ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

Проф. Б. В. ГНЕДЕНКО

КРАТКИЕ БЕСЕДЫ О ЗАРОЖДЕНИИ И РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

МОСКВА · 1946 · ЛЕНИНГРАД

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

Проф. Б. В. ГНЕДЕНКО

КРАТКИЕ БЕСЕДЫ О ЗАРОЖДЕНИИ И РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Москва 1946 Ленинград

ВВЕДЕНИЕ

Известно, какое значение для усвоения предмета представляет тот интерес, который удается возбудить учителю у учащегося. При изложении курса математики в средней школе имеется много средств, помогающих держать школьника в состоянии повышенного интереса к предмету, заставляющих его относиться с неослабевающим вниманием к каждому этапу курса. Такими средствами могут быть и удачный подбор задач, и красиво выполненные чертежи, и выпукло оттененная прикладная и познавательная важность сообщаемых знаний. Для учащихся старших классов, несомненно, одним из важнейших приемов стимулирования интереса является демонстрация логической стройности предмета, его внутренней красоты, а также вскрытие тех связей, которые существуют между задачами практики и результатами одной из самых абстрактных наук — математики. Нельзя, конечно, забывать и других весьма действенных приемов, требующих кратких отступлений от непосредственного предмета изложения. Некоторая потеря времени, связанная с такими отступлениями, несомненно, послужит в дальнейшем к более быстрому и более стойкому восприятию предмета.

Нам хочется здесь остановиться на приеме, достигающем цели на всех стадиях обучения — кратких экскурсах в историю науки. История математики представляет собой богатейший источник для таких замечаний, отступлений, сравнений, бесед, подбора задач для упражнений или для иллюстраций положений теории. Отступления в область истории науки тем более уместны, что они весьма способствуют повышению общего культурного уровня учащихся и побуждают их к познанию не только того, что стало объектом исторических трактатов, но и того, что характеризует современное состояние науки.

В подготовке наших учителей, однако, существует огромный пробел: история математики либо ютится на задворках учебных планов физико-математических факультетов, либо даже вообще отсутствует в них. Это обстоятельство в значительной мере затрудняет использование учителем исторических сведений в его дальнейшей практической работе. Недостаток литературы по истории науки в магазинах, библиотеках, а значит, и в личных библиотечках учителя, никоим образом не способствует повышению его квалификации в этих вопросах.

В сравнительно привилегированном положении находится история древней и западноевропейской математики до XIX в.: за последние десять — пятнадцать лет наши издательства предприняли перевод и издание целого ряда зарубежных книг — Вилейтнера, Цейтена, Нейгебауэра, Кеджори и др., а также переиздание книг русских авторов — Беллюстина, Попова, Шереметьевского. В результате наш учитель может при желании и настойчивости достать литературу по истории развития математики в Западной Европе, древнем Египте, Вавилоне, древней Греции и пр., но в то же время фактически лишен возможности ознакомления с основными этапами развития математических познаний в родной стране. Действительно, история математических знаний в России излагается в очень небольшом числе произведений. В первую очередь мы должны указать здесь статьи и книги профессора Московского университета конца XIX — начала XX в. В. В. Бобынина. Все эти книги, в том числе и книги Бобынина, стали библиографической редкостью и практически недоступны не только учащемуся, но и учащему, даже крупных культурных центров. К тому же большинство этих произведений излагает состояние математических знаний в России в лучшем случае лишь до середины XIX в. Дальнейший прогресс, относящийся к той эпохе, когда Россия творчески включилась в развитие математики, остался вне поля зрения указанных авторов. А ведь хорошо известно, что именно в XIX и XX вв. русский народ выдвинул блестящих ученых, которыми, по праву, гордится не только наша родина, но и все культурное человечество. Достаточно вспомнить имена Н. И. Лобачевского, П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова и др., а также представителей современной многочисленной советской математической школы, чтобы понять, каким богатым источником для оживления школьного преподавания является история нашей науки. Заметим к тому же, что такие отступления в область истории русской науки немало будут способствовать воспитанию высокого чувства патриотизма.

Рассказать вкратце, в доступной для учащихся форме, об идеях и достижениях в науке, принадлежащих последним столетиям, познакомить со стоящими перед ней задачами, а также хотя бы немного приподнять завесу, которой скрыта от школьника постоянная кипучая работа в области математики — вот одна из благороднейших задач учителя-просветителя. Такие рассказы способны резко изменить отношение ученика к предмету, способны показать ему, что математика не является той застывшей дисциплиной, в которой специалисты занимаются только тем, что пересказывают друг другу и передают непосвященным факты, хорошо известные древним грекам и индусам. А ведь многие учащиеся именно с таким чувством покидают стены средней школы! Показ того, что математика является не менее живой и развивающейся, а значит, и увлекательной наукой, чем, скажем, физика или химия, не должен быть выброшен из поля зрения учителя.

В настоящей брошюре мы приводим несколько фактов из истории науки в России, вполне подходящих для использования в школьном преподавании, нисколько не претендуя на полноту сообщаемых исторических сведений и не навязывая учителю ни места, ни характера их изложения. Наша цель гораздо скромнее: дать в руки учителю хотя бы небольшой материал, который мог бы оказать ему помощь в оживлении уроков и помог бы пробудить у учащихся интерес к математике. В своем изложении мы придерживались следующей методической идеи: отступления должны быть краткими, не должны отвлекать учащихся далеко в сторону от непосредственных интересов проходимой ими части курса. Сообщаемые факты в подавляющей своей части носят характер пяти-восьмиминутных бесед.

1. СЛАВЯНСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Принятая в настоящее время во всем культурном мире арабская или, иначе, индусская система нумерации (т. е. система обозначения всех чисел с помощью лишь десяти знаков — цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) появилась в России только в XVI, а быть может даже и только в XVII в. А что было до этого времени? Как раньше обозначали наши предки числа?

Появление на Руси письменности и обозначений для чисел относится к эпохе крещения, т. е. к концу X в. Введенный тогда в употребление алфавит отличался от принятого нами теперь. Это был так называемый церковно-славянский алфавит, или кириллица, созданный греческими миссионерами Кириллом (умер в 869 г.) и Мефодием (умер в 885 г.) на базе греческого алфавита для славянских народов Балканского полуострова. На Русь он был занесен вместе с церковно-славянскими книгами.

Кроме букв, оставшихся впоследствии в русском алфавите, в славяно-греческом алфавите были следующие буквы:

ξ, ψ, θ, ν.

Буквы алфавита одновременно служили и числовыми знаками. Для того, чтобы подчеркнуть, что данная буква изображает число, над ней ставили особый значок **ТИТЛО** (~). Такой способ обозначений чисел существовал у многих народов древности — греков, евреев, финикийцев и др. — и следовал такому принципу; первые девять букв обозначали единицы, следующие девять — десятки, дальнейшие девять — сотни. В славянском алфавите этот принцип был нарушен в угоду греческим обозначениям. Для ознакомления приводим табличку славяно-греческих числовых знаков:

а҃ = 1, в҃ = 2, г҃ = 3, д҃ = 4, є҃ = 5, ѕ҃ = 6,
з҃ = 7, и҃ = 8, ѳ҃ = 9, і҃ = 10, к҃ = 20, л҃ = 30,
м҃ = 40, н҃ = 50, ѯ҃ = 60, о҃ = 70, п҃ = 80, ч҃ = 90,
р҃ = 100, с҃ = 200, т҃ = 300, ѵ҃ = 400, ф҃ = 500, х҃ = 600,
ѱ҃ = 700, ѡ҃ = 800, ц҃ = 900, (или также ѧ҃ = 900)

Буквы, написанные подряд, давали число, в котором было столько сотен, десятков и единиц, сколько означали эти буквы, при этом порядок букв не влиял на значение изображаемого числа. Так, например, запись *к҃в҃* означала число 22, запись *х҃о҃д҃* или *д҃о҃х҃* — 674 и т. д. Заметим, что для нуля никакого специального обозначения не существовало. Это обстоятельство моментально наводит нас на вопрос: как же обозначались дальнейшие числа? Ведь любой алфавит состоит из конечного числа знаков? Выход находим в том, что перед буквами ставили особые значки. Наличие такого значка переводило число в высший разряд. Для обозначения тысяч употреблялся знак $\neq$. Таким образом число $\neq$ а̃ц̃т̃ѕ̃ означало 1946.

Названия чисел существовали до 10^{50}; после перечисления всех этих чисел, так называемого „великого славянского счета“, добавлялось: „и боле сего человеческому уму несть разумети“. Однако в житейской практике нашим предкам с такими большими числами приходилось иметь дело очень редко. За это говорят и сами названия чисел. Так число „десять тысяч“ носило название „тьма“, „сто тысяч“ — „неведие“ или „легион“. Смысл слов явно указывает на то, что столь большие числа были темны и неведомы.

В оправдание наших предков скажем все же, что и современному человеку слишком большие числа не очень-то привычны. Вспомним хотя бы слова свахи из известной комедии Островского: „Для меня все, что больше тысячи — мильон“. В более серьезных делах, например, при составлении государственных бюджетов редко требуются числа, превышающие 100 — 200 млрд.

Распространенный взгляд на то, что астрономы привычны к большим числам не совсем верен. Им, в самом деле, приходится иметь дело с большими расстояниями, с огромными массами. Но, чтобы избежать колоссальных чисел, они вводят новые единицы измерения — световой год, парсек. Основная разница, пожалуй, состоит не в том, что мы не учились оперировать с большими числами, а в том, что мы не ставим теперь предела человеческому познанию. Для нас теперь не существует утверждения „и боле сего несть человеческому уму разумети“.

Заключением для этой беседы могут быть следующие, безусловно, интересные школьнику сведения. На распространение индийской (арабской) системы нумерации существенное влияние оказали народы, населяющие территорию Советского Союза. Вот как это случилось. В средние века народы Средней Азии находились на весьма высокой стадии развития. Архитектура, литература, строительная техника, наука переживали период расцвета. Математики изучали произведения индусских и древнегреческих ученых, переводили их на господствовавший в тех местах арабский язык и сами писали книги. Особенно большую известность получила книга Магомета Ибн Мусы Альхорезми (из Хорезма), написанная им в 830 г. и посвященная алгебре. По книге

Альхорезми и познакомились в Европе как с индийской нумерацией, так и с начатками алгебры.

2. УПОТРЕБЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

Помимо целых чисел, на Руси в большом ходу были простейшие дроби, в которых числитель равнялся единице:

половина — $1/2$
четь — $1/4$
полчеть — $1/8$
полполчеть — $1/16$
полполполчеть или малая четь — $1/32$

треть — $1/3$
полтреть — $1/6$
полполтреть — $1/12$
полполполтреть или малая треть и т. д. — $1/24$

Так в XV веке стали пользоваться в качестве единицы меры для измерения земельных площадей — сохой (соха — 800 четвертей доброй земли, четверть = $1/2$ десятины), а также полсохой, полполсохой (четь сохой), полчеть сохой и т. д.

О дробях с другими знаменателями говорится в древнейшем русском математическом произведении, относящемся 1134 г. и принадлежащем монаху Новгородского Антониева монастыря Кирику. Сочинение Кирика носило название „Учение о том, как ведати человеку числа всех лет“ и было посвящено хронологическим расчетам, связанным с церковными преданиями. В одном из параграфов книги Кирик производит деление двенадцатичасового дня (единица) на часы (двенадцатая часть дня), часов на дробные часы (пятая часть часа), дробных часов на пятые доли и т. д. В результате у Кирика получилась геометрическая прогрессия со знаменателем $1/5$; члены этой прогрессии имели числители, равные единице и знаменатели, последовательно равные числам:

12, 60, 300, 1 500, 7 500, 37 500, 187 500, 937 500.

Далее Кирик заявил, что „больше сего не бывает“.

3. „РУССКАЯ ПРАВДА“

В древнейшем русском периодическом сборнике „Русская Правда“, создание которого связано с именем Ярослава Мудрого, имеются некоторые арифметические расчеты, касающиеся вычислений приплода скота, пчел, урожая зерна, сена и пр., собранных с определенного участка земли. Едва ли эти статьи имели какое-либо практическое значение, так как процент приплода, как мы увидим, назначался в них довольно произвольным, скорее всего они были составлены людьми, любившими счет или, как их тогда называли, числолюбцами, для других лиц, любивших посчитать. Для нас арифметические статьи „Русской Правды" интересны и тем, что из них мы узнаем о тех задачах, какие умели решать на Руси в давно минувшие времена, а также и тем, что эти задачи мы можем теперь использовать на уроках, скажем, при прохождении раздела „прогрессии".

Вот для примера две статьи из „Русской Правды".

„А от двадцати овец и от двою приплода на 12 лет 90 000 и 100 овец и 12 овец, а баранов 90 000 и 100 и 12 баранов, а всего баранов и овец на 12 лет 180 000 и 200 и 24".

„А от трех свиней приплода на 12 лет 70 000 и 30 000 и 700 и 20 и 8 свиней".

Легко догадаться, какими соображениями руководствовались авторы первой статьи: каждая овца ежегодно приносит по паре ягнят (овце и барану), каждый ягненок — овца — через год способен давать приплод и, наконец, все овцы выживают. При этих условиях каждая овца за двенадцать лет принесет потомство в $2^{12}-1=4\,095$ овец и такое же количество баранов, так что 22 овцы принесут потомство в 90 090 овец и такое же количество баранов. Всего же по истечении 12 лет окажется стадо, состоящее из 90 112 овец и 90 090 баранов. Расхождение в числе баранов в подсчетах „Русской Правды" и наших происходит от того, что, повидимому, авторы статьи предполагали заранее, не оговорив этого в задаче, что в первоначальном стаде помимо 22 овец было и 22 барана.

4. ЦЕРКОВНЫЕ ЗАПРЕЩЕНИЯ

Математических рукописей от XIV — XVI вв. в России совсем не сохранилось. Были ли они вообще — вопрос спорный. Однако по поводу математики в целом ряде религиозных трактатов сохранились вполне определенные высказывания, которые любопытно узнать учащемуся.

Известно, что в эпоху татарского ига грамотность на Руси, в том числе и грамотность духовенства, резко упала

Это время совпало с началом усиленной деятельности католической церкви в особенности в южных и западных частях Руси. Бороться с католическим влиянием православное духовенство не имело сил, так как казуистическая выучка католического ксендза была неизмеримо выше, чем у православного священника. Выход был найден в том, что православным было запрещено читать книги с Запада. Появились церковные запрещения на книги не только духовного, но и светского содержания. Математические книги не были исключением. По поводу них в различных поучениях совершенно недвусмысленно говорится: „Богомерзостен перед Богом всякий, кто любит геометрию; а се душевные грехи учиться астрономии и эллинским книгам. По своему разуму верующий легко впадает в различные заблуждения; люби простоту больше мудрости, не взыскуй того, что выше тебя, а какое дано тебе от Бога учение, то и держи".

Отрицательное отношение к математическим книгам еще долго поддерживалось на Руси духовенством. Так уже в 1676 г. на процессе весьма образованного для того времени боярина Артамона Морозова ему среди прочих предъявлялось обвинение в колдовстве и чернокнижии на основании найденной у него „книги черной — лечебнике, что писаны многие статьи цифирью".

Понятно, что в эти времена нельзя было говорить не только о математическом творчестве, но и о правильно поставленном математическом образовании. Знания передавались устным путем, и запас их был невелик. Даже купечество, которому по роду своей деятельности приходилось иметь дело с арифметическими расчетами, не получало правильного и достаточного математического образования. Вот что по этому поводу говорил в одной из своих обличительных книг пламенный публицист и панславист Юрий Крижанич уже в середине XVII в.: „Купцы не учатся даже арифметике, и иноземцы во всякое время их беспощадно обманывают".

Конечно, такое положение не могло продолжаться вечно: задачи государственного значения настоятельно требовали людей, знакомых с элементами математики — арифметикой и начатками геометрии. Действительно, исчисление податей, передел земель, строительная техника, пушкарское дело, необходимость предварительного подсчета снаряжения и припасов для войска и пр., — все это требовало людей, сведующих в математических познаниях.

5. „УСТАВ РАТНЫХ, ПУШЕЧНЫХ И ДРУГИХ ДЕЛ, КАСАЮЩИХСЯ ДО ВОИНСКОЙ НАУКИ“

Артиллерия издавна была одной из основных частей вооруженных сил русского государства. Особенно серьезное развитие она получила при Иване IV — Грозном. В дальнейшем этот процесс уже не прекращался, и много раз в истории России отмечались и мощь артиллерии и искусство пушкарей.

Для облегчения, а также для улучшения работы пушкарей в 1607 г. (I ч.) и в 1621 г. (II ч.) было предпринято издание своеобразной энциклопедии — „Устава ратных, пушечных и других дел, касающихся до воинской науки“. В „Уставе“, помимо чисто воинских сведений, сообщались и некоторые геометрические факты, предназначенные для решения интересующих артиллериста задач: определения расстояния до цели, определение величины цели и пр.

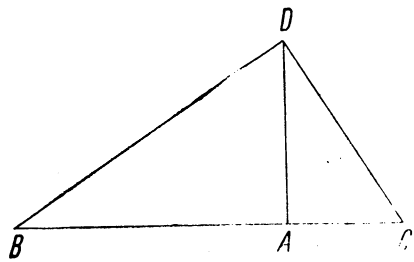

Рис. 1

Приведем для примера изложения способа определения расстояния от наблюдателя до цели.

Требуется определить расстояние от точки A до точки B. С этой целью „Устав“ рекомендует поставить в точке A шест, размером, примерно, в рост человека; к вершине D шеста приложить угольник так, чтобы вершина его прямого угла совпадала с точкой D, а продолжение одного из катетов проходило через точку B. Другой катет продолжается до пересечения с землей (точка C). Далее следует приказание: смеряй шестом расстояние AC и возьми отношение длины AD к длине AC; это отношение равно расстоянию AB, измеренному единицей, равной длине шеста (рис. 1).

Вот подлинные слова этого приказа: „Возьми вышеименованный жезл и меряй тое длину или ширину во всем подлинно, и сколь много такая статья достанет, и то раздели во весь жезл равными долями. И ты прямую далину от слова A до слова B обращеши“. (В подлиннике вместо букв A, B, C, D, для обозначений употреблялись соответственно буквы *Я*, *Б*, *З*, *Ц*. Чертежа в подлиннике нет.)

Интересна судьба подлинника „Устава". В 1775 г. при разборе Оружейной палаты он был найден и по приказу Потемкина отпечатан. С тех пор подлинный экземпляр „Устава" пропал, то ли заложенный другими рукописями, то ли уничтоженный после набора.

6. „КНИГА СОШНОГО ПИСЬМА"

Приемы измерения площадей изложены в одном из старейших русских произведений, содержащих геометрические сведения — „Книга сошного письма". Известен экземпляр этой книги, относящийся к 1629 г.; однако имеется ряд указаний на то, что он является перепиской более старого наказа, составленного еще в 1556 г. при Иване Грозном. Понятно, что в этой книге, посвященной специально измерению земель, нет систематического изложения геометрии. Отдельные геометрические сведения изложены догматически, без доказательств; все ограничивалось рекомендацией действий, которые нужно произвести, чтобы получить нужный результат.

При измерении площадей рекомендовалось земельные участки разбивать на основные фигуры — прямоугольники, в том числе квадраты, треугольники и равнобочные трапеции. Площади прямоугольников вычислялись правильно, но площади двух остальных основных фигур вычислялись по ошибочным правилам. Так, площадь треугольника считалась равной половине произведения меньшей стороны на большую. Площадь равнобочной трапеции предлагалось считать равной произведению полусуммы оснований на большее основание. В более поздних рукописях это правило заменяется другим более осмысленным: площадь равнобочной трапеции равна произведению полусуммы оснований на боковую сторону (хобот).

Как мы уже говорили, в рукописи никаких формул не выводилось и даже не приводилось. Все ограничивалось рассмотрением числовых примеров, которые должны были набить руку у читателя. Приведем подлинный текст рукописи, касающийся измерения площади прямоугольника со сторонами 40 сажен и 53 сажени (рис. 2).

„И ты мери первую сице: с аза на буки, и тут 40 сажен, да с аза же на глаголь, и тут 40 сажен, мери же с веди на буки и також 40 сажен; и тут стало четверть севу; вымери же сколько сажен осталось от четверти поперек, и тут стало 13 сажен с третью сажени, и тут станет треть четверти, всего поля станет четверть с третью четверти севу".

Много ошибочного в правилах измерения площадей, сообщаемых в древних русских рукописях, но внимательный их анализ показывает, что все они явились результатом необоснованного переноса правил верных или приблизительно верных в каких-либо частных случаях на общий случай. Этот необоснованный перенос порой заходил очень далеко, как мы, например, видели в случае вычисления трапеции. Интересно отметить, что в других рукописях XVII в. нередко приводится следующее ошибочное утверждение: фигуры с равными периметрами ограничивают равные площади.

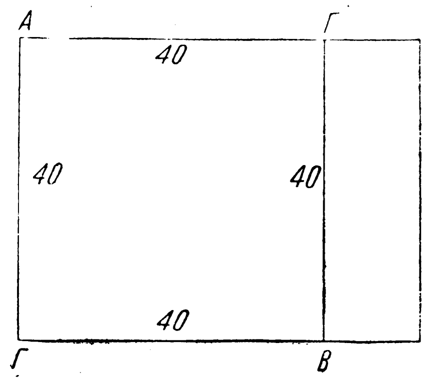

Рис. 2

7. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА В РУССКИХ РУКОПИСЯХ XVII В.

В русских геометрических рукописях начала XVII в. четкого понимания того, в каких случаях имеет место теорема Пифагора, еще не было, и поэтому при вычислении расстояния между пунктами A и B, когда известно их расстояние до некоторого пункта C, рекомендовалось пользоваться формулой

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

независимо от того, какой угол будет при вершине C. Вот для примера текст двух задач из геометрических рукописей.

„Хошь узнати промежь какими местами, не ходя и не меревь что будет промежь верст, или сажен, или аршин. И ты еще познавай: как ходил будто к Троице в Сергиев монастырь и тут 32 версты. Ходил же в Воскресенский монастырь, и тут будто 24 версты. Что будет промежь теми монастырями скажи, не меревь и в которую сторону сколько будет верст? И те числы с таких же чисел умножь.

И те оба перечни сложи вместе и раздели на радикс (т. е. извлеки квадратный корень. — *Б. Г.*). И что из делу выдет столько будет промежь теми местами верст или что нибудь".

Далее шли чертежи и следующие вычисления:

24	32
24	32
96	64
48	96
576	1024
	576
	1600

40 вер.

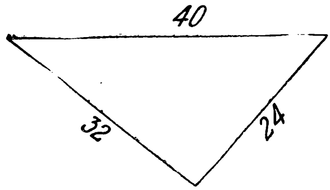

Рис. 3

„Ходил с Москвы в Новгород и тут 600 верст. Ходил в Шуйский город и тут 500 же верст. Что будет промежь теми городами зри (781 верста)?"

8. ИЗ ВВЕДЕНИЙ К СТАРИННЫМ КНИГАМ

Очень красочные в старинных книгах предисловия. Часто именно в них заключается вся ценность произведения, так как основное его содержание скудно и совсем не соответствует пышным напутственным словам предисловия.

Мы приведем два отрывка из предисловий — одно к арифметической рукописи XVII в., другое — к книге по геометрии середины XVIII в.

„...сия мудрость изыскана древними философи остропаримого разума, нарицается арифметика, сиречь счетная — арифмос по-гречески счет толкуется. Без сея мудрости ни един философ, ни доктор не может быти. По сей мудрости гости по государствам торгуют и во всяких товарах и в торгах силу знают, и во всяких весах и в мерах, и в земном верстании, и в морском течении. Сия мудрость есть многих в прикупех корысть сподобляет, и честь дарует, и ум человеческий высокопарив творит, и память укрепляет, и острых острее творит в разум... Мною человек превосходит бессловесное неразумие. Аз бо есмь своима легкима крылама парю выспрь под облаки, аще и несть мя тамо. Аз заочные, невидимые и предъочные дела объявляю; в солнечном же и в лунном течении разум многим подаваю; и в морском плавании, и в земном верстании наставляю и меру указую; и в купеческих вещах, и во всяких числах недоумение разрешаю. И всего ради отъидите от меня иже меланхолею одержаны суть, и у которых мозги с черной желчью смешаны, а моим учеником достоит имети суптильный чистый и высокий разум".

Так неизвестный автор высоко ставил арифметику, которую Магницкий впоследствии (1703 г.) определил так: „Арифметика есть художество честное, независтное, и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее..."

В книге „приемы циркуля и линейки" имеется весьма сильная аргументация в пользу единства теории и практики, преподнесенная читателю в весьма красочной форме: „Кто только феоретику хвалит, делает токмо благоположенное основание, но немже никогда строится яко великие пушки и мортиры, которые токмо в цехгаузе держатся, а в поле никогда возятся, и корабли, которые в гавани гниют, и феоретик может применен быть ремесленнику, художествие разумевшу, а не действующу, инженеру же добывающу крепости на бумаге, корабельщику же в дому своем на морской мапе[1] шастливо во Америку ездяшу. Не много инако и тому служицца будет иже бы токмо едину практику хотел. Зане он царскую крепость на песке строил бы и под Дунай реку подкоп бы проводил, а на остаток с баварским плотом во Индею ездил бы".

Заметим, что несмотря на столь пышное вступление, преподавателям нередко приходилось прибегать и к другому действенному средству пробуждения интереса учащихся к науке. Что это за средство, читатель немедленно поймет из следующего древнего поучения.

„Розга ум вострит, память возбуждает и волю злую к благу прилагает... Розгою дух святый детище бити велит... Благослови боже оные леса, иже розги родят на добрые времена".

9. СМЫСЛ СЛОВА „ЦИФРА"

Слово „цифра" является одним из весьма употребительных слов нашего языка. Откуда, однако, оно пришло к нам и каков его первоначальный смысл? В „Арифметике" Магницкого, а также во всех позднейших арифметических руководствах XVIII в., цифрой назывался только нуль, слово же „нуль" отсутствовало. Все остальные значащие цифры назывались з н а м е н о в а н и я м и.

Индусы, от которых идет современная система записи чисел с помощью десяти знаков, дали нулю название *суниа*,

[1] Мапа — карта (англ.)

что в переводе на русский язык означает „пустое". Арабы, заимствовавшие у индусов их арифметические познания, перевели слово *сунна* на свой язык; по-арабски это будет *ас-сифр*. Слово „ас-сифр" на западе и у нас сначала привилось без перевода, затем в европейских странах оно преобразовалось в слово "цифра". Как мы видели, первоначальное слово „цифра" означало только „нуль"; лишь впоследствии (у нас с конца XVIII в., под этим словом начали разуметь обозначения всех числовых знаков от 0 до 9, сохранив за знаком 0 его латинское наименование „нуль" (nullus — ничто, никакой).

Интересно заметить, что у Магницкого числа первого десятка называются *перстами*, числа вида единицы с нулями (20, 30,... 100, 200,...)—*составами*, а все остальные (21, 48, 105,...) — *сочинениями*. Эта терминология была заимствована Магницким у древне-римских авторов, у римлян же она была связана со способом счета посредством пальцев.

10. ТАБЛИЦЫ

Повидимому, первые печатные русские таблицы были изданы в Москве в 1682 г. (в 7190 г. по старорусскому летоисчислению) и содержали в себе произведения всех чисел от 1 до 100. Таблицы имели обычный и для настоящего времени вид таблиц с двойным входом. Носили они следующее название: „Считание удобное, которым всякий человек купующий или продающий, зело удобно изыскати может число всякие вещи. А како число вещей, и вещам число цены изыскивати, и о том читая в предисловии к читателю, совершенно познаешь". Вот это предисловие.

„К читателю. Сия книжка, читателю любезный, надобна человеку для скорого всякие вещи цены обретения, которую кто купити или продати хощет, а мера и цена за сколько чего, сколько денег дати или взяти, объявляется в сей книжке на всякой странице в верхних, да в посторонних первых строках в клеточках. И можно считати всякия вещи, хотя меру наложити, сколько чего купити, или продати в верхней строке, а цену в посторонней, сице: есть ли меру положишь в верхней строке, а цену в посторенней строке, и ты от того числа пойди рядом клеточками и дойди до той клеточки, которая стоит против верхнего числа, которое число меру показует.... И сколько в той клеточке будет числа, столько будет за тот товар и цены копейками, или алтынами, или гривнами, или рублями,... И о сем, читателю, буди тебе известно, что в сей книжке положено счету, краткости ради, только одно сто. А если мера или цена превзойдет число счета, который положен в сей книжке, и тому возможно по сему же счету, меру и цену умножая, хотя многие тысячи счести. Здравствуй, и о трудящихся в сем деле моли Бога".

Первые таблицы логарифмов в России были изданы в 1703 г. Магницким совместно с англичанами — преподавателями навигацкой школы. Повидимому, до составления этих таблиц Магницкий сам был незнаком с логарифмами. За это говорит и тот факт, что в своей „Арифметике" Магницкий даже не упоминает о них, и тот, что при изложении свойств геометрической прогрессии на нее слишком вольно переносились свойства прогрессии арифметической. Так, например, Магницкий считал, что крайние члены прогрессии a_1 и a_n, знаменатель q и число членов n связаны между собой соотношением:

$$\frac{a_n}{a_1} : (n-1) = q,$$

тогда как, если бы ему известны были логарифмы, он должен был бы записать следующее соотношение:

$$log\frac{a_n}{a_1} : (n-1) = log\, q.$$

11. РАЗВЛЕКАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Обычай помещать в руководства задачи развлекательного характера идет с давних времен; такие задачи имеются во всех арифметических руководствах XVII в., такие задачи имеются и в более поздних учебниках. Приведем несколько примеров.

Из рукописей XVII в.

„Лев съел овцу одним часом, а волк съел овцу в два часа, а пес съел овцу в три часа. Ино хошешь ведати сколько бы они все три — лев, волк и пес овцу съели вместе вдруг и сколько бы они скоро ту овцу съели, сочти ми?"

Автор рукописи предлагает следующий прием решения: за 12 часов лев съест 12 овец, волк — 6, а пес — 4. Всего же они съедят за 12 часов 22 овцы. Следовательно одну овцу они съедят за $1^5/_6$ часа.

„Юноша некий пошел с Москвы к Вологде, и идет на всякий день по 40 верст. А другой пошел после его на следующий день. А на всякий день идет по 45 верст. Ино в сколько дней тот юноша постиг прежнего юношу, сочти ми? Придет в восьмой день на един начлег сошлися“.

Приведем задачу из „Арифметики“ Магницкого.

„Некий человек продае коня за 156 рублев, раскаявся же купец нача отдавати продавцу, глаголя: яко несть мне лепо взяти сицевого коня недостойного такие высокие цены. Продавец предложи ину куплю глаголя: аше те мнится велика цена сему коню быти; убо купи гвоздие их же, сей конь имать в подковах своих ног, коня же возьми за тою куплею в дар себе. А гвозди во всякой подкове по шести и за един гвоздь дождь ми полушку, за другой же две полушки, а за третий копейку, и тако все гвозди купи. Купец же видя столь малую цену и коня хотя в дар себе взяти, обещал таку цену платити, чая не больше 10 рублев за гвоздие дати. И ведательно есть колико купец проторговался?“

Приведем еще пару задач[1] из учебника алгебры академика Николая Фуса, работавшего в конце XVIII — начале XIX в.

„Вор украл кошелек с 48 рублями; некто, увидев, угрожал открыть воровство его, если он с ним не поделится. Итак они делят покражу, но таким образом, что ежели свидетель отдаст вору $^1/_5$ часть того, что он получил, то у него останется только половина против вора. Сколько каждому достанется?“

„Полагая, что после потопа, который пережило 8 человек, число жителей на земле прибавлялось ежегодно на двадцатую часть. Вопрошается число Ноевых потомков к его смерти, которая случилась через 350 лет после потопа“.

К этой задаче автор делает следующее весьма любопытное добавление. „Тот час видно, что сей вопрос разнится от следующего вопроса только родом единиц: сколько велик будет капитал из 8 рублей по прошествии 350 лет, положенный по 5%?“

---

[1] На эти задачи обратил мое внимание проф. И. В. Арнольд.

12. Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

Учитель найдет случай и место для того, чтобы сказать несколько слов о великом русском математике Николае Ивановиче Лобачевском, настолько серьезно изменившем наши геометрические представления, что его прозвали „Коперником геометрии". Время показало, что влияние идей Лобачевского гораздо шире его геометрических изысканий, как бы важны они ни были сами по себе, и распространяется на всю современную математику и даже на физику.

В настоящей беседе я не стану касаться существа сделанного Лобачевским открытия, а только отмечу некоторые моменты, характеризующие широту его интересов.

Лобачевский был не только гениальным творцом, но и широко образованным человеком: он был хорошо знаком с физикой, астрономией, сельским хозяйством, архитектурой. Насколько велики были его знания в предметах, не являющихся его научной специальностью, говорят хотя бы следующие факты: в течение ряда лет Лобачевский читал в университете курсы физики и астрономии, проводил экспериментальные исследования изменения температуры почвы и для этой цели создал термометр собственной конструкции, предложил новую теорию света, участвовал в экспедиции по наблюдению полного солнечного затмения и в результате ее создал свою теорию образования солнечной короны. Будучи председателем комитета по строительству Казанского университета, Лобачевский не мог, в силу свойств своего характера, только числиться на этом посту: он принялся за изучение архитектуры и строительного дела, познал их настолько, что вскоре мог вполне квалифицированно вникать во все детали строительства и даже больше — участвовать в создании всего архитектурного ансамбля зданий университета.

Геометрические идеи Лобачевского были настолько неожиданны, настолько смелы, что он в течение всей своей жизни не был понят ни на родине, ни на Западе. Более того, кажущаяся парадоксальность его построений приводила к тому, что над ним смеялись, его оскорбляли, его называли сумасшедшим, но все это не сломило его уверенности в правильности рассуждений, в неизбежности окончательного торжества его идей. Недаром слепым и больным стариком, не имея уже сил писать самостоятельно, он диктовал свое последнее произведение, не теряя надежды на то, что человечество поймет его мысли, разрушающие традиционные представления. Ирония судьбы — лишь несколько лет отделяют признание идей Лобачевского от последних дней его жизни.

Многочисленные книги о Лобачевском, появившиеся в самые последние годы, помогут учителю подробнее познакомиться с фактами его жизни. Особенно полное исследование по этому вопросу было проведено к 150-летнему юбилею дня его рождения проф. В. Ф. Каган[1].

13. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

В старших классах, не загромождая рассказ деталями, следует сообщить учащимся, в чем же состоит отличие геометрии Лобачевского от геометрии Эвклида?

Многие сотни лет отделяют нас от того времени, когда в Греции пышно развились науки и искусства. Начатки геометрических знаний, занесенные из Египта, превратились в стройную научную систему, получившую логическое завершение в трактате Эвклида, названном им „Началами". Каждое предложение „Начал" строго выводилось из предложений, ранее доказанных; эти последние в свою очередь опирались на им предшествующие. Но так как каждая книга должна иметь начало, то и геометрическая система Эвклида должна была какие-то предложения принять за первичные, на которых, как на фундаменте, должно было покоиться все здание геометрии. Вот такие предложения, которые уже не могли быть выведены из предыдущих, так как таковых не было, были названы аксиомами. Аксиом был немного—только одиннадцать; все они, за исключением одной, формулировались кратко и при знакомстве с ними воспринимались как строгие формулировки давно известного житейского опыта и не возбуждали ни сомнений, ни потребности в их доказательстве. Вот для примера, две такие аксиомы:

а) целое больше своей части,

б) все прямые углы равны.

И только последняя из аксиом далеко выходит за пределы повседневных наблюдений и содержит в себе утверждение о свойствах всей бесконечной прямой в целом. Эта аксиома о параллельных прямых заключается в следующем:

---

[1] В. Ф. Каган, Н. И. Лобачевский. ИАН, СССР, 1944 г.

на плоскости через данную точку можно провести единственную прямую, не пересекающую данную прямую.

Ученые всех поколений пытались показать, что аксиома Эвклида о параллельных прямых может быть выведена из других аксиом, но рано или поздно во всех этих доказательствах обнаруживались ошибки. Неудачи одних не обескураживали других: попытки доказательства не прекращались до XIX в. и даже в XIX в. Систематичность неудач никого не приводила к мысли о том, что может быть доказательство аксиомы Эвклида о параллельных из других аксиом невозможно; никому не приходила в голову мысль о том, что возможна иная, столь же логически совершенная, геометрическая система, как система Эвклида. Все мысли были сосредоточены на доказательстве аксиомы о параллельных. Уверенность в том, что мыслима лишь одна геометрия, нашла отражение в философской системе Канта. Согласно Канту, пространство абсолютно, и его идея вложена в наше сознание до всякого опыта. Иными словами, мыслима только одна геометрия, которая была изложена в „Началах" Эвклида, и ничто не способно привести к созданию новой геометрии.

Учение Канта об априорных (доопытных) категориях было разбито Лобачевским тем, что он построил отличную от эвклидовской и столь же стройную систему геометрии, в которой аксиома Эвклида о параллельных была заменена другою, а все остальные аксиомы остались без изменения. Согласно Лобачевскому, на плоскости через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести бесконечно много прямых, не пересекающих данную прямую. Все эти прямые лежат внутри некоторого угла, названного Лобачевским углом параллельности.

Строя свою геометрическую систему, подобно тому как это делал Эвклид, Лобачевский все более и более убеждался в том, что она не содержит внутренних противоречий. Неожиданность результатов новой геометрии, нарушавших все привычные представления, привела к тому, что долгие годы открытие Лобачевского оставалось непонятым. Великий ученый смелой мыслью настолько опередил свое время, что на его долю от современников достались только насмешки.

Многие глубокие и любопытные факты имеют место в геометрии Лобачевского. Часть из них, оказывается, противоречит представлениям, воспитанным на геометрии Эвклида. Так, например, в геометрии Лобачевского нет подобных фигур и, скажем, два треугольника, у которых все углы одного равны соответственным углам другого, обязательно равны между собой. Или известная задача о квадратуре круга (т. е. задача построения с помощью циркуля и линейки квадрата равновеликого данному кругу) в геометрии Лобачевского разрешима, тогда как в геометрии Эвклида она не может быть решена этими средствами. В геометрии Эвклида все треугольники, независимо от величины их сторон, имеют сумму углов, равную двум прямым; в геометрии же Лобачевского сумма углов треугольника зависит от величины его сторон и всегда меньше двух прямых. При этом, чем меньше размеры сторон, тем меньше уклоняется сумма углов от двух прямых.

Созданием своей геометрии Лобачевский завершил тысячелетние попытки доказать аксиому о параллельных с помощью остальных аксиом Эвклида, показав невозможность этого. Действительно, если остальные аксиомы одинаково совместимы с двумя противоположными утверждениями (аксиомами Эвклида и Лобачевского), то ясно, что из них не могло следовать ни одно из этих двух утверждений.

14. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Повторение арифметики, а также приведение в порядок тех обобщений понятия числа, с которыми встречались учащиеся на протяжении курса, дают повод для многих интересных бесед из истории русской науки. Мы ограничимся здесь изложением лишь нескольких ярких эпизодов касающихся таких разделов теории чисел, которые вполне доступны для изложения перед школьной аудиторией, состоящей из учащихся второго концентра.

Понятие целого положительного числа является одним из важнейших для человеческого общества. Достаточно лишить человечество этого понятия, чтобы в значительной мере обеднели наша духовная жизнь и практическая деятельность. Действительно, при этом мы лишились бы возможности считать, измерять расстояния, время, производить расчеты, подводить итоги результатам труда. Недаром с древних времен целое число было одним из основных объектов научного творчества, с одной стороны, и предметом мистических откровений, — с другой.

Еще древние греки знали, что целые числа резко разделяются на два класса: простые и составные. Простые числа — те, которые без остатка делятся только на себя и на единицу. Все же остальные числа, являющиеся, следовательно, произведениями простых чисел, называются составными. Простые числа являются, так сказать, теми элементами, из которых строится все многообразие целых чисел.

Простым числам со времени Эвклида уделялось много внимания, но нахождение тех закономерностей, которым подчиняется их расположение в ряду натуральных (т. е. всех целых положительных) чисел, было сопряжено с огромными трудностями. Недаром только два общих результата, полученных еще Эвклидом и Эратосфеном, дошли до XIX в. Эвклид доказал, что число простых чисел бесконечно, а Эратосфен указал прием (Эратосфеново решето), посредством которого можно получить все простые числа. За две тысячи лет, прошедшие с этого времени, не произошло почти никаких сдвигов, хотя вопросом распределения простых чисел занимались многие гениальные математики. Пробить первую брешь в этом труднейшем вопросе теории чисел удалось лишь в 1849 г. нашему соотечественнику — Пафнутию Львовичу Чебышеву.

В конце XVIII в. французский математик Лежандр, изучая таблицы первых тысяч простых чисел, пришел к выводу, что число простых чисел, меньших чем данное число x, приближенно подчиняется следующей формуле[1]:

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1{,}08366}.$$

Это утверждение было чисто эмпирическим фактом, установленным лишь для незначительной группы чисел: переносить его за пределы таблиц, на все значения x, не было решительно никаких оснований, а путей для его доказательства совсем не было видно.

„Первый после Эвклида, кто пошел верным путем в вопросе о простых числах и достиг важных результатов, был Чебышев“[2]. Он прежде всего обнаружил ошибку в эмпирической формуле Лежандра, строго показав, что если существует предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{\pi(x)} - \ln x \right),$$

[1] Здесь $\pi(x)$ означает число простых чисел, меньших чем x. Так например, $\pi(5) = 2$, так как имеются только два простых числа, меньших 5; $\pi(10) = 4$ и т. д.

Символ $\ln x$ означает так называемый натуральный логарифм числа x, т. е. логарифм, в основание которого положено число $e = 2{,}7182818284 54590\ldots$ Это число играет основную роль в современной математике.

[2] E. Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 1909 г.

то он может равняться только — 1. Доказательства существования этого предела Чебышеву найти не удалось, это было сделано только в конце прошлого века.

Далее Чебышев доказал, что функция $\pi(x)$ бесчисленное множество раз удовлетворяет неравенству

$$\pi(x) > \int_{2}^{x} \frac{dx}{\ln x} - \frac{\alpha x}{\ln^n x}$$

и неравенству

$$\pi(x) < \int^{x} \frac{dx}{\ln x} + \frac{\alpha x}{\ln^n x} \cdot \quad \ldots\ldots \qquad (1)$$

при любом малом положительном α и сколь угодно большом n.

В другом исследовании, напечатанном спустя три года после первого, Чебышев обнаружил, что при любом $x > 3$ имеют место неравенства

$$0{,}92129\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1{,}10555\frac{x}{\ln x}.$$

Этот результат дал, с одной стороны, достаточно ясную картину роста числа простых чисел в натуральном ряду, а с другой, — позволил доказать так называемый постулат Бертрана. Этот постулат (предположение) французского математика Бертрана состоит в том, что при любом целом n между числами n и $2n-2$ содержится хотя бы одно простое число. Понадобился он в связи с алгебраическими исследованиями. Все старания Бертрана доказать этот простой по формулировке арифметический факт были тщетны, и он был вынужден лишь условно доказать свои алгебраические теоремы, основываясь на недоказанном им постулате его имени.

Покажем, как из неравенства Чебышева может быть выведен постулат Бертрана. Имеем:

$$\pi(2n-2) \geq 0{,}92129\frac{2n-2}{\ln(2n-2)} = 1{,}84258\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln n}{\ln(2n-2)} \cdot \frac{n}{\ln n}.$$

---

[1] В устном рассказе следует заменять интеграл $\int_{2}^{x} \frac{dx}{\ln x}$ на $\frac{x}{\ln x}$.

Для всех достаточно больших значений n (по таблицам логарифмов легко подсчитать, что для всех $n \geqslant 10$) множитель

$$1{,}84258 \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right) \ln n}{\ln (2n-2)} > 1{,}10555 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Отсюда следует, что

$$\pi(2n-2) > 1{,}10555 \frac{n}{\ln n} > \pi(n).$$

Но если бы между n и $2n-2$ не было простых чисел, то имело бы место равенство $\pi(n) = \pi(2n-2)$. Таким образом, полученное неравенство дает доказательство постулата Бертрана для всех $n \geqslant 10$. Непосредственная проверка дает доказательство постулата Бертрана и для $n < 10$.

15. Проблема Гольдбаха

В 1742 г. академик Петербургской Академии наук Христиан Гольдбах в письме к другому члену той же Академии, одному из величайших ученых — Леонарду Эйлеру, высказал предположение, что каждое целое число, большее шести, может быть представлено в виде суммы не более, чем трех простых чисел. Многочисленные попытки доказать это предположение систематически заканчивались неудачами. Прошел XVIII в., за ним XIX, а задача Гольдбаха оставалась все такой же таинственной и недоступной: к решению ее многие приступали, но успеха не имели. Не было недостатка и в экспериментальных попытках, натолкнувшись на противоречащий пример, завершить эти искания. Сначала Георг Кантор проверил все числа до 1000, затем Обри продолжил исследование до 2000, Миле в 1911 г. провел изучение всех чисел до 9 000 000. Все напрасно — противоречащих примеров не находилось. Вместе с тем в деле доказательства проблемы Гольдбаха не происходило и сдвигов: ведь проверено было только конечное число чисел, а основная их масса, бесконечное их множество, так

[2] Для этих подсчетов достаточно десятичных логарифмов, так как для любых оснований логарифмов a и b произвольных положительных чисел x и y имеет место равенство:

$$\frac{\lg_a x}{\lg_a y} = \frac{\lg_b x}{\lg_b y}.$$

и остались нерассмотренными. Из всех этих безуспешных начинаний был сделан довольно безутешный вывод: „Проблема Гольдбаха превосходит силы современной математики". Эти слова были сказаны в 1912 г. на Международном математическом конгрессе в Кембридже одним из лучших знатоков теории чисел начала нашего века Ландау.

Первый крупный успех в проблеме Гольдбаха был достигнут в 1930 г. молодым советским математиком Львом Генриховичем Шнирельманом (1905—1938). С помощью особого созданного им приема ему удалось показать, что всякое целое число может быь представлено в виде суммы не более чем, примерно, 800000 слагаемых. Принципиальный шаг был сделан, оставалось улучшать найденный метод и уменьшать полученную оценку. На этот путь и встали многие математики, как у нас, так и за границей. В 1935 г. воспитанник Московского университета Н. П. Романов, уточнив некоторые неравенства в работе Шнирельмана, показал, что число необходимых слагаемых не превосходит 2208. Через год целая группа математиков — Гейльборн, Ландау и Шерк, улучшив оценку Шнирельмана — Романова, уменьшили верхнюю границу для числа необходимых слагаемых до 71. Наконец, в 1937 г. итальянский математик Ричи уменьшил это число еще на 4, доведя его до 67.

Понятно, что такое понижение верхней границы для числа слагаемых могло бы продолжаться и дальше, так как едва ли исчерпаны все возможности улучшения метода Шнирельмана. Но вступили в действие новые обстоятельства: в том же 1937 г. академику Ивану Матвеевичу Виноградову удалось совершенно новым методом, путем рассмотрения тригонометрических сумм, показать, что всякое нечетное число, большее некоторого числа N_0, является суммой не более чем трех простых. Отсюда для четных чисел немедленно вытекало, что они являются суммой не более чем четырех простых. Результат Виноградова быстро облетел математический мир и еще выше поднял славу советской математики. В обзорных докладах, прочитанных в математических обществах Франции, Англии и других стран, специалисты называли теорему Виноградова одним из самых блестящих проявлений человеческого гения в XX в.; Лондонское королевское общество[1] избрало его своим членом.

Так постепенно упорным трудом человечество добилось дальнейшего расширения знаний свойств целых чисел.

---

[1] Английская академия наук.

16. СЕДЬМАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

На Международном математическом съезде 1900 г. один из крупнейших математиков конца XIX — начала XX в. Давид Гильберт выступил с докладом о труднейших проблемах современной математики, ожидающих своего разрешения. Таких проблем он перечислил 23; среди них под номером „7" находилась проблема арифметического характера. Формулировку ее мы дадим после небольшого отступления, необходимого для полного понимания поставленной Гильбертом задачи.

Известно, что алгебраическим числом называется число, которое может быть корнем какого-либо уравнения

$$a_u x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

с целочисленными коэфициентами $a_0, a_1 \ldots a_n$.

В частности, алгебраическими числами являются все целые положительные и отрицательные числа, все рациональные дроби, все квадратичные иррациональности, в чем легко может убедиться учащийся путем построения соответствующих алгебраических уравнений первой и второй степени ($n=1$, $n=2$). Все неалгебраические числа называются трансцендентными. В конце прошлого века было обнаружено, что трансцендентных чисел неизмеримо больше, чем алгебраических, однако, конкретных примеров трансцендентных чисел было известно очень немного. Первые примеры таких чисел были указаны в 1851 г. французским математиком Лиувиллем, затем в 1873 г. французскому математику Эрмиту удалось показать трансцендентность важного для математического анализа числа e ($e = 2,718281828\ldots$) Через девять лет, опираясь на результат Эрмита, Линдеман доказал трансцендентность числа π. Этим результатом была окончательно показана невозможность решения задачи о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки. Указание новых классов трансцендентных чисел, естественно, представляет значительный интерес.

Гильберт в седьмой проблеме высказал следующее предположение: всякое число вида α^β, где α и β — алгебраические числа, причем $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, а β — иррационально, является числом трансцендентным.

В задаче Гильберта все было неизвестно. Результат был неизвестен даже для частных примеров. Так, каковы, скажем, числа $2^{\sqrt{2}}$ или e^{π} [1]: рациональные, трансцендентные, или иррациональные, но алгебраические?

Проблемы Гильберта после их опубликования вызвали огромный интерес, но решению поддавались с большим трудом. В течение тридцати лет седьмая проблема так и оставалась только проблемой, бросающей вызов математикам. Лишь в 1929—1930 гг. первая брешь в этой проблеме была пробита московским математиком Александром Осиповичем Гельфондом (род. 1906 г.). Он показал, что если α — алгебраическое число, отличное от 0 и 1, а β — квадратическая мнимая иррациональность, то α^{β} — трансцендентно. В том же 1930 г. ленинградский математик Р. О. Кузьмин показал, что в теореме Гельфонда можно освободиться от требования мнимости показателя. Понятно, что этими исследованиями решался, в частности, вопрос о природе упомянутых выше чисел $2^{\sqrt{2}}$ и e^{π} — они трансцендентные.

Через четыре года совсем иным методом, использующим очень тонкие приемы математического анализа, А. О. Гельфонду удалось полностью разрешить проблему Гильберта.

17. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Прохождение темы „Сочетания, размещения и перестановки", так резко отличной по своей структуре от остальных частей школьной математики, должно дать повод для небольших отступлений в область теории вероятностей — науки о случайных явлениях. Это важно сделать и для того, чтобы указать учащимся на возможные приложения теории, и для того, чтобы расширить их кругозор, и для того, чтобы рассказать им о том, что за последние сто лет теория вероятностей привлекала внимание многих крупнейших ученых, работавших в России. Имена П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова, С. Н. Бернштейна, А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова и др. неразрывно связаны с успехами этой науки; именно им теория вероятностей обязана новыми направлениями исследований, а также важнейшими своими результатами. Недаром русская школа теории вероятностей со времени Чебышева играет руководящую роль в мировой науке.

---

[1] Читатель, знакомый с формулой Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, легко убедится в том, что $e^{\pi} = i^{-2i}$, где $i = \sqrt{-1}$, и, значит, является числом рассматриваемого типа.

Каждый в обыденной речи слышал и сам употреблял выражения, подобные следующим: „Случайно я его встретил“, „Ну, это только случай, что он выжил“. Каждый раз, говоря о случайном, мы думаем о том, что редко случается, что идет вразрез с нормальным порядком вещей. На самом же деле случай проявляет себя повсеместно, каждое мгновение, с ним приходится постоянно считаться как в явлениях природы, так и в технических процессах. Огромное количество явлений, закономерный характер которых для нас не представляет сомнений чуть ли не с первых лет школьного обучения, на самом деле представляет собой не что иное, как проявление законов случая.

Рассмотрим, например, процесс стрельбы по некоторой цели. Оказывается, что при многократной стрельбе из одного орудия, одним и тем же стрелком, в одних и тех же условиях неизбежно происходит явление рассеивания снарядов: снаряды попадают не точно в цель, а располагаются поблизости от цели на разных расстояниях. Случайные уклонения точки попадания снаряда от цели не представляют собой какие бы ни было исключительные события, наоборот, теория стрельбы считается с ними, как с одним из основных факторов стрельбы, изучает их, и результаты этого изучения использует для выработки правил стрельбы.

По современным физическим воззрениям всякий газ состоит из огромного числа отдельных частиц — молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении. Состояние газа—его давление, температура, вязкость и пр.—является проявлением совместного действия этих хаотических движущихся частиц. Так, давление газа определяется числом молекул, ударившихся в единицу времени о стенку сосуда, в который заключен газ, и скоростями, с которыми произошли эти соударения. То и другое — дело случая. Таким образом, давление газа отдано во власть случая! Как же это согласовать с законом Паскаля, многократно проверенном на опыте? Как объяснить с этой точки зрения то постоянство давления газа во все стороны, о котором нам говорит эксперимент? Не идет ли вообще закон Паскаля, вразрез с положениями кинетической теории? Оказывается, что нет и даже больше: он является следствием основного предложения теории вероятностей — закона больших чисел. Оказывается, что и многие другие физические законы — Бойля-Мариотта, Дальтона и др. также являются следствиями того же общего принципа теории вероятностей.

Закон больших чисел состоит в следующем: **среднее значение очень большого числа случайных величин, принимающих свои значения независимо друг от друга, с практической достоверностью равно постоянной величине.**

Разъясним на примерах значение этого предложения. Известно, что как бы тщательно не производилось какое-либо измерение, невозможно получить абсолютно точный результат. Неизбежны ошибки. Поэтому в результате многократных измерений получается ряд значений, вообще говоря, отличающихся друг от друга. Какое же из них считать истинным? Как найти наиболее точное значение величины измеряемого объекта? Закон больших чисел как раз и утверждает, что среднее арифметическое результатов отдельных измерений практически не будет отличаться от измеряемой величины. Вернемся к примеру с давлением. Так как давление газа складывается из огромного числа ударов отдельных частиц, то среднее значение этих отдельных давлений (а значит, и результирующее давление) практически постоянно. Таким образом, закон больших чисел дает нам представление о суммарном действии большого числа случайных величин.

Установить, в каких условиях справедлив закон больших чисел — значит, дать всему естествознанию и технике надежную основу для применения этого закона. Первые общие результаты в этом направлении принадлежат П. Л. Чебышеву. Затем усилиями А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова решение этой большой математической задачи было завершено.

18. ТЕОРЕМА А. М. ЛЯПУНОВА

Результаты отдельных измерений, отдельные значения случайных величин, вообще говоря, сильно отличаются от их среднего значения. Возникает вопрос: как часто случайная величина, способная принимать различные значения, будет получать какое-либо определенное значение? Так может возникнуть вопрос: какая доля ошибок измерений имеет данную величину? Физику может потребоваться ответ на такой вопрос: какая часть молекул газа, находящегося в некотором определенном состоянии, обладает данной скоростью? Ответ на эти вопросы дает теорема А. М. Ляпунова, или, иначе, центральная предельная теорема теории вероятностей. Еще Лаплас высказал следующее предположение. Если некоторая случайная величина является результатом суммарного воздействия большого числа независимых случайных величин, каждая из которых лишь ничтожно мало влияет на результат, то она получает свои значения по вполне определенному, так называемому нормальному закону. Именно вероятность того, что эта случайная величина имеет значение между x и x + h (h — мало) равна

$$\frac{h}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Здесь a и σ — некоторые постоянные, а e = 2,71281828...

Однако это предположение было только гипотезой, и для него не было видно пути доказательства даже в простейших случаях, даже при очень жестких предположениях о характере слагаемых. В конце прошлого века П. Л. Чебышев предложил метод доказательства этого предложения, но в его рассуждения вкралась ошибка. Эту ошибку нашел и исправил его ученик А. А. Марков, однако, при этом Марков наложил довольно суровые ограничения на слагаемые. Через несколько лет, в 1901 г. другой ученик Чебышева — Ляпунов нашел другое доказательство этой теоремы в условиях чрезвычайно общих, более чем достаточных для любых практических приложений. После Ляпунова изыскания еще более общих условий для приложимости центральной предельной теоремы искали ученые как у нас, так и за границей. В настоящее время эта задача доведена до логического завершения, но после того, что было сделано Ляпуновым, последующие изыскания скорее носили более технический, чем принципиальный характер.

Следующий сдвиг в этой проблеме был сделан академиком С. Н. Бернштейном. Мы проиллюстрируем постановку задачи Бернштейна на следующем простом, но важном примере. При стрельбе по некоторой цели, находящейся на земной поверхности, снаряды не попадают, вообще говоря, точно в точку прицеливания, а рассеиваются по плоскости. Возникает задача определения вероятности того или иного уклонения снаряда от цели. Исходя из гипотезы, что уклонение снаряда от цели происходит под влиянием огромного количества зависящих от случая причин, каждая из которых лишь ничтожно мало влияет на результат, Бернштейн показал, что оно подчиняется особому закону распределения вероятностей — двумерному нормальному закону.

19. ТЕОРИЯ КОРАБЛЯ

Естественно, что в исторических беседах ограничиваться только успехами теоретической математики никак нельзя. Совершенно неизбежно в среде учащихся возникает интерес также и к вопросам использования математики в вопросах техники. Недавняя смерть выдающегося ученого академика Алексея Николаевича Крылова наводит меня на мысль о таких беседах из области кораблестроения.

Уже многие тысячелетия человечество строит суда для передвижения и для перевозки грузов, а также для военных целей. Тысячелетиями только эксперимент и опытность судостроителей вводили усовершенствования в мореходные качества кораблей. Медленно, но неуклонно совершенствовалась эта область техники; опытный глаз и твердая рука, а не математический расчет, решали вопросы формы корабля, оснастки и пр. История сохранила для нас сведения о первой попытке применения расчета в деле кораблестроения. Эта попытка с полным успехом была произведена в 1666 г. английским кораблестроителем Антони Дином при постройке линейного корабля Rupert. Ведя во время постройки подсчет всех грузов, входящих в вес корабля, и вычислив его водоизмещение по чертежу, он предсказал осадку корабля до его спуска на воду. Более того, пользуясь этим расчетом, он приказал прорезать орудийные порта [1] еще при стоянке корабля на стапеле, чего раньше никогда не делалось. Эти обычные, впоследствии, расчеты в то время вызвали всеобщее удивление.

Бурный рост математики в XVIII в. сказался и на кораблестроении. Создание диференциального и интегрального исчислений позволило подвести научный базис под факты, выявленные кораблестроительной практикой. Появилась возможность не только экспериментального, но и теоретического изучения мореходных качеств корабля. В результате в XVIII в. создалась новая научно-прикладная дисциплина — „теория корабля", проверяющая свои выводы на соответствующим образом поставленных экспериментах. Парижская академия наук объявляла премии за наиболее удачное построение теории различных жгучих вопросов кораблестроения и кораблевождения. В результате многие ученые, в особенности во Франции, заинтересовались этими вопросами. Выдающийся ученый, член Петербургской ака-

[1] Отверстия в бортах для стрельбы из орудий.

демии наук Леонард Эйлер принял самое непосредственное участие в создании этой новой теории. Он участвовал своими работами в конкурсах Парижской академии, выполнял научные поручения Адмиралтейства и, наконец, в 1749 г. написал и издал обширный двухтомный трактат „Scientia Navalis“ („Морская наука“), долгое время служивший настольной книгой как кораблестроителя, так и ученого, работающего в этой области.

Интересно отметить то влияние, которое оказывало развитие теории корабля на фактическое улучшение мореходных качеств судов. С этой целью мы приведем следующую выдержку из книги[1] инженера, контр-адмирала А. П. Шершова.

„Французские корабли, уступая английским в опытности судового состава, были совершеннее их по конструкции и ходовым качествам, так как применявшиеся французскими кораблестроителями научные обоснования давали возможность выбора лучших обводов и проектирования парусности кораблей. Сами англичане говорили, что взятые ими в плен французские корабли служили им образцом для усовершенствования, а английские командиры напрашивались на командование французскими фризами“.

В дальнейшем развитие науки теория корабля уже не прекращалось, а связь ее с математикой только возрастала. Развитие целого ряда важнейших теорий без использования очень тонких средств математического анализа было бы невозможным. Так, создание общей теории качки корабля на волнении, связанное с именем академика Крылова, потребовало не только использования уравнений движения, но и теории рядов Фурье и даже методов расчета, употребляющихся в астрономии для вычисления движения небесных тел. Создание теории качки корабля на волнении интересовало ученых уже давно, так как, во-первых, учет всех напряжений в корабле, возникающих при качке, необходим при проектировании корабля при расчете его выносливости. Кроме того, военному кораблю приходится вести бой, а значит и производить стрельбу, на любом волнении. Теория боковой качки была создана в первой половине XIX в. английским ученым Фрудом, теория же килевой качки, а тем более общая теория качки, не поддавалась усилиям крупнейших ученых. Лишь в конце прошлого века

[1] А. П. Шершов, История военного кораблестроения с древнейших времен и до наших дней, 1940 г., стр. 99.

это удалось сделать Крылову. Создание теории качки принесло Крылову всемирную славу, его теория почти без всяких изменений излагается во всех кораблестроительных учебных заведениях мира.

20. ДЕВИАЦИЯ КОМПАСА

В числе первых лауреатов Сталинской премии оказался академик Крылов, получивший это почетное отличие за свои работы по девиации компаса. Вот что говорит об истории этого вопроса сам А. Н. Крылов[1]:

„Я приведу типичный пример того, как казалось бы, чисто теоретическая работа через сорок лет послужила основой для важного практического применения, в громадной мере способствовавшего безопасности мореплавания.

В 1824 г. в своих обширных работах по математической теории магнетизма Пуассон дал общие уравнения равновесия компасной стрелки на корабле, принимая в расчет возмущающее влияние на компас железа, входящего в состав крепления и вооружения корабля...

Для физиков эти уравнения интереса не представляли, для моряков были и недоступны и непонятны; так и остались они как бы под спудом в одной из 400 статей этого знаменитого и плодовитого автора. Лишь астроном Эри, воспользовавшись соображениями Пуассона, показал простой способ — размещая около компаса определенным образом магниты и бруски железа, — производить на компас действие, обратное влиянию судового железа или, как говорят, уничтожать девиацию компаса. Но девиация, уничтоженная в одном месте, появлялась вновь при переходе корабля в другие области.

Во времена Пуассона, умершего в 1841 г., корабли были деревянные, железа на них было сравнительно мало, влияние его не велико, погрешности компаса поглощались другими погрешностями при плавании под парусами.

Но с середины 1840-х годов начало развиваться железное судостроение, и стали строить паровые суда, установились срочные регулярные на них заокеанские сообщения, быстро развивающиеся. И вот в 1862 г. на протяжении месяца гибнут один за другим у берегов Ирландии два больших пассажирских парохода, державших сообщение

---

[1] А. Н. Крылов, Прикладная математика и ее значение для техники, 1931 г., стр. 9—11.

с Америкой, причем на каждом, кроме ценного груза, гибнет по несколько сот человек.

Произведенное следствие обнаружило, что одной из главных причин гибели была погрешность в показаниях компаса, вследствие которой корабль шел по ложному курсу.

Общественное мнение Англии встревожилось, по требованию парламента Адмиралтейством был образован компасный комитет, в него вошли: математик Смит, астроном Эри и капитан Эванс.

Вспомнили об уравнениях Пуассона, привели их простым преобразованием к удобному пользованию, одним словом, издали практическое руководство по девиации компаса, вполне доступное любому образованному моряку.

В это время в Англии строился первый русский броненосец — броненосная батарея „Первенец", командовал ей И. П. Беловенец, по представлению которого в Кронштадте была основана Компасная обсерватория, и в нее определен помощником Беловенца моряк, превосходный математик — И. П. Коллонг.

Коллонг вскоре значительно продвинул вперед теорию девиации компасов, воспользовавшись свойством одной кривой, открытой еще в 1640-х г. Паскалем и называемой „улиткой Паскаля". Затем Коллонг продолжал непрестанно работать по компасному делу: изобрел ряд приборов для измерения магнитных сил и уничтожения девиации, усовершенствовал компас и, начиная с 1880 г., на всех наших судах были приняты компасы его системы, до сих пор остающиеся лучшими в мире.

На этом типичном примере особенно ясно видно воздействие и проникновение в технику и практику отвлеченной теоретической работы. Знаменитый автор дает теоретическое обоснование, но не вдается в подробности и детали; затем знающие специалисты, достаточно подготовленные, разбираются в его теории, придают ей практически применимую форму и вносят ее результаты в жизнь, в обиход, в технику.

Я потому привел этот пример, что в нем весь процесс закончился в сравнительно короткое время, и потому, что дело это мне хорошо известно, так как с 1884 г. я в течение нескольких лет работал как ближайший помощник и ученик И. П. Де-Коллонга, теорию девиации компаса и практику ее определения и уничтожения изучил тогда основательно, так что и сам внес кое-что новое в это дело, пока не перешел на более крупное, — на кораблестроение".

21. ТАБЛИЦЫ НЕПОТОПЛЯЕМОСТИ

Академик А. Н. Крылов был одним из наиболее выдающихся математиков, артистически владеющих искусством использования богатств теоретической математики в применении к практическим нуждам техники и экономики. Он говорил [1], что „математические теории, кажущиеся отвлеченными и приложений не имеющими, может быть завтра найдут себе приложение совершенно неожиданное, а может быть, и через две тысячи лет; но всякая истина всегда представляет вечный вклад в сокровищницу человеческого знания, независимо от того, когда этой истиной воспользуются". Основная задача человечества должна состоять „не только в использовании старых сокровищ, уже имеющихся, но и в накоплении новых, не только в использовании процентов, но и в создании капитальных вложений" [2].

Мы расскажем совсем кратко об одном блестящем использовании „процентов с капитала теоретической математики", притом достигнутом совершенно элементарными средствами, — о таблицах непотопляемости, созданных А. Н. Крыловым.

Известно, что трюм корабля разделен водонепроницаемыми перегородками на отсеки. Это делается для того, чтобы вода, проникнув по той или иной причине внутрь корабля, не заполняла всего трюма, и тем самым уменьшались бы шансы гибели судна. При получении кораблем пробоины вода мощным потоком устремляется внутрь корабля. Редко удается заделать пробоину судовыми средствами и затем, откачав воду из затопленного отсека, вновь вернуть кораблю его пловучесть, а экипажу корабля возможность работать в нормальных условиях. Обычно же приходится предоставлять воде полную свободу заливать отсек. Для того чтобы составить себе некоторое представление о мощи потока воды, устремляющегося в пробоину, приведем следующую цитату из „Теории корабля" А. Н. Крылова [3]. „Количество воды, вливающееся, например, через пробоину в 1 кв. фут, погруженную на 16 футов, составляет около 2000 тонн в час. Даже с такой течью наиболее мощные водоотливные средства едва бы справились, пло-

---

[1] Крылов, Прикладная математика и ее значение для техники, стр. 15.

[2] Там же.

[3] Крылов, Теория корабля, ч. I, 1907 г., стр. 299.

щадь же пробоин может составлять десятки и сотни кв. футов. Таким образом, надо вообще считать, что поврежденные отделения корабля останутся затопленными, а тогда выравнивание может быть единственно достигнуто затоплением других отделений, кроме поврежденных". Корабль, получив в этом случае в трюм огромное количество воды, достигает значительного крена, не только мешающего нормальной работе судового экипажа, но и грозящего кораблю гибелью из-за опрокидывания. И вот в такой грозный для команды судна момент рекомендуется путем затопления отсеков с противоположной стороны корабля уменьшить полученный им крен. История судоходства знает множество случаев, когда капитан корабля, растерявшись, видя перед собой опасность гибели, отдавал приказ о затоплении не тех отсеков, которые нужно было затопить, придавал кораблю еще больший крен, и корабль погибал со всем экипажем, перевернувшись вверх дном.

Крылов предложил создать таблицы, в которых заранее было бы рассчитано, как скажется на судне затопление тех или иных отсеков, какие номера отсеков нужно затоплять для выравнивания крена и на сколько это сознательное затопление может улучшить состояние корабля. Эти таблицы получили название таблиц непотопляемости. Теперь таблицами непотопляемости снабжаются все корабли всех флотов мира. Мероприятие простое, но сколько оно спасло человеческих жизней, сколько материальных ценностей сохранено посредством него! Так, в руках знающего, умелого человека даже обычные школьные арифметические познания могут делать чудеса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заканчивая настоящую брошюру, мы должны заметить, что нами затронуты лишь немногие достижения русских математиков. Мы совсем не касались здесь превосходнейших исследований академика А. М. Ляпунова по теории фигур равновесия жидких масс, по теории устойчивости движения, исследований Маркова, Золотарева, Вороного и др. в области теории чисел, исследований Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина и др. по теории самолета; превосходных работ современных математиков в геометрии, теории функций, алгебре, теории вероятностей и других разделах математики. Совсем в тени оставлены нами работы наших ученых по использованию математики в различных технических дисциплинах. Создание более обширного произведения, в котором найдут отражение и эти пропущенные мной моменты истории развития науки в нашей стране, должно быть на очереди у авторов-историков, заботящихся о пополнении библиотечек учителя и любознательного учащегося.

Мне представляется весьма важным в педагогических целях подчеркивание того факта, что наша страна сделала за какие-нибудь полтораста—двести лет колоссальный скачок вперед в области математики. Период робких заимствований элементарно-математических познаний сменился очень быстро периодом первоклассных творческих дерзаний. И этот переход из научного ничто в разряд научно-творящих народов наш народ осуществил гениальным творением—созданием неэвклидовой геометрии. Своим открытием Лобачевский разрушил догму неподвижной, единственной истинной эвклидовой геометрии, подобно тому как Коперник разрушил догму о неподвижной земле как центре вселенной. Недаром английский математик Клиффорд назвал Лобачевского „Коперником геометрии". Мы уже говорили, что общематематическое значение открытия Лобачевского чрезвычайно велико, что оно знаменовало собой целую эпоху в науке. Дело в том, что одно из наиболее существенных отличий математики XIX в. от математики XVIII в. заключается в том, что математика перестала быть собранием методов для решения тех или иных задач, поставленных ей естествознанием, а стала наукой, имеющей свой объект изучения, стала наукой, по-своему подходящей к общей задаче всех наук — познанию окружающего нас мира. После создания неэвклидовой геометрии не могло уже оставаться сомнений в том, что предметом геометрии должно быть не только наивное познание окружающего нас физического пространства, а изучение вообще всех „абстрактных пространств", к которым приводит отвлечение от непосредственных данных опыта. К этому человечество не могло притти, минуя открытие Лобачевского.

А ведь за несколько лет до Лобачевского русские люди попросту даже не думали о возможности самостоятельных творческих дерзаний в математике. Лобачевским открывается блестящий период уверенного завоевания русскими учеными передовых позиций в науке. С этих пор множество блестящих открытий как чисто теоретических, так и прикладных, было внесено русскими и советскими учеными в сокровищницу науки. Много уже сделано, но ещё больше остается сделать: жизнь не стоит на месте, новые открытия, новая техника, развитие естествознания ставит перед математикой новые проблемы. Не стоит на месте и сама математика. Ее развитие, в свою очередь, также ставит перед учеными новые актуальные проблемы. Эта идея развития науки должна быть доведена до учащихся. Не следует забывать, что следующие слова[1] Чебышева до сих пор не потеряли своей актуальности.

„Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает явно их неполноту во многих отношениях: она предлагает вопросы, существенно новые для науки и, таким образом, вызывает на отыскание совершенно новых методов. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике“.

Будущее науки принадлежит молодежи, — той молодежи, которая хочет познать окружающий ее внешний мир и овладеть скрытыми в природе силами. Но для того, чтобы самому участвовать в великих победах науки, „надлежит совершенно и основательно дело свое разуметь, ибо от мало дело свое знающих земля никакой пользы получить не может...“.

(Из писем Лейбница Петру I)

---

[1] „Черчение географических карт“. Собрание сочинений, т. I, стр. 239.

СОДЕРЖАНИЕ

Отв. редактор *В. Л. Гончаров*

Техн. редактор *В. П. Гарнек*

Подписано к печати 27|VII 1946 г. А-06719. Тираж 25000. Заказ № 1281.
Цена 1 р. 20 к. Формат бумаги 84×108¹|₃₂ Объем 2,5 печ. л., зн. в печ. л. 39856.
Колич. уч. изд. л. 2,5.

2-я ф-ка детской книги Детгиза Министерства Просвещения РСФСР.
Ленинград, 2-я Советская, 7.

ОПЕЧАТКИ

к книге Гнеденко. Краткие беседы о зарождении и развитии математики.

Страница	Строка сверх.	Строка снизу	Напечатано	Должно быть
7	5		*а ц т s*	***а ц м s***
8	17—18		относящемся 1134 г.	относящемся к 1134 г.
10		1	сведующих	сведущих
16	8		(у нас с конца XVII в.	(у нас с конца XVIII в.)
17		1	за $1^5/_6$ часа	за $^6/_{11}$ часа
24	8		$\pi(x) < \int^{x} - \frac{dx}{lnx} + \frac{\alpha x}{ln^n x}$	$\pi(x) < \int_{2}^{x} \frac{dx}{lnx} + \frac{\alpha x}{ln^n x}$
26	12		800000 слагаемых	80000 слагаемых
28		2 (сноска)	$e^{\pi} = i^{-2i}$, где $i \cdot \sqrt{-1}$.	$e^{\pi} = i^{-2i}$, где $i = \sqrt{-1}$.
30	7		не производилось	ни производилось
35	15		командовал ей	командовал ею

Цена 1 р. 20 к.