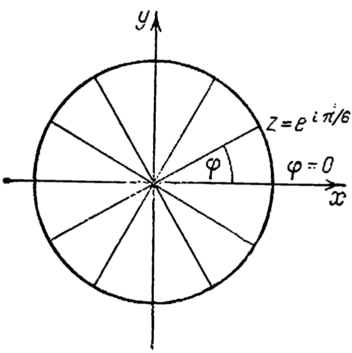


Рис. 64.

Отметим важные свойства величины $e^{i\varphi}$.

$$|e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

при любом φ.

Это показывает, что точка $z = e^{i\varphi}$ комплексной плоскости находится на окружности радиуса 1 с центром в нулевой точке.

На рис. 64 единичная окружность разделена на 12 частей. При этом точка, соответствующая $\varphi = 0$, входит в число точек деления. Ниже приведена таблица комплексных чисел, соответствующих этим точкам.

φ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	
$e^{i\varphi}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	i	

Если φ непрерывно возрастает от 0 до 2π, то комплексная точка $e^{i\varphi}$ непрерывно описывает нашу окружность, а при дальнейшем возрастании φ точка будет продолжать движение по окружности. Имеем

$$
\begin{aligned}
e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} &= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\
&\quad + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \\
&= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}
\end{aligned}
$$

для любых φ.

Мы доказали формулу

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2},$$

верную для любых φ_1 и φ_2. Но тогда

$$e^{i\varphi_1} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2+\varphi_2)} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}e^{i\varphi_2}.$$

Поэтому

$$e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$$

для любых φ_1 и φ_2.

Зададим теперь два комплексных числа, которые записаны в форме

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2} \quad (\rho_1, \rho_2 \geqslant 0).$$

Произведение их равно

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Так как $\rho_1\rho_2 \geqslant 0$, то мы получили тригонометрическое представление числа z_1z_2; при этом

$$|z_1z_2| = \rho_1\rho_2 = |z_1|\,|z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi,$$

где k — одно из чисел $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Утверждается, что сумма $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ отличается от $\operatorname{Arg}(z_1 + z_2)$ на величину вида $2k\pi$, где k — некоторое целое число.

Подобным образом

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (\rho_2 > 0).$$

Поэтому

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi,$$

где k — одно из чисел $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Мы доказали: *модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей плюс, быть может, число, равное $2k\pi$, где k — одно из чисел $k = 0, \pm 1, \pm 2,$* .

Мы доказали также: *модуль частного комплексных чисел z_1 и z_2 равен частному модулей этих чисел, а аргумент частного равен с точностью до $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) разности аргументов z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$).*

Сумма комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + y_2 i$$

равна

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Из рис. 65 видно, что радиус-вектор точки $z_1 + z_2$ представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на радиус-векторах точек z_1 и z_2. Длина диагонали равна $|z_1 + z_2|$, а длины его сторон равны $|z_1|$ и $|z_2|$, но тогда

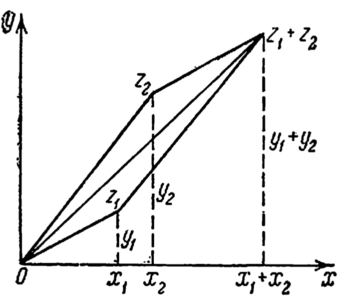


Рис. 65.

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

т. е. модуль суммы комплексных чисел не превышает суммы их модулей.

Отсюда, как следствие, вытекает, что модуль разности z_1 и z_2 не меньше разности модулей z_1 и z_2:

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||.$$

Пример 1. Надо привести комплексное число

$$z = \sqrt{3} + i$$

к тригонометрической форме. Находим

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Следовательно,

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right).$$

При этом среди углов α, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, существует и притом единственный такой, что

$$\sqrt{3}/2 = \cos\alpha, \quad 1/2 = \sin\alpha.$$

Очевидно, $\alpha = \pi/6$ и

$$z = 2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = 2e^{i\pi/6}.$$

Пример 2. Надо привести число

$$z = 3 + 4i$$

к тригонометрической форме

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

и

$$z = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} i\right) = 5(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 5e^{i\alpha},$$

где α — угол, для которого

$$\cos\alpha = 3/5, \quad \sin\alpha = 4/5. \tag{2}$$

Будем искать α среди удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant \alpha < 2\pi$. Так как в данном случае $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$, то α находится в первой четверти. Из (2) следует: $\operatorname{tg}\alpha = 4/3$, т. е. $\alpha = \operatorname{arctg}(4/3)$.

Пример 3. Привести число

$$z = -3(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

к тригонометрической форме.

Если бы перед скобкой стояло положительное число, то данное выражение и было бы тригонометрической формой комплексного числа.

Имеем

$$-\cos\alpha = \cos(\pi + \alpha), \quad -\sin\alpha = \sin(\pi + \alpha),$$

поэтому

$$-3(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$= 3(\cos(\pi+\alpha) + i\sin(\pi+\alpha)) = 3e^{i(\pi+\alpha)},$$

и мы получили тригонометрическую форму.

Задачи. 1) Представить в тригонометрической форме числа:

а) $5 - 4i$, б) $1 + 2i$, в) 4, г) $6i$.

2) Решить в комплексных числах уравнения:

а) $x^3 - 1 = 0$, б) $x^3 + 1 = 0$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

К п. 1.2.4. По цепочкам функций написать соответствующую сложную функцию и, пользуясь обозначениями, приведенными в п. 1.2.2, указать области задания этой функции:

1) $y = \cos u, \quad u = 2x$.
2) $y = e^x, \quad u = 3x$.
3) $y = e^u, \quad u = x^2$.
4) $y = e^u, \quad u = -x$.
5) $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$.
6) $y = u^3, \quad u = 2v^2 + 1, \; v = x - 1$.
7) $y = \sqrt{v}, \quad v = 1 + u, \quad u = x^2$.
8) $y = \sqrt{v}, \quad v = 1 - u, \quad u = x^2$.
9) $y = \ln u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = 1 - t, \quad t = x^2$.

К п. 1.2.5. а) Как в примерах к п. 1.2.4, следующие функции представить в виде цепочек простейших элементарных функций:

1) $y = e^{2x}$.
2) $y = \sin 4x$.
3) $y = \sin (2x + 1)$.
4) $y = (x^2 + 1)^3$.
5) $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$.
6) $y = \ln^3 (1 + x)$.
7) $y = \sin^3 x^2$.
8) $y = e^{2x+3}$.
9) $y = \cos^2 2x$.
10) $y = \sin^3 x^2$.
11) $y = e^{2x+3}$.
12) $y = \cos^2 2x$.
13) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
14) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

б) Убедиться в том, что приведенные выше функции суть элементарные функции, и, пользуясь обозначениями, приведенными в п. 1.2.2, указать множества, на которых эти функции определены.

в) Что такое многочлен, линейная функция, рациональная функция, сложная функция, элементарная функция?

К п. 1.3.1. Какие из приведенных ниже переменных бесконечно малые, или стремятся к пределу (тогда к какому?) или вовсе не имеют предела?

1) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

2) $\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\right\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$.

3) $\{1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001, \ldots\} = \{1 + 10^{-n}\}$.

4) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

5) $\{-1, +1, -1, +1, \ldots\} = \{(-1)^n\}$.

6) $\{0{,}1;\ 0{,}11;\ 0{,}111;\ \ldots\} = \{0{,}\underbrace{1\ldots1}_{n\text{ раз}}\}$.

К п. 1.3.2. Какие из приведенных ниже переменных бесконечно большие (стремятся к бесконечности)? Стремятся ли они к $+\infty$ или $-\infty$?

1) $\{1, 2, 3, \ldots\} = \{n\}$.

2) $\{1, -2, 3, -4, \ldots\} = \{(-1)^{n-1}n\}$.

3) $\{-1, -2, -3, \ldots\} = \{-n\}$.

4) $\{1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, \ldots\}$.

К п. 1.3.5. а) Приращение функции $y = x^2$ в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx, вычисляется по формуле

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2.$$

При этом здесь x и Δx любые, т. е. $-\infty < x, x + \Delta x < \infty$.

Вычислить приращение Δy в точке x, соответствующее приращению Δx, для следующих функций:

1) $y = x^4$. 2) $y = \ln x$. 3) $y = \sin 2x$.
4) $y = x^3$. 5) $y = \arcsin x$. 6) $y = \operatorname{tg} x$.
7) $y = (2x + 3)$. 8) $y = e^x$. 9) $y = \frac{1}{x}$.

Указать интервалы, к которым могут принадлежать x и Δx.

б) Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывный график на отрезке (интервале), то ее называют непрерывной на этом отрезке (интервале). Как это выражается 1) на языке Δx и Δy и 2) на языке предела функции?

К п. 1.4.2. Пользуясь формулами 1) — 10) п. 1.4.2, написать, чему равны пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$. 2) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x$. 3) $\lim\limits_{x\to 1/2} \arcsin x$.

4) $\lim\limits_{x\to\pi/4} (\sin x + \cos x)$. 5) $\lim\limits_{x\to e^2} \ln x$. 6) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + e^x + x)$.

7) $\lim\limits_{x\to\pi/6} \operatorname{tg} x$. 8) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1 - x^2}$. 9) $\lim\limits_{x\to\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

К п. 1.5.3. Нарисовать график функции $y = \cos x$ на отрезке $(0, 2\pi)$, провести в его точках $x = -2\pi/3, -\pi/3, 0, \pi/3, 2\pi/3$ касательные и вычислить их угловые коэффициенты.

К п. 1.5.8. Вычислить производные от функций:

1) $y = x^3(2x + 1)$. 2) $y = x^2 \sin x$.

3) $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$. 4) $y = x \ln x$.

5) $y = xe^x$. 6) $y = (x^2 - 1) \ln x$.

Сергей Михайлович Никольский

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

М., 1981 г., 160 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *Т. С. Плетнева, Н. Б. Румянцева*

ИБ № 11909

Сдано в набор 30.07.80.
Подписано к печати 20.11.80.
Бумага 84×108$^1/_{32}$. Тип. № 2.
Обыкновенная гарнитура. Высокая печать.
Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 8,4.
Тираж 200000 экз. (1-й завод 1—100000 экз.)
Заказ № 3345. Цена книги 30 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»
Москва, Шубинский пер., д. 10