И. И. Баврин

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК И ЗАДАЧНИК ДЛЯ СПО

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебника для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 519(075.32)
ББК 22.17я723
Б13

Автор:

Баврин Иван Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики математического факультета, почетный профессор Московского педагогического государственного университета, академик РАО, лауреат премии Правительства Российской Федерации в области образования.

Рецензенты:

Царев А. В. — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры математического факультета Московского педагогического государственного университета;

Самойленко П. И. — доктор педагогических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии образования.

Баврин, И. И.

Б13 Дискретная математика : учебник и задачник для СПО / И. И. Баврин. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 193 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-07917-3

Профессионально ориентированный учебник содержит изложение основ дискретной математики, сопровождаемое рассмотрением математических моделей из естественнонаучных дисциплин, а также упражнения ко всем излагаемым вопросам.

Все основные понятия иллюстрируются примерами из этих дисциплин.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов естественнонаучных специальностей и специальности «Информатика» образовательных учреждений среднего профессионального образования, а также школьников старших классов.

УДК 519(075.32)
ББК 22.17я723

ISBN 978-5-534-07917-3

Оглавление

Предисловие

Математика как наука делится на дискретную (прерывную) и континуальную (непрерывную). К континуальной математике относят все, что явно или неявно содержит идею теории пределов и непрерывности. Все остальное — дискретная математика (например, арифметика, алгебра, теория множеств, матрицы, математическая логика, комбинаторика, графы, разностные уравнения, дискретная вероятность).

Дискретная математика — бурно развивающаяся за последние 100 лет ветвь математики. Ее методы широко используются в различных науках, включая физику, химию, биологию, генетику, информатику и др. Поэтому подготовка будущих учителей естественнонаучных специальностей и информатики тесно связана с получением прочных знаний не только по непрерывной, но и по дискретной математике. Это же касается и приобретения соответствующих практических навыков.

Настоящая книга содержит изложение тесно связанных меду собой разделов дискретной математики: множества (гл. 1), элементы комбинаторики (гл. 2), матрицы (гл. 3), конечные графы (гл. 4), логика (гл. 5), разностные уравнения (гл. 6), дискретная вероятность (гл. 7).

Кроме того, в приложениях дано краткое изложение чисел Фибоначчи и связанных с ними цепных дробей, приведены формулировки и решения задач по теории вероятностей, пришедших из глубины веков, а также приведены таблицы, связанные с дискретной вероятностью.

Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением примеров и задач, иллюстрирующих основные понятия дискретной математики и ее методы. К каждой из глав 1—7 есть упражнения (ответы к ним по мере необходимости приводятся сразу после текста — они помещены в квадратные скобки).

В книге особое внимание уделено рассмотрению математических моделей из естественнонаучных дисциплин.

Читателям, желающим углубить свои знания в области дискретной математики и ее приложений, следует обратиться к дополнительной литературе, приведенной в конце книги (ссылки на нее по мере надобности приводятся в книге в квадратных скобках).

В результате изучения материалов, представленных в учебнике, студенты должны освоить:

трудовые действия

• владения навыками и культурой вычислительной обработки экспериментальных данных;

• основами математического моделирования в соответствующей области знаний;

необходимые умения

• правильно употреблять математическую символику и оперировать математическим инструментарием;

• определять условия приложимости того или иного теоретического аспекта при решении практических задач;

• составлять корректные модели применительно к возникающим конкретным задачам и проводить их соответствующий обсчет;

• анализировать полученные на практике результаты и делать обоснованные выводы;

необходимые знания

• элементов теории множеств и комбинаторики;

• основ линейной алгебры;

• конечных графы;

• основных определений и способов анализа дискретных случайных величин.

Глава 1
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества и операции над ними

1. Основные понятия. *Множество* — это совокупность, собрание каких-либо объектов, объединенных общим признаком или свойством (эту фразу нельзя рассматривать как определение понятия «множество», так как в ней слово «множество» заменено столь же неопределенным термином «совокупность»). Объекты, которые образуют множество, называются *элементами* (или *членами*) этого множества. Примерами множеств могут служить: множество всех страниц данной книги (каждая страница является элементом этого множества); множество всех действительных чисел, больших 0 и меньших 1; множество больных в некоторой больнице; множество всех операций (работ) по сборке компьютера.

Множества будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, ..., X, Y, ..., а их элементы — малыми буквами a, b, c, ..., x, y, ...

Если элемент a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ (читается «a принадлежит A», или «a из A»). В этом случае говорят также, что «a содержится в A», «a входит в A» и т. п.

Если a не является элементом множества A, то будем писать $a \notin A$ («a не принадлежит A» или «a не содержится в A» и т. п). Если элементами множества являются числа, то оно называется *числовым*.

Многие из числовых множеств имеют специальные названия и обозначения.

Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$ ($a < x < b$), называется *сегментом* или *отрезком* (*интервалом*) и обозначается $[a; b]$ ($(a; b)$).

Полусегментом или *полуинтервалом* $[a; b)$ ($(a; b]$) называют множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$ ($a < x \le b$). Множества действительных чисел x, удовлетворяющих условию $x < a$ ($x \le a$) или $x > b$ ($x \ge b$), обозначаются соответственно $(-\infty; a)$ ($(-\infty; a]$) или $(b; +\infty)$ ($[b; +\infty)$). Множество всех действительных чисел обозначается символом $(-\infty; +\infty)$, или $|x| < +\infty$, или $\mathbb{R}$. Множество всех целых положительных чисел называют *натуральным рядом* (или множеством натуральных чисел) и обозначают $\mathbb{N}$.

Если множество содержит лишь конечное число элементов, то оно называется *конечным*. В противном случае множество называется *бес-*

конечным. Например, множество листьев на дереве или множество слушателей в данной аудитории — конечные множества; множества же $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $[a; b]$, $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b)$ (при $a \neq b$) — бесконечные множества.

Существуют различные формы задания множества. Наиболее простая состоит в указании всех элементов множества. Так, запись $A = \{1, 2, 3\}$ означает, что множество A состоит из трех элементов: 1, 2 и 3. Если число элементов бесконечно, то используется многоточие. Например, множество всех натуральных чисел записывается так: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Иной способ задания множества состоит в описании элементов определяющим свойством $P(x)$ (формой от x), общим для всех элементов $A = \{x\colon P(x)\}$. Например, $A = \{x\colon x = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ означает, что множество A состоит из четных положительных целых чисел 2, 4, 6, … . Аналогично $B = \{x\colon 0 < x < 10$ и x — четное$\}$ означает, что B состоит из 2, 4, 6, 8; $C = \{x\colon x$ — пациент определенной больницы$\}$ означает, что C состоит из пациентов этой больницы.

Если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, т. е. если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A, то множества A и B *равны* (*тождественны, совпадают*). Если множества A и B равны, то пишут $A = B$. Например, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. Равны также и множества

$$A_1 = \{x\colon 1 < x < 4, x \text{ — целое}\}$$

и

$$A_2 = \{x\colon x^2 - 5x + 6 = 0\}.$$

Элементы обоих множеств — это целые числа 2 и 3.

Пусть теперь имеются два множества A и B, относительно которых известно только, что каждый элемент множества B является элементом множества A. В этом случае говорят, что B есть *подмножество* A и пишут $B \subset A$ ($\subset$ — *знак включения*). Говорят еще, что «A содержит B» или «B включено в A». В частности, B может совпадать с A.

Пример 1.1. Множество четных чисел есть подмножество множества целых чисел.

Пример 1.2. Пусть $A = \{x\colon x$ — вид животных$\}$, $B = \{x\colon b$ — вид млекопитающих$\}$. Тогда $B \subset A$.

Теорема 1.1. *Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$.*

Доказательство. Из $B \subset A$ следует, что любой элемент из B является элементом множества A, а из $A \subset B$ — что любой элемент из A является элементом множества B, т. е. множества A и B состоят из одних и тех же элементов и, значит, $A = B$.

Обычно приходится рассматривать множества A, B, C и т. д., которые являются подмножествами некоторого достаточно обширного множества, рамки которого определяются целями исследования. Такое исходное множество называется *универсальным* и обозначается через U. Если изучаются всевозможные числовые множества, то универсальным будет множество всех действительных чисел.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Его обозначают $\varnothing$. Примерами пустого множества могут служить: множество людей на Солнце, множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Теорема 1.2. *Пустое множество является подмножеством любого множества A.*

Доказательство. Из определения подмножества следует, что B является подмножеством A, если B не содержит элементов, не являющихся элементами A. Но пустое множество не содержит ни одного элемента, поэтому оно не содержит и элементов, не принадлежащих A. Отсюда следует, что пустое множество есть подмножество любого множества A.

2. Операции над множествами. Пусть даны два множества A и B.

Определение. *Объединением* (или *суммой*) этих множеств называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

Обозначение: $C = A \cup B$ (или $C = A + B$). Знак $\cup$ называется *знаком объединения.*

На рис. 1.1 изображены два множества точек плоскости — круг A и круг B. Их объединение — это область, покрытая или горизонтальной, или вертикальной штриховкой.

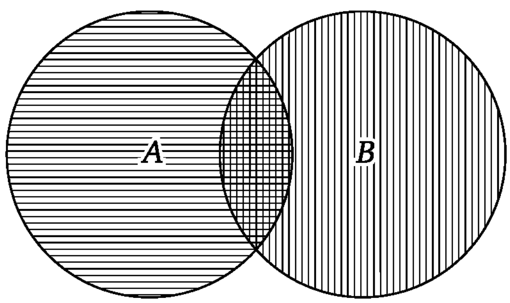


Рис. 1.1

Пример 1.3. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Пример 1.4. Определим A как множество курящих мужчин в какой-либо популяции, а B — как множество отцов в этой популяции. Тогда множество $A \cup B$ есть множество всех мужчин в популяции, которые являются либо курильщикамяи, либо отцами, либо курильщиками и отцами одновременно.

Заметим, что $A \cup A = A$. В общем случае $A \subset (A \cup B)$; так же и $B \subset \subset (A \cup$ B).

Определение. *Пересечением* (или *произведением*) множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.

Обозначается: $C = A \cap B$ (или $C = AB$). Знак $\cap$ называется *знаком пересечения.*

На рис. 1.1 пересечение множеств A и B — это область, покрытая и горизонтальной, и вертикальной штриховкой.

Пример 1.5. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

В условиях примера 1.4 множество $A \cap B$ есть множество всех мужчин в популяции, которые и курят, и являются отцами одновременно.

Заметим, что $A \cap A = A$. В общем случае $(A \cap B) \subset A$ и $(A \cap B) \subset B$.

Для некоторой пары множеств может оказаться, что их пересечение — пустое множество. Так, например, $\{1, 2, 3\} \cap \{5, 6, 7\} = \varnothing$. Пустым будет и пересечение множеств A и B, изображенных на рис. 1.2.

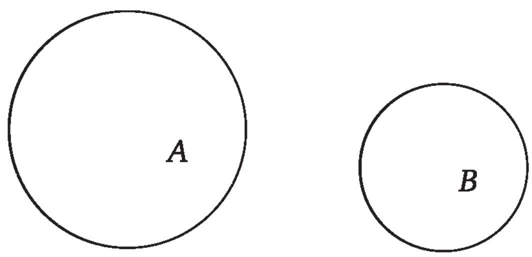


Рис. 1.2

Определение. Множества, пересечение которых пусто, называются *непересекающимися.*

Пример 1.6. Определим A как множество целых положительных, а B — как множество целых отрицательных чисел. Тогда A и B — непересекающиеся множества, поскольку не существует целых чисел, которые были бы одновременно и положительными, и отрицательными.

Пример 1.7. Определим A как множество людей старше 20 лет, а B — как множество людей младше 10 лет. Тогда A и B — непересекающиеся множества.

Введенные операции объединения и пересечения множеств легко обобщаются на большее число множеств, чем два. Так, множество C называется объединением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если C состоит из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначается $C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, или кратко $C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. На рис. 1.3 изображено объединение множеств A_1, A_2 и A_3 (вся заштрихованная область).

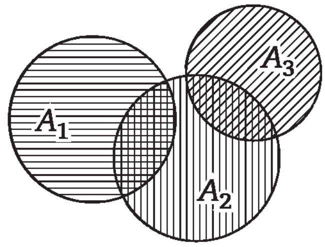


Рис. 1.3

Аналогично множество C называется пересечением или общей частью множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если оно состоит из всех тех элементов, которые принадлежат всем множествам A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначается $C = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, или кратко $C = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

На рис. 1.4 пересечение множеств A_1, A_2, A_3 — область, покрытая тройной штриховкой.

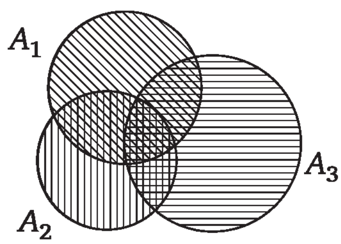
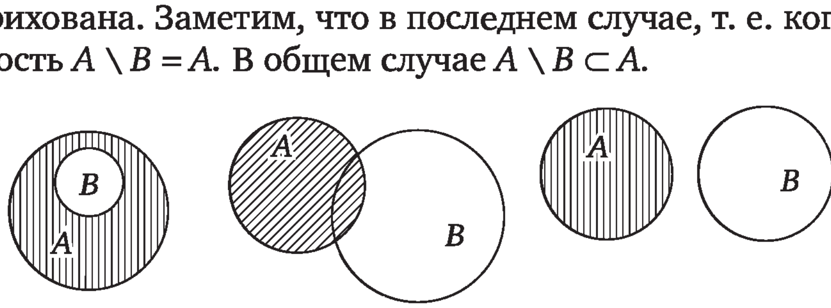


Рис. 1.4

Введем еще одну операцию — вычитание множеств. Пусть имеются два множества A и B.

Определение. *Разностью* множеств A и B называется совокупность тех элементов множества A, которые не являются элементами множества B.

Разность множеств A и B обозначается $A \setminus B$. При этом B может содержаться в множестве A полностью, частично или совсем не включаться. На рис. 1.5 изображены эти три случая. Разность $A \setminus B$ каждый раз заштрихована. Заметим, что в последнем случае, т. е. когда $A \cap B = \varnothing$, разность $A \setminus B = A$. В общем случае $A \setminus B \subset A$.



а *б* *в*

Рис. 1.5

Если $A \subset B$, то разность $B \setminus A$ называется *дополнением* множества A до множества B. Дополнение некоторого множества A до универсального множества U обозначается $\overline{A}$. Таким образом, если $A \subset U$, то U можно представить в виде объединения двух непересекающихся множеств:

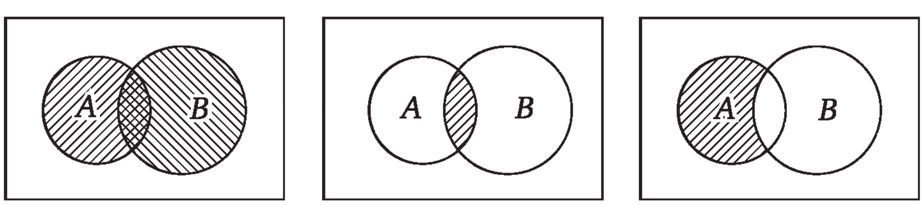
$$U = A \cup \overline{A}.$$

Говорят при этом, что множество U *разбито* на два множества A и $\overline{A}$. Аналогичному *разбиению* можно подвергнуть множество A или множество $\overline{A}$ или то и другое. При этом получим более мелкое разбиение исходного множества U. Этот процесс можно продолжить и далее. В итоге получим представление множества U в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств:

$$U = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \text{ где } A_i \cap A_j = \varnothing, \text{ если } i \neq j.$$

Типичным примером разбиения множества является классификация живых существ. Все множество живых организмов разбивается, как известно, на типы, типы — на классы, классы — на порядки и т. д. Это, разумеется, не единственное возможное разбиение. Так, например, биофизик, изучающий механизм зрения, разобьет все множество животных не по типам, а по чувствительности к световым сигналам. При таком разбиении в одно множество могут попасть слепые насекомые (например, некоторые виды муравьев) и некоторые позвоночные (например, кроты).

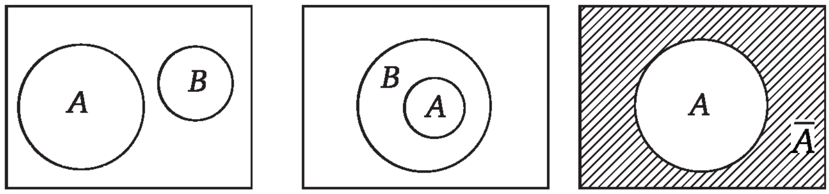
Для наглядного изображения соотношений между подмножествами какого-либо универсального множества используют *диаграммы Эйлера — Венна*[1]. Само универсальное множество U изображают в виде прямоугольника, а его подмножества — в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника. Множества, полученные в результате операций над множествами A и B, изображены на рис. 1.6 заштрихованными областями. Непересекающиеся множества изображаются неперекрывающимися областями, а включение множества соответствует области, целиком располагающейся внутри другой (рис. 1.7, *а*, *б*). Дополнение множества A (до U), т. е. множество $\overline{A}$, изображается той частью прямоугольника, которая лежит за пределами круга, изображающего A (рис. 1.7, *в*).



$A \cup B$ *а* $\quad$ $A \cap B$ *б* $\quad$ $A \setminus B$ *в*

Рис. 1.6

[1] Джон Венн (1834—1923) — английский математик.



$A \cap B = \varnothing$ — *а*; $A \subset B$ — *б*; $\overline{A}$ — *в*

Рис. 1.7

3. Алгебра Буля. Введенные операции объединения, пересечения и вычитания (дополнения) множеств подчиняются простым законам. Некоторые из этих законов уже установлены ранее, другие также нетрудно устанавливаются. Приведем сводку этих законов:

I. $\overline{\overline{A}} = A$.

II. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$.

III. $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = U$.

IV. $A \cap U = A$, $A \cup U = U$.

V. $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$.

VI. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (*законы де Моргана*).

VII. $A \cap B = B \cap A$ (*коммутативность* $\cap$);

$A \cup B = B \cup A$ (*коммутативность* $\cup$).

VIII. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*ассоциативность* $\cap$);

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*ассоциативность* $\cup$).

IX. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*дистрибутивность* $\cap$ *относительно* $\cup$);

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*дистрибутивность* $\cup$ *относительно* $\cap$).

Проверим для примера закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \in U$ и $x \notin A \cup B$. Следовательно, $x \notin A$ и $x \notin B$. Отсюда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$ и потому $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Таким образом,

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}. \qquad (*)$$

Если теперь $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, то $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Отсюда $x \in U$ и $x \notin A$ и $x \notin B$. Значит, $x \notin A \cup B$, т. е. $x \in \overline{A \cup B}$. Итак,

$$\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}. \qquad (**)$$

Включения (*) и (**) в силу теоремы 1.1 (п. 1) и доказывают закон де Моргана.

Пользуясь операциями объединения, пересечения и вычитания множеств, можно из некоторых исходных множеств A, B, C и т. д. получать новые множества: $(A \cup B) \cap \overline{C}$, $(A \setminus \overline{B}) \cup (\overline{A} \setminus C)$, $\overline{C} \cap (A \cap B)$ и т. п. К этим множествам можно применять указанные операции и получать еще более сложные выражения и т. п. Законы I—IX позволяют преобразовывать эти выражения, упрощать их, из одних получать другие. Таким образом, получаем исчисление множеств, или алгебру множеств. Это исчисление является примером так называемой *булевой* алгебры, или алгебры *Буля*[1].

1.2. Отображения и функции

Пусть имеются два множества D и E. Это могут быть множества совершенно различной природы. Например, может быть, что D — это множество людей, населяющих земной шар, а E — шкала цветов.

Предположим, что существует правило, по которому каждому элементу из D ставится в соответствие определенный элемент из E. Тогда это правило называют *отображением множества D* в E (рис. 1.8).

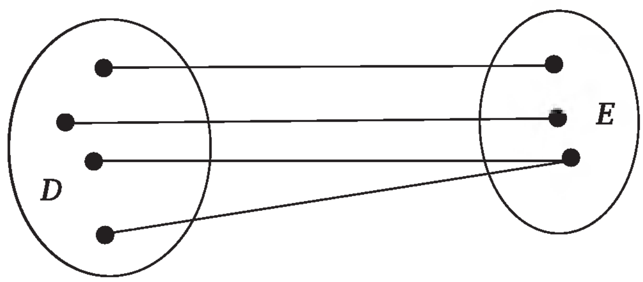


Рис. 1.8

Например, каждому человеку земного шара можно поставить в соответствие цвет его волос. Так будет определено отображение множества людей в шкалу цветов. Подобно этому можно определить отображение множества людей в множество имен, множества книг в множество языков и т. д. Вместо слова «отображение» говорят также *функция*, и если задано отображение множества D в E, то говорят, что *на множестве D задана* (*определена*) *функция со значениями в E*. Для обозначения функции будем, как правило, использовать букву f. Эта договоренность не мешает использовать и другие буквы g, h, F, G и т. п.

Если на множестве D определена некоторая функция f со значениями в E, то общий элемент множества D обозначается обычно x и называется *независимой переменной*, или *аргументом* этой функции, а отдельные конкретные элементы множества D называются *значениями аргумента*. Значения аргумента часто обозначают той же буквой, что и сам аргумент, с прибавлением каких-либо индексов. Например, x^0, x_1, $\tilde{x}$ и т. п. Элемент из E, соответствующий элементу $x \in D$ в силу правила f, называется *значением функции f* на элементе x и обозначается $f(x)$ (читается: «эф от икс»).

Множество D называется *областью определения* функции f. Множество всех элементов $f(x)$, соответствующих элементам $x \in A$, где A — произвольное подмножество множества D, называется *образом* множества A и обозначается $f(A)$. В частности, $f(D)$ называется *областью значений* функции f. Область значений $f(D)$ есть подмножество множе-

[1] Джордж Буль (1815—1864) — английский математик и логик.

ства E, которое в общем случае может и не совпадать со всем E. Если же $f(D) = E$, то говорят что f есть отображение D на E.

Две функции f и g *равны* (*тождественны, совпадают*), если совпадают их области определения и если для любого x из области определения имеет место равенство $f(x) = g(x)$.

Подчеркнем еще раз, что в требование равенства двух отображений входит требование совпадения их областей определения.

Пример 1.8. Пусть x — элемент какого-нибудь числового множества. Равны ли функции f и g, если $f(x) = x + 1$, а $g(x) = -x^3 + 2x + 1$?

На этот вопрос ответить нельзя, так как не указаны области определения функций. Если в качестве общей области определения взять все множество действительных чисел, то функции f и g не равны, так как, например, $f(2) = 3 \neq -3 = g(2)$.

Если же в качестве области определения взять конечное множество $D = \{-1, 0, 1\}$, то f и g, заданные в этой области, окажутся равными.

Рассмотрим некоторые частные виды отображений.

Если область значений $f(D)$ состоит всего из одного элемента, то функцию f называют *постоянной* (рис. 1.9, *а*). Иными словами, функцию f называем постоянной, если значения ее на всех элементах $x \in D$ равны одному и тому же элементу $a \in E$.

Если *разным* элементам $x \in D$ соответствуют *разные* элементы $f(x) \in \in E$, то отображение f называют *взаимно однозначным* (рис. 1.9, *б*).

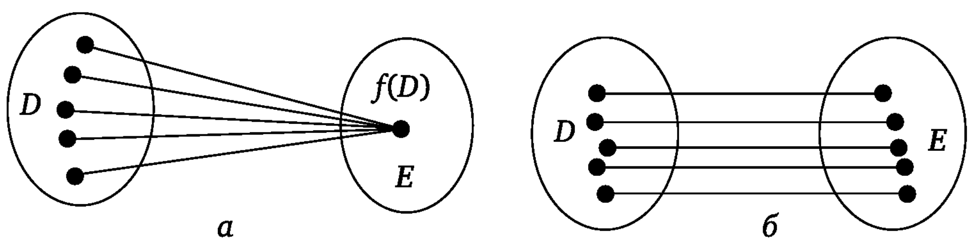


Рис. 1.9

Примером взаимно однозначного отображения является паспортная система. Каждому человеку, достигшему 14 лет, ставится в соответствие определенный набор паспортных данных (фамилия, имя, отчество, год и место рождения, домашний адрес и т. п.), записанных в его паспорте. При этом разным людям соответствуют разные паспортные данные.

Если f — взаимно однозначное отображение, то каждому элементу $y \in f(D)$ можно поставить в соответствие определенный элемент $x \in D$, именно тот, значение функции на котором равно y. Так будет установлено отображение образа $f(D)$ на множество D. Это отображение называется *обратным* по отношению к f и обозначается f^{-1}.

Если образ $f(D)$ есть подмножество множества D, то говорят, что функция f отображает D *в себя*. Например, функция $f = \sin x$ отображает все множество действительных чисел на подмножество этого множества — промежуток $[-1; 1]$.

В частном случае может оказаться, что функция f каждому элементу $x \in D$ ставит в соответствие сам этот элемент: $f(x) = x$. В этом случае функцию f называют *тождественной*.

Функция, областью значений которой является числовое множество, называется *числовой*. Часто термин «функция» употребляют именно для числовых функций, оставляя для других функций термин «отображение». Особенность числовых функций состоит в том, что в области их значений (т. е. во множестве чисел) имеются операции сложения, вычитания, умножения и деления. Это позволяет ввести аналогичные операции и для числовых функций. Так, например, суммой двух числовых функций f и g, имеющих общую область определения D, назовем функцию h, которая для каждого $x \in D$ определяется как число, равное сумме:

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

Аналогично определяются и другие операции. В частности, операция умножения позволяет рассматривать степени функции, например $f^2 = ff$. Сложнее обстоит дело с частным от деления $\frac{f}{g}$. Чтобы не пришлось делить на нуль, из области определения частного, как правило, исключают те элементы, на которых значения g равны нулю.

Введем еще два важных понятия относительно общих отображений.

Пусть имеются две функции f_1 и f_2 с областями определения D_1 и D_2. Пусть $D_1 \subset D_2$ и для всех $x \in D_1$ выполняется равенство $f_1(x) = f_2(x)$.

Тогда функция f называется *сужением* функции f_2. Таким образом, сужение f_2 — это то же правило f_2, но действующее только на $D_1 \subset D_2$.

Пусть, наконец, f — функция, определенная на D, со значениями в E, а F — функция, определенная на $A \subset E$, со значениями в H. Тогда функция G, определенная на $B \subset D$ таком, что $f(B) = A \cap f(D)$, со значениями в H, действующая по формуле $G(x) = F[f(x)]$, $x \in B$, называется функцией от функции, или *суперпозицией* функций, или *сложной* функцией (рис. 1.10).

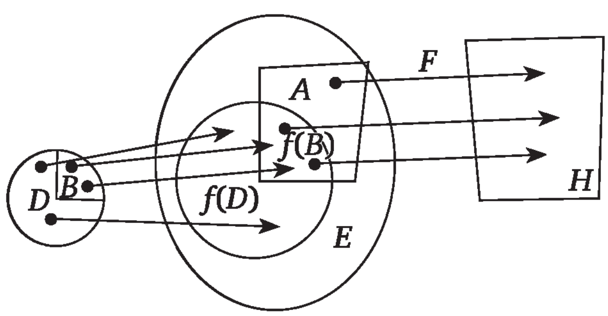


Рис. 1.10

Упражнения

1. Равны ли множества: а) $\{3; 4; 5; 6\}$ и $\{5; 4; 3; 6\}$; б) $\{x: x > 0, x^2 \le$ $\le 4\}$ и $\{x: 0 < x \le 4 - x\}$; в) $\{x: 0 \le x \le 1\}$ и $\{x: 3x^2 \le 3\}$.

[а), б) Равны; в) не равны]

2. Вместо звездочек напишите знак $\subset$ или знак $\in$, чтобы получилась верная запись:

а) $\{5; 6\} * \{5; 6; 8\}$; б) $5 * \{5; 6; 8\}$; в) $2 * \mathbb{N}$.

[а) $\subset$; б), в) $\in$]

3. Укажите пустые множества среди следующих множеств:

а) множество целых корней уравнения $x^2 - 9 = 0$;

б) множество целых корней уравнения $x^2 + 16 = 0$;

в) множество целых корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$;

г) множество натуральных чисел, меньших 1.

[б), г)]

4. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ и $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Найдите множества $A \cup B$ и $A \cap B$.

[$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, $A \cap B = \{3; 4; 5; 6\}$]

5. Пусть $A = \{2; 4; 6; 8; \ldots; 2n, \ldots\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; \ldots; 2n - 1, \ldots\}$. Найдите $A \cup B$ и $A \cap B$.

[$A \cup B = \mathbb{N}$, $A \cap B = \varnothing$]

6. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Найдите $S = A \setminus B$.

[$S = \{1; 2\}$]

7. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$ и $B = \{2; 4; 6; 8; \ldots; 2n, \ldots\}$. Найдите $A \setminus B$.

[$A \setminus B = \mathbb{N} \setminus B = \{1; 3; 5; \ldots\}$]

8. Выпишите все подмножества множества $A = \{1; 2; 3\}$.

[$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$, $\{1; 2; 3\}$, $\varnothing$]

9. Пусть $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; -2\}$, $C = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. Найдите множества: а) $A \cup B$, б) $A \cap B$; в) $A \cup C$; г) $A \cap C$; д) $B \cup C$.

[а) C; б) $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$; в) C; г) A; д) C]

Глава 2
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика — раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов)

2.1. Принцип математической индукции

При доказательстве комбинаторных теорем понадобится часто употребляемая теорема, называемая обычно принципом математической индукции.

Как известно, любое конечное множество можно задать перечислением его элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. До сих пор не был важен *порядок* следования элементов и, например, множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ и $\{a_2, a_1, a_3, \ldots, a_p\}$ не различали. В дальнейшем будет важен порядок, в котором записаны элементы. Множество, в котором задан порядок следования элементов, называется *упорядоченным*. Таким образом, если множество упорядочено, то каждому элементу приписан свой номер и можно говорить «первый элемент», «второй элемент» и т. д. Можно сказать также, что в упорядоченном множестве каждому элементу отведено место, на котором он помещается среди других элементов этого множества.

Пусть имеется некоторое конечное упорядоченное множество, например множество n первых натуральных чисел $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Предположим, что для нескольких первых элементов этого множества выполняется какое-нибудь утверждение, например

$$2^1 \geq 2 + 1,$$

$$2^2 \geq 2 + 1,$$

$$2^3 \geq 3 + 1.$$

Всегда ли можно считать, что аналогичное утверждение остается справедливым для всех элементов множества A? В частности, в этом примере для любого ли $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливо неравенство $2^k \geq$ $\geq k + 1$?

Ответ на подобные вопросы дает следующий принцип.

Принцип математической индукции. *Если*: 1) *некоторое утверждение справедливо для* $k = 1$; 2) *из справедливости утверждения для* *произвольного натурального k следует его справедливость для $k + 1$, то это утверждение справедливо для всякого натурального n.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что при выполнении обоих условий для некоторых натуральных чисел утверждение не выполняется. Пусть m — наименьшее из этих чисел. Это значит, что, во-первых, $m > 1$ и, во-вторых, для $m - 1$ утверждение выполняется, а для m — уже нет. Но это противоречит второму условию. Следовательно, числа m с указанным свойством не существует. Принцип математической индукции доказан.

В частности, вернувшись к приведенному примеру, обнаруживаем, что при $n = 1$ неравенство $2^n \geq n + 1$ справедливо. Предположим теперь, что $2^k \geq k + 1$, и докажем, что в этом случае $2^{k+1} \geq (k + 1) + 1$.

Имеем

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2(k + 1) = 2k + 2 > k + 2 \text{ при } k > 1.$$

Таким образом, оба условия принципа математической индукции выполняются, и, следовательно, рассматриваемое неравенство справедливо для любого натурального n.

Иногда при применении метода математической индукции истинность утверждения вначале устанавливается не для $n = 1$, а для $n = n_0 > 1$.

Приведем пример использования этого метода для доказательства справедливости формулы

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \\ + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}x^m + \ldots + x^n, \qquad (2.1)$$

где $x > -1$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, называемой *формулой бинома Ньютона.*

Доказательство. 1. При $n = 1$ формула (2.1) очевидна.

2. Пусть при $n = k$ формула (2.1) верна, т. е.

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \\ + \ldots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots[k-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}x^m + \ldots + x^k.$$

Докажем, что тогда верна и формула

$$(1+x)^{k+1} = 1 + (k+1)x + \frac{(k+1)k}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \\ + \frac{(k+1)k(k-1)\cdots[k+1-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}x^m + \ldots + x^{k+1}.$$

Итак

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) = \left[1 + kx + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots +\right.$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-1)}x^{m-1}+$$

$$\left.+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots[k-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}x^{m}+\ldots+x^{k}\right](1+x)=$$

$$=1+kx+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+$$

$$+\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-1)}x^{m-1}+$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots[k-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}x^{m}+\ldots+x^{k}+$$

$$+x+kx^2+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^3+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^4+\ldots$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-1)}x^{m}+$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}x^{m+1}+\ldots+x^{k+1}=$$

$$=1+(k+1)x+\frac{(k+1)k}{1\cdot 2}x^2+\frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+$$

$$+\ldots+\frac{(k+1)k(k-1)\cdots[k+1-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}x^{m}+\ldots+x^{k+1},$$

т. е. получаем формулу (2.1).

3. Учитывая результаты шагов 1 и 2 доказательства и применив принцип математической индукции, считаем формулу (2.1) доказанной для любого $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Размещения, перестановки и сочетания

1. Слова. Рассмотрим конечное множество первых k натуральных чисел $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ и какое-нибудь конечное множество $A = \{a, b, c, \ldots, v\}$. Множество A будем называть *алфавитом*, а число элементов в множестве A — *мощностью* этого множества.

Определим отображение φ на множестве D со значениями в A, т. е. каждому натуральному числу $i \in D$ поставим в соответствие один определенный элемент $\varphi(i) \in A$. Последовательность $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(k)$ назовем *словом длины* k.

По-иному можно сказать, что имеется упорядоченный набор мест 1, 2, …, k и, чтобы образовать слово, на каждое место помещаем определенный правилом φ элемент из алфавита A.

В дальнейшем, образуя слова, для простоты написания не будем разделять запятыми элементы $\varphi(i)$ в нем. Точно так же образуются слова, которыми мы пользуемся в нашей речи. Например, из алфавита $A = \{а, б, р\}$ можно образовать слова длины 2: *ба*, *ар*, *бр*, *ра*; слова длины 3:

бра, бар, раб, брр; слова длины 4: *баба, арба, раба, араб* и т. д. Аналогично из алфавита $A = \{0, 1\}$ можно образовать два слова единичной длины: 0 и 1, слова длины 2: 00, 01, 10, 11; слова длины 3: 000, 001, 010 и т. п.; слова длины 5: 00101, 10001, 10101 и т. д.

Слово длины k будем называть также *k-буквенным словом*, а элементы алфавита — *буквами*. Уже из приведенных примеров ясно, что длина k-буквенного слова может быть и меньше, и больше мощности алфавита. Даже в русском языке, алфавит которого состоит из 33 букв, есть слова, длина которых больше 33. Например, научное название акрихина — метоксихлордиэтиламинометилбутиламиноакридин. Это слово содержит 44 буквы.

Два слова, образованные из одного алфавита, одинаковы тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую длину и на одинаковых местах стоят одинаковые буквы. Сколько всевозможных слов заданной длины k можно образовать из алфавита мощности n, если считать, что все такие слова имеют смысл?

Теорема 2.1. *Число всевозможных слов длины k, образованных из алфавита мощности n, равно n^k.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — элементы алфавита A мощности n. Из этого алфавита можно образовать n различных слов длины 1. Такими словами будут буквы алфавита. Если к каждому из этих слов приписать последовательно каждый из n элементов множества A, то образуются все возможные слова длины 2:

$$a_1a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_n,$$
$$a_2a_1, a_2a_2, \ldots, a_2a_n,$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_na_1, a_na_2, \ldots, a_na_n.$$

Число таких пар равно n^2, т. е. теорема выполняется для случаев $k = 1$ и $k = 2$.

Предположим теперь, что теорема верна для $i = k - 1$. Это значит, что число различных слов длины $k - 1$, образованных из $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, равно n^{k-1}. Покажем тогда, что теорема остается верной и для $i = k$.

Чтобы из множества A образовать все возможные слова длины k, достаточно к каждому слову длины $k - 1$ приписать на последнее место последовательно каждый из n элементов множества A. Таким образом, каждое слово длины $k - 1$ даст n различных слов длины k, и этим способом получим все возможные слова длины k. Поскольку слов длины $k - 1$ имеется n^{k-1}, то общее число слов длины k будет равно $nn^{k-1} = n^k$. Вместе с принципом математической индукции это доказывает теорему.

Например, из алфавита $A = \{0, 1\}$ можно образовать $2^2 = 4$ двухбуквенных слов.

2. Размещения и перестановки. При образовании слов из алфавита $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ от функции φ требовалась только однозначность. Пусть теперь φ — взаимооднозначное отображение. Это значит, что в слове, образованном с помощью значений этого отображения, нет одинаковых букв. Такие слова называются *размещениями*. Например, из алфавита $A = \{1, 0\}$ можно образовать только два размещения длины 2: 01 и 10. Из алфавита $A = \{1, 2, 3\}$ можно образовать шесть различных размещений длины 2: 12, 21, 13, 31, 23 и 32. Нетрудно установить число различных размещений для данного алфавита и в общем случае. Заметив, что длина размещения не может быть больше мощности алфавита, покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Число различных размещений длины k, образованных из алфавита мощности n, равно $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.*

Доказательство. Для $k = 1$ теорема верна, так как число однобуквенных размещений равно числу букв в алфавите, т. е. n.

Пусть теорема верна для $i = k - 1$. Это значит, что число размещений длины $k - 1$, образованных из алфавита $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, равно $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2)$. Но чтобы получить все размещения длины k, достаточно к каждому размещению длины $k - 1$ приписать поочередно одну из $n - (k - 1)$ букв, не вошедших в это размещение. Таким образом, каждое размещение длины $k - 1$ порождает $n - (k - 1)$ размещений длины k. Следовательно, всего размещений длины k будет $n(n-1) \times (n-2) \cdot \ldots \cdot [(n-(k-1)]$, что и требовалось доказать.

Число различных размещений длины k, образованных из алфавита мощности n, обозначают A_n^k.Таким образом,

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \qquad (2.2)$$

Пример 2.1. Сколько можно составить сигналов из шести флажков различного цвета, взятых по два?

Искомое число сигналов $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Пример 2.2. Из группы в девять крыс необходимо выбрать трех и поместить их в три клетки, обозначенные C_1, C_2 и C_3. Сколькими способами это можно сделать?

Здесь речь идет о размещении из девяти объектов по три. Согласно формуле (2.2) число таких размещений равно $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Частным случаем размещений являются *перестановки*. Так называются размещения, длина которых равна мощности алфавита. Например, из алфавита $A = \{1, 2, 3\}$ можно образовать шесть различных перестановок: 123, 132, 213, 231, 312 и 321.

Из формулы (2.2) при $k = n$ получаем, что число всевозможных перестановок, которые можно образовать из алфавита мощности n (обозначение P_n), равно

$$P_n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+2) \cdot (n-n+1) = n!.$$

Пример 2.3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Искомое число трехзначных чисел $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Пример 2.4. Восемь лабораторных животных нужно проранжировать в соответствии с их способностями выполнять определенные задания. Каково число возможных ранжировок, если допустить, что одинаковых способностей нет?

Существует 8! ранжировок по способностям, т. е. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \times \times 7 \cdot 8 = 40\,320$.

Пример 2.5. Имеется n юношей и n девушек. Сколькими вариантами их можно соединить в танцевальные пары?

Чтобы решить эту задачу, выстроим всех юношей в шеренгу и присвоим каждому номер от 1 до n. Тогда ясно, что искомое число вариантов равно числу перестановок из множества девушек, т. е. $n!$.

3. Сочетания. Пусть опять имеется некоторое конечное множество мощности n $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Любое подмножество этого множества, содержащее k элементов, называется *сочетанием из n элементов по k*.

Понятно, что если $k < n$, то из одного и того же множества A мощности n можно образовать несколько различных сочетаний из n элементов по k. Например, из множества $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ можно образовать три различных подмножества, содержащих по два элемента, т. е. три различных сочетания из трех элементов по два: $A_1 = \{a_1, a_2\}$, $A_2 = \{a_1, a_3\}$ и $A_3 = \{a_2, a_3\}$.

Понятно также, что число различных сочетаний из n элементов по k зависит от мощности сочетания, т. е. от k и от мощности множества A, т. е. от n. Это число обозначают символом C_n^k (иногда употребляется еще символ $\binom{n}{k}$). Например, C_n^1 — число различных сочетаний, взятых из n элементов по одному. Ясно, что таких сочетаний будет столько, сколько элементов в исходном множестве A, т. е. n. Таким образом, $C_n^1 = n$.

Далее, C_n^2 — это число различных сочетаний, взятых из n элементов по два. Это число легко подсчитать. Если каждый элемент множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ поочередно сочетать с каждым из всех остальных, то получатся пары элементов, из которых можно составить таблицу:

$$\begin{array}{cccc} \{a_1, a_2\} & \{a_1, a_3\} & \ldots & \{a_1, a_n\} \\ \{a_2, a_1\} & \{a_2, a_3\} & \ldots & \{a_2, a_n\} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \{a_n, a_1\} & \{a_n, a_2\} & \ldots & \{a_n, a_{n-1}\} \end{array}$$

В этой таблице $n - 1$ столбец и n строк. Следовательно, всего выписано $n(n - 1)$ пар. Но каждая пара встречается дважды. Так, например, пара $\{a_1, a_2\}$ один раз получается, когда a_1 сочетаем с a_2, а второй раз — при сочетании a_2 с a_1. Таким образом, различных пар, т. е. различных сочетаний из n элементов по 2, будет $\frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. В частности, $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$, в чем убедились непосредственно.

Подсчитаем еще C_n^n и C_n^0. Число C_n^n — это число сочетаний из n элементов по n. Единственным подмножеством множества A, содержащим n элементов, будет само множество A. Следовательно, $C_n^n = 1$. Наконец, C_n^0 — число подмножеств, содержащих 0 элементов, т. е. не содержащих элементов вовсе. Таким подмножеством является только пустое множество (оно содержится во всяком множестве, следовательно, и в A). Таким образом, $C_n^0 = 1$.

Теперь докажем теорему, которая позволит подсчитать любое C_n^k.

Теорема 2.3. *Число сочетаний из n элементов по k, где $0 \le k \le n$, выражается формулой*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

или (при $k \neq 0$)

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Заметим, что, для того чтобы получить всевозможные размещения длины k из алфавита мощностью n, достаточно взять всевозможные сочетания из n по k, а затем из каждого сочетания образовать $k!$ всевозможных перестановок. Таким образом, $A_n^k = C_n^k k!$, откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 2.6. Из группы в пять мышей нужно выбрать три безотносительно к порядку выбора. Сколькими способами можно это сделать?

Искомое число способов $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

Числа C_n^k имеют много важных приложений. Вспомним, например, формулу разложения бинома Ньютона для любого $n \in \mathbb{N}$ (см. параграф 2.1)

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \\ + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!}x^n.$$

Сравнив коэффициенты этого полинома с формулой (2.3), замечаем, что коэффициент при k-й степени равен C_n^k. Таким образом,

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n. \tag{2.4}$$

Поэтому числа C_n^k называют *биномиальными коэффициентами.*

Из формулы (2.4) вытекают интересные следствия. Положив, например, в ней $x = 1$, получим

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \qquad (2.5)$$

Таким образом, сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n, где n — степень бинома.

С другой стороны, слева в формуле (2.5) написано общее число всех подмножеств множества мощности n. Из формулы (2.5) следует, что это число равно 2^n.

Заметим еще, что биномиальные коэффициенты удобно вычислять, пользуясь так называемым *треугольником Паскаля*:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
.	.	.	.	.	.	.	.

Будем считать верхнюю единицу нулевой строкой треугольника. Тогда в n-й строке этого треугольника записаны последовательно биномиальные коэффициенты бинома n-й степени ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Каждая следующая строка получается из предыдущей простым способом: коэффициент последующей строки (за исключением первого и последнего, равных единице) пишется под коэффициентом предыдущей строки и полагается равным сумме над ним стоящего и стоящего перед последним:

$$C_n^{k+1} = C_{n-1}^{k+1} + C_{n-1}^k.$$

Докажем эту формулу. Имеем

$$C_{n-1}^{k+1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k+1)!(n-1-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-2)!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k-1}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{n}(n-1)!}{k!(k+1)(n-k-2)!(n-k-1)} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, наконец, что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^{n-k}$.

2.3. Комбинаторика и генетика

Комбинаторный анализ применяется в тех многочисленных вопросах естествознания, которые связаны с перебором множества возможностей, с выделением из этого множества тех или иных подмножеств. Приведем три простые задачи из генетики.

1. Хорошо известно, что хромосому схематично можно представить как цепочку из генов. При этом свойства хромосомы зависят не только от состава генов, но и от их расположения в цепочке. Существуют методы, позволяющие изменить порядок генов в хромосоме. Возникает вопрос: какое количество хромосом можно получить из данной, изменяя в ней порядок следования генов?

Пусть исходная хромосома состоит из n генов. Обозначим их a_1, a_2, ..., a_n, и пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Тогда понятно, что каждая хромосома, имеющая данный набор генов, есть перестановка множества A. Число таких перестановок, как известно, равно $n!$.

2. Пусть имеется n сортов мономеров (например, азотистых оснований). Из этих мономеров образуется полимер, который можно представить как цепочку из k мономеров. При этом k, как правило, больше n, и мономеры в цепочке могут повторяться.

Какое количество различных полимеров длины k можно образовать из данных n сортов мономеров? Будем считать набор мономеров алфавитом из n элементов. Тогда каждый полимер, состоящий из k мономеров, есть слово длины k. Число таких слов, как известно, равно n^k, а число различных полимеров будет в два раза меньше, так как, например, молекулы $a_1a_2a_3$ и $a_3a_2a_1$ не различаются (одна из них превращается в другую, если ее повернуть на 180°).

В частности, если алфавит состоит из четырех азотистых оснований А, Ц, Г и Т (т. е. $n = 4$), а полимером является ген (средняя длина гена равна 1000 единиц, т. е. $k = 1000$), то число всевозможных генов, которые можно получить из четырех оснований, равно

$$\frac{1}{2}n^k = \frac{1}{2}4^{1000} = \frac{2^{2000}}{2} = 2^{1999}.$$

Это громадное число. По некоторым подсчетам, оно превосходит общее число атомов в Солнечной системе.

3. Рассмотрим процесс расхождения нитей хромосом к полюсам. Пусть имеется n спаренных хромосом, т. е. $2n$ нитей: $a_1||b_1$, $a_2||b_2$, $a_3||b_3$, $a_4||b_4$.

Пара a_ib_i соответствует двум нитям одной i-й хромосомы. При расхождении может случиться, что часть нитей a_i пойдет к левому полюсу, а часть — к правому. При этом если a_i отошло к какому-нибудь полюсу, то b_i отойдет обязательно к противоположному полюсу:

$$\leftarrow a_1||b_1 \rightarrow$$

$$\leftarrow a_2||b_2 \rightarrow$$

$$\leftarrow a_3 | \, | b_3 \rightarrow$$

$$\leftarrow a_4 | \, | b_4 \rightarrow$$

В зависимости от того, сколько и какие a_i отойдут, например, к правому полюсу, зависит тип получающейся гаметы. Возникает вопрос: сколько различных типов гамет может получиться при всевозможных вариантах расхождения? Подсчитаем это число.

Так как тип гаметы определяется тем, какое подмножество из множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ отойдет к правому полюсу, то число всевозможных типов гамет равно числу всевозможных подмножеств множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Это число, как известно, равно 2^n.

Упражнения

1. Нужно присудить первую, вторую и третью премии на конкурсе, в котором принимают участие 20 человек. Сколькими способами можно распределить эти премии?

[6840]

2. Сколько четырехбуквенных «слов» можно образовать из букв слова «причем»?

[360]

3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

[6]

4. Сколькими способами группа из шести человек может расположиться в ряд?

[720]

5. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

[45]

6. У шести мальчиков в классе имеются признаки инфекционного заболевания. Чтобы проверить наличие заболевания, требуется взять выборочный анализ крови у двух мальчиков. Сколькими способами можно это сделать?

[15]

7. Сколькими способами группа из шести человек может расположиться за круглым столом?

[120]

8. Восемь лабораторных животных нужно проранжировать в соответствии с их способностями выполнять определенные задания. Каково

число возможных ранжировок, если допустить, что одинаковых способностей нет?

[8! = 40 320 ранжировок]

9. Комитет состоит из 12 человек. Минимальный кворум на заседаниях этого комитета должен насчитывать восемь членов. Сколькими способами может достигаться минимальный кворум?

[495]

10. В лабораторной клетке содержатся восемь белых и шесть коричневых мышей. Найдите число способов выбора пяти мышей из клетки, если они могут быть любого цвета.

[2002 способа]

Глава 3
МАТРИЦЫ

3.1. Матрицы и действия над ними

1. Понятие о матрице. Таблица чисел a_{ij} вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

обозначаемая кратко (a_{ij}) ($i = 1, 2, 3, \dots m; j = 1, 2, 3, \dots, n$), состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей* размером $m \times n$. Числа a_{ij} называются ее *элементами*. Это *прямоугольная* матрица. В частности, когда $m= 1$, $n > 1$, имеем однострочечную матрицу $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, которую называют *матрицей-строкой*. Если же $m > 1$, а $n = 1$, то имеем одностолбцовую матрицу, которую называют *матрицей-столбцом*. Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Пример 3.1[1]. Пять лабораторных животных кормят тремя различными видами пищи. Если определить c_{ij} как суточное потребление i-го вида пищи j-м животным, то

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

является матрицей размером 3×5, отражающей общее суточное потребление. Она дает удобный способ ведения записей.

Если в матрице число строк равно числу столбцов ($m = n$), то такую матрицу называют *квадратной*, причем число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

[1] Некоторые примеры и задачи из биологии, иллюстрирующие математические методы, содержатся в книгах [3 и 5]; часть этих примеров и задач используется в настоящей книге.

есть квадратная матрица второго порядка, а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

есть квадратная матрица третьего порядка.

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{nn} квадратной матрицы (a_{ij}) порядка n, называемые *диагональными элементами*, образуют ее *главную диагональ*. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то эта матрица называется *диагональной*.

Матрицу для краткости будем обозначать одной буквой (например, буквой A).

Две матрицы A и B называются *равными* $(A = B)$, если они одинакового размера (т. е. имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов) и их соответствующие элементы равны. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

то $A = B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

Кроме приведенной выше записи (3.1), используют и другие способы представления матриц, например

a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

(клеточная запись). При такой записи часто для упрощения нулевые элементы в таблицу не записывают, но при этом имеют в виду, что пустые клетки также содержат числа (нули).

2. Сложение матриц. Матрицы одинакового размера можно складывать.

Суммой двух таких матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Символически будем записывать так: $A + B = C$.

Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

то их суммой называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пример 3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$

Легко видеть, что сложение матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам:

$$A + B = B + A,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нуль-матрицей* и обозначается (0) или просто 0.

Нуль-матрица при сложении матриц выполняет роль обычного нуля при сложении чисел: $A + 0 = A$.

3. Вычитание матриц. *Разностью* двух матриц A и B одинакового размера называется матрица C, такая что $C + B = A$.

Из этого определения следует, что элементы матрицы C равны разности соответствующих элементов матриц A и B.

Обозначается разность матриц A и B так: $C = A - B$.

Пример 3.3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

4. Умножение матрицы на число. *Произведением* матрицы A на число λ называется матрица, элементы которой равны произведениям числа λ на соответствующие элементы матрицы A.

Отсюда следует, что при умножении матрицы на нуль получается нуль-матрица.

Пример 3.4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\lambda + B\mu$.

На основании определения суммы матриц и умножения матрицы на число имеем

$$A\lambda + B\mu = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 2\lambda + \mu \\ 2\lambda + 2\mu & 3\lambda + \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix}.$$

5. Умножение матриц. Рассмотрим правило умножения двух квадратных матриц второго и третьего порядков. Пусть даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C = AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Как видим, элемент матрицы-произведения, находящийся на пересечении i-й строки и k-го столбца, представляет собой сумму парных произведений элементов i-й строки первой матрицы на элементы k-го столбца второй матрицы.

Например, элемент, стоящий во второй строке и первом столбце матрицы произведения AB, равен сумме парных произведений элементов второй строки матрицы A на элементы первого столбца матрицы B.

Это правило сохраняется для умножения квадратных матриц третьего и более высоких порядков, а также для умножения прямоугольных матриц, в которых число столбцов матрицы-множимого равно числу строк матрицы-множителя.

Пример 3.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$

Пример 3.6.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 2 \\ 3\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2 & 3\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.7. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$

Видим, что в результате перемножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько их имеет матрица-множимое, и столько столбцов, сколько их имеет матрица-множитель.

Рассмотрим еще пример:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 1+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 4 \\ 7\cdot 1+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, как установлено выше,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону:

$$AB \neq BA.$$

Можно проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному закону:

$$A(BC) = (AB)C.$$

Отметим любопытный факт. Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь места, т. е. произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нуль-матрице.

Пример 3.8. Если $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, то

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot(-1) & 1\cdot1+1\cdot(-1)\\ 1\cdot1+1\cdot(-1) & 1\cdot1+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

При умножении матриц второго порядка особое значение имеет квадратная матрица

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

При умножении любой квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ второго порядка на матрицу E снова получается матрица A. Действительно,

$$AE=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot1+a_{12}\cdot0 & a_{11}\cdot0+a_{12}\cdot1\\ a_{21}\cdot1+a_{22}\cdot0 & a_{21}\cdot0+a_{12}\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Аналогично $EA=A$.

Матрица E называется *единичной матрицей*. Единичная матрица n-го порядка имеет вид

$$E=\left(n\text{ строк}\left\{\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{matrix}}_{n\text{ столбцов}}\right.\right).$$

Если в матрице (3.1), обозначаемой буквой A, сделать все строчки столбцами с тем же номером, то получим матрицу

$$A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

называемую *транспонированной* к матрице A.

Если матрица A (квадратная) совпадает со своей транспонированной, то она называется *симметричной* и ее элементы связаны соотношением $a_{ij}=a_{ji}$ (симметрия относительно главной диагонали). Такова, например, матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Матрицы рационов. Пусть какое-нибудь вещество, необходимое для жизнедеятельности животного, содержится в разных кормах. Для определенности будем говорить о витамине A. Пусть α_i означает количество этого витамина в 1 кг i-го корма ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда однострочечная матрица

$$\alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_n)$$

дает распределение витамина A по кормам. Предположим, что исследуемое животное съедает в день x_1 кг первого корма, x_2 кг второго корма, ..., x_n кг n-го корма. Тогда общее количество витамина A, получаемого животным в день, есть

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n. \tag{3.2}$$

Введя обозначение $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (матрица-столбец потребления кормов в день), с другой стороны, по правилу умножения матриц получим

$$\alpha X = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

что совпадает с суммой (3.2).

Рассмотрим теперь более сложный случай. Будем следить не только за расходом витамина A, но еще двух витаминов, например B и C. Пусть матрица

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

дает распределение витаминов по кормам. Каждая строка этой матрицы соответствует отдельному витамину, а каждый столбец — отдельному корму. Таким образом, в 1 кг i-го ($i = 1, 2, \ldots, n$) корма содержится α_i витамина A, β_i витамина B и γ_i витамина C.

Пусть по-прежнему матрица-столбец $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица потребления кормов в день. Тогда, желая узнать общий витаминный режим животного в день, следует, очевидно, взять произведение матриц M и X:

$$MX=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_n x_n \\ \beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\dots+\beta_n x_n \\ \gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2+\dots+\gamma_n x_n \end{pmatrix}.$$

В правой части имеем матрицу-столбец, первый элемент которой равен общему количеству витамина A, второй — общему количеству витамина B и третий — общему количеству витамина C, полученному животным в день.

7. Контакты первого и второго порядков в эпидемиологии. Предположим, что три человека заболели заразной болезнью. Вторую группу из шести человек опрашивают с целью выяснения, кто из них имел контакт с тремя больными. Затем опрашивают третью группу из семи человек, чтобы выяснить контакты с кем-либо из шести человек второй группы. Определим матрицу $A = (a_{ij})$ размером 3×6, полагая $a_{ij} = 1$, если j-й человек второй группы находился в контакте с i-м больным из первой группы, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Аналогично определим матрицу $B = (b_{ij})$ размером 6×7, полагая $b_{ij} = 1$, если j-й человек третьей группы находился в контакте с i-м человеком из второй группы, и $b_{ij} = 0$ в противном случае. Эти две матрицы описывают схему контактов первого порядка между группами.

Могло бы, например, оказаться, что

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае $a_{24} = 1$ означает, что 4-й человек второй группы находился в контакте со 2-м больным первой группы. Аналогично $b_{33} = 0$ означает, что 3-й человек третьей группы не соприкасался с 3-м человеком из второй группы.

Нас могут интересовать также непрямые контакты, или контакты второго порядка, между семью людьми третьей группы и тремя больными первой.

Эти контакты второго порядка описывает матричное произведение $C = AB$.

Элемент $c_{ij} = \sum_{k=1}^{6} a_{ik}b_{kj}$ дает число контактов второго порядка между j-м человеком третьей группы и i-м человеком из группы больных.

Для заданных матриц A и B получаем

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элемент $c_{23} = 2$ показывает, что имеется два контакта второго порядка между 3-м человеком третьей группы и 2-м инфицированным больным. Заметим, что у 6-го человека из третьей группы оказалось $1 + 1 + 2 = 4$ непрямых контакта с зараженной группой. Таких контактов нет только у 5-го человека.

8. Матрицы и сети. Для географии широкий интерес представляет применение матриц при изучении географических сетей. Обратимся здесь к рассмотрению речных сетей. Участок речной сети можно представить в матричной форме согласно числу притоков (ребра), сходящихся в каждой точке их слияния (узловые точки). Для изображения речной сети такая матрица может быть составлена как с использованием ребер, так и узлов.

Идеализированная речная сеть простого вида изображена на рис. 3.1. Ребра представлены числами от 1 до 5, а узлы — буквами от a до f. Ниже показаны матрицы, изображающие данную речную сеть через ребра и узлы:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

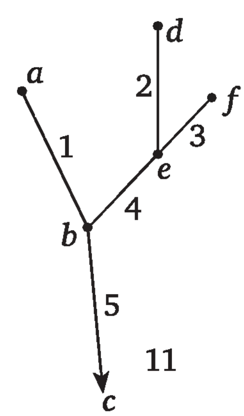


Рис. 3.1

В матрице ребер ноль означает, что соответствующие притоки непосредственно не соединяются, а единица — что они соединяются. Так, видно, что приток 2 непосредственно сливается с притоками 3 и 4, а не с 1 и 5. В матрице узлов использованы аналогичные обозначения. Например, узел d непосредственно связан с узлом e, но не связан с другими узлами, а узел b связан с узлами a, c и e. Каждая из этих матриц симметрична, но ясно, что этой симметрии для речной сети не может быть в случае, если захотим отразить то простейшее свойство воды, что она не может течь вверх по склону. Тогда мы должны каким-нибудь образом указать, что связь в одном из направлений невозможна. Условие, отражающее этот момент и делающее матрицу несимметричной, состоит в том, что строки представляют собой течение из a, b, c и т. д., а столбцы — течение в a, b, c и т. д. Поскольку возможны связи только из 1 в 5 или из f в e, то в каждой матрице некоторые связи утрачиваются. В результате матрицы будут иметь вид

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix}1&2&3&4&5\end{matrix} \\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}, \quad \begin{array}{c} \\ a\\b\\c\\d\\e\\f \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix}a&b&c&d&e&f\end{matrix} \\ \begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

Сумма по каждому столбцу дает общее число притоков, впадающих в каждую реку. В нашем случае по два притока — в ребра 4 и 5 и по два — в узлы b и e.

3.2. Определители

1. Определители второго порядка. Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Определителем второго порядка*, соответствующим матрице A, называется число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(кратко $|A|$).

Таким образом,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3.3}$$

Элементы матрицы A называются *элементами определителя* $|A|$, элементы a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ*, а элементы a_{21}, a_{12} — *побочную*.

Из равенства (3.3) очевидно, что для вычисления определителя второго порядка надо из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Пример 3.9. Вычислить определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 3 = 2.$$

Пример 3.10. Имеем $|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, т. е. определитель единичной матрицы равен единице.

Легко проверяются следующие свойства определителя (с помощью правила вычисления его по формуле (3.3)).

Величина определителя $|A|$:

1) не меняется, если заменить его строки соответствующими столбцами;

2) не меняется, если к элементам какой-либо его строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число;

3) меняет знак, если поменять местами его строки или столбцы;

4) увеличивается в k раз, если элементы какого-либо его столбца или строки увеличить в k раз, т. е. общий множитель, имеющийся в строке или столбце, можно выносить за знак определителя;

5) равна нулю, если элементы какого-либо его столбца или строки равны нулю;

6) равна нулю, если элементы двух строк или столбцов соответственно равны.

2. Определители третьего порядка. Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Определителем третьего порядка*, соответствующим матрице A, называется число, равное $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ и обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(кратко $|A|$).

Итак,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (3.4)$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (3.4) следует брать со знаком «плюс», какие — со знаком «минус», полезно правило, называемое *правилом треугольника* (рис. 3.2).

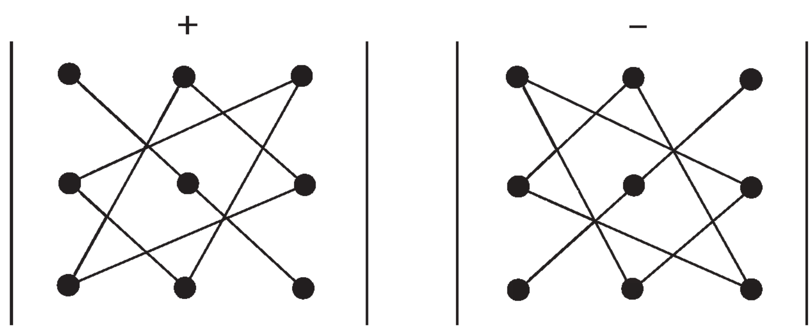


Рис. 3.2

Пример 3.11. По формуле (3.4) имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 24 + 24 - 27 - 20 - 16 = 0.$$

Пример 3.12. Очевидно, что $E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Все свойства определителей второго порядка (свойства 1—6) остаются справедливыми и для определителей третьего порядка (проверка их идет по формуле (3.4)).

Определение. *Минором* какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного вычерчиванием той строки и того столбца, которым принадлежит этот элемент.

Например, минором элемента a_{12} определителя $|A|$ является определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{3.5}$$

Минор элемента a_{ik} определителя $|A|$ обозначается через M_{ik}.

Определение. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} определителя $|A|$ называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$.

Например, алгебраическим дополнением элемента a_{12} определителя $|A|$ является определитель (3.5), взятый со знаком «минус». Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} будем обозначать через A_{ik}. Следовательно, $A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}$.

Теорема 3.1. *Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.*

Доказательство. Преобразуем правую часть формулы (3.4). Так как

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \end{aligned}$$

то

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{3.6}$$

Формула (3.6) называется *разложением* определителя $|A|$ по элементам первой строки. Аналогично получается разложение по элементам других строк и столбцов.

3. Понятие определителя n-го порядка. Свойство определителя третьего порядка, выраженное теоремой 3.1, допускает обобщение, которое может быть принято за определение определителя любого порядка.

В общем случае *определителем n-го порядка*, соответствующим квадратной матрице n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

можно назвать число, равное сумме парных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения (краткое обозначение $|A|$).

Заметим, что определители порядка n обладают всеми указанными выше свойствами (см. п. 1, 2).

Из свойства 1 определителя следует, что квадратная матрица A и транспонированная к ней матрица A' имеют равные определители, т. е.

$$|A| = |A'|.$$

Пример 3.13. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 8 - 2\cdot 39 = -54.$$

Заметим, что если в определителе все элементы какой-либо строки (столбца), кроме одного, равны нулю, то при вычислении определителя выгодно разложить его по элементам этой строки (столбца).

Если же такой строки (столбца) нет, то, используя свойство 2 (см. п. 1) определителя, его можно преобразовать так, чтобы он имел такую строку (столбец).

Пример 3.14. Очевидно, что $|E| = \begin{vmatrix} \underbrace{n\text{ строк}\begin{cases} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{cases}}_{n\text{ столбцов}} \end{vmatrix} = 1.$

Справедлива (см., например, [1]) следующая теорема.

Теорема 3.2. *Если A и B — квадратные матрицы одного порядка с определителями $|A|$ и $|B|$, то определитель матрицы $C = AB$ равен произведению определителей перемножаемых матриц, т. е.*

$$|C| = |A| \cdot |B|.$$

4. Обратная матрица. Рассмотрим теперь так называемую *обратную* матрицу, понятие которой вводится только для квадратной матрицы.

Если A — квадратная матрица, то обратной для нее матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условиям

$$AA^{-1} = E, A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица.

Примечание. Из этого определения следует, что если матрица A^{-1} является обратной для A, то и A будет обратной для A^{-1}.

Определение. Если определитель $|A|$ матрицы (3.7) равен нулю, то матрица A называется *вырожденной*; в противном случае матрица A называется *невырожденной.*

Теорема 3.3. *Матрица*

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} невырожденной матрицы A, является обратной для A.

Доказательство ради краткости проведем для случая $n = 2$. Умножая матрицу A на матрицу (3.8), получаем с использованием известных свойств

$$\begin{pmatrix} a_{11}\frac{A_{11}}{|A|}+a_{12}\frac{A_{12}}{|A|} & a_{11}\frac{A_{21}}{|A|}+a_{12}\frac{A_{22}}{|A|} \\ a_{21}\frac{A_{11}}{|A|}+a_{22}\frac{A_{12}}{|A|} & a_{21}\frac{A_{21}}{|A|}+a_{22}\frac{A_{22}}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A|}{|A|} & \frac{0}{|A|} \\ \frac{0}{|A|} & \frac{|A|}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично проводится доказательство и для того случая, когда матрица (3.8) является первым множителем, а A — вторым.

Из только что установленной теоремы следует, что, для того чтобы построить обратную матрицу для квадратной невырожденной матрицы A, надо сначала построить транспонированную матрицу A', а затем каждый элемент A' заменить его алгебраическим дополнением, деленным на $|A|$.

Пример 3.15. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9.$

Так как $|A| \neq 0$, то матрица A невырожденная и, следовательно, существует обратная ей матрица.

Вычисляем алгебраические дополнения: $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$; аналогично $A_{12} = -6$, $A_{13} = 3$, $A_{21} = -4$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -1$, $A_{31} = 2$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = -4$.

Составим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{9} & \frac{6}{9} & -\frac{3}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Сделав в этой матрице ее строки столбцами с тем же номером, получим матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

3.3. Системы линейных уравнений

1. Матричная запись и матричное решение системы уравнений первой степени. Покажем, каким образом можно использовать матричный аппарат для решения систем линейных уравнений.

Пусть дана система из n линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, …, x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (3.9)$$

Числа a_{ik} называются *коэффициентами системы* (3.9), а числа b_1, b_2, b_n — *свободными членами*. Система линейных уравнений (3.9) называется *однородной*, если $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей системы* (3.9), а ее определитель $|A|$ — *определителем системы* (3.9).

Решением системы (3.9) называется совокупность чисел $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, …, $x_n = \lambda_n$, которые обращают все уравнения системы в тождества.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Пусть определитель системы (3.9) отличен от нуля.

Обозначим матрицу-столбец из неизвестных через X и матрицу-столбец из свободных членов через B:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу умножения матриц имеем

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства матриц, данную систему (3.9) можно записать следующим образом:

$$AX=B. \tag{3.10}$$

Равенство (3.10) называется *матричным уравнением* (здесь в роли неизвестного выступает матрица X). Так как по условию $|A|\neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения (3.10) слева на A^{-1}:

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B.$$

Используя сочетательный закон умножения матриц (см. параграф 3.1, п. 5), можно написать

$$(A^{-1}A)X=A^{-1}B.$$

Но так как $A^{-1}A=E$ (см. параграф 3.2, п. 4) и $EX=X$ (см. параграф 3.1, п. 5), то получаем решение матричного уравнения в виде

$$X=A^{-1}B. \tag{3.11}$$

Пример 3.16. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2=10, \\ 3x_1+2x_2+x_3=23, \\ x_2+2x_3=13. \end{cases}$$

В матричной форме эта система запишется в виде $AX=B$. Здесь

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} была найдена ранее (см. пример 3.15).

Теперь, согласно равенству (3.11), имеем

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства матриц, получаем $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения неизвестных удовлетворяют данной системе.

2. Формулы Крамера[1]**.** Решение системы (3.9) n линейных уравнений с n неизвестными удобно записывать и вычислять с помощью определителей.

Из равенства (3.11) согласно правилу умножения матриц имеем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|}b_1 + \frac{A_{21}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{n1}}{|A|}b_n \\ \frac{A_{12}}{|A|}b_1 + \frac{A_{22}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{n2}}{|A|}b_n \\ \ldots \\ \frac{A_{1n}}{|A|}b_1 + \frac{A_{2n}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{nn}}{|A|}b_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_i = \frac{1}{|A|}(b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \ldots + b_nA_{ni})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, или согласно теореме 3.1 (эта теорема остается верной и для определителя n-го порядка; см. параграф 3.2, п. 3)

$$x_i = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Запишем короче:

$$x_i = \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta}, i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.12)$$

Здесь Δ — определитель системы (3.9), а $\Delta^{(i)}$ — определитель, полученный из определителя Δ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов.

[1] Габриель Крамер (1704—1752) — швейцарский математик.

Из самого способа решения ясно, что система (3.9) имеет единственное решение.

Пример 3.17. Система $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=2 \end{cases}$ имеет определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, и потому имеет единственное решение, которое можно найти по формулам $x=\frac{\Delta^{(1)}}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta^{(2)}}{\Delta}$, где $\Delta^{(1)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-2=-3$; $\Delta^{(2)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1$, т. е. $x=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$.

3. Линейная однородная система n уравнений с n неизвестными. Как уже отмечалось (см. п. 1), система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{3.13}$$

называется однородной. Она является частным случаем системы (3.9) при $b_1=0, \ldots, b_n=0$. Ясно, что эта система имеет нулевое решение $x_1=0$, $x_2=0, \ldots, x_n=0$. Это решение называют *тривиальным* решением однородной системы. Но может случиться, что однородная система (3.13) имеет и ненулевое решение. Его называют *нетривиальным* решением однородной системы (3.13).

Теорема 3.3. *Если определитель* Δ *однородной системы* (3.13) *не равен нулю* ($\Delta\neq 0$), *то эта система имеет только тривиальное решение.*

В самом деле, в силу свойства определителей (см. параграф 3.2, п. 1, свойство 5) все определители $\Delta^{(i)}=0$, поэтому в силу равенств (3.12) $x_i=0$ ($i=1, \ldots, n$).

Теорема 3.4. *Если система уравнений* (3.13) *имеет нетривиальное решение, то ее определитель* Δ *равен нулю* ($\Delta=0$).

В самом деле, если бы $\Delta\neq 0$, то по теореме 3.4 система (3.13) имела бы только одно тривиальное решение.

Справедливо (см., например [5]) и обратное.

Теорема 3.5. *Если определитель* Δ *системы* (3.13) *равен нулю, то эта система имеет нетривиальное решение.*

Упражнения

1. Найдите сумму матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[а) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$]

2. Найдите матрицу: а) $A + 2B$; б) $3A - B$, если
$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

[а) $\begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}$]

3. Вычислите произведения матриц AB, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

[а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \\ 37 & 9 \end{pmatrix}$]

Вычислите определители.

4. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

[26]

5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$.

[–38]

6. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

[1]

7. $\begin{vmatrix} 105 & 55 \\ 245 & 154 \end{vmatrix}$.

[2695]

8. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$.

[72]

9. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$. [–240]

10. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. [–10]

11. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$. [513]

12. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$. [$-2b^2$]

13. Найдите матрицы, обратные данным: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

[а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$]

14. Вычислите A^2, A^3, A^4 для $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

[$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; $A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$]

15. Решите матричным способом системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 20, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

[а) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$;
б) $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$]

16. Решите системы уравнений по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=1, \\ 3x_1+5x_2=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2=11, \\ 5x_2+6x_3=28, \\ x_1+2x_3=7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=3, \\ 4x_1+9x_2+16x_3=11; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=8, \\ 5x_1+2x_2+4x_3=14, \\ 3x_1-2x_2+x_3=12; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2, \\ 2x_1-6x_2+x_3=-11, \\ x_1-x_2-2x_3=-12. \end{cases}$

[а) $x_1=-7$; $x_2=5$; б) $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$;
в) $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=1$; г) $x_1=62$; $x_2=40$; $x_3=-94$;
д) $x_1=1$; $x_2=3$; $x_3=5$]

Глава 4
КОНЕЧНЫЕ ГРАФЫ

4.1. Основные понятия

1. Понятие графа. Многие задачи сводятся к рассмотрению совокупности объектов, существенные свойства которых описываются связями между ними. Например, глядя на карту автомобильных дорог, можно интересоваться только тем, имеется ли связь между некоторыми населенными пунктами, отвлекаясь от конфигурации и качества дорог, расстояний и других подробностей. При изучении электрических цепей на первый план может выступать характер соединений различных ее компонентов — резисторов, конденсаторов, источников и т. п.

В подобных случаях удобно рассматриваемые объекты изображать точками, называемыми *вершинами*, а связи между ними — линиями (произвольной конфигурации), называемыми *ребрами*. Множество вершин V, связи между которыми определены множеством ребер E, называют *графом* и обозначают $G = (V, E)$[1].

Первая работа по графам была опубликована Леонардом Эйлером в 1736 г. Она содержала решение задачи о кенигсбергских мостах (рис. 4.1, *а*): можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из любого места города, вернуться в него, пройдя в точности один раз по каждому мосту? Ясно, что по условию задачи не имеет значения, как проходит путь по частям суши a, b, c, d, на которых расположен г. Кенигсберг (ныне Калининград), поэтому их можно представить вершинами. А так как связи между этими частями осуществляются только через семь мостов, то каждый из них изображается ребром, соединяющим соответствующие вершины. В результате получаем граф, изображенный на рис. 4.1, *б*. Эйлер дал отрицательный ответ на поставленный вопрос. Более того, он доказал, что подобный маршрут имеется только для такого графа, каждая из вершин которого связана с четным числом ребер.

2. Ориентированные графы. Часто связи между объектами характеризуются вполне определенной ориентацией. Например, на некоторых улицах допускается только одностороннее автомобильное движение, в соединительных проводах электрической цепи задаются положительные направления токов.

---

1 Использован материал книги [8].

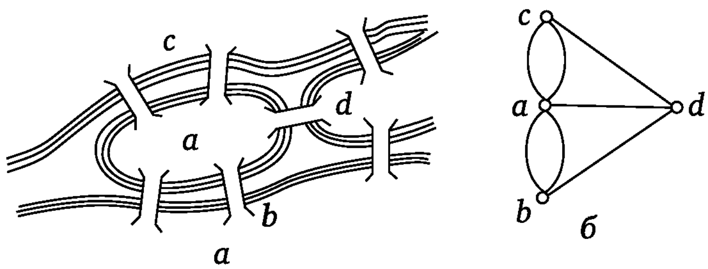


Рис. 4.1

Для указания направления связи между вершинами графа соответствующее ребро отмечается стрелкой. Ориентированное таким образом ребро называют *дугой*, а граф с ориентированными ребрами — ориентированным графом или, короче, *орграфом* (рис. 4.2, *а*).

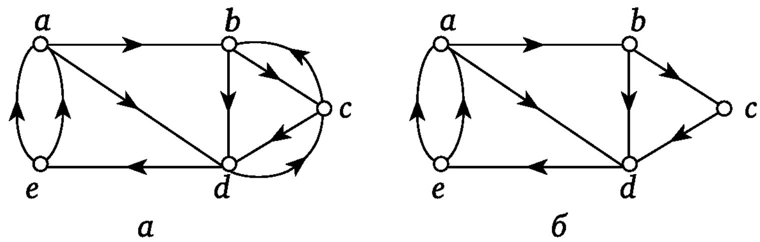


Рис. 4.2

Если пара вершин соединяется двумя или бóльшим числом дуг, то такие дуги называют *параллельными*. При этом две дуги, одинаково направленные по отношению к данной вершине, называют *строго параллельными*, а различно направленные — *нестрого параллельными*.

Граф, в котором ориентированы только некоторые ребра, называется *смешанным* (рис. 4.2, *б*).

Изменив направления всех дуг орграфа на противоположные, получаем орграф, *обратный* исходному. Если направления дуг орграфа не учитываются и каждая дуга рассматривается как неориентированное ребро, то он называется *соотнесенным* (неориентированным) графом.

3. Типы конечных графов. Если множество вершин графа конечно, то он называется *конечным графом*. В математике рассматриваются и бесконечные графы, но мы заниматься ими не будем, так как в практических приложениях они встречаются редко. Конечный граф $G = (V, E)$, содержащий p вершин и q ребер, называется *(p, q)-графом*.

Пусть $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ и $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$ — соответственно множества вершин и ребер (p, q)-графа. Каждое ребро $e_k \in E$ соединяет пару вершин v_i, $v_j \in V$, являющихся его *концами* (*граничными вершинами*). Для ориентированного ребра (дуги) различают *начальную вершину*, из которой дуга исходит, и *конечную вершину*, в которую дуга заходит. Ребро, граничными вершинами которого является одна и та же вершина, называется *петлей*.

Ребра с одинаковыми граничными вершинами являются параллельными и называются *кратными*. В общем случае граф может содержать и *изолированные вершины*, которые не являются концами ребер и не связаны ни между собой, ни с другими вершинами. Например, для (5, 6)-графа на рис. 4.3, *а* $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$; $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$; ребра e_2 и e_3 параллельны, ребро e_6 является петлей, а v_4 — изолированная вершина.

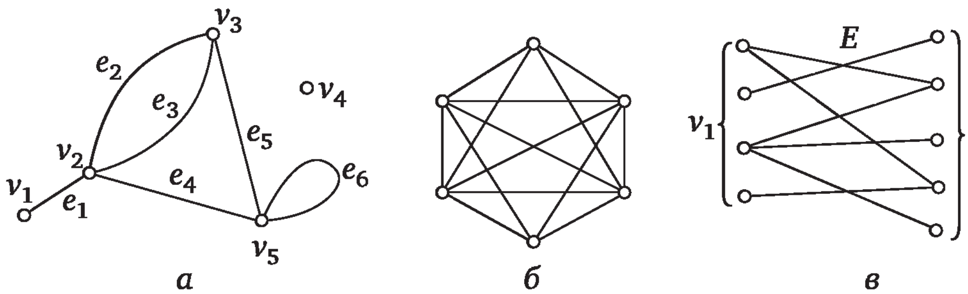


Рис. 4.3

Граф без петель и кратных ребер называют *простым* или *обыкновенным*. Граф без петель, но с кратными ребрами называют *мультиграфом*. Наиболее общий случай графа, когда допускаются петли и кратные ребра, называют *псевдографом*. Так, граф на рис. 4.3, *а* — псевдограф. Если граф не имеет ребер ($E = \varnothing$), то все его вершины изолированы ($V \neq \varnothing$), и он называется *пустым* или *нуль-графом*. Простой граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется *полным* (на рис. 4.3, *б* приведен пример полного графа с шестью вершинами). Если множество вершин V простого графа допускает такое разбиение на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), что не существует ребер, соединяющих вершины одного и того же подмножества, то он называется *двудольным* или *биграфом* (рис. 4.3, *в*). Ориентированный граф считается *простым*, если он не имеет строго параллельных дуг и петель.

Дополнением графа G называется граф $\overline{G}$ с теми же вершинами, что и граф G, и содержащий только те ребра, которые нужно добавить к графу G, чтобы получился полный граф.

На рис. 4.4 изображены следующие графы: G_1 — полный граф с пятью вершинами; G_2 — некоторый граф, имеющий пять вершин; $\overline{G}_2$ — дополнение графа G_2.

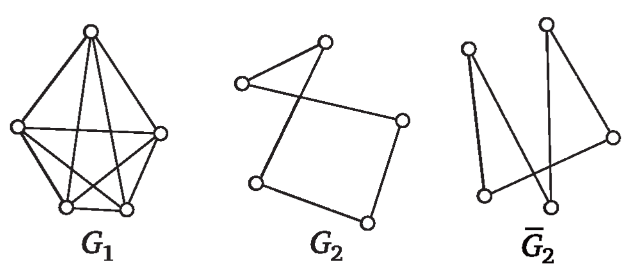


Рис. 4.4

4. Смежность, инцидентность, степени. Две вершины v_i и $v_j \in V$ графа $G = (V, E)$ называются *смежными*, если они являются граничными вершинами ребра $e_k \in E$. Отношение смежности на множестве вершин графа можно определить, представив каждое ребро как пару смежных вершин, т. е. $e_k = (v_i, v_j)$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Для неориентированных графов такие пары неупорядочены, так что $e_k = (v_i, v_j) = (v_j, v_i)$, а для орграфов — упорядочены, причем v_i и v_j означают соответственно начальную и конечную вершины дуги e_k. Петля при вершине v_i в обоих случаях представляется неупорядоченной парой (v_i, v_i). Ясно, что множество вершин V вместе с определенным на нем отношением смежности полностью определяет граф.

Если вершина v_i является концом (началом или концом) ребра (дуги) e_k, то говорят, что они *инцидентны* — вершина v_i инцидентна ребру (дуге) e_k и ребро (дуга) e_k инцидентно (а) вершине v_i.

В то время как смежность представляет собой отношение между однородными объектами (вершинами), инцидентность — это отношение между разнородными объектами (вершинами и ребрами). При рассмотрении орграфов различают *положительную инцидентность* (дуга исходит из вершины) и *отрицательную инцидентность* (дуга заходит в вершину).

Число ребер, инцидентных вершине v_i (петля учитывается дважды), называют *степенью вершины* и обозначают через $\delta(v_i)$ или $\deg(v_i)$. Так, для графа на рис. 4.3, *а* $\delta(v_1) = 1$, $\delta(v_2) = 4$, $\delta(v_5) = 4$ и т. д. Очевидно, степень изолированной вершины равна нулю ($\delta(v_4) = 0$). Вершина степени единица называется *концевой*, или *висячей*, *вершиной* ($\delta(v_1) = 1$). Ребро, инцидентное концевой вершине, называется *концевым*.

Теорема 4.1. *Для любого псевдографа сумма степеней всех его вершин — число четное, равное удвоенному числу ребер графа.*

Доказательство. Заключение этой теоремы следует из того, что каждое ребро имеет два конца, а каждая петля учитывается два раза.

Следствие. *В любом конечном графе число вершин нечетной степени четно.*

Действительно, если бы число вершин нечетной степени было нечетным, то сумма степеней всех вершин графа равнялась бы нечетному числу (как сумма нечетного числа нечетных чисел), что противоречит теореме 4.1.

В орграфе различают положительные $\delta^+(v_i)$ и отрицательные $\delta^-(v_i)$ степени вершин, которые равны соответственно числу исходящих из v_i и заходящих в v_i дуг. Например, для вершины d орграфа (см. рис. 4.2, *а*) имеем $\delta^+(d) = 2$ и $\delta^-(d) = 3$.

Замечание. В случае ориентированного псевдографа вклад каждой петли, инцидентной некоторой вершине v, равен единице, как в $\delta^+(v)$, так и в $\delta^-(v)$.

Теорема 4.2. *Суммы положительных и отрицательных степеней всех вершин орграфа равны между собой и равны также числу всех дуг.*

Доказательство. Учитывая замечание и то, что каждое ребро ориентированного графа имеет одно начало и один конец, из теоремы 4.1 получаем заключение теоремы 4.2.

5. Матрицы графов. Граф может быть задан разными способами: рисунком, перечислением вершин и ребер (или дуг) и т. д. Одним из самых удобных способов является задание графа с помощью матрицы. Так, граф можно представить *матрицей смежности*. Строки и столбцы этой матрицы соответствуют вершинам графа, а ее (ij)-элемент равен числу кратных ребер, связывающих вершины v_i и v_j (или направленных от вершины v_i к вершине v_j для орграфа). Например, для графов, приведенных на рис. 4.2, *а* и 4.3, *а*, имеем соответственно следующие матрицы смежности:

$$V_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|l}
\multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d} & \multicolumn{1}{c}{e} & \\ \hline
 & 1 & & 1 & & a \\ \hline
 & & 1 & 1 & & b \\ \hline
 & 1 & & 1 & & c \\ \hline
 & & 1 & & 1 & d \\ \hline
2 & & & & & e \\ \hline
\end{array}
\quad
V_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|l}
\multicolumn{1}{c}{v_1} & \multicolumn{1}{c}{v_2} & \multicolumn{1}{c}{v_3} & \multicolumn{1}{c}{v_4} & \multicolumn{1}{c}{v_5} & \\ \hline
 & 1 & & & & v_1 \\ \hline
1 & & 2 & & 1 & v_2 \\ \hline
 & 2 & & & 1 & v_3 \\ \hline
 & & & & & v_4 \\ \hline
 & 1 & 1 & & 1 & v_5 \\ \hline
\end{array}$$

Матрица смежности неориентированного графа всегда симметрична, а орграфа — в общем случае несимметрична. Неориентированным ребрам соответствуют пары ненулевых элементов, симметричных относительно главной диагонали матрицы, дугам — ненулевые элементы матрицы, а петлям — ненулевые элементы главной диагонали. В столбцах и строках, соответствующих изолированным вершинам, все элементы равны нулю. Элементы матрицы простого графа равны нулю или единице, причем все элементы главной диагонали нулевые.

Рассматривая инцидентность вершин и ребер (p, q)-графа, можно представить его *матрицей инцидентности* размера $p \times q$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы — ребрам. Для неориентированного графа элементы этой матрицы определяются по следующему правилу: ij-элемент равен единице, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, и равен нулю, если v_i и e_j не инцидентны.

В случае орграфа: –1, если v_i — начальная вершина дуги e_j, 1, если v_i — конечная вершина дуги e_j, 0, если вершина v_i и дуга e_j не инцидентны; если вершина v_i является для дуги e_j началом и концом (т. е. e_j — петля), проставляется любое число, отличное от –1, 1, 0, например 2.

Например, матрица инцидентности графа, приведенного на рис. 4.3, *а*, имеет вид

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l}
\multicolumn{1}{c}{e_1} & \multicolumn{1}{c}{e_2} & \multicolumn{1}{c}{e_3} & \multicolumn{1}{c}{e_4} & \multicolumn{1}{c}{e_5} & \multicolumn{1}{c}{e_6} & \\ \hline
1 & & & & & & v_1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & & & v_2 \\ \hline
 & 1 & 1 & & 1 & & v_3 \\ \hline
 & & & & & & v_4 \\ \hline
 & & & 1 & 1 & 2 & v_5 \\ \hline
\end{array}$$

Каждый столбец матрицы инцидентности содержит обязательно два единичных элемента (для орграфа эти элементы всегда имеют различные знаки и равны соответственно 1 и –1). Количество единиц в строке равно степени соответствующей вершины (для орграфа количество положительных единиц определяет положительную степень, а количество отрицательных единиц — отрицательную степень). Нулевая строка соответствует изолированной вершине, а столбец с единственным ненулевым элементом, отличным от –1 и 1, — петле.

6. Изоморфизм. На рис. 4.5 изображены два графа, которые с геометрической точки зрения совершенно различны (пересечение ребер, если оно не отмечено точкой, не является вершиной). Но по существу они различаются лишь начертанием, а отношения инцидентности (при соответствующем обозначении вершин и ребер) для них одинаковы. Графы, для которых сохраняется отношение инцидентности, называются *изоморфными*.

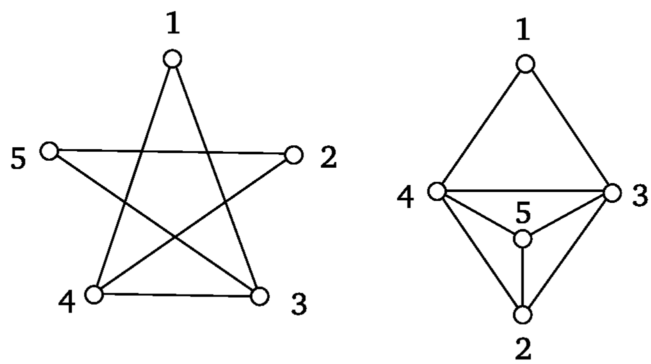


Рис. 4.5

Если существенные свойства графа не связаны со способом его изображения на плоскости или нумерацией вершин и ребер, то изоморфные графы, как правило, не различают между собой.

7. Планарность. Граф называют *плоским* (*планарным*), если существует изоморфный ему граф (геометрическая реализация), который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. Например, хотя в одном из графов на рис. 4.5 ребра пересекаются, изоморфный ему не имеет пересечений, следовательно, первый граф плоский.

На рис. 4.6 показаны два неплоских графа, играющие фундаментальную роль в теории планарности и называемые *графами Понтрягина — Куратовского*. Полный пятиугольник (рис. 4.6, *а*) представляет собой простой неплоский граф с минимальным числом вершин (полный граф с четырьмя вершинами — плоский, а удаление из пятиугольника хотя бы одного ребра также превращает его в плоский граф). Двудольный граф (рис. 4.6, *б*) является моделью известной задачи о трех домах и трех колодцах: можно ли проложить от домов к каждому колодцу дороги так, чтобы они не пересекались (враждующие соседи должны иметь возможность пользоваться всеми колодцами, но не хотят встречаться на дорогах)?

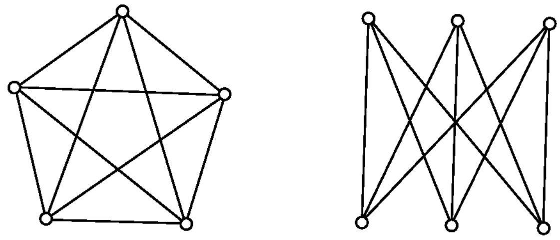


Рис. 4.6

Плоские графы обладают многими интересными свойствами. Так, Эйлер обнаружил простую связь между количеством вершин В, количеством ребер Р и количеством частей Г, на которые граф разделяет плоскость (называемых гранями):

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2. \qquad (1)$$

Планарность является существенным свойством графов, которые моделируют коммуникации и связи между объектами на плоскости (дороги между населенными пунктами, водопроводные и газопроводные сети, линии передачи электроэнергии, межсоединения на печатных платах электронных устройств и кристаллах интегральных схем). Плоскими графами представляются различные карты, с которыми, в частности, связана известная *проблема четырех красок*: всегда ли можно раскрасить области, на которые плоский граф делит поверхность, так, чтобы никакие две смежные области не были окрашены в одинаковый цвет и чтобы при этом было использовано не более четырех цветов? Более ста лет эта проблема оставалась нерешенной. Наконец, в 1976 г. американские математики Кеннет Аппель и Вольфганг Хакен решили эту задачу с помощью компьютера.

8. Части графа. Граф $G' = (V, E')$ является *частью графа* $G = (V, E)$, если $V' \subset V$ и $E' \subset E$. Часть, которая наряду с некоторым подмножеством ребер графа содержит и все инцидентные им вершины, называется *подграфом.* Часть, которая, наряду с некоторым подмножеством ребер графа, содержит все вершины графа ($V' = V$, $E' \subset E$), называется *суграфом.* Рассмотренные графы для графа, представленного на рис. 4.7, *а*, показаны на рис. 4.7 *б* — *г*.

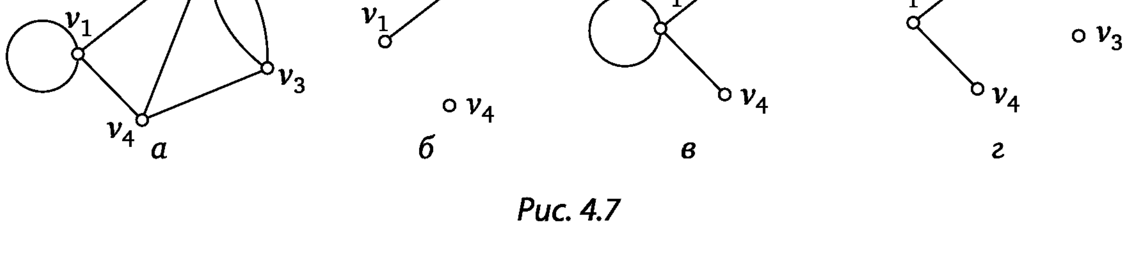


Рис. 4.7

Исходный граф по отношению к его подграфу называют *надграфом*, а по отношению к суграфу — *сверхграфом.* Совокупность всех ребер графа, не принадлежащих его подграфу (вместе с инцидентными вершинами), образует *дополнение подграфа*. Говорят, что подграфы $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ *разделены ребрами*, если они не имеют общих ребер ($E' \cap E'' = \varnothing$), и *разделены вершинами*, если у них нет общих вершин ($V' \cap V'' = \varnothing$).

4.2. Маршруты, цепи, циклы и пути

1. **Определения.** Пусть G — неориентированный граф.

Маршрутом в G называется такая последовательность ребер (e_1, e_2, ..., e_n), в которой каждые два соседних ребра e_{i-1} и e_i ($i = 2, 3, ..., n$) имеют общую инцидентную вершину. В маршруте одно и то же ребро может встречаться несколько раз.

Вершина v_0, инцидентная ребру e_1 и не инцидентная e_2, называется *началом маршрута*. Если же ребра e_1 и e_2 — кратные, требуется дополнительное указание, какую из двух инцидентных им вершин считать началом маршрута. Аналогично определяется конец маршрута.

Примерами маршрутов на графе рис. 4.3, *а* могут служить последовательности (e_1, e_3, e_2, e_3, e_5), (e_5, e_6, e_4, e_4). Первый маршрут проходит через последовательность вершин (v_1, v_2, v_3, v_2, v_3, v_5) и соединяет вершины v_1 и v_5, а второй — через последовательность вершин (v_3, v_4, v_5, v_2, v_5) и соединяет вершины v_3 и v_5. *Замкнутый маршрут* приводит в ту же вершину, из которой он начался.

Маршрут, все ребра которого различны, называется *цепью*, а маршрут, для которого различны все вершины, называется *простой цепью*. Замкнутая цепь называется *циклом*, а простая цепь — *простым циклом*. Так, на графе рис. 4.3, *а* (e_2, e_5, e_6) — цепь, (e_1, e_2, e_5) — простая цепь, (e_2, e_3, e_4, e_5) — цикл, (e_2, e_4, e_5) — простой цикл.

Ориентированные маршруты на орграфе определяются аналогично с той разницей, что начальная вершина каждой последующей дуги маршрута должна совпадать с конечной вершиной предыдущей дуги. Иначе говоря, движение по маршруту допускается только в направлениях, указанных стрелками. Маршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называется *путем*, а не содержащий повторяющихся вершин — *простым путем*. Замкнутый путь называется *контуром*, а простой замкнутый путь — *простым контуром*. Граф (орграф) называется *циклическим* (*контурным*), если он содержит хотя бы один цикл (контур), в противном случае он называется *ациклическим* (*бесконтурным*).

Понятия цепи и цикла применимы и к ориентированным графам. При этом направления дуг не учитываются, т. е. по существу вместо орграфа рассматривают неориентированный соотнесенный ему граф.

Число ребер маршрута (пути) называется его *длиной*.

2. Связность. Две вершины графа называют *связанными*, если существует маршрут, соединяющий эти вершины. Граф, любая пара вершин которого связана, называют *связным графом*. В противном случае граф называется *несвязным*.

Если граф несвязный, то множество его вершин можно единственным образом разделить на непересекающиеся подмножества, каждое из которых содержит все связанные между собой вершины и вместе с инцидентными им ребрами образует связный подграф, называемый *компонентой графа.* Любой несвязный граф является совокупностью связных графов. На рис. 4.8 изображен несвязный граф с компонентами G_1, G_2 и G_3.

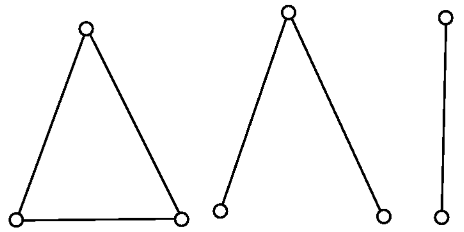


Рис. 4.8

3. Расстояния. *Расстоянием* $d(v', v'')$ между вершинами v' и v'' неориентированного связного графа G называется минимальная длина простой цепи с началом v' и концом v''. Заметим, что $d(v', v'') = d(v'', v')$.

Центром графа G называется вершина, от которой максимальное из расстояний до других вершин являлось бы минимальным.

Максимальное расстояние от центра графа G до его вершин называется *радиусом графа* (обозначение $r(G)$).

Для графа G на рис. 4.9 расстояния между вершинами: $d(v_1, v_5) = 2$, $d(v_1, v_4) = 1$, $d(v_1, v_3) = 1$, $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_2, v_5) = 2$, $d(v_2, v_4) = 1$, $d(v_2, v_3) = 1$, $d(v_3, v_5) = 2$, $d(v_3, v_4) = 1$, $d(v_4, v_5) = 1$, $d(v_1, v_1) = 0$ и т. д.

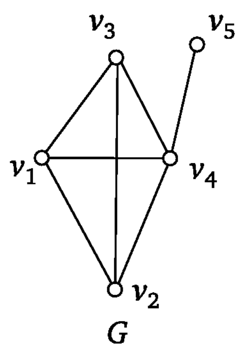


Рис. 4.9

Отсюда следует, что вершина v_4 — центр данного графа, а его радиус $r(G) = 1$.

4. Эйлеровы циклы и цепи. *Эйлеров цикл* — цикл графа, содержащий все ребра графа. *Эйлеров граф* — граф, имеющий эйлеров цикл (эйлеров цикл можно считать следом пера, вычерчивающего этот граф, не отрываясь от бумаги). На рис. 4.10 изображен граф, обладающий эйлеровым циклом (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}), следовательно, этот граф эйлеров.

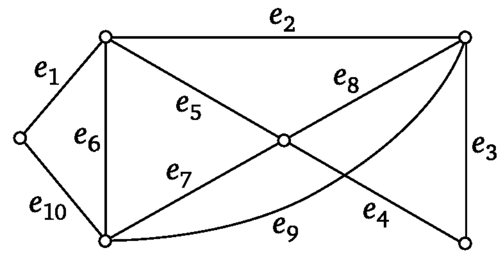


Рис. 4.10

Теорема Эйлера. *Для того чтобы неориентированный граф G был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и степени всех его вершин были четными.*

В графе задачи о кенигсбергских мостах (см. рис. 4.1, *б*) все вершины имеют нечетную степень. Следовательно, согласно теореме Эйлера решение этой задачи невозможно.

Эйлерова цепь — цепь, включающая все ребра данного неориентированного графа G, но имеющая различные начало v' и конец v''.

Для того чтобы в неориентированном графе G существовала эйлерова цепь, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и степени всех его вершин, кроме начальной v' и конечной v'' были четными (v' и v'' должны иметь нечетную степень). На рис. 4.11 изображен граф, обладающий эйлеровой цепью (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) с началом в вершине v_5 и концом в вершине v_3.

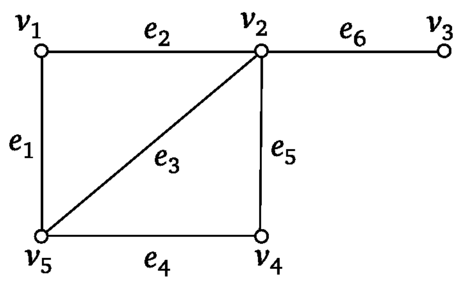


Рис. 4.11

4.3. Деревья и лес

Неориентированный граф называется *неориентированным деревом* (или просто *деревом*), если он является связным и не содержит циклов, а значит, петель и кратных ребер. Дерево на множестве p вершин всегда содержит $q = p - 1$ ребер, т. е. минимальное количество ребер, необходимое для того, чтобы граф был связным. Действительно, две вершины связываются одним ребром, и для связи каждой последующей вершины с предыдущими требуется ребро, следовательно, для связи p вершин необходимо и достаточно $p - 1$ ребер.

При добавлении в дерево ребра образуется цикл, а при удалении хотя бы одного ребра дерево распадается на компоненты, каждая из которой представляет собой также дерево или изолированную вершину.

Несвязный неориентированный граф, компоненты которого являются деревьями, называется *лесом* (лес из k деревьев, содержащий p вершин, имеет в точности $p - k$ ребер). Сказанное иллюстрируется на примере дерева (рис. 4.12, *а*), которое превращается в циклический граф добавлением ребра (рис. 4.12, *б*) и распадается на лес из двух деревьев T_1 и T_2 при удалении ребра e (рис. 4.12, *в*).

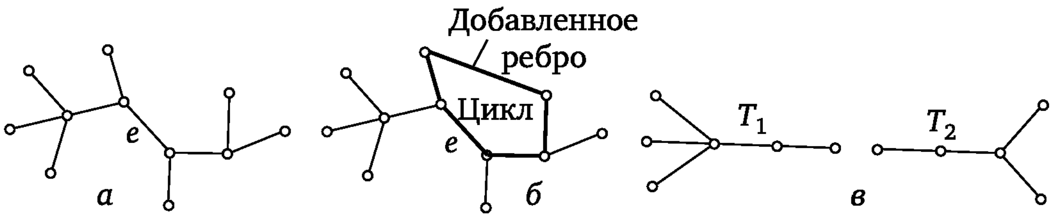


Рис. 4.12

В дереве между любыми двумя вершинами существует цепь, и притом только одна. Верно и обратное: если любые две вершины графа связаны единственной цепью, то граф является деревом. Если конечное дерево состоит более чем из одной вершины, то оно имеет хотя бы две концевые вершины и хотя бы одно концевое ребро.

Обычно деревья считаются существенно различными, если они не изоморфны. На рис. 4.13 показаны все возможные различные деревья с шестью вершинами. С увеличением числа вершин количество различных деревьев резко возрастает (например, при $p = 20$ их насчитывается около миллиона). Среди различных деревьев выделяются два важных частных случая: *последовательное дерево*, представляющее собой простую цепь, и *звездное дерево*, в котором одна из вершин (центр) смежна со всеми остальными вершинами.

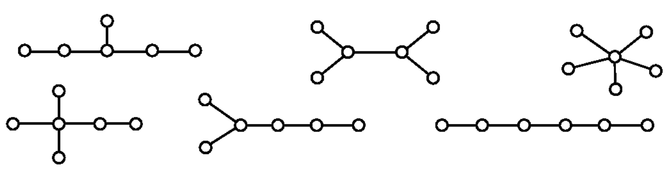


Рис. 4.13

Рассматриваются также деревья и с ориентированными ребрами (дугами). Ориентированное дерево называется *прадеревом* с *корнем* v_0, если существует путь между вершиной v_0 и любой другой его вершиной (рис. 4.14). Ясно, что прадерево имеет единственный корень.

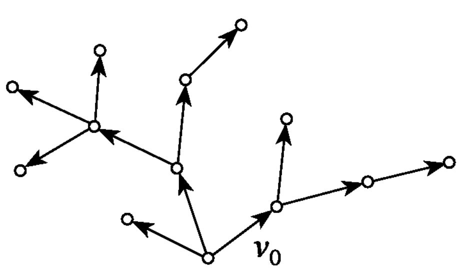
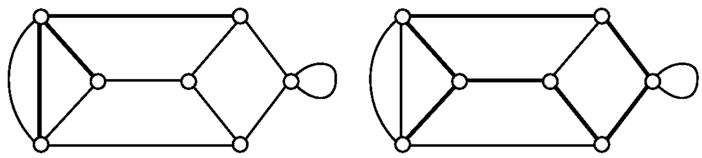


Рис. 4.14

Деревом некоторого графа G (рис. 4.15, *а*, выделено жирными линиями) называется его связный подграф без циклов. Если такое дерево является суграфом (содержит все вершины графа), то оно называется *покрывающим деревом*, или *остовом* (рис. 4.15, *б*). Так как петля представляет собой простейший цикл, состоящий из единственного ребра, то она не может входить в состав любого дерева графа.



а *б*

Рис. 4.15

Ребра графа, которые принадлежат его дереву, называют *ветвями*. Если дерево покрывает граф, то множество ребер графа разбивается на два подмножества: подмножество ветвей и подмножество ребер *дополнения дерева*, называемых *хордами*. При этом связный (p, q)-граф содержит $\nu = p - 1$ ветвей и $\sigma = q - p + 1$ хорд. Если граф несвязный, то совокупность остовов k его компонент образует *покрывающий лес*. В этом случае $\nu = p - k$ и $\sigma = q - p + k$.

Пусть дано конечное дерево G. Вершинами типа 1 называют его концевые вершины. Если из дерева G удалить все вершины типа 1 и инцидентные им концевые ребра, то в оставшемся дереве G' концевые вершины называют вершинами типа 2 в дереве G. Аналогично определяются вершины типов 3, 4 и т. д. Конечное дерево имеет вершины лишь конечного числа типов, причем число вершин максимального типа равно единице или двум. На графе, изображенном на рис. 4.16, типы его вершин отмечены цифрами. Как очевидно, этот граф содержит две вершины максимального (4-го) типа.

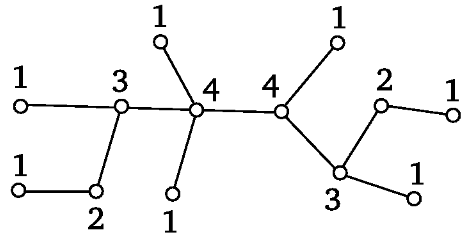


Рис. 4.16

Цикломатическим числом конечного неориентированного графа G называется

$$\nu(G) = \nu_c + \nu_e - \nu_v,$$

где ν_c — число связных компонент графа; ν_e — число его ребер; ν_v — число его вершин. Цикломатическое число любого конечного графа неотрицательно.

Цикломатическое число любого дерева $\nu(G) = \nu_c + \nu_e - \nu_v = 0$. Действительно, число вершин ν_v в дереве на единицу больше числа ребер ν_e, т. е. $\nu_e - \nu_v = -1$, а число связных компонент для дерева $\nu_c = 1$. Отсюда $\nu(G) = 0$.

Цикломатическое число леса равно сумме цикломатических чисел своих связных компонент — деревьев, т. е. также равно нулю.

Деревья играют важную роль в различных прикладных задачах, когда, например, речь идет о связи каких-либо объектов минимальным числом каналов (линий связи, дорог, коммуникаций) с определенными свойствами. С помощью дерева определяется система координат при моделировании цепей и систем различной физической природы. Деревья используются в качестве моделей при рассмотрении иерархических систем объектов, структурных формул органических соединений и т. п.

Упражнения

1. Опишите графы, изображенные на рис. 4.17.

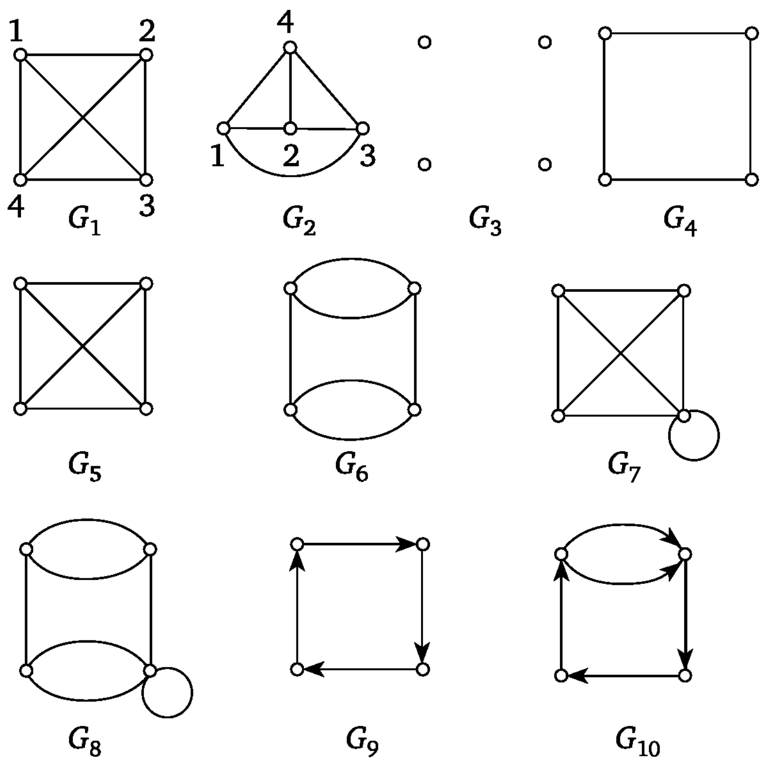


Рис. 4.17

[G_1 — G_8 — неориентированные, а G_9 и G_{10} — ориентированные; G_1 и G_2 — полные; все вершины графа G_3 изолированные (граф с пустым множеством ребер); G_4 и G_5 являются дополнением друг другу; G_6 — мультиграф; G_7 не является полным графом; G_8 — псевдограф; G_{10} — ориентированный мультиграф]

2. Чему равны степени вершин графов G_1 и G_2, изображенных на рис. 4.18?

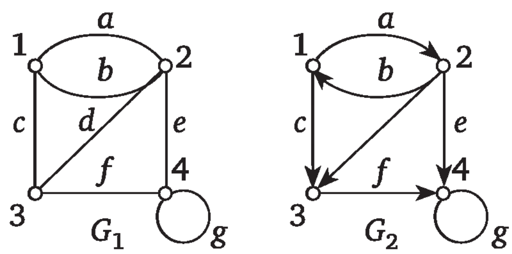


Рис. 4.18

[Степени вершин графа G_1: $\delta(1) = 3$, $\delta(2) = 4$, $\delta(3) = 3$, $\delta(4) = 4$;
степени вершин орграфа G_2: $\delta^+(1) = 2$, $\delta^+(2) =$
$= 3$, $\delta^+(3) = 1$, $\delta^+(4) = 1$,
$\delta^-(1) = 1$, $\delta^-(2) = 1$, $\delta^-(3) = 2$, $\delta^-(4) = 3$]

3. Задайте матрицами смежности графы G_1 и G_2 на рис. 4.18.

$$\Bigg[\; A(G_1)=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array} \quad A(G_2)=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array} \Bigg]$$

4. Задайте матрицами инцидентности графы G_1 и G_2 на рис. 4.18.

$$\Bigg[\; A(G_1)=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$A(G_2)=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array} \Bigg]$$

5. Задайте списком ребер граф G_2 (см. рис. 4.18).

[

Ребра	Вершины
a	1 2
b	2 1
c	1 3
d	2 3
e	2 4
f	3 4
g	4 4

]

6. Определите, изоформны ли графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 4.19.

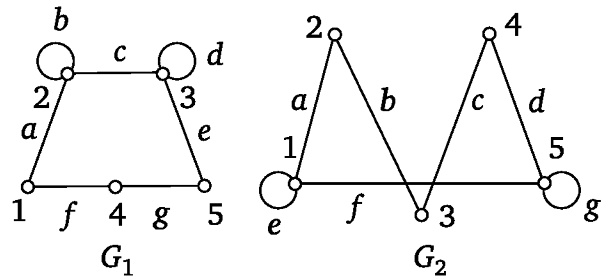


Рис. 4.19

[Изоморфны]

7. Для вершин v_1 и v_6 графа G на рис. 4.20 приведите примеры маршрута, цепи, простой цепи.

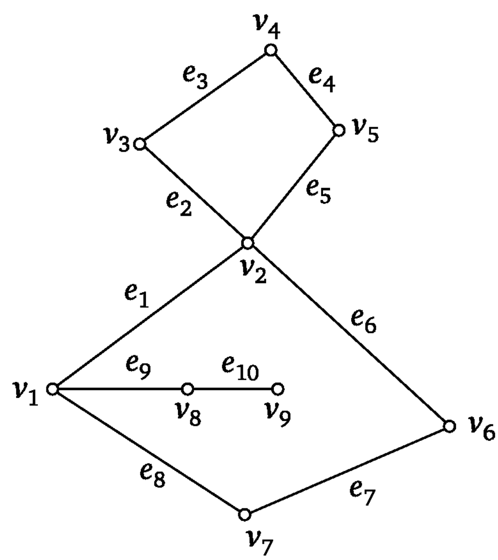


Рис. 4.20

[Маршрут, не являющийся цепью:
$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_1, e_8, e_7, e_6, e_1, e_8, e_7)$
или $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_1, e_8, e_7)$ и т. п.;
цепь, не являющаяся простой цепью: $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$;
простая цепь: (e_1, e_6) или (e_8, e_7)]

8. Определите в графе G (см. рис. 4.20) циклический маршрут, цикл, простой цикл, приняв вершину v_1 за их начало и конец.

[Циклический маршрут, не являющийся
циклом: $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_1, e_6, e_7, e_8)$;
цикл, не являющийся простым циклом: $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$;
простой цикл: (e_1, e_6, e_7, e_8)]

9. Для трех графов G_1, G_2, G_3 на рис. 4.21 определите расстояния между вершинами. Какие вершины являются центрами графов? Чему равны радиусы графов?

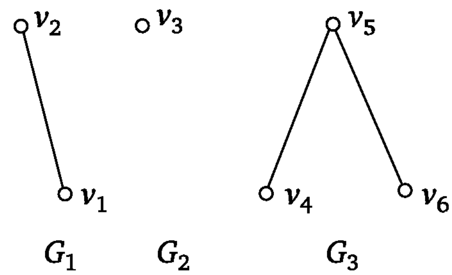


Рис. 4.21

[Для G_1: $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_1) = d(v_2, v_2) = 0$,
центры — обе вершины v_1 и v_2, $r(G_1) = 1$;
для G_2: $d(v_3, v_3) = 0$, центр — вершина v_3, $r(G_2) = 0$;
для G_3: $d(v_4, v_5) = d(v_5, v_6) = 1$, $d(v_4, v_6) = 2$, $d(v_4, v_4) = 0$
и т. д., центр — вершина v_5, $r(G_3) = 1$]

10. Имеют ли пятиугольник и четырехугольная пирамида эйлеров цикл?

[Пятиугольник имеет, а четырехугольная пирамида — нет]

11. Имеют ли пятиугольник и четырехугольная пирамида эйлерову цепь?

[Не имеют]

12. Сколько вершин максимального типа имеется в графе, изображенном на рис. 4.22?

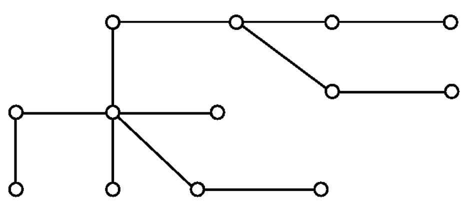


Рис. 4.22

[Одна вершина максимального 4-го типа]

13. Вычислите цикломатические числа для графов, изображенных на рис. 4.21 и 4.22.

[1; 3; 2]

Глава 5
ЛОГИКА

В настоящей главе займемся едва ли не простейшими из всех возможных функций. Аргументы этих функций принимают всего два значения 0 и 1. В этом же множестве лежат и значения функций. Иными словами, рассматриваемые функции могут принимать всего два различных значения. Несмотря на такую исходную простоту, исчисление подобных функций оказывается удобным инструментом во многих трудных задачах, в том числе и в задачах биологии.

5.1. Булевы функции

1. Булевы функции одной переменной. Будем, как обычно, обозначать независимую переменную символом x. Если независимых переменных несколько, будем их нумеровать: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Далее будем предполагать, что множество значений x состоит всего из двух элементов. Без ущерба для общности можем считать, что такими элементами являются числа 0 и 1. Таким образом, на числовой оси множества значений аргумента x изображается двумя точками.

Независимая переменная, которая принимает всего два значения, называется *двоичной*, или *логической*, *переменной*, или *булевой*, по имени Дж. Буля.

Рассмотрим возможные функции от логической переменной $x \in D = \{0, 1\}$. При этом будем интересоваться лишь теми функциями, значения которых лежат также в $D = \{0, 1\}$. Таких функций немного. В самом деле, можно указать, например, степенную функцию: $f(x) = x^n$. Но эта функция в данном случае ничем не отличается от *тождественной* функции $f(x) = x$, так как значение 0 она переводит в 0, а значение 1 в 1.

Другой более интересной функцией является *отрицание*. Эта функция обозначается $\bar{x}$ и читается «*не x*». Она действует следующим образом: если $x = 0$, то $\bar{x} = 1$, и наоборот, если $x = 1$, то $\bar{x} = 0$.

Построим таблицы рассмотренных функций (табл. 5.1, 5.2), для чего слева перечислим значения аргумента (0 и 1), а справа — соответствующие значения функций. Таблицы такого вида принято называть *таблицами истинности*.

Кроме этих двух функций можно указать еще только две функции, отображающие множество $\{0, 1\}$ в себя. Это постоянные $f(x) = 1$ и $f(x) = 0$ (табл. 5.3, 5.4 — их таблицы истинности).

Таблица 5.1

x	$f(x) = x$
0	0
1	1

Таблица 5.2

x	$f(x) = \bar{x}$
0	1
1	0

Таблица 5.3

x	$f(x) \equiv 1$
0	1
1	1

Таблица 5.4

x	$f(x) \equiv 0$
0	0
1	0

Других функций от одной логической переменной, отображающих $\{0, 1\}$ в себя, не существует. В самом деле, любая такая функция определяется двумя значениями ($f(0)$) и $f(1)$), причем каждое из этих значений может быть равно либо 0, либо 1. Таким образом, каждая такая функция — это двухбуквенное слово $f(0)f1)$, образованное из $\{0, 1\}$ как из алфавита. Число таких слов, а следовательно, и число интересующих нас функций, равно, как мы знаем, $2^2 = 4$. Ровно столько функций и перечислено, а все возможные двухбуквенные слова, которые можно образовать из $\{0, 1\}$, записаны в правых частях табл. 5.1—5.4.

Итак, если x — логическая переменная, то существует только четыре функции $f(x)$, отображающие область определения $D = \{0, 1\}$ в себя: две постоянные, одна тождественная и одна — отрицание. Эти функции называют *булевыми функциями одной переменной*. Каждую из этих функций можно задать аналитически, т. е. с помощью формул, например $f(x) = \bar{x}$, или таблично.

Заметим еще, что так же, как в непрерывном анализе, одну и ту же функцию можно задать с помощью разных формул. Например, функцию $f(x) \equiv 0$ можно задать и формулой $f(x) \equiv \bar{1}$.

Имея всего четыре функции, трудно построить исчисление, столь же содержательное, как анализ непрерывных функций. Перейдем поэтому к изучению функций, зависящих от нескольких логических переменных, значения которых лежат в $D = \{0, 1\}$. Такие функции называют *булевыми функциями нескольких переменных*. В этом случае также получим конечное множество функций, но запас их достаточно велик, чтобы построить содержательный математический аппарат.

Рассмотрим сначала случай двух переменных.

2. Булевы функции двух переменных. Пусть x_1 и x_2 — логические переменные. Рассмотрим функцию от x_1 и x_2:

$$f(x_1, x_2). \tag{5.1}$$

Так как каждая из переменных x_1, x_2 может принимать только два значения: 0 и 1, то областью определения функции (5.1) являются четыре слова: 00, 01, 10 и 11. Приняв эти слова за координаты точек на плоскости x_1Ox_2, получим четыре вершины единичного квадрата (рис. 5.1). Таким образом, функцию (5.1) можно считать заданной на множестве вершин единичного квадрата, и это множество она отображает во множество {0, 1}. Например, функция $f(x_1, x_2)$ может быть равна единице во всех вершинах, кроме начала координат, а в начале координат обращаться в нуль.

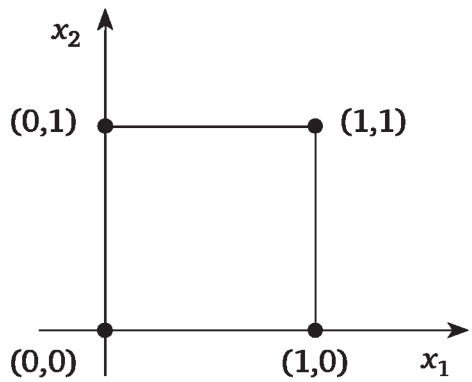


Рис. 5.1

Легко найти общее число всевозможных функций $f(x_1, x_2)$ со значениями в {0, 1}. В самом деле, перенумеруем вершины единичного квадрата в каком-нибудь порядке. В каждой вершине функция $f(x_1, x_2)$ может принимать одно из двух значений: 0 или 1. Задать функцию — значит указать, в каких вершинах она принимает значение 0 и в каких 1. Таким образом, наша функция — это четырехбуквенное слово, образованное из алфавита {0, 1}. Число таких слов равно $2^4 = 16$. Следовательно, *можно построить только* 16 *различных функций двух логических переменных со значениями в* {0, 1}. Перечислим эти функции.

Прежде всего отметим две простейшие функции — постоянные: $f(x_1, x_2) \equiv 0$ и $f(x_1, x_2) \equiv 1$ (табл. 5.5, 5.6 — их таблицы истинности; так же таблицами истинности являются и следующие ниже табл. 5.7 — 5.20).

Таблица 5.5

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) \equiv 0$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0

Таблица 5.6

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) \equiv 1$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Еще две тоже очень простые функции: $f(x_1, x_2) = x_1$ и $f(x_1, x_2) = x_2$ (табл. 5.7, 5.8). Аналогично строятся функции $f(x_1, x_2) = \overline{x}_1$ и $f(x_1, x_2) = \overline{x}_2$ (табл. 5.9, 5.10).

Все эти функции уже встречались при рассмотрении функций одной логической переменной. Перейдем теперь к более интересным функциям двух логических переменных.

Таблица 5.7

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1$
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	1

Таблица 5.8

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Таблица 5.9

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = \overline{x}_1$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	0

Таблица 5.10

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = \overline{x}_2$
0	0	1
1	0	1
0	1	0
1	1	0

Дизъюнкция. Так называется функция $f(x_1, x_2)$, которая принимает значение, равное нулю, тогда и только тогда, когда оба аргумента равны нулю (табл. 5.11). Дизъюнкция обозначается $x_1 \vee x_2$ и читается «x_1 или x_2». Легко видеть, что дизъюнкцию можно определить равенством $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$. Таким образом, чтобы дизъюнкция была равна единице, достаточно (и необходимо), чтобы хоть один из аргументов был равен единице.

Таблица 5.11

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Таблица 5.12

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Конъюнкция. Так называется функция $f(x_1, x_2)$, которая принимает значение, равное единице, тогда и только тогда, когда оба аргумента равны единице (табл. 5.12). Конъюнкция обозначается $x_1 \wedge x_2$ или $x_1 \times$ $\times\, x_2$ и читается «x_1 и x_2»[1]. Легко видеть, что конъюнкцию можно определить также равенством $x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2)$. Таким образом, чтобы конъюнкция была равна нулю, необходимо (и достаточно), чтобы хоть один аргумент был равен нулю.

Импликация. Эта функция принимает значение, равное нулю, тогда и только тогда, когда первый аргумент x_1 равен единице, а второй x_2 равен нулю (табл. 5.13). Обозначается $x_1 \to x_2$, читается «если x_1, то x_2» или «из x_1 следует x_2».

---

[1] Иногда конъюнкцию обозначают знаком &. До сих пор не установилось единое обозначение и для других функций. Так, например, для отрицания существуют еще два знака.

Эквиваленция. Эта функция принимает значение, равное единице, тогда и только тогда, когда оба аргумента принимают одинаковое значение (табл. 5.14). Обозначается $x_1 \sim x_2$, читается «x_1 эквивалентно x_2» или «x_1 равнозначно x_2».

Таблица 5.13

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Таблица 5.14

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Функция Шеффера, или штрих Шеффера. Эта функция обращается в нуль тогда и только тогда, когда оба аргумента равны единице (табл. 5.15). Обозначается $x_1 \mid x_2$.

Функция Даггера, или стрелка Пирса. Эта функция обращается в единицу тогда и только тогда, когда оба аргумента равны нулю (табл. 5.16). Обозначается $x_1 \downarrow x_2$.

Таблица 5.15

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Таблица 5.16

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

Исключенное «или». Так называют функцию, которая обращается в единицу, когда либо первый, либо второй аргумент обращается в единицу, но не оба вместе. Обозначается $x_1 \nabla x_2$ (табл. 5.17).

Таблица 5.17

x_1	x_2	$x_1 \nabla x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Таблица 5.18

x_1	x_2	$x_1 \leftarrow x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	0

Нам осталось рассмотреть еще три функции. Первая функция из этой тройки обозначается $x_1 \leftarrow x_2$ и иногда называется *запретом* (табл. 5.18). Она характерна тем, что принимает значение, равное единице тогда и только тогда, когда первый аргумент x_1 равен единице, а второй x_2 равен нулю. Две другие функции — это запрет и импликация, в которых первым аргументом считается x_2, а вторым x_1 (табл. 5.19, 5.20).

Таблица 5.19

x_1	x_2	$x_2 \leftarrow x_1$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
1	1	0

Таблица 5.20

x_1	x_2	$x_2 \rightarrow x_1$
0	0	1
1	0	1
0	1	0
1	1	1

Итак, перечислены все 16 различных функций двух логических переменных со значениями в {0, 1}. Каждая функция задана своей таблицей. В левых частях таблиц записаны в одном и том же порядке четыре вершины единичного квадрата, а в правых — все возможные слова длины 4, образованные из {0, 1}.

Кроме того, каждая из 16 функций двух логических переменных имеет свое обозначение. Пользуясь этими обозначениями, можно задавать функции аналитически, с помощью формул. Например, $f(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow x_1$, $f(x_1, x_2) = x_2$ и т. п.

Знаки $\sim$, ∇, $\wedge$ и др. называют *связками.*

На практике неудобно пользоваться полным набором из 16 связок, но в этом нет и необходимости, так как одни связки можно заменить суперпозицией других. В самом деле, наши функции принимают только два значения: 0 и 1. Поэтому они сами могут служить аргументами связок. Так, например, если $y_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $y_2 = f_2(x_1, x_2)$, то можно образовать $y_1 \wedge y_2$ или $y_1 \leftarrow y_2$ и вообще $F(y_1, y_2)$, где F — одна из 16 связок двух логических переменных. Это же можно записать и в развернутом виде: $f_1(x_1, x_2) \wedge f_2(x_1, x_2)$ или $f_1(x_1, x_2) \leftarrow f_2(x_1, x_2)$ и вообще $F(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$. Выражение $F(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ по своей сути есть функция от x_1 и x_2. Каждому набору значений этих аргументов она ставит в соответствие 0 или 1. По способу получения это суперпозиция функций или сложная функция. Имея две такие функции, их можно связать какой-нибудь из 16 связок, образуя еще более сложную суперпозицию, например

$$[f_1(x_1, x_2) \wedge f_2(x_1, x_2)] \sim [f_3(x_1, x_2) \leftarrow f_4(x_1, x_2)]$$

и т. п.

Заметим теперь, что сколь бы ни были сложны эти суперпозиции, они задают функции двух логических переменных со значениями в {0, 1}. А таких функций, как известно, всего 16. Следовательно, любая суперпозиция булевых функций двух переменных задает одну из 16 функций этих переменных. Составляя такую суперпозицию, получаем просто иное аналитическое выражение какой-нибудь из 16 функций.

Предположим теперь, что имеем некоторую сложную функцию. Как узнать, какую из 16 функций двух логических переменных она задает? Для этого можно составить таблицу сложной функции и сравнить эту таблицу с таблицами связок. Покажем на примерах, как составляются таблицы сложных функций.

Рассмотрим функцию

$$f(x_1, x_2) = \overline{x}_1 \wedge x_2. \quad (5.2)$$

Составим таблицу истинности так, чтобы слева, как обычно, были два столбика значений аргументов, а справа — столько столбцов, сколько связок указано в функции f (табл. 5.21).

Таблица 5.21

x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1 \wedge x_2$
0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	0
Номер шага		1	2

На первом шаге узнаем значения $\overline{x}_1$ по табл. 5.11. На втором шаге из полученного аргумента $\overline{x}_1$ и аргумента x_2 образуем конъюнкцию по табл. 5.12. В итоге получаем таблицу значений нашей функции, из которой следует, что в третьей вершине квадрата (в вершине (0, 1)) функция равна единице, а во всех остальных — нулю.

Рассмотрим еще пример:

$$f(x_1, x_2) = (\overline{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2). \quad (5.3)$$

Составим таблицу истинности этой функции (табл. 5.22). На первых двух шагах найдем $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$. Затем, пользуясь таблицей дизъюнкции, найдем $\overline{x}_1 \vee x_2$ и $x_1 \vee \overline{x}_2$. Наконец, на пятом шаге найдем конъюнкцию от полученных аргументов $y_1 = (\overline{x}_1 \vee x_2)$ и $y_2 = (x_1 \vee \overline{x}_2)$. В итоговом пятом столбце получим значение нашей функции $f(x_1, x_2)$.

Таблица 5.22

x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_1 \vee x_2$	$x_1 \vee \overline{x}_2$	$(\overline{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2)$
0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
Номер шага		1	2	3	4	5

Из приведенных примеров ясен принцип построения таблиц истинности функций, заданных суперпозицией. Эти таблицы строятся последовательно, в порядке следования операций, отделенных друг от друга скобками. Сравнив итоговый столбец построенной таблицы с таблицами связок, найдем ту связку, которую задает рассматриваемая суперпозиция. В частности, сравнив табл. 5.19 и заключительный (второй) шаг табл. 5.21, найдем, что

$$\bar{x}_1 \wedge x_2 = x_2 \leftarrow x_1.$$

Аналогично, сравнив табл. 5.14 и заключительный (пятый) шаг табл. 5.22, получим

$$(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1 \sim x_2.$$

Итак, показано, что одни связки можно с помощью операции «функции от функции» выражать через другие. Замечательно, что в суперпозициях при этом можно обойтись не всеми, а только некоторыми связками. В самом деле, рассматривая первый из наших примеров, мы установили, что

$$x_2 \leftarrow x_1 = \bar{x}_1 \wedge x_2. \tag{5.4}$$

Таким образом, запрет выражается через отрицание и конъюнкцию.

Точно так же, конструируя таблицу во втором примере, установили (см. третий шаг табл. 5.22), что

$$x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2. \tag{5.5}$$

Это значит, что импликация может быть выражена через отрицание и дизъюнкцию. Наконец, из итогового столбца табл. 5.22 следует, что

$$x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2). \tag{5.6}$$

Далее, из простого сравнения таблиц функций легко получить тождества

$$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} \tag{5.7}$$

(см. табл. 5.15 и 5.12),

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} \tag{5.8}$$

(см. табл. 5.16 и 5.11),

$$x_1 \nabla x_2 = \overline{x_1 \sim x_2} \tag{5.9}$$

(см. табл. 5.17 и 5.14).

Заметим еще, что отрицание тождественного нуля есть тождественная единица. Отсюда и из тождеств (5.4)—(5.9) следует теорема.

Теорема 5.1. *Любую из* 16 *булевых функций двух переменных можно выразить с помощью суперпозиции, используя только тождественный нуль, отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.*

Указанный набор связок не является минимальным. Можно доказать, что любая из этих 16 функций может быть записана с помощью лишь одного знака Шеффера или только одной стрелки Пирса. Однако при вычислении удобнее пользоваться четырьмя связками, указанными в теореме.

3. Булевы функции многих переменных. Рассмотрим булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, зависящую от n переменных. Выясним прежде всего, какова область определения таких функций. Каждый из аргументов x_i может принимать одно из двух значений: 0 или 1. Следовательно, каждый фиксированный набор значений $x_1, x_2, ..., x_n$ — это слово длины n, образованное из алфавита {0, 1}: $\underbrace{00...0}_{n \text{ раз}}$, 100…0; 01011…1 и т. п. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена на множестве всех таких слов. Это множество, как знаем, содержит 2^n элементов. В одномерном случае ($n = 1$) это множество слов отождествлено с множеством концов отрезка [0, 1]. В двумерном случае слова 00, 01, 10, 11 трактовались как вершины единичного квадрата. При $n = 3$ будем иметь 000, 100, 110, 010, 001, 101, 111, 011. Приняв эти слова за координаты точек в трехмерном пространстве $Ox_1x_2x_3$, получим восемь вершин единичного куба (рис. 5.2). Точно так же для произвольного n получим 2^n вершин единичного n-мерного куба.

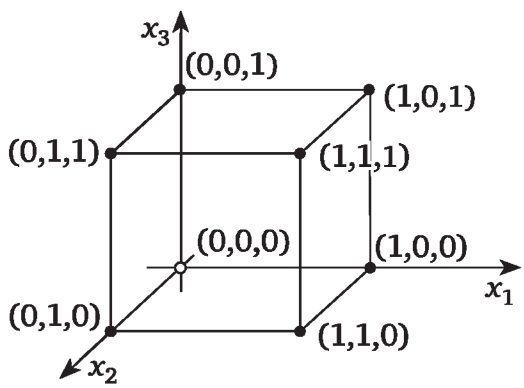


Рис. 5.2

Таким образом, геометрически областью определения булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных является множество вершин единичного n-мерного куба в пространстве аргументов $Ox_1x_2...x_n$. Это множество вершин называют *n-мерным логическим пространством*, или *множеством логических возможностей.*

Так же как и в двумерном случае, легко найти общее число булевых функций n переменных. Для этого перенумеруем вершины n-мерного единичного куба в каком-нибудь порядке от 1 до $N = 2^n$. В каждой вершине функция f может принимать одно из двух значений: 0 или 1. Таким образом, каждая функция — это слово длины N, образованное из алфавита {0, 1}. Отсюда ясно, что общее число различных булевых функций n переменных равно числу слов длины N, образованных из алфавита {0, 1}, т. е. равно $2^N = 2^{2^n}$.

Задать булеву функцию n переменных — это значит указать, в каких вершинах n-мерного единичного куба она принимает значение, равное единице, и в каких — нуль. Проще всего такое задание осуществлять с помощью таблицы истинности. Для этого в левой половине таблицы запишем в каком-нибудь порядке все вершины единичного куба, а в правой — соответствующие значения функции. Например, так, как в табл. 5.23 ($n = 3$).

Таблица 5.23

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	0

Множество вершин, в которых булева функция принимает значение, равное единице, называется *множеством истинности* данной функции. Для функции, указанной в примере, множество истинности — это вторая, третья и седьмая вершины.

В двумерном случае для каждой булевой функции ввели специальный символ. Вообще говоря, могли бы поступить так и в n-мерном случае. Однако даже для двух переменных было решено отказаться от возможности употреблять все 16 связок, оставив только четыре. Тем более целесообразно сократить число символов в случае более чем двух переменных, так как иначе нам пришлось бы употреблять 2^{2^n} связок. Таким образом, возникает вопрос: нельзя ли любую булеву функцию n переменных, заданную таблицей, задать при помощи какой-нибудь формулы с применением небольшого числа известных нам связок? Оказывается, это всегда можно сделать. Так же как и в двумерном случае, имеет место следующая теорема.

Теорема 5.2. *Любую булеву функцию n переменных можно задать с помощью формулы, употребляя только тождественный нуль, отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.*

Покажем на примере, как это делается. Рассмотрим функцию, заданную табл. 5.23. Выделим те строки таблицы, в которых значение функции равно единице, т. е. выделим множество истинности функции (в данном случае это вторая, третья и седьмая строки). В соответствии с каждой такой строкой составим конъюнкцию всех аргументов, причем если какой-нибудь аргумент в строке равен нулю, то над этим аргументом ставим знак отрицания. Так, в соответствии со второй строкой составляем

$$y_2 = x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3,$$

третьей строкой —

$$y_3 = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$$

и седьмой строкой —

$$y_7 = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

Каждая из построенных конъюнкций обращается в единицу только в той строке, в соответствии с которой она построена. Составим теперь дизъюнкцию построенных конъюнкций:

$$y_2 \vee y_3 \vee y_7.$$

Легко проверить, что полученная функция и будет искомой. Иными словами,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= y_2 \vee y_3 \vee y_7 = \\ &= (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3). \end{aligned} \tag{5.10}$$

В самом деле, по самому построению эта функция равна единице во второй, в третьей и седьмой строках, так как в каждой из этих строк одна из функций y_2, y_3 и y_7 равна единице. Что же касается других строк, то в каждой из них функции y_2, y_3 и y_7 равны нулю, следовательно, и дизъюнкция этих функций равна нулю.

Функция, стоящая в правой части равенства (5.10), — дизъюнкция конъюнкций из всех независимых переменных или их отрицаний — называется *нормальной дизъюнктивной формой*. Из способа построения функции (5.10) ясно, что подобным образом можем восстановить аналитическое выражение любой функции, заданной таблично, и этим аналитическим выражением будет нормальная дизъюнктивная форма.

Нормальная форма удобна именно этой своей универсальностью, хотя представление с ее помощью может оказаться и достаточно громоздким. С другой стороны, нормальные формы не являются единственным способом аналитического задания. В формуле, задающей булеву функцию n переменных, могут быть любые введенные ранее связки. Например, можно построить функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \nabla x_3,$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \sim \bar{x}_2) \wedge (x_3 \to x_4) \text{ и т. д.}$$

Эти же функции можно задать с помощью нормальной дизъюнктивной формы, построив предварительно их таблицы истинности.

Таблицы истинности функций многих переменных, заданных аналитически, строятся так же, как и таблицы истинности функций двух переменных. Построим, например, таблицу истинности функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \downarrow x_3.$$

Слева, как обычно, разметим все возможные вершины (табл. 5.24). В данном случае их $2^3 = 8$. Справа поместим значения функций, сначала промежуточных ($\overline{x}_2$ и $x_1 \wedge \overline{x}_2$), а затем и итоговой (шаг № 3). Имея таблицу истинности, легко составить нормальную дизъюнктивную форму данной функции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Таблица 5.24

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_2$	$x_1 \wedge \overline{x}_2$	$(x_1 \wedge \overline{x}_2) \downarrow x_3$
0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0
Номер шага			1	2	3

Таким образом, одну и ту же булеву функцию многих переменных задали различными аналитическими выражениями, т. е. перешли от одной формулы к другой, построив предварительно таблицу истинности функций. Это не единственный и далеко не всегда удобный путь. В следующем пункте познакомимся с общим методом, позволяющим непосредственно переходить от одной формулы к другой, минуя таблицы истинности.

4. Элементарные тождества. Тождественные преобразования. Уже не раз говорилось о том, что одну и ту же булеву функцию можно задавать различными формулами. Например, тождественный нуль можно задать двумя формулами: $f(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv \overline{1}$. Две формулы были получены и для импликации:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2 \text{ и } f(x_1, x_2) = \overline{x}_1 \vee x_2.$$

Наконец, любую булеву функцию можно представить как нормальную дизъюнктивную форму.

Если две формулы задают одну и ту же функцию, то равенство этих формул называется *тождеством*. Таким образом, имеем тождества: $0 = \overline{1}$, $x_1 \to x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2$.

Пользуясь подобными тождествами, можно преобразовывать формулы, задающие булевы функции. При этом меняется только аналитическое выражение функции, но не сама функция.

Тождественные преобразования булевых функций базируются на некоторой системе простейших тождеств. Часть из них доказали (см. формулы (5.4)—(5.9)), другие так же легко проверить с помощью таблиц. Эти тождества имеют следующий вид.

I. $x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$.

II. $x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$.

III. $\bar{\bar{x}} = x$.

IV. $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$.

V. $x \wedge \bar{x} = 0$, $x \vee \bar{x} = 0$.

VI. $x \wedge 1 = x$, $x \vee 1 = 1$.

VII. $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 0 = x$.

VIII. $\overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$, $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$.

IX. $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$, $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$.

X. $x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$;

$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

XI. $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$;

$x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$;

$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$.

Исчисление булевых функций, построенное на тождествах I—XI, называется *алгеброй логики.*

Пользуясь алгеброй логики, можно составлять всевозможные тождества для булевых функций, преобразовывать сложные функции, упрощать громоздкие формулы и т. д. Упростим, например, формулу $\overline{(x_1 \to x_2) \wedge \bar{x}_2}$. Пользуясь последовательно тождествами VIII, III, I, VIII, IX, XI, V, VI, можем записать:

$$\overline{(x_1 \to x_2) \wedge \bar{x}_2} = \overline{(x_1 \to x_2)} \vee \bar{x}_2 = \overline{(x_1 \to x_2)} \vee x_2 = \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \vee x_2 =$$

$$= (\bar{\bar{x}}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee x_2 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee x_2 = x_2 \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) =$$

$$= (x_2 \vee x_1) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_2) = (x_2 \vee x_1) \wedge 1 = x_2 \vee x_1.$$

Таким образом, нашли простое выражение заданной функции, уже не прибегая к таблицам, а пользуясь алгеброй логики.

5.2. Высказывания

Назовем *высказыванием* любое предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно[1]. Например: 1) «идет дождь»; 2) «открыта дверь»; 3) «2 > 5»; 4) «нейрон возбужден»; 5) «очень жарко». Все это высказывания. Высказывание «2 > 5» ложно. Остальные в зависимости от условий могут быть ложными, а могут быть и истинными.

Вопросительные, восклицательные предложения, а также определения не будем считать высказываниями, о них нельзя сказать, истинны

---

[1] Это не определение, а лишь описание термина «высказывание», который относится к разряду первичных понятий. Вместо него часто употребляют термин «предложение».

они или ложны. Например, фразы «куда ты пошел?», «стойте!», «результат сложения двух чисел называется их суммой» не являются высказываниями.

Будем интересоваться не содержанием высказывания, а только истинно данное высказывание или ложно.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть *простым*, или *элементарным*. Примерами простых высказываний могут служить высказывания 1)—5). В дальнейшем будем простые высказывания обозначать буквами латинского алфавита x, y, z, v и т. д.

Пусть имеются высказывания x, y, z, v и т. д. Эти высказывания можно соединять между собой с помощью союзов *не*, *и*, *или*, *если*..., *то* и т. д.[1] При этом предложения «x *и* y», «*не* z», «*если* x, *то* v» и т. д. называются *составными высказываниями*. Например, «*не* идет дождь», «идет дождь *и* $2 < 5$», «*если* очень жарко, *то* открыта дверь», «нейрон возбужден *или* очень жарко» — составные высказывания.

Как узнать, истинны составные высказывания или ложны, если известна истинность и ложность исходных простых высказываний? Очевидно, это можно сделать только после того, как определим, какой смысл вложен в соединительные союзы *и*, *или* и т. д. Этот смысл сформировался в сознании в результате опыта, и в бытовой речи мы свободно оперируем этими союзами, разъясняя при необходимости дополнительными фразами, что имеем в виду.

Теперь задача состоит в том, чтобы придать каждому союзу вполне определенный строгий смысл. Иными словами, надо условиться о правилах действия союзов. При этом хотелось бы условиться так, чтобы формальные правила не противоречили нашему опыту.

Проще всего дело обстоит с союзом *не*. Очевидно, что если «x» истинно, то «*не* x» ложно, и наоборот. Например, если высказывание «открыта дверь» соответствует действительности и, значит, является истинным, то высказывание «не открыта дверь» является ложным.

Рассмотрим теперь союз *и*. Будем считать, что составное высказывание «x *и* y» истинно, если x — истинно и y — истинно, а во всех остальных случаях будем считать это высказывание ложным. Такая договоренность хорошо согласуется с обычной практикой. В самом деле, пусть x — это высказывание «крокодил — животное»[2], а y — высказывание «$2 < 5$». Таким образом, простое высказывание x — истинно и простое высказывание y — истинно. Тогда естественно считать, что составное высказывание «крокодил — животное и $2 < 5$» также истинно, а высказывание «крокодил — растение и $2 \geq 5$» ложно. Менее очевидны промежуточные случаи, когда одно простое высказывание истинно, а другое

---

[1] Частица «не» с точки зрения грамматики не является союзом. Мы будем называть ее так для краткости речи.

[2] В более развернутом виде это высказывание можно сформулировать так: «крокодил принадлежит множеству животных».

ложно. В этих случаях высказывания «крокодил — растение и $2 < 5$» и «крокодил — животное и $2 \geq 5$», по определению, также будем считать ложными.

Перейдем к союзу *или.* В бытовой речи этот союз употребляется в двух смыслах — исключенном и неисключенном. Например, высказывание «в поездке будут использованы поезда или самолеты» можно трактовать двояко: 1) «в поездке будут использованы или поезда, или самолеты, или и то и другое»; 2) «в поездке будет использован только один какой-нибудь вид транспорта — поезда или самолеты». Какой смысл вкладывается в высказывание с союзом *или*, обычно ясно из контекста.

Чтобы не пользоваться контекстом и определенно знать, что имеется в виду, будем различать эти два случая употребления союза *или* и говорить, что в первом случае употреблено неисключенное *или*, а во втором — исключенное *или.* Условимся, далее, считать, что составное высказывание «x *или* y», где *или* — неисключенное, истинно тогда, когда либо x — истинно, либо y — истинно, либо истинны и x, и y, и ложно, когда ложны и x, и y.

Условимся также считать, что составное высказывание «x или y», где *или* исключенное, истинно тогда, когда либо x — истинно, а y — ложно, либо когда x — ложно, а y — истинно; в остальных случаях, т. е. когда и x, и y истинны, или и x, и y ложны, это высказывание будем считать ложным.

Эта договоренность также хорошо согласуется с практикой. В самом деле, пусть x — высказывание «28 июля спутник пролетает над Африкой», y — высказывание «28 июля спутник пролетает над Америкой». Тогда очевидно, что составное высказывание «28 июля спутник пролетает над Африкой или над Америкой», где *или* — неисключенное, истинно и в том случае, когда хотя бы одно из высказываний (x или y) истинно, и в том случае, когда оба они истинны. Ложным составное высказывание будет только тогда, когда и x, и y ложны.

Предположим теперь, что программа полета спутника задана более жестко: «28 июля спутник пролетает только над одним каким-нибудь континентом: Африкой или Америкой». Ясно, что здесь союз *или* употреблен в исключенном смысле, и это составное утверждение окажется ложным, если вдруг выяснится, что спутник пролетел и над Африкой, и над Америкой, т. е. оказались истинными оба простых высказывания — и x, и y.

Рассмотрим еще союз *если..., то.* С его помощью образуются составные высказывания «если x, то y». Здесь простое высказывание x называют посылкой (или условием), а высказывание y — заключением. Будем считать высказывание «если x, то y» ложным только в том случае, когда x истинно, а y ложно. Это также не противоречит обычной практике употребления этого союза.

В самом деле, если составное высказывание утверждает, что из истинной посылки вытекает истинное заключение, то такое составное высказывание естественно считать истинным. Если же составное высказывание утверждает, что из истинной посылки вытекает ложное заключение, то такое составное высказывание естественно считать ложным.

Что же касается тех случаев, когда посылка ложна, то известно, что, исходя из ложной посылки, можно получить и ложное, и истинное заключение. В самом деле, возьмем в качестве посылки высказывание «3 = 2». Это ложное высказывание. Пользуясь сложением, из него можно получить другое ложное высказывание, например, если 3 = 2, то 3 +1 = 2 + 1, т. е. 4 = 3. Таким образом, если уж согласились с тем, что 3 = 2 (взяли это равенство в качестве посылки), то придется согласиться и с тем, что 4 = 3. Естественно поэтому составное высказывание «*если* 3 = 2, *то* 4 = 3» считать истинным.

Из этой же посылки «3 = 2» можно получить и истинное заключение. Так, например, складывая 3 = 2 и 2 = 3, получим 5 = 5. Это даем нам право и высказывание «*если* 3 = 2, *то* 5 = 5» считать истинным. Поэтому впредь, каким бы ни было заключение в составном высказывании *если…, то* с ложной посылкой, будем считать это составное высказывание истинным.

Итак, строго определены правила действия союзов *не*, *и*, *или* исключенное, *или* неисключенное, *если…, то*. Пользуясь этими правилами, легко можем выяснить, ложно или истинно то или иное составное высказывание. В самом деле, если истинное высказывание обозначить буквой И, а ложное — буквой Л, то из описанных правил следует, например, что два истинных высказывания, соединенных союзом «и», есть истинное высказывание. Символически

И *и* И = И.

Аналогично И *и* Л = Л; И *или* Л = И; *не* И = Л; *не* Л = И; *если* И, *то* Л = Л; *если* И, *то* И = И и т. д.

Бросается в глаза полная аналогия между действием рассмотренных союзов и свойствами связок двух логических переменных. Союзу *и* соответствует конъюнкция, союзу *или* в неисключенном смысле — дизъюнкция, союзу *если…, то* — импликация, союзу *не* — отрицание, исключенному *или* соответствует функция, которая так и называется.

Аналогично можно было бы рассмотреть союз *тогда* и *только тогда, когда …* и соответствующую ему функцию — эквиваленцию, а также и другие союзы.

Все это означает, что с высказываниями и союзами можно обращаться точно так же, как с логическими переменными и функциями от них. Иными словами, имеем исчисление высказываний, вполне аналогичное исчислению логических переменных. Разница лишь в том, что вместо чисел 0 и 1 пишем буквы И и Л, а вместо символов $\wedge$, $\vee$, $\bar{\ }$, $\to$ и т. д. — слова *и, или, не, если…, то* и т. д. Эта разница не существенная, однако писать числа 0, 1 и символы связок удобнее, чем буквы и слова. Поэтому впредь каждому высказыванию будем приписывать значение 1, если оно истинно, и значение 0, если ложно. Будем, таким образом, рассматривать высказывание как логическую переменную. И будем соединять высказывания символическими союзами $\wedge$, $\vee$, , $\to$ и т. д., образуя составные высказывания.

Тогда таблицы истинности, например, для высказываний $\bar{x}$, $x \wedge y$, $x \vee \vee y$, $x \nabla y$ и $x \to y$ будут иметь вид, аналогичный соответственно табл. 5.2, 5.12, 5.11, 5.17, 5.13.

Из всего сказанного следует, что имеем хорошо изученный содержательный математический аппарат — аппарат алгебры логики, — с помощью которого можно изучать сколь угодно сложные составные высказывания. Если составное высказывание содержит несколько простых высказываний, то можем найти множество логических возможностей данного высказывания, т. е. все возможные наборы значений простых высказываний. Можем найти также множество истинности составного высказывания, т. е. такие наборы значений простых высказываний, при которых составное высказывание истинно.

Далее, пользуясь алгеброй логики или, что то же самое, исчислением высказываний, можем сложные громоздкие высказывания преобразовать в простые, из одних высказываний получать другие (последнее равносильно доказательству теорем), выяснять, из каких элементарных эффектов (простых высказываний типа «включен — выключен», «закрыт — открыт», «возбужден — заторможен», «да — нет») может произойти то или иное сложное явление (составное высказывание).

Важно то, что язык высказываний — это не только язык сугубо математических выводов. Это язык любого научного исследования, в основе которого лежит логический вывод. Пользуясь алгеброй высказываний, можно формулировать и решать задачи в различных, подчас далеких от математики областях, таких, например, как геология, криминалистика, медицина. Заметим еще, что язык высказываний в своей основе чрезвычайно прост. Операции его осуществляются автоматически, и их можно поручить машине.

В заключение приведем простой пример, оставив более содержательные приложения до параграфа 5.4.

Предположим, что группа из нескольких человек планирует воскресный поход за город. Решено, что два человека (организаторы) придут на место сбора в любом случае, но поход состоится, если будут выполнены следующие условия:

1) если не найдется палатки, то поход состоится только в том случае, если не будет дождя;

2) если пойдет дождь, то поход состоится, если будет палатка и соберется больше пяти человек.

Исследуем описанную ситуацию с помощью алгебры логики. Обозначим x_1 — высказывание «пойдет дождь»; x_2 — высказывание «найдется палатка»; x_3 — высказывание «собралось больше пяти человек». Обозначим, наконец, z — высказывание «поход состоится». Высказывание z есть, очевидно, функция от трех логических переменных x_1, x_2, x_3. При одном наборе значений этих переменных z истинно, при другом — ложно. Что это за функция?

Проще всего определить z, если построить множество всех логических возможностей и выделить из этого множества те наборы значений x_1, x_2, x_3, при которых поход состоится. Эти наборы значений определяются условиями 1 и 2. Иными словами, опираясь на условия 1 и 2, строим таблицу функции z.

Множеством логических возможностей будет, очевидно, множество вершин единичного трехмерного куба. Перебирая эти вершины одну за другой и сверяя каждый раз значения x_1, x_2, x_3 в данной вершине с условиями 1, 2, определяем, в каких вершинах z равно единице и в каких — нулю. Например, в первой вершине (табл. 5.25) дождя нет ($x_1 = 0$), поэтому в силу условия 1 поход должен состояться ($z = 1$). Во второй вершине есть дождь ($x_1 = 1$), но нет палатки ($x_2 = 0$), поэтому в силу условия 2 поход не должен состояться ($z = 0$). Подобным образом сможем определить z во всех вершинах (см. табл. 5.25).

Таблица 5.25

x_1	x_2	x_3	z
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	1

Исходя из таблицы, найдем представление z в виде нормальной дизъюнктивной формы:

$$z = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee$$
$$\vee\ (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Это выражение упрощается:

$$z = \overline{x}_1 \wedge [(\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)] \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Так как функция, записанная в квадратных скобках, тождественно равна единице (в этом легко убедиться), то

$$z = \overline{x}_1 \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) = \overline{x}_1 \vee (x_2 \wedge x_3).$$

Эта компактная запись функции позволяет кратко сформулировать условия, при которых поход состоится. Из нее очевидно, что поход обязательно состоится, если выполнится хотя бы одно из условий: 1) не будет дождя; 2) соберется больше пяти человек с палаткой. Понятно, что если выполнятся оба эти условия, поход также состоится.

Предположим, что поход состоялся. Участники похода помнят об этом и по прошествии года. Помнят также и о том, что во время похода был дождь. Но из памяти выветрилось количество участников. Тогда, взглянув на таблицу, можно легко установить, что в походе участвовало больше пяти человек. В самом деле, так как поход состоялся, то из таблицы нужно выделить лишь те строки, где $z = 1$ (т. е. множество истинности функции z). Затем из этих строк нужно выделить те, где $x_1 = 1$ (дождь был). Это последняя строка. В ней $x_3 = 1$. Это и означает, что было больше пяти человек.

Таблица может помочь и до похода. В самом деле, предположим, что, после того как установлены условия похода, в соответствии с этими условиями построена табл. 5.25. Из нее следует одна довольно неприятная возможность. Она описывается третьей строкой. В этой строке $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, z = 1$, т. е. дождя нет, пришло не больше пяти человек и кто-то принес палатку. Возникает вопрос: отправляться ли в поход в таких условиях? Дождя нет, и палатка не нужна. Но поскольку она есть, ее придется нести. А так как пришло не больше пяти человек, то каждому придется нести палатку продолжительное время. Если палатка тяжелая, то это может лишить прогулку привлекательности. В то же время в графе значений функции стоит единица, и это значит, что поход должен состояться. Таким образом, анализ таблицы позволяет заранее предвидеть все возможности (в том числе и указанную неприятную) и решить, что делать при осуществлении той или иной возможности. В частности, в рассмотренном случае группа может решить все же отправиться в поход в соответствии с ранее принятыми условиями (т. е. в соответствии с таблицей), но может заранее оговорить специально, что при таких неблагоприятных условиях поход не состоится. Для этого к сформулированным ранее условиям 1, 2 надо добавить еще одно, например такое: 3) поход не состоится, если будет палатка и соберется не больше пяти человек. Это «отрицательное» условие можно заменить эквивалентным ему «положительным» условием: 3) если кто-то принес палатку, то поход состоится, если соберется больше пяти человек.

Таким образом, при новой более жесткой договоренности поход состоится тогда и только тогда, если не будет нарушено ни одно из условий 1—3. Функция z будет теперь иной. Составляя таблицу как в предыдущем случае, нетрудно установить, что

$$z = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3).$$

Отсюда следует, что поход состоится, если выполнено хотя бы одно из условий: 1) нет дождя и нет палатки; 2) нет дождя и собралось больше пяти человек; 3) есть палатка и собралось больше пяти человек. Таблица данной функции отличается от табл. 5.25 тем, что в третьей строке у функции стоит нуль.

5.3. Функции алгебры логики и операции над множествами

Изучая функции логических переменных, мы постоянно имели дело с двумя множествами — множеством логических возможностей и множеством истинности. Предположим, что рассматриваем несколько функций, зависящих от одних и тех же n логических переменных. Тогда все эти функции будут иметь одно и то же множество логических возможностей. Это множество вершин n-мерного единичного куба. А множества истинности наших функций будут различными подмножествами данного множества. Будем поэтому считать множество логических возможностей универсальным и обозначать его, как обычно, U.

Пусть из заданных функций n логических переменных образована новая сложная функция. Эта функция имеет некоторое множество истинности. Вопрос состоит в том, чтобы установить связь между множеством истинности сложной функции и множествами истинности исходных функций.

Начнем с простейших связок. Пусть имеются две функции f_1, f_2 с множествами истинности A_1 и A_2 соответственно. Образуем конъюнкцию $g = f_1 \wedge f_2$. Каково множество истинности функции g? По определению конъюнкции она равна единице тогда и только тогда, когда и f_1, и f_2 равны единице. Таким образом, вершина единичного куба может оказаться во множестве истинности функции g тогда и только тогда, когда она принадлежит и множеству истинности f_1, и множеству истинности f_2, т. е. когда она принадлежит пересечению этих множеств. Итак, *множество истинности конъюнкции* $f_1 \wedge f_2$ *есть пересечение* $A_1 \cap A_2$.

Рассмотрим теперь дизъюнкцию $h = f_1 \vee f_2$. По определению, дизъюнкция h равна единице, когда хотя бы одна из функций f_1 или f_2 равна единице. Таким образом, вершина n-мерного единичного куба может попасть во множество истинности дизъюнкции тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству истинности хотя бы одной из функций f_1 или f_2, т. е. когда она принадлежит объединению этих множеств. Итак, *множество истинности дизъюнкции* $f_1 \vee f_2$ *есть объединение* $A_1 \cup A_2$.

Рассмотрим отрицание $l = \overline{f}$. По определению, $l = 1$, когда $f = 0$. А множество вершин, где функция $f = 0$, есть разность между всем множеством логических возможностей и множеством истинности этой функции A. Иными словами, функция равна нулю в вершинах, принадлежащих дополнению до ее множества истинности A. Таким образом, l равно единице в вершинах, принадлежащих дополнению множества истинности A, т. е. *множеством истинности* $\overline{f}$ *является* $\overline{A}$.

Итак, установили замечательную связь между связками функций логических переменных и операциями над их множествами истинности: конъюнкции соответствует пересечение, дизъюнкции — объединение, отрицанию — дополнение. Кроме того, очевидно, что если $f_1 = f_2$, то $A_1 = A_2$. Отсюда следует, что соответствие между связками и операциями над множествами истинности переносится и на элементарные тождества. Так, например, если A есть множество истинности для f, то $\bar{A}$, как мы установили, есть множество истинности для $\bar{f}$ и, следовательно, $\bar{\bar{A}}$ есть множество истинности для $\bar{\bar{f}}$. Но $f = \bar{\bar{f}}$. Следовательно, $\bar{\bar{A}} = A$. Таким образом, тождеству $f = \bar{\bar{f}}$ в алгебре логики соответствует тождество $\bar{\bar{A}} = A$ в алгебре Буля (см. параграф 1.1, п. 3). Аналогично устанавливается, что тождеству $f \vee 0 = f$ соответствует тождество $A \cup \varnothing = A$; тождеству $f \wedge 1 = f$ соответствует $A \cap U = A$; тождеству $\overline{f_1 \vee f_2} = \bar{f}_1 \wedge \bar{f}_2$ соответствует $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$ и т. д.

Отсюда следует, что любую задачу из алгебры логики можно сформулировать и решить в терминах алгебры Буля, если перейдем от функций к их множествам истинности.

Верным оказывается и обратное утверждение. Любую задачу из алгебры множеств можно перевести на язык алгебры логики. В самом деле, пусть имеются произвольные множества A и B, являющиеся подмножествами некоторого универсального множества U. Обозначим символом x высказывание «$e \in A$» и символом y — высказывание «$e \in B$». Тогда высказыванию «$e \in A \cup B$» будет соответствовать функция $x \vee y$, высказыванию $e \in A \cap B$ — функция $x \wedge y$; высказыванию «$e \in \bar{A}$» — функция $\bar{x}$. Таким образом, основным операциям над множествами — пересечению, объединению, дополнению — поставлены в соответствие основные операции над логическими переменными — конъюнкция, дизъюнкция, отрицание (рис. 5.3).

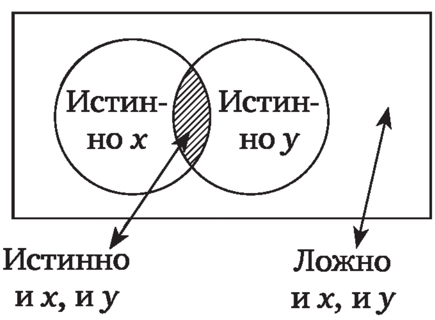


Рис. 5.3

Это соответствие распространяется на элементарные тождества. Так, например, тождеству $\bar{\bar{A}} = A$ соответствует тождество $\bar{\bar{x}} = x$. Аналогично тождеству $A \cap U = A$ соответствует тождество $x \wedge 1 = x$ и т. д.

Из всего сказанного следует, что вместо алгебры множеств можно рассматривать алгебру логики. Таким образом, алгебра логики и алгебра множеств оказываются эквивалентными друг другу исчислениями, а формулы I—IX из гл. 1 и I—XI из настоящей главы оказываются разными формами одного и того же исчисления. Это исчисление можно называть алгеброй логики, или алгеброй высказываний, или, наконец, булевой алгеброй.

5.4. Биологические приложения булевых функций

1. Диагностика заболеваний. Анализ генного состава. Предположим, что имеется больной, у которого обнаружены некоторые симптомы и подозреваются некоторые заболевания. Требуется, как обычно, поставить как можно более точный диагноз. Привлечем для решения этой задачи алгебру логики.

Рассмотрим некоторое множество симптомов S_1, S_2, ..., S_n. Среди перечисленных симптомов имеются и те, которые обнаружены у больного. Рассмотрим также некоторое множество заболеваний M_1, M_2, ..., M_m. Среди этих заболеваний есть и все те, которые подозреваются у больного. Обозначим x_i высказывание «обнаружен i-й симптом» ($i = 1, 2, ..., n$). Обозначим y_i высказывание «обнаружено i-е заболевание» ($i = 1, 2, ..., m$).

Симптомы и заболевания, очевидно, связаны между собой. Эта связь устанавливается экспериментально, на основе многолетних медицинских обследований тысяч больных. В результате таких обследований может быть установлено, например, что заболевание M_2 всегда сопровождается симптомом S_4 или S_3, т. е.

$$y_2 \to x_4 \vee x_3.$$

Аналогично может быть известно, что если обнаружены симптомы S_4 и S_6, то обязательно должно быть заболевание M_1, и наоборот, это заболевание проявляется всегда в симптомах S_4 и S_6, т. е.

$$x_4 \wedge x_6 \sim y_1.$$

Часто один какой-нибудь симптом (например, высокая температура) сопровождает многие заболевания. В этом случае может быть, например, что

$$x_3 \to y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee \dots \vee y_k.$$

Таким образом, экспериментально установлено некоторое число зависимостей между логическими переменными $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m$:

$$f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m);$$

$$f_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m);$$

....

$$f_N(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Эти функции называются *указаниями*. Каждая из них по своей сути есть некоторое составное высказывание относительно симптомов и заболеваний. Нас интересуют лишь те случаи, когда каждое из этих высказываний истинно, т. е. когда истинна их конъюнкция. Таким образом, нам нужно изучить множество истинности функции

$$z = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_N.$$

Далее можем поступить примерно так же, как и в примере с прогулкой, когда устанавливали количество ее участников. Составим таблицу функции z. Всего в таблице будет 2^{n+m} строк. Случаи, где $z = 0$, нас не интересуют (они соответствуют несуществующим или, во всяком случае, пока ненаблюденным связям между симптомами и болезнями). Поэтому выделим из таблицы лишь те строки, которые соответствуют множеству истинности z. Затем из этих строк выделяем те, в которых имеются симптомы, обнаруженные у пациента. В каждой такой строке имеются и заболевания. Анализируя эти строки, можно сделать выводы о характере заболеваний пациента.

Например, предположим, что симптомы, обнаруженные у пациента, имеются всего в четырех строках. Выделим эти строки (табл. 5.26). Для простоты предположим, что у нас имеется три симптома и три заболевания. Анализ выделенных строк показывает, что во всех строках, соответствующих симптомам больного, есть заболевание y_3 и нет заболевания y_1, а заболевание y_2 в одних строках есть, в других — нет. Отсюда можно сделать вывод, что у пациента нет заболевания y_1, он определенно страдает заболеванием y_3 и, быть может, заболеванием y_2.

Таблица 5.26

Симптомы			**Заболевания**			**Опыт**
x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1

Вспомним теперь, что присоединение к условиям 1, 2 в задаче о прогулке дополнительного условия 3 сузило множество истинности функции z. Это и понятно, так как добавление условия 3 эквивалентно пересечению прежнего множества истинности с множеством истинности условия 3. А пересечение множеств не может быть шире ни одного из «сомножителей». Отсюда следует, что чем больше будем иметь указаний (т. е. чем больше будет получено различных экспериментальных данных), тем более точный диагноз сможем поставить. В частности, если удастся найти такое указание, что в первой и четвертой строках табл. 5.26 вместо $z = 1$ появится значение, равное нулю, то эти строки вычеркнутся, и получим только две строки с одним заболеванием y_3.

В реальных условиях числа m и n достаточно велики. Поэтому описанный анализ таблицы в состоянии проделать только компьютер.

Подобное применение алгебры логики уместно не только при диагностике заболеваний. Аналогичным методом можно действовать в любой ситуации, где есть скрытые причины, легко наблюдаемые следствия этих причин и известны некоторые связи (указания) между причинами и следствиями. В частности, такое положение встречается при анализе генного состава. Как известно, признаки организма связаны с генами. При этом экспериментальный материал дает разнообразные связи между генами и признаками. Таким образом, если черех x_i обозначить высказывание «обнаружен i-й ген», а y_i — высказывание «обнаружен i-й признак», то получим ситуацию, напоминающую только что разобранную. Роль указаний и здесь будут играть экспериментальные данные.

Нетрудно видеть, что, вообще говоря, задача изучения состава генов сложнее, чем диагностика. В самом деле, если ген, контролирующий данный признак, рецессивен, то признак, не обнаруженный у данной особи, может быть обнаружен в последующих поколениях. Поэтому вместо высказывания «обнаружен i-й признак» приходится оперировать высказыванием «обнаружен i-й признак в k-м поколении при s-м скрещивании». Это сильно увеличивает число логических переменных и, следовательно, усложняет исследование.

2. Понятие о конечном автомате. Часто при описании тех или иных процессов не нужно следить за тем, каково состояние процесса в каждый момент времени, а достаточно знать лишь, каково это состояние в отдельные моменты. Более точно: имеем представление о процессе, если знаем, каков он в моменты $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_p, \ldots$. Что происходит в промежутках между этими узловыми моментами, нас не интересует, и поэтому эти промежутки исключаем из рассмотрения. Например, при пользовании автоматом с газированной водой достаточно фиксировать только те моменты времени, в которые опускается монетка, начинают литься сироп и вода, наполняется стакан, убирается стакан, ставится новый стакан, бросается монетка и т. д. Что происходит внутри устройства между этими моментами, нас мало интересует. Да и из перечисленных моментов можно без особого ущерба исключить, например, моменты, когда начинают литься вода и сироп.

Итак, часто вместо непрерывной оси времени достаточно рассматривать бесконечный набор дискретных моментов времени

$$t_0, t_1, t_2, \ldots, t_p, \ldots .$$

В таком случае говорят, что рассматривается *дискретное время* или что *время проквантовано.*

При этом временна́я ось может быть разбита на одинаковые промежутки или на неодинаковые. Это не важно. Мы вообще можем забыть об этих промежутках и от моментов времени $t_0, t_1, \ldots, t_p, \ldots$ оставить только их номера $0, 1, 2, .., p, \ldots$ и называть их *тактами.*

Предположим теперь, что имеем некое устройство, работающее в дискретном времени и способное принимать и выдавать какие-то сигналы. Каналы, по которым сигналы принимаются и выдаются, будем называть соответственно *входами* и *выходами.*

Пусть устройство имеет n входов и m выходов. Будем изображать его прямоугольником, а входы и выходы — стрелками (рис. 5.4). Предположим, что на каждый вход подается сигнал 0 или 1 и на каждом выходе тоже может появляться 0 или 1. Таким образом, в каждый p-й такт в устройство входит слово X_p длиной n, образованное из алфавита $\{0, 1\}$, и выходит слово Y_p длиной m, образованное из того же алфавита. Входное слово мы будем трактовать как *внешнее воздействие*, а выходное — как *реакцию устройства* на это воздействие.

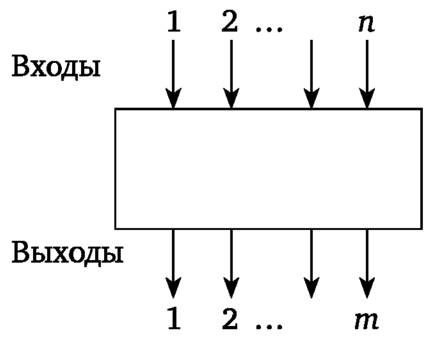


Рис. 5.4

Выходное слово еще называют *состоянием устройства* в p-й момент.

Пусть в начальный момент задано некоторое входное и некоторое выходное слово: X_0 и Y_0. Как образуются выходные слова в последующие моменты? Если мы это определим, то этим самым определим характер действия нашего устройства, или, как говорят, определим его *поведение*.

Можно предположить, что устройство работает таким образом, что в $(p + 1)$-й такт из устройства выходит слово, вид которого полностью определяется видом слова X_{p+1}. Иными словами, Y_{p+1} есть функция от X_{p+1}:

$$Y_{p+1} = F(X_{p+1}). \tag{5.11}$$

Таким образом, устройство мгновенно реагирует на внешнее воздействие.

Можно рассмотреть также устройства, которые реагируют с задержкой на один такт. Формула действия таких устройств имеет вид

$$Y_{p+1} = F(X_p). \tag{5.12}$$

Можно рассмотреть и более сложную зависимость, когда слово, выходящее в $(p + 1)$-й момент, зависит не только от входного, но и от выходного слова, соответствующего p-му моменту:

$$Y_{p+1} = F(X_p, Y_p). \tag{5.13}$$

Может быть и так, что слово Y_{p+1} зависит от слов, вышедших в p-й, $(p - 1)$-й и т. д., $(p - k)$-й моменты:

$$Y_{p+1} = F(X_p, Y_p, Y_{p-1}, \ldots, Y_{p-k}). \tag{5.14}$$

Это значит, что состояние устройства в $(p + 1)$-й момент зависит не только от внешнего сигнала, поданного в p-й момент, но и от тех состояний, в которых находилось устройство в предыдущие несколько моментов.

В частности, можно представить себе устройство, состояние которого не зависит от внешних воздействий и определяется лишь состояниями самого устройства в предыдущие моменты:

$$Y_{p+1} = F(Y_p, Y_{p-1}, \ldots, Y_{p-k}). \qquad (5.15)$$

Выходы такого устройства одновременно являются и его входами. Говорят, что «выходы замыкаются на входы».

Всевозможные устройства подобного рода относятся к так называемым *конечным автоматам.*

Рассмотрим чуть подробнее простейший конечный автомат, имеющий n входов и только один выход (рис. 5.5). Работу такого автомата удобно описывать функцией $n + 1$ логических переменных. В отличие от функций, которые рассматривались в параграфе 5.1, каждая из логических переменных в данном случае зависит от времени, точнее говоря, от номера такта. В самом деле, если автомат работает, например, по формуле (5.13) ($m = 1$), то можем написать, что

$$y(p + 1) = f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), y(p)), \qquad (5.16)$$

где f — функция логических переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$.

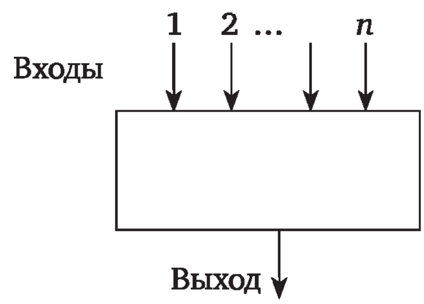


Рис. 5.5

Таким образом, каждому такту p ставится в соответствие входное слово длиной n: $x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p)$ и однобуквенное выходное слово $y(p)$, образованные из алфавита $\{0, 1\}$, а автомат работает так, что слову

$$x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), y(p)$$

в $(p + 1)$-й момент по формуле (5.16) ставится в соответствие либо 0, либо 1 в зависимости от характера функции f, т. е. от поведения автомата.

Если автомат работает по формуле (5.15), где $k = 0$ ($m = 1$), то можем написать:

$$y(p + 1) = f(y(p)),$$

где f — функция одной логической переменной. В частности, f может быть, например, отрицанием. Тогда $y(p+1) = \overline{y(p)}$.

Добавив сюда начальное условие, например $y(0) = 0$, получим автомат, работа которого сводится к тому, что в $(p + 1)$-й такт он выдает 1, если в предыдущий такт выдал 0, и наоборот.

Автоматы с одним или несколькими выходами можно соединять в схемы, устраивая так, что выходы одного автомата замыкаются на входы других. В частности, некоторые выходы данного автомата могут замыкаться на входы этого же автомата. Такие схемы, состоящие из большого числа автоматов, могут осуществлять самые сложные логические преобразования.

Не нужно думать, что каждый раз, когда произносим слово «автомат», имеем в виду какие-то реальные механические устройства, сделанные из металла, на лентах или экранах которых мелькают числа 0 или 1. Такие приборы могут быть построены, но и в этом случае суть будет не в самих этих приборах, а в тех реальных процессах и ситуациях, которые можно с помощью этих приборов моделировать. А для этой цели часто совсем необязательно строить сложные и дорогостоящие механизмы. Достаточно умозрительно, математическими средствами исследовать соответствующие функции вида (5.11)—(5.16) или их суперпозиции.

Что же касается этих функциональных зависимостей, то они охватывают колоссальное множество сложнейших и разнообразнейших процессов. В самом деле, слово X_p, задающее внешние воздействия, соответствует набору значений n логических переменных, каждое из которых в свою очередь соответствует тому или иному высказыванию. В качестве таких высказываний могут быть, например, высказывания типа «цепь замкнута», «электроды введены», «сопротивление включено», «катализатор добавлен», «метаболит присутствует», «фермент выделился» и т. д. Аналогичные высказывания могут быть отражены и выходным словом. Отсюда ясно, что с помощью той умозрительной конструкции, которую назвали конечным автоматом, могут быть описаны и изучены самые разнообразные физические, технические, биологические процессы и явления.

До сих пор входное и выходное слова в наших автоматах образовывались из одного и того же алфавита $\{0, 1\}$. Это совсем не обязательно. Алфавит может быть произвольным множеством. Более того, на входе и на выходе могут быть слова из разных алфавитов. Для описания работы таких автоматов знакомая нам двоичная логика уже не подходит, и приходится пользоваться k-значной логикой, переменные в которой могут принимать не два, а k значений.

3. Формальный нейрон. В качестве примера элементарного автомата рассмотрим *формальный нейрон.* Исходя из физиологических данных, нейрон грубо, схематично можно представить себе следующим образом.

Нейрон — это некое устройство, работающее в дискретном времени, имеющее n входов, через которые воспринимаются сигналы, и один выход, через который сигнал выдаются.

Каждый из входов и выход могут принимать только одно из двух состояний: возбужденное (ему будем приписывать 1) и невозбужденное (ему соответствует 0).

От каждого входа идут волокна. При возбуждении входа возбуждаются и идущие от него волокна. Волокна бывают трех типов: а) *возбуждающие*, так называются волокна, которые в активированном состоянии вводят в *тело* нейрона единицу возбуждения (+1); б) *тормозящие*, такие волокна в активированном состоянии вводят в тело нейрона тормозящую единицу (отрицательную единицу торможения, т. е. –1); в) *запрещающее*. В отличие от предыдущих двух типов волокон, оканчивающихся на теле нейрона, запрещающие волокна оканчиваются на возбуждающих или тормозящих волокнах. В активированном состоянии запрещающие волокна предотвращают прохождение сигнала по тому волокну, на котором они оканчиваются.

Сигналы могут проходить только в одном направлении: от входа к выходу. При переходе сигналов через *синапс* (место, где волокно соприкасается с телом) происходит задержка на один такт (синаптическая задержка).

В каждый момент времени p работу нейрона характеризует также величина *порога чувствительности* $\theta(p)$. В зависимости от внешних условий эта величина может принимать одно из k целочисленных значений θ_1, θ_2, ..., θ_k. Возбуждение нейрона, т. е. возбуждение выхода в момент $p + 1$, происходит только тогда, когда разность между числом единиц возбуждения и числом единиц торможения, переданных телу нейрона в p-й такт, не меньше значения порога чувствительности $\theta(p + 1)$ в $(p + 1)$-й такт.

Описанную конструкцию называют формальным нейроном, чтобы подчеркнуть, что это лишь модель реального физиологического нейрона. Формальный нейрон изображают в виде треугольника (это тело нейрона), обращенного вершиной вниз (рис. 5.6). На верхнюю сторону треугольника опускаются линии, идущие от входов. Эти линии соответствуют волокнам. Если волокно возбуждающее, то соответствующая линия оканчивается стрелкой; если же волокно тормозящее, то линия оканчивается петелькой; запрещающие волокна оканчиваются петелькой на возбуждающих или тормозящих волокнах. Из нижней вершины треугольника выходит одна стрелка, обозначающая выход. Если нейрон возбужден, то на выходе ставится единица. Невозбужденному состоянию нейрона на выходе соответствует нуль. Рядом с изображением нейрона пишут в возрастающем порядке набор значений порога чувствительности для данного нейрона.

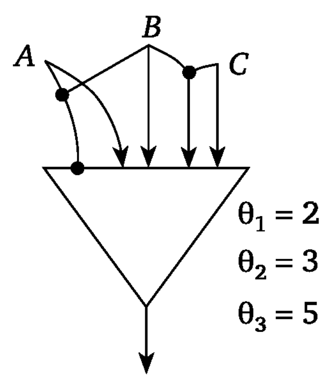


Рис. 5.6

Из этого описания ясно, что нейрон работает как конечный автомат с одним выходом и $n + k$ входами. В самом деле, желая представить нейрон как конечный автомат, добавим к n «реальным» входам, от которых идут волокна, еще k «информационных» входов, несущих сведения о порогах чувствительности. Именно, будем считать, что на i-м информационном входе стоит 1, если порог чувствительности нейрона в данный момент равен θ_i. Если теперь обозначить $x_i(p)$ высказывание «в момент p возбужден i-й реальный вход» ($i = 1, 2, \ldots, n$), $z_i(p + 1)$ — высказывание «порог чувствительности в $(p + 1)$-й момент равен θ_i» ($i = 1, 2, \ldots, k$), наконец, $y(p + 1)$ — высказывание «в $(p + 1)$-й момент возбужден выход», то работа нейрона будет описываться функцией

$$y(p + 1) = f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), z_1(p + 1), \ldots, z_k(p + 1)). \quad (5.17)$$

Заметим, что функция (5.17) определена частично. В самом деле, так как в любой момент величина порога может быть равна одному и только одному из значений θ_i, то функция (5.17) не определена в тех вершинах, где две или более переменных z_i равны единице или все z_i равны нулю. Можно задать эту функцию с помощью того или иного аналитического выражения, определенного на всем множестве вершин $(n + k)$-мерного куба. Но интересны по-прежнему лишь те вершины, где одно из z_i равно единице, а остальные — нулю.

Можно представить и другие модели, учитывающие, в частности, состояние выхода в предыдущий момент. Тогда

$$y(p + 1) = f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), z_1(p + 1), \ldots, z_k(p + 1), y(p)).$$

Характер функции f определяется типом волокон и их числом у данного нейрона. Например, пусть нейрон имеет два входа с возбуждающими волокнами и два значения для порога чувствительности $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 2$ (рис. 5.7).

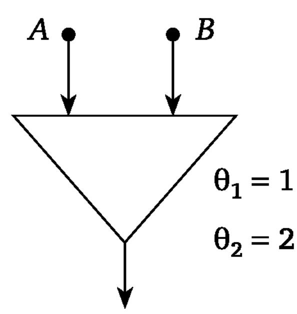


Рис. 5.7

Найдем функцию f. Очевидно, что в $(p + 1)$-й момент нейрон будет возбужден в следующих случаях:

1) в $(p + 1)$-й момент порог равен θ_1 и в p-й момент возбужден вход A или вход B или оба входа. Кратко:

$$z_1(p + 1) \wedge [x_1(p) \vee x_2(p)];$$

2) в $(p + 1)$-й момент порог равен θ_2 и в p-й момент возбуждены и вход A, и вход B. Кратко:

$$z_2(p + 1) \wedge x_1(p) \wedge x_2(p).$$

Таким образом, функция $y(p + 1)$ есть дизъюнкция этих двух возможностей:

$$y(p+ 1) = [z_1(p + 1) \wedge [x_1(p) \vee x_2(p)] \vee [x_1(p) \wedge x_2(p) \wedge z_2(p + 1)].$$

Упражнения

1. Покажите, что булева функция $f(x_1, x_2) = \bar{x}_2 \to \bar{x}_1$ имеет ту же таблицу истинности, что и импликация $x_1 \to x_2$.

2. Составьте таблицы истинности булевых функций:

а) $f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \to \bar{x}_1$;

б) $f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \to x_2$;

в) $f(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \wedge \bar{x}_2$;

г) $f(x_1, x_2) = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$.

3. Проверьте, не составляя таблиц истинности, являются ли следующие булевы функции постоянными:

а) $\overline{x \wedge \bar{x}}$;

б) $\bar{x} \sim \bar{x}$;

в) $\overline{x \sim \bar{x}}$;

г) $(x \vee x) \sim (x \wedge x)$.

[Все четыре функции являются тождественными единицами]

4. Докажите тождества:

а) $(x \to \bar{x}) \to x = x$;

б) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1$.

в) $\overline{x_1 \to x_2} = x_1 \wedge \bar{x}_2$;

г) $x_1 \wedge x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$.

5. Упростите формулы для булевых функций из задания 2.

[а) $x_1 \to x_2$; б) $x_1 \to x_2$; в) $x_1 \downarrow x_2$; г) $x_1 \wedge x_2$]

6. Упростите формулы:

а) $(x_1 \wedge x_2) \to x_1$;

б) $(x_1 \wedge x_2) \vee [(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)]$.

[а) 1; б) $x_1 \vee x_2$]

7. Среди следующих предложений выделите высказывания и установите, истинны они или ложны:

1) Москва — столица России;

2) А. С. Пушкин — великий русский поэт;

3) Волга впадает в Черное море;

4) студент биологического факультета педагогического университета;

5) $25 < 10$;

6) $x^2 - 5x + 6$;

7) пейте виноградный сок!;

8) который час?

[Высказывания 1), 2) — истинные, 3), 5) — ложные. Предположения 4), 6)—8) не являются высказываниями]

8. Среди следующих высказываний укажите простые и составные. В составных высказываниях выделите грамматические связки:

1) число 36 не делится на 7;

2) число 18 делится на 6 и на 3;

3) если число 162 делится на 9, то оно делится на 3;

4) число 7 является делителем числа 63;

5) я пойду в театр или встречу друга;

6) Земля вращается вокруг Солнца.

[Высказывания 4) и 6) — простые, а 1)—3) и 5) — составные. В высказываниях 1)—3), 5) грамматические связки соответственно «не», «и», «если…, то», «или»]

9. Сформулируйте отрицание следующих высказываний:

1) число 35 не делится на число 7;

2) $6 > 3$;

3) $4 \le 7$;

4) кислород — газ.

[1) число 35 делится на число 7; 2) $6 \le 3$; 3) $4 > 7$; 4) кислород — не газ]

10. Обозначьте простые высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов алгебры логики:

1) сегодня понедельник или вторник;

2) идет дождь или снег;

3) если идет дождь, то крыши мокрые.

[x — «сегодня понедельник»; y — «сегодня вторник»; z — «идет дождь»; v — «идет снег»; w — «крыши мокрые»; 1) $x \nabla y$; 2) $z \vee v$; 3) $z \to w$]

11. Пусть x и y обозначают высказывания: x — «я учусь в школе»; y — «я люблю биологию». Прочтите следующие составные высказывания:

[1) $\bar{x}$; 2) $\bar{\bar{x}}$; 3) $x \wedge y$; 4) $x \wedge \bar{y}$; 5) $\bar{x} \wedge y$; 6) $\bar{x} \wedge \bar{y}$; 7) $\overline{x \wedge y}$.

[1) я не учусь в школе; 2) неверно, что я не учусь в школе; 3) я учусь в школе и люблю биологию; 4) я учусь в школе и не люблю биологию; 5) я не учусь в школе и люблю биологию; 6) я не учусь в школе и не люблю биологию; 7) неверно, что я учусь в школе и люблю биологию]

12. Какие из следующих высказываний истинны:
1) если $3 \cdot 3 = 9$, то $3 < 8$;
2) если $3 \cdot 3 = 9$, то $3 > 8$;
3) если $3 \cdot 3 = 5$, то $3 < 8$;
4) если $3 \cdot 3 = 5$, то $3 > 8$.

[Высказывания 1), 3) и 4) — истинные, а высказывание 2) ложно]

13. Пусть x — высказывание «студент Петров изучает немецкий язык»; y — высказывание «студент Петров успевает по дискретной математике». Дайте словесную формулировку высказываний: 1) $\overline{x} \wedge y$; 2) $x \to y$; 3) $\overline{y} \sim \overline{x}$.

[1) студент Петров не изучает немецкий язык и успевает по дискретной математике; 2) если студент Петров изучает немецкий язык, то он успевает по дискретной математике; 3) студент Петров не успевает по дискретной математике тогда и только тогда, когда он не изучает немецкий язык]

14. Составьте таблицу истинности для высказывания $\overline{x} \vee y$.

[

x	$\overline{x}$	y	$\overline{x} \vee y$
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1

]

Составьте таблицы истинности для функций.

15. $f(x, y) = \overline{x} \vee \overline{y}$.

[

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \vee \overline{y}$
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1	1	0	0	0

]

16. $f(x, y) = (x \wedge \overline{y}) \to (\overline{x} \vee y)$.

[

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$x \wedge \overline{y}$	$\overline{x} \vee y$	$(x \wedge \overline{y}) \to (\overline{x} \vee y)$
0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

]

17. $f(x, y, z) = (x \wedge \overline{y}) \vee z$.

[

x	y	z	$\overline{y}$	$x \wedge \overline{y}$	$(x \wedge \overline{y}) \vee z$
0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

]

18. Докажите тождества: а) $(x \wedge \overline{x}) \vee y = y$; б) $\overline{x \rightarrow y} = x \wedge \overline{y}$.

19. Упростите формулу $(x \vee y \rightarrow \overline{x} \vee y) \wedge y$.

[$(\overline{x \vee y} \rightarrow \overline{x} \vee y) \wedge y = y$]

Глава 6
РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Понятие о разностном уравнении

В настоящей главе рассмотрим некоторые математические понятия, с помощью которых можно описать динамику биологических систем. Как изменяется одна биологическая переменная в результате изменений другой? Могут быть интересны изменения во времени, которые происходят с численностью популяции конкретного вида в определенной среде. Биологическая переменная может быть функцией таких переменных, как температура, влажность или обилие пищи. К подобным задачам применимы математические методы, рассматриваемые в этой главе. Ради определенности биологической переменной в большинстве случаев будет служить численность некоторого вида в данной среде как функция времени.

Можно построить как дискретные, так и непрерывные модели процессов, зависящих от времени. В дискретной модели время представляет собой дискретную переменную и наблюдения выполняются лишь через определенные фиксированные интервалы времени. Перепись популяции может проводиться, например, ежечасно, ежегодно или каждые 10 лет. В непрерывной модели время представляет собой непрерывную переменную и численность популяции считается непрерывно изменяющейся во времени. В этой главе рассмотрим понятия, относящиеся к дискретным моделям.

В дискретных моделях популяционного роста величина x_n будет обозначать численность популяции к концу n-го периода времени. По окончании одного периода времени численность равна x_1; по окончании двух периодов она равна x_2 и т. д. Развитие популяции во времени описывается последовательностью чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$.

Пример 6.1. Допустим, что популяция растет согласно формуле $x_n = 1000 + 500(1 - 2^{-n})$. Если $n = 0$, то начальная численность $x_0 = 1000 + 500(1 - 2^0) = 1000$. При $n = 1$ численность популяции $x_1 = 1000 + 500(1 - 2^{-1}) = 1000 + 250 = 1250$. После двух временны́х интервалов численность равна $x_2 = 1000 + 500(1 - 2^{-2}) = 1375$. Так как при больших n величина 2^{-n} становится очень малой, то член $1 - 2^{-n}$ приближается к единице, когда n возрастает. Это означает, что с ростом n численность

x_n приближается к *предельному*, или *равновесному*, значению 1500. Прирост популяции за n-й период времени выражается величиной

$$x_n - x_{n-1} = [1000 + 500(1 - 2^{-n})] - [1000 + 500(1 - 2^{-n-1})] = 500 \cdot 2^{-n}.$$

Эта величина с ростом n приближается к нулю.

В примере 6.1 дана формула для x_n, и поэтому численность популяции к концу каждого периода времени известна. Однако чаще бывает известна лишь начальная численность и имеется некоторая информация о скоростях роста популяции в различные периоды времени. Тогда задача состоит в том, чтобы, используя эту информацию, определить явную формулу для x_n. Можем, например, иметь оценку для прироста популяции $x_n - x_{n-1}$ за n-й период. Достаточно ли этой информации, чтобы определить x_n? Эти идеи приводят к следующему определению.

Определение. *Разностным уравнением* называется уравнение, которое связывает между собой значения x_n при различных значениях индекса n. Если N_1 и N_2 представляют собой наибольший и наименьший из индексов n, встречающихся в записи уравнения, то порядок разностного уравнения есть $N_1 - N_2$.

Пример 6.2. Приведем примеры разностных уравнений:

1) $x_n - x_{n-1} = 2^{-n}$. Здесь $N_1 = n$, а $N_2 = n - 1$. Порядок уравнения равен $N_1 - N_2 = n - (n - 1) = 1$. Это разностное уравнение первого порядка;

2) $x_{n+1} = 2^{-n}x_n + (x_{n-1})^2$. Это уравнение второго порядка, так как $N_1 = n + 1$, $N_2 = n - 1$ и $N_1 - N_2 = 2$;

3) $2x_{n+2} + 3x_{n+1} = \sin(x_{n+1})$ — уравнение первого порядка;

4) $2x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$ — уравнение второго порядка;

5) $(x_{n+3})^2 + x_n = 5$ — уравнение третьего порядка.

Пример 6.3. Популяция насекомых увеличивается таким образом, что прирост за n-й период времени вдвое больше прироста за предыдущий период времени. Требуется описать этот процесс роста с помощью разностного уравнения. Каков порядок этого уравнения?

Определим x_n как численность популяции после n периодов времени. Прирост за n-й период выражается величиной $x_n - x_{n-1}$, а прирост за $(n - 1)$-й период — величиной $x_{n-1} - x_{n-2}$. По условию, $x_n - x_{n-1} = 2(x_{n-1} - x_{n-2})$. Это разностное уравнение второго порядка, которое можно записать также в виде $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0$.

Пример 6.4. Крупный рогатый скот выкармливается с целью максимизировать живую массу к моменту убоя. При определенных условиях масса средней коровы за каждую неделю возрастает на 5 %. Требуется описать это увеличение массы с помощью разностного уравнения. Каков порядок этого уравнения?

Определим w_n как массу средней коровы после n недель. После $n + 1$ недель величина w_n увеличивается на 5 %. Отсюда получаем уравнение $w_{n+1} = 1{,}05w_n$. Это разностное уравнение первого порядка.

В оставшихся параграфах этой главы будут изложены методы решения для нескольких важных типов разностных уравнений. Если дано разностное уравнение, то можно ли найти явную формулу для x_n? В том случае, когда такая формула будет найдена, она называется *решением* разностного уравнения.

6.2. Линейные разностные уравнения первого порядка

Первое из разностных уравнений, которые рассмотрим, можно представить себе как простую модель роста популяции. Рассмотрим популяцию, растущую таким образом, что с увеличением ее численности скорость роста популяции тоже увеличивается. Точнее говоря, допустим, что скорость роста популяции в любой период времени пропорциональна размеру популяции в начале этого периода.

Чтобы выразить это допущение в математической форме, обозначим через x_n размер популяции в конце n-го периода времени. Тогда величина $x_{n+1} - x_n$ выражает прирост популяции за следующий период времени, т. е. это скорость роста, или рост в единицу времени, на $(n + 1)$-м интервале времени. Эта величина пропорциональна x_n. Если коэффициент пропорциональности обозначить через a, то получим $x_{n+1} - x_n = ax_n$. Сгруппировав члены, приходим к разностному уравнению первого порядка

$$x_{n+1} = (1 + a)x_n. \tag{6.1}$$

Чтобы решить это уравнение, надо знать начальный размер популяции x_0. Тогда, используя уравнение (6.1), можно последовательно вычислить x_1, x_2, x_3 и т. д. Таким образом, имеем

$$x_1 = (1 + a)x_0,$$

$$x_2 = (1 + a)x_1 = (1 + a)(1 + a)x_0 = (1 + a)^2x_0,$$

$$x_3 = (1 + a)x_2 = (1 + a)(1 + a)^2x_0 = (1 + a)^3x_0.$$

Структура решения должна быть понятна. При переходе к каждому следующему моменту времени размер популяции умножается на множитель $1 + a$. Поэтому общее решение, или общая формула для x_n, имеет вид $x_n = (1 + a)^nx_0$. При известном значении x_0 эта формула определяет x_n.

Если коэффициент пропорциональности a положителен $(a > 0)$, то выполняется условие $1 + a > 1$ и, следовательно, $(1 + a)^n$ безгранично возрастает с ростом n. Если $a = 0$, то популяция остается на постоянном уровне x_0. Это случай нулевого роста. Если a отрицателен (но больше, чем –1), то $0 < 1 + a < 1$ и x_n приближается к нулю при возрастании n. В этом случае популяция в конце концов вымирает. Заметим, что если $a = -1$, то популяция вымирает после первого же периода времени.

В этой модели нас не интересуют значения a, меньшие –1, так как они приводили бы к отрицательным численностям.

Пример 6.5. Решить разностное уравнение первого порядка $x_n + 1 - x_n = 2x_n$. Чему равно x_3, если $x_0 = 10$?

Уравнение можно записать в виде $x_{n+1} = 3x_n$. Это пример уравнения описанного выше типа при $a = 2$ и $1 + a = 3$. Общее решение имеет вид $x_n = (1 + a)^n x_0 = 3^n x_0$. Поскольку $x_0 = 10$, получаем, что $x_n = 3^n \cdot 10$ и $x_3 = 3^3 \cdot 10 = 270$.

Пример 6.6. Популяция бактерий первоначально насчитывала 1000 особей и постоянно увеличивалась с темпом роста 50 % в каждый час. Какова численность популяции после 10 ч роста?

Пусть x_n соответствует численности популяции после n часов. По условию, $x_{n+1} = 1{,}5x_n$ и $x_0 = 1000$. Значит, $x_1 = 1{,}5 \cdot 1000$, $x_2 = 1{,}5^2 \times 1000$ и т. д. Общее решение есть $x_n = 1{,}5^n x_0$. По прошествии 10 ч размер популяции составит $x_{10} = 1{,}5^{10} \cdot 1000 \approx 57\,700$.

Уравнение $x_{n+1} = (1 + a)x_n$ представляет собой пример *линейного* разностного уравнения первого порядка. Члены уравнения, содержащие x_n и x_{n+1}, имеют вид $a(n)x_n$ и $b(n)x_{n+1}$, где $a(n)$ и $b(n)$ зависят только лишь от n. Таких членов, как x_n^2, x_{n+1}^3, 2^{x_n}, $x_n x_{n+1}$, $1/x_n$ и т. п., в уравнении нет. Если появляются подобные члены, то разностное уравнение называют *нелинейным*.

Пример 6.7. Следующие разностные уравнения являются линейными:

1) $x_{n+1} = 5x_n - 4x_{n-1}$; 2) $x_{n+1} = n^2 x_n$; 3) $x_{n+2} - x_n = 0$; 4) $x_{n+1} - nx_n = n^2$.

Пример 6.8. Следующие разностные уравнения являются нелинейными:

1) $x_{n+1} = x_n^2$; 2) $x_{n+1} = x_n x_{n-1}$; 3) $x_{n+2} = x_{n+1}(1 + x_n)$; 4) $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$.

Общий вид линейного разностного уравнения первого порядка таков:

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n), \qquad (6.2)$$

где $f(n)$ и $g(n)$ — заданные функции от n. Если известно x_n, то по уравнению можно определить x_{n+1}. Уравнение (6.2) называют *однородным* в случае, когда $g(n) = 0$, и *неоднородным* — в противном случае.

Рассмотрим сначала однородное уравнение $x_{n+1} = f(n)x_n$. Решая его, положим $n = 0$ и получим $x_1 = f(0)x_0$. При $n = 1$ находим $x_2 = f(1)x_1 = f(1) \times f(0)x_0$. Аналогично при $n = 2$ имеем $x_3 = f(2)f(1)f(0)x_0$. Это подсказывает вид общего решения:

$$x_n = f(n-1)f(n-2)\ldots f(2)f(1)f(0)x_0.$$

Это решение можно проверить подстановкой его в исходное уравнение $x_{n+1} = f(n)x_n$. По формуле для общего решения имеем

$$x_{n+1} = f(n)f(n-1)f(n-2)\ldots f(2)f(1)f(0)x_0 = f(n)x_n.$$

Пример 6.9. Рассмотрим популяцию бактерий, растущую от начального размера в 1000 особей таким образом, что ее размер по прошествии $n + 1$ часов больше размера после n часов в $(n + 3)/(n + 2)$ раза. Какова численность популяции после 10 ч роста?

Пусть, как и прежде, x_n представляет размер популяции после n часов роста. Известно, что $x_0 = 1000$ и что $x_{n+1} = [(n + 3)/(n + 2)]x_n$. Это однородное уравнение при $f(n) = (n + 3)/(n + 2)$. Общее решение есть

$$x_n = f(n-1)f(n-2)\ldots f(2)f(1)f(0)x_0 = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1000.$$

Сокращая члены, получаем $x_n = [(n + 2)/2] \cdot 1000 = 500(n + 2)$. Размер популяции после 10 ч равен $x_{10} = 500(10 + 2) = 6000$. В этом процессе роста популяция каждый час увеличивается на 500 особей. В конечном счете эта модель окажется нереалистичной, поскольку необходимые для роста ресурсы всегда ограничены. Однако она может служить хорошим описанием некоторых типов роста на ограниченном отрезке времени.

Вернемся теперь к общему линейному разностному уравнению первого порядка. Метод его решения такой же, как и для рассмотренного выше частного случая, хотя вид решения более сложный. Полагая $n = 0$, получаем $x_1 = f(0)x_0 + g(0)$. При $n = 1$ уравнение дает

$$x_2 = f(1)x_1 + g(1) = f(1)f(0)x_0 + f(1)g(0) + g(1).$$

Аналогично

$$x_3 = f(2)x_2 + g(2) = f(2)f(1)f(0)x_0 + f(2)f(1)g(0) + f(2)g(1) + g(2).$$

Это подсказывает вид общего решения:

$$x_n = f(n-1)f(n-2)\ldots f(1)f(0)x_0 + f(n-1)f(n-2)\ldots f(1)g(0) + \\ + f(n-1)f(n-2)\ldots f(2)g(1) + \ldots + f(n-1)g(n-2) + g(n-1). \qquad (6.3)$$

В том, что это решение, можно убедиться, подставив его в уравнение (6.2). Формулу (6.3) запоминать не следует, так как ее, по-видимому, гораздо легче выводить каждый раз, повторяя приведенные выше рассуждения.

Пример 6.10. Популяция бактерий растет от начального размера в 1000 особей таким образом, что ее прирост в интервале от n до $n + 1$ часов с начала роста составляет $500 \cdot 2^{-n}$. Каков размер популяции после 10 ч роста?

По условию $x_{n+1} = x_n + 500 \cdot 2^{-n}$ и $x_0 = 1000$, где x_n обозначает размер популяции после n часов роста. Здесь $f(n) = 1$, а $g(n) = 500 \cdot 2^{-n}$. Найдем размер популяции через 1 ч после начала роста: $x_1 = x_0 + 500 \times 2^0 = 1000 + 500 = 1500$; через 2 ч: $x_2 = x_1 + 500 \cdot 2^{-1} = 1500 + 500/2 = 1750$; через 3 ч: $x_3 = x_2 + 500 \cdot 2^{-2} = 1750 + 500/4 = 1875$. Общий вид решения таков:

$$x_n = 1000 + 500 + \frac{500}{2} + \frac{500}{2^2} + \ldots + \frac{500}{2^{n-1}} = 1000 + 500\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}.$$

Итак, $x_n = 1000 + 1000[1 - (1/2)^n] = 2000 - 1000 \cdot 2^{-n}$. В этих вычислениях воспользовались выражением для суммы n первых членов геометрической прогрессии. После 10 ч роста размер популяции составляет $x_{10} = 2000 - 1000 \cdot 2^{-10} \approx 1999$. С течением времени популяция бактерий приближается к предельному, или равновесному, размеру, равному 2000. В терминах модели роста он интерпретируется как размер популяции, который может поддерживаться за счет имеющихся ресурсов.

6.3. Линейные разностные уравнения второго порядка

Общий вид линейного разностного уравнения второго порядка таков:

$$a(n)x_{n+2} + b(n)x_{n+1} + c(n)x_n = d(n), \tag{6.4}$$

где $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ и $d(n)$ — заданные функции. Если $d(n) = 0$, то уравнение называют *однородным*. Если $a(n)$, $b(n)$ и $c(n)$ постоянны, то уравнение (6.4) называют *уравнением с постоянными коэффициентами*. Уравнение (6.4) можно решить методами, аналогичными методам решения уравнений первого порядка. Полагая $n = 0$, можно найти x_2, выразив его через x_0 и x_1. Полагая $n = 1$, выразим x_3 через x_2 и x_1, а затем через x_0 и x_1. Теоретически таким образом можно выразить x_n для любого n через x_0 и x_1, однако вычисления при этом оказываются очень громоздкими и вывести общую формулу для x_n крайне трудно. Случай постоянных коэффициентов все же поддается решению общими методами, содержащими сравнительно небольшой объем вычислений.

В данном параграфе займемся изучением линейного однородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0. \tag{6.5}$$

Будем считать, что a, b и c — постоянные, причем $a \neq 0$. Соответствующее неоднородное уравнение будет рассмотрено в следующем параграфе. Уравнение (6.5) получается при изучении моделей роста и конкуренции популяций, а также в ряде других биологических задач. Описанная в заключительной главе модель выживания и вымирания видов приводит к разностному уравнению такого типа (см. параграф 7.8).

Уравнение (6.5) можно переписать в виде $x_{n+2} = -(b/a)x_{n+1} - (c/a) \times$ $\times\, x_n$ и затем решить, последовательно полагая $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. При $n =$ $= 0$ получаем $x_2 = -(b/a)x_1 - (c/a)x_0$. Аналогично

$$x_3 = -\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_1 = \frac{b^2 - ac}{a^2}x_1 + \frac{bc}{a^2}x_0.$$

Это приводит к крайне сложной формуле, позволяющей выразить x_n через x_0 и x_1. Более удобный метод вытекает из вида решения уравнения первого порядка $x_{n+1} = (1 + a)x_n$. В предыдущем параграфе получали решения вида $x_n = \lambda^n$, где $\lambda = 1 + a$. По аналогии с этим будем искать решение уравнения (6.5) в виде $x_n = \lambda^n$ при некоторых значениях λ.

Если $x_n = \lambda^n$ удовлетворяет уравнению (6.5), то

$$a\lambda^{n+2} + b\lambda^{n+1} + c\lambda^n = 0$$

при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. В частности, полагая $n = 0$, получим

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Это уравнение называется характеристическим для разностного уравнения. Оно является квадратным и имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

При решении характеристического уравнения следует рассматривать три случая. Два его корня могут быть действительными и различными (когда $b^2 - 4ac > 0$); они могут быть действительными и равными между собой ($b^2 - 4ac = 0$) или же комплексными ($b^2 - 4ac < 0$).

Если $b^2 - 4ac > 0$, то описанный выше метод дает два решения уравнения (6.5): $x_1 = \lambda_1^n$ и $x_2 = \lambda_2^n$. Общее решение имеет вид

$$x_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n, \tag{6.6}$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Всякое решение уравнения имеет такой вид при некоторых значениях постоянных k_1 и k_2. Чтобы убедиться в том, что получено решение, подставим выражение для x_n в уравнение (6.5):

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = a(k_1\lambda_1^{n+2} + k_2\lambda_2^{n+2}) + b(k_1\lambda_1^{n+1} + k_2\lambda_2^{n+1}) +$$
$$+\ c(k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n) = k_1\lambda_1^n(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) + k_2\lambda_2^n(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c).$$

Так как λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения $a\lambda^2 + b\lambda +$ $+ c = 0$, то полученное выражение обращается в нуль, т. е. $x_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n$ действительно является решением уравнения (6.5).

Постоянные k_1 и k_2 можно выразить через значения x_n при $n = 0$ и $n = 1$. Полагая $n = 0$ и $n = 1$ в общем решении (6.6), получаем $x_0 =$ $= k_1 + k_2$ и $x_1 = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$. Это простая система линейных уравнений относительно постоянных k_1 и k_2. Решая ее, получаем

$$k_1 = \frac{x_1 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \; k_2 = \frac{x_0\lambda_1 - x_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Итак, если даны x_0 и x_1, то этим определено единственное решение уравнения (6.5).

Пример 6.11. Найти общее решение разностного уравнения второго порядка $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$. Выписать формулу для x_n, если $x_0 = 1000$ и $x_1 = 1500$. Чему равно x_5?

Здесь характеристическим является уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, корни которого

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = 2, \; \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = 1.$$

Согласно формуле (6.6) общее решение есть

$$x_n = k_1 2^n + k_2 1^n = k_1 2^n + k_2.$$

Но $x_0 = k_1 + k_2 = 1000$ и $x_1 = 2k_1 + k_2 = 1500$. Решая эти уравнения относительно k_1 и k_2, находим $k_1 = 500$ и $k_2 = 500$. Таким образом, единственным решением, удовлетворяющим заданным начальным условиям, является

$$x_n = 500 \cdot 2^n + 500 = 500(1 + 2^n).$$

При $n = 5$ получаем $x_5 = 500(1 + 2^5) = 16\,500$.

Проанализируем теперь случай, когда $b^2 - 4ac = 0$. Здесь корни характеристического уравнения равны между собой: $\lambda_1 = \lambda_2 = -b/(2a)$; рассматриваемый метод порождает лишь одно решение $x_n = \lambda_1^n$. Покажем, что в этом случае другим решением уравнения (6.5) служит $x_n = n\lambda_1^{n-1}$. Тогда общее решение можно записать в виде

$$x_n = k_1\lambda_1^n + k_2 n\lambda_1^{n-1}, \tag{6.7}$$

где $\lambda_1 = -b/(2a)$, а k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Чтобы убедиться в том, что это решение, подставим выражение для x_n в уравнение (6.5):

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = a[k_1\lambda_1^{n+2} + k_2(n+2)\lambda_1^{n+1}] +$$
$$+ b[k_1\lambda_1^{n+1} + k_2(n+1)\lambda_1^n] + c(k_1\lambda_1^n + k_2 n\lambda_1^{n-1}) = k_1\lambda_1^n(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) +$$
$$+ k_2 n\lambda_1^{n-1}(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c) + k_2\lambda_1^n(2a\lambda_1 + b).$$

Первые два слагаемых обращаются в нуль, так как $a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c = 0$. Третье слагаемое равно нулю, поскольку $\lambda_1 = -b/(2a)$ и $2a\lambda_1 + b = 2a[-b/ /(2a)] + b = 0$. Итак, получаем, что формула (6.7) дает решение уравнения (6.5). Постоянные k_1 и k_2 можно выразить через x_0 и x_1. Полагая $n = 0$ и $n = 1$ в общем решении (6.7), получаем уравнения $x_0 = k_1$ и $x_1 = = k_1\lambda_1 + k_2$, откуда $k_1 = x_0$, а $k_2 = x_1 - k_1\lambda_1$. Этот случай иллюстрируется следующим примером.

Пример 6.12. Найти общее решение разностного уравнения второго порядка $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$. Найти x_n, если $x_0 = 500$ и $x_1 = 1000$. Чему равно x_5?

Характеристическим является уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Здесь $b^2 - 4ac = 0$ и единственным корнем является $\lambda_1 = -b/(2a) = 4/2 = 2$. Поэтому общее решение имеет вид $x_n = k_1 2^n + k_2 n 2^{n-1}$. Полагая $n = 0$ и $n = 1$, получаем $x_0 = 500 = k_1$ и $x_1 = 1000 = 2k_1 + k_2$, откуда находим $k_1 = 500$ и $k_2 = 0$. Таким образом, $x_n = 500 \cdot 2^n$. В частности, $x_5 = 500 \cdot 2^5 = 16\,000$.

Остается рассмотреть третий случай, когда $b^2 - 4ac < 0$. В этом случае корни λ_1 и λ_2 являются комплексно-сопряженными числами:

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Эти числа можно записать в показательной форме (см., например, [1, параграф 4.7]):

$$\lambda_1 = re^{i\theta} \text{ и } \lambda_1 = re^{-i\theta},$$

где $r = \sqrt{c/a}$, а $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{4ac - b^2}/b$. Таким образом,

$$\lambda_1^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = (c/a)^{n/2}(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Аналогично

$$\lambda_2^n = (c/a)^{n/2}(\cos n\theta - i \sin n\theta).$$

Как и в двух предыдущих случаях, любая линейная комбинация этих решений λ_1^n и λ_2^n также является решением. В частности, решениями являются

$$(1/2)(\lambda_1^n + \lambda_2^n) = (c/a)^{n/2} \cos n\theta \text{ и } (1/(2i))(\lambda_1^n - \lambda_2^n) = (c/a)^{n/2} \sin n\theta.$$

Используя эти два решения, можно записать общее решение уравнения (6.5) в виде

$$x_n = k_1(c/a)^{n/2} \cos n\theta + k_2(c/a)^{n/1} \sin n\theta.$$

Постоянные k_1 и k_2, как и прежде, можно выразить через x_0 и x_1.

Задача (модель роста с влиянием предшествующих поколений). Рассмотрим популяцию, которая увеличивается от поколения к поколению. Пусть x_n соответствует размеру популяции в n-м поколении. Ясно, что размер популяции в n-м поколении зависит от популяции в предыдущем поколении и может также зависеть от популяций в других предшествующих поколениях. Предшествующие поколения могут, например, исчерпав бóльшую часть имеющихся ресурсов, затруднить воспроизводство популяции или сделать его невозможным. В качестве модели роста популяции от поколения к поколению можно рассматривать уравнение $x_{n+2} = rx_{n+1} + sx_n$. Популяция в $(n + 2)$-м поколении составлена из двух частей, соответствующих вкладам $(n + 1)$-го и n-го поколений. Постоянные r и s показывают относительную влажность двух соответствующих членов. Характеристическим служит уравнение $\lambda^2 - r\lambda + s = 0$ с корнями $\lambda_1 = (r + \sqrt{r^2 + 4s})/2$ и $\lambda_1 = (r - \sqrt{r^2 + 4s})/2$. Если $r^2 + 4s > 0$, то эти корни действительны и различны и общим решением является $x_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n$. Если же $r^2 + 4s < 0$ (что имеет место, когда s — достаточно большое отрицательное число), то общее решение имеет иной вид: $x_n = (-s)^{n/2}(k_1\cos n\theta + k_2\sin n\theta)$, где $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{-(r^2 + 4s)}/r$. В этой очень простой модели получен интересный результат, состоящий в том, что если на смертность в данном поколении существенно влияют особи, родившиеся двумя поколениями раньше, то численность популяции от поколения к поколению будет испытывать колебания.

Пример 6.13. Найти общее решение разностного уравнения второго порядка $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$. Найти x_n, если $x_0 = 100$, а $x_1 = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_1 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ и $\lambda_2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$. Параметры экспоненциальной формы $r = (c/a)^{n/2} = 1$ и $\theta = 2\pi/3$ (так как $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$). Общее решение $x_n = k_1\cos(2n\pi/3) + k_2\sin(2n\pi/3)$. Полагая $n = 0$ и $n = 1$, получаем $x_0 = 100 = k_1$ и $x_1 = 0 = -(1/2)k_1 + (\sqrt{3}/2)k_2$. Отсюда $k_1 = 100$ и $k_2 = 100/\sqrt{3}$. Искомое решение есть $x_n = 100\cos(2n\pi/3) + (100/\sqrt{3})\sin(2n\pi/3)$.

6.4. Метод вариации постоянных для разностных уравнений второго порядка

В данном параграфе рассмотрим метод решения уравнения

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n) \tag{6.8}$$

с постоянными коэффициентами a, b и c (при $a \neq 0$). Это линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Если $f(n) = 0$ при всех n, то уравнение является однородным. Как и в предыдущем параграфе, нужно рассмотреть три случая, соответствующие тому, являются ли корни вспомогательного уравнения действительными и различными, действительными и равными или же комплексными. Методы настоящего параграфа можно применять ко всем трем случаям, но для простоты рассмотрим лишь случай действительных и различных корней λ_1 и λ_2. Тогда $x_n = k\lambda_1^n + l\lambda_2^n$ является общим решением однородного уравнения (6.5), причем k и l — произвольные постоянные. Идея метода вариации постоянных состоит в том, чтобы считать постоянные k и l изменяющимися в зависимости от n таким образом, что получается решение неоднородного уравнения (6.8). Согласно этому будем искать решение в виде

$$x_n = k_n\lambda_1^n + l_n\lambda_2^n, \tag{6.9}$$

где k_n и l_n могут изменяться вместе с n. Подставим выражение (6.9) в уравнение (6.8) и попытаемся найти такие функции k_n и l_n, которые порождают решение.

Используя равенство (6.9), можно вычислить x_{n+1} и x_{n+2}. Имеем $x_{n+1} = k_{n+1}\lambda_1^{n+1} + l_{n+1}\lambda_2^{n+1}$. Прибавив к правой части и отняв от нее одну и ту же величину $k_n\lambda_1^{n+1} + l_n\lambda_2^{n+1}$, приходим к выражению

$$x_{n+1} = k_n\lambda_1^{n+1} + l_n\lambda_2^{n+1} + (k_{n+1} - k_n)\lambda_1^{n+1} + (l_{n+1} - l_n)\lambda_2^{n+1}.$$

Чтобы упростить его, будем считать, что

$$(k_{n+1} - k_n)\lambda_1^{n+1} + (l_{n+1} - l_n)\lambda_2^{n+1} = 0 \tag{6.10}$$

при любом значении n. При таком условии получаем (для каждого n), что

$$x_{n+1} = k_n\lambda_1^{n+1} + l_n\lambda_2^{n+1}. \tag{6.11}$$

Тогда согласно уравнению (6.11) имеем $x_{n+2} = k_{n+1}\lambda_1^{n+2} + l_{n+1}\lambda_2^{n+2}$, или

$$x_{n+2} = k_n\lambda_1^{n+2} + l_n\lambda_2^{n+2} + (k_{n+1} - k_n)\lambda_1^{n+2} + (l_{n+1} - l_n)\lambda_2^{n+2}. \tag{6.12}$$

Подставив теперь выражения (6.9), (6.11) и (6.12) в уравнение (6.8), получим

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = a[k_n\lambda_1^{n+2} + l_n\lambda_2^{n+2} + (k_{n+1} - k_n)\lambda_1^{n+2} + (l_{n+1} - l_n)\lambda_2^{n+2}] + \\ + b(k_n\lambda_1^{n+1} + l_n\lambda_2^{n+1}) + c(k_n\lambda_1^n + l_n\lambda_2^n).$$

Группируя слагаемые и приравнивая правую часть $f(n)$, получаем

$$f(n) = k_n(a\lambda_1^{n+2} + b\lambda_1^{n+1} + c\lambda_1^n) + l_n(a\lambda_2^{n+2} + b\lambda_2^{n+1} + c\lambda_2^n) + \\ + a[(k_{n+1} - k_n)\lambda_1^{n+2} + (l_{n+1} - l_n)\lambda_2^{n+2}]. \tag{6.13}$$

Поскольку λ_1 и λ_2 являются корнями вспомогательного уравнения, первые два выражения в скобках в формуле (6.13) обращаются в нуль и, значит,

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = a[(k_{n+1} - k_n)\lambda_1^{n+2} + (l_{n+1} - l_n)\lambda_2^{n+2}] = f(n).$$

Это дает второе уравнение для $k_{n+1} - k_n$ и $l_{n+1} - l_n$, а первым служит уравнение (6.10). Записав эти уравнения вместе, приходим к системе двух уравнений

$$\begin{cases} (k_{n+1} - k_n)\lambda_1^{n+1} + (l_{n+1} - l_n)\lambda_2^{n+1} = 0, \\ (k_{n+1} - k_n)\lambda_1^{n+2} + (l_{n+1} - l_n)\lambda_2^{n+2} = \dfrac{f(n)}{a} \end{cases} \tag{6.14}$$

относительно двух неизвестных $k_{n+1} - k_n$ и $l_{n+1} - l_n$. Решая эту систему, умножим первое уравнение на λ_2 и вычтем из второго. Тем самым находим $k_{n+1} - k_n$. Затем аналогичным приемом можно найти $l_{n+1} - l_n$. Решения имеют вид

$$k_{n+1}-k_n=\frac{f(n)}{a\lambda_1^{n+1}(\lambda_1-\lambda_2)};\qquad(6.15)$$

$$l_{n+1}-l_n=\frac{f(n)}{a\lambda_2^{n+1}(\lambda_2-\lambda_1)}.\qquad(6.16)$$

Очевидно, что уравнения (6.15) и (6.15) представляют собой линейные разностные уравнения первого порядка, которые можно решить методами, рассмотренными в параграфе 6.2.

Решая уравнение (6.15), получаем

$$k_1=k_0+\frac{f(0)}{a\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)},$$

$$k_2=k_1+\frac{f(1)}{a\lambda_1^2(\lambda_1-\lambda_2)}=k_0+\frac{f(0)}{a\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{f(1)}{a\lambda_1^2(\lambda_1-\lambda_2)},$$

$$k_3=k_2+\frac{f(2)}{a\lambda_1^3(\lambda_1-\lambda_2)}=k_0+\frac{f(0)}{a\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{f(1)}{a\lambda_1^2(\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{f(2)}{a\lambda_1^3(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

Легко видеть, что общее решение уравнения (6.15) имеет вид

$$k_n=k_0+\frac{1}{a\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\left(f(0)+\frac{f(1)}{\lambda_1}+\frac{f(2)}{\lambda_1^2}+\ldots+\frac{f(n-1)}{\lambda_1^{n-1}}\right).\qquad(6.17)$$

Аналогично для уравнения (6.16) общее решение есть

$$l_n=l_0+\frac{1}{a\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\left(f(0)+\frac{f(1)}{\lambda_2}+\frac{f(2)}{\lambda_2^2}+\ldots+\frac{f(n-1)}{\lambda_2^{n-1}}\right).\qquad(6.18)$$

Таким образом, общее решение уравнения (6.8) запишется в виде (6.9) где k_n и l_n выражаются формулами (6.17) и (6.18). Если известны x_0 и x_1, то можно найти постоянные k_0 и l_0. Полагая в формуле (6.9) $n = 0$ и $n = 1$, имеем $x_0 = k_0 + l_0$ и $x_1 = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$.

Эти продолжительные выкладки привели к формулам, позволяющим получать общее и частные решения уравнения. Лучше всего проиллюстрировать их применение на примерах.

Пример 6.14. Найти общее решение для уравнения $x_{n+2} - x_n = 1$. Вывести формулу для x_n, если $x_0 = 50$ и $x_1 = 100$.

Здесь $f(n) = 1$. Вспомогательным является уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ с корнями $\lambda_1 = 1$ и $\lambda = -1$. Общее решение имеет вид $x_n = k_n 1^n + l_n(-1)^n$, где k_n и l_n определяются формулами (6.17) и (6.18):

$$k_n=k_0+\frac{1}{2}(1+1+1+\ldots+1)=k_0+\frac{n}{2},$$

$$l_n=l_0+\frac{1}{2}[1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}]=l_0+\frac{1}{4}[1-(-1)^n].$$

Отсюда общее решение можно записать так:

$$x_n = k_0 + \frac{n}{2} + (-1)^n \left(l_0 + \frac{1}{4}[1 - (-1)^n] \right).$$

Если $x_0 = 50$ и $x_1 = 100$, то $x_0 = 50 = k_0 + l_0$ и $x_1 = 100 = k_0 + \frac{1}{2} - \left(l_0 + \frac{1}{2} \right) =$
$= k_0 - l_0$.

Таким образом, $2k_0 = 150$, т. е. $k_0 = 75$ и $l_0 = -25$.

Это дает частное решение вида

$$x_n = 75 + \frac{n}{2} + (-1)^n \left(-25 + \frac{1}{4}[1 - (-1)^n] \right).$$

Пример 6.15. Если бы популяция рыб росла, не подвергаясь внешним возмущениям, то ее прирост в $(n + 1)$-м году был бы вдвое больше прироста в n-м году. Однако в исследовательских целях к популяции ежегодно добавлялось по 100 рыб. Найти x_n — численность популяции в n-м году, если $x_0 = 1000$ и $x_1 = 1200$.

Численность рыб x_n удовлетворяет разностному уравнению второго порядка

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 2(x_{n+1} - x_n) + 100,$$

или

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 100.$$

Здесь $f(n) = 100$. Вспомогательным служит уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ с корнями $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$. Общее решение имеет вид $x_n = k_n \cdot 2^n + l_n \cdot 1^n$. По формулам (6.17) и (6.18) находим

$$k_n = k_0 + \frac{1}{2}\left(100 + \frac{100}{2} + \frac{100}{2^2} + \ldots + \frac{100}{2^{n-1}} \right) =$$
$$= k_0 + \frac{100}{2}\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = k_0 + 100\left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

и

$$l_n = l_0 - (100 + 100 + \ldots + 100) = l_0 - 100n.$$

Таким образом,

$$x_n = k_0 \cdot 2^n + 100(2^n - 1) + l_0 - 100n.$$

Постоянные k_0 и l_0 можно выразить через x_0 и x_1, так как $x_0 = 1000 =$
$= k_0 + l_0$ и $x_1 = 1200 = 2k_0 + 100 + l_0 - 100$. Отсюда $k_0 = 200$, $l_0 = 800$, а искомое решение есть

$$x_n = 200 \cdot 2^n + 100 \cdot 2^n - 100 + 800 - 100n = 300 \cdot 2^n + 700 - 100n.$$

В частности, $x_2 = 1700$, $x_3 = 2800$, $x_4 = 5100$. Ясно, что численность рыб продолжает очень быстро возрастать.

6.5. Системы разностных уравнений первого порядка

В предыдущих параграфах мы рассмотрели разностные уравнения, которые могли бы получаться при описании динамики популяции некоторого вида в данной среде. В этих уравнениях не учитывались в явном виде наличие конкурирующих популяций и другие аспекты внешней среды. Для более детального описания и лучшего понимания динамики роста популяций нужно найти способы включать в уравнения роста факторы, отражающие характерные свойства среды.

Можно заниматься, например, исследованием взаимодействия двух или более видов. Если на некотором ареале сосуществуют два вида, то размеры их популяций в $(n + 1)$-й период времени (год, поколение и т. д.) могут взаимно зависеть от их размеров в n-й период. Если эти два вида связаны отношением «хищник — жертва», то большая популяция жертв в n-м периоде будет приводить к возрастанию популяции хищников в $(n + 1)$-м периоде. Это, в свою очередь, может приводить к уменьшению популяции жертв в следующем периоде. Если, с другой стороны, два вида связаны симбиотическими отношениями, то их популяции будут возрастать или убывать одновременно. Разумеется, реальная экосистема представляет собой сложную сеть конкурентных, кооперативных и прочих отношений между многими различными видами. Сейчас ограничимся случаем двух видов, хотя в принципе рассматриваемые методы можно обобщить и на любое число видов.

Рассмотрим систему двух разностных уравнений первого порядка, которая имеет вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n + f(n), \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n + g(n), \end{cases} \tag{6.19}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} — постоянные, а $f(n)$ и $g(n)$ — заданные функции. Задача состоит в том, чтобы найти функции x_n и y_n, удовлетворяющие этим уравнениям. Система называется *однородной*, если $f(n) = g(n) = 0$ при всех n. В противном случае система называется *неоднородной*.

Систему (6.19) можно представить себе как модель или описание взаимодействия двух видов в некоторой среде, если x_n и y_n соответствуют численностям популяций вида I и вида II к концу n-го периода времени. Когда оба вида конкурируют за одни и те же ресурсы, это моделируется с помощью отрицательных коэффициентов a_{12} и a_{21}. Если, например, коэффициент a_{12} отрицателен, то популяция вида I будет убывать с ростом популяции вида II. Это можно показать на примере.

Пример 6.16. Модель межвидовой конкуренции. Линейная однородная система

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n, \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n \end{cases} \tag{6.20}$$

описывает взаимное влияние двух конкурирующих видов на размер их популяций. Пусть начальные численности составляют $x_0 = 100$ и $y_0 =$ $= 150$. Найти численности обоих видов во все последующие моменты времени.

Будем решать систему (6.20) путем сведения ее к линейному разностному уравнению второго порядка относительно x_n с постоянными коэффициентами. Из первого уравнения (6.20) имеем

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - y_{n+1} = 2x_{n+1} - (-x_n + 2y_n) = 2x_{n+1} + x_n - 2y_n.$$

Согласно тому же первому уравнению $y_n = 2x_n - x_{n+1}$ и получаем

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n - 2(2x_n - x_{n+1}) = 4x_{n+1} - 3x_n.$$

Таким образом, $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$. Вспомогательное уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 1$. Общее решение есть $x_n = k_1 \times$ $\times 3^n + k_2 \cdot 1^n = k_1 \cdot 3^n + k_2$. Из первого уравнения системы (6.20) следует, что $y_n = 2x_n - x_{n+1} = 2k_1 \cdot 3^n + 2k_2 - k_1 \cdot 3^n - k_2 = k_2 - k_1 \cdot 3^n$. Чтобы найти постоянные k_1 и k_2, используем условия $x_0 = 100 = k_1 + k_2$ и $y_0 =$ $150 = = k_2 - k_1$. Отсюда $k_1 = -25$, а $k_2 = 125$. Искомое решение имеет вид

$$x_n = 125 - 25 \cdot 3^n \text{ и } y_n = 125 + 25 \cdot 3^n.$$

Отсюда ясно, что первый вид быстро убывает, а второй вид продолжает расти.

Вернемся теперь к системе общего вида (6.19) и отыщем ее общее решение методами, рассмотренными в примере 6.16. Из первого уравнения получаем

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= a_{11}x_{n+1} + a_{12}y_{n+1} + f(n+1) = \\ &= a_{11}x_{n+1} + a_{12}(a_{21}x_n + a_{22}y_n + g(n)) + f(n+1) = \\ &= a_{11}x_{n+1} + a_{12}a_{21}x_n + a_{12}a_{22}y_n + a_{12}g(n) + f(n+1). \end{aligned}$$

Согласно тому же первому уравнению $a_{12}y_n = x_{n+1} - a_n x_n - f(n)$. Значит,

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= a_{11}x_{n+1} + a_{12}a_{21}x_n + a_{22}(x_{n+1} - a_n x_n - f(n)) + a_{12}g(n) + f(n+1) = \\ &= (a_{11} + a_{22})x_{n+1} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_n - a_{22}f(n) + a_{12}g(n) + f(n+1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что x_n удовлетворяет разностному уравнению второго порядка

$$x_{n+2} - (a_{11} + a_{22})x_{n+1} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_n = h(n),$$

где $h(n) = -a_{22}f(n) + a_{12}g(n) + f(n+1)$. Это уравнение можно решить методом вариации постоянных (см. параграф 6.4). Затем из первого уравнения (6.19) можно определить y_n.

Упражнения

1. Определите порядок разностных уравнений:

а) $x_n = x_{n+1} + x_{n+3}$; б) $x_{n+1} = (x_n)^2 + (x_{n-1})^3$; в) $x_n + nx_{n-1} = n^2$; г) $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 2^n$; д) $x_{n+1} = x_n + 1$; е) $x_n = x_{n-2} + x_{n-3}$.

[а) 3; б) 2; в) 1; г) 2; д) 1; е) 3]

2. Проверьте, является ли $x_n = n^2 + n$ решением разностного уравнения $x_{n+1} = x_n + 2n + 2$. Покажите, что $x_n = n^2 + n + k$ также является решением при любом значении постоянной k.

3. Убедитесь в том, что $x_n = ca^n$ является решением разностного уравнения $x_{n+1} = ax_n$ при любом значении постоянной c. Найдите постоянные a и c, если известно, что $x_2 = 3$, а $x_3 = 5$.

$[a = \frac{5}{3}, c = \frac{27}{25}]$

4. Рост бактериальной культуры в питательной среде замеряется каждые два часа. Оказалось, что при каждом измерении популяция бактерий увеличивалась на 25 % по сравнению с предыдущим измерением.

а) Опишите этот процесс роста с помощью разностного уравнения для x_n — размера популяции по прошествии n часов роста.

б) Каков порядок этого разностного уравнения?

в) Найдите x_2 и x_4, если $x_0 = 1600$.

[а) $x_{n+2} = 1{,}25x_n$; б) второй; в) $x_2 = 2000$; $x_4 = 2500$]

Найдите общее решение для следующих разностных уравнений первого порядка.

5. $x_{n+1} - x_n = 2^{-n}$.

$[x_n = x_0 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)]$

6. $x_{n+1} - x_n = 2x_n$.

$[x_n = 3^n x_0]$

7. $x_{n+1} = \frac{n+5}{n+3} x_n$.

$[x_n = \frac{(n+4)(n+3)}{12} x_0]$

8. $x_{n+1} = nx_n$.

$[x_n = 0, n \geq 1]$

9. $x_{n+1} - 3x_n = 3x_{n+1} - x_n$.

$[x_n = (-1)^n x_0]$

Найдите частное решение, удовлетворяющее начальному условию $x_0 = 1$, для следующих разностных уравнений первого порядка.

10. $2x_{n+1} = x_n$.

$[x_n = 2^{-n}]$

11. $x_{n+1} = x_n + e^{-n}$.

$$[x_n = 1 + \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}]$$

12. $(n + 1)x_{n+1} = (n + 2)x_n$.

$$[x_n = n + 1]$$

13. $x_{n+1} - x_n = 2x_n + 2$.

$$[x_n = 2 \cdot 3^n - 1]$$

Найдите общие решения для следующих разностных уравнений второго порядка.

14. $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$.

$$[x_n = k_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + k_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n]$$

15. $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = 0$.

$$[x_n = k_1 + k_2(-3)^n]$$

16. $4x_n + 4x_{n+1} + x_{n+2} = 0$.

$$[x_n = k_1(-2)^n + k_2(-2)^{n-1}n]$$

17. $3x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0$.

$$[x_n = k_1 + k_2\left(-\frac{1}{3}\right)^n]$$

Найдите решения, удовлетворяющие начальным условиям $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, для следующих разностных уравнений второго порядка.

18. $x_{n+2} + x_{n+1} = 6x_n$.

$$[x_n = 2^n]$$

19. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0$.

$$[x_n = (-3)^n\left(1 - \frac{5n}{3}\right)]$$

20. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$.

$$[x_n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{3n\pi}{4} + 3\sin\frac{3n\pi}{4}\right)]$$

21. $x_n = x_{n+2} - x_{n+1}$.

$$[x_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n]$$

Найдите общие решения для следующих разностных уравнений второго порядка, используя метод вариации постоянных.

22. $x_{n+2} = x_n + 2$.

$$[x_n = n + k_0 + l_0(-1)^n]$$

23. $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 3^n$.

$$[x_n = \frac{3^n}{2} + k_1 + k_2 2^n]$$

24. Для уравнения $x_{n+2} - 9x_n = 1$ найдите решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$.

$$[x_n = -\frac{1}{8} + \frac{3^n}{4} - \frac{(-3)^n}{8}]$$

Найдите общие решения для следующих систем разностных уравнений первого порядка.

25. $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n, \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n. \end{cases}$

$$[x_n = k_1 + k_2 3^n, y_n = k_2 3^n - k_1]$$

26. $\begin{cases} x_{n+1} = -y_n + 2^n, \\ y_{n+1} = -x_n + 2^n. \end{cases}$

$$[x_n = k_0 + (-1)^n l_0 + \frac{1}{3} \cdot 2^n, y_n = -k_0 + (-1)^n l_0 + \frac{1}{3} \cdot 2^n]$$

27. Найдите решения, удовлетворяющие начальным условиям $x_0 =$ $= 100$ и $y_0 = 200$, для системы из упражнения 25.

$$[x_n = -50 + 150 \cdot 3^n, y_n = 150 \cdot 3^n + 50]$$

Глава 7
ДИСКРЕТНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

7.1. Случайные события. Определение вероятности

1. **Понятие о случайном событии.** Опыт, эксперимент, наблюдение явления называется *испытанием*. Испытаниями, например, являются бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенными на каждую грань числом очков — от одного до шести).

Результат, исход испытания называется *событием*. Событиями являются выпадение герба или цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости. Для обозначения событий используют большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д.

Определение. Два события называют *совместимыми* (совместными), если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример 7.1. Испытание — однократное бросание игральной кости. Событие A — появление четырех очков. Событие B — появление четного числа очков. События A и B совместимые.

Определение. Два события называют *несовместимыми* (несовместными), если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 7.2. Испытание — однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события несовместимы, так как появление одного из них исключает появление другого.

Несовместимость более чем двух событий означает их попарную несовместимость.

Пример 7.3. Испытание — однократное бросание игральной кости. Пусть события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 — соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. Эти события являются несовместимыми.

Определение. Два события A и B называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Событие, противоположное событию A, обозначают через $\overline{A}$.

Пример 7.4. Испытание — однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события противоположны, так как исходами бросания могут быть лишь они, и появление одного из них исключает появление другого, т. е. $A=\overline{B}$, или $\overline{A}=B$.

Определение. Событие называют *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Пример 7.5. Испытание — извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие. Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Определение. Событие A называют *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Пример 7.6. Событие A_6 — выпадение шести очков при бросании игральной кости — случайное. Оно может наступить, но может и не наступить в данном испытании.

Пример 7.7. Событие A_{98} — прорастание 98 зерен пшеницы из 100 — случайное. Это событие может наступить, но, может быть, прорастет зерен больше или меньше.

Можно ли как-то измерить возможность появления некоторого случайного события? Другими словами, можно ли охарактеризовать эту возможность некоторым числом?

2. Классическое определение вероятности. Всякое испытание влечет за собой некоторую совокупность исходов — результатов испытания, т. е. событий. Во многих случаях возможно перечислить все события, которые могут быть исходами данного испытания.

Определение. Говорят, что совокупность событий образует *полную группу событий* для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них.

Приведем примеры полных групп событий: выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты; попадание в цель и промах при одном выстреле; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков при одном бросании игральной кости.

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых событий U_1, U_2, ..., U_n, связанную с некоторым испытанием. Предположим, что в этом испытании осуществление каждого из событий U_i ($i = 1, 2, ..., n$) равновозможно, т. е. условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед другими возможными.

Определение. События $U_1, U_2, ..., U_n$, образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий, будем называть *элементарными событиями*.

Пример 7.8. Вернемся к опыту с подбрасыванием игральной кости. Пусть U_i — событие, состоящее в том, что кость выпала гранью с цифрой i. Как уже отмечалось, события U_1, U_2, ..., U_6 образуют полную группу попарно несовместимых событий. Так как кость предполагается однородной и симметричной, то события U_1, U_2, ..., U_6 являются и равновозможными, т. е. элементарными.

Определение. Событие A *называют благоприятствующим* событию B, если наступление события A влечет за собой наступление события B.

Пример 7.9. Пусть при бросании игральной кости события U_2, U_4 и U_6 — появление соответственно двух, четырех и шести очков и A — событие, состоящее в появлении четного числа очков; события U_2, U_4 и U_6 благоприятствуют событию A.

Определение (*классическое определение вероятности*). *Вероятностью* $P(A)$ события A называют отношение $\frac{m}{n}$ числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу всех элементарных событий, т. е. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Пример 7.10. Вычислим вероятность выпадения герба при одном бросании монеты. Очевидно, событие A — выпадение герба и событие B — выпадение цифры образуют полную группу несовместимых и равновозможных событий для данного испытания. Значит, здесь $n = 2$. Событию A благоприятствует лишь одно событие — само A, т. е. здесь $m = 1$. Поэтому $P(A) = \frac{1}{2}$.

Пример 7.11. Очевидно, что в опыте с игральной костью (см. пример 7.8) $P(U_i) = \frac{1}{6}$, $i = 1, 2, ..., 6$.

Пример 7.12. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число очков, делящееся на 2 (событие A). Число элементарых событий здесь 6. Число благоприятствующих элементарных событий 3 (выпадение 2, 4 и 6). Поэтому $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Пример 7.13. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Две последние цифры можно набрать A_{10}^2 способами, а благоприятствовать событию M (цифры набраны правильно) будет только один способ. Поэтому $P(M)=\frac{1}{A_{10}^2}=\frac{1}{10\cdot 9}=\frac{1}{90}$.

Задача 1 (вероятности рождения мальчиков и девочек). Будем предполагать, что рождения мальчиков и девочек — равновозможные события. Пусть в семье двое детей. Какова вероятность того, что оба ребенка — мальчики? Если известно, что один мальчик, какова вероятность того, что оба ребенка — мальчики?

На первый вопрос ответить нетрудно. Имеется четыре равновозможных исхода: ММ, МД, ДМ, ДД (М — мальчик, Д — девочка). Исходы МД и ДМ различны, так как в первом из них сначала родился мальчик, а потом девочка, во втором — наоборот. Из этих четырех исходов только один ММ благоприятствует нашему событию. Отсюда следует, что $P(\text{ММ})=\frac{1}{4}$.

Если дополнительно известно, что один ребенок — мальчик, то событие ДД исключается. Из трех равновозможных событий ММ, МД, ДМ по-прежнему только одно ММ благоприятствует желаемому исходу. Поэтому $P(\text{ММ})=\frac{1}{3}$.

Если известно, что старший ребенок — мальчик, то исключается ДМ и ДД. В этом случае $P(\text{ММ})=\frac{1}{2}$.

Пример 7.14. У кабинета дежурного психотерапевта ожидают приема трое больных. Врачу известно по медицинским карточкам, что один из ожидающих, по фамилии Петров, болел в прошлом маниакально-депрессивным психозом. Врач интересуется этим больным, но не хочет вне очереди вызывать его в кабинет. Обозначим как событие A тот факт, что в кабинет врача входит больной Петров; как событие B обозначим то, что входит другой больной — Сидоров (событие B_1) или Иванов (событие B_2). События A, B_1 и B_2 — несовместимы и образуют полную группу (предполагается, что к врачу больные входят по одному). Так как появиться, согласно очереди, может равновероятно любой из больных, то к началу приема вероятность появиться первым в кабинете врача для одного из больных, в том числе для Петрова, равна $\frac{1}{3}$.

Задача 2. При составлении команды космического корабля возникает вопрос о психологической совместимости отдельных членов экипажа. Допустим, что надо составить команду из трех человек: командира, инженера и врача. На место командира есть три кандидата a_1, a_2, a_3; на место инженера — четыре кандидата — b_1, b_2, b_3, b_4, на место врача — два кандидата c_1, c_2. Проведенная проверка показала психологическую несовместимость командира a_2 с инженерами b_3, b_4 и с врачом c_2, а также инженера b_2 с врачом c_2. Будем для простоты считать, что без учета фактора несовместимости все варианты составления команды равновозможны. Какова в этом случае вероятность того, что будет составлен экипаж, все члены которого психологически совместимы друг с другом?

Представим все варианты команды, при которых члены экипажа совместимы друг с другом в виде «дерева» (рис. 7.1). Число ветвей этого дерева, т. е. исходов, благоприятствующих событию A, равно 16, а общее число возможных комбинаций по правилу умножения равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Искомая вероятность $P(A) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

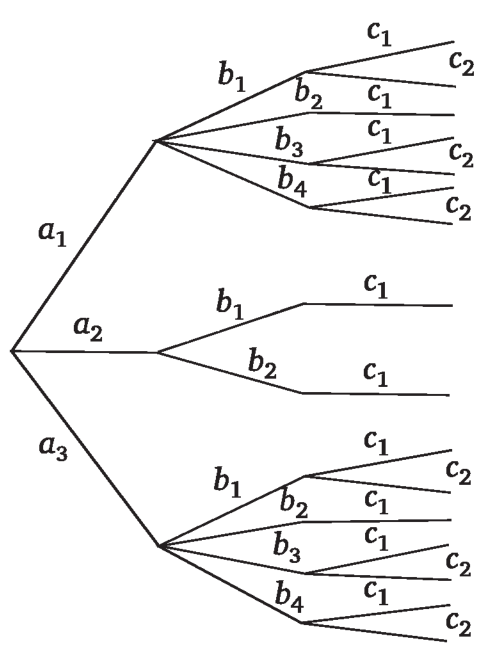


Рис. 7.1

Из приведенного классического определения вероятности вытекают следующие ее свойства.

1. *Вероятность достоверного события равна единице.* Действительно, достоверному событию должны благоприятствовать все n элементарных событий, т. е. $m = n$, следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

2. *Вероятность невозможного события равна нулю.* В самом деле, невозможному событию не может благоприятствовать ни одно из элементарных событий, т. е. $m = 0$, откуда $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$

3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных событий. Поэтому в этом случае $0 < m < n$ и, значит, $0<\frac{m}{n}<1$. Следовательно, $0 < P(A) < 1$.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le P(A) \le 1.$$

3. Относительная частота. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности не является пригодным для изучения произвольных случайных событий. Так, оно неприемлемо, если результаты испытания неравновозможны. Например, при бросании неправильной игральной кости выпадение ее различных граней неравновозможно.

В таких случаях используется так называемое статистическое определение вероятности.

Пусть произведено n испытаний, при этом некоторое событие A наступило m раз ($m \le n$).

Определение. Число m называют *абсолютной частотой* (или просто *частотой*) события A, а отношение $P^*(A)=\frac{m}{n}$ называют *относительной частотой* события A.

Пример 7.15. При транспортировке из 10 000 арбузов испортилось 26. Здесь $m = 26$ — абсолютная частота испорченных арбузов, а $P^*(A)=\frac{26}{10\,000}=0{,}0026$ — относительная.

Результаты многочисленных опытов и наблюдений помогают заключить: при проведении серий из n испытаний, когда число n сравнительно мало, относительная частота $P^*(A)$ принимает значения, которые могут довольно сильно отличаться друг от друга. Но с увеличением n — числа испытаний в сериях — относительная частота $P^*(A)=\frac{m}{n}$ приближается к некоторому числу $P(A)$, стабилизируясь возле него и принимая все более устойчивые значения.

Пример 7.16. Было проведено 10 серий бросаний монеты, по 1000 бросаний в каждой. Относительные частоты выпадения герба оказались равными 0,501; 0,485; 0,509; 0,536; 0,485; 0,488; 0,500; 0,497; 0,494; 0,484 (см. [8]). Эти частоты группируются около числа 0,5.

Определение (***статистическое определение вероятности***). Вероятностью события A в данном испытании называют число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при больших n.

В условиях примера 7.16 указанная вероятность равна 0,5.

Пример 7.17. По официальным данным шведской статистики, относительные частоты рождения девочек по месяцам 1935 г. характеризуются следующими числами (расположены в порядке следования месяцев, начиная с января): 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473 (см. [3]). Эти частоты группируются около числа 0,482.

Таким образом, относительная частота события приближенно совпадает с его вероятностью, если число испытаний достаточно велико. Имеется огромный опытный материал по проверке последнего утверждения. Укажем еще один такой пример с бросанием монеты (см. [3]).

Экспериментатор	Число бросаний	Число выпадений герба	Относительная частота
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5080
К. Пирсон	12 000	6019	0,5016
К. Пирсон	24 000	12 012	0,5005

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. При 4040 испытаниях отклонение равно 0,008, а при 24 000 — 0,0005.

Пример 7.18. Чтобы знать, какова вероятность для данного станка изготовить годную деталь, поступают так: проверяют одну или несколько партий деталей, изготовленных станком, подсчитывают число годных деталей, вычисляют относительную частоту и в соответствии с определением вероятность принимают равной этой частоте. Допустим, при проверке партии из 200 деталей 190 оказались годными. Тогда вероятность наудачу выбранной детали быть годной $P \approx \frac{190}{200} = 0{,}95$. Вероятность найдена приближенно, так как 0,95 — это относительная частота.

Аналогичным образом поступают, например, при определении процента всхожести семян.

7.2. Свойства вероятности

1. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.

Определение. *Суммой* событий A и B называют событие $C = A + B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B.

Пример 7.19. Испытание — стрельба двух стрелков (каждый делает по одному выстрелу). Событие A — попадание в мишень первым стрелком, событие B — попадание в мишень вторым стрелком. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$, состоящее в попадании в мишень по крайней мере одним стрелком.

Аналогично суммой конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называется событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i ($i = 1, \ldots, k$).

Из определения суммы непосредственно следует, что $A + B = B + A$. Справедливо также сочетательное свойство. Однако $A + A = A$ (а не $2A$, как в алгебре).

Определение. *Произведением* событий A и B называют событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A, и событие B.

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называется событие $A = A_1A_2\ldots A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

В условиях примера 7.19 произведением событий AB будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двух стрелков.

Из определения произведения непосредственно следует, что $AB = BA$.

Справедливы также сочетательный и дистрибутивный законы. Однако $A \cdot A = A$ (а не A^2).

Теорема 7.1. *Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий*:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{7.1}$$

Доказательство. Используем классическое определение вероятности. Предположим, что в данном испытании число всех элементарных событий равно n, событию A благоприятствуют k элементарных событий, событию B — l элементарных событий. Так как A и B — несовместимые события, то ни одно из элементарных событий $U_1, U_2, \ldots, U_n$ не может одновременно благоприятствовать и событию A, и событию B. Следовательно, событию $A + B$ будет благоприятствовать $k + l$ элементарных событий. По определению вероятности имеем

$$P(A)=\frac{k}{n},\ P(B)=\frac{l}{n},\ P(A+B)=\frac{k+l}{n},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Совершенно так же теорема формулируется и доказывается для любого конечного числа попарно несовместимых событий.

Следствие 1. *Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместимых событий, то сумма их вероятностей равна единице*:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Доказательство. Так как события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то появление хотя бы одного из них — достоверное событие, и, значит,

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1.$$

А так как эти события и несовместимые, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$

что и приводит к искомому равенству.

Следствие 2. *Сумма вероятностей противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице*:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \tag{7.2}$$

Это следствие — частный случай следствия 1.

Пример 7.20. В урне 10 шаров: три красных, пять синих и два белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар? Вероятность вынуть красный шар $P(A) = \frac{3}{10}$, синий — $P(B) = \frac{5}{10}$. Так как события A и B несовместимы, то по теореме 7.1

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = 0{,}8.$$

Пример 7.21. На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность сорвать в темноте окрашенную астру, если срывают одну астру? Искомая вероятность равна сумме вероятностей сорвать красную или синюю астру, т. е.

$$P = \frac{20}{90} + \frac{30}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}.$$

2. Теорема умножения вероятностей.

Определение. Два события A и B называют *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет[1]. В противном случае события A *и* B называют *зависимыми.*

Пример 7.22. Пусть в урне находятся два белых и два черных шара. Пусть событие A — вынут белый шар. Очевидно, $P(A) = \frac{1}{2}$. После пер-

[1] Несколько событий $A_1, \ldots, A_k$ называются *независимыми в совокупности* (или просто *независимыми*), если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли какие-либо другие рассматриваемые события или нет.

вого испытания вынутый шар кладется обратно в урну, шары перемешиваются и снова вынимается шар. Событие B — во втором испытании вынут белый шар — также имеет вероятность $P(B)=\frac{1}{2}$, т. е. события A и B — независимые.

Предположим теперь, что вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Тогда если произошло событие A, т. е. в первом испытании вынут белый шар, то вероятность события B уменьшается $\left(P(B)=\frac{1}{3}\right)$; если в первом испытании был вынут черный шар, то вероятность события B увеличивается $\left(P(B)=\frac{2}{3}\right)$.

Итак, здесь вероятность события B существенно зависит от того, произошло или не произошло событие A, в таких случаях события A и B — зависимые.

Определение. Пусть A и B — зависимые события. *Условной вероятностью* $P_A(B)$ события B называют вероятность события B, найденную в предположении, что событие A уже наступило.

Так, в примере 7.22 $P_A(B)=\frac{1}{3}$.

Заметим, что если события A и B независимы, то $P_A(B) = P(B)$.

Теорема 7.2. *Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило*:

$$P(AB)=P(A)P_A(B). \tag{7.3}$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют сообытию A и пусть из этих k событий l благоприятствуют событию B, а значит, и событию AB. Тогда

$$P(AB)=\frac{l}{n}=\frac{k}{n}\cdot\frac{l}{k}=P(A)P_A(B),$$

что и доказывает искомое равенство (7.3).

Замечание. Применив формулу (7.3) к событию BA, получим

$$P(BA)=P(B)P_B(A). \tag{7.3$'$}$$

Так как $AB = BA$ (см. п. 1), то, сравнивая (7.3) и (7.3′), получаем, что

$$P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A). \tag{7.4}$$

Пример 7.23. В условиях примера 7.22 берем тот случай, когда вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Поставим следующий вопрос: какова вероятность вынуть первый и второй раз белые шары? По формуле (7.3) имеем

$$P(AB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Пример 7.24. Предположим, что вероятности встретить реку, загрязняемую постоянным фактором $P(A)$, временным фактором $P(B)$ и обоими факторами $P(AB)$, равны соответственно 0,4; 0,1 и 0,05. Найти: 1) вероятность того, что река, загрязняемая временным фактором, будет к тому же загрязнена и постоянным фактором, т. е. $P_B(A)$; 2) вероятность того, что река, загрязняемая постоянным фактором, будет еще загрязнена и временным фактором, т. е. $P_A(B)$. Из формулы (7.3′) находим

$$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0{,}05}{0{,}1}=0{,}5.$$

Аналогично, используя формулу (7.3), находим

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0{,}05}{0{,}4}=0{,}125.$$

Пример 7.25. В терапевтическом отделении больницы 70 % пациентов — женщины, а 21 % — курящие мужчины. Наугад выбирают пациента. Он оказывается мужчиной. Какова вероятность того, что он курит?

Пусть М означает, что пациент — мужчина, а К — что пациент курит. Тогда в силу условия задачи $P(\text{М}) = 0{,}3$, а $P(\text{МК}) = 0{,}21$. Поэтому с учетом формулы (7.3) искомая условная вероятность $P_{\text{М}}(\text{К})=\dfrac{P(\text{МК})}{P(\text{М})}=\dfrac{0{,}21}{0{,}3}=0{,}7.$

Пример 7.26. В группе туристов 20 % детей, причем 12 % девочки. Наугад выбирают ребенка. Какова вероятность того, что это девочка? Какова вероятность того, что это мальчик?

Пусть Р означает, что турист — ребенок, Ж — что турист женского пола, М — мужского. Тогда по условию $P(\text{Р}) = 0{,}2$, $P(\text{ЖР}) = 0{,}12$, $P(\text{МР}) = 0{,}08$. Следовательно,

$$P_{\text{Р}}(\text{Ж})=\frac{P(\text{ЖР})}{P(\text{Р})}=\frac{0{,}12}{0{,}2}=0{,}6,\ P_{\text{Р}}(\text{М})=\frac{P(\text{МР})}{P(\text{Р})}=\frac{0{,}08}{0{,}2}=0{,}4.$$

Задача (курение и заболевание легких). В группе обследуемых 1000 человек. Из них 600 курящих и 400 некурящих. Среди курящих 240 человек имеют те или иные заболевания легких. Среди некурящих легочных больных 120 человек. Являются ли курение и заболевание легких независимыми событиями?

Пусть событие A — обследуемый курит, событие B — обследуемый страдает заболеванием легких.

Тогда согласно условию задачи

$$P(B)=\frac{240+120}{1000}=0{,}36,\ P_A(B)=\frac{240}{600}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

Так как $0{,}36 \neq 0{,}4$, события A и B зависимые.

Теорема 7.3. *Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий*:

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{7.5}$$

Действительно, если A и B — независимые события, то $P_A(B) = P(B)$ и формула (7.3) превращается в формулу (7.5).

Замечание 1. В случае независимых событий в совокупности эта теорема распространяется на любое конечное число их, т. е. имеет место равенство

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Замечание 2. Если события A_1, A_2, ..., A_n независимы в совокупности, то и противоположные им события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ также независимы в совокупности.

Пример 7.27. Найдем вероятность одновременного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) — 0,7.

События A и B независимы, поэтому искомая вероятность $P(AB) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Пример 7.28. Вероятность выживания одного организма в течение 20 мин $P = 0{,}7$. В пробирке с благоприятными для существования этих организмов условиями находятся только что родившиеся два организма. Какова вероятность того, что через 20 мин они будут живы?

Пусть событие A — первый организм жив через 20 мин, событие B — второй организм жив через 20 мин. Будем считать, что между организмами нет внутривидовой конкуренции, т. е. события A и B независимы. Событие, что оба организма живы, есть событие AB. По теореме 7.3 получаем $P(AB) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$.

Пример 7.29. Пусть у нас перемешаны записи нейронной активности 10 клеток из одной области мозга (у пяти клеток зарегистрирована активность, характерная для клеток «внимания», у пяти — другой вид активности) и 20 из другой области (у 15 — активность типа клеток «внимания», у пяти — другого вида). Выясним, зависимы ли события A — «выбранная наугад запись сделана в первой области» и B —

«на выбранной наугад записи зарегистрирована активность, характерная для клеток “внимания”». Имеем

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3},\ P(AB)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

$P(AB) \neq P(A)P(B)$, следовательно, события A и B зависимы.

Теорема 7.4. *Если события $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий (т. е. вероятность суммы) вычисляется по формуле*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n).$$

Доказательство. Событие $\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n$ состоит в том, что не произошло ни одно из событий A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Оно противоположно событию, состоящему в том, что произошло хотя бы одно из событий A_i т. е. сумме событий $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Поэтому согласно формуле (7.2)

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n)=1,$$

откуда

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n).$$

Но с учетом замечаний 1 и 2

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n),$$

что и приводит к искомому равенству.

3. Теорема сложения вероятностей совместимых событий. *Вероятность суммы двух совместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения*:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{7.6}$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A, l — событию B и m — одновременно событиям A и B. Отсюда событию $A + B$ благоприятствуют $k + l - m$ элементарных событий. Тогда

$$P(A+B)=\frac{k+l-m}{n}=\frac{k}{n}+\frac{l}{n}-\frac{m}{n}=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Замечание. Если события A и B несовместимы, то их произведение AB есть невозможное событие и, следовательно, $P(AB) = 0$, т. е. формула (7.1) является частным случаем формулы (7.6).

Пример 7.30. В посевах пшеницы на делянке имеется 95 % здоровых растений. Выбирают два растения. Определить вероятность того, что среди них хотя бы одно окажется здоровым.

Введем обозначения для событий: A_1 — первое растение здоровое; A_2 — второе растение здоровое; $A_1 + A_2$ — хотя бы одно растение здоровое.

Так как события A_1 и A_2 совместимые, то согласно формуле (7.6)

$$P(A_1 + A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 0{,}95 +$$
$$+ 0{,}95 - 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9975 \approx 1.$$

4. Формула полной вероятности.

Теорема 7.5. *Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из n попарно несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) \qquad (7.7)$$

(*формула полной вероятности*).

Доказательство. Событие A может наступить лишь при условии наступления одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, т. е. $A = B_1A + B_2A + \ldots + B_nA$, причем ввиду несовместимости событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ события $B_1A, B_2A, \ldots, B_nA$ также несовместимы. Поэтому на основании теорем сложения и умножения вероятностей имеем

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \ldots + P(B_nA) =$$
$$= P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Пример 7.31. Для приема зачета преподаватель заготовил 50 задач: 20 задач по дифференциальному исчислению, 30 по интегральному исчислению. Для сдачи зачета студент должен решить первую же доставшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он умеет решить 18 задач по дифференциальному исчислению и 15 задач по интегральному исчислению?

Вероятность получить задачу по дифференциальному исчислению (событие B_1) равна $P(B_1) = 0{,}4$, по интегральному исчислению (событие B_2) — $P(B_2) = 0{,}6$. Если событие A означает, что задача решена, то $P_{B_1}(A) = 0{,}9$, $P_{B_2}(A) = 0{,}5$. Теперь по формуле (7.7) имеем

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}36 + 0{,}3 = 0{,}66.$$

Пример 7.32. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом находятся две белые мыши и одна серая, во втором — три белые и одна серая, в третьем — две белые и две серые мыши. Какова вероятность того, что из наугад выбранного ящика будет извлечена белая мышь?

Обозначим: B_1 — выбор первого ящика; B_2 — выбор второго ящика; B_3 — выбор третьего ящика; A — извлечение белой мыши.

Так как все ящики одинаковы, то $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$.

Если выбран первый ящик, то $P_{B_1}(A)=\frac{2}{3}$. Аналогично $P_{B_2}(A)=\frac{3}{4}$, $P_{B_3}(A)=\frac{1}{2}$.

Наконец, по формуле (7.7) получаем

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{23}{36}.$$

Пример 7.33. В санатории 30 % пациентов — мужчины (М) и 70 % — женщины (Ж). Сердечные болезни среди мужчин встречаются в два раза чаще, чем среди женщин. Какова вероятность того, что наугад выбранный пациент — сердечник?

Обозначив С — наличие сердечного заболевания, можем написать

$$P(\text{М}) = 0{,}3,\ P(\text{Ж}) = 0{,}7,\ P_{\text{М}}(\text{С})=\frac{2}{3},\ P_{\text{Ж}}(\text{С})=\frac{1}{3}.$$

Подставляя это в формулу полной вероятности (7.7), получим

$$P(C)=0{,}3\cdot\frac{2}{3}+0{,}7\cdot\frac{1}{3}\approx 0{,}2+0{,}23=0{,}43.$$

Задача (смог над городом). На город примерно 100 дней в году дует ветер с севера и 200 дней в году — с запада. Промышленные предприятия, расположенные на севере, производят выброс вредных веществ каждый третий день, а расположенные на западе — в последний день каждой недели. Как часто город подвергается воздействию вредных выбросов? Иными словами, какова вероятность того, что в наугад выбранный день город будет накрыт промышленным смогом?

Обозначив С — ветер с севера, З — ветер с запада и В — воздействие вредных выбросов на город, можем написать

$$P(\text{С})=\frac{100}{365}=\frac{20}{73},\ P(\text{З})=\frac{200}{365}=\frac{40}{73},\ P_{\text{С}}(\text{В})=\frac{1}{3},\ P_{\text{З}}(\text{В})=\frac{1}{7}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(\text{В})=P(\text{С})P_{\text{С}}(\text{В})+P(\text{З})P_{\text{З}}(\text{В})=\frac{20}{73}\cdot\frac{1}{3}+\frac{40}{73}\cdot\frac{1}{7}\approx 0{,}09+0{,}08=0{,}17.$$

Таким образом, примерно два месяца в году город накрыт смогом.

5. Формула Байеса. Пусть в условиях рассуждения, относящегося к формуле полной вероятности, произведено одно испытание, в результате которого произошло событие A. Спрашивается: как изменились (в связи с тем, что событие A уже произошло) величины $P(B_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$?

Найдем условную вероятность $P_A(B_k)$.

По теореме умножения вероятностей и формуле (7.4) (см. п. 2) имеем

$$P(AB_k) = P(A)P_A(B_k) = P(B_k)P_{B_k}(A).$$

Отсюда

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{P(A)}.$$

Наконец, используя формулу полной вероятности, находим

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P_{B_j}(A)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.8}$$

Формулы (7.8) называют *формулами Байеса*[1].

Пример 7.34. Большая популяция людей разбита на две группы одинаковой численности. Диета одной группы отличалась высоким содержанием ненасыщенных жиров, а диета контрольной группы была богата насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний составило в этих группах соответственно 31 и 48 %. Случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание. Какова вероятность того, что этот человек принадлежит к контрольной группе?

Введем обозначения для событий: A — случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание; B_1 — человек придерживался специальной диеты; B_2 — человек принадлежал к контрольной группе.

Имеем

$$P(B_1) = P(B_2) = 0{,}5, \; P_{B_1}(A) = 0{,}31, \; P_{B_2}(A) = 0{,}48.$$

Согласно формуле полной вероятности

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}31 + 0{,}5 \cdot 0{,}48 = 0{,}395,$$

и, наконец, в силу формулы (7.8) искомая вероятность

$$P_A(B_2) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}48}{0{,}395} = 0{,}61.$$

Пример 7.35. Известно, что 25 % мужчин и 5 % женщин — дальтоники. В группе 18 мальчиков и 22 девочки. Какова вероятность того, что наугад выбранный ребенок окажется мальчиком-дальтоником?

---

[1] Томас Байес, или Бейес (1702—1761) — английский математик.

Обозначим через М и Д события, состоящие в выборе соответственно мальчика и девочки, и через С — наличие у выбранного ребенка дальтонизма. Тогда по условию

$$P(\text{М}) = \frac{18}{40},\ P(\text{Д}) = \frac{22}{40},\ P_{\text{М}}(\text{С}) = 0{,}25,\ P_{\text{Д}}(\text{С}) = 0{,}05.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(\text{С}) = P(\text{М})P_{\text{М}}(\text{С}) + P(\text{Д})P_{\text{Д}}(\text{С}) = \frac{18}{40}\cdot 0{,}25 + \frac{22}{40}\cdot 0{,}05 =$$

$$= \frac{9}{80} + \frac{11}{400} = \frac{56}{400} = \frac{14}{100} = 0{,}14$$

и по формуле Байеса

$$P_{\text{С}}(\text{М}) = \frac{P(\text{М})P_{\text{М}}(\text{С})}{P(\text{С})} = \frac{18}{40}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{100}{14} = \frac{45}{56}.$$

7.3. Случайные события в физике, химии, биологии и кодировании

1. Цепь приборов. Рассмотрим участок электрической цепи, содержащий два последовательно соединенных прибора: A и B (рис. 7.2).

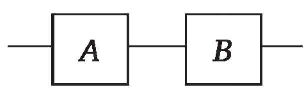


Рис. 7.2

Предположим, что приборы работают независимо один от другого и каждый из них может либо пропустить ток (прибор исправен), либо не пропустить (прибор неисправен). Обозначим $P(A)$ и $P(B)$ вероятности исправности приборов A и B соответственно. Для того чтобы по участку цепи прошел ток, нужно, чтобы и прибор A, и прибор B были исправны, т. е. нужно совмещение исправности приборов. Так как приборы работают независимо, то по формуле умножения вероятностей вероятность прохождения тока выразится произведением

$$P = P(A)P(B). \tag{7.9}$$

Совершенно аналогично для трех последовательно соединенных и независимо работающих приборов A, B, C (рис. 7.3) вероятность прохождения тока по участку цепи выразится произведением

$$P = P(A)P(B)P(C),$$

а для n приборов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произведением $P = P(A_1)P(A_2)\cdot \ldots \times$ $\times P(A_n)$.

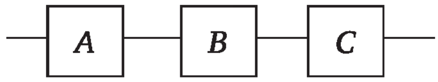


Рис. 7.3

В частности, если приборы однотипны, точнее говоря, если вероятности их исправности равны $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$, то вероятность прохождения тока $P = p^n$.

Можно поставить в некотором смысле обратную задачу. Предположим, что вероятность исправности первого прибора $P(A)$ известна. После испытаний установили вероятность прохождения тока по всему участку P. Тогда из формулы (7.9) можно найти вероятность исправности второго прибора $P(B)$. Например, если $P(A) = 0{,}9$; $P = 0{,}72$, то в силу формулы (7.9) $P(B) = P/P(A) = 0{,}72/0{,}9 = 0{,}8$.

2. Цепь реакций. Цепной называют химическую реакцию, которая представляет собой цепочку одинаковых звеньев. Звеном может быть одна, две, реже — несколько стадий. Например, звено

$$\dot{\mathrm{R}} + \mathrm{O_2} \to \mathrm{R\dot{O}_2},\quad \mathrm{R\dot{O}_2} + \mathrm{RH} \to \mathrm{ROOH} + \dot{\mathrm{R}},$$

начавшись с появлением свободного радикала углеводорода $\dot{\mathrm{R}}$, во второй стадии снова выделяет этот радикал и тем самым создает возможность повторения такого же звена.

На некотором этапе цепная реакция может оборваться. Причиной обрыва может служить захват свободного радикала стенкой сосуда, действие ингибитора и т. п. Таким образом, на каждом этапе существует некоторая вероятность p продолжения цепи и вероятность $q = 1 - p$ обрыва цепи.

Какова вероятность того, что цепная реакция содержит n звеньев? Для осуществления такой реакции нужно, чтобы n раз произошло продолжение реакции и после этого произошел обрыв. Так как процессы продолжения и обрыва независимы, то по формуле умножения вероятностей для $P(n)$ — вероятности появления цепи длины n — можем написать $P(n) = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{n\ \text{раз}} \cdot q = p^n q = p^n(1-p)$.

3. Молекула полимера. Процесс полимеризации состоит в том, что к звену-мономеру присоединяется такой же мономер, к этому звену — еще один такой же мономер и т. д. Присоединение происходит с некоторой вероятностью p и, следовательно, не происходит с вероятностью $q = 1 - p$. Так как каждое следующее присоединение происходит независимо от предыдущих, то вероятность образования молекулы, содержащей n мономеров, как и в предыдущем примере, вычисляется по формуле $P(n) = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{n\ \text{раз}} \cdot q = p^n q = p^n(1-p)$.

4. Параллельное соединение приборов. Рассмотрим участок цепи, содержащий два прибора A и B, соединенных параллельно (рис. 7.4). Предположим, что приборы работают независимо и $P(A)$ — вероятность прохождения сигнала по прибору A, а $P(B)$ — по прибору B. Например, сигнал проходит по прибору, если прибор исправлен, и не проходит — в противном случае. Очевидно, сигнал пройдет, если будет исправен хотя бы один прибор. Таким образом, вероятность прохождения сигнала по участку цепи — это вероятность $P(A + B)$, где сумма $A + B$ означает исправную работу хотя бы одного из приборов. Так как приборы работают независимо, то эту вероятность можно вычислить по формуле

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B). \tag{7.10}$$

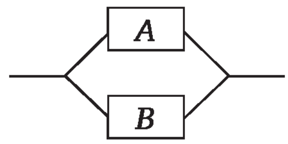


Рис. 7.4

Например, если $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}9$, то

$$P(A + B) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}98. \tag{7.11}$$

Можно поставить и обратную задачу. Предположим, что один из приборов — эталонный и вероятность его безотказной работы (т. е. вероятность прохождения по нему сигнала) известна. После испытаний установили вероятность прохождения сигнала по всему участку. Тогда из формулы (7.10) можно найти вероятность безотказной работы второго прибора. Например, если $P(A) = 0{,}8$, $P(A + B) = 0{,}95$, то, подставив это в формулу (7.10), будем иметь $0{,}95 = 0{,}8 + P(B) - 0{,}8P(B)$. Отсюда $P(B) = \dfrac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}75$.

Из вычислений (7.11) ясно, что параллельное соединение увеличило вероятность прохождения сигнала. Второй прибор подстраховывает, дублирует первый. Можно ожидать, что параллельное соединение трех и более приборов еще более увеличит эту вероятность.

Если участок цепи состоит из n независимо работающих приборов, соединенных параллельно (рис. 7.5), и A_i означает, что сигнал прошел по i-му прибору, т. е. что i-й прибор исправен, то вероятность прохождения сигнала по участку — это вероятность исправной работы хотя бы одного прибора, т. е. вероятность суммы $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Следовательно (см. теорему 7.4),

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n). \tag{7.12}$$

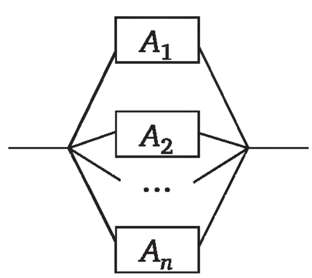


Рис. 7.5

Так как $P(\overline{A}_i)=1-P(A_i)<1$, то при большом n произведение $P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n)$ достаточно мало и, следовательно, вероятность $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$ близка к единице.

В частности, если все вероятности равны, $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$, то $P(\overline{A}_i)=1-P(A_1)=1-p=q$ и из формулы (7.12) получаем

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - q^n. \tag{7.13}$$

Из формулы (7.13) очевидно, что даже при малой вероятности p, т. е. при q, близкой к единице, выбирая достаточно большое n, можно сделать вероятность $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$ достаточно близкой к единице.

Вместо схемы с параллельно соединенными приборами можно рассмотреть систему химических реакций и т. п.

5. Последовательные и параллельные соединения приборов. В предыдущих пунктах мы рассмотрели порознь последовательные и параллельные соединения приборов и установили, как вычисляется вероятность прохождения сигнала по участку схемы в том и другом случае. На практике приходится иметь дело с различными сочетаниями соединений обоих типов. Рассмотрим два характерных примера.

Предположим, что сигнал проходит по участку схемы, состоящему из двух параллельных блоков A и B, первый из которых состоит из одного прибора A, а второй содержит два последовательно соединенных прибора B_1 и B_2 (рис. 7.6, *а*). Пусть возможность отказа одного из приборов не зависит от работы остальных. Сигнал проходит, если хотя бы один из блоков исправен, а каждый из блоков выходит из строя, если хотя бы один из его приборов отказал.

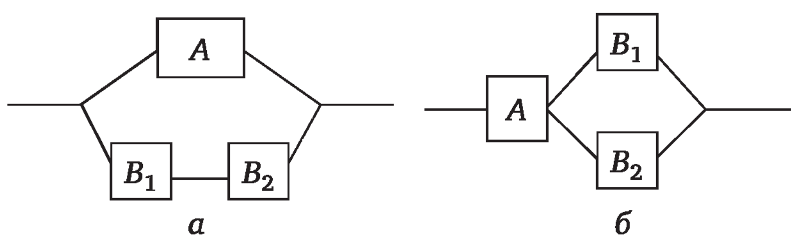


Рис. 7.6

Обозначим $P(A)$, $P(B_1)$ и $P(B_2)$ — вероятности безотказной работы соответствующих приборов; $P(B)$ — вероятность исправности блока B (вероятность исправности блока A, очевидно, равна $P(A)$); $P(A + B)$ — вероятность прохождения сигнала по цепи. Тогда, используя формулы сложения и умножения, можем написать

$$\begin{aligned} P(A+B)&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)= \\ &=P(A)+P(B_1)P(B_2)-P(A)P(B_1)P(B_2). \end{aligned} \tag{7.14}$$

На практике чаще задается не вероятность безотказной работы, а вероятность отказа, т. е. $P(\overline{A})$, $P(\overline{B}_1)$, $P(\overline{B}_2)$ и т. п. Так как отказ и безотказная работа — взаимно противоположные события, то $P(A)=1-P(\overline{A})$;

$P(B_1)=1-P(\bar{B}_1)$, $P(B_2)=1-P(\bar{B}_2)$ и мы снова можем применить формулу (7.14).

Например, если $P(\bar{A}) = 0{,}1$; $P(\bar{B}_1) = 0{,}07$; $P(\bar{B}_2) = 0{,}08$, то $P(A) = 0{,}9$; $P(B_1) = 0{,}93$; $P(B_2) = 0{,}92$. Поэтому

$$P(A + B) = 0{,}9 + 0{,}93 \cdot 0{,}92 - 0{,}9 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}92 = 0{,}986.$$

Теперь предположим, что участок схемы состоит из двух последовательно соединенных блоков A и B, один из которых состоит из одного прибора A, а другой содержит два параллельно соединенных прибора B_1 и B_2 (рис. 7.6, *б*). Пусть по-прежнему приборы работают независимо. Блок B выходит из строя, если отказали оба его прибора. Сигнал проходит, если оба блока A и B исправны. Обозначив $P(AB)$ вероятность прохождения сигнала по цепи и сохранив остальные обозначения для вероятностей, можем написать $P(AB) = P(A)P(B) = P(A)[P(B_1) + P(B_2) - P(B_1)P(B_2)]$. В частности, для данных предыдущего примера

$$P(AB) = 0{,}9 \cdot (0{,}93 + 0{,}92 - 0{,}93 \cdot 0{,}92) = 0{,}895.$$

Аналогично рассматриваются случаи, когда блок A состоит из двух или большего числа приборов, соединенных параллельно или последовательно, когда блоков более чем два и т. п.

Разумеется, и в этом случае вместо приборов могут быть рассмотрены химические реакции.

6. Законы Менделя. Известно, что в простейших случаях передача некоторого признака по наследству зависит от определенного гена. В половых клетках гены, отвечающие за некоторый признак, находятся парами. Например, в клетках гороха имеется пара генов, отвечающих за цвет цветков потомства — красный или белый. Эти гены могут находиться в двух состояниях — доминантном (оно обозначается буквой A) и рецессивном (оно обозначается буквой a). Поэтому пары генов могут быть такими:

$$AA,\ Aa \text{ (или } aA),\ aa.$$

Выписанные возможности определяют генотипы данной особи: первый — доминантный, второй — смешанный, третий — рецессивный. Оказывается, что наследование признака зависит от генотипа особи. Например, для гороха красный цвет цветков — доминантный признак, а белый — рецессивный.

Из опытов известен I *закон Менделя*: особи доминантного и смешанного генотипов в фенотипе[1] обладают доминантным признаком, и только особи рецессивного генотипа в фенотипе обладают рецессивным признаком.

Согласно этому закону для гороха особи доминантного и смешанного генотипов имеют красный цвет цветков и только особи с рецессивным генотипом имеют цвет цветков белый.

[1] Фенотип — внешнее проявление признака.

Пусть имеется популяция чистых линий с генотипами *AA* и *aa* — поколение F_0 (родительские формы).

После скрещивания особей с генотипом *AA* с особями с генотипом *aa* поколения F_0 образуется поколение гибридов с генотипом *Aa*. Это поколение в генетике принято обозначать F_1. В поколении F_1 других генотипов, кроме генотипа *Aa*, нет.

При случайном скрещивании особей поколения F_1 образуется поколение F_2, в котором одинаково часто встречаются четыре генотипа:

$$AA, Aa, aA, aa.$$

Из опытов известен II *закон Менделя*: в поколении F_2 происходит расщепление фенотипов в отношении 3 : 1 (3 части составляют особи с доминантным признаком в фенотипе, 1 часть приходится на особи с рецессивным признаком в фенотипе).

Из этого закона следует, что для поколения F_2 вероятность того, что в фенотипе особи проявляется доминантный признак, равна $\frac{3}{4}$, а вероятность того, что в фенотипе особи проявится рецессивный признак, равна $\frac{1}{4}$.

7. Закон Харди. Пусть в популяции встречаются три генотипа: *AA*, *Aa*, *aa*. Доля особей генотипа *AA* равна u, доля особей генотипа *Aa* равна $2v$ и доля особей генотипа *aa* равна w. Кратко будем говорить о структуре популяции и записывать ее так:

$$\begin{matrix} AA & Aa & aa \\ u & 2v & w \end{matrix} \tag{7.15}$$

Под этим мы понимаем следующее: если популяция содержит N особей, то особей генотипа *AA* в ней uN, особей смешанного генотипа *Aa* в ней $2vN$ и особей рецессивного генотипа *aa* в ней wN. При этом, так как $N + 2vN + wN = N$, то

$$u + 2v + w = 1. \tag{7.16}$$

Подсчитаем число генов *A* в популяции. Все особи доминантного генотипа имеют $2uN$ генов *A* (у каждой особи два гена *A*, и всех особей uN), особи смешанного генотипа имеют $2vN$ генов *A* (у каждой особи один ген *A*, и всех особей $2vN$), у особей рецессивного генотипа генов *A* нет. Следовательно, в популяции (7.15) число доминантных генов *A* равно

$$2uN + 2vN = 2N(u + v),$$

или, короче, $2Np$, где

$$p = u + v. \tag{7.17}$$

Число p имеет простой вероятностный смысл — это есть $P(A)$, т. е. вероятность того, что выбранный наудачу ген доминантен. Действительно, доминантных генов $2Np$, и всех генов $2N$ (у каждой особи популяции два гена). Следовательно,

$$P(A)=\frac{2Np}{2N}=p. \tag{7.18}$$

Аналогично подсчитывается, что число всех рецессивных генов a в популяции (7.15) равно $2Nq$, где

$$q=w+v. \tag{7.19}$$

При этом число q имеет аналогичный вероятностный смысл:

$$P(a)=\frac{2Nq}{2N}=q. \tag{7.20}$$

Из вероятностного смысла чисел p и q, а также из формул (7.16), (7.17) и (7.19) следует, что

$$p+q=1. \tag{7.21}$$

Заметим, что числа u, $2v$ и w в популяции (7.15) тоже имеют простой вероятностный смысл (подсчет аналогичен проведенному выше подсчету для доминантных генов):

$$P(AA)=\frac{uN}{N}=u; P(Aa)=\frac{2vN}{N}=2v;\ P(aa)=\frac{wN}{N}=w \tag{7.22}$$

($P(AA)$ — вероятность того, что выбранная наудачу особь имеет генотип AA, аналогично $P(Aa)$ и $P(aa)$).

Теперь посмотрим, какова будет структура потомства. Пусть потомство имеет структуру

$$\begin{matrix} AA & Aa & aa \\ u_1 & 2v_1 & w_1 \end{matrix} \tag{7.23}$$

(это понимается так же, как и (7.15)). Подсчитаем u_1, $2v_1$ и w_1. Числа u_1, $2v_1$ и w_1 есть вероятности того, что взятый наудачу потомок имеет соответственно генотип AA, Aa и aa (см. соответственно формулы (7.22)). Так как скрещивания происходят независимым образом, то вероятность u_1 может рассматриваться как вероятность следующего события: выбрали наудачу и независимым образом из всего запаса два гена A. Так как выбрать каждый ген A можно с вероятностью p (формула (7.18)), то в силу теоремы умножения вероятностей независимых событий (см. параграф 7.2, п. 2) интересующая нас вероятность равна p^2, т. е.

$$u_1=p^2. \tag{7.24}$$

Аналогично с использованием формулы (7.20) получаем

$$w_1 = q^2. \tag{7.25}$$

Вероятность генотипа *Aa* в популяции потомков складывается из двух возможностей — либо ген *A* получен от отца, а ген *a* от матери, либо ген *A* получен от матери, а ген *a* от отца — соответствующие вероятности есть pq и qp. Следовательно, вероятность генотипа *Aa* в популяции потомков равна $2pq$, т. е. $2v_1 = 2pq$. Отсюда

$$v_1 = pq. \tag{7.26}$$

Следовательно, потомство (7.23) имеет следующую структуру:

$$\begin{matrix} AA & Aa & aa \\ p^2 & 2pq & q^2 \end{matrix} \tag{7.27}$$

Самое замечательное состоит в том, что если для потомства взять $u_1 + v_1$ и $w_1 + v_1$, как это делалось для родителей в формулах (7.17) и (7.19), то получим те же самые числа p и q. Действительно, согласно формулам (7.25)—(7.27) и (7.21) имеем

$$u_1 + v_1 = p^2 + pq = p(p + q) = p;$$

$$w_1 + v_1 = q^2 + pq = q(p + q) = q.$$

Так как структура (7.27) потомства вычислена только с использованием этих сумм, то потомки популяции со структурой (7.27) будут иметь ту же структуру. При этом говорят, что структура (7.27) стационарна, т. е. от поколения к поколению не меняется.

Этот замечательный факт, что со второго поколения устанавливается стационарная структура популяции, является непосредственным обобщением II закона Менделя и называется *законом Харди.*

На практике возможно отклонение, однако для больших популяций закон Харди остается в силе.

Для гороха вероятность получения белой особи равна q^2 (рецессивный признак), вероятность получения красной особи равна $1 - q^2$ (как для противоположного события) и отношение числа красных и белых особей равно $(1 - q^2) : q^2$.

Для описанного в п. 6 случая $q = \frac{1}{2}$, и мы опять получаем 3 : 1 (см. II закон Менделя).

8. Код Фано. Все хорошо знают, что коды, или шифры, используют для передачи секретной информации. Менее известно, однако, что в наше время коды приобрели и иное значение, быть может, более обыденное, но зато куда более важное и широкое. В этой их новой роли коды и кодирование — прежде всего средство для экономной, удобной и практически безошибочной передачи сообщений. Новые применения кодов сложились в результате бурного развития различных средств связи, неизмеримо возросшего объема передаваемой информации. Ниже остановимся на одном из кодов — коде Фано.

Представим себе, что одни сообщения приходится передавать довольно часто, другие — редко, третьи — совсем в исключительных случаях. Понятно, что первые лучше закодировать тогда короткими словами, оставив более длинные слова для кодирования сообщений, появляющихся реже. В результате кодовый текст станет в среднем короче и на его передачу потребуется меньше времени.

Впервые эта простая идея была реализована американским инженером Морзе в предложенном им коде. Рассказывают, что, создавая свой код, Морзе отправился в ближайшую типографию и подсчитал число литер в наборных кассах. Буквам и знакам, для которых литер в этих кассах было припасено больше, он сопоставил более короткие кодовые обозначения (ведь эти буквы встречаются чаще). Так, например, в русском варианте азбуки Морзе буква «е» передается одной точкой, а редко встречающаяся буква «ц» — набором из четырех символов.

Мерой частоты появления того или иного события является его вероятность. Вероятность некоторого события (сообщения) можно представлять себе как долю тех случаев, в которых оно появляется, от общего числа появившихся событий (сообщений).

Так, если заданы четыре сообщения A_1, A_2, A_3, A_4 с вероятностями $P(A_1) = 1/2$, $P(A_2) = 1/4$, $P(A_3) = P(A_4) = 1/8$, то это означает, что среди, например, 1000 переданных сообщений около 500 раз появляется сообщение A_1, около 250 — сообщение A_2 и примерно по 125 раз — каждое из сообщений A_3 и A_4.

Разобьем сообщения на две равновероятные группы: в первую попадает сообщение A_1, во вторую — сообщения A_2, A_3, A_4. Сопоставим первой группе символ 0, второй — символ 1 (табл. 7.1; во второй графе таблицы указаны вероятности сообщений).

Таблица 7.1

<table>
<tr><td>A_1</td><td>1/2</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>1/4</td><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>1/8</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>A_4</td><td>1/8</td><td>1</td></tr>
</table>

Символ 0 соответствует ответу «да» на вопрос «принадлежит ли сообщение первой группе?», а 1 — ответу «нет». Продолжая в том же духе, разобьем множество сообщений A_2, A_3, A_4 снова на две равновероятные группы. Первой, состоящей из одного сообщения A_2, сопоставим символ 0, а второй, в которую входят сообщения A_3 и A_4, — символ 1. Наконец, оставшуюся группу из двух сообщений разобьем на две группы, содер-

жащие соответственно сообщения A_3 и A_4, сопоставив первой из них 0, а второй — символ 1. Сообщение A_1 образовало самостоятельную группу на первом шаге, ему был сопоставлен символ 0, слово 0 и будем считать кодом этого сообщения. Сообщение A_2 образовало самостоятельную группу за два шага, на первом шаге ему сопоставлялся символ 1, на втором — 0; поэтому будем кодировать сообщение A_2 словом 10. Аналогично для A_3 и A_4 выбираем соответственно коды 110 и 111. В итоге получается следующая кодовая таблица (табл. 7.2).

Таблица 7.2

A_1	A_2	A_3	A_4
0	10	110	111

Указанный здесь способ кодирования был предложен американским математиком Фано.

Алгоритм кодирования Фано имеет очень простую графическую иллюстрацию в виде множества точек (вершин) на плоскости, соединенных отрезками (ребрами) по определенному правилу, т. е. в виде *графа* (см. параграф 4.1). Граф для кода Фано строится следующим образом (рис. 7.7). Из нижней (корневой) вершины графа исходят два ребра, одно из которых помечено символом 0, другое — символом 1. Эти два ребра соответствуют разбиению множества сообщений на две равновероятные группы, одной из которых сопоставляется символ 0, а другой — символ 1. Ребра, исходящие из вершин следующего «этажа», соответствуют разбиению получившихся групп снова на равновероятные подгруппы и т. д. Построение графа заканчивается, когда множество сообщений будет разбито на одноэлементные подмножества. Каждая концевая вершина графа, т. е. вершина, из которой уже не исходят ребра, соответствует некоторому кодовому слову. Чтобы указать это слово, надо пройти путь от корневой вершины до соответствующей концевой, выписывая в порядке следования по этому пути символы проходимых ребер. Например, вершине a_3 на рис. 7.7 соответствует слово 100, а вершине a_6 — слово 1110 (вершины, соответствующие кодовым словам, помечены на рисунке кружками).

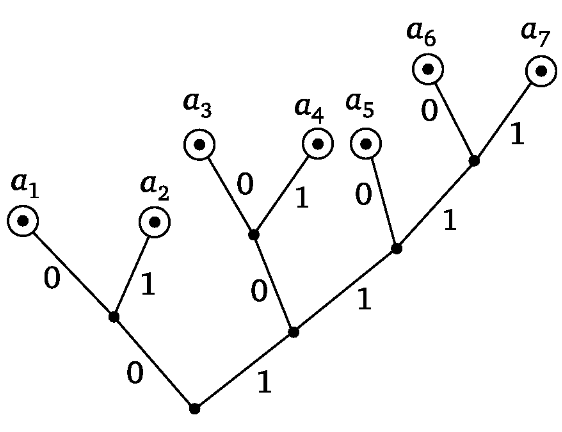


Рис. 7.7

Граф для рассмотренного выше примера представлен на рис. 7.8.

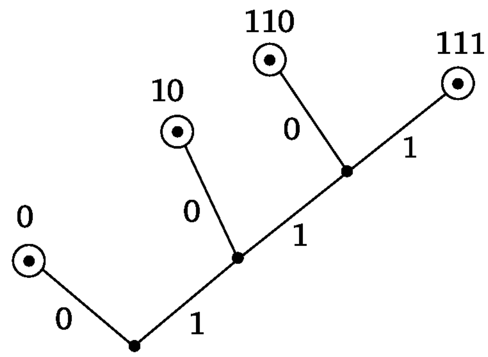


Рис. 7.8

Получающиеся для кодов Фано графы всегда обладают тем свойством, что они не содержат замкнутых контуров. Такие графы (см. параграф 4.3) называют *деревьями* (будем называть их, учитывая происхождение, *кодовыми деревьями*). Кодовые деревья можно строить не только для кодов Фано, но и для других кодов. Независимо от алгоритма кодирования каждому дереву соответствует определенное множество кодовых слов. Например, для кодового дерева, изображенного на рис. 7.7, имеем:

$$a_1 = 00,\ a_2 = 01,\ a_3 = 100,\ a_4 = 101,\ a_5 = 110,\ a_6 = 1110,\ a_7 = 1111.$$

7.4. Дискретные случайные величины

1. Понятие «случайные величины».

Определение. *Случайной величиной* называют переменную величину, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений.

Примеры:

1) число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, есть случайная величина, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

2) прирост веса домашнего животного за месяц есть случайная величина, которая может принять значение из некоторого числового промежутка;

3) число родившихся мальчиков среди пяти новорожденных есть случайная величина, которая может принять значения 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Случайные величины будем обозначать прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1, x_2, x_3.

Определение. Случайная величина, принимающая конечное, или счетное множество значений[1], называется *дискретной* случайной величиной.

Ниже рассматриваются дискретные случайные величины, множество допустимых значений которых конечно.

Случайные величины из примеров 1) и 3) дискретные.

Определение. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется *непрерывной* случайной величиной.

Случайная величина из примера 2) является непрерывной.

2. Законы распределения дискретных случайных величин. Рассмотрим дискретную случайную величину X с конечным множеством возможных значений. Величина X считается заданной, если перечислены все ее возможные значения, а также вероятности, с которыми величина X может принять эти значения. Указанный перечень возможных значений и их вероятностей называют *законом распределения* дискретной случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан с помощью таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n
p	p_1	p_2	p_3	…	p_{n-1}	p_n

В верхней строке выписывают все возможные значения x_1, x_2, ..., x_n величины X, в нижней строке выписываются вероятности p_1, p_2, ..., p_n значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Читается таблица следующим образом: случайная величина X может принять значение x_i с вероятностью p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Так как в результате испытания величина X всегда примет одно из значений x_1, x_2, ..., x_n, то

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Пример 7.36. В денежной лотерее разыгрывается один выигрыш в 100 000 руб., 10 выигрышей по 10 000 руб. и 100 выигрышей по 100 руб. при общем числе билетов 10 000. Найти закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета.

Здесь возможные значения для X есть: $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 10\,000$, $x_4 = 100\,000$. Вероятности их будут: $p_2 = 0{,}01$, $p_3 = 0{,}001$, $p_4 = 0{,}0001$, $p_1 = 1 - 0{,}01 - 0{,}001 - 0{,}0001 = 0{,}9889$. Следовательно, закон распределения выигрыша X может быть задан таблицей:

X	0	100	10 000	100 000
p	0,9889	0,01	0,001	0,0001

[1] Множество называется счетным, если его элементы можно пронумеровать натуральными числами.

7.5. Математическое ожидание дискретной случайной величины

1. Понятие математического ожидания. Закон распределения полностью задает дискретную случайную величину. Однако часто встречаются случаи, когда закон распределения случайной величины неизвестен. В таких случаях случайную величину изучают по ее числовым характеристикам. Одной из таких характеристик является математическое ожидание.

Пусть некоторая дискретная случайная величина X с конечным числом своих значений задана законом распределения

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Определение. *Математическим ожиданием $M(X)$* дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений величины X на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n. \qquad (7.28)$$

Пример 7.37. Найти математическое ожидание выигрыша X в примере 7.36. Используя полученную там таблицу, имеем

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}9889 + 100 \cdot 0{,}01 + 10\,000 \cdot 0{,}001 +$$
$$+ 100\,000 \cdot 0{,}0001 = 1 + 10 + 20 = 21 \text{ (руб.)}.$$

Очевидно, $M(X) = 21$ руб. есть справедливая цена одного лотерейного билета.

Теорема 7.6. *Математическое ожидание дискретной случайной величины X приближенно равно среднему арифметическому всех ее значений (при достаточно большом числе испытаний).*

Доказательство. Предположим, что произведено n испытаний, в которых дискретная случайная величина X приняла значения $x_1, \ldots, x_k$ соответственно $m_1, \ldots, m_k$ раз, так что $m_1 + \ldots + m_k = n$. Тогда среднее арифметическое всех значений, принятых величиной X, выразится равенством

$$x_{\text{ср}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k}{n},$$

или

$$x_{\text{ср}} = x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + \ldots + x_k\frac{m_k}{n}.$$

Так как коэффициент $\frac{m_i}{n}$ является относительной частотой события «величина X приняла значение x_i» ($i = 1, 2, \ldots, k$), то

$$x_{ср} = x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \ldots + x_k p_k^*.$$

Из статистического определения вероятности следует, что при достаточно большом числе испытаний $p_i^* \approx p_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$). Поэтому

$$x_{ср} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k, \text{ или } x_{ср} \approx M(X).$$

Примечание 7.1. В связи с теоремой 7.6 математическое ожидание случайной величины называют также ее *средним значением*, или *ожидаемым значением.*

2. Свойства математического ожидания дискретной случайной величины.

1. *Математическое ожидание постоянной величины C равно этой величине.*

Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение C с вероятностью $p = 1$. Поэтому $M(C) = C \cdot 1 = C$.

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е.* $M(CX) = CM(X)$.

Используя соотношение (7.28), имеем

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots +$$
$$+ Cx_np_n = C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n) = CM(X).$$

Следующие два свойства (3 и 4) примем без доказательства.

3. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий*:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Определение. Случайные величины X и Y называют *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое возможное значение приняла другая величина.

Примером двух независимых величин могут служить суммы выигрышей по каждому из двух билетов по двум различным денежно-вещевым лотереям. Здесь ставший известным размер выигрыша по билету одной лотереи не влияет на ожидаемый размер выигрыша и соответствующую ему вероятность по билету другой лотереи.

Несколько случайных величин называют независимыми, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.

4. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Следствием свойств 2 и 3 является свойство 5.

5. *Математическое ожидание разности двух случайных величин X и Y равно разности их математических ожиданий*:

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y).$$

Примечание 7.2. Свойства 3 и 4 имеют место и для любого конечного числа случайных величин.

Примечание 7.3. Если множество возможных значений дискретной случайной величины X бесконечно, то математическое ожидание $M(X)$ определяется суммой числового ряда $M(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ при условии, что этот ряд абсолютно сходится (в противном случае говорят, что математическое ожидание $M(X)$ не существует). Перечисленные свойства математического ожидания остаются в силе (см. [3]) и для таких случайных величин.

Пример 7.38. Найти математическое ожидание случайной величины $Z=X+2Y$, если известны математические ожидания случайных величин X и Y: $M(X)=5$, $M(Y)=3$.

Используя свойства 3 и 2 математического ожидания, получаем

$$M(Z)=M(X+2Y)=M(X)+M(2Y)=M(X)+2M(Y)=5+2\cdot 3=11.$$

Пример 7.39. Независимые случайные величины заданы законами распределения

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Найти математическое ожидание случайной величины XY. Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

$$M(X)=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}8=1{,}8.$$

$$M(Y)=0{,}5\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}7=0{,}15+0{,}7=0{,}85.$$

Случайные величины X и Y независимы, поэтому искомое математическое ожидание

$$M(XY)=M(X)M(Y)=1{,}8\cdot 0{,}85=1{,}53.$$

7.6. Дисперсия дискретной случайной величины

1. Понятие дисперсии. Математическое ожидание не дает полной характеристики закона распределения случайной величины. Покажем это на примере. Пусть заданы две дискретные случайные величины X и Y своими законами распределения:

X	–2	0	2
p	0,4	0,2	0,4

Y	–100	0	100
p	0,3	0,4	0,3

Несмотря на то что математические ожидания величин X и Y одинаковы: $M(X) = M(Y) = 0$, возможные значения величин X и Y «разбросаны» (или «рассеяны») около своих математических ожиданий по-разному: возможные значения величины X расположены гораздо ближе к своему математическому ожиданию, чем значения величины Y.

Укажем еще на один пример. При одинаковой средней величине годовых осадков одна местность может быть засушливой и неблагоприятной для сельскохозяйственных работ (нет дождей весной и летом), а другая — благоприятной для ведения сельского хозяйства.

Из сказанного вытекает необходимость введения новой числовой характеристики случайной величины, по которой можно судить о «рассеянии» возможных значений этой случайной величины.

Пусть задана дискретная случайная величина X:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Определение. *Отклонением* случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$ (или просто отклонением случайной величины X) называют случайную величину $X - M(X)$.

Видно, что, для того чтобы отклонение случайной величины X приняло значение $x_1 - M(X)$, достаточно, чтобы случайная величина X приняла значение x_1. Вероятность же этого события равна p_1; следовательно, и вероятность того, что отклонение случайной величины X примет значение $x_1 - M(X)$, также равна p_1. Аналогично обстоит дело и для остальных возможных значений отклонения случайной величины X. Используя это, запишем закон распределения отклонения случайной величины X:

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	...	$x_n - M(X)$
p	p_1	p_2	...	p_n

Вычислим теперь математическое ожидание отклонения $X - M(X)$. Пользуясь свойствами 5 и 1 (см. параграф 7.5, п. 2), получаем

$$M[X - M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.7. *Математическое ожидание отклонения $X - M(X)$ равно нулю*:

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Из теоремы ясно, что с помощью отклонения $X - M(X)$ не удается определить среднее отклонение возможных значений величины X от ее математического ожидания, т. е. степень рассеяния величины X.

Это объясняется взаимным погашением положительных и отрицательных возможных значений отклонения. Однако можно освободиться от этого недостатка, если рассматривать квадрат отклонения случайной величины X.

Запишем закон распределения случайной величины $[X - M(X)]^2$ (рассуждения те же, что и в случае случайной величины $X - M(X)$).

$[X - M(X)]^2$	$[x_1 - M(X)]^2$	$[x_2 - M(X)]^2$	...	$[x_n - M(X)]^2$
p	p_1	p_2	...	p_n

Определение. *Дисперсией* $D(X)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2].$$

Из закона распределения величины $[X - M(X)]^2$ следует, что

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n.$$

2. Свойства дисперсии дискретной случайной величины.

1. *Дисперсия дискретной случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата величины X и квадратом ее математического ожидания*:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Действительно, используя свойства математического ожидания, имеем

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = M(X^2) -$$
$$- 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

С помощью этого свойства и свойств математического ожидания устанавливаются следующие свойства.

2. *Дисперсия постоянной величины С равна нулю.*

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат*:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

4. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин*:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Это свойство распространяется и на случай любого конечного числа слагаемых.

Следствием свойств 3 и 4 является свойство 5.

5. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий:*

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Пример 7.40. Дисперсия случайной величины X равна 3. Найти дисперсию следующих величин: а) $-3X$; б) $4X+3$.

Согласно свойствам 2—4 дисперсии имеем:

а) $D(-3X)=9D(X)=9-3=27$;

б) $D(4X+3)=D(4X)+D(3)=16D(X)+0=16\cdot 3=48$.

Примечание 7.4. Если множество возможных значений дискретной случайной величины X бесконечно, то ее дисперсия определяется суммой сходящегося числового ряда $D(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}[x_k-M(X)]^2 p_k$.

3. Среднее квадратическое отклонение.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* $\sigma(X)$ случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Введение среднего квадратического отклонения объясняется тем, что дисперсия измеряется в квадратных единицах относительно размерности самой случайной величины. Например, если возможные значения некоторой случайной величины измеряются в метрах, то ее дисперсия измеряется в квадратных метрах. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений в той же размерности, что и сама случайная величина, используется среднее квадратическое отклонение.

Пример 7.41. Случайная величина X — число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Определить $\sigma(X)$. Имеем

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5;$$

$$D(X)=(1-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(2-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(3-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+$$
$$+(4-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(5-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(6-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{35}{12};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{12}}\approx 1{,}71.$$

Здесь для облегчения вычислений можно использовать калькулятор. То же следует иметь в виду и в ряде других примеров этой главы.

4. Понятие о моментах распределения.

Определение. *Начальным моментом порядка k* случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины X^k, где k — натуральное число:

$$\nu_k=M(x^k).$$

Следовательно, если X имеет распределение

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

то

$$\nu_k = x_1^k p_1 + x_2^k p_2 + \ldots + x_n^k p_n.$$

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины X можно выразить через начальные моменты порядков 1 и 2: $M(X) = \nu_1$,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \nu_2 - \nu_1^2. \tag{7.29}$$

Определение. *Центральным моментом порядка k* случайной величины X называется математическое ожидание величины $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k].$$

Из определения центрального момента, теоремы 7.7 и определения дисперсии следует, что

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0,$$

$$\mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D(X). \tag{7.30}$$

Сравнивая соотношения (7.29) и (7.30), получаем

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2.$$

Пример 7.42. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	3
p	0,4	0,6

Найти начальные моменты первого, второго порядков и центральный момент второго порядка. Имеем

$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}6 = 2{,}2$;
$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}6 = 5{,}8$;
$\mu_2 = 5{,}8 - 2{,}2^2 = 5{,}8 - 4{,}84 = 0{,}96$.

7.7. Основные законы распределения дискретных случайных величин

1. Биномиальное распределение. Пусть производится n испытаний, причем вероятность появления события A в каждом испытании равна p и не зависит от исхода других испытаний (независимые испытания). Так как вероятность наступления события A в одном испытании равна p, то вероятность его ненаступления равна $q = 1 - p$.

Найдем вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит m раз ($m \le n$).

Пусть событие A наступило в первых m испытаниях m раз и не наступило во всех последующих испытаниях. Это сложное событие можно записать в виде произведения

$$\underbrace{AA...A}_{m\text{ раз}}\underbrace{\bar{A}\bar{A}...\bar{A}}_{n-m\text{ раз}}.$$

Общее число сложных событий, в которых событие A наступает m раз, равно числу сочетаний из n элементов по m элементов. При этом вероятность каждого сложного события равна $p^m q^{n-m}$. Так как эти сложные события являются несовместимыми, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Итак, если $P_n(m)$ есть вероятность появления события A m раз в n испытаниях, то

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

или

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \tag{7.31}$$

Формулу (7.31) называют *формулой Бернулли.*

Пример 7.43. Пусть всхожесть семян данного растения составляет 90 %. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

а) В данном случае $n = 4$, $m = 3$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 0{,}1$.

Применим формулу Бернулли (7.31): $P_4(3) = \frac{4!}{3!1!} 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}2916.$

б) Искомое событие A состоит в том, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. По теореме сложения вероятностей $P(A) = P_4(3) + P_4(4)$. Но $P_4(4) = 0{,}9^4 = 0{,}6561$. Поэтому $P(A) = 0{,}2916 + 0{,}6561 = 0{,}9477$.

Снова рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает событие A с вероятностью p. Обозначим через X случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях.

Понятно, что событие A может вообще не наступить, наступить один раз, два раза и т. д., и наконец, наступить n раз. Следовательно, возможными значениями величины X будут числа 0, 1, 2, ..., $n - 1$, n. По формуле Бернулли можно найти вероятности этих значений:

$$P_n(0) = C_n^0 q^n = q^n,\ P_n(1) = C_n^1 q^{n-1} p,\ ...,\ P_n(n) = p^n.$$

Запишем полученные данные в виде таблицы распределения:

X	0	1	...	m	...	n
p	q^n	$C_n^1 q^{n-1} p$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Построенный закон распределения дискретной случайной величины X называют *законом биномиального распределения.*

Найдем $M(X)$. Очевидно, что X — число появлений события A в каждом испытании — представляет собой случайную величину со следующим распределением:

X_i	0	1
p_i	q	p

Поэтому $M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$. Но так как $X = X_1 + \ldots + X_n$, то $M(X) = np$.

Найдем далее $D(X)$ и $\sigma(X)$. Так как величина X_i^2 имеет распределение

X_i^2	0^2	1^2
p_i	q	p

то $M(X_i^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$. Поэтому

$$D(X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Наконец, в силу независимости величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n) = npq.$$

Отсюда $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Пример 7.44. Случайная величина X определена как число выпавших гербов в результате 100 бросаний монеты. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X.

Вероятность появления герба в каждом бросании монеты $p = \frac{1}{2}$. Следовательно, вероятность непоявления герба $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Случайная величина X имеет биномиальное распределение при $n = 100$ и $p = \frac{1}{2}$. Поэтому $M(X) = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$, $D(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{25} = 5$.

Пример 7.45. Допустим, что для хищника вероятность поимки отдельной жертвы составляет 0,4 при каждом столкновении с жертвой. Каково ожидаемое число пойманных жертв в 20 столкновениях?

Это пример биномиального распределения при $n = 20$ и $p = 0{,}4$. Ожидаемое число есть $M(X) = np = 20 \cdot 0{,}4 = 8$.

Пример 7.46. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 80 % случаев. Какова вероятность того, что из пяти больных выздоровеет четыре?

В данном случае $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$, $n = 5$, $m = 4$. Поэтому по формуле Бернулли

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!(5-4)!}0{,}8^4 0{,}2^{5-4} = \frac{5 \cdot 8^4 \cdot 2}{10^5} = \frac{8^4}{10^4} = 0{,}4096 \approx 0{,}41.$$

Пример 7.47. В условиях предыдущего примера найти вероятность того, что из пяти больных выздоровеет не менее четырех.

Искомая вероятность есть сумма вероятностей $P_5(4) + P_5(5)$. Имеем:

$$P_5(4) + P_5(5) = 0{,}4096 + 0{,}8^5 = 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}73728 \approx 0{,}74.$$

Задача об экстрасенсе. Обычный человек примерно в половине случаев правильно угадывает, в какой руке спрятан мелкий предмет. Предположим, что верный ответ получен в трех случаях из четырех. Случайно ли это? Или при таком результате можно говорить о необычных способностях угадывающего?

Если принять вероятность угадывания в норме $p = \frac{1}{2}$, то по формуле Бернулли $P_4(3) = C_4^3 p^2 q$, где $q = 1 - p$, или $P_4(3) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Как видим, каждый четвертый нормальный человек правильно угадывает в трех случаях из четырех.

Допустим, что верный ответ получен в девяти случаях из десяти. Какова вероятность такого угадывания у нормального человека? По формуле Бернулли

$$P_{10}(9) = C_{10}^9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} = C_{10}^1 \cdot \frac{1}{2^{10}} = 10 \cdot \frac{1}{2^{10}} \approx 0{,}01.$$

Таким образом, нормальный человек лишь в одном случае из 100 может случайно продемонстрировать такой результат. И если подобное угадывание происходит чаще, то можно, по-видимому, говорить, что угадыватель — экстрасенс (или мистификатор).

2. Локальная и интегральная предельные теоремы Лапласа. Если число испытаний n велико, то вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. Лаплас[1] получил важную приближенную формулу для вероятности $P_n(m)$ появления события A точно m раз, если n — достаточно большое число. Им же получена приближенная формула и для суммы вида $\sum\limits_{m=k}^{l} P_n(m)$.

[1] Пьер Лаплас (1749—1827) — французский математик и астроном.

Локальная предельная теорема Лапласа (доказательство см. в [3]). *Пусть $p = P(A)$ — вероятность события A, причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что в условиях схемы Бернулли событие A при n испытаниях появится точно m раз, выражается приближенной формулой Лапласа*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{7.32}$$

где $q = 1 - p$; $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Для функции $\varphi(x)$ имеется таблица (см. приложение 4) ее значений для положительных значений x (функция $\varphi(x)$ четная).

Пример 7.48. Вероятность поражения цели стрелком при одиночном выстреле равна $p = 0{,}2$. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах цель будет поражена ровно 20 раз?

Здесь $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 100$ и $m = 20$. Отсюда $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$ и, следовательно, $t = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{20-100\cdot 0{,}2}{4} = 0$.

Учитывая, что $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}40$, из формулы (7.32) получаем $P_{100}(20) \approx 0{,}40 \cdot \dfrac{1}{4} = 0{,}10$ (для получения приближенного равенства $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}40$ можно использовать калькулятор).

Перейдем к интегральной предельной теореме Лапласа. Поставим следующий вопрос: какова вероятность того, что в условиях схемы Бернулли событие A, имеющее вероятность $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$, при n испытаниях (как и прежде, число испытаний велико) появится не менее k раз и не более l раз? Эту искомую вероятность обозначим через $P_n(k, l)$.

На основании теоремы сложения вероятностей для несовместимых событий (см. параграф 7.2, п. 1) получим

$$P_n(k, l) = \sum_{m=k}^{l} P_n(m).$$

Справедлива следующая приближенная формула:

$$P_n(k, l) = \int_{x_k}^{x_l} \varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_k}^{x_l} e^{-x^2/2} dx, \tag{7.33}$$

где

$$x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}; \; x_l = \frac{l-np}{\sqrt{npq}}. \tag{7.34}$$

Это составляет содержание *интегральной предельной теоремы Лапласа.*

Введем функцию

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt, \tag{7.35}$$

называемую *функцией Лапласа,* или *интегралом вероятностей.* Очевидно, $\Phi(x)$ есть первообразная для функции $\varphi(x)$. Так как $\varphi(x) > 0$ в $(-\infty; +\infty)$, то $\Phi(x)$ — возрастающая функция в этом интервале. На основании формулы Ньютона — Лейбница из формулы (7.33) имеем

$$P_n(k, l) \approx \Phi(x_l) - \Phi(x_k). \tag{7.36}$$

Это *интегральная формула Лапласа.*

Как известно, интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-x^2/2}dx$ не берется в элементарных функциях. Поэтому для функции (7.35) составлена таблица (см. приложение 5) ее значений для положительных значений x, так как $\Phi(0) = 0$ и функция $\Phi(x)$ нечетная:

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x} e^{-t^2/2}dt \overset{t=-z,\, dt=-dz}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz=-\Phi(x).$$

Пример 7.49. Вероятность того, что изделие не прошло проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных изделий окажутся непроверенными от 70 до 100 изделий.

Здесь $n = 400$, $k = 70$, $l = 100$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. Поэтому в силу равенств (7.34) $x_k = -1{,}25$, $x_l = 2{,}5$ и согласно формуле (7.36)

$$P_{400}(70,\ 100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) =$$
$$= \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

3. Распределение Пуассона. Пусть производится серия n независимых испытаний ($n = 1, 2, 3, \ldots$), причем вероятность появления данного события A в этой серии $P(A) = p_n > 0$ зависит от ее номера n и стремится к нулю при $n \to \infty$ (последовательность *редких событий*). Предположим, что для каждой серии среднее значение числа появлений события A постоянно, т. е. $np_n = \mu = \text{const}$.

Отсюда $p_n = \frac{\mu}{n}$.

Исходя из формулы Бернулли (7.31) для вероятности появления события A в n-й серии ровно m раз имеем выражение

$$P_n(m)=C_n^m p_n^m q(1-p_n)^{n-m}=C_n^m\left(\frac{\mu}{n}\right)^m\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m}.$$

Пусть m фиксировано. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!n^m}\mu^m =$$

$$=\frac{\mu^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right]=\frac{\mu^m}{m!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m}=e^{-\mu}$$

(здесь использован второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$).

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(m)=\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}$.

Если n велико, то в силу определения предела вероятность $P_n(m)$ сколь угодно мало отличается от $\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}$. Отсюда при больших n для искомой вероятности $P_n(m)$ имеем приближенную формулу Пуассона (для простоты знак приближенного равенства опущен)

$$P_n(m)=\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu},$$

где $\mu = np_n$.

Определение. Говорят, что случайная величина X распределена по *закону Пуассона*, если эта величина задана таблицей

X	0	1	2	3	...
p	$e^{-\mu}$	$\mu e^{-\mu}$	$\frac{\mu^2}{2!}e^{-\mu}$	$\frac{\mu^3}{3!}e^{-\mu}$	...

Здесь μ — фиксированное положительное число (разным значениям μ отвечают разные распределения Пуассона).

Найдем математическое ожидание дискретной величины X, распределенной по закону Пуассона. Согласно определению математического ожидания (см. параграф 7.5, п. 2)[1]

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}=\mu e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}=\mu e^{-\mu}e^{\mu}=\mu.$$

Найдем далее $D(X)$. Сначала найдем $M(X^2)$:

$$M(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}=\mu e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}=$$

[1] Здесь, как и при нахождении $M(X^2)$, используется известное разложение $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $|x| < +\infty$.

$$= \mu e^{-\mu}\left[\mu\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!}+e^{\mu}\right]=\mu e^{-\mu}(\mu e^{\mu}+e^{\mu})=\mu^2+\mu.$$

Теперь по известной формуле (см. параграф 7.6, п. 2)

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu.$$

Распределение Пуассона крайне важно во многих физических и биологических задачах. Оно представляет собой грубую модель частоты встречаемости катастрофических наводнений при довольно длительном периоде наблюдений. Распределение микроэлементов в образце почвы может также приближаться к пуассоновскому. Возможности приложений распределения Пуассона в естествознании иллюстрируют следующие примеры.

Редкие болезни. Многие болезни достаточно редки или становятся таковыми после принятия профилактических и лечебных мер. Однако даже при самых благоприятных условиях в больших популяциях все же встречается некоторое число больных редкими болезнями. Например, при введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,99 % случаев. Какова вероятность того, что из 10 000 вакцинированных детей заболеет один?

Вероятность заболеть $p = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$, число испытаний $n = 10\,000$. Поэтому $\mu = 0{,}0001 \cdot 10\,000 = 1$ и по формуле Пуассона имеем $P(1)=\frac{1}{1!}e^{-1}\approx 0{,}368$.

Аналогично вероятность, что заболеют два ребенка $P(2)=\frac{1^2}{2!}e^{-1}\approx$ $\approx 0{,}184$, а вероятности заболевания трех и четырех детей соответственно равны $P(3)=\frac{e^{-1}}{3!}\approx 0{,}061$ и $P(4)=\frac{e^{-1}}{4!}\approx 0{,}015$.

Радиоактивный распад. Рассмотрим пробу радиоактивного вещества, которое в среднем дает r импульсов радиоактивности в одну секунду. Ожидаемое число импульсов за t секунд есть rt. Этот процесс можно описать распределением Пуассона. Проба состоит из очень большого числа n радиоактивных атомов, причем каждый атом имеет крайне малую вероятность p распада в течение одной секунды. Ожидаемое число распадов за 1 с есть $r = np$. Ожидаемое число распадов за t секунд есть $rt = npt$. Это является математическим ожиданием распределения Пуассона, которое дает вероятность k распадов за t секунд:

$$P(k)=\frac{(rt)^k}{k!}e^{-rt}.$$

Если, например, имеется три импульса радиоактивности в 1 с, то вероятность возникновения 10 импульсов за пятисекундный интервал составляет

$$P(10)=\frac{(3\cdot 5)^{10}}{10!}e^{-3\cdot 5}=\frac{15^{10}}{10!}e^{-15}.$$

Подсчет клеток под микроскопом. Предположим, что n клеток определенного типа распределены случайным образом по площади предметного стекла, которое разбито квадратной решеткой на 900 (30×30) равных участков. Вероятность того, что конкретная клетка лежит в данном участке решетки, есть $p = 1/900$. Процесс размещения n клеток на предметном стекле можно рассматривать как n повторных испытаний для биномиального эксперимента, где «успех» определяется как попадание клетки в конкретный участок решетки. Если n велико, то для вычисления вероятности того, что конкретный участок решетки содержит k клеток, можно воспользоваться пуассоновским приближением биномиального распределения: $\mu = np = n/900$.

Значит,

$$P(k) = \frac{(np)^k}{k!}e^{-np} = \left(\frac{n}{900}\right)^k \frac{e^{-n/900}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Величина $P(k)$ дает долю тех из 900 участков, в которых содержится по k клеток. Общее число участков, содержащих по k клеток, равно $900P(k)$. Например, ожидается, что в среднем $900e^{-n/900}$ участков не содержат ни одной клетки.

Это дает нам метод оценки общего числа имеющихся клеток путем определения числа тех участков квадратной решетки, которые не содержат этих клеток. Если, например, клеток нет в 75 участках квадратной решетки, то

$$75 = 900e^{-n/900}.$$

Отсюда $n = 900\ln(900/75) = 900\ln 12 = 2240$ (здесь можно использовать калькулятор).

Основное допущение, сделанное нами, состоит в том, что n клеток распределены по площади стекла случайно. Если это допущение справедливо, то распределение Пуассона дает весьма эффективное средство оценки числа клеток на стекле.

7.8. Математические модели биологических процессов

1. Построение математической модели. Модель биологического процесса представляет собой набор допущений относительно данного процесса в совокупности с анализом логических следствий из этих допущений. Математическая модель получается тогда, когда допущения можно выразить в математической форме. Разумеется, модели строятся для описания реальных процессов, и всякое предсказание, основанное на анализе модели, необходимо сравнивать с экспериментальными наблюдениями, чтобы проверить справедливость сделанных допущений.

Если допущения модели выражены в математической форме, то для вывода логических следствий из этих допущений в распоряжении исследователя имеется весь арсенал математических средств. Очень часто эти математические следствия приводят к таким предсказаниям, связанным с биологическим процессом, которые вряд ли можно было бы понять и предвидеть, занимаясь лишь экспериментом и наблюдениями.

Модель подсчета клеток под микроскопом (см. параграф 7.7, п. 3) приводит к тому удивительному результату, что общее число клеток можно определить, считая попросту количество тех квадратов решетки, в которых клеток не содержится.

В математической форме выражения допущений биологической модели имеются и определенные недостатки. Часто бывает необходимо существенно упростить задачу. Если такое упрощение заходит слишком далеко, то модель перестает отражать какие-то важные черты реальности, которые мы стремимся понять.

После того как проанализированы результаты простой модели, ее можно сделать более реалистичной, изменив некоторые допущения модели. Следует также подчеркнуть, что в настоящее время с развитием быстродействующих ЭВМ некоторые типы сложных моделей перестали быть сложными для анализа.

Математические модели стали обязательным инструментом исследований почти в каждой области биологии.

В предшествующих параграфах этой главы уже были рассмотрены различные модели биологических процессов. Рассмотрим еще одну модель.

2. Выживание и вымирание видов. Если в одном и том же географическом регионе обитают популяции двух видов, имеющих одинаковые экологические потребности в пище, пространстве и других ресурсах, то согласно теории конкуренции надо ожидать, что более приспособленный из двух видов полностью вытеснит менее приспособленный. В этом состоит суть *принципа конкурентного исключения*.

Итак, принцип конкурентного исключения утверждает, что если два вида имеют одинаковые экологические потребности, то более приспособленный вид будет вытеснять менее приспособленный. Чтобы получить модель этого процесса, рассмотрим случай двух конкурирующих видов с одинаковыми экологическими потребностями, сосуществующих в некоторый момент времени в среде, которая способна обеспечить ресурсами ровно N особей обоих видов. Допустим, что первоначально в среде имелось k особей вида I и $N - k$ особей вида II. Предположим, что конкуренцию между двумя видами можно представить как последовательность столкновений между ними, причем вероятность того, что вид I увеличится после столкновения на одну особь, равна p, а вероятность увеличения на одну особь вида II есть $q = 1 - p$. Например, оба вида приспособлены одинаково, если $p = q = 1/2$, и первый вид обладает селективным преимуществом, если $p > q$. Допустим, что p не зависит от численностей k и $N - k$ обоих видов.

Конкуренция по этим правилам продолжается до тех пор, пока один из видов не вытеснит полностью другой. Именно этот процесс хотелось бы понять. Для этого определим p_k как вероятность того, что вид I вытесняет вид II, если начальная численность вида I была равна k. Если начальная численность популяции есть 0, то $p_0 = 0$, так как вид I уже вытеснен. Если начальная численность популяции равна N особей, то $p_N = 1$, поскольку вид I уже вытеснил вид II. После первого столкновения популяция вида I будет насчитывать $k + 1$ или $k - 1$ особей с вероятностями p и q соответственно. Таким образом, вероятность p_k представляет собой сумму двух членов:

$$p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}. \tag{7.37}$$

Здесь pp_{k+1} означает вероятность того, что после одного хода вид I имеет численность $k + 1$ и вытесняет затем вид II. Аналогично qp_{k-1} означает вероятность того, что вид I имеет после одного хода численность $k - 1$ и вытесняет затем вид II.

Соотношение (7.37) — это линейное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (см. параграф 6.3).

Будем искать его решение в виде $p_k = \lambda^k$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^k = p\lambda^{k+1} + q\lambda^{k-1}, \text{ или } p\lambda^2 - \lambda + q = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения находятся по формуле

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pq}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (1-2p)}{2p},$$

откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = (1 - p)/p = q/p$.

Эти корни равны, когда $p = q = 1/2$. Таким образом, общее решение уравнения (7.37) имеет следующий вид:

$$p_k = c_1 + c_2(q/p)^k \text{ при } p \neq q,$$

$$p_k = c_1 + c_2 k \text{ при } p = q,$$

где c_1 и c_2 — постоянные, подлежащие нахождению. Согласно определению p_k было установлено, что $p_0 = 0$ и $p_N = 1$. Значит, если $p \neq 1/2$, то

$$c_1 + c_2 = 0, c_1 + c_2(q/p)^N = 1.$$

Отсюда следует, что

$$c_1 = \frac{1}{1-(q/p)^N}, \; c_2 = -\frac{1}{1-(q/p)^N}.$$

Если $p = 1/2$, то $c_1 = 0$ и $c_2 N = 1$, или $c_2 = 1/N$. Окончательно приходим к тому, что искомое решение уравнения (7.37) есть

$$p_k = \frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N} \text{ при } p \neq q,$$

$$p_k = k/N \text{ при } p = q = 1/2.$$

В данной простой модели мы смогли в явном виде вычислить вероятность вытеснения одного вида другим. Рассмотрим различные возможности для популяций с общей численностью $N = 1000$. Если начальные популяции обоих видов насчитывали по 500 особей и если $p = q = 1/2$, то вероятность вытеснения видом I вида II равна $p_{500} = 500/1000 = 1/2$. Это указывает на то, что в данном случае ни один из видов не имеет конкурентного преимущества. Но если $p = 2/3$ и $q = 1/3$, то

$$p_{500} = \frac{1-(1/2)^{500}}{1-(1/2)^{1000}} = \frac{1}{1+(1/2)^{500}}.$$

Число $(1/2)^{500}$ крайне мало. Поэтому в данном случае практически с единичной вероятностью вид II будет вымирать. Даже малые конкурентные преимущества (когда p чуть больше 1/2) при данных начальных численностях приводят к такому же результату. Заметим, что если $p = 2/3$ и $q = 1/3$, а начальные численности видов I и II равны соответственно 1 и 999, то вероятность вытеснения первым видом второго есть

$$p_1 = \frac{1-(1/2)^1}{1-(1/2)^{1000}} \approx \frac{1}{2}.$$

В частности, отсюда следует, что если даже один индивидуум более приспособленного вида вторгается на территорию другого вида, то с вероятностью 1/2 внедряющийся вид полностью вытеснит коренной вид. Если же $p = q = 1/2$, то $p_1 = 1/1000$. Иными словами, если оба вида одинаково хорошо приспособлены, то маловероятно, что появление единичного индивидуума одного вида приведет к вытеснению другого вида.

Упражнения

1. В ящике имеется 100 яиц, из них пять некачественных. Наудачу вынимают одно яйцо. Найдите вероятность того, что вынутое яйцо некачественное.

[0,05]

2. Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет четное число очков.

[0,5]

3. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найдите вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

[0,81]

4. В сосуд емкостью 10 л попала ровно одна болезнетворная бактерия. Какова вероятность зачерпнуть ее при наборе из этого сосуда стакана воды (200 см^3)?

[0,02]

5. В партии из 100 деталей отдел техническое контроля обнаружил пять нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

[0,05]

6. При транспортировке из 1000 дынь испортилось пять. Чему равна относительная частота испорченных дынь?

[0,005]

7. При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,3, а вероятность выстрела на оценку «хорошо» равна 0,4. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?

[0,7]

8. Вероятность того, что лицо умрет на 71-м году жизни, равна 0,04. Какова вероятность того, что человек не умрет на 71-м году?

[0,96]

9. Бросается один раз игральная кость. Определите вероятность выпадения 3 или 5 очков.

$[\frac{1}{3}]$

10. В урне 30 шаров: 15 белых, 10 красных и 5 синих. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

[0,5]

11. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?

[0,2]

12. В урне три белых и три черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найдите вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

[0,6]

13. В колоде 36 карт. Наудачу вынимают из колоды две карты. Определите вероятность того, что вторым вынут туз, если первым тоже вынут туз.

$[\frac{3}{35}]$

14. В урне два белых и три черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найдите вероятность того, что оба шара белые.

[0,1]

15. Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут вынуты подряд два туза?

$[\frac{1}{105}]$

16. Два стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, вторым стрелком — 0,7. Найдите вероятность поражения цели двумя пулями в одном залпе.

[0,56]

17. Найдите вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет.

[0,25]

18. Имеется два ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике восемь, во втором семь стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найдите вероятность того, что обе вынутые детали окажутся стандартными.

[0,56]

19. В семье двое детей. Принимая события, состоящие в рождении мальчика и девочки равновероятными, найдите вероятность того, что в семье: а) все девочки; б) дети одного пола.

[а) 0,25; б) 0,5]

20. Пусть всхожесть семян оценивается вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что из двух посеянных семян взойдет какое-либо одно?

[0,91]

21. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

[$\frac{1}{3}$]

22. Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет четное или кратное трем число очков.

[$\frac{2}{3}$]

23. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найдите вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная.

[0,85]

24. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке — 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найдите вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

[0,9]

25. Студент M может заболеть гриппом (событие A) только в результате либо переохлаждения (событие B), либо контакта с другим боль-

ным (событие C). Требуется найти $P(A)$, если $P(B) = 0{,}5$, $P(C) = 0{,}5$, $P_B(A) = 0{,}3$, $P_C(A) = 0{,}1$, при условии несовместимости B и C.

[$P(A) = 0{,}2$]

26. В коробке находятся шесть новых и две израсходованные батарейки для карманного фонарика. Какова вероятность того, что две вынутые из коробки наудачу батарейки окажутся новыми?

[$\frac{15}{28}$]

27. На трех карточках написаны буквы у, к, ж. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «жук»?

[$\frac{1}{6}$]

28. Слово «керамит» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами перемешиваются, и из них извлекаются по очереди четыре карточки. Какова вероятность, что эти четыре карточки в порядке выхода составят слово «река»?

[$\frac{1}{840}$]

29. Пусть случайная величина X — число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Найдите закон распределения случайной величины X.

[

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

]

30. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 5000 руб. и 10 выигрышей по 100 руб. Найдите закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета.

[

X	0	100	5000
p	0,89	0,1	0,01

]

31. Закон распределения случайной величины X задан таблицей:

X	1	2	3
p	0,3	0,2	0,5

Найдите математическое ожидание X.

[2,2]

32. Найдите математическое ожидание выигрыша X в упражнении 30.

[60 руб.]

33. Найдите математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	2	3	5
p	0,3	0,1	0,6

[3,9]

34. Производятся два выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$. Найдите математическое ожидание общего числа попаданий.

[0,7 попаданий]

35. Найдите математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

[7]

36. Найдите математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

[12,25]

37. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	2	4	5		Y	7	9
p	0,1	0,3	0,6		p	0,8	0,2

Найдите математическое ожидание случайной величины XY.

[32,56]

38. Найдите дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

[2,01]

39. Известны дисперсии двух независимых случайных величин X, Y: $D(X) = 4$, $D(Y) = 3$. Найдите дисперсию суммы этих величин.

[7]

40. Дисперсия случайной величины X равна 5. Найдите дисперсию следующих величин: а) $X - 1$; б) $-2X$; в) $3X + 6$.

[а) 5; б) 20; в) 45]

Найдите математические ожидания и дисперсии случайных величин.

41.

X	−2	−1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

[$M(X) = 0{,}1$ и $D(X) = 1{,}29$]

42.

X	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

[$M(X) = 4{,}7$ и $D(X) = 3{,}01$]

43.

X	5	7	10	15
p	0,2	0,5	0,2	0,1

[$M(X) = 8$ и $D(X) = 8$]

44. К случайной величине прибавили постоянную a. Как при этом изменятся: а) математическое ожидание; б) дисперсия?

[а) Прибавится a; б) не изменится]

45. Случайную величину умножили на a. Как при этом изменятся: а) математическое ожидание; б) дисперсия?

[а) Умножится на a; б) умножится на a^2]

46. Случайная величина X принимает только два значения: 1 и –1, каждое с вероятностью 0,5. Найдите дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

[$D(X) = 1$, $\sigma(X) = 1$]

47. Дисперсия случайной величины $D(X) = 6{,}25$. Найдите среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

[2,5]

48. Пусть закон распределения случайной величины X задан таблицей

X	4	10	20
p	1/4	1/2	1/4

Определите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

[$M(X) = 11$; $D(X) = 33$; $\sigma(X) \approx 5{,}75$]

49. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	3	5
p	0,2	0,8

Найдите начальные моменты первого и второго порядков.

[$\nu_1 = 4{,}6$; $\nu_2 = 21{,}8$]

50. Дискретная случайная величина X задана законом распределения, приведенным в предыдущем упражнении. Найдите центральный момент второго порядка.

[$\mu_2 = 0{,}64$]

51. В хлопке 75 % длинных волокон. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу трех волокон окажутся два длинных волокна?

$[\frac{27}{64}]$

52. При некоторых условиях стрельбы вероятность попадания в цель равна $\frac{1}{3}$. Производится шесть выстрелов. Какова вероятность в точности двух попаданий?

$[\frac{80}{243}]$

53. Игральная кость бросается пять раз. Найдите вероятность того, что два раза появится число очков, кратное трем.

$[\frac{80}{243}]$

54. Монета подбрасывается пять раз. Какова вероятность того, что герб появится не менее двух раз?

$[\frac{13}{16}]$

55. Пусть всхожесть семян данного растения составляет 80 %. Найдите вероятность того, что из трех посеянных семян взойдут: а) два; б) не менее двух.

[а) 0,384; б) 0,896]

56. В семье пятеро детей. Найдите вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

[0,31]

57. По мишени производится три выстрела, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Рассматривается случайная величина X — число попаданий в мишень.

Найдите закон ее распределения.

[

X	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

]

58. Принимая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найдите вероятность того, что среди четырех новорожденных два мальчика.

[0,375]

59. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p = 0,6$. Найдите математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

[6 попаданий]

60. Найдите математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

[6 билетов]

61. Найдите дисперсию случайной величины X — числа появлений события A в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события A равна 0,7.

[21]

62. Найдите: а) математическое ожидание и б) дисперсию числа бракованных изделий в партии из 5000 изделий, если каждое изделие может оказаться бракованным с вероятностью 0,02.

[а) 100 изделий; б) 98]

63. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,6. Найдите дисперсию случайной величины X — числа появлений события A в этих испытаниях.

[2,4]

64. Найдите дисперсию случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если $M(X) = 0,8$.

[0,48]

Приложения

Приложение 1

Старинные задачи по теории вероятностей

Задачи Галилео Галилея

1. Сколькими способами можно получить ту или иную сумму очков при одновременном бросании двух игральных костей?

Решение. Все возможные суммы, получающиеся при одновременном бросании двух игральных костей, можно представить в следующем виде:

$2 = 1 + 1$;

$3 = 1 + 2 = 2 + 1$;

$4 = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2$;

$5 = 1 + 4 = 4 + 1 = 2 + 3 = 3 + 2$;

$6 = 1 + 5 = 5 + 1 = 2 + 4 = 4 + 2 = 3 + 3$;

$7 = 1 + 6 = 6 + 1 = 2 + 5 = 5 + 2 = 3 + 4 = 4 + 3$;

$8 = 2 + 6 = 6 + 2 = 3 + 5 = 5 + 3 = 4 + 4$;

$9 = 3 + 6 = 6 + 3 = 4 + 5 = 5 + 4$;

$10 = 4 + 6 = 6 + 4 = 5 + 5$;

$11 = 5 + 6 = 6 + 5$;

$12 = 6 + 6$.

В итоге получаем таблицу

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число способов	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

2. Рассказывают, что однажды к итальянскому физику, механику, астроному и математику Галилео Галилею (1564—1642) явился солдат и попросил помочь ему в решении вопроса, который длительное время не давал ему покоя: что выпадает чаще при игре в кости (три кости) — сумма в 9 очков или сумма в 10 очков?

Решение. Может показаться, что вероятность одинакова, так как каждая сумма из 9 и 10 очков может быть представлена одним из шести способов:

$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$;

$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4$.

Однако с учетом перестановок для суммы 9 очков получится 25 различных способов $(6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1)$, а для суммы 10 очков — 27 различных способов $(6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3)$. Как очевидно, вероятности этих случайных событий довольно близки между собой и равны соответственно $\frac{25}{216}$ и $\frac{27}{216}$, что и вызывало затруднения у солдата.

Все возможные различные суммы, получающиеся при одновременном бросании трех игральных костей, без учета перестановок, можно представить в следующем виде:

$3 = 1 + 1 + 1;$

$4 = 1 + 1 + 2;$

$5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2;$

$6 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2;$

$7 = 1 + 1 + 5 = 1 + 2 + 4 = 1 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3;$

$8 = 1 + 1 + 6 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3;$

$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3;$

$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 4 + 3;$

$11 = 1 + 4 + 6 = 1 + 5 + 5 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5 = 3 + 3 + 5 = 3 + 4 + 4;$

$12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 2 + 5 + 5 = 3 + 3 = 6 = 3 + 4 + 5 = 4 + 4 + 4;$

$13 = 1 + 6 + 6 = 2 + 5 + 6 = 3 + 4 + 6 = 3 + 5 + 5 = 4 + 4 + 5;$

$14 = 2 + 6 + 6 = 3 + 5 + 6 = 4 + 4 + 6 = 4 + 5 + 5;$

$15 = 3 + 6 + 6 = 4 + 5 + 6 = 5 + 5 + 5;$

$16 = 4 + 6 + 6 = 5 + 5 + 6;$

$17 = 5 + 6 + 6;$

$18 = 6 + 6 + 6.$

С учетом перестановок получим следующую таблицу:

Сумма очков	3	4	5	6	8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Число способов	1	3	6	10	15	21	25	27	28	25	21	15	10	6	3	1

Игры де Мерэ

Страстный игрок рыцарь де Мерэ хотел разбогатеть при помощи игры в кости, и для этого он придумывал различные усложненные правила игры[1].

3 (первая игра де Мерэ). Игральная кость бросается четыре раза. Рыцарь бился об заклад, что при этом хотя бы один раз выпадет шесть очков. Какова вероятность выигрыша для рыцаря?

Решение. Так как при каждом бросании игральной кости имеется шесть различных возможностей, то при четырех бросаниях кости

---

[1] Легенда о де Мерэ подробно изложена в статье А. Я. Хинчина и А. М. Яглома «Наука о случайном».

число различных равновозможных случаев будет 1296 ($6 \times 6 \times 6 \times 6$). Но среди этих 1296 случаев будет 625 ($5 \times 5 \times 5 \times 5$) таких, где шестерка не появилась ни разу, а в $1296 - 625 = 671$ случае хотя бы один раз из четырех выпадает шестерка. Следовательно, вероятность выпадения хотя бы одной шестерки при четырех бросаниях кости равна $\frac{671}{1296}$, т. е. больше $\frac{1}{2}$. Это значит, что чем больше рыцарь играл, тем больше он выигрывал. Оказываясь постоянно в проигрыше, противники рыцаря перестали играть по этим правилам с де Мерэ. Тогда он придумал новую игру.

4 (вторая игра де Мерэ). Две игральные кости бросаются 24 раза. Рыцарь бился об заклад, что при этом хотя бы один раз выпадут две шестерки. Какова вероятность проигрыша для рыцаря?

Решение. При одновременном бросании двух игральных костей вероятность выпадения двух шестерок равна $\frac{1}{36}$, а вероятность того, что не выпадут две шестерки, равна $\frac{35}{36}$. Тогда вероятность того, что при 24-кратном бросании двух костей ни разу не выпадут две шестерки, будет равна $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}509$. Следовательно, вероятность проигрыша для рыцаря была больше $\frac{1}{2}$. Это значит, что чем больше рыцарь будет играть, тем больше он будет проигрывать. Когда так и случилось, рыцарь разорился и обратился к Паскалю за разъяснениями. Паскаль успешно раскрыл математические тайны правил двух игр рыцаря де Мерэ.

Задача о генуэзской лотерее

В XVII в. в Генуе возникла знаменитая лотерея. Генуэзская лотерея в XVIII столетии разыгрывалась во Франции, Германии и других странах. Красочно описала генуэзскую лотерею итальянская писательница Матильда Серао (1856—1927) в новелле «Розыгрыш лотереи».

5. Разыгрывается 90 номеров, из которых выигрывают пять. По условию можно ставить ту или иную сумму на любой из 90 номеров или на любую совокупность двух, трех, четырех или пяти номеров. Если участник лотереи ставил на один номер, то он получал при выигрыше в 15 раз больше ставки; если на два номера (амбо), то в 270 раз больше; если на три номера (терн), то в 5500 раз больше; если на четыре номера (катерн) — в 75 000 раз больше; если на пять номеров (квин) — в 1 000 000 раз больше, чем ставка. Какова вероятность выигрыша в каждом из указанных пяти случаев?

Решение. Искомая вероятность выигрыша в каждом из указанных пяти случаев есть $p_i = \frac{C_5^i}{C_{90}^i}$, где $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

В частности, получим

$$p_1 = \frac{5}{90} = \frac{1}{18};$$

$$p_2 = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801};$$

$$p_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11748};$$

$$p_4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} = \frac{1}{511038};$$

$$p_5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43949268}.$$

Задачи Блеза Паскаля

До середины XVII в. не было правильных методов решения задач о справедливом дележе ставки. В 1654 г. между французскими математиками Б. Паскалем из Парижа и П. Ферма из Тулузы возникла переписка по поводу ряда задач рыцаря де Мерэ. Из переписки Паскаля и Ферма сохранилось лишь три письма Паскаля и четыре письма Ферма. Эти письма впервые были опубликованы в 1689 г. в Тулузе. В этой переписке оба ученых, хотя и несколько разными путями, приходят к верному решению, деля ставку пропорционально вероятности выиграть всю ставку, если игра будет продолжена.

Ферма со своей стороны нашел решение и для более сложного случая, когда игра происходит между произвольным числом игроков.

6. Как разделить ставку при игре до трех выигрышных партий, если один игрок выиграл две партии, а другой — одну и каждым вложено в игру по 32 пистоля?

Решение. Свое решение задачи Паскаль наиболее полно изложил в письме к Ферма от 29 июля 1654 г.: «Вот примерно, что я делаю для определения стоимости каждой партии, когда два игрока играют, например, на три партии и каждым вложено в игру по 32 пистоля.

Предположим, что один выиграл две партии, а другой — одну. Они играют еще одну партию, если ее выигрывает первый, то он получает всю сумму в 64 пистоля; если же эту партию выигрывает второй, то каждый игрок будет иметь 2 выигранные партии, и, следовательно, если они намерены произвести раздел, каждый должен получить обратно свой вклад в 32 пистоля.

Примите же во внимание, монсеньер, что если первый выиграет, то ему причитается 64; если он проиграет, то ему причитается 32.

Если же игроки не намерены рисковать… и хотят произвести раздел, то первый должен сказать: "Я имею 32 пистоля верных, ибо в случае проигрыша я их также получил бы, но остальные 32 пистоля могут быть получены либо мной, либо Вами. Случайности равны. Разделим же эти 32 пистоля пополам, и дайте мне, кроме того, бесспорную сумму в 32 пистоля"». Как очевидно из рассуждений Паскаля, первый игрок должен получить 48 пистолей, а второй — 16.

7. Как разделить ставку при игре до трех выигрышных партий, если один игрок выиграл две партии, а другой — ни одной и каждым вложено в игру по 32 пистоля?

Решение. Ответы, предложенные Паскалем, таковы: первый игрок должен получить 56 пистолей, а второй — 8 пистолей. Рассуждения при решении подобны тем, которые были проведены при решении предыдущей задачи: если бы первый игрок выиграл еще одну партию, то ему причиталось бы 64 пистоля, если бы проиграл — 48 пистолей, а остаток 16 делится поровну.

8. Как разделить ставку при игре до трех выигрышных партий, если первый игрок выиграл одну партию, а второй — ни одной и каждым вложено в игру по 32 пистоля?

Решение. Пусть игроки сыграют еще одну партию. Если ее выигрывает первый, то он будет иметь, как и в предыдущем случае, 56 пистолей. Если он ее проигрывает, то у обоих окажется по одной выигранной партии и первому следует получить 32 пистоля. Первый игрок может сказать: «Если вы не хотите играть эту партию, дайте мне мой бесспорный выигрыш в 32 пистоля, а остаток от 56 разделим поровну... т. е. возьмем каждый по 12, что с 32 составит 44». Значит, первый игрок должен получить 44 пистоля, а второй — 20.

Задачи Якоба Бернулли

9. Сколькими способами можно получить 12 очков при одновременном бросании четырех игральных костей?

Решение. Излагая правила перебора различных исходов при одновременном бросании четырех игральных костей, Я. Бернулли приходит к следующей таблице:

Способы получения 12 очков	Число бросков с учетом перестановок
6 + 4 + 1 + 1	12
5 + 5 + 1 + 1	6
6 + 3 + 2 + 1	24
5 + 4 + 2 + 1	24
5 + 3 + 3 + 1	12
4 + 4 + 3 + 1	12
6 + 2 + 2 + 2	4
5 + 3 + 2 + 2	12
4 + 4 + 2 + 2	6
4 + 3 + 3 + 2	12
3 + 3 + 3 + 3	1
Всего	125

Кроме этого, Я. Бернулли указывает общее правило для нахождения числа способов, которыми может быть получено m очков при одновременном бросании n игральных костей; оно равно коэффициенту x^m в разложении

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n,$$

где x — произвольный параметр. В частности, для $n = 2$ имеем

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 =$$
$$= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^8 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}.$$

Показатели параметра x в правой части тождества указывают на возможные суммы очков при одновременном бросании двух игральных костей от 2 до 12, а коэффициенты — соответственно на число способов получения этих сумм очков.

Аналогичные рассуждения для $n = 4$ приводят к следующей таблице:

Сумма очков	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Число способов	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146
Сумма очков	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Число способов	140	125	104	80	56	35	20	10	4	1	

10. Некто желает при шести бросаниях кости получить все шесть граней в таком порядке: при первом бросании одно очко, при втором — два и т. д. Как велико его ожидание?

Решение. Так как вероятность выпадения какой-либо цифры от 1 до 6 при однократном бросании игральной кости равна $\frac{1}{6}$, то в силу известной формулы вероятности произведения независимых в совокупности событий искомая вероятность

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^6}.$$

Задача Ж. Л. Д'Аламбера — П. С. Лапласа

Французский астроном, математик и физик Пьер Симон Лаплас (1749—1828) активно участвовал в реорганизации высшего образования во Франции, руководил введением метрической системы мер. Научное наследие Лапласа связано с небесной механикой, алгеброй, математическим анализом, теорией вероятностей, математической физикой.

11. Слово «Константинополь» составлено из букв А, И, К, Л, Н, Н, Н, О, О, О, П, С, Т, Т, Ь. Какова вероятность случайного составления этого слова из перечисленных букв?

Решение. Имеем

$$\frac{1}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2^3 \cdot 3^3}{15!}.$$

Цепные дроби

Определение. *Конечной цепной* (или *непрерывной*) *дробью* называется дробь вида

$$q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}},$$

где q_1 — целое неотрицательное число, а $q_2, q_3, \ldots, q_n$ — целые положительные числа.

Цепная дробь обозначается: $[q_1; q_2, q_3, \ldots, q_n]$. Числа $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ называются *элементами* (или неполными частными) цепной дроби. Всякую конечную цепную дробь можно обратить в рациональную дробь.

Пример 1. $[3;1,4,2]=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{9}}=3+\cfrac{9}{11}=\cfrac{42}{11}.$

Всякую рациональную дробь можно обратить в цепную. Пусть, например, дана рациональная дробь $\frac{a}{b}$, причем $b > 0$. Применив к a и b алгоритм Евклида для определения их наибольшего общего делителя, получим конечную систему равенств

$$a=bq_1+r_2,$$

$$b=r_2q_2+r_3,$$

$$r_2=r_3q_3+r_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n,$$

$$r_{n-1}=r_nq_n,$$

где $0 < r_n < \ldots < r_3 < r_2 < b$.

Эта система равенств равносильна следующей системе:

$$\frac{a}{b}=q_1+\frac{r_2}{b}=q_1+\frac{1}{\frac{b}{r_2}},$$

$$\frac{b}{r_2}=q_2+\frac{r_3}{r_2}=q_2+\frac{1}{\frac{r_2}{r_3}},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=q_{n-1}+\frac{r_n}{r_{n-1}}=q_{n-1}+\frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}},$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n}=q_n,$$

из которой последовательной заменой каждой из дробей $\frac{b}{r_2}$, $\frac{r_2}{r_3}$, …, $\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}$, $\frac{r_{n-1}}{r_n}$ ее соответствующим выражением из следующей строки получается представление дроби $\frac{a}{b}$ в виде

$$q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Пример 2. Рациональное число $\frac{43}{19}$ обратить в цепную дробь. Применим алгоритм Евклида к числам 43 и 19. Имеем

$$\begin{array}{r|l} 43 & 19 \\ -38 & 2 \\ \hline 5 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ -15 & 3 \\ \hline 4 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} 5 & 4 \\ -4 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} 4 & 1 \\ -4 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Поэтому $\frac{43}{19}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}$.

Определение. Дроби

$$\frac{P_1}{Q_1}=q_1,\ \frac{P_2}{Q_2}=q_1+\frac{1}{q_2},\ \frac{P_3}{Q_3}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}},\ \ldots,\ \frac{P_n}{Q_n}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{q_n}}}}$$

называются *подходящими* дробями.

Пример 3. Для рационального числа $\frac{43}{19}$ подходящими дробями являются $\frac{2}{1}$, $2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$, $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}=\frac{9}{4}$, $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}=\frac{43}{19}$.

Найдем закон образования подходящих дробей в общем виде. Для удобства положим $P_0=1$, $Q_0=0$. Заметим, что $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k>1)$ получается из $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ заменой в буквенном выражении для $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ числа q_{k-1} на $q_{k-1}+\frac{1}{q_k}$.

Имеем

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{q_1}{1};$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=q_1+\frac{1}{q_2}=\frac{q_1+\frac{1}{q_2}}{1}=\frac{q_2q_1+1}{q_2\cdot 1+0}=\frac{q_2P_1+P_0}{q_2Q_1+Q_0};$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{\left(q_2+\frac{1}{q_3}\right)P_1+P_0}{\left(q_2+\frac{1}{q_3}\right)Q_1+Q_0}=\frac{q_3(q_2P_1+P_0)+P_1}{q_3(q_2Q_1+Q_0)+Q_1}=\frac{q_3P_2+P_1}{q_3Q_2+Q_1}.$$

Допустим, что выполняется равенство

$$\frac{P_k}{Q_k}=\frac{q_kP_{k-1}+P_{k-2}}{q_kQ_{k-1}+Q_{k-2}}. \qquad (*)$$

Докажем, что в таком случае и

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{q_{k+1}P_k + P_{k-1}}{q_{k+1}Q_k + Q_{k-1}}.$$

Равенство (*) дает

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{\left(q_k + \dfrac{1}{q_{k+1}}\right)P_{k-1} + P_{k-2}}{\left(q_k + \dfrac{1}{q_{k+1}}\right)Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{q_{k+1}(q_kP_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1}}{q_{k+1}(q_kQ_{k-1} + Q_{k-2}) + Q_{k-1}} = \frac{q_{k+1}P_k + P_{k-1}}{q_{k+1}Q_k + Q_{k-1}}.$$

Таким образом, числители и знаменатели подходящих дробей можно вычислять по формулам ($k \geq 2$):

$$P_k = q_kP_{k-1} + P_{k-2};$$

$$Q_k = q_kQ_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Эти вычисления удобно производить по следующей схеме:

q	—	q_1	q_2	...	q_{k-2}	q_{k-1}	q_k	...	q_{n-1}	q_n
P	1	q_1	P_2	...	P_{k-2}	P_{k-1}	P_k	...	P_{n-1}	a
Q	0	1	Q_2	...	Q_{k-2}	Q_{k-1}	Q_k	...	Q_{n-1}	b

Пример 4. Найти подходящие дроби к рациональному числу $\frac{100}{63}$.

Разложим рациональное число $\frac{100}{63}$ в цепную дробь. Имеем

$$\begin{array}{r|l} 100 & 63 \\ -63 & \overline{1} \\ \hline \end{array}\quad
\begin{array}{r|l} 63 & 37 \\ -37 & \overline{1} \\ \hline \end{array}\quad
\begin{array}{r|l} 37 & 26 \\ -26 & \overline{1} \\ \hline \end{array}\quad
\begin{array}{r|l} 26 & 11 \\ -22 & \overline{2} \\ \hline \end{array}\quad
\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ -8 & \overline{2} \\ \hline \end{array}\quad
\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ -3 & \overline{1} \\ \hline \end{array}\quad
\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ -3 & \overline{3} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Значит, $\frac{100}{63}=[1;1,1,2,2,1,3]$.

Указанная выше схема дает

q	—	1	1	1	2	2	1	3
P	1	1	2	3	8	19	27	100
Q	0	1	1	2	5	12	17	63

Искомыми подходящими дробями будут $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{19}{12}, \frac{27}{17}, \frac{100}{63}$.

Определение. *Бесконечной цепной дробью* называется выражение вида

$$\frac{P_n}{Q_n}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\ddots+\cfrac{1}{q_n+\ddots}}}.$$

Рассмотрим на конкретном примере разложение иррационального числа в бесконечную цепную дробь.

Пример 5. Разложить в бесконечную цепную дробь иррациональное число $\sqrt{3}$.

Целая часть числа $\sqrt{3}$ есть 1, а поэтому

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{q_2};\ q_2=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Целая часть числа $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ есть 1, а поэтому

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1+\frac{1}{q_3};\ q_2=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1.$$

Целая часть числа $\sqrt{3}+1$ есть 2, а поэтому

$$\sqrt{3}+1=2+\frac{1}{q_4};\ q_4=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

т. е. $q_2=q_4$. Следовательно, неполные частные также будут повторяться. Итак, $\sqrt{3}=[1;1,2,1,2,1,2,...]$.

Приложение 3

Числа Фибоначчи

Элементы числовой последовательности

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots,$$

в которой каждый последующий член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, называются *числами Фибоначчи*. Таким образом, последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots$ чисел Фибоначчи задается начальными значениями $f_1 = f_2 = 1$ и рекуррентным соотношением

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$$

(для каждого натурального $n > 1$). Первые 14 чисел Фибоначчи были впервые приведены в рукописи «Книга абака» (1228) Леонардо Пизанского (Фибоначчи). Эти числа он получил как численность семейства кроликов за год, рождающихся от одной пары, при условии, что от каждой пары кроликов ежемесячно рождается новая пара (см. приводимую ниже задачу из рукописи «Книга абака», помещенную в ней на с. 123—124).

«Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения. Так как первая пара в первом месяце дает потомство, удвой, и в этом месяце окажутся 2 пары; из них одна пара, а именно первая, рождает и в следующем месяце, так что во втором месяце оказывается 3 пары; из них в следующем месяце 2 пары будут давать потомство, так что в третьем месяце родятся еще 2 пары кроликов, и число пар кроликов в этом месяце достигнет 5; из них в этом же месяце будут давать потомство 3 пары, и число пар кроликов в четвертом месяце достигнет 8; из них 5 пар произведут другие 5 пар, которые, сложенные с 8 парами, дадут в пятом месяце 13 пар; из них 5 пар, рожденных в этом месяце, не дают в том же месяце потомства, а остальные 8 пар рождают; так что в шестом месяце оказывается 21 пара; сложенные с 13 парами, которые родятся в седьмом месяце, они дают 34 пары; сложенные с 21 парой, рожденной в восьмом месяце, они дают в этом месяце 55 пар; сложенные с 34 парами, рожденными в девятом месяце, они дают 89 пар; сложенные вновь с 55 парами, которые рождаются в десятом месяце, они дают в этом месяце 144 пары; снова сложенные с 89 парами, которые рождаются в одиннадцатом месяце, они дают в этом месяце 233 пары; сложенные вновь с 144 парами, рожденными в последнем месяце, они дают 377 пар; столько пар произвела первая пара в данном месте к концу одного года» (рис. 1).

Пара
1
Первый
2
Второй
3
Третий
5
Четвертый
8
Пятый
13
Шестой
21
Седьмой
34
Восьмой
55
Девятый
89
Десятый
144
Одиннадцатый
233
Двенадцатый
377

Рис. 1.

Методом математической индукции можно доказать следующие соотношения между числами Фибоначчи:

1) $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;
2) $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$;
3) $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;
4) $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;
5) $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$;
6) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$;
7) $f_n^2 = f_{n-1} f_{n+1} + (-1)^{n+1}$;
8) $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots + (-1)^{n+1} f_n = 1 + (-1)^{n+1} f_{n-1}$;
9) $f_{n+m} = f_{m-1} f_n + f_m f_{n+1}$.

Числа Фибоначчи обладают многими интересными теоретико-числовыми свойствами. Укажем лишь некоторые из них:

1) каждое третье число Фибоначчи четно;

2) каждое четвертое число делится на три;

3) два соседних числа Фибоначчи взаимно просты;

4) f_n делится на f_m тогда и только тогда, когда n делится на m.

Французский математик и астроном Ж. Бине (1786—1856) вывел явную формулу для общего члена f_n последовательности Фибоначчи как функцию от номера n, не требующую знания предыдущих членов:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Эту формулу Бине можно доказать методом математической индукции.

Числа Фибоначчи связаны с числом $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, т. е. с золотым сечением.

Число φ представляется бесконечной цепной дробью вида

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}.$$

Поэтому наилучшими подходящими дробями к числу φ будут

$$1 = \frac{1}{1},\ 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1},\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2},\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3},\ \ldots,$$

т. е. отношения соседних чисел Фибоначчи. В природе для винтообразного расположения листьев на стеблях растений часто бывают характерными количественные отношения последовательных чисел Фибоначчи: $\frac{3}{2}$ для орешника и бука, $\frac{5}{3}$ для абрикоса и дуба, $\frac{8}{5}$ для груши и тополя, $\frac{13}{8}$ для миндаля и ивы и т. д.

Числа Фибоначчи тесно связаны с логарифмической спиралью. Это хорошо усматривается, например, в расположении семечек на подсолнухе или в строении чешуек ананаса и т. п. Числа Фибоначчи были использованы на завершающем этапе доказательства знаменитой десятой проблемы Гильберта. Эти числа нашли применение в современной прикладной (оптимизационной) математике. Казалось бы, какое отношение могут иметь числа Фибоначчи к старинной китайской народной игре цзяньшицзы, в которой двое играющих берут по очереди камни из двух кучек: или любое число камней из одной кучки, или одинаковое число камней из двух кучек. По условию игры выигрывает тот, кто берет последний камень. Оказывается, оптимальная стратегия этой древней игры опирается на использование чисел Фибоначчи. Как видим, числа Фибоначчи появляются самым неожиданным образом в природе, науке и искусстве.

Оказывается, существует связь чисел Фибоначчи с другими, не менее замечательными числами — биномиальными коэффициентами.

Расположим биномиальные коэффициенты в следующий треугольник, называемый треугольником Паскаля:

$$
\begin{array}{llll}
C_0^0 & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
\multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots,}
\end{array}
$$

т. е.

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
$$

Линии, проведенные через числа этого треугольника и идущие под углом 45 градусов к его строкам, назовем *восходящими диагоналями* треугольника Паскаля. Восходящими диагоналями будут, например, прямые, проходящие через числа 1, 4, 3 или 1, 5, 6, 1.

Покажем, что сумма чисел, лежащих на некоторой восходящей диагонали, есть число Фибоначчи.

В самом деле, первая, самая верхняя восходящая диагональ треугольника Паскаля состоит только из единицы. Только из единицы состоит и вторая его диагональ. Для доказательства интересующего нас предложения нам достаточно показать, что сумма всех чисел, составляющих $(n-2)$-ю и $(n-1)$-ю диагонали треугольника Паскаля, равна сумме чисел, составляющих его n-ю диагональ.

Но на $(n-2)$-й диагонали расположены числа C_{n-3}^0, C_{n-4}^1, C_{n-5}^2, …, а на $(n-2)$-й диагонали — числа C_{n-2}^0, C_{n-3}^1, C_{n-4}^2, … .

Сумму всех этих чисел запишем так:

$$C_{n-2}^0+(C_{n-3}^0+C_{n-3}^1)+(C_{n-4}^1+C_{n-4}^2)+\dots . \qquad (2)$$

Но для биномиальных коэффициентов

$$C_{n-2}^0 = C_{n-1}^0 = 1$$

и

$$C_k^i + C_k^{i+1} = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i} + \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)(k-i)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i\cdot(i+1)} =$$
$$= \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i}\left(1+\frac{k-i}{i+1}\right) = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i}\,\frac{i+1+k-i}{i+1} =$$
$$= \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i\cdot(i+1)} = C_{k+1}^{i+1}.$$

Поэтому выражение (*) равно

$$C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \ldots,$$

т. е. сумме чисел, лежащих на n-й диагонали треугольника.

Из только что доказанного на основании вышеприведенного соотношения (1) получаем: сумма всех биномиальных коэффициентов, лежащих выше n-й восходящей диагонали треугольника Паскаля (включая саму эту диагональ), равна $f_{n+2} - 1$.

Таблица значений функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2792	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139

Окончание таблицы

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	90119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3888
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441
1,60	0,4452	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,96	0,4985
1,74	0,4591	2,00	0,4772	2,50	0,4938	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,60	0,499841

Окончание таблицы

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,79	0,4633	2,10	0,4821	2,60	0,4953	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,14	0,4838	2,64	0,4959	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,16	0,4846	2,66	0,4961	5,00	0,500000
1,83	0,4664	2,18	0,4854	2,68	0,4963		
1,84	0,4671	2,20	0,4861				
1,85	0,4678						

Список литературы

1. *Аршинов, М. Н.* Коды и математика. Рассказы о кодировании / М. Н. Аршинов, Л. Е. Саловский. — М. : Наука, 1983. — (Б-чка «Квант», вып. 30).

2. *Баврин, И. И.* Высшая математика для химиков, биологов и медиков : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

3. *Гильдерман, Ю. И.* Лекции по высшей математике для биологов / Ю. И. Гильдерман. — Новосибирск : Наука, 1984.

4. *Гнеденко, Б. В.* Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — М. : Наука, 1988.

5. *Гроссман, С.* Математика для биологов : пер. с англ. / С. Гроссман, Дж. Тернер. — М. : Высшая школа, 1983.

6. *Курош, А. Г.* Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Физматгиз, 1962.

7. *Новиков, П. С.* Элементы математической логики / П. С. Новиков. — М. : Наука, 1983.

8. *Оре, О.* Графы и их применения / О. Оре. — М. : Мир, 1965.

9. *Сигорский, В. П.* Математический аппарат инженера / В. П. Сигорский. — Киев : Техника, 1988.

10. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : пер. с англ. / В. Феллер. — М. : Мир, 1984. Т. 1.

11. *Яблонский, С. В.* Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. — М. : Высшая школа, 2004.

Новые издания по дисциплине «Дискретная математика» и смежным дисциплинам

1. *Гашков, С. Б.* Дискретная математика : учебник и практикум для академического бакалавриата / С. Б. Гашков, А. Б. Фролов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

2. *Гисин, В. Б.* Дискретная математика : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. Б. Гисин. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

3. Дискретная математика : учеб. пособие для вузов / Д. С. Ананичев [и др.] ; под науч. ред. А. Н. Сесекина. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

4. Дискретная математика: прикладные задачи и сложность алгоритмов : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. Е. Андреев, А. А. Болотов, К. В. Коляда, А. Б. Фролов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

5. *Клековкин, Г. А.* Теория графов. Среда maxima : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Г. А. Клековкин. — 2-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

6. *Кудрявцев, В. Б.* Дискретная математика. Теория однородных структур : учебник для бакалавриата и магистратуры / В. Б. Кудрявцев, А. С. Подколзин, А. А. Болотов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

7. *Пак, В. Г.* Дискретная математика: теория множеств и комбинаторный анализ. Сборник задач : учеб. пособие для академического бакалавриата / В. Г. Пак. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

8. *Палий, И. А.* Дискретная математика : учеб. пособие для академического бакалавриата / И. А. Палий. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

9. *Палий, И. А.* Линейное программирование : учеб. пособие для академического бакалавриата / И. А. Палий. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

10. *Попов, А. М.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под ред. А. М. Попова. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

11. *Судоплатов, С. В.* Дискретная математика : учебник и практикум для академического бакалавриата / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

12. *Таранников, Ю. В.* Дискретная математика. Задачник : учеб. пособие для академического бакалавриата / Ю. В. Таранников. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

Учебное издание

Баврин Иван Иванович

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник и задачник для СПО

Формат 70×100 1/16.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 14,97.

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru