П. С. АЛЕКСАНДРОВ

ЧТО ТАКОЕ НЕЭВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
МОСКВА
1950

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

П. С. АЛЕКСАНДРОВ
действительный член АПН РСФСР

ЧТО ТАКОЕ НЕЭВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Москва 1950

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

Посвящается памяти моего учителя
Александра Романовича Эйгеса

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта маленькая книга представляет собою второе, лишь немного видоизмененное, издание моей статьи, опубликованной под тем же названием в сборнике „Николай Иванович Лобачевский“, изданном в 1943 г. Государственным издательством технико-теоретической литературы к 150-летию со дня рождения великого геометра и состоящем из трех статей (кроме переиздаваемой ныне статьи, в сборник входила еще составленная мною же статья биографического характера и статья А. Н. Колмогорова „Лобачевский и математическое мышление девятнадцатого века“).

Предлагаемая вниманию читателя в отдельном издании статья моя не является даже и кратким учебником неэвклидовой геометрии и не претендует заменить имеющиеся в русской литературе систематические изложения этой дисциплины. Моя цель совсем другая: я стремлюсь лишь ввести читателя в основные наиболее принципиальные идеи неэвклидовой геометрии и представить эти идеи в возможно компактной форме и в возможно тесной связи с другими геометрическими идеями (прежде всего с проективной геометрией, а также, конечно, и с задачей обоснования геометрии). Я начинаю с изложения общепринятой в настоящее время аксиоматики эвклидовой геометрии, ввожу при этом в связи с аксиомами конгруэнтности понятие движения и заканчиваю эту часть книжки аксиомой параллельных Эвклида и Лобачевского. При этом дается много образцов доказательства теорем элементарной геометрии, однако, при малом объеме книги, я, естественно, не мог ставить себе задачи полного построения системы элементарной геометрии со всеми доказательствами, отправляясь от аксиом и определений: решение этой задачи означало бы написание нового курса оснований геометрии, что я не имел и не мог иметь в виду.

Вторая часть книги посвящена в основном построению и исследованию двух моделей геометрии Лобачевского (модель Клейна и модель Пуанкаре) и получающемуся из этого исследования доказательству непротиворечивости названной геометрии. Изложение здесь ведется с привлечением основных понятий проективной геометрии в их аналитической форме. Этим подготавливается почва и для того, чтобы в третьей, последней, части книги ввести читателя и во вторую неэвклидову геометрию — в геометрию эллиптической плоскости, что, в свою очередь, через посредство сферической геометрии, подводит нас к вопросу о дифференциально-геометрической реализации неэвклидовой геометрии. Изложение, которое я стремился вести с наибольшей наглядностью, содержит, как мне кажется, достаточно доказательств, чтобы удовлетворить естественную любознательность читателя и в отношении логики всего построения, но все же некоторые точно сформулированные геометрические факты приводятся без доказательств.

Я представлял себе в основном два круга читателей этой книги. Во-первых, наше учительство, во-вторых, ученики старших классов средней школы, обладающие специальным интересом и способностями к математике. Учителя наши в своем большинстве окончили педагогический институт и, следовательно, изучили в свое время тот или иной курс оснований геометрии, быть может, сейчас уже несколько позабытый. Предлагаемая их вниманию книга, как я надеюсь, напомнит им основное содержание этого курса, не загроможденное деталями, и прямой дорогой введет их в круг основных идей неэвклидовой геометрии.

Но я считаю, что понять эти идеи можно и не изучив никакого курса оснований геометрии, и именно эта моя уверенность и позволяет мне иметь в виду и учащихся старших классов средней школы[1]. Я ду-

[1] Им придется, правда, попутно заняться и изучением аналитической геометрии. Но аналитическая геометрия является первым математическим предметом, изучаемым в высшей школе, и поэтому не предполагает никакого предварительного знания так называемой высшей математики.

маю, что те из них, для которых геометрия является любимым предметом, в состоянии будут увлечься грандиозными геометрическими идеями Лобачевского и с пользой смогут прочитать значительную часть этой книги. О себе могу в связи с этим сказать, что впервые познакомился с идеями неэвклидовой геометрии, будучи учеником средних классов гимназии, со слов моего учителя А. Р. Эйгеса, памяти которого и посвящаю эту книжку. Основные концепции геометрии Лобачевского в талантливом изложении А. Р. Эйгеса настолько увлекли меня, что заставили меня выбрать математику как будущую специальность. Я надеюсь, что для молодых людей, впервые знакомящихся по этой книге с геометрическими понятиями и идеями, выходящими за пределы школьного курса математики, чтение ее послужит побуждением к более глубокому изучению неэвклидовой геометрии (например, к изучению соответствующих глав прекрасной книги Н. В. Ефимова „Высшая геометрия" или книги „Основания геометрии" В. И. Костина).

Замечу, наконец, что читателю рекомендуется попробовать самому восстановить пропущенные в тексте доказательства теорем; во многих случаях (особенно в применении к теоремам первых глав) это ему удастся.

Болшево, Комаровка, 8 июня 1950.

I. АКСИОМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭВКЛИДА И ЛОБАЧЕВСКОГО

Со времен Эвклида элементарная геометрия считается образцом аксиоматически построенной математической науки. Это значит, что предложения, составляющие ее содержание, выводятся путем чисто логической дедукции из небольшого числа определений и принимаемых без доказательства утверждений, называемых аксиомами. Первая система аксиом геометрии была дана Эвклидом (около 300 г. до н. э.), ему же принадлежит и дедуктивное построение „элементарной геометрии", в основных чертах сохранившееся и по сей день. Конечно, система аксиом элементарной геометрии, данная Эвклидом, не удовлетворяет современным логическим требованиям: вполне исчерпывающим образом аксиоматика элементарной геометрии построена лишь совсем недавно, на рубеже прошлого и текущего столетий, т. е. менее полвека тому назад.

Однако в настоящую минуту нас интересуют не те или иные логические несовершенства в формулировках аксиом Эвклида [несовершенства, как уже сказано, устранимые и устраненные[1]], а то особое место, которое в этой системе занимает одна определенная аксиома, именно аксиома параллельных, известная также под названием пятого постулата Эвклида; аксиома эта может быть сформулирована так:

Аксиома Эвклида. *Пусть в данной плоскости дана прямая и лежащая вне этой прямой точка; тогда через эту точку можно провести к данной прямой одну и только одну параллельную прямую*[2].

Фактом истории науки является то обстоятельство, что аксиома параллельных была единственной аксиомой, вызвавшей потребность доказательства (т. е. логического вывода из остальных аксиом). Она не обладала, следовательно, той непосредственной очевидностью, которой обладали, по крайней мере для людей, занимавшихся математикой, эти „остальные аксиомы". Попытки доказать пятый постулат Эвклида занимали геометрическую мысль в течение более чем двух тысячелетий. Они начались с первых же последователей Эвклида и более или менее непрерывно продолжались до первых десятилетий XIX в., т. е. до того момента, когда Лобачевский созданием своей неэвклидовой геометрии обнаружил полную безнадежность всех таких попыток. В настоящее время недоказуемость аксиомы параллельных, т. е. невозможность логического вывода ее из остальных аксиом Эвклида, является строго доказанным математическим фактом,

---

[1] К этим несовершенствам мы еще вернемся; мы дадим также и вполне безупречную, полную систему аксиом элементарной геометрии.

[2] Как известно, две прямые называются параллельными, если они, находясь в одной плоскости, не пересекаются (т. е. не имеют ни одной общей точки).

столь же достоверным, как любое предложение арифметики (например, как предложение $2 \cdot 2 = 4$).

Лобачевский принял все аксиомы Эвклида, кроме одной аксиомы параллельных. Эвклидов пятый постулат он заменил следующей противоположной ему аксиомой:

Аксиома Лобачевского. *Пусть в данной плоскости дана прямая и лежащая вне этой прямой точка; тогда через эту точку можно провести к данной прямой в данной плоскости две различные параллельные прямые.*

Из полученной таким образом системы аксиом Лобачевский с безупречной логической строгостью вывел стройную совокупность предложений (теорем), составляющих содержание математической дисциплины, известной под названием неэвклидовой геометрии Лобачевского.

* * *

Элементарная геометрия состоит из теорем двух родов: теоремы первого рода — это теоремы, доказывающиеся без привлечения аксиом параллельных, т. е. теоремы, являющиеся следствиями аксиом, входящих как в систему Эвклида, так и в систему Лобачевского; эти теоремы, следовательно, входят как в геометрию Эвклида, так и в геометрию Лобачевского. Примерами таких теорем могут служить: внешний угол треугольника больше всякого внутреннего, не смежного с ним; против большей стороны лежит больший угол; в равнобедренном треугольнике углы при основании равны; если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то такие треугольники равны; во всякий треугольник можно вписать круг и др. Совокупность теорем первого рода (т. е. теорем, не зависящих от аксиомы параллельных) иногда называют „абсолютной" геометрией.

Теоремы второго рода (элементарной эвклидовой геометрии) — это теоремы, не могущие быть доказанными без привлечения аксиом параллельных, т. е. не являющиеся следствиями остальных аксиом. Они не имеют места в геометрии Лобачевского, им в геометрии Лобачевского естественно соответствуют предложения, не входящие в геометрию Эвклида и доказываемые лишь при помощи аксиомы параллельных Лобачевского. Например:

В геометрии Эвклида:	В геометрии Лобачевского:
Сумма трех углов любого треугольника постоянна и равна $2d$.	Сумма трех углов треугольника меняется от треугольника к треугольнику, но всегда меньше $2d$.
Сумма углов всякого выпуклого четырехугольника равна $4d$.	Сумма углов всякого выпуклого четырехугольника меньше $4d$. Так что, в частности, не существует прямоугольников.
Ко всякому треугольнику можно построить подобный ему, но не равный треугольник.	Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны (другими словами, подобие в геометрии Лобачевского совпадает с равенством).
Вокруг всякого треугольника можно описать окружность.	Не вокруг всякого треугольника можно описать окружность.

Как видно даже из этих примеров, геометрия Лобачевского сильно отличается от геометрии Эвклида. Однако логическая стройность геометрии Лобачевского такова же, как и геометрии Эвклида; она привела Лобачевского к убеждению, что в этой новой геометрии не только не найдено, но и не существует никакого логического противоречия. Это убеждение великого геометра получило в конце XIX в. блестящее и окончательное подтверждение: было доказано Клейном и Пуанкаре, что всякое противоречие в геометрии Лобачевского имело бы своим следствием и противоречие в геометрии Эвклида: геометрия Эвклида и геометрия Лобачевского с логической точки зрения в равной мере совершенны. Отсюда следует и недоказуемость пятого постулата Эвклида (в том точном смысле, который был указан выше): если бы эвклидова аксиома параллельных могла быть выведена из остальных аксиом, то, заменяя ее отрицающим эту аксиому допущением, а именно аксиомой Лобачевского, мы неминуемо должны были бы прийти к противоречию, тогда как в действительности в геометрии Лобачевского противоречий нет.

II. СИСТЕМА АКСИОМ ГЕОМЕТРИИ. ПЕРВЫЕ ТРИ ГРУППЫ АКСИОМ

Основными отправными понятиями (плоской) геометрии — как эвклидовой, так и неэвклидовой — являются понятия точки и прямой. Эти понятия не определяются вовсе, и это не должно смущать читателя: ведь всякое определение заключается в сведении определяемого понятия к другим понятиям, которые мы считаем уже данными (например, когда окружность определяется как совокупность всех точек, отстоящих от данной точки на одно и то же данное расстояние, то этим понятие окружности сводится к понятиям точки, расстояния и общематематическому понятию множества или совокупности). Но такое сведение более сложных понятий к более простым не может продолжаться безгранично: в конце концов, оно должно привести к понятиям, которые при данном построении дисциплины принимаются за отправные понятия, не подвергающиеся никакому определению, т. е. никакой редукции к другим, признающимся более простыми понятиями. За такие, не подвергающиеся определению основные понятия в плоской геометрии принимаются понятия точки и прямой. Кроме того, придется принять без определения и некоторые основные отношения, существующие между этими понятиями, например, отношение принадлежности точки данной прямой, выражаемое словами: „данная точка лежит на данной прямой", или, что мы считаем равнозначным, „данная прямая проходит через данную точку". Доказательство непротиворечивости данной геометрической системы (например, геометрии Эвклида) понимается в смысле редукции к непротиворечивости арифметики: доказывается, что из всякого противоречия в данной геометрической системе следовало бы противоречие в арифметике. В этом смысле в конце XIX века разными учеными (например, Гильбертом) была доказана непротиворечивость эвклидовой геометрии. Мы в настоящей статье этим заниматься не будем — факт непротиворечивости эвклидовой геометрии мы просто примем к сведению и постараемся разъяснить читателю, что отсюда следует непротиворечивость и геометрии Лобачевского: в соответствии со сказанным в конце предыдущего параграфа мы постараемся показать, что из всякого противоречия в геометрии Лобачевского следовало бы и противоречие в геометрии Эвклида.

Переходим теперь к самому изложению системы аксиом плоской геометрии Эвклида (планиметрии).

Итак, нам даны два множества. Элементы первого множества называются точками, элементы второго — прямыми (данной плоскости E). Среди основных (не подлежащих определению) отношений между элементами этих множеств первое отношение называется отношением принадлежности (или инцидентности) и выражается словами: „данная точка принадлежит (или инцидентна) данной прямой" или „лежит на данной прямой". То же самое отношение выражают также словами: „данная прямая инцидентна данной точке" или „проходит через данную точку". Мы подчиняем это отношение следующим аксиомам, образующим первую группу аксиом элементарной геометрии (аксиомы принадлежности или соединения).

1.1. Каждые две точки принадлежат одной и только одной прямой (или: через каждые две точки проходит одна и только одна прямая).

1.2. Каждой прямой принадлежат, по крайней мере, две точки (или: на каждой прямой лежат, по крайней мере, две точки).

1.3. Среди всех точек плоскости имеются, по крайней мере, три точки, не принадлежащие никакой прямой (т. е. такие три точки, что не существует никакой прямой, которая была бы инцидентна каждой из них).

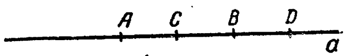
Следующим основным, не подлежащим определению отношением, является отношение, выражаемое словом „между“: оно касается точек, лежащих на одной и той же прямой, и выражается словами: „на данной прямой данная точка C лежит между двумя данными точками A и B“.

Это отношение мы подчиняем четырем аксиомам 2.1 – 2.4. Первая из них выражает лишь то обстоятельство, что отношение „C лежит между A и B“ симметрично относительно точек A и B:

2.1. Если точка C лежит между A и B, то C лежит и между B и A.

2.2. Из трех точек, принадлежащих данной прямой, всегда одна и только одна лежит между двумя другими.

На чертеже 1 точка C лежит между точками A и B, но A не лежит между B и C и B не лежит между A и C.



Черт. 1.

2.3. Если A и B — точки, принадлежащие прямой a, то на a существует, по крайней мере, одна точка C, лежащая между A и B, и, по крайней мере, одна такая точка D, что B лежит между A и D (черт. 1).

Замечание. Вторая часть аксиомы 2.3 иногда называется аксиомой „о неограниченной продолжаемости (данного отрезка) прямой“.

Аксиомы 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 2.3 дают повод к следующим определениям:

Точка A называется точкой пересечения прямых a и b, если она принадлежит как прямой a, так и прямой b. Из аксиомы 1.1 легко следует, что две прямые не могут иметь более одной точки пересечения. Если прямые a и b не имеют ни одной точки пересечения, то они называются *параллельными*.

Пусть A и B две точки, принадлежащие прямой a; множество всех точек этой прямой, лежащих между точками A и B, называется *отрезком AB* прямой a.

Замечание. Еще раз обращаем внимание читателя на то, что в данной аксиоматике прямая вводилась как элементарное, не подлежащее определению понятие (отнюдь не как множество точек). Отрезок же прямой мы определили как некоторое множество точек.

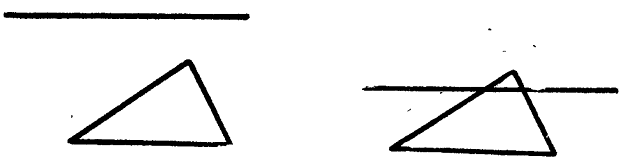
Пусть даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Совокупность этих трех точек и трех отрезков AB, BC, AC проходящих через них прямых называется ***треугольником*** ABC; точки A, B, C называются ***вершинами***, а отрезки AB, BC, AC—***сторонами*** треугольника. Аналогично определяются и другие многоугольники.

Замечание. Итак, согласно только что данному определению, треугольник является множеством, состоящим из шести элементов: трех точек и трех отрезков (причем каждый отрезок в свою очередь является множеством точек).

Пусть точка пересечения прямых a и b является точкой отрезка AB прямой b; в этом случае мы говорим, что прямая a пересекает отрезок AB прямой b.

Аксиомы 2.1, 2.2, 2.3 вместе со следующей аксиомой 2.4 называются аксиомами порядка (в эвклидовой геометрии).

2.4. Аксиома Паша. Пусть даны треугольник ABC и прямая a, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Тогда возможны лишь два случая: либо прямая a не пересекает ни одной из сторон треугольника ABC, либо она пересекает две и только две стороны этого треугольника (черт. 2а и 2б).



а *б*

Черт. 2.

Прежде чем итти дальше, заметим, что из аксиом изложенных двух групп можно вывести бесконечность множества точек, лежащих на прямой. Дальнейшие следствия из тех же двух групп аксиом удобно формулировать, введя некоторые новые определения.

Пусть на прямой a дана точка O (которую в течение всех ближайших рассуждений будем считать раз навсегда выбранной; „точка на прямой“ означает то же, что и „точка, лежащая на прямой“). Рассмотрим на той же прямой a какую-нибудь точку A, отличную от точки O. Назовем *полупрямой* (или *лучом*)[1] OA множество точек, состоящее из точки A и из всех точек $A' \neq O$ прямой a, обладающих тем свойством, что O не лежит между A и A'. Можно прежде всего доказать: какова бы ни была точка A' полупрямой OA, полупрямые OA и OA' совпадают между собой (т. е. состоят из одних и тех же точек прямой a). Далее: какова бы ни была точка $B \neq O$ прямой a, не принадлежащая полупрямой OA, полупрямая OB состоит из всех точек прямой a, отличных от точки O и точек полупрямой OA. Итак:

Всякая точка O данной произвольной прямой a разбивает множество отличных от O точек этой прямой на две полупрямые, причем для того, чтобы две точки принадлежали одной и той же полупрямой, необходимо и достаточно, чтобы точка O не лежала между ними (черт. 3).

Черт. 3.

Рассмотрим теперь множество всех точек плоскости; обозначим это множество через E; пусть a—какая-нибудь прямая; через E_a обозначим множество тех точек, которые не принадлежат прямой a. Тогда из наших аксиом можно вывести, что множество E_a распадается на два подмножества — на две „полуплоскости“, причем две какие-нибудь точки A, B множества E_a, по определению, принадлежат одной и той же полуплоскости, если отрезок AB не пересекается с прямой a. Короче, эти результаты формулируются так:

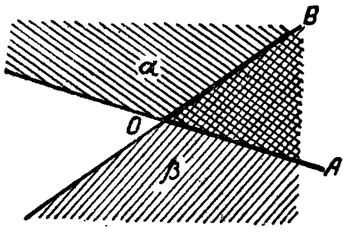
Всякая точка данной прямой разбивает эту прямую

[1] По поводу определения полупрямой можно было бы сделать то же замечание, что и по поводу определения отрезка.

на две полупрямые; всякая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости[1].

Теперь мы можем определить понятие угла. Пусть даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке O; возьмем на прямой a полупрямую OA, а на прямой b — полупрямую OB. Так как всякая точка, лежащая между двумя какими-нибудь точками данной полупрямой, сама есть точка этой полупрямой, то все точки полупрямой OB принадлежат одной и той же полуплоскости из тех двух полуплоскостей, на которые прямая a разбивает плоскость; эту полуплоскость обозначим через α (черт. 4). Точно так же вся полупрямая OA содержится в одной определенной полуплоскости—обозначим ее через β— из тех двух полуплоскостей, на которые плоскость разбивается прямой b. Множество всех точек, принадлежащих как α, так и β, назовем внутренностью угла, образованного полупрямыми OA и OB; эти полупрямые назовем сторонами, а точку O—вершиной угла; самим углом AOB называется фигура, состоящая из внутренности этого угла, двух его сторон и вершины[2]. После этого смежные и вертикальные углы определяются так, как это делается в любом учебнике элементарной геометрии.

Из аксиом принадлежности и порядка вытекают далее предложения:



Черт. 4.

1. Если дан треугольник ABC, то множество всех точек плоскости, отличных от вершин треугольника и не лежащих на его сторонах, разбивается на два подмножества—„внутренность" треугольника и его „внешнюю область", обладающих тем свойством, что всякий отрезок, соединяющий точку одной области с точкой другой, непременно либо проходит через одну из

[1] Следовало бы сказать: разбивает множество всех точек на этой прямой (соответственно: „множество всех точек плоскости").

[2] Читателю предоставляется самому разобраться, множеством каких именно элементов является при этом определении угол (ср. выше определение треугольника).

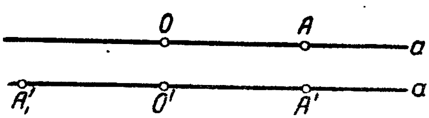
вершин треугольника, либо пересекает одну из его сторон.

2. Всякая прямая, проходящая через вершину треугольника и через точку его внутренности, непременно пересекает сторону, противоположную данной вершине.

Замечание. Из аксиом порядка выводится возможность установить на прямой направление („слева направо" или „справа налево"), т. е. превратить множество ее точек в *упорядоченное* множество так, чтобы аксиоматически введенное понятие „между" совпадало с „между" в смысле этого упорядоченного множества. Однако мы отложим этот вопрос до того момента, когда в нашем распоряжении будут аксиомы конгруэнтности и непрерывности, которые позволят без труда доказать, что множество точек прямой упорядочивается по типу вещественных чисел (с сохранением только что высказанного условия понятия „между").

Последним основным и не подлежащим определению отношением в аксиоматике геометрии является *конгруэнтность* (равенство) фигур. Это отношение (мы его обозначаем знаком $\equiv$) достаточно ввести для простейших фигур, а именно для отрезков и углов; оно подчиняется следующим аксиомам (аксиомы конгруэнтности).

3. 1. Отношение конгруэнтности рефлексивно, симметрично и транзитивно (т. е. $x \equiv x$; из $x \equiv y$ следует $y \equiv x$; из $x \equiv y$, $y \equiv z$ следует $x \equiv z$; здесь x, y, z обозначают либо отрезки, либо углы).



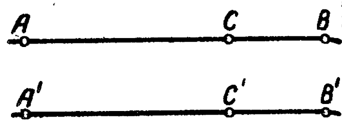
Черт. 5.

3. 2. Пусть на прямой a дан отрезок OA, а на прямой a' (быть может, совпадающей с a)—точка O' (черт. 5). На каждой из двух полупрямых, на которые точка O' разбивает прямую a', существует по одному и только одному отрезку, конгруэнтному отрезку OA.

(Кратко эту аксиому выражают словами: каждый отрезок можно и единственным способом—*отложить* от каждой точки данной прямой по этой прямой и притом по обе стороны от данной точки.)

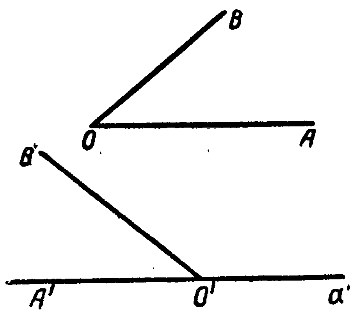
3. 3. Если на двух отрезках AB и $A'B'$ можно выбрать по точке C и C' так, что $AC \equiv A'C'$ и $CB \equiv C'B'$, то $AB \equiv A'B'$ (черт. 6).

(Короче: „прилагая" к конгруэнтным отрезкам конгруэнтные отрезки, получим конгруэнтные отрезки.)



Черт. 6.

3. 4 (аналогична аксиоме 3.2, но касается углов, а не отрезков). Пусть дан угол BOA, прямая a' и на ней точка O' (черт. 7). Выберем произвольно полу-

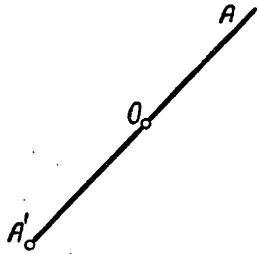


Черт. 7.

прямую $O'A'$ из двух полупрямых, на которые точка O' разбивает прямую a', и, кроме того, одну из двух полуплоскостей, на которые a' разбивает плоскость. Тогда в этой полуплоскости существует (и притом только один) угол $B'O'A'$, конгруэнтный углу BOA (имеющий полупрямую $O'A'$ одной из своих сторон, а точку O' своей вершиной).

Замечание. Аксиома 3.2 позволяет определить симметрию относительно точки. Пусть O — данная точка плоскости, строим взаимно-однозначное отображение f множества всех точек плоскости на себя следующим образом. Полагаем прежде всего $f(O)=O$; если $A \neq O$, то откладываем на прямой OA от точки O отрезок

$OA' = OA$ в сторону, противоположную от точки A (т. е. на полупрямой OA', отличной от полупрямой OA). Точка $A' = f(A)$ и есть точка, симметричная точке A относительно точки O (черт. 8).



Черт. 8.

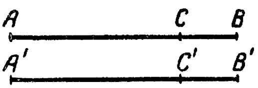
Понятие конгруэнтности, введенное для отрезков и углов, может быть легко распространено и на другие фигуры элементарной геометрии. В частности, два треугольника называются конгруэнтными, если три стороны и три угла одного из них конгруэнтны соответственно трем сторонам и трем углам другого.

Сформулируем последнюю аксиому конгруэнтности:

3.5. Если стороны AB и AC треугольника ABC соответственно конгруэнтны сторонам $A'B'$ и $A'C'$ треугольника $A'B'C'$ и угол BAC конгруэнтен углу $B'A'C'$, то треугольники ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны (т. е. $BC \equiv B'C'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$).

Очевидно, аксиома эта представляет собой не что иное, как всем известный „первый случай равенства треугольников“ (по двум сторонам и углу, заключенному между ними). Заметим, что в заключении аксиомы 3.5 достаточно требовать лишь конгруэнтность углов: $\angle ABC \equiv A'B'C'$, $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$; после этого конгруэнтность $BC \equiv B'C'$ могла бы быть доказана.

Из перечисленных выше аксиом (аксиомы принадлежности, порядка и конгруэнтности) уже вытекает целый ряд теорем геометрии. Кроме приведенных ранее, укажем еще на следующие.



Черт. 9.

3. Если на конгруэнтных отрезках AB и $A'B'$ даны точки C и C' так, что $AC \equiv A'C'$, то $CB \equiv C'B'$ (черт. 9). Отсюда легко следует:

4. Симметрия прямой относительно какой-либо ее точки отображает всякий отрезок этой прямой на конгруэнтный ему отрезок.

5. Пусть точка C лежит на прямой a между точками A и B. Пусть на полупрямой $A'B'$ (концом которой являет-

ся точка A') взяты точки C' и B' так, что $A'B' \equiv AB$, $A'C' \equiv AC$; тогда точка C' лежит на отрезке $A'B'$.

При помощи этого предложения обосновывается сравнение отрезков, т. е. установление для любых двух неконгруэнтных отрезков отношения „больше" („меньше").

Определение. Если даны два отрезка AB и $A'B'$ и на отрезке $A'B'$ существует такая точка C', что $AB \equiv A'C'$, то говорят, что отрезок $A'B'$ больше отрезка AB (или что AB меньше, чем $A'B'$), и пишут $A'B' > AB$ (или $AB < A'B'$). Очевидно, из $AB > A'B' > A''B''$ следует $AB > A''B''$. Далее, отношения $AB > A'B'$ и $A'B' > AB$ исключают друг друга. Наконец, из теоремы 5 следует:

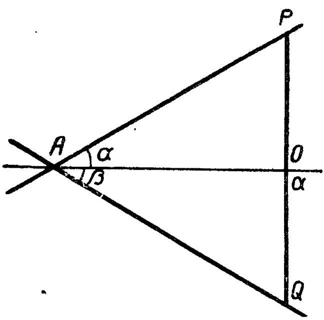
Если отрезки AB и $A'B'$ не конгруэнтны, то либо $AB > A'B'$, либо $A'B' > AB$.

Аналогично определяется отношение неравенства и для углов.

Пользуясь теоремой 5, можно доказать, что всегда можно построить равнобедренный треугольник, имеющий заданный отрезок своим основанием.

Мы имеем далее обычное определение прямого угла как угла, равного своему смежному. Существование прямых углов вытекает из следующей теоремы, которую полностью докажем:

6. Из каждой точки P, лежащей вне данной прямой a, можно опустить на эту прямую один и только один перпендикуляр.



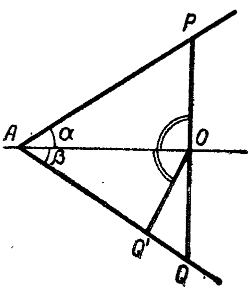
Черт. 10.

Докажем сначала первую половину теоремы (т. е. существование хотя бы одного перпендикуляра). Проведем прямую через P и какую-нибудь точку A прямой a (черт. 10). Строим угол β, конгруэнтный углу α, и откладываем отрезок $AQ = AP$. Прямая PQ перпендикулярна к a. В самом деле, прежде всего, прямая PQ пересекает a (в точке, которую обозначаем через O), так как P и Q лежат „по разные стороны" от прямой a (т. е. в разных полуплоскостях). Далее, треугольники PAO и QAO конгруэнтны по аксиоме 3.5 (по двум сторонам и углу, заключенному между ними), поэтому углы при вершине O—прямые (как конгруэнтные смежные углы).

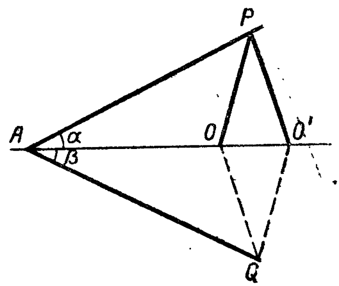
Докажем теперь единственность перпендикуляра. Это доказательство основывается на лемме:

Лемма. Пусть PO (черт. 11) есть перпендикуляр, опущенный из точки P на прямую a. Пусть A—какая-нибудь точка прямой a и пусть $\angle\beta \equiv \angle\alpha$ и $AP \equiv AQ$. Тогда точка Q лежит на прямой PO.

В самом деле, из равенства треугольников PAO и QAO (все по той же аксиоме 3.5) заключаем о равен-



Черт. 11.



Черт. 12.

стве углов POA и QOA; если бы продолжением стороны OP прямого угла POA было бы не OQ, а OQ', то углы AOQ и AOQ' были бы равны, в противность аксиоме 3.4. Лемма доказана.

Пусть теперь из точки P можно опустить на прямую a два перпендикуляра PO и PO' (черт. 12). Беря на a произвольную точку A и строя угол β, равный углу α, и отрезок $AQ = AP$, заключаем по лемме, что точка Q должна лежать как на прямой PO, так и на прямой PO', что противоречит аксиоме 1.1. Теорема 6 доказана.

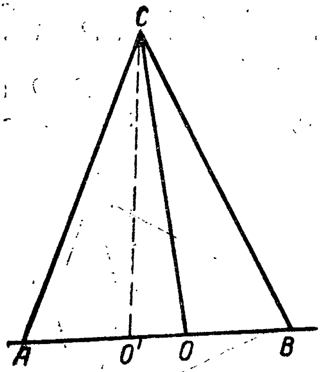
Пусть ABC есть равнобедренный треугольник с основанием AB. Применяя аксиому 3.5 к треугольнику ABC и к тому же треугольнику ABC, но записанному в виде $A'B'C'$, где $A' = B$, $B' = A$ и $C' = C$, видим, что $\angle A' \equiv \angle A$, т. е. что

7. Во всяком равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Помимо этого докажем следующую теорему.

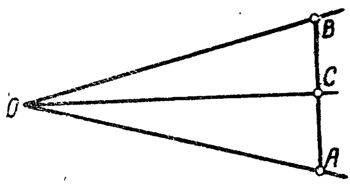
8. Перпендикуляр, опущенный из вершины равнобедренного треугольника на его основание, делит это основание пополам.

Пусть CO есть перпендикуляр, опущенный из вершины равнобедренного треугольника ACB на его основание AB (черт. 13). Отложим на луче BA отрезок BO', равный AO. По аксиоме 3.5 треугольники ACO и BCO' конгруэнтны. Следовательно, $\angle CO'B$ равен $\angle COA$, т. е. является прямым. Так как из C можно опустить на AB только один перпендикуляр, то $O = O'$ и поэтому $AO \equiv BO' \equiv BO$.



Черт. 13.

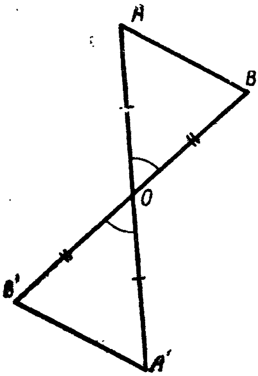
Так как равнобедренный треугольник можно построить на любом отрезке AB, то в только что проведенном рассуждении заключается и доказательство того, что *каждый отрезок можно разделить пополам* (причем из аксиом конгруэнтности отрезков следует, что операция эта однозначна, т. е. что у каждого отрезка имеется только одна середина). Аналогично можно доказать и возможность (и однозначность) деления пополам всякого угла. На сторонах угла AOB (черт. 14) откладываются равные отрезки AO и OB и опускается перпендикуляр OC на прямую AB; этот перпендикуляр и является искомой биссектрисой. Возможность деления пополам отрезков и углов имеет важное значение при установлении возможности измерять отрезки. Это, в свою очередь, поведет к осуществлению взаимно-однозначного соответствия между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел. Однако для этого, кроме уже изложенных



Черт. 14.

аксиом, нам потребуются еще аксиомы непрерывности, которым посвящен следующий параграф.

Заметим далее, что теперь уже легко доказываются, во-первых, остальные признаки равенства треугольников и, во-вторых, теоремы о смежных и вертикальных углах: если данные углы равны, то и смежные им углы равны, все прямые углы равны, вертикальные углы равны, а также так называемые обратные теоремы о равенстве смежных и вертикальных углов.



Черт. 15.

Наконец, если воспользоваться равенством вертикальных углов и теоремой 4, то сразу видно:

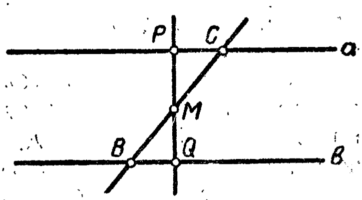
9. Симметрия плоскости относительно точки переводит всякий отрезок в конгруэнтный отрезок (черт. 15).

Для целей, которые преследует эта книга, интересно еще убедиться в том, что из одних аксиом принадлежности, порядка и конгруэнтности вытекают следующие две теоремы:

10. Две прямые, образующие с третьей равные внутренние накрест лежащие углы, параллельны между собой.

11. Пусть a—прямая, P—не принадлежащая ей точка. Существует, по крайней мере, одна прямая, проходящая через точку P и параллельная прямой a.

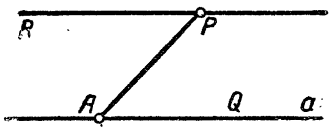
Доказательство теоремы 10. Пусть прямые a и b образуют равные внутренние накрест лежащие углы с пересекающей их прямой c (черт. 16). Если эти углы прямые, то прямые a и b не могут пересекаться



Черт. 16.

в силу теоремы 6. Пусть эти углы не прямые. Тогда поступаем так. Отрезок AC делим пополам и из его середины M опускаем перпендикуляр MP на a; после этого откладываем $BQ \equiv AP$ и рассматриваем треугольники MCP и MBQ, равные между собой по аксиоме

3.5. Отсюда следует, что углы при P и Q в этих треугольниках равны, т. е. MQ есть перпендикуляр, опущенный из M на b. С другой стороны, углы при M в наших треугольниках также равны; поэтому по обратной теореме о вертикальных углах эти углы суть вертикальные, т. е. отрезки MP и MQ лежат на одной прямой, к которой, таким образом, прямые a и b являются перпендикулярами. Но по теореме 6 два перпендикуляра к одной и той же прямой параллельны, что и требовалось доказать.



Черт. 17.

Теорема 11 сразу следует из теоремы 10 и из аксиомы 3.4. Пусть дана прямая a и точка P вне ее, тогда берем произвольную точку A на a и прямую AP (черт. 17). Откладываем угол $\angle RPA \equiv \angle QAP$, тогда прямая PR в силу теоремы 10 параллельна прямой a.

Замечание. Ставя вопрос о параллельных линиях, мы имеем a priori три логические возможности:

1. Через данную точку P, не принадлежащую прямой a, нельзя провести к этой прямой ни одной параллельной.

2. Через точку P можно провести к прямой a одну и только одну параллельную.

3. Через точку P можно провести к прямой a, по крайней мере, две параллельные.

Теорема 11 показывает, что из принятых нами аксиом (т. е. из предложений так называемой абсолютной геометрии) вытекает, что первая возможность должна быть отброшена. Остаются таким образом лишь вторая и третья возможности; одна из них осуществляется в геометрии Эвклида, другая — в геометрии Лобачевского. Что же касается геометрии, в которой вовсе нет параллельных (и следовательно, не осуществляются и выше сформулированные нами аксиомы), то мы вернемся к ней в главе VIII.

III. СВЯЗЬ АКСИОМ КОНГРУЭНТНОСТИ С ПОНЯТИЕМ ДВИЖЕНИЯ

Связь эта привычна для нас со времени школьного обучения геометрии: мы все помним даваемое в учебниках геометрии определение равных фигур как таких, которые совмещаются при наложении, что соответствует эвклидовой аксиоме: *Совмещающиеся (предметы) равны.*

При аксиоматическом построении геометрии возможно лишь одно из двух: либо надо определить движение, сведя его к понятиям, лежащим в основе данной аксиоматики, либо надо включить движение в число основных, не подлежащих определению, понятий, и тогда сформулировать те аксиомы, которым это понятие подчиняется. Наличие аксиом конгруэнтности в нашей системе аксиом позволяет избрать первый путь.

Прежде чем сформулировать определение движения, посмотрим, каковы те интуитивные элементы, которые оно должно охватить[1]. Так как речь идет о введении понятия движения в аксиоматически построенную плоскую геометрию (при нашем построении мы трехмерным пространством не пользуемся), а наш опыт говорит о движении плоскости, лежащей в трехмерном пространстве, то из всех движений плоскости в трехмерном пространстве нас будут интересовать только те, в результате которых данная плоскость совмещается с самой собой.

Таковы: вращения всей плоскости самой в себе вокруг данной ее точки на данный угол (в данном направлении против часовой стрелки или по часовой стрелке), параллельные сдвиги всей плоскости самой в себе (на данный отрезок в данном направлении) и, наконец, вращения плоскости в трехмерном пространстве на угол, равный двум прямым, вокруг какой-нибудь прямой, лежащей в данной плоскости. Во всех этих движениях нас интересует лишь начальное и конечное положения каждой точки, так что каждое из наших движений воспринимается как взаимно-однозначное отображение множества всех точек плоскости на себя. (При вращении плоскости в себе самой на угол $2d$ вокруг точки O каждой точке A соответствует точка A_1, симметричная точке A относительно центра O, а при вращении плоскости на тот же угол

[1] В этих интуитивных рассмотрениях речь идет все время о движении эвклидовой плоскости.

вокруг лежащей в этой плоскости прямой a каждой точке A соответствует точка A', симметричная точке A относительно оси вращения). Характерным свойством движений, рассматриваемых как взаимно-однозначные отображения множества всех точек плоскости на себя, является то, что при всяком движении сохраняются взаимные расстояния любых двух точек, т. е. каждый отрезок переходит в конгруэнтный ему отрезок. Это делает естественным, *при возвращении от наших интуитивных соображений к аксиоматическому построению геометрии*, сформулировать, в терминах нашей аксиоматики, определение движения следующим образом:

Движением называется каждое взаимно-однозначное отображение множества всех точек плоскости на себя, при котором образом всякого отрезка AB является отрезок $A'B'$, конгруэнтный отрезку AB.

Движения существуют—движением является, например, симметрия плоскости относительно точки (теорема 9).

Мы усилим этот результат в этом же параграфе. Однако сначала установим некоторые элементарные свойства движений.

Пусть f—движение. Возьмем какую-нибудь прямую a и докажем, что образы всех точек прямой a являются точками некоторой прямой a' (которую и будем называть образом прямой a при движении f). Для доказательства рассмотрим какой-либо отрезок AB прямой a; обозначим через $A'B'$ отрезок, в который отрезок AB переводится движением f. Докажем, что всякая точка C прямой a переходит в некоторую точку C' прямой a'. Это очевидно, если точка C принадлежит отрезку AB. Если же точка C не принадлежит отрезку AB, то в силу аксиомы 2.3 существует такая точка D, что весь отрезок AB и точка C принадлежат отрезку AD. Отрезок AD переходит при нашем движении в некоторый отрезок $A'D'$, который, содержа отрезок $A'B'$, лежит на прямой a'; поэтому и C' лежит на той же прямой.

Итак:

Движение переводит всякую прямую в прямую.

Предоставляем читателю доказать следующие простые предложения:

При всяком движении пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся, параллельные в параллельные, полупрямые переходят в полупрямые, полуплоскости в полуплоскости, внутренность угла во внутренность угла.

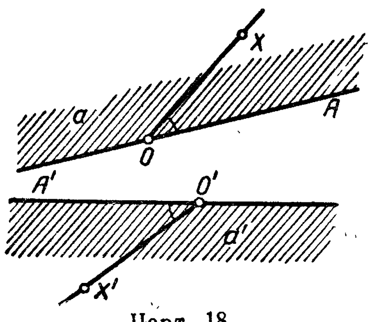
Пусть при движении f угол AOB переходит в угол $A'O'B'$. Докажем, что углы AOB и $A'O'B'$ конгруэнтны. Для этого возьмем на сторонах угла AOB по точке, которые обозначим соответственно через A и B. При движении f эти точки переходят в точки A' и B', причем имеют место равенства $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$, $AB \equiv A'B'$. Следовательно, треугольники AOB и $A'O'B'$ равны по трем сторонам, а поэтому равны и углы AOB и $A'O'B'$.

Итак, движение переводит отрезки, углы, треугольники соответственно в конгруэнтные отрезки, углы, треугольники.

Докажем теперь теорему, существенно усиливающую предложение о существовании движений.

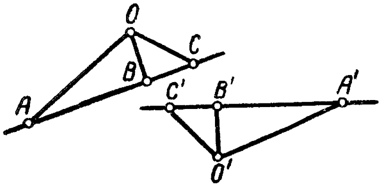
Пусть даны: точка O, полупрямая OA и полуплоскость α, ограниченная прямой OA (точнее: прямой a, несущей полупрямую OA). Пусть, с другой стороны, даны: точка O', полупрямая $O'A'$ и полуплоскость α', ограниченная прямой a', несущей полупрямую $O'A'$. Существует, и притом единственное, движение, переводящее (одновременно) точку O в точку O', полупрямую OA в полупрямую $O'A'$ и полуплоскость α в полуплоскость α'.

Доказательство. Построим искомое движение f (как взаимно-однозначное отображение плоскости на себя). Из наших условий прежде всего следует, что $f(O) = O'$. Пусть X—какая-нибудь точка полупрямой OA. Из наших условий следует далее, что $f(X)$ есть некоторая точка X' полупрямой $O'A'$ и что отрезки OX и $O'X'$ конгруэнтны. Но существует единственная точка X', удовлетворяющая



Черт. 18.

этим требованиям; ее мы и обозначаем через $f(X)$. При искомом движении прямая a переходит в прямую и притом, очевидно, в прямую a'. Поэтому, если X—точка полупрямой OB, дополнительной к полупрямой OA на прямой a, то $f(X)$ непременно есть та точка X' полупрямой $O'B'$ (дополнительной к полупрямой $O'A'$ на прямой a'), для которой $OX = O'X'$. Пусть теперь X — точка полуплоскости α (черт. 18); рассмотрим угол XOA; при движении f (если оно существует) угол XOA должен перейти в конгруэнтный ему угол $X'O'A'$, расположенный в полуплоскости α', а точка X должна перейти в такую точку X' лежащей в α' стороны этого угла, что отрезки OX и $O'X'$ конгруэнтны. Этим и угол $X'O'A'$, и точка X' определены однозначно. Такое же построение приводит нас к точке $f(X)$ и в том случае, если X лежит в полуплоскости β, дополнительной к α. Таким образом, мы построили взаимно-однозначное отображение плоскости на себя; доказательство того, что это отображение является движением (т. е. переводит всякий отрезок в конгруэнтный ему отрезок), проводится так. Сначала доказывается без всякого труда, что если A, B—произвольные точки, A', B'—их образы при отображении f, то $AB \equiv A'B'$; отсюда для любых трех точек A, B, C и их образов A', B', C' следует конгруэнтность треугольников ABC и $A'B'C'$. Чтобы убедиться в том, что образом отрезка при отображении f является отрезок, надо прежде всего доказать, что при нашем отображении три точки A, B, C, лежащие на одной прямой b, переходят в три точки, также лежащие на одной прямой. Доказательство этого (для случая, когда прямая b не проходит через точку O) ясно из черт. 19. Из равенства треугольников: $AOB \equiv A'O'B'$, $BOC \equiv B'O'C'$ следует, что углы $A'B'O'$ и $O'B'C'$ дают в сумме два прямых, а поэтому („обратная теорема о смежных углах"!) являются смежными, т. е. точки A', B', C' лежат на одной прямой. После этого доказательство того, что образ отрезка есть отрезок, легко доводится до конца при помощи теоремы 5.



Черт. 19.

Любые два взаимно-однозначные отображения одного и того же множества M на себя можно, как говорят, ***перемножить***: для этого, по определению, достаточно произвести сначала первое взаимно-однозначное отображение, а затем второе; в результате получится вполне определенное третье взаимно-однозначное отображение множества M на себя, которое и называется произведением двух данных отображений (рассматриваемых, и это существенно, в определенном порядке). Это перемножение взаимно-однозначных отображений обладает свойством ассоциативности (сочетательности). Кроме того, среди взаимно-однозначных отображений множества M на себя имеется тождественное отображение (заставляющее соответствовать каждому элементу множества M этот самый элемент); наконец, каждому взаимно-однозначному отображению f соответствует обратное ему отображение f^{-1}, обладающее тем свойством, что произведение отображений f и f^{-1} (в любом порядке) есть тождественное отображение. Другими словами: взаимно-однозначные отображения любого множества M на себя образуют группу[1]. В частности, группу образуют и все взаимно-однозначные отображения множества всех точек плоскости на себя. Очевидно, что при этом произведение двух отображений, переводящих каждый отрезок в конгруэнтный ему отрезок, снова обладает этим свойством, т. е. произведение двух движений есть движение. Движением является, конечно, и тождественное отображение, и, наконец, обратное отображение к движению также есть движение. Другими словами: ***в группе всех взаимно-однозначных отображений плоскости на себя движения образуют подгруппу***. Доказанный факт дает возможность совершенно перестроить совокупность аксиом конгруэнтности, а именно, заменить их аксиомами, характеризующими движения: это и будет тем вторым способом ввести в движения геометрию, о котором мы говорили в начале этого параграфа. Итак, заменяем аксиомы 3.1—3.5 следующими аксиомами и определениями:

3'.1. В группе всех взаимно-однозначных отображе-

[1] См. П. С. Александров, Введение в теорию групп, Учпедгиз, 1939.

ний множества всех точек плоскости на себя дана подгруппа отображений, называемых движениями.

$3'.2$. При всяком движении образом отрезка является отрезок. (Отсюда легко следует, как выше, что образом множества всех точек какой-нибудь прямой a является множество всех точек некоторой прямой a', которая и называется образом прямой a при данном движении.)

$3'.3$. Пусть даны произвольно: две точки O и O', два луча OA и $O'A'$ и по одной полуплоскости α и α' из каждой пары полуплоскостей, на которые прямые OA и $O'A'$ разбивают соответственно плоскость. Существует одно единственное движение, переводящее одновременно точку O в точку O', полупрямую OA в полупрямую $O'A'$ и полуплоскость α в полуплоскость α'.

Из этих аксиом следует, что при всяком движении угол переходит в угол, треугольник в треугольник и т. д.

Определение. Два отрезка, два угла, два треугольника, вообще две какие-нибудь фигуры (т. е. два каких-нибудь множества точек или прямых) называются конгруэнтными, если существует движение, переводящее одну из этих фигур в другую.

Эти аксиомы и определение конгруэнтности превращают наши первоначальные аксиомы конгруэнтности 3.1—3.5 в теоремы, которые могут быть доказаны.

IV. СИСТЕМА АКСИОМ ГЕОМЕТРИИ (продолжение). АКСИОМЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ, АКСИОМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ

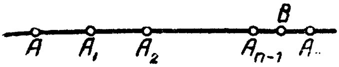
Для того чтобы обосновать измерение отрезков и достигнуть установления взаимно-однозначного соответствия между точками прямой линии и действительными (вещественными) числами, нужно прибавить к уже рассмотренным аксиомам еще две аксиомы непрерывности. Этим будет закончена аксиоматика так называемой абсолютной геометрии, закончен список всех аксиом Эвклида, отличных от аксиомы параллельных.

4. 1. Аксиома Эвдокса (Архимеда). Пусть на прямой a даны две точки A и B. Пусть, кроме того, на полупрямой AB даны конгруэнтные между собой отрезки

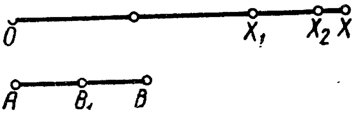
$$AA_1,\ A_1A_2, \ldots,\ A_{n-1}A_n,\ \ldots,$$

отложенные так, что A_1 лежит между A и A_2, A_2 — между A_1 и A_3, вообще A_n — между A_{n-1} и A_{n+1}. Тогда найдется такой номер n, что точка B лежит между A и A_n.

Другими словами: откладывая на данной прямой a достаточное число раз один и тот же отрезок от данной точки A в сторону другой данной точки B, мы (после конечного числа таких откладываний) непременно перейдем за точку B (черт. 20). Аксиома Эвдокса вместе с аксиомами конгруэнтности для отрезков позволяет измерить любой отрезок OX при помощи про-



Черт. 20.



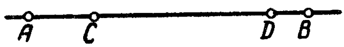
Черт. 21.

извольного, принятого за единицу длины отрезка AB (черт. 21). Для этого откладываем отрезок AB на отрезке OX столько раз, сколько он уместится; по аксиоме Эвдокса отрезок AB отложится на OX некоторое конечное число раз n, вообще говоря, с некоторым остатком X_1X. Целое число n и будет целой частью числа x, измеряющего длину отрезка OX (при единице измерения AB). Теперь берем половину AB_1 отрезка AB (делить отрезки пополам мы умеем!) и откладываем ее на отрезке X_1X. Возможны два случая: или отрезок AB_1 ни разу не уложится на отрезке X_1X — тогда *первый двоичный знак* числа x будет нуль, или же AB_1 уложится на X_1X один раз с некоторым остатком X_2X — в этом случае первый двоичный знак числа x равен 1. Теперь откладываем половину AB_2 отрезка AB_1 (т. е. четверть отрезка AB) на втором остатке X_2X. Получим второй двоичный знак числа x и т. д. Таким образом, шаг за шагом мы разлагаем число x в бесконечную (в частных случаях конечную) двоичную дробь, т. е. вычисляем длину отрезка OX (при данной единице AB).

Черт. 22.

Поставим теперь в соответствие каждой точке X

полупрямой OM (черт. 22) длину отрезка OX, а каждой точке X' полупрямой OM', дополнительной к полупрямой OM, поставим в соответствие длину отрезка OX', взятую со знаком минус. Самой точке O ставится в соответствие число нуль. Этим установлено взаимно-однозначное соответствие между множеством всех точек прямой и некоторым множеством действительных чисел. Отметим, что пока еще ни откуда не следует, что изложенным выше способом каждое действительное число будет поставлено в соответствие некоторой точке прямой, т. е. что каждое положительное число является длиной некоторого отрезка (при данной постоянной единице длины). В самом деле, возьмем обыкновенную „эвклидову" плоскость и на ней какую-нибудь прямоугольную систему координат. Согласимся теперь считать за „точки" только те точки плоскости, обе координаты которых рациональны или являются так называемыми квадратическими иррациональностями[1], а за „прямые" — только те прямые, которые проходят через две какие-нибудь „точки" (т. е. на которых имеются две и, следовательно, бесконечно много точек с рациональными координатами). Нетрудно проверить, что определенные таким образом „точки" и „прямые" удовлетворяют всем до сих пор введенным аксиомам. Между тем, множество всех вообще „точек" — счетное; тем более счетно множество „точек", принадлежащих данной „прямой"; оно не может быть поставлено в соответствие со множеством всех действительных чисел. Лишь после введения второй аксиомы непрерывности мы будем иметь взаимно-однозначное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел.



Черт. 23.

Определение. Отрезок CD называется вложенным в отрезок AB, если обе точки C и D лежат между точками A и B (черт. 23).

Теперь мы можем сформулировать вторую аксиому непрерывности, или так называемую аксиому Кантора, следующим образом:

[1] Речь идет о числах, которые могут быть получены из рациональных чисел конечной комбинацией четырех арифметических действий и действия извлечения квадратного корня.

4.2. Аксиома Кантора. Пусть на какой-нибудь прямой дана последовательность отрезков

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots,\ A_nB_n,\ \ldots,$$

каждый из которых (начиная со второго) вложен в предыдущий. Тогда существует, по крайней мере, одна точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

Из аксиомы Кантора легко следует, что каждая из двоичных дробей выражает (при выбранной единице длины) длину некоторого отрезка и что установленное выше (на основе измерения отрезков) соответствие между точками прямой и действительными числами является взаимно-однозначным соответствием между всеми точками данной прямой и всеми действительными числами.

Все перечисленные аксиомы, т. е. аксиомы принадлежности, порядка, конгруэнтности и непрерывности, и имеют в виду, когда говорят об „остальных“ (т. е. отличных от аксиомы параллельных) аксиомах Эвклида. Если мы прибавим к этим аксиомам аксиому параллельных Эвклида, то получим полную аксиоматику геометрии Эвклида; если же вместо аксиомы параллельных Эвклида прибавим аксиому параллельных Лобачевского, то получим полную аксиоматику геометрии Лобачевского.

При этом, в силу теоремы 11, мы можем теперь аксиомы параллельных Эвклида и Лобачевского формулировать следующим образом:

Аксиома Эвклида. В данной плоскости можно провести через данную точку не более одной параллельной к данной прямой.

Аксиома Лобачевского. В данной плоскости можно провести через данную точку, не лежащую на данной прямой, не менее двух прямых, параллельных к данной прямой.

Замечание. И аксиома Эвклида, и аксиома Лобачевского формулируются (каждая в своей геометрии) для любой прямой и любой не лежащей на ней точки. Однако можно доказать, что если аксиома Эвклида выполняется хотя бы для одной прямой и одной не лежащей на ней точки, то она будет выполняться и для всех прямых и всех точек[1]. Отсюда следует, что и аксиому Лобачевского достаточно сформулировать для одной какой-нибудь прямой и лежащей вне этой прямой точки (при этом, конечно, предполагается, что все остальные перечисленные выше аксиомы выполнены — условие, при котором отрицание аксиомы Эвклида превращается — в силу теоремы 11 — в аксиому Лобачевского).

V. НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ЭВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВОЙ МОДЕЛИ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Выше было сказано, что непротиворечивость эвклидовой геометрии понимается в том смысле, что всякое противоречие эвклидовой геометрии повлекло бы за собой противоречие в арифметике, т. е. в свойствах действительных чисел. Такая постановка вопроса сама указывает и путь доказательства: путь этот заключается в последовательной арифметизации геометрии, т. е. в сведении основных геометрических понятий к понятиям арифметическим, в превращении всякого геометрического предложения в предложение, касающееся одних лишь действительных чисел. Способ, которым эта цель достигается, давно известен: он дается аналитической геометрией. В аналитической геометрии (на плоскости) „точка" есть не что иное, как пара чисел (x, y), записанных в определенном порядке, а прямая есть множество „точек", удовлетворяющих уравнению $ax + by + c = 0$, где a, b, c—какие-нибудь данные числа. Такой же арифметический смысл приобретают в аналитической геометрии все остальные геометрические понятия: понятие „между", понятие конгруэнтности двух отрезков [два отрезка конгруэнтны, если расстояния между их концами равны, причем расстояние между двумя точками $A = (x_1, y_1)$ и $B = (x_2, y_2)$ есть по определению число $+\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$]. Угол между двумя прямыми определяется своими тригонометрическими функциями, которые, в свою очередь, задаются коэффициентами

---

[1] См. например, В. И. Костин, Основания геометрии, Учпедгиз, 1946, стр. 159, подстрочное примечание.

уравнений обеих прямых (с необходимыми предосторожностями, определяющими направления этих прямых). Все это можно найти в любом учебнике аналитической геометрии[1]. После того как все основные геометрические понятия переведены на арифметический язык, можно легко доказать (не переставая рассуждать только о действительных числах, их комбинациях и связывающих их уравнениях), что эти понятия удовлетворяют всем перечисленным выше аксиомам эвклидовой геометрии. Таким образом, все аксиомы геометрии превращаются в верные утверждения, касающиеся тех арифметических понятий, которыми мы заменили основные понятия геометрии. Этим задача доказательства непротиворечивости эвклидовой геометрии в указанном выше смысле полностью решается.

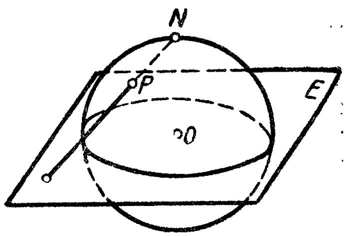
Аксиоматически построенная система геометрии есть система предложений, являющихся следствием немногих основных предложений (аксиом), касающихся основных геометрических понятий (точка, прямая) и основных простейших соотношений между ними. Мы указали, как вместо этих основных геометрических понятий, отвлеченных нами от нашего непосредственного пространственного опыта, можно подставить арифметические понятия (вместо точки — пара действительных чисел и т. д.) таким образом, что все основные соотношения, а следовательно, и все следствия их при этом сохраняются. Можно, как говорят, *построить арифметическую „модель" эвклидовой геометрии.*

Вообще, можно весьма различными способами построить систему понятий и отношений между ними, которые будут соответствовать основным понятиям и основным соотношениям эвклидовой геометрии и которые будут подчиняться ее аксиомам. Всякая такая система понятий и отношений называется „моделью" эвклидовой геометрии, и все такие модели с логической точки зрения устроены совершенно одинаково. Они, как говорят, образуют изоморфные между собой системы (понятий и отношений).

Для иллюстрации этого чрезвычайно важного положения приведем пример „геометрической" модели

[1] См., например, Аналитическую геометрию Н. И. Мусхелишвили.

эвклидовой геометрии, в которой под „точками" и „прямыми" на плоскости понимаются вовсе не те геометрические образы, которые мы привыкли связывать с этими названиями. Возьмем обычную плоскость E и сферу (шаровую поверхность) Σ с центром в точке O плоскости E. Поставим в соответствие каждой точке P сферы Σ, кроме „северного полюса" N этой сферы (черт. 24), ту точку плоскости E, в которой эту плоскость пересекает луч NP. Этим установлено взаимно-однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости E и множеством всех отличных от точки N точек сферы Σ (для краткости множество всех точек сферы, отличных от одной какой-нибудь точки N, называется „пунктированной" сферой — от слова „пункция" или „пунктура", означающего „прокол"). Это взаимно-однозначное соответствие между плоскостью и пунктированной сферой называется стереографической проекцией (сферы на плоскость или плоскости на сферу). В силу стереографической проекции прямые плоскости E находятся во взаимно-однозначном соответствии с проходящими через точку N окружностями, расположенными на сфере Σ. Дальнейшим важным свойством стереографической проекции является ее свойство сохранять углы: двум линиям на сфере, пересекающимся под данным углом[1], соответствуют на плоскости две линии, пересекающиеся под тем же углом.



Черт. 24.

Назовем теперь нашу пунктированную сферу „плоскостью" (в кавычках), „точками плоскости" назовем точки пунктированной сферы; окружности, лежащие на Σ и проходящие через точку N, назовем, по удалении из них точки N, „прямыми". После этого придадим понятию „принадлежности" данной „точки" дан-

[1] Углом между двумя кривыми (в частности, между двумя дугами окружностей) в данной их точке пересечения P называется угол между их касательными в точке P; если этот угол прямой, то кривые называются „ортогональными" (или перпендикулярными) друг другу в точке P.

ной „прямой“ и понятию „между“ их обычный, наглядный смысл. „Отрезками“ наших „прямых“ являются теперь просто дуги пунктированных окружностей (так как окружности пунктированы, т. е. из них удалена точка N, то каждая пара „точек“ определяет лишь один „отрезок“).

Две фигуры („отрезки“, „углы“ и т. д.) на нашей „плоскости“ называем „конгруэнтными“, если конгруэнтны их стереографические проекции на плоскость E (в силу сделанного замечания о сохранении углов при стереографической проекции конгруэнтность углов на нашей „плоскости“ имеет тот же смысл, что и обычная конгруэнтность углов, образованных дугами окружностей на сфере). Все это можно сказать короче: *не только точки и прямые мы переносим с плоскости E на „плоскость“ Σ посредством стереографической проекции, но мы переносим на Σ и все отношения, существующие между геометрическими фигурами на плоскости E.* Отсюда ясно, что наши „точки“ и „прямые“ удовлетворяют всем аксиомам, а следовательно, и всем теоремам эвклидовой геометрии. Другими словами, наша „плоскость“ с ее „точками“, „прямыми“ и соотношениями между ними является действительно моделью эвклидовой геометрии, хотя наглядное содержание теорем эвклидовой геометрии на этой модели иное, чем обычно.

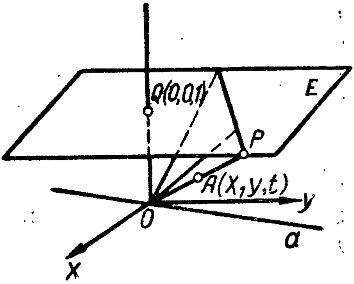
Вернемся к стереографической проекции. Она ставит в соответствие некоторую точку плоскости E каждой точке сферы Σ, за исключением точки N. Если бы мы захотели устранить это исключительное положение точки N, то нам пришлось бы пополнить плоскость одной новой, „идеальной“ или „бесконечно-удаленной“ точкой ∞, которую мы бы и поставили в соответствие точке N. Но при этом необходимо иметь в виду, что плоскость, пополненная одной бесконечно-удаленной точкой, в которой пересекаются все без исключения прямые, уже перестает удовлетворять совокупности сформулированных в предыдущих параграфах аксиом эвклидовой геометрии: на этой „плоскости“ (мы будем ее называть *„конформной“* плоскостью“) всякие две прямые пересекаются — или в одной, или в двух точках, существуют пары точек, через которые проходит бесконечно много различных

„прямых" (такой парой является всякая пара вида P, ∞, где P — какая-нибудь точка плоскости), „прямые" линии — замкнуты, поэтому на них не выполняются аксиомы порядка эвклидовой геометрии, и т. д. Очевидно, геометрия конформной плоскости есть попросту геометрия сферы, на которой отмечена определенная точка N, и все окружности, проходящие через эту точку, названы „прямыми". Этот условный язык во многих отделах математики оказывается целесообразным — например плоскость, которую имеют в виду во всей теории функций комплексного переменного, есть именно конформная, а не обычная эвклидова плоскость, и в этой теории было бы во многих случаях менее удобно и менее наглядно рассуждать о сфере, выделенной ее точке и проходящих через эту точку окружностях, чем просто говорить о плоскости, ее (единственной) бесконечно-удаленной точке и прямых линиях (которые в этом случае представляют себе как „окружности бесконечно-большого радиуса").

Однако, когда в геометрии (например, в аналитической геометрии) говорят о бесконечно-удаленных точках прямых и плоскостей, то имеют в виду в большинстве случаев отнюдь не конформную плоскость, а так называемую *проективную* плоскость, возникающую, если пополнить плоскость эвклидовой геометрии не одной, а бесконечным множеством бесконечно-удаленных точек. Как известно из аналитической геометрии[1], эти бесконечно-удаленные точки вводятся следующим образом: каждая прямая пополняется о д н о й бесконечно-удаленной точкой (и этим превращается в замкнутую линию); бесконечно-удаленные точки двух прямых объявляются тождественными в том и только в том случае, когда эти прямые параллельны (таким образом, совокупность всевозможных прямых, параллельных одной какой-нибудь прямой, мыслится теперь как пучок прямых, проходящих через одну и ту же бесконечно-удаленную точку). Множество всех бесконечно-удаленных точек (т. е. множество бесконечно-удаленных точек всех прямых плоскости) само объявляется прямой линией и называется *бесконечно-удаленной прямой* плоскости.

[1] См. сноску на стр. 33.

Посмотрим, каков наглядный смысл этого пополнения плоскости бесконечно-удаленными элементами. Для этого возьмем вновь обыкновенную эвклидову плоскость E и вне ее, на расстоянии, равном 1, точку $O=(0, 0, 0)$ (черт. 25). Рассмотрим совокупность Ω („связку") всех прямых трехмерного пространства, проходящих через точку O. Вся эта связка прямых распадается на „пучки" — под пучком прямых (принадлежащих связке, т. е. проходящих через точку O) понимаем множество всех прямых связки Ω, лежащих в одной какой-нибудь плоскости. Каждой прямой нашей связки соответствует вполне определенная точка плоскости E — именно, точка пересечения данной прямой с плоскостью E; *исключение составляют лишь те прямые связки, которые параллельны плоскости* E, — им ничто не соответствует. Для того чтобы устранить это исключение, мы условливаемся считать, что всякая прямая a связки Ω, параллельная плоскости E, также пересекает эту плоскость E и притом в единственной точке, а именно в общей бесконечно-удаленной точке всех тех, лежащих в плоскости E прямых, которые параллельны прямой a. Этим достигнуто взаимно-однозначное соответствие между всеми прямыми связки и всеми (включая бесконечно-удаленные) точками плоскости E. При этом пучкам, лежащим в нашей связке, соответствуют прямые плоскости E, в частности, пучку, состоящему из прямых связки, параллельных плоскости E, соответствует бесконечно-удаленная прямая плоскости E. Аналитическим, числовым аппаратом, отражающим взаимно-однозначное соответствие между точками (проективной) плоскости и прямыми связки, является аппарат *однородных координат*: за однородные координаты данной точки P плоскости E мы принимаем три декартовы координаты x, y, t любой точки $A=(x, y, t)$ прямой OP (черт. 25). Отсюда следует, что однородные координаты точки P не являются одно-



Черт. 25.

значно определенными (так как выбор точки A на прямой OP остается произвольным), но они определены с точностью до произвольного (отличного от нуля) множителя пропорциональности [так как для любых двух точек $A_1(x_1, y_1, t_1)$ и $A_2(x_2, y_2, t_2)$ прямой OP имеем $x_1:y_1:t_1 = x_2:y_2:t_2$]. Другими словами, однозначно определенными являются не сами числовые значения однородных координат данной точки P, а их *отношения*. Уравнение произвольной прямой, лежащей в проективной плоскости, принимает в однородных координатах вид

$$ax + by + ct = 0, \tag{1}$$

т. е. является однородным уравнением первой степени. В частности, уравнение бесконечно-удаленной прямой имеет вид $t=0$ [т. е. получается из общего уравнения прямой (1), если взять в нем коэффициенты $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$]. В самом деле, бесконечно удаленные точки плоскости E были введены нам как точки пересечения плоскости $t = 0$ с прямыми, лежащими в плоскости E; их однородные координаты будут поэтому вида x, y, 0, где x и y — произвольные числа, не равные одновременно нулю.

Проективную плоскость можно изучать с различных точек зрения, зависящих от того, какие фигуры и отношения между ними мы считаем основными: в обычной элементарной геометрии основными фигурами являются точки и прямые, а основными отношениями между ними — отношения принадлежности, порядка и конгруэнтности. Если мы сохраним точки и прямые (*проективной* плоскости) в качестве основных фигур, но будем интересоваться лишь отношениями принадлежности и порядка между ними, то получим *проективную* геометрию[1], причем необходимо заме-

[1] Если мы считаем данными те или иные соотношения между точками и прямыми из проективной плоскости, то это имеет тот смысл, что мы их „переносим“ из связки (где они имеют элементарно геометрический смысл) на проективную плоскость, т. е. поступаем так же, как мы поступили в более простом случае конформной плоскости и стереографической проекции. Вместо этого можно было бы стать на точку зрения аналитической геометрии и, отождествив точки проективной плоскости с отношениями $x:y:t$ (т. е. с классами пропорциональных между собой троек действительных чисел), а прямые — с множествами точек, удовлетворяющих уравнениям вида (1), определить арифметически все интересующие нас проективно-геометрические понятия.

тить, что отношения порядка теперь уже будут иными, чем в элементарной геометрии, что видно хотя бы из того, что прямая линия на проективной плоскости является замкнутой линией.

Во всяком отделе геометрии устанавливается, в каких случаях две фигуры — с точки зрения этой части геометрии — считаются *эквивалентными* (равносильными), т. е. имеющими в пределах данного отдела геометрии полностью совпадающие свойства; понятие равенства, или эквивалентности, вводимое данным отделом геометрии (иногда говорят — *данной геометрией*), в значительной степени характеризует данную геометрическую дисциплину. В элементарной геометрии две фигуры считаются, как известно, равными, если они конгруэнтны между собой, т. е. могут быть переведены одна в другую некоторым движением. При этом сами понятия конгруэнтности и движения могут быть либо введены аксиоматически (как мы делали в гл. II и III), либо же определены на числовой (координатной) плоскости аналитической геометрии как взаимно-однозначные отображения этой плоскости, сохраняющие (арифметически же определенные) расстояния между точками. Преимущество этого арифметического или координатного метода (т. е метода аналитической геометрии) заключается в возможности определить движения, непосредственно задавая формулы, позволяющие вычислить координаты преобразованной (данным движением) точки по координатам первоначальной:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + c_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

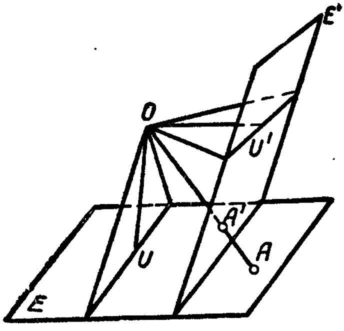
где коэффициенты a_{ik}, c_i, определяющие данное движение, суть любые действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Проективная геометрия не знает ни движений, ни конгруэнтности: место движений здесь заступают *проективные преобразования* (отображения) плоскости, или *коллинеации*. Под этим именем понимают взаимно-однозначные отображения проективной плоскости на себя, записывающиеся в однородных координатах так:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t, \\ t' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где определяющие данную коллинеацию девять коэффициентов a_{ik} суть совершенно произвольные действительные числа [единственное условие, которому они подчинены, заключается в том, что составленный из них определитель отличен от нуля, но это условие уже содержится в требовании, чтобы даваемое формулами (4) отображение было взаимно-однозначным]. Геометрически коллинеации могут быть определены как такие взаимно-однозначные отображения проективной плоскости на себя или на другую такую же плоскость, при которых каждая прямая переходит в прямую. Типичный пример проективного отображения получим, если спроектируем плоскость E на плоскость E' (черт. 26) из точки O (центр проекции); при этом отображении, в частности, бесконечно-удаленная прямая плоскости E перейдет в прямую u' плоскости E', а бесконечно-удаленная прямая плоскости E' — в прямую u плоскости E (так что гиперболы плоскости E перейдут в эллипсы плоскости E', пересекающие прямую u', а параболы плоскости E — в эллипсы, касающиеся прямой u'; наоборот, эллипсы плоскости E, пересекающие прямую u, отображаются на гиперболы плоскости E' и аналогично с параболами).



Черт. 26.

Две фигуры называются в проективной геометрии эквивалентными, если одна из них может быть переведена в другую некоторой коллинеацией, а сама проективная геометрия может быть определена как совокупность тех свойств фигур, расположенных в проективной плоскости, которые сохраняются при всех проективных отображениях (коллинеациях).

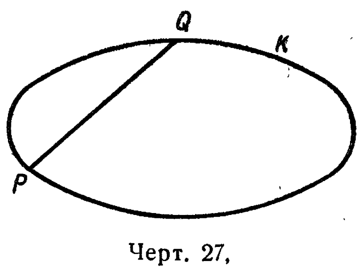
Проективные отображения проективной плоскости так же, как и конгруэнтные отображения обыкновенной плоскости, образуют, очевидно, группу (подгруппу в группе всех взаимно-однозначных отображений проективной плоскости на себя). В группе всех коллинеаций, в свою очередь, содержатся многие замечательные подгруппы, каждая из которых может быть положена в основу некоторого определения эквивалентности фигур и, следовательно, некоторой геометрии. Прежде всего естественно рассмотреть подгруппу, состоящую из всех коллинеаций, отображающих бесконечно-удаленную прямую на себя. Эти коллинеации называются *аффинными* отображениями. Аффинные отображения отображают на себя и обыкновенную числовую плоскость, рассматриваемую как часть проективной плоскости [т. е. множество всех точек проективной плоскости, для которых $t \neq 0$ и поэтому — так как существенны лишь отношения однородных координат — для которых можно положить $t = 1$ и заменить $(x, y, 1)$ просто через (x, y)]. *Аффинная* геометрия изучает совокупность всех свойств (обыкновенной числовой плоскости), сохраняющихся при аффинных отображениях. При самостоятельном построении афинной геометрии проще отправляться непосредственно от числовой плоскости (без всяких бесконечно-удаленных точек) и определять аффинные отображения формулами:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13},$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23},$$

где a_{ik} — любые действительные числа под условием $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Но для нас сейчас важно подчеркнуть, что мы можем рассматривать числовую (или, как иногда говорят, „аффинную") плоскость как часть проективной, а *аффинные* отображения — как происходящие от коллинеаций, отображающих эту часть проективной плоскости на себя. Если с проективной точки зрения все конические сечения — эквивалентны (см. выше), то с аффинной — эллипсы, гиперболы и параболы образуют три различные класса кривых, но все кривые внутри одного класса аффинно-эквивалентны между собой (в частности, все эллипсы эквивалентны любому из них, например окружности $x^2+y^2=1$).

Если итти по пути дальнейшей специализации, т. е. искать подгруппы группы всех аффинных отображений, то придется прежде всего говорить о группе всех отображений подобия; к ней мы вернемся в конце нашего изложения. Однако можно избрать и другой путь: можно взять какую-нибудь часть проективной плоскости — например внутренность некоторого конического сечения K — и рассматривать группу, состоящую из всех тех коллинеаций, которые отображают коническое сечение K на себя; такие коллинеации — назовем их „допустимыми" — отображают внутренность конического сечения K также на нее самое [а внешнюю область на внешнюю[1]]. Ограничивая область наших геометрических построений внутренностью кривой K, естественно называть „точками" лишь точки, лежащие внутри K, а „прямыми" — прямолинейные отрезки PQ (черт. 27), лежащие внутри K и упирающиеся обоими своими концами в эту кривую (сами точки P и Q, лежащие на K, мы, как всегда, к отрезку не причисляем, так что наши „прямые" оказываются в обе стороны неограниченными). Определивши таким образом „точки" и „прямые", назовем внутренность конического сечения K „плоскостью", а допустимые коллинеации, рассматриваемые лишь внутри K (т. е. как отображения нашей „плоскости" на „себя"), назовем „движениями плоскости". Получим некоторую своеобразную геометрию, в



Черт. 27.

[1] Если на проективной плоскости дано коническое сечение K, то все не лежащие на кривой K точки распадаются на два множества: *внутренние* точки, из которых нельзя провести к кривой K (действительную) касательную, и *внешние*, из которых такую касательную провести можно. При любом проективном отображении плоскости, переводящим кривую K в самое себя, внутренние точки переходят во внутренние, а внешние — во внешние (так как возможность провести касательную сохраняется).

которой — как в обычной эвклидовой геометрии — речь идет о „точках“ и „прямых“, в которой отношения „принадлежности“ и „между“ сохраняют свой обычный, наглядный смысл и в которой имеется своя группа „движений“ и вытекающая из ее существования „конгруэнтность“ (две фигуры называются „конгруэнтными“, если они могут быть переведены друг в друга некоторым „движением“).

Мы покажем в следующем параграфе, что *наша своеобразная „геометрия“, основные образы и соотношения которой имеют вполне определенный смысл внутри самой эвклидовой геометрии и поэтому не могут содержать никакого противоречия, есть не что иное, как геометрия Лобачевского, непротиворечивость которой таким образом и будет доказана!* Другими словами, мы покажем, что „геометрия“ нашей „плоскости“ представляет собой модель геометрии Лобачевского.

VI. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРВОЙ МОДЕЛИ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

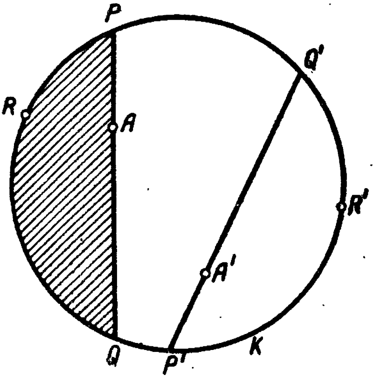
Для простоты предположим, что наше коническое сечение K есть окружность радиуса 1 на эвклидовой плоскости E, пополненной, как указано в предыдущем параграфе, бесконечно-удаленными точками до проективной плоскости (которую мы будем обозначать также через E). Попрежнему будем брать в кавычки все геометрические термины, касающиеся нашей модели, так что слова, не взятые в кавычки, будут относиться к эвклидовой (и проективной) геометрии, господствующей на самой плоскости E. Круг K будем называть „фундаментальным“.

Наша задача — доказать, что построенная выше „геометрия“ удовлетворяет всем аксиомам геометрии Лобачевского. Это очевидно в применении к аксиомам принадлежности и порядка.

Переходя к аксиомам конгруэнтности, заметим, что частными случаями „движений плоскости“ являются вращения круга K вокруг его центра (на любой угол), а также его симметрии относительно любого из его диаметров. Однако этими частными случаями далеко не исчерпывается многообразие всех „движений“.

В самом деле, можно доказать (пользуясь несложными теоремами проективной геометрии) следующую теорему:

Теорема. Пусть внутри фундаментального круга K даны две точки A и A', а на его окружности — две точки P и P' (черт. 28). Существуют, и притом лишь две, допустимые коллинеации, переводящие одновременно A в A' и P в P'. Чтобы из этих двух коллинеаций выбрать одну определенную, надо в каждой из пар дуг PQ и $P'Q'$ выбрать по определенной дуге и потребовать, чтобы выбранная нами дуга PQ перешла в выбранную дугу $P'Q'$.



Черт. 28.

Если, например, дуга PRQ переходит в дугу $P'RQ'$, то дуга $PR'Q$ перейдет в дугу $P'R'Q'$ и наоборот, так как окружность K взаимно-однозначно переходит в себя; поэтому имеем два возможных случая, а не четыре. С другой стороны, если дуга PRQ переходит, например, в дугу $P'R'Q'$, то весь круговой сегмент PRQ — на черт. 28 он заштрихован — перейдет в круговой сегмент $P'R'Q'$.

Из этой теоремы сразу следует, что определенные нами „движения плоскости“ удовлетворяют аксиоме 3'.3 гл. III; кроме того, они, очевидно, образуют подгруппу в группе всех взаимно-однозначных отображений „плоскости“ на себя; наконец, они, как легко видеть, удовлетворяют и аксиоме 3'.2. Отсюда, в силу рассуждений гл. III, следует, что наши „точки“ и „прямые“ удовлетворяют всем аксиомам конгруэнтности. Прежде чем доказывать, что построенная нами модель геометрии удовлетворяет аксиоме Эвдокса, нам необходимо сделать одно существенное замечание о конгруэнтности „отрезков“ на плоскости.

Из аналитической геометрии известно, что двойным или ангармоническим отношением четырех (данных в определенном порядке) точек P, Q, A, B, принадлежащих одной и той же прямой a, называется

$$(PQAB)=\frac{PA}{QA}:\frac{PB}{QB}.$$

(Отрезкам приписаны определенные знаки, согласованные с направлением прямой, выбранным в качестве положительного.)

Далее известно (и содержится в любом хорошем учебнике аналитической геометрии[1]), что двойное отношение обладает среди прочих свойств следующими:

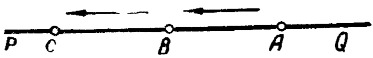
1. Если точки A, B расположены на прямой a между точками P и Q, то $(PQAB)$ всегда положительно, причем, если направление от A к B на прямой a совпадает с направлением от P к Q, то $(PQAB)<1$, в противном же случае >1.

2. $(PQAB)=(QPBA)$.

3. $(PQAB)=1:(QPAB)=1:(PQBA)$.

4. Если отрезки AB и BC—одинаково направленные отрезки прямой a (черт. 29), лежащие на отрезке PQ той же прямой, то

$$(PQAC)=(PQAB)\ (PQBC).$$



Черт. 29.

5. Если точки P, Q, A даны, а точка B пробегает весь отрезок PQ, то $(PQAB)$ принимает все положительные значения, каждое только один раз.

6. При коллинеациях двойное отношение не меняется, т. е. если при данной коллинеации точки P, Q, A, B, лежащие на некоторой прямой a, переходят в точки P', Q', A', B' (лежащие в этом случае непременно на некоторой прямой a'), то

$$(P'Q'A'B')=(PQAB).$$

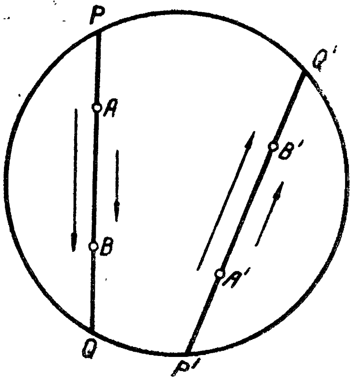
Отсюда следует: если „отрезки“ AB и $A'B'$ на „плоскости“ „конгруэнтны“ между собой (т. е. переходят друг в друга посредством некоторой допустимой коллинеации) и если P, Q, P', Q' суть точки пересечения с фундаментальной окружностью K соответственно прямых AB и $A'B'$, причем обозначения выбраны так,

---

[1] См. сноску на стр. 33.

что P, Q идут (на прямой PQ) в том же порядке, что и A, B, а $P'Q'$ идут (на прямой $P'Q'$) в том же порядке, что и A', B' (черт. 30), то

$$(PQAB) = (P'Q'A'B').$$



Черт. 30.

Обратно, из теоремы в начале этой главы (стр. 44) и из свойств 4 и 5 двойного отношения легко следует: если две пары „точек" A, B и A', B', расположенные соответственно на „прямых" a и a', таковы, что (обозначая через P, Q, P', Q' точки пересечения прямых a и a' с фундаментальной окружностью)

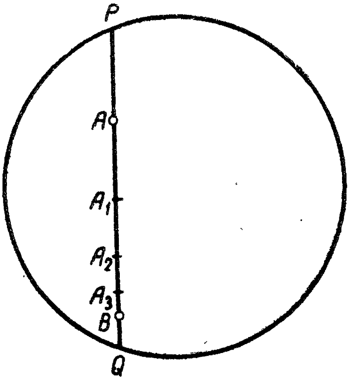
$$(PQAB) = (P'Q'A'B'),$$

то „отрезки" AB и $A'B'$ „конгруэнтны" между собой.

Итак, для того чтобы два „отрезка" AB и $A'B'$ на „плоскости" были „конгруэнтны" между собой, необходимо и достаточно, чтобы было

$$(PQAB) = (P'Q'A'B'),$$

где P, Q, P', Q' суть точки пересечения фундаментальной окружности с соответствующими прямыми, несущими эти отрезки (причем на соответствующих прямых точки P, Q идут в том же порядке, что и A, B, а точки P', Q' — в том же порядке, что и A', B').



Черт. 31.

Замечание. Если мы имеем ряд „конгруэнтных" между собой „отрезков" $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ (черт. 31), идущих один за другим на „прямой" a, то длины этих отрезков в смысле эвклидовой геометрии (на плоскости E) неограниченно убывают по мере приближения к фундаментальной окружности (на чертеже 31 — к точке Q). Другими словами, „прямая“ „плоскости“ не только неограниченна в обе стороны в смысле отсутствия на ней концевых „точек“, но и в том смысле, что любой ее отрезок можно на ней откладывать бесконечное число раз в обе стороны от произвольной ее точки.

Для того чтобы не оговаривать каждый раз порядок, в котором берутся точки P и Q, проще вместо числа $(PQAB)$ брать число $|\ln(PQAB)|$, не меняющееся в силу свойства 3 двойного отношения от перестановки точек P и Q или A и B. Число $|\ln(PQAB)|$ тем более естественно назвать „расстоянием“ между „точками“ A и B на „плоскости“, что из свойства 4 двойного отношения сразу следует

$$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$$

для любой „точки“ C, расположенной на „прямой“ $a \equiv AB$ между „точками“ A и B ($\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$ обозначают только что введенные „расстояния“). Мы можем теперь сказать: *в изучаемой нами „геометрии“* (так же, как и в геометрии Эвклида) *два отрезка AB и $A'B'$ конгруэнтны тогда и только тогда, когда „расстояние“ между „точками“ A и B равно „расстоянию“ между „точками“ A' и B'*[1].

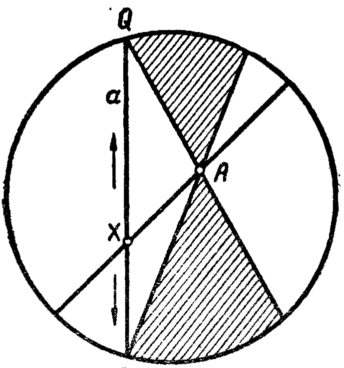
Теперь легко доказать, что на „плоскости“ выполнена аксиома Эвдокса: если на „прямой“ $a \equiv PQ$ даны: отрезок AB (см. черт. 31) и „конгруэнтные“ между собой отрезки AA_1, A_1A_2, ..., A_nA_{n+1}, ... (откладываемые все в направлении от A к B, совпадающем с на-

[1] Следующее замечание мы делаем вне главного текста лишь потому, что, при всей его важности, не хотим прерывать им основной линии наших рассуждений, ведущих к доказательству того, что на нашей модели выполнены все аксиомы абсолютной геометрии. Замечание. При только что изложенном введении „расстояний“ между любыми двумя „точками“ мы, в отличие от эвклидовой геометрии, обошлись без всякого выбора масштаба; если в эвклидовой геометрии, определение расстояния между точками возможно лишь после того как произвольным актом будет установлено, какому именно из классов конгруэнтных между собой отрезков мы приписываем длину 1, то на нашей „плоскости“ определенные „отрезки“, без всякого произвола с нашей стороны, получили длину 1. В изучаемой „геометрии“ существует, как говорят, „абсолютная единица длины“.

правлением от P к Q), то, обозначая через λ общую „длину" всех отрезков A_nA_{n+1}, т. е. положительное число $\lambda = |\ln(PQAA_1)| = |\ln(PQA_1A_2)| = \ldots = |\ln(PQA_nA_{n+1})| = \ldots$, имеем в силу свойства 4 двойного отношения:

$$(PQAA_n) = (PQAA_1)^n = e^{\lambda},$$

т. е. длина отрезка AA_n равна $n\lambda$. При достаточно большом n это число больше, чем любое заданное положительное μ, в частности, чем $\mu = |\ln(PQAB)|$, откуда следует, что при достаточно большом n отрезок AB лежит на отрезке AA_n, чем аксиома Эвдокса доказана. Так как аксиома Кантора в нашей системе выполнена очевидным образом, то мы можем сказать, что *„плоскость" удовлетворяет всем аксиомам абсолютной геометрии, т. е. всем аксиомам, кроме эвклидовой аксиомы параллельных.* Что же касается этой последней, то, как показывает черт. 32, она не выполнена, тогда как аксиома параллельных Лобачевского, наоборот, выполнена: на нашем чертеже „прямая" a и точка A вне ее выбраны произвольно; обе „прямые" AP и AQ, очевидно, параллельны „прямой" a, как параллельны и все „прямые", проходящие через „точку" A и лежащие в заштрихованной паре вертикальных углов — ни одна из этих „прямых" не пересекается с „прямой" a.



Черт. 32.

Наше исследование закончено. На материале эвклидовой геометрии, т. е. называя определенные точки эвклидовой плоскости „точками", а определенные отрезки эвклидовых прямых „прямыми" „плоскости" и определяя надлежащим образом все основные понятия геометрии для этих „точек" и „прямых", мы получили *полную „модель" геометрии Лобачевского*, т. е. получили систему понятий и отношений, изоморфную системе аксиом геометрии Лобачевского. Каждое из этих отношений выражает определенное, верное в смысле эвклидовой геометрии, отношение между определенными фигурами эвклидовой же геометрии. *Этим непротиворечивость геометрии Лобачевского доказана вполне.* Нашу „плоскость“ мы отныне будем называть *первой моделью геометрии Лобачевского.*

Замечание. Все „прямые“, параллельные „прямой“ a и проходящие через „точку“ A (черт. 32), естественно распадаются на два типа: к первому типу принадлежат две (так называемые „гранично-параллельные“ или „асимптотические“) „прямые“ AP и AQ, ко второму — все остальные „прямые“, параллельные „прямой“ (т. е. прямые, лежащие в заштрихованной паре вертикальных углов, образованных двумя гранично-параллельными прямыми). Гранично-параллельные прямые и являются теми двумя предельными прямыми, к которым стремится „прямая“ AX, пересекающая „прямую“ a при вращении вокруг точки A в ту и другую сторону (или, что то же самое, при уходе ее „точки“ пересечения X с „прямой“ a в „бесконечность“ — вверх или вниз) (черт. 32). Отличие геометрии Лобачевского от геометрии Эвклида в том и заключается, что в геометрии Лобачевского таких предельных прямых имеется две, тогда как в геометрии Эвклида получаем только одну предельную прямую (параллель AB к прямой a) независимо от того, уходит ли точка X в бесконечность направо или налево. Совершенно естественно, что утверждение единственности предельного положения секущей AX при уходе в бесконечность точки пересечения X, при достаточном размышлении над ним, перестало казаться очевидным и что возникла потребность доказать это утверждение — потребность, и приведшая, в конце концов, сначала к уверенности в недоказуемости его, а затем и к фактическому обнаружению факта этой недоказуемости, т. е. к полному обоснованию неэвклидовой геометрии. Отметим, что Лобачевский называл „прямыми, параллельными данной прямой a“ именно только гранично-параллельные и мог, таким образом, утверждать, что к данной „прямой“ через данную не принадлежащую ей „точку“ можно провести в данной „плоскости“ две и только две параллельные „прямые"[1]. Остальные „прямые", не пересекающие данную „прямую", Лобачевский называл „прямыми, расходящимися с данной": их называют также „сверхпараллельными прямыми". „Сверхпараллельные прямые" (т. е. „прямые", не только не пересекающие данную „прямую", но и не являющиеся предельными „прямыми" для „прямых", пересекающих данную) вполне характеризуются, между прочим, следующим предложением, которое в рамках этой книги должно быть оставлено без доказательства:

Для того, чтобы „прямая" b была сверхпараллельна „прямой" a, необходимо и достаточно, чтобы „прямые" a и b были перпендикулярами к одной и той же „прямой" c.

Заметим, наконец, что угол между обеими гранично-параллельными „прямыми" AP и AQ к одной и той же „прямой" a называется *углом параллельности*[2] (в точке A относительно „прямой" a). При этом, однако, необходимо иметь в виду, что углы между „прямыми" на плоскости Лобачевского, вообще говоря, не равны углам между соответствующими прямыми исходной эвклидовой плоскости E: ведь для того, чтобы измерить угол (т. е. выразить его, например, через доли прямого угла), нужно проделать сложный путь, основанный на понятии конгруэнтности углов и на аксиоме Эвдокса и Кантора (справедливость которой для углов представляет собой теорему абсолютной, т. е. независимой от аксиомы параллельных геометрии). Этот путь заключается в повторении для углов рассуждений, аналогичных тем, на которых основывалось измерение отрезков; за единицу измерения при этом был бы взят прямой угол. Однако, так как конгруэнтность на „плоскости" Лобачевского (на нашей модели) иная, чем на эвклидовой плоскости E, то и результаты получатся другие; углы, конгруэнтные между собой в эвклидовом смысле, не будут конгруэнтны на плоскости Лобачевского, и числовые выражения одного и того же угла на обеих плоско-

---

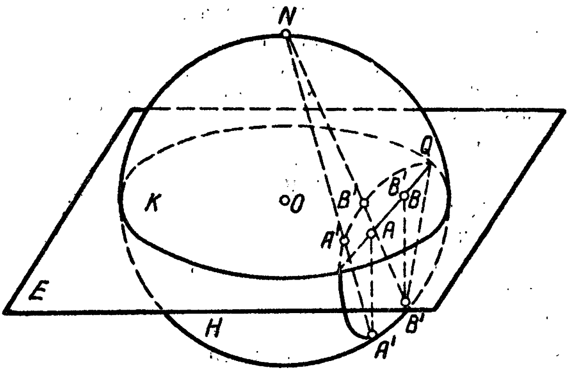
[1] Эта терминология является при изложении неэвклидовой геометрии общепринятой и в настоящее время.

[2] Обычно берется половина этого угла.

стях будут иные. То, что мы пока успели сказать о плоскости Лобачевского, недостаточно, чтобы составить себе хоть какое-нибудь наглядное представление о том, как фактически измерить данный угол на плоскости Лобачевского. Этому вопросу посвящена следующая глава.

VII. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО. ВТОРАЯ МОДЕЛЬ (ПУАНКАРЕ) ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО. СУММА УГЛОВ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Чтобы лучше уяснить себе дальнейшее, сравним задачу построения модели плоскости Лобачевского с задачей построения географических карт. Первая модель дает „карту" плоскости Лобачевского, на которой прямые Лобачевского представлены отрезками прямых и углы Лобачевского — углами между этими отрезками. При этом конгруэнтные в смысле геометрии Лобачевского отрезки и углы изображаются неконгруэнтными в смысле геометрии Эвклида отрезками и углами. Иными словами, на нашей „карте" искажаются и длины, и углы. Можно, однако, строить и другие „карты" — другие модели плоскости Лобачевского. Одна из простейших моделей принадлежит Пуанкаре. Ее преимущество перед рассмотренной — то, что здесь углы не искажаются, точнее говоря, конгруэнтные в смысле геометрии Лобачевского углы изображаются на ней углами, равными в эвклидовом смысле. Однако, она уступает первой модели в том, что „прямые" Лобачевского изображаются на ней не отрезками прямых, а кривыми, именно дугами окружностей. Чтобы построить новую модель, возьмем снова нашу основную эвклидову плоскость E и в ней фундаментальный круг K с центром в точке O и радиусом 1. Возьмем сферу Σ радиуса 1 с центром в той же точке O (черт. 33). Каждой точке A круга K (берем и внутренность, и окружность этого круга) ставим в соответствие ту точку A' „южного" (нижнего) полушария этой сферы, в которой с этим полушарием пересекается перпендикуляр, восставленный к плоскости E в точке A; этим путем получаем взаимно-однозначное отображение круга K на южное полушарие H сферы Σ (ортогональная проекция полушария H на круг K). При этом отображении окружность K, являющаяся экватором сферы Σ, остается на месте (т. е. каждая ее точка обращается в себя самое); далее, каждая хорда круга K (т. е. каждая „прямая" „плоскости" Лобачевского, соответствующей фундаментальному кругу K) переходит в полуокружность, лежащую в южном полушарии H и ортогональную к экватору. Обратно, всякая полуокружность, лежащая в южном полушарии и ортогональная к экватору, лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости экватора, т. е. к плоскости E, и потому проектируется в прямолинейный отрезок — в „прямую" „плоскости" Лобачевского. Итак, при *ортогональной проекции „прямые" первой модели плоскости Лобачевского взаимно-однозначно соответствуют полуокружностям (южного полушария), ортогональным к экватору.*



Черт. 33.

Произведем стереографическую проекцию сферы Σ на плоскость E (черт. 33). Она оставляет неподвижной окружность K (т. е. экватор сферы) и отображает южное полушарие сферы во внутренность круга K. Ортогональная проекция на сферу Σ производит взаимно-однозначное отображение круга K на южное полушарие сферы H, а стереографическая проекция — взаимно-однозначно отображает южное полушарие сферы на круг K; в результате этих последовательно осуществляемых отображений мы получаем взаимно-однозначное отображение круга K на себя, которое будем называть „комбинированным отображением".

При комбинированном отображении каждому отрезку PAQ прямой в круге K будет соответствовать заключенная внутри K дуга окружности $PA''Q$, ортогональной к окружности K (черт. 33). В самом деле отрезку PAQ соответствует на сфере дуга окружности $PA'Q$, ортогональная к экватору и заключенная в южном полушарии; при стереографической проекции дуга эта перейдет в дугу окружности $PA''Q$, лежащую внутри K. В силу сохранения углов при стереографической проекции[1] углы между этой дугой и окружностью K — образом экватора — будут прямыми. *Будем рассматривать теперь внутренность K как вторую модель плоскости Лобачевского — модель Пуанкаре, присваивая каждой фигуре наименование того образа геометрии Лобачевского, представленного на первой модели, из которого получается данная фигура в результате комбинированного отображения.* В частности, „прямыми" на второй модели мы будем называть дуги окружностей, ортогональные окружности K и заключенные внутри K. Чтобы определить „движение" „плоскости" Лобачевского для второй модели, мы должны взять произвольное „движение" для первой модели и рассмотреть соответствующее ему, посредством комбинированного отображения, преобразование K в K. Так как при первом отрезки прямых переходят в отрезки прямых, то при последнем дуги окружностей, ортогональных к окружности K, переходят также в дуги окружностей, ортогональных к K. Можно показать, на чем мы здесь не останавливаемся, что *полученные нами преобразования будут наиболее общими преобразованиями круга в самого себя, при которых сохраняются величины углов, т. е. две линии, пересекающиеся под данным углом, переходят в две линии, пересекающиеся под тем же углом*[2]. Отображения, обладающие по-

[1] См. например, А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950, стр. 54 — 55.

[2] Если на плоскости ввести комплексную координату $z = x + iy$, то окружность круга K получает уравнение $|z| = 1$. Интересующие нас отображения записываются тогда в виде

следним свойством, называются *конформными*. Итак, „движения" „плоскости" Лобачевского для второй модели представляются конформными отображениями круга K самого на себя. Поэтому во второй модели действительно конгруэнтные в смысле геометрии Лобачевского углы изображаются равными в смысле геометрии Эвклида углами (между дугами окружностей). Поэтому и за меру угла на новой модели плоскости Лобачевского можно принять обычную, эвклидову, меру угла между теми дугами окружностей, которые являются сторонами данного угла. Заметим, наконец, что „прямые" модели Пуанкаре, проходящие через точку O, суть обыкновенные (эвклидовы) диаметры круга K.

Что касается измерения отрезков на модели Пуанкаре, то так как „движения" на модели Пуанкаре получаются из „движений" первой модели посредством комбинированного отображения, можно за длинну данного отрезка на модели Пуанкаре принять длину соответствующего отрезка первой модели. Если на модели Пуанкаре дан отрезок $A''B''$ (черт. 33), которому соответствует на первой модели отрезок AB, то за длину $A''B''$ принимаем длину отрезка AB, т. е.

$$\left|\ln\left(\frac{AP}{AQ}:\frac{BP}{BQ}\right)\right|.$$

(Заметим, что вместо этого можно было бы взять и

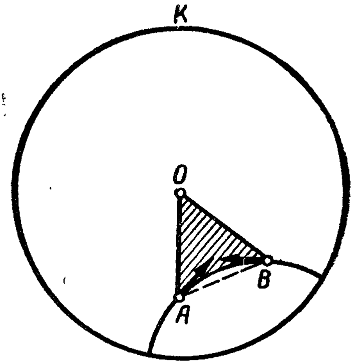
$$\left|\ln\left(\frac{\overset{\frown}{A''P}}{\overset{\frown}{A''Q}}:\frac{\overset{\frown}{B''P}}{\overset{\frown}{B''Q}}\right)\right|,$$

где $\overset{\frown}{A''P}$, $\overset{\frown}{A''Q}$, $\overset{\frown}{B''P}$, $\overset{\frown}{B''Q}$ обозначают дуги окружности $A'P'B''Q$.)

Точно так же *за меру углов на первой модели можно принять меру* соответствующих углов на модели Пуанкаре.

$z'=\dfrac{az+b}{cz+d}$, где комплексные коэффициенты a, b, c, d удовлетворяют условию $ad-bc\neq 0$ и еще дополнительным условиям, выражающим, что круг $|z|=1$ отображается на себя. Таким образом, движения плоскости Лобачевского могут быть рассматриваемы как дробно-линейные преобразования круга $|z|=1$ на себя (см. об этом только что цитированную книгу А. И. Маркушевича, стр. 111—118).

Приложим вышеизложенные соображения к нахождению суммы углов в треугольнике. Пусть на „плоскости“ Лобачевского (модель Пуанкаре) дан какой-нибудь „треугольник“ ABC; в силу аксиомы $3'.3$ существует „движение“, переводящее одну из вершин нашего треугольника в „точку“ O (в центр круга K), так что с самого начала можно предположить, что речь идет о треугольнике AOB, одной из вершин которого является точка O. В силу сделанного выше замечания о „прямых“, проходящих на модели Пуанкаре через точку O, стороны AO и OB нашего треугольника будут прямолинейными отрезками в смысле эвклидовой геометрии, а сторона AB будет дугой окружности, ортогональной к окружности K. Другими словами, треугольник будет иметь вид, указанный на черт. 34. Проводя на этом чертеже еще эвклидову хорду AB и видя, что угол между OA и дугой AB меньше, чем угол между OA и хордой AB (то же и для OB, AB), заключаем, что сумма углов криволинейного (с эвклидовой точки зрения) треугольника AOB меньше суммы углов одноименного эвклидова прямолинейного треугольника, т. е. меньше $2d$. Но углы в криволинейном треугольнике AOB—одни и те же, рассматриваем ли мы их в геометрии Эвклида или Лобачевского, откуда и следует, что *в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше* $2d$.



Черт. 34.

VIII. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Мы уже упоминали о группе преобразований подобия эвклидовой плоскости как об одной из важнейших подгрупп аффинных отображений. Преобразования подобия характеризуются среди всех аффинных тем, что они сохраняют углы и преобразуют длины всех отрезков в одном и том же отношении. Отсюда следует, что при отображении подобия всякая окружность переходит в окружность. Легко доказать и обратное предложение: аффинное отображение, переводящее всякую окружность в окружность, есть преобразование подобия.

Мы ставим себе в этом параграфе задачей охарактеризовать преобразования подобия как коллинеации, оставляющие инвариантными (т. е. переводящие в себя) некоторые фигуры проективной плоскости: мы видели, что аффинные отображения — это коллинеации, отображающие на себя бесконечно-удаленную прямую; мы попытаемся показать, что преобразования подобия выделяются среди всех коллинеаций тем, что они не только отображают на себя бесконечно-удаленную прямую (этого еще мало, так как этим свойством обладают все аффинные отображения!), но что при отображении бесконечно-удаленной прямой на себя, осуществляемом данным преобразованием подобия, некоторая пара точек на бесконечно-удаленной прямой переходит в себя. Однако это утверждение становится верным лишь после того, как мы расширим запас точек проективной плоскости (в частности, и лежащей на ней бесконечно-удаленной прямой) введением так называемых мнимых точек. Арифметическая точка зрения, лежащая в основе аналитической геометрии, позволяет сделать это без малейшего затруднения: ведь в аналитической проективной геометрии точка проективной плоскости есть просто класс пропорциональных между собой троек чисел $(x:y:t)$, подчиненных единственному условию, что тройка $(0:0:0)$ не допускается к рассмотрению. До сих пор мы предполагали, что все рассматриваемые нами числа — вещественны, теперь мы отказываемся от этого дополнительного требования и допускаем тройки любых комплексных чисел [только тройка $(0:0:0)$ попрежнему остается запрещенной]. Если среди пропорциональных между собой троек $(x:y:t)$, определяющих данную точку P проективной плоскости, имеются тройки, состоящие из одних действительных чисел, то мы точку P называем действительной точкой; в противном случае мы называем ее мнимой точкой проективной плоскости. Происшедшее пополнение проективной плоскости мнимыми точками (превращение ее в так называемую комплексную проективную плоскость) не влияет на определения остальных геометрических понятий: в частности, мы попрежнему называем прямой множество всех точек (теперь уже комплексной проективной плоскости), удовлетворяющих уравнению вида

$$ax + by + ct = 0,$$

причем прямая называется *действительной,* если она изображается уравнением, коэффициенты которого a, b, c—действительные числа. Действительной прямой является, в частности, бесконечно-удаленная прямая $t = 0$. В числе ее мнимых точек отметим особо пару так называемых циклических (или круговых) точек, а именно точки $(1 : \pm i : 0)$.

Заметим, что в этой книге самостоятельный интерес для нас представляют лишь действительные точки и действительные прямые плоскости; введение „мнимых элементов", т. е. мнимых „точек" и „прямых", преследует в нашем изложенни лишь вспомогательные цели. Руководствуясь этим, мы, в частности, будем рассматривать лишь действительные окружности и вообще действительные конические сечения, т. е. предполагать, что в уравнениях соответствующих линий все коэффициенты действительные.

Уравнение всякой окружности записывается, как известно из аналитической геометрии, в виде

$$x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

или в однородных координатах, в виде

$$x^2 + y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0. \qquad (1)$$

Подставляя сюда координаты циклических точек

$$x = 1, \ y = \pm i, \ t = 0,$$

непосредственно убеждаемся, что они удовлетворяют уравнению (1).

Так как более двух точек пересечения с прямой окружность иметь не может, то *любая окружность пересекается с бесконечно-удаленной прямой в циклических точках* и только в них. При отображении подобия окружность переходит в окружность, а бесконечно-удаленная прямая в себя самое, поэтому всякое преобразование подобия отображает на себя множество, состоящее из двух циклических точек (другими словами, при отображении подобия либо каждая из двух циклических точек остается на месте, либо одна из них переходит в другую).

Легко убедиться, что всякое коническое сечение, проходящее через циклические точки, есть окружность. Пусть уравнение данного конического сечения есть (в однородных координатах)

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xt+a_{22}y^2+2a_{23}yt+a_{33}t^2=0. \qquad (2)$$

Если оно проходит через циклические точки, то, подставляя в него координаты $x=1$, $y=\pm i$, $t=0$ циклических точек, получим тождество

$$a_{11}\pm 2a_{12}i-a_{22}=0. \qquad (3)$$

Так как a_{11}, a_{12}, a_{22} — действительные числа, то из тождества (3) следует:

$$a_{12}=0, \quad a_{11}-a_{22}=0,$$

т. е. уравнение (2) имеет вид

$$ax^2+ay^2+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2=0$$

и представляет собой уравнение окружности.

Итак, окружности среди всех действительных конических сечений характеризуются тем, что они и только они одни пересекаются с бесконечно-удаленной прямой в циклических точках. (Мы видим на этом примере, как привлечение мнимых элементов приводит к изящным и интересным характеристикам даже простейших геометрических образов—окружностей.)

Мы доказали, что преобразования подобия отображают циклические точки снова в циклические точки. С другой стороны, аффинное преобразование, обладающее этим свойством, переводит всякое коническое сечение, проходящее через обе циклические точки, снова в коническое сечение, проходящее через обе циклические точки, т. е. по только что доказанному, переводит окружность в окружность. Это значит, что данное аффинное преобразование есть преобразование подобия. Итак, *преобразования подобия могут быть охарактеризованы как коллинеации, отображающие на себя бесконечно-удаленную прямую и при* *этом переводящие в себя и пару циклических точек.*

Совершенно аналогичным образом можно охарактеризовать преобразования подобия трехмерного пространства: преобразования подобия трехмерного пространства суть не что иное, как коллинеации, отображающие на себя бесконечно-удаленную плоскость $t=0$ и на ней так называемое абсолютное коническое сечение:

$$x^2+y^2+z^2=0. \quad t=0,$$

По этому коническому сечению пересекаются с бесконечно-удаленной плоскостью все сферы трехмерного пространства (аналогия между абсолютным коническим сечением трехмерного пространства и парой циклических точек плоскости видна и на уравнениях обоих образов: достаточно заметить, что пара циклических точек может быть задана уравнениями $x^2+y^2=0, \quad t=0$).

Все эти соображения мы приложим сейчас к построению некоторой весьма замечательной „геометрии", а именно, так называемой эллиптической геометрии (на плоскости), которая является, как мы увидим ниже, тоже неэвклидовой геометрией, но отличной от геометрии Лобачевского и в некотором роде двойственной ей.

Вернемся к связке прямых Ω. Прямые этой связки будем называть „точками", а содержащиеся в этой связке пучки—„прямыми". Самую связку назовем моделью эллиптической плоскости. За расстояние между двумя „точками" примем угол (измеряемый от 0 до π), который образует между собой соответствующие прямые связки. За „угол" между двумя „прямыми" примем двугранный угол между плоскостями, несущими соответствующие пучки. Рассмотрим теперь преобразования подобия трехмерного пространства, оставляющие на месте центр O связки Ω. Каждое такое преобразование порождает взаимно-однозначное отображение всей нашей связки на себя, переводящее каждый пучок прямых связки снова в пучок прямых и сохраняющее при этом углы как между прямыми связки, так и между плоскостями, несущими ее пучки. Другими словами, каждое преобразование подобия трехмерного пространства на себя (с центром подобия O) производит отображение нашей „модели эллиптической плоскости", сохраняющее как расстояние, так и углы. Такие взаимно-однозначные отображения этой модели на себя мы, естественно, называем „конгруэнтными преобразованиями" или „движениями". С другой стороны, всякое преобразование подобия трехмерного пространства на себя порождает и взаимно-однозначное отображение бесконечно-удаленной плоскости $t=0$. Это отображение (как порожденное коллинеацией) само является коллинеацией, и притом отображающей на себя абсолютное коническое сечение $x^2+y^2+z^2=0$, $t=0$. Проекцией из точки O устанавливается взаимно-однозначное соответствие между нашими „точками" и „прямыми" и точками и прямыми бесконечно-удаленной плоскости, причем „конгруэнтные отображения" нашей модели переходят в коллинеации бесконечно-удаленной плоскости, переводящие в себя коническое сечение $x^2+y^2+z^2=0$. Так как бесконечно-удаленная плоскость трехмерного пространства есть самая обыкновенная проективная плоскость, то мы приходим к следующей так называемой эллиптической геометрии: *плоскость эллиптической геометрии есть проективная плоскость, с ее точками и прямыми и господствующими между ними отношениями принадлежности и порядка, составляющими предмет изучения проективной геометрии.* На этой плоскости (рассматриваемой аналитически — в однородных координатах, которые нам теперь удобно обозначать не через x, y, t, а через x, y, z) берем коническое сечение

$$x^2+y^2+z^2=0, \tag{4}$$

все точки которого — мнимые, и рассматриваем все коллинеации, отображающие это коническое сечение на себя [т. е. аналитически все линейные преобразования вида

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z, \end{aligned} \qquad \left(\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \right),$$

ставящие в соответствие всякой (мнимой) точке $(x:y:z)$, удовлетворяющей уравнению (4), точку $(x':y':z')$, удовлетворяющую тому же уравнению]. Эти коллинеации, рассматриваемые, согласно высказанной нами в начале этого параграфа точке зрения, лишь на множестве действительных точек проективной плоскости, называются *„движениями“* (или, подробнее, „эллиптическими“ движениями). Две фигуры на проективной плоскости называются „конгруэнтными“, если они переходят друг в друга посредством некоторого „эллиптического“ движения. Проективная плоскость, рассматриваемая вместе с определенной на ней группой эллиптических движений [или, что то же самое, вместе с вытекающим из нее отношением конгруэнтности (равенства) фигур], называется *„эллиптической плоскостью“;* совокупность свойств эллиптической плоскости (т. е. совокупность свойств проективной плоскости и расположенных на ней фигур, которые сохраняются при переходе от одной фигуры к конгруэнтной ей в смысле эллиптических движений) называется *эллиптической* или *римановой (неэвклидовой) геометрией.*

Как уже сказано, свойства принадлежности и порядка в эллиптической геометрии — те же, что и в проективной, и потому отличаются от соответствующих свойств фигур эвклидовой геометрии и геометрии Лобачевского. Свойства эллиптической конгруэнтности фигур также не те, которые мы имели в геометрии Эвклида и Лобачевского. Наконец, так как на проективной плоскости всякие две прямые пересекаются, то *параллельных прямых в эллиптической геометрии нет вовсе.* Можно было бы составить систему аксиом эллиптической геометрии совершенно по тому же образцу, как приведенные выше системы аксиом геометрии Эвклида или Лобачевского; аксиома параллельных была бы в этой системе заменена аксиомой, утверждающей, что всякие две прямые пересекаются. Таким образом, если в геометрии Эвклида к данной прямой через данную точку можно провести только одну параллельную, а в геометрии Лобачевского—две, то в *геометрии Римана нельзя провести ни одной параллельной.* В этом смысле геометрия Римана как бы двойственна геометрии Лобачевского (двойственна в том смысле, в каком случай двух различных мнимых корней квадратного уравнения — „эллиптический“ случай — двойственен случаю двух неравных действительных корней — „гиперболическому“ случаю). В соответствии с этим и геометрия Лобачевского называется также *„гиперболической“* геометрией. Однако, оставаясь на почве синтетической аксиоматики геометрии, говорить о двойственности между геометрией Лобачевского и Римана, конечно, нельзя по той причине, что эти геометрии отличаются друг от друга не только аксиомой параллельных, но и аксиомами всех остальных групп; если требовать выполнения всех предложений „абсолютной“ геометрии, то возможна лишь одна неэвклидова геометрия, именно геометрия Лобачевского. Поэтому Лобачевский был вполне прав, полагая, что им построена „полная теория параллельных“. В предположении истинности „остальных аксиом“ Эвклида, т. е. того, что мы в начале этой книги назвали „абсолютной геометрией“, никакой третьей теории параллельных, кроме теории Эвклида и теории Лобачевского, и не может быть. Но если стать на алгебраическую точку зрения, лежащую в основе проективно-аналитической геометрии, то двойственность геометрии Лобачевского и Римана и промежуточное положение между ними геометрии Эвклида приобретают совершенно точное и притом алгебраическое содержание. В самом деле, в основе каждой из этих геометрий лежит некоторое фундаментальное коническое сечение: в случае эллиптической геометрии — содержащее лишь мнимые точки, но не вырождающееся (соответствующая квадратичная форма имеет наивысший ранг), в случае гиперболической геометрии — с действительными точками и тоже не вырождающееся. Так как в случае эллиптической геометрии фундаментальное коническое сечение не содержит действительных точек, то за множество всех точек эллиптической геометрии мы могли взять множество всех точек проективной плоскости. В гиперболической геометрии фундаментальное коническое сечение имеет действительные точки и поэтому разбивает (действительную) проективную плоскость на две области. Для того чтобы не нарушить связности плоскости (т. е. для того, чтобы она не была составлена из двух не связанных между собой кусков), мы взяли за множество всех точек гиперболической плоскости одну из двух областей, а именно внутреннюю область к фундаментальному коническому сечению (взять внешнюю нельзя было бы, не вступая в конфликт с элементарными топологическими свойствами плоскости, а также с аксиомами порядка и конгруэнтности)[1]. В обеих геометриях—эллиптической и гиперболической — свойства принадлежности и порядка являются следствиями соответствующих свойств проективной плоскости и того, как мы определили множество всех точек и всех прямых данной геометрии.

Группа „движений" в обеих геометриях определяется как группа коллинеаций, отображающих на себя фундаментальное коническое сечение данной геометрии. Наконец, в случае эвклидовой геометрии фундаментальное коническое сечение вырождается (в точном алгебраическом смысле вырождения соответствующей квадратичной формы) в пару циклических точек, в соответствии с чем совокупность коллинеаций, оставляющих инвариантным это выродившееся в пару точек коническое сечение, оказывается более обширной, а именно охватывает не одни только движения, но и все преобразования подобия эвклидовой плоскости (преобразований подобия, не являющихся конгруэнтными, не знает ни одна из двух неэвклидовых геометрий!).

Все три геометрии непротиворечивы, все три имеют реальный геометрический смысл в пределах самой эвклидовой геометрии, и, если этот реальный геометрический смысл в случае геометрии Лобачевского довольно сложен (он дается любой из рассмотренных в гл. V—VII двух моделей этой геометрии), то „реальный" с эвклидовой точки зрения смысл эллиптической геометрии чрезвычайно прост: эллиптическая геометрия есть геометрия *связки прямых в эвклидовом трехмерном пространстве с естественными основными элементами* (элемент связки —прямая—соответствует точке плоскости, а пучок прямых связки соответствует прямой плоскости) и *естественными*

---

[1] Дело в том, что внутренняя область к любому данному коническому сечению на проективной плоскости, очевидно, гомеоморфна внутренности круга (т. е. всей эвклидовой плоскости), тогда как внешняя область гомеоморфна так называемому листу Мебиуса.

(с точки зрения эвклидовой геометрии) *отношениями принадлежности, порядка и конгруэнтности между ними.*

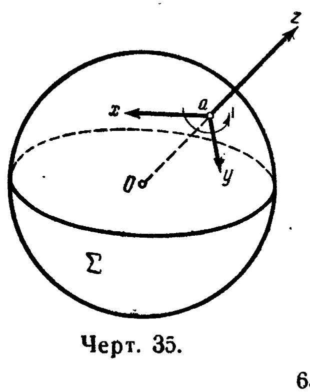
Геометрия связки (т. е. эллиптическая геометрия Римана) находится в простом взаимоотношении с обыкновенной геометрией сферической поверхности, если взять сферу Σ с центром в центре O связки Ω; то пары диаметрально-противоположных точек этой сферы находятся во взаимно-однозначном соответствии с прямыми связки (каждая прямая связки пересекает сферу в диаметрально-противоположных точках; этим соответствие и устанавливается). Таким образом, *можно получить эллиптическую геометрию из сферической* (т. е. из геометрии эвклидовой сферы, в которой основными элементами являются точки и окружности больших кругов с обычными, элементарными отношениями между ними), *если считать каждую пару диаметрально-противоположных точек сферы за одну „точку" эллиптической плоскости, а множество всех пар диаметрально-противоположных точек какого-либо большого круга за „прямую" эллиптической плоскости.* Этим отображением сферы на эллиптическую плоскость все основные отношения сферической геометрии (принадлежность, порядок, конгруэнтность) переводятся в соответствующие отношения эллиптической геометрии. Если мы теперь возьмем какую-либо область на сфере, не содержащую никакой пары диаметрально-противоположных точек, например какое-нибудь полушарие сферы (без ограничивающей это полушарие окружности), то отображение на эллиптическую плоскость будет взаимно-однозначным (при этом образом полушария будет „взрезанная эллиптическая плоскость", т. е. вся эллиптическая плоскость за исключением точек той прямой, которая соответствует ограничивающей данное полушарие окружности большого круга). Отсюда следует, что геометрия, как говорят, „ограниченной области" на эллиптической плоскости тождественна (точнее изоморфна) геометрии соответствующей части сферы (в случае взрезанной эллиптической плоскости — полушария) Отсюда, в частности, следует, что *сумма углов треугольника в эллиптической геометрии всегда больше двух прямых.*

IX. ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ. ПСЕВДОСФЕРА

Возникает вопрос, нельзя ли геометрию Лобачевского, рассматриваемую также лишь в некоторой части всей плоскости Лобачевского, реализовать на какой-либо кривой поверхности в том смысле, что точкам данного участка плоскости Лобачевского соответствуют точки этой кривой поверхности, а прямым — *геодезические линии* (т. е. кратчайшие пути) на этой поверхности (ведь на сфере дуги больших кругов и являются геодезическими).

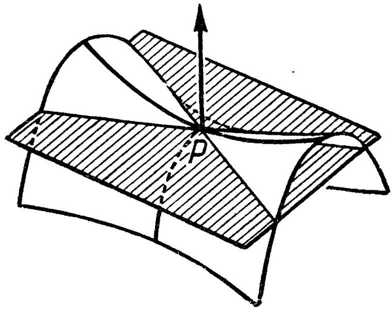
Прежде чем ответить на этот вопрос, мы должны хоть вкратце коснуться основных идей так называемой внутренней дифференциальной геометрии поверхностей и прежде всего напомнить понятие гауссовой кривизны поверхности.

Возьмем в трехмерном пространстве R^3 двумерную сферу (шаровую поверхность) Σ, центр которой обозначим через O. Зададим на сфере Σ определенную ориентацию (т. е. одинаковое направление обхода для всех лежащих на ней замкнутых линий, например, направление против часовой стрелки, предполагая часы положенными на сферу так, чтобы они циферблатом были обращены кнаружи). За положительное направление на радиусах сферы примем направление от центра. Этим задана некоторая ориентация всего трехмерного пространства R^3: „положительную“ координатную систему в R^3 можем получить, взяв в какой-нибудь точке a сферы Σ два взаимно перпендикулярных касательных вектора $\overline{ax}$ и $\overline{ay}$ так, чтобы переход от $\overline{ax}$ к $\overline{ay}$ осуществлялся поворотом против часовой стрелки на прямой угол, и присоединив к ним третий вектор $\overline{az}$, идущий по лучу Oa в положительном направлении (т. е. от точки a во внешнюю область сферы) (черт. 35).

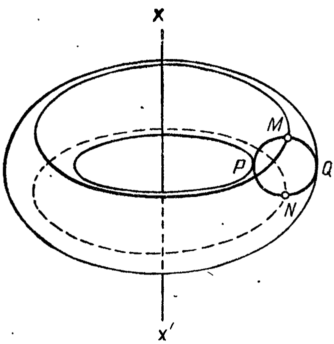


Черт. 35.

Пусть теперь в пространстве R^3 дана поверхность F, на ней точка P. Если поверхность F достаточно гладкая, то ее расположение вблизи точки P представляет следующие две возможности: или поверхность в достаточно малой окрестности точки P расположена по одну сторону от касательной плоскости в этой точке, как эллипсоид или любая другая выпуклая поверхность, или же вблизи точки P она имеет седлообразную форму и пересекает свою касательную плоскость в этой точке (как, например, однополостный гиперболоид — черт. 36). В первом случае мы называем точку P *эллиптической*, во втором — *гиперболической*. Кроме того, на поверхности F могут быть еще так называемые *параболические* точки: так, например, на торе (черт. 37), полученном от вращения окружности $MPNQ$ вокруг оси XX', имеется область гиперболических точек (образованная при вращении направленной к оси вращения полуокружностью MPN) и область эллиптических точек (образованная при вращении полуокружности MQN). Эти области отделены друг от друга парой окружностей, описанных точками M и N. Эти окружности состоят из параболических точек тора (точное определение параболических точек будет дано несколькими строками ниже).



Черт. 36.

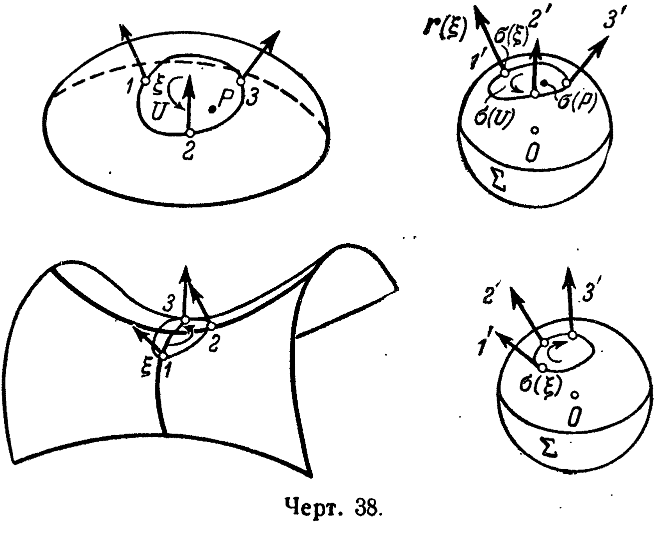


Черт. 37.

Возьмем на поверхности F достаточно малую окрестность U точки P, ограниченную простой замкнутой линией L. Определенное направление нормали в точке P назовем положительным; тогда можно говорить о положительном направлении нормали во всех точках малой окрестности U. Этим задана и положительная ориентация на выделенном нами куске U поверхности F: на всех замкнутых линиях, лежащих в U, мы считаем положительным направление обхода против часовой стрелки, считая, что циферблат часов смотрит в сторону положительной нормали. Сделаем теперь следующее построение. В каждой точке ξ окрестности U возьмем нормальный вектор длины 1, направленный в положительную сторону нормали, и перенесем этот вектор параллельно в центр O нашей единичной сферы Σ. Полученный вектор, исходящий из точки O, обозначим через $r(\xi)$, его конец—через $\sigma(\xi)$. Точка $\sigma(\xi)$ лежит на сфере Σ. Когда точка ξ пробегает всю область U, то точка $\sigma(\xi)$ зачертит некоторый кусок $\sigma(U)$ сферы Σ, который мы назовем сферическим изображением области U. В частности, когда точка ξ пробегает кривую L в положительном направлении, то точка $\sigma(\xi)$ обходит границу области $\sigma(U)$ на сфере в положительном или в отрицательном направлении. В первом случае мы приписываем отношению

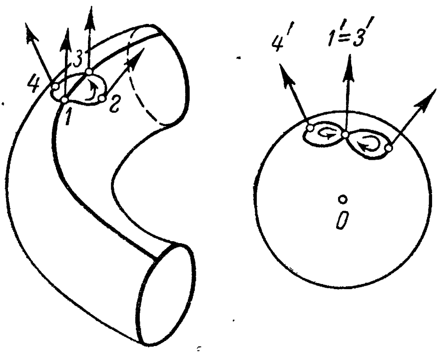
$$\frac{\text{площ. } U}{\text{площ. } \sigma(U)} \tag{1}$$

знак +, во втором — знак —. Теперь мы переходим



Черт. 38.

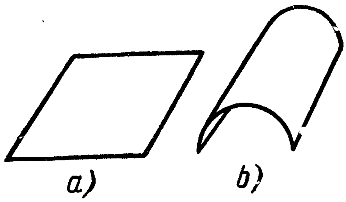
к пределу, заставляя окрестность U стягиваться на поверхности F в точку P. Тогда и область $\sigma(U)$ стягивается на сфере Σ к точке $\sigma(P)$ и отношение (1) стремится к определенному числовому пределу, который и называется *гауссовой кривизной* поверхности в точке P. Легко убедиться (черт. 38), что предел этот положителен в эллиптических точках и отрицателен в гиперболических точках. Параболические точки—это те точки, в которых этот предел равен нулю (черт. 39).



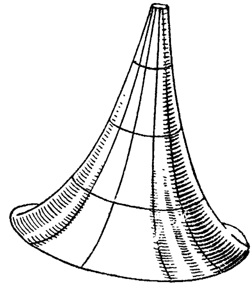
Черт. 39.

Одним из замечательнейших предложений дифференциальной геометрии является тот факт, что гауссова кривизна поверхности выражает *внутреннее* свойство поверхности, т. е. такое свойство, которое не меняется при любом изгибании поверхности (без растяжений и сжатий). Например, свертывая квадрат (черт. 40) в цилиндрическую поверхность, мы не меняем внутренних свойств поверхности, в частности, ее кривизна в каждой точке остается равной нулю.

Среди поверхностей особо важное место занимают те поверхности, кривизна которых в каждой точке равна одному и тому же числу. Такие поверхности называются поверхностями *постоянной кривизны.* К ним принадлежат: поверхности, кривизна которых всюду равна нулю—плоскости и все поверхности, развертывающиеся на плоскость (в том числе и конические и цилиндрические поверхности). Сфера может служить примером поверхности постоянной положительной кривизны. Существуют и поверхности постоянной отрицательной кривизны—это так называемые псевдосферы, одна из которых изображена на черт. 41.



Черт. 40.



Черт. 41.

Поверхности постоянной кривизны обладают метрической однородностью, заключающейся в том, что любой достаточно малый кусок такой поверхности можно заставить скользить по поверхности без растяжений и складок с одними только изгибаниями. Таким скольжением, связанным лишь с изгибанием (без изменения длин и углов), данный кусок поверхности можно передвинуть в любое другое место на поверхности; это можно фактически проверить, взяв сделанную из гипса модель шара или псевдосферы и реализовав кусок той же поверхности из какого-либо гибкого, но нерастяжимого материала.

Юрьевский профессор Миндинг доказал (в 1839—1840 г.), что описанная метрическая однородность вполне характеризует поверхности постоянной кривизны, откуда легко заключить, что лишь на поверхностях постоянной кривизны можно говорить о группах движений и конгруэнтных фигурах.

Мы уже видели, что на поверхностях постоянной положительной кривизны осуществляется локально (т. е. на некотором куске поверхности) эллиптическая геометрия, причем роль прямых играют лежащие в данном куске поверхности дуги больших кругов, а углы измеряются как обычно.

Возвратимся теперь к вопросу о реализации геометрии Лобачевского на кривых поверхностях. На основании сказанного мы уже можем предполагать, что реализация геометрии Лобачевского, как и реализация эллиптической геометрии, может происходить лишь на поверхностях постоянной кривизны. Оказывается, вопрос действительно получает положительное решение: *геометрия Лобачевского* (локально) *реализуется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны*. Этот факт имеет не только первостепенное математическое, но и философское значение: геометрия Лобачевского не есть какое-либо умозрительное, ирреальное построение, ее законы осуществляются на поверхностях, лежащих в нашем реальном трехмерном пространстве, на псевдосферах, модели которых мы можем видеть и осязать в любом геометрическом кабинете.

Таким образом, *обе неэвклидовы геометрии реализуются* (по крайней мере, по частям) *на кривых поверхностях: они являются геометриями поверхностей постоянной кривизны — положительной в случае геометрии Римана и отрицательной в случае геометрии Лобачевского*. За эвклидовой геометрией при этом остается промежуточное положение — геометрии поверхностей нулевой кривизны (эвклидова плоскость и налагающиеся на нее поверхности — цилиндрические, конические и др.).

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *А. В. Зансохов*
Техн. редактор *Т. Н. Мухина*
Корректор *Е. М. Лидова*

* * *

А 08110. Сдано в производство 23/VIII 1950 г.
Подписано к печати 10/X 1950 г. Бумага 82×
×$108^{1}/_{32}$=1,13 бум. л.—3,69 п. л. Уч.-изд.л. 3,57.
Цена 1 р. 25 к. Тир. 15 000 экз. Зак. 920.

* * *

Типография Изд-ва АПН.
Москва, Лобковский пер., 5/16.

ЦЕНА 1 р. 25 к.