

Б. Н Петров, Ю П Портнов-Соколов,  
А. Я Андриенко, В П.Иванов

# БОРТОВЫЕ ТЕРМИНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

«МАШИНОСТРОЕНИЕ»

Б. Н. Петров, Ю. П. Портнов-Соколов,  
А. Я. Андриенко, В. П. Иванов

# БОРТОВЫЕ ТЕРМИНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

---

Принципы построения  
и элементы теории



МОСКВА «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1983

ББК 39.56  
Б82  
УДК 629.7.052

Авторы: Б. Н. Петров, Ю. П. Портнов-Соколов, А. Я. Андриенко, В. П. Иванов

Научный редактор канд. техн. наук **О. К. Соболев**

Рецензент докт. техн. наук профессор **В. С. ФОМЕНКО**

**Бортовые терминальные системы управления:**  
Б 82 Принципы построения и элементы теории /Б. Н. Петров, Ю. П. Портнов-Соколов, А. Я. Андриенко, В. П. Иванов — М.: Машиностроение, 1983.— 200 с.

В пер.: 70 к.

Изложены основы теории терминальных систем управления, обеспечивающих, например, повышение энергетических характеристик жидкостных ракет, достижение цели полета при выведении, сближении и мягкой посадке космических аппаратов. Рассмотренные методы ориентированы на построение бортовых систем с повышенной надежностью управления для объектов многоцелевого типа, работающих в малоизученных условиях.

Для инженеров, занимающихся управлением подвижными объектами и современными проблемами управления.

Б 3606030000-243 — 243-82.  
038(01)-83

ББК 39.56  
6Т5.1

© Издательство «Машиностроение», 1983 г.

ИБ № 2970

**Борис Николаевич Петров**, Юрий Петрович Портнов-Соколов,  
Анатолий Яковлевич Андриенко, Владимир Петрович Иванов

**БОРТОВЫЕ ТЕРМИНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

Редактор *Л. Л. Черкасова*. Художественный редактор *В. В. Лебедев*.  
Технический редактор *Т. И. Андреева*. Корректоры *Л. Л. Георгиевская*, *Н. И. Шарунина*

Оформление художника *Е. В. Бекетова*

---

Сдано в набор 19.07.82. Подписано в печать 21.02.83. Т-04052.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная.  
Печать высокая. Усл. печ. л. 12,5. Уч.-изд. л. 13,38. Тираж 1 600 экз.  
Зак. № 553. Цена 70 к.

---

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение».  
107076, Москва Б-76, Стромьинский пер., 4.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,  
Хохловский пер., 7

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди многообразия бортовых систем управления объектами космической и авиационной техники выделяется класс систем управления, которые должны приводить управляемый объект в заданное конечное состояние к назначенному моменту времени или в заданной точке пространства. Такое требование налагается как основное при управлении выведением ракет-носителей, сближением космических аппаратов, их мягкой посадкой, расходом топлива ракет с ЖРД, при совершении ряда типовых маневров самолетов и т. п. Этот класс систем управления получил название терминальных \* систем.

Как правило, точность и эффективность систем управления этого класса значительно влияют на основные характеристики управляемых объектов, а иногда и возможность выполнения программы полета зависит от этих показателей. Так, система управления мягкой посадкой гарантирует сохранение космического аппарата неповрежденным при соприкосновении его с поверхностью планеты, а система управления сближением позволяет достичь таких относительных положений и скоростей космических аппаратов, которые делают возможной стыковку в космосе. Система управления расходом топлива существенно повышает энергетические характеристики ракет-носителей, позволяя полностью использовать запасы топлива при сохранении режимов работы жидкостного ракетного двигателя в допустимых пределах.

Высокая эффективность бортовых терминальных систем проявляется лишь при малых погрешностях управления в терминальный момент, а их существенная роль в достижении цели полета требует соответствующей надежности управления. Поэтому проблема создания бортовых терминальных систем управления высокой точности и надежности неизменно актуальна и значимость ее повышается с развитием космических программ и появлением новых типов объектов космической техники. Несмотря на то, что задачи, относящиеся к терминальным системам, решаются давно, общий подход к ним и специфические методы их решения, соответствующие особенностям их физического содержания и математи-

---

\* От латинского *terminus* — конечная цель.

ческого описания, стали развиваться сравнительно недавно, при формировании теории терминального управления.

Книга посвящена теории и принципам построения бортовых терминальных систем управления. Она содержит обобщение работ, которые были начаты в 50-х годах с исследования динамики и разработки методов моделирования и регулирования жидкостного ракетного двигателя, изменением тяги или коэффициента соотношения компонентов топлива которого реализуются управляющие воздействия во многих бортовых терминальных системах.

Уже после завершения работы над рукописью книги скончался один из ее авторов — вице-президент Академии наук СССР, председатель Совета «Интеркосмос» академик Борис Николаевич Петров. В течение многих лет он был научным руководителем разработок ряда бортовых терминальных систем; в процессе этих разработок были получены фундаментальные результаты для прогресса отечественной космической техники. Эта книга является последним научным трудом, написанным при его непосредственном участии.

Книга включает совокупность методов синтеза и анализа терминальных систем управления. Эти методы ориентированы на учет основных особенностей работы бортовых систем. Книга написана на высоком теоретическом уровне, имеет практическое значение, позволяя специалистам использовать современные достижения теории управления при проектировании и исследовании бортовых терминальных систем управления.

**Академик В. П. Глушко**

## ОТ АВТОРОВ

Вниманию читателей предлагается книга, в которой излагаются постановки и некоторые пути решения теоретических задач, инициированных практикой построения бортовых терминальных систем. Хотя ряд полученных здесь результатов и вошел составной частью в аппарат проектирования систем, авторы не ставили целью написание систематического руководства по проектированию систем рассматриваемого класса. При этом имелось в виду, что в области проектирования сложных систем автоматики уже опубликованы работы (см., например, [37]), которые имеют непосредственное отношение и к процедуре проектирования бортовых терминальных систем управления.

Представленные в книге результаты можно подразделить на три основные группы:

1) методы построения систем управления, направленные на повышение качества управления;

2) методы, ведущие к повышению надежности систем управления;

3) методы исследования систем, предназначенные для повышения достоверности и снижения трудоемкости инженерных расчетов при проектировании.

Появление книги было бы невозможно без большой многолетней работы ряда творческих коллективов, участвовавших в создании реальных бортовых терминальных систем управления и внесших неоценимый вклад в разработку принципов построения, постановку теоретических задач и развитие методов исследования систем.

Авторы благодарят за многолетнее плодотворное сотрудничество В. Н. Маркова и А. Н. Чацкина, с которыми совместно прошли долгий путь в становлении и формировании основных положений, заложенных в содержание книги, благодарят О. К. Соболева, А. С. Поддубного, А. А. Муранова, В. А. Жукова, В. К. Завадского за полезные обсуждения при подготовке материалов книги, а также О. А. Викторову, Л. Г. Кленовую и Е. И. Тропову за большую помощь при подготовке рукописи к печати.

Авторы будут признательны читателям за критические замечания и пожелания по содержанию книги, которые можно присылать по адресу: 107076, Москва Б-76, Стромынский пер., 4. Издательство «Машиностроение».

# ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ БОРТОВЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## 1.1. Проблемы построения бортовых терминальных систем управления

Во многих областях техники возникает задача приведения объекта управления в заданное состояние в назначенный момент времени или в назначенной точке (области) пространства\*. Системы управления, решающие такую задачу, принято называть терминальными системами управления [2, 44].

Задачи терминального управления возникают в системах управления наземным транспортом, при управлении манипуляторами, химическими реакторами циклического действия, при управлении процессом конверторной выплавки стали и другими процессами. Терминальный характер присущ и некоторым постановкам задач управления в экономике.

Наиболее широкое применение терминальные системы имеют в ракетно-космической и авиационной технике: при управлении мягкой посадкой, сближением, причаливанием космических аппаратов (КА), выводением ракет-носителей, синхронизацией опорожнения топливных баков, при посадке самолетов обычного типа и самолетов с вертикальной посадкой, при различных маневрах самолетов, требующих точного выдерживания координат состояния, например, при сближении самолетов для заправки топливом в полете, при смыкании строя во время группового полета. Разнообразные задачи терминального управления возникают при построении аэрокосмических транспортных систем. К ним относятся задачи терминального управления при выведении и выходе на точную орбиту, управления межорбитальным транспортным аппаратом, включая задачи перехода с орбиты на орбиту, спасания, инспекции ИСЗ и др. [24].

Специфические задачи терминального управления возникают при дальних космических экспедициях, когда совершается последовательный облет ряда планет и их спутников, астероидов и других космических тел. Сложные трассы этих полетов включают последовательность этапов, на каждом из которых решается задача терминального управления, и задачи эти связаны между собой, так что можно говорить о многотерминальной задаче управления.

---

\* Эта точка (область) может быть задана и в системе координат, связанной с некоторым движущимся по отношению к исходной системе телом.

Задачи управления многотерминального типа возникают и при создании систем больших космических конструкций. Так, при формировании точного профиля зеркала — отражателя или большой антенны для передачи на Землю энергии, полученной в космосе от Солнца, потребуется во множестве точек переводить элементы конструкции из начальных неточных в заданные конечные состояния с образованием в конце такого процесса управления точной заданной формы поверхности в целом. Все это может совершаться совокупностью элементарных терминальных систем управления, имеющих естественные связи через объект управления и работающих в условиях малоизученных возмущающих воздействий, возникающих от влияния нежесткости конструкций, термических деформаций, действия солнечного ветра и т. п.

При построении и обслуживании больших космических систем, по-видимому, будет иметь место многотерминальность управления транспортными космическими кораблями, которые могут за один вылет с Земли или промежуточной станции доставлять элементы конструкции в различные точки большой системы или производить в них операции обслуживания или ремонта также в разных местах системы, совершая многократные маневры сближения и стыковки.

Заметим, что терминальный характер управляемых процессов является органическим свойством ряда объектов ракетно-космической и авиационной техники. Так, например, при выведении ракет-носителей терминальный момент времени соответствует моменту выключения двигательной установки, и основные требования по качеству управления относятся к этому моменту. При управлении сближением КА терминальный момент соответствует моменту приведения управляемых объектов в точку или область пространства, в которой должны выполняться требуемые показатели качества управления относительным движением.

Значительную роль играют терминальные системы управления в решении проблемы повышения энергетических характеристик ракетных летательных аппаратов (далее для краткости будем писать «ракет») с жидкостными ракетными двигателями (ЖРД). Сущность сформулированной здесь концепции [46] состоит в следующем.

Кроме традиционных со времени зарождения ракетно-космической техники путей улучшения энергетических характеристик благодаря совершенствованию топлива, двигателя и конструкции собственно ракеты, имеется и другой путь, дающий существенный прирост энергетических характеристик ракеты, обусловленный использованием средств управления. Чтобы реализовать этот путь, нужно, с одной стороны, максимально сократить запасы топлива, потребного для совершения управляемого полета — реализации программной траектории, коррекции отклонений относительно нее, выполнения необходимых маневров, придания ракете требуемого положения в пространстве и т. п.; с другой стороны, нужно использовать эти запасы топлива наиболее полно и эффективно,

сводя к минимуму неиспользованные запасы топлива. Минимизация потребного запаса топлива может быть осуществлена оптимизацией траектории выведения ракеты, выбором рациональных средств маневрирования и таких принципов построения и характеристик систем управления полетом, которые снижают затраты топлива на управление.

Повышение эффективности использования располагаемого запаса топлива достигается применением специальных систем управления, воздействующих на режимы расходования топлива. Наиболее эффективные из таких систем относятся к классу терминальных систем управления.

Характерным примером задачи терминального управления [18, 46] может служить управление синхронизацией опорожнения баков с запасами компонентов топлива жидкостной ракеты. Управлением расходом топлива ракеты с ЖРД можно существенно повысить энергетику ракеты и выводить на орбиту значительно больший груз (или тот же груз на более высокие орбиты), не увеличивая начальной массы топлива и не ухудшая конструктивных характеристик ракеты и двигателя.

Основа этого эффекта состоит в следующем. При приближении к моменту выключения двигателя (к терминальному моменту) масса ракеты приближается к массе «сухой» конструкции, которая составляет малую долю от взлетной массы. Неиспользованное топливо («мертвая масса») на этом фоне будет сказываться очень неблагоприятно и следует стремиться уменьшить его количество настолько это возможно. Достигается это регулированием (синхронизацией) опорожнения топливных баков ракеты. Оба компонента топлива сжигаются к моменту выключения ЖРД (к концу активного участка полета) одновременно и практически полностью, и ракета, максимально облегченная (за счет минимизации неиспользуемых запасов топлива), приобретает скорость, наивысшую из возможных для данной конструкции. Возникает требование очень высокой, нередко уникальной, точности терминального управления расходом топлива жидкостной ракеты.

Существует два основных типа конструктивной компоновки жидкостных ракет — моноблочная, в которой расположенные один над другим баки окислителя и горючего образуют единый блок, и пакетная, которая представляет собой связку параллельно расположенных моноблочных ракет. Примером ракет первого типа может служить ракета-носитель спутников серии «Интеркосмос», второго типа — ракета-носитель типа «Восток», в конструкции которой нашла отражение основополагающая для этого типа носителей идея «эскадрильи ракет», высказанная К. Э. Циолковским еще в 1935 г.

Соответствующие этим двум компоновкам системы терминального управления расходом топлива должны с высокой точностью (с погрешностью порядка не более десятых долей процента) к моменту выключения ЖРД уравнивать относительные количества окислителя и горючего в баках моноблочной ракеты и с

подобной же точностью уравнивать количество компонентов в блоках ракеты пакетной компоновки.

В связи с этим уместно вспомнить одну из бесед с главным конструктором ракетно-космических систем С. П. Королевым, под руководством которого были созданы ракетоноситель и корабль «Восток». На этой ракете испытывалась бортовая терминальная система управления расходом топлива. Он напомнил об ответственности при расчете новой по тем временам составляющей гарантийных запасов топлива, определяемой ожидаемой погрешностью системы. Если бы была допущена ошибка, то соответственно повысилась бы вероятность падения отработавшей ракеты за границы допустимой зоны, в места, где могли бы быть люди, пастись стада... Об этом и говорил С. П. Королев, а такие высказывания навсегда врезаются в память.

Эффективность применения терминальных систем управления расходом топлива весьма критична к их точностным показателям. Это же характерно и для других терминальных систем управления подвижными объектами. Например, превышение скорости сверх допустимых значений при решении задачи мягкой посадки (рис. 1) может привести к разрушению или опрокидыванию КА. Поэтому система управления мягкой посадкой должна выдерживать заданную скорость аппарата на назначенной высоте с точностью порядка единиц метров в секунду.

Успех проведения операции встречи в космосе определяется точностью выдерживания относительной скорости аппаратов в момент осуществления стыковки. Так, в конце этапа дальнего сближения, который начинается обычно при относительном расстоянии КА в десятки километров и заканчивается на расстоянии 300—400 м, относительная скорость должна иметь величину 20—30 м/с [17, 19]. Этап причаливания, начинающийся с относительной дальности 300—400 м, оканчивается в момент касания КА. Относительная скорость в этот момент не должна превышать 0,1—0,5 м/с, должны быть обеспечены малые относительные поперечные и угловые смещения аппаратов. Только в этих условиях может качественно произойти собственно стыковка — соединение двух аппаратов в единое целое, с соединением всех конструктивных элементов и коммуникаций и со смыканием замков.

Выделим и будем рассматривать довольно обширный класс систем терминального управления — те системы, которые предназначены для работы на подвижных объектах — ракетно-космических и авиационных. Этот класс систем назовем бортовыми терминальными системами управления.

Высокие требования к качеству управления ставят проблему оптимизации как необходимый элемент в процедуре построения бортовых терминальных систем управления.

Отличительными чертами систем этого класса, кроме обычных жестких требований к качеству управления при высоком уровне возмущений и помех, являются требования высокой надежности

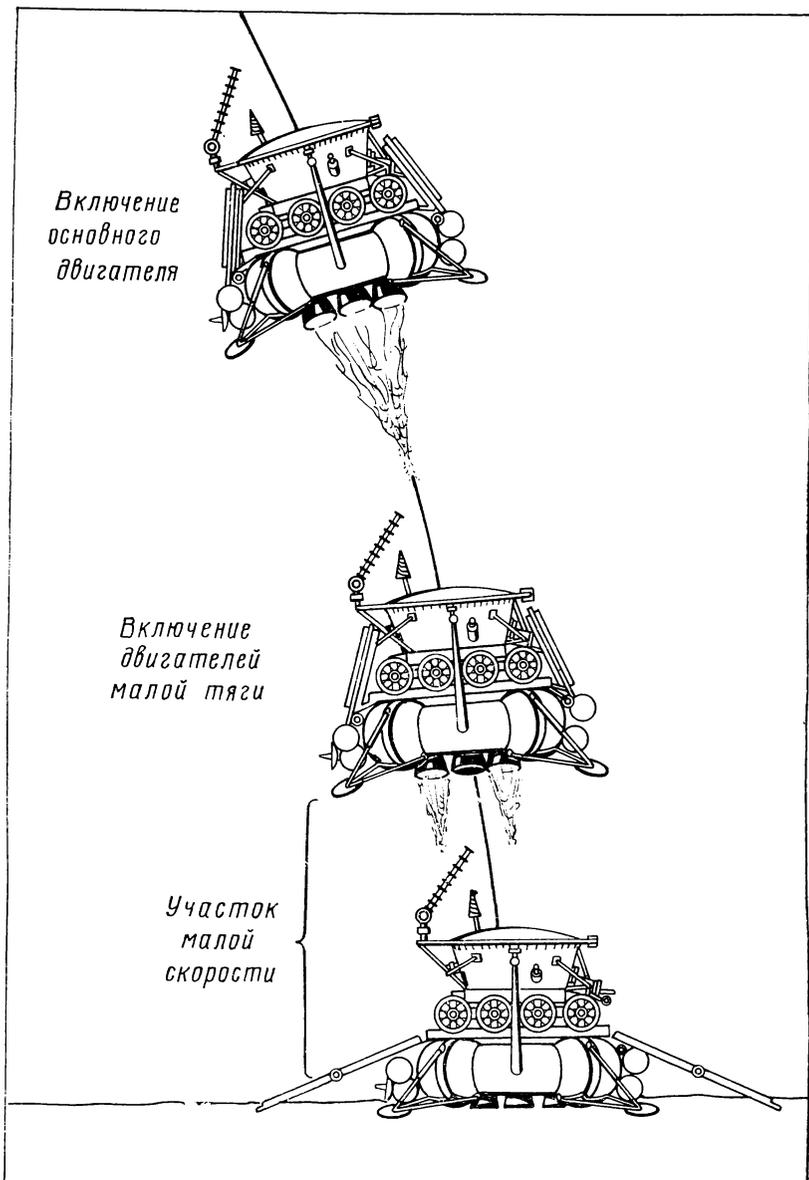


Рис. 1

функционирования в бортовых условиях, минимальных габаритов, массы и потребления энергии, а также требования высокой технологичности в производстве и простоты в эксплуатации. Эти системы должны обеспечивать приемлемое качество управления в условиях характерной для авиационных и космических объектов неопределенности параметров и возмущений, при частичных отказах в элементах системы. В частности, в отличие от систем управления стационарными объектами, бортовые системы должны удовлетворительно работать при непредвиденных (например, аварийных) изменениях характеристик объекта управления. Это связано с тем, что восстановление характеристик объекта (его ремонт) в бортовых условиях осуществить значительно сложнее, чем в условиях наземной эксплуатации системы.

Другая черта задачи оптимизации бортовых терминальных систем связана с многоцелевым характером ряда управляемых объектов (например, транспортного корабля, космического буксира, космического корабля в режиме спасания). Конструкция таких многоцелевых объектов предусматривает возможность изменения цели функционирования объекта, при котором происходит существенное изменение характеристик объекта и возмущений. Для систем управления стационарными объектами изменение цели функционирования, требующее изменения параметров и, может быть, структуры алгоритма управления, не вызывает принципиальных трудностей: для каждой цели может быть спроектирована своя система. Для бортовых систем такой подход к решению задачи управления многоцелевым объектом неприемлем. Поэтому решение задачи должно приводить к построению терминальной системы, алгоритм управления которой мог бы быть легко приспособлен малым числом перенастроек к измененной цели функционирования объекта.

Сравнительно новая постановка задачи оптимизации терминального управления возникает при спасании экипажа аварийного космического корабля при помощи спасательного космического аппарата. В этом случае важным является быстрее достижение спасательным аппаратом (или пилотируемым кораблем) аварийного корабля при условии высокой точности сближения и ограниченного ресурса по энергетике. Подобная же задача характерна и для инспекции космических объектов [17]. Это приводит к выделению нового типа терминальных систем — оптимальных по быстродействию (или близких к тому) с высокой заданной точностью в конце процесса управления при ограниченном энергетическом ресурсе.

Участие человека в пилотируемых полетах налагает свой отпечаток на построение бортовых терминальных систем управления. Возникают требования рационального построения алгоритмов управления, обеспечивающих наиболее благоприятные условия сопряжения ручного управления с автоматическим и перехода с автоматического на ручное, например, при отказах в аппаратуре. Наклаиваются дополнительные требования по обеспечению не-

прерывности обзора экипажем поверхности планеты при мягкой посадке или космического аппарата, с которым производится стыковка. Появляются требования контролируемости процесса управления со стороны человека. Это приводит к необходимости выделять и эффективно наблюдать специально назначенные координаты движения, легко доступные для контроля и достаточно полно характеризующие процесс в целом, или с той же целью формировать из исходных координат контролируемые функции.

Нужно отметить, что при оптимизации реальных бортовых терминальных систем управления практически всегда кроме основного терминального критерия приходится принимать во внимание и другие критерии, в том числе интегрального типа (например, критерий минимума расхода энергии на управление). Эти дополнительные критерии превращают задачу построения системы в многокритериальную, решение которой, как правило, сложнее первоначальной однокритериальной задачи терминального управления.

Процессы управления в бортовых терминальных системах существенно стохастичны. Природа случайных воздействий в этих системах чрезвычайно разнообразна, а число их очень велико и может достигать сотен и тысяч. Можно определить три основные класса таких воздействий: внешние случайные возмущающие факторы, порождаемые особенностями состояния среды и ряда процессов в объекте управления; параметрические возмущения, определяемые различного рода случайными отклонениями в конструктивных параметрах и характеристиках объекта и элементов аппаратуры управления; помехи и шумы в измерительных трактах системы, доставляющих информацию о координатах ее состояния. Как правило, объекты управления в бортовых терминальных системах имеют много входов, по которым действуют случайные воздействия. Во многих случаях априорные вероятностные характеристики возмущений плохо известны или совсем неизвестны и появляются элементы неопределенности в их описании.

Ясно, что информация о возмущениях, нужная при формировании управляющих воздействий, в подавляющем большинстве случаев не может быть получена прямыми измерениями возмущающих воздействий, так как чаще всего на борту нет приборов для измерения этих величин. Эта информация получается главным образом в виде статистических оценок возмущающих воздействий на основе анализа предыстории процесса управления, нередко с использованием косвенной информации.

Оценки тем точнее приближаются к истинным величинам возмущений, чем полнее использована априорная информация и чем больше текущей измерительной информации накоплено и заложено в их формирование, т. е. чем ближе к терминальному моменту определена оценка, используемая для формирования управления. Это подчеркивает адекватность способа управления с использованием оценок возмущающих воздействий терминальной природе изучаемой задачи управления: наиболее точные оценки будут определены

именно при приближении к терминальному моменту, что будет способствовать повышению точности управления в этот момент, т. е. выполнению главного требования по качеству управления.

Сказанное позволяет прийти к выводу, что наиболее подходящим, органически необходимым при построении бортовых терминальных систем управления будет стохастический синтез оптимального управления. Этот факт, в особенности при наличии помех в измерительном тракте контура обратной связи и в условиях неопределенности возмущений и характеристик объекта, существенно затрудняет процедуру оптимизации бортовых терминальных систем управления.

Подчеркнем то важное обстоятельство, что эффективность использования косвенной информации при статистическом подходе к синтезу системы возрастает в результате прогнозирования в каждый момент времени процесса управления на последующие моменты. Идея прогнозирования естественным образом сложилась при решении задач коррекции полета космического аппарата к заданной цели: при определении корректирующего воздействия оценивается, прежде всего, конечный промах при отсутствии корректирующих управляющих воздействий и оптимизируется программа компенсации этого промаха. Применительно к другим системам управления эта идея нашла последовательное развитие в методе решения задачи оптимального управления при входе в атмосферу.

В последнее время в связи с развитием дальних космических экспедиций, долговременных орбитальных станций, появлением все большего числа геостационарных спутников, а также в связи с особенностями использования многоразовых транспортных кораблей и в будущем больших космических конструкций все большую актуальность получает проблема повышения сроков активной жизни космических аппаратов в целом и их систем управления в частности.

Сейчас уже стало реальным достижение срока активной жизни систем управления 7—10 лет. В космических программах будущего этот срок может быть еще больше. В полной мере это относится и к сроку активной жизни бортовых терминальных систем управления, так как интервал управления может повторяться многократно, например, в многотерминальных системах, на транспортных космических кораблях, многократно доставляющих грузы к станциям и большим космическим системам, на пилотируемых кораблях многоразового действия и т. п.

Решение проблемы увеличения активной жизни бортовых терминальных систем управления содержит много составляющих. Сюда относятся повышение надежности элементов, выбор таких структур бортовых цифровых вычислительных машин (БЦВМ) и других частей системы, которые обеспечивают их устойчивость к отказам отдельных элементов (толерантность), широкое применение избыточности, вплоть до уровня процессоров и т. п.

Однако, есть и иной подход, ведущий к дополнительному повышению срока активной жизни бортовых систем. Это — придание им свойства надежности управления. Оно достигается построением таких алгоритмов управления, которые при отказах в отдельных частях системы сохраняют приемлемое качество управления. При этом в режимах нормального функционирования качество управления может незначительно снижаться. Этот подход, родившийся в последние годы на стыке вычислительной техники и теории управления, по нашему мнению, требует пристального внимания и, по-видимому, представляет собой новую, третью, после устойчивости и качества управления, ступень, по которым восходят наши представления о требованиях к системам управления.

Сочетание выполнения традиционных требований по качеству управления с выполнением требований из второй группы — далеко не тривиальная задача. Предметом исследований в теории бортовых терминальных систем управления и являются методы построения систем, возможно более полно удовлетворяющих всему комплексу или наиболее значительным совокупностям перечисленных требований.

В решении практических задач терминального управления нашли широкое применение системы импульсного типа. Это обусловлено тем, что для получения высокого качества управления в конце процесса нет необходимости в непрерывном управлении объектом. В ряде случаев хорошее качество управления в терминальный момент удается получить при сравнительно малом (в пределах 5—15) числе измерений и управлений на интервале работы системы (такие импульсные системы иногда называют широкобазными). При этом имеется в виду, что возможные быстротекающие составляющие процесса, если их присутствие мешает решению терминальной задачи, подавляются фильтрацией или отдельным регулятором нетерминального типа.

Отметим, что для получения высокой точности исходной информации датчики, применяемые в терминальных системах, часто строятся на дискретном принципе измерения.

Наличие в контуре управления подвижными объектами бортовой ЦВМ дает весьма подходящую основу для реализации терминальных систем управления импульсного типа.

## 1.2. Примеры бортовых терминальных систем управления

Для того чтобы сделать изложение материала книги более предметным, дадим описание некоторых типовых бортовых терминальных систем управления и приведем кратко результаты исследования характеристик ЖРД как объекта управления и динамического звена в контуре бортовых систем управления.

Целесообразность уделить здесь внимание вопросам изучения динамики ЖРД обусловлена тем, что практически для всех объектов ракетно-космической техники характерно наличие жидкостного

двигателя в качестве либо части объекта управления, либо исполнительного органа, реализующего управляющие команды. Это относится и к терминальным системам управления движением и силовыми установками ракетно-космических объектов.

**1. ЖРД как звено терминальных систем управления.** Первые получившие практическое использование работы по исследованию динамики, принципов регулирования и способов моделирования ЖРД были выполнены группой специалистов по автоматическому управлению в начале 50-х годов по предложению главного конструктора ракетных двигателей В. П. Глушко в связи с разработкой двигателей для первой мощной космической ракеты-носителя.

Уже в те годы было ясно, что двигатели будущей ракеты должны быть управляемыми, иметь системы стабилизации давления в камере сгорания и коэффициента соотношения компонентов топлива, допускающие перенастройку в полете по сигналам систем управления с целью оптимизации характеристик ракеты-носителя в целом.

Специалистами в области теории ЖРД были разработаны методы расчета параметров двигателя и его статических характеристик и получены первоначальные уравнения динамики. ЖРД описывался сложной системой нелинейных (или линеаризованных) дифференциальных и конечных уравнений высокого порядка. Характерным для этой системы было то, что многие постоянные времени и времена чистого запаздывания в звеньях двигателя имели один и тот же порядок величин. Все это очень затрудняло анализ системы и создание упрощенных динамических моделей двигателя.

Специалистами по управлению впервые для исследования динамики ЖРД был применен аппарат теории автоматического управления и были заложены начала моделирования двигателя при помощи ЭВМ. Это позволило получить при помощи развитых в теории управления частотных методов доступные для исследования модели ЖРД. Были определены частотные характеристики двигателя и переходные процессы, описывающие динамику по различным каналам системы. Оказалось возможным вводить обоснованные упрощения модели, если обнаруживался факт малых деформаций частотных характеристик при аппроксимации исходных уравнений более простыми. Таким образом, было получено математическое описание ЖРД как объекта регулирования давления в камере сгорания (тяги), коэффициента соотношения компонентов, угловой скорости вала турбонасосного агрегата (ТНА) и др. Были выполнены первые поисковые исследования по выбору принципов построения замкнутых систем управления указанными величинами как для единичного двигателя, так и для пакета двигателей (связки) в режиме синхронизации, а также намечены пути построения терминальных систем синхронизации опорожнения баков ракетных летательных аппаратов с двухкомпонентными ЖРД.

Впоследствии работы по исследованию динамики ЖРД ини-

цировали развитие малоизученного раздела теории автоматического управления, посвященного системам со многими запаздываниями, с передаточными функциями следующего вида [10]:

$$W(s) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n s^n \exp(-s\tau_n)}{\sum_{m=0}^M b_m s^m \exp(-s\tau_m)},$$

где  $\tau$  — время запаздывания;  $a_n, b_m$  — коэффициенты.

Электронное моделирование, начатое на первых образцах аналоговых вычислительных машин с последующим переходом на цифровые машины, существенно расширило возможности и ускорило темпы исследования динамики ЖРД, позволило исследовать нелинейные и нестационарные системы применительно к ЖРД различных динамических схем в широком диапазоне режимов.

Были выполнены работы по исследованию принципов построения и динамики систем регулирования таких величин, как давление в камере сгорания, коэффициент соотношения расходов, а также систем управления расходом топлива, включающих ЖРД как часть объекта управления. Это были одни из первых терминальных систем управления, предназначенных для использования в бортовых условиях. Были выявлены требования к конструктивным элементам систем — датчикам давления, расхода и уровня, сервоприводам. В результате этих работ были сформулированы технические задания специализированным организациям на разработку приборов с уникальными по тем временам характеристиками. После преодоления многих трудностей были созданы и нашли применение в бортовых системах управления прецизионные датчики давления, предназначенные для установки на ЖРД в качестве чувствительных элементов регуляторов давления в камере сгорания; расходомеры на большие расходы высоко- и низкокипящих компонентов топлива, предназначенные для установки в топливных магистралях ракеты-носителя и т. п. Созданию таких приборов сопутствовало создание стендовой базы для их испытаний и тарировок.

Большого цикла исследований и конструкторских разработок потребовало создание равномерных трактов терминальных систем управления расходом топлива. Задачи, подобные этой, никогда ранее не ставились в измерительной технике. Требовалось измерять запасы компонентов в баках (или, вернее, рассинхронизацию запасов окислителя и горючего) с погрешностью, не превышающей десятых долей процента, в бортовых условиях, когда поверхность жидкости в баках очень беспокойна, и в случаях криогенных компонентов. Решение было найдено на основе порогово-дискретного принципа программного управления и вылилось в создание ряда уникальных по своим характеристикам дискретных широкобазных уровнемеров с различными по своей физической основе точечными чувствительными элементами, с эффектив-

ными гидромеханической и электрической системами фильтрации сигналов, резко снижающими уровень помех при измерениях. Одновременно развивались методы экспериментальных исследований динамики ЖРД при натурных испытаниях. Особенно актуальной эта проблема стала в связи с использованием ЖРД как звена систем управления движением и в связи с исследованиями явления продольной устойчивости ракеты. Задача получения достоверных экспериментальных динамических характеристик ЖРД существенно осложнялась из-за высокого отношения уровня шума к уровню полезного сигнала и трудностей в реализации гармонических воздействий по входным каналам ЖРД. Были разработаны специальные методы обработки результатов при частотных испытаниях и в режиме нормальной эксплуатации. Эти методы, ориентированные на использование вычислительной техники, основывались на применении настраиваемой модели и вариационных подходов и явились составляющей нового аппарата экспериментального исследования динамики ЖРД и его элементов.

Выбор динамической модели ЖРД как звена терминальных систем управления зависит от характера задачи, которую решает система, в первую очередь — от быстродействия системы в главном контуре управления и от наличия малых контуров с возможными высокочастотными автоколебаниями.

Для медленнодействующих систем управлением расходом топлива ЖРД в главном контуре управления может быть представлен в виде статического звена с коэффициентом усиления, связывающим изменение коэффициента соотношения компонентов топлива  $k$  с углом  $\alpha$  поворота дросселя в высоконапорной магистрали ЖРД или изменение суммарного расхода топлива  $G_{\Sigma}$  через двигатель с углом поворота  $\beta$  винта редуктора, дозирующего компонент газогенерации. Передаточные функции ЖРД при этом имеют вид

$$W(s) = K'_{дв} = dk/d\alpha; \quad W(s) = K''_{дв} = \partial G_{\Sigma} / \partial \beta.$$

Для систем регулирования кажущейся скорости (РКС) принято учитывать постоянную времени двигателя, тогда

$$W(s) = K''_{дв} (Ts + 1)^{-1},$$

где  $T \approx 0,05 \dots 0,2$  с — приведенная постоянная времени двигателя (для простейших схем ЖРД она примерно равна постоянной времени турбонасосного агрегата).

При решении задач, в которых следует ожидать влияния на процессы управления чистого запаздывания, принимается

$$W(s) = \frac{K''_{дв}}{(Ts + 1) \exp \tau s},$$

где  $\tau \approx 0,001 \dots 0,2$  с — приведенное время запаздывания.

Особые требования возникают к переходным процессам в ЖРД, используемых в импульсных режимах в терминальных си-

стемах управления сближением, мягкой посадкой и др. При малых импульсах в завершающей части процесса важно иметь малый разброс таких характеристик двигателя, как запаздывание, постоянная времени и величина импульса последствия при выключении ЖРД. Только в этом случае можно ожидать однозначности в реализации управляющих команд и удовлетворительного качества управления в терминальный момент.

**2. Терминальные системы управления расходом топлива ракет с ЖРД.** Рассмотрим сначала систему управления расходом топлива для ракеты моноблочной компоновки.

Как было показано в предыдущем разделе, энергетические характеристики ракеты будут наивысшими, если при прочих равных условиях весь запас топлива из баков ракеты будет израсходован к терминальному моменту, который соответствует моменту выключения ЖРД. Однако, запланировать полное израсходование запасенного топлива к терминальному моменту нельзя, так как в системе двигательной установки, включающей собственно ЖРД, баки с трубопроводами, систему наддува баков и т. д., действуют случайные возмущения. Основные из них следующие:

погрешности в заправке баков ракеты компонентами топлива, приводящие к несоответствию количеств компонентов фактически заправленного и расчетного потребляемого двигателем топлива;

погрешности в настройке двигателя на заданное (номинальное) значение потребляемых двигателем расходов окислителя и горючего, вызывающие несоответствие фактического соотношения расходов компонентов топлива заданному;

отклонения в значениях давления наддува баков, вызывающие погрешности в ожидаемых расходах окислителя и горючего через двигатель;

отклонения в температурах компонентов, приводящие к несоответствию объемных и весовых количеств компонентов, потребляемых двигателем;

отклонения предстартовых расходов компонентов топлива от их расчетных значений, что приводит к избытку одного из компонентов при работе ЖРД на номинальном режиме и т. д.

Эти возмущающие факторы являются случайными величинами с различными статистическими характеристиками. Чтобы гарантировать достижение предельных орбит или выведение предельных грузов, приходится из полного запаса топлива выделять так называемые гарантийные запасы, которые резервируются для обеспечения выведения при действии указанных (и других) случайных возмущений. Ясно, что гарантийные запасы желательно иметь минимальными, а это для ракеты моноблочной компоновки можно осуществить, если к терминальному моменту с высокой точностью синхронизировать (уравнять) количества окислителя и горючего. Сделать это можно, если измерять текущие количества компонентов, сравнивать их относительные количества и по результатам сравнения (по рассогласованию) изменять коэффициент соотношения расходов окислителя и горючего в такую сторону и в такой

мере, чтобы к терминальному моменту рассогласование стало равным нулю.

В таких системах запасы компонентов в баках ракеты определяются при помощи уровнемеров. Рациональным оказывается использование порогово-дискретного принципа программного управления, который здесь применяется в следующем виде.

В баках окислителя (БО) и горючего (БГ) (рис. 2) возможно ближе к продольным осевым линиям (чтобы уменьшить влияние перекоса зеркала жидкости при действии боковых перегрузок) установлены датчики уровня окислителя (ДУО) и горючего (ДУГ), представляющие собой штанги с набором равного числа чувствительных элементов (ЧЭ), которые реагируют на факт пересечения уровня, на котором они установлены, зеркалом жидкого компонента. При опорожнении баков по расчетным программам пересечение ЧЭ одинаковых номеров в БО и БГ происходит одновременно, разность времен их пересечения  $t_{ок} - t_{г}$  и рассогласование относительных запасов (уровней) компонентов равны нулю. При наличии возмущений истинные процессы опорожнения получают отличие от программных номинальных и возникает неодновременность пересечения ЧЭ одинаковых номеров в БО и БГ. Это приводит к появлению временного рассогласования  $\Delta t = t_{ок} - t_{г} \neq 0$ , которое однозначно характеризует рассогласование относительных запасов окислителя и горючего, формируется в усилителе-преобразователе УП и является входным сигналом вычислительного устройства (ВУ) и является входным сигналом вычислительного устройства (ВУ).

ВУ может быть реализовано аппаратно в виде прибора или программно в БЦВМ. В ВУ формируется алгоритм управления. С выхода ВУ сигнал  $J$  поступает в управляющее устройство (УУ), и далее команда  $\Delta u$  поступает на привод (ПД) дросселя. Дроссель (Др), устанавливаемый в одной из основных высоконапорных магистралей ЖРД после турбонасосного агрегата (ТНА), поворачивается на угол  $\Delta \alpha$ , осуществляя изменение гидравлического сопротивления магистрали и тем самым изменяя в нужную сторону расходы и коэффициент соотношения компонентов через ЖРД. В случае необходимости вводится обратная связь (ОС), охватывающая привод дросселя. Описанная схема повторяет свое действие при срабатывании каждого из последующих ЧЭ, вплоть до последнего перед терминальным моментом. Таким образом, терминальная система управления расходом топлива представляет собой импульсную систему управления с широтной модуляцией. Для фильтрации колебаний зеркала жидкости в баках летящей ракеты осуществляется разнесение собственной частоты жидкости в системе труб, содержащих ЧЭ, и частоты колебаний жидкости в

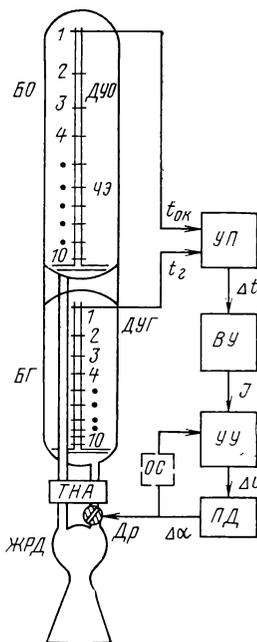


Рис. 2

баках. Все же помехи и погрешности в таких измерительных трактах остаются большими, и последующая фильтрация и улучшение сигналов осуществляется частично в УП, а частично — выбором алгоритма управления, реализуемого в ВУ. Нередко здесь применяется алгоритм, содержащий информацию об очередном и части предыдущих измерений.

При многократном повторении (при каждом очередном измерении) такой алгоритм осуществляет фильтрацию, осреднение измерительных помех, что благоприятно влияет на точность управления, особенно, если оптимизировать коэффициенты алгоритма. Вместе с тем, подобный алгоритм экономичен в смысле загрузки ВУ (или БЦВМ) и тем самым реализует идеологию ограничения по структуре (сложности) системы.

Дискретные уровнемеры удобны еще тем, что в них легко учитывать отличие формы баков от цилиндрической — путем смещения ЧЭ вдоль оси штанги. Дискретные уровнемеры легко допускают также оптимизацию интервалов квантования в импульсной системе — достаточно расположить ЧЭ вдоль штанги в рассчитанных при оптимизации местах и будет реализовано оптимальное во времени следование интервалов между измерениями (и, соответственно, управлениями). Так достигается дополнительное повышение точности управления расходом топлива. Подобные системы принято называть СОБ — «системы (регулирования) опорожнения баков». Они нашли широкое применение, так как имеют высокую точность, позволяют намного снизить гарантийные запасы и тем самым существенно повысить энергетику ракет с ЖРД. Считают, что выигрыш от применения СОБ может достигать 5—10% и более в пересчете на полезную нагрузку, выводимую последней ступенью ракеты-носителя на заданную орбиту. Достигается этот выигрыш относительно недорогой ценой — установкой на ракете нескольких сравнительно небольших и легких приборов, с малым потреблением энергии, с малым числом подвижных деталей.

Системы типа СОБ хорошо вписываются в общий комплекс при наличии БЦВМ, занимая сравнительно небольшую часть вычислительной мощности бортовой машины.

Наиболее сложными и ответственными моментами при построении аппаратуры систем СОБ является создание высокоточных дискретных уровнемеров, способных работать в бортовых условиях в компонентах с агрессивными или криогенными свойствами, а также обеспечение высокой надежности системы, так как отказ ее в предельных случаях может привести к аварийной ситуации для объекта в целом.

Чувствительными элементами уровнемеров могут быть конденсаторы, индуктивности, поплавки, ультразвуковые вибраторы и т. п. Эти элементы целесообразно включать в мостовые схемы, разбаланс которых фиксирует момент пересечения зеркалом жидкости уровня установки ЧЭ. Для повышения надежности системы используется весь арсенал средств, известных в технике построе-

ния бортовых автоматических систем, в том числе идеология надежности управления (толерантность).

Перейдем теперь к рассмотрению терминальных систем управления расходом топлива для ракет-носителей с пакетной компоновочной схемой.

Такие ракеты представляют собой связку блоков, каждый из которых является моноблочной ракетой. Поэтому, как правило, ракета пакетной схемы в каждом из блоков имеет систему управления расходом топлива типа СОБ. Кроме того, для обеспечения высокой энергетической отдачи связки блоков, входящих в пакет, необходимо обеспечить одновременное окончание топлива во всех блоках, образующих в совокупности ступень ракеты.

На рис. 3 показана структурная схема комплекса терминальных систем управления расходом топлива для космической ракеты пакетной компоновки.

Первая ступень включает пакет из пяти блоков — центрального и четырех одинаковых боковых. После окончания работы первой ступени боковые блоки отделяются от центрального и он продолжает полет в качестве второй и третьей ступеней носителя, выводя на заданную орбиту полезную нагрузку.

Каждый блок пакета имеет систему типа СОБ. Структурная схема ее для центрального блока (схема для бокового блока ей идентична) приведена в левой части рисунка и практически соответствует описанной ранее схеме СОБ для моноблочной ракеты.

Кроме того, комплекс систем включает систему синхронизации боковых блоков между собой и с частью центрального блока, работающей в режиме первой ступени. Структурная схема системы межблочной синхронизации (МБС) показана в правой части рис. 3.

Синхронизация расхода топлива в режиме первой ступени обеспечивает одновременное окончание топлива во всех боковых блоках, что необходимо для их одновременного выключения и отделения от центрального блока. В центральном блоке, включенном в систему МБС, к моменту окончания работы первой ступени остается всегда заданное количество топлива, что обеспечивает номинальные начальные условия для работы второй ступени носителя.

Межблочная синхронизация осуществляется по информации о запасах окислителя в каждом из блоков. Эта информация получается от дискретных уровнемеров с выхода усилителя-преобразователя (УП). В случае отставания или опережения процесса по сравнению с вычисленным средним для всех блоков темпом опорожнения производится форсирование или дросселирование двигателя блока, отклонившегося от заданного режима расхода топлива. Это достигается воздействием на число оборотов турбонасосного агрегата (ТНА) двигателя соответствующего блока путем поворота при помощи привода ПРС на необходимый угол винта редуктора, дозирующего поступление компонента в га-

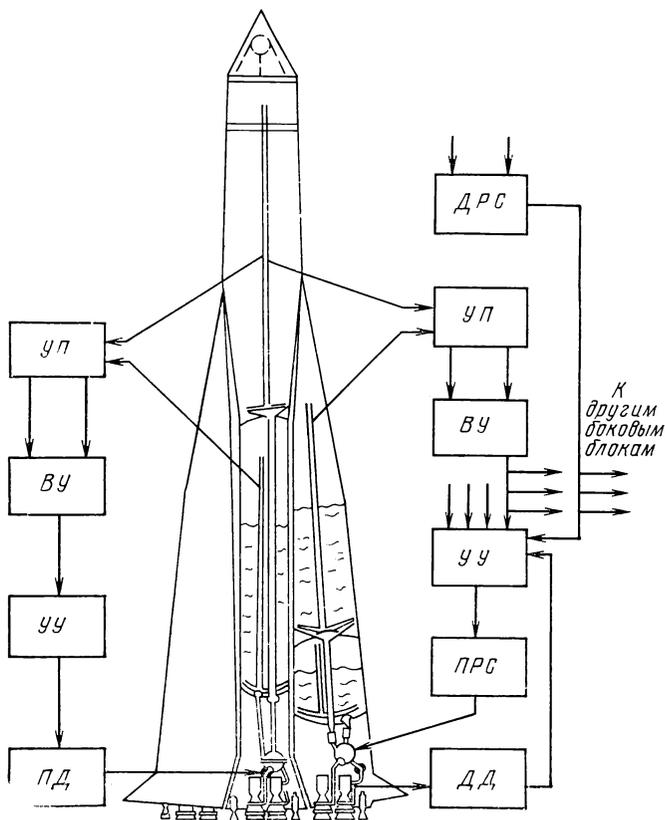


Рис. 3

зогенератор, вырабатывающий газ для привода турбины ТНА. С изменением угловой скорости вала ТНА изменяется напор центробежных насосов, суммарный расход компонентов через них и соответственно давление в камере сгорания и тяга двигателя. Суммарная тяга пакета остается неизменной благодаря осреднению. Изменение суммарного расхода в блоках приводит к изменению режимов опорожнения топливных баков, чем и достигается эффект синхронизации опорожнения всех боковых блоков к терминальному моменту — выключению двигателей первой ступени, а также обеспечивается заданное количество топлива в центральном блоке на тот же момент времени. Система МБС имеет общий исполнительный орган с системой регулирования кажущейся ско-

рости (РКС) — винт редуктора, дозирующего компонент газогенерации. Привод (ПРС), вращающий этот винт, охвачен обратной связью по давлению в камере сгорания, которое измеряется высокосточным датчиком давления (ДД). Сигналы от уровнемеров, от датчика регулятора качущейся скорости (ДРС) и от обратной связи по давлению суммируются в управляющем устройстве (УУ). Датчик давления, кроме обратной связи, осуществляет точное ограничение давления в камере сгорания, удерживая тем самым режимы работы ЖРД в допустимых пределах.

Алгоритм управления в системе МБС может быть аналогичным описанному при рассмотрении системы типа СОБ. Все способы повышения точности управления, рассмотренные применительно к СОБ, могут быть распространены и на систему МБС. Конструктивно система МБС также проста, ориентируется на боковых блоках на те же информационные каналы, что и СОБ, а на центральном блоке установлена группа чувствительных элементов для системы синхронизации. Повышение энергетических характеристик ракеты за счет МБС соизмеримо с эффективностью системы типа СОБ. Кроме того, эта система улучшает условия разделения ступеней ракеты пакетной схемы. Все особенности построения СОБ, описанные выше, относятся и к системе МБС.

Создание терминальных систем управления расходом топлива для первых отечественных космических ракет-носителей потребовало тесного сотрудничества научно-исследовательских, опытно-конструкторских и промышленных организаций.

Огромный объем работ был связан с отработкой систем, в которых особое внимание было уделено обеспечению надежности аппаратуры.

**3. Системы управления выводением ракет-носителей.** Все космические полеты включают этап, который начинается со старта ракеты-носителя с космическим кораблем и заканчивается выводом корабля в заданную точку околоземного пространства. На этом этапе, обычно называемом выводением, решается несколько задач управления. Рассмотрим задачу управления движением центра масс ракеты. Система управления, решающая эту задачу, часто называется системой управления выводением или наведением [18, 39].

Основное назначение системы управления выводением заключается в выработке управляющих команд, которые гарантируют достижение выводимым кораблем с требуемой, обычно высокой точностью заранее установленных конечных условий. В качестве последних могут, например, задаваться параметры орбит, все или часть компонентов векторов скорости и положения, время выведения.

Для увеличения массы полезной нагрузки ракет-носителей необходимо строить процесс управления таким образом, чтобы расход топлива был минимальным. На этапе выведения ракета пересекает область больших скоростных напоров. Аэродинамические нагрузки при этом должны поддерживаться настолько малыми,

насколько это возможно. В связи с этим к системе управления выводением предъявляются требования минимизации углов атаки на участке полета с большими скоростными напорами.

Кроме указанных требований могут накладываться ограничения на допустимую величину продольной перегрузки.

Управление выводением производится путем изменения вектора тяги, создаваемого двигательной установкой ракеты, и выбора момента выключения двигательной установки, исходя из условия равенства кинематических параметров траектории движения или некоторых функций от этих параметров заданным значениям в момент выключения. Управление направлением тяги может производиться при помощи специальных рулевых двигателей или качанием маршевых двигателей. В последнем случае камеры маршевых двигателей закрепляются в кардановом подвесе, а изменение их углового положения осуществляется при помощи сервоприводов, обычно гидравлических. Величина тяги регулируется посредством изменения суммарного расхода топлива. Система управления выводением формирует сигналы управления на основании информации, получаемой в результате обработки сигналов акселерометров, установленных на инерциальной гиростабилизированной платформе.

Можно выделить несколько принципов построения системы управления выводением.

Один из таких принципов заключается в том, что в системе вывода реализуется контур программного управления, обеспечивающий движение ракеты по номинальной программной траектории, и контур управления с обратной связью, предназначенный для компенсации воздействия возмущающих факторов. Программное управление может производить изменение направления тяги в соответствии с заданными программами по углам тангажа и рыскания и изменение величины тяги в соответствии с программой набора продольной составляющей кажущейся скорости ракеты (под кажущейся скоростью понимается скорость ракеты, полученная в результате действия тяги и аэродинамических сил). Управление с обратной связью строится таким образом, чтобы минимизировать отклонения фактической траектории движения относительно программной. Такие системы отличаются простыми алгоритмами и аппаратурной реализацией. Они включают каналы управления боковым, нормальным и продольным движениями и канал управления выключением двигательной установки [39]. Функционирование первых трех каналов, по существу, заключается в стабилизации составляющих вектора скорости, измеряемых инерциальными приборами, относительно заданных значений (нулевых — в каналах управления движением по нормали и в боковом направлении и программных — в канале управления продольным движением).

Описанный тип систем управления наведением имеет недостаток, связанный с трудностями оперативного перехода на новую траекторию при изменении условий полета.

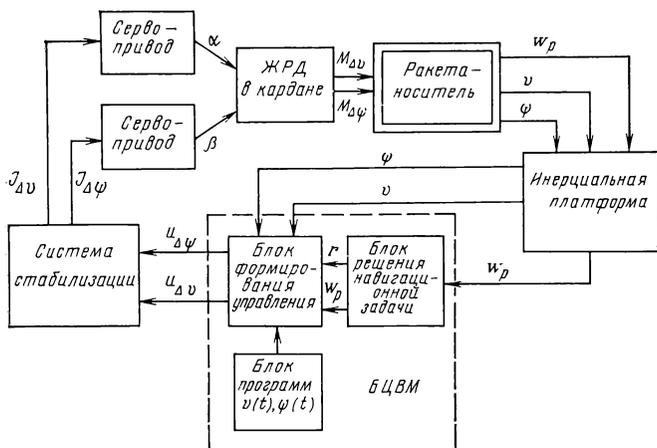


Рис. 4

Определенная гибкость программного управлением выведением и некоторый энергетический выигрыш достигаются при построении контура обратной связи системы, предназначенного для компенсации возмущений, на принципах терминального управления. В этом случае система управления выведением должна решать навигационную задачу для определения текущего вектора состояния ракеты (вектора положения и вектора скорости), прогнозировать координаты конечного состояния и формировать управляющие воздействия, обеспечивающие достижение заданных терминальных условий.

Если исходить из предположения о малости удаления возмущенной траектории от номинальной, то для решения перечисленных этапов задачи могут быть получены алгоритмы, допускающие сравнительно простую реализацию на БЦВМ. Несмотря на то, что здесь используются приближенные, упрощенные решения, их многократное применение в процессе управления полетом ракеты позволяет обеспечить приемлемую точность выведения. Такой способ управления движением центра масс назван в [42] итеративным методом наведения. Возможность достижения высокой точности на основе итеративного метода наведения определяется также тем, что влияние допущений, сделанных при построении алгоритмов, ослабевает по мере приближения к концу активного участка полета.

На рис. 4 представлена блок-схема системы управления выведением, использующей метод итеративного наведения.

Инерциальная (гиростабилизированная) платформа обеспечивает получение информации о кажущейся скорости, а также измерение углового положения ракеты ( $\theta$ ,  $\psi$ ) по отношению к координатам инерциального пространства. Для измерения скорости ракеты могут использоваться, например, маятниковые интегрирующие акселерометры, оси чувствительности которых располагаются

вдоль осей ортогональной системы координат. Данные о кажущейся скорости  $W_p$ , получаемые с интегрирующих акселерометров, поступают в БЦВМ, где они объединяются с результатами интегрирования гравитационного ускорения и образуют полный вектор скорости  $W_p$ . Интегрирование этих составляющих по времени позволяет определить положение  $r$  ракеты в инерциальном пространстве.

На участке полета, характеризующемся большими скоростными напорами, используется номинальная программа ориентации вектора тяги и коррекции по наведению не вводятся. После прохождения этого участка система управления выведением замыкается и определяются параметры оптимального по энергетике закона управления направлением тяги. Эти параметры находятся на основании данных о текущем положении  $r$  и скорости  $W_p$  ракеты и заданных конечных условий в результате решения упрощенных уравнений движения ракеты.

Выработанные в БЦВМ сигналы коррекции по угловому положению ракеты  $u_{\Delta\phi}$ ,  $u_{\Delta\psi}$  через цифро-аналоговый преобразователь поступают в систему стабилизации, управляющую угловым положением ракеты. Здесь формируются сигналы  $J_{\Delta\phi}$ ,  $J_{\Delta\psi}$  на сервоприводы, изменяющие угловое положение  $\alpha$  и  $\beta$  двигателя, закрепленного в кардановом подвесе. Повороты ЖРД в кардане создают управляющие моменты  $M_{\Delta\phi}$  и  $M_{\Delta\psi}$ , изменяющие ориентацию ракеты-носителя.

Дальнейшее развитие принципов терминального управления при построении системы управления выведением приводит к таким системам, в которых уже нет самостоятельного контура программного управления, реализующего заранее рассчитанную номинальную траекторию движения ракеты. В таких системах оптимальная программа управления ориентацией тяги формируется в процессе полета на основании навигационных данных, результатов прогнозирования конечного состояния и в соответствии с заданной целью выведения.

Рассмотрим кратко основные вопросы, которые возникают при синтезе терминальных систем управления выведением.

Возмущения, действующие на ракету при прохождении ею аэродинамического участка полета, разбросы характеристик ракеты и параметров двигательной установки носят случайный характер. Отсюда следует необходимость стохастического подхода к задаче синтеза таких систем.

При синтезе систем управления выведением, помимо терминального критерия — точности выведения, необходимо учитывать дополнительные критерии, характеризующие требования минимизации расхода топлива и др. Выбор управляющих воздействий стеснен различного рода ограничениями, примеры которых были приведены выше.

Один из важных этапов синтеза системы управления выведением заключается в выборе алгоритма прогнозирования конечного состояния ракеты, так как точность прогнозирования во многом

определяет точность работы системы в целом. Здесь конечно же необходимо принимать во внимание ограничения в практических возможностях реализации такого алгоритма и стремиться к сокращению загрузки БЦВМ.

**4. Система управления мягкой посадкой космических аппаратов на поверхность безатмосферной планеты.** Посадка космических аппаратов на поверхность безатмосферной планеты (для конкретности, Луны) в большинстве случаев производится по схеме полета [1], предусматривающей предварительный перевод КА на планетоцентрическую орбиту ожидания (околослунную орбиту). Преимущества и перспективность такой схемы определяются тем, что она дает свободу в выборе места посадки и позволяет проверить надежность системы управления непосредственно перед спуском на Луну. Кроме того, орбитальная схема посадки позволяет уменьшить массу аппарата при старте его с Земли за счет оставления на орбите ожидания части топлива, части экипажа и прочного термозащищенного отсека для посадки на Землю при возвращении. Собственно лунный посадочный отсек получается легче, и возвращение его на орбиту ожидания требует меньших энергетических затрат.

После проведения на орбите ожидания необходимых операций подготовки к спуску посредством относительно слабого тормозного импульса аппарат переводится с орбиты ожидания на переходную орбиту — эллипс траектории спуска (рис. 5) с перигеумом вблизи предполагаемого места посадки. В определенной точке переходной орбиты вновь включается тормозный двигатель и начинается участок основного торможения, на котором решается задача эффективного гашения горизонтальной составляющей вектора скорости.

Управление на этом участке производится, в основном, по информации с инерциальных датчиков — по программе, обеспечивающей заданные значения координат в конце участка при минимальном расходе топлива. Заданные конечные значения координат определяют вид номинальной траектории спуска на последующем участке конечного спуска (иногда называемом прецизионным участком) — по вертикальной траектории или по наклонной траектории. Некоторые результаты расчетов возможных траекторий полета на участке основного торможения представлены на рис. 6, а; кривая 1 заканчивается наклонной траекторией конечного спуска, кривая 2 — вертикальной траекторией, стрелками показаны направления вектора тяги, совпадающие с продольной осью КА. На рис. 6, б в увеличенном масштабе представлена наклонная траектория полета на участке (а, 0) конечного спуска.

Полет на участке конечного спуска происходит при значениях скорости снижения и высот, допускающих их относительно точное измерение радиолокационным дальномером и измерителем скорости (доплеровским локатором). С другой стороны, к началу этого участка могут накопиться значительные отклонения (от расчетных значений) координат, характеризующих процесс спуска. Причиной этому являются случайные погрешности определения

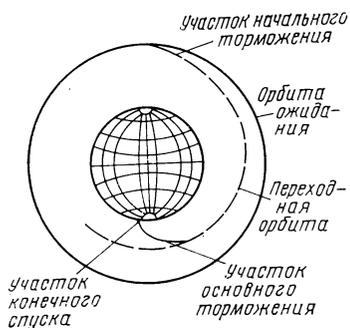


Рис. 5

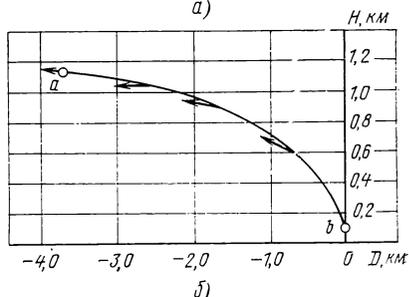
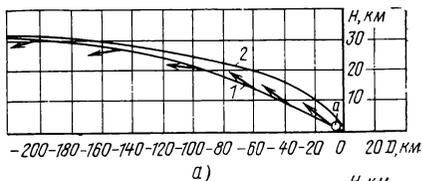


Рис. 6

параметров орбиты ожидания, погрешность отработки тормозного импульса, недостоверность сведений о гравитационном поле Луны, закладываемых в расчет траектории спуска и др. Кроме того, полет на участке конечного спуска (как и на участке основного торможения) подвержен действию случайных возмущений типа разброса массы КА, отклонения от номинала тяги тормозного двигателя и т. д. Все это, в сочетании с неточностью априорного знания рельефа поверхности в районе посадки, делает необходимым терминальное управление мягкой посадкой. В качестве исходной информации используются результаты измерения высоты и скорости снижения. Система управления мягкой посадкой должна обеспечить заданную точность посадки при минимальных затратах топлива. Для пилотируемого КА добавляются требования соблюдения условий удовлетворительного обзора пилотом места предполагаемой посадки.

Последний, завершающий участок спуска (см. рис. 6, б) — так называемый верньерный участок ( $b, 0$ ), на котором происходит обычно вертикальный полет КА с глубоким дросселированием тормозного двигателя (возможен вариант, предусматривающий здесь переход с работы основного тормозного двигателя на работу верньерных двигателей малой тяги). Верньерный участок вводится для того, чтобы повысить конечную точность посадки, поскольку влияние ошибки оценивания в полете параметров траектории на точность посадки снижается при уменьшении величины отрицательного ускорения. Кроме того, если тяга непосредственно перед посадкой мала, то уменьшается возможность выброса породы под действием газовой струи и уменьшается опрокидывающее воздействие на КА отраженной от поверхности планеты струи.

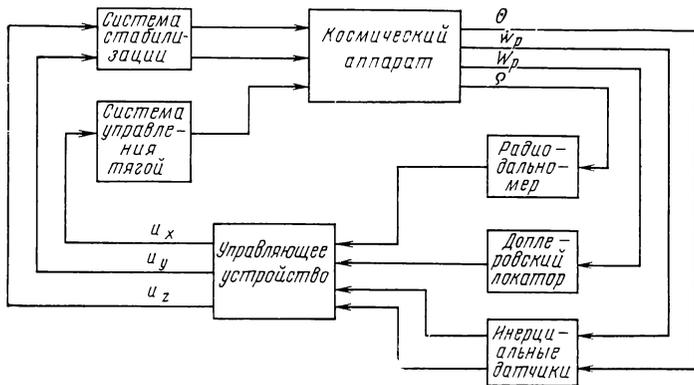


Рис. 7

Таким образом, работа собственно системы управления мягкой посадкой происходит, в основном, на участке конечного спуска. Блок-схема этой системы представлена на рис. 7.

Радиодальномер измеряет расстояние  $\rho$  до лунной поверхности вдоль определенного направления, обычно совпадающего с направлением продольной оси КА. Доплеровский локалатор дает информацию о текущем векторе скорости снижения  $W_p$ , инерциальные датчики измеряют вектор  $\theta$  углового положения КА, а также вектор кажущегося ускорения  $\omega_p$ .

Результаты измерений поступают на вход управляющего устройства, в котором составляются оценки координат, характеризующих процесс спуска (в частности, высоты КА над поверхностью Луны), и формируются на их основе управляющие сигналы  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ , обеспечивающие терминальное управление мягкой посадкой ( $0xyz$  — связанная система координат КА). При этом  $u_y$ ,  $u_z$  задают ориентацию продольной оси КА (и, следовательно, тяги двигателя) и используются как уставки для работы системы стабилизации, а управляющий сигнал  $u_x$  задает текущее значение тяги тормозного двигателя.

В результате обработки сигналов  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  тормозным двигателем и системой стабилизации полет КА корректируется таким образом, чтобы обеспечить выполнение заданных терминальных условий мягкой посадки. Конечная точность посадки считается удовлетворительной, если величина вертикальной составляющей скорости в момент контакта с поверхностью планеты не вызывает недопустимой деформации конструкции КА (или является допустимой для человеческого организма), а горизонтальная составляющая скорости не приводит к опрокидыванию аппарата.

**5. Система управления сближением космических аппаратов.** Сближение космических аппаратов с последующим причаливанием и стыковкой составляют широко известную по литературе операцию встречи (rendezvous) КА на орбите [11, 17]. Сближение со-

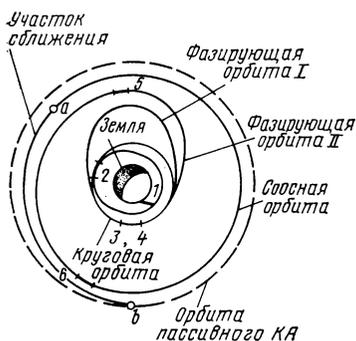


Рис. 8

формируемым по данным наземных (надводных) станций слежения. Цель этих маневров состоит в том, чтобы при ограниченных затратах топлива вывести активный КА\* в зону встречи с пассивным КА\*\*, удобную (в смысле наблюдения одного КА из другого и пр.) для проведения последующего управления сближением бортовой системой, над заданным районом земной поверхности в заданный момент времени. Последнее определяется условиями наземного контроля процесса сближения, условиями освещения Солнцем КА и т. п. При этом также учитываются требования обеспечения надежности сближения — с тем, чтобы возможные (единичные) грубые ошибки в проведении маневра не приводили к срыву всего процесса сближения.

Следует сразу отметить, что все маневры сближения происходят практически в неизменной плоскости орбит, поскольку изменение положения плоскости орбиты требует большой затраты топлива, а энергетические возможности современных КА жестко ограничены.

На рис. 8 в качестве примера представлена одна из схем полета активного КА, предусмотренная в программе «Союз — Аполлон». На рисунке цифрами указаны участки проведения маневров: 1 — выведение на орбиту; 2 — переход на круговую орбиту; 3, 4 — переходы на фазирующие орбиты; 5, 6 — переходы на орбиту, соосную с орбитой пассивного КА. При этом разница высот соосных орбит на всем их протяжении остается примерно постоянной.

Конечная точность проведения предварительных маневров сближения ограничивается погрешностями определения орбит и положения КА на них наземными средствами обеспечения полета. Эта точность не высока и соответствует километрам — десяткам километров разброса расстояния между КА в начале участка

стоит из ряда маневров, которые условно можно разделить на две группы: предварительные маневры сближения, которые производятся, как правило, на расстоянии сотен километров, что исключает возможность проведения непосредственных бортовых измерений взаимного положения КА, и собственно сближение КА, осуществляемое по результатам бортовых измерений положения и скорости одного КА относительно другого.

Предварительные маневры сближения выполняются обычно по командам наземного пункта управления полетом,

\* КА, двигатель которого используется для изменения траектории полета при проведении маневров.

\*\* КА, центр масс которого движется в процессе сближения по неизменной орбите.

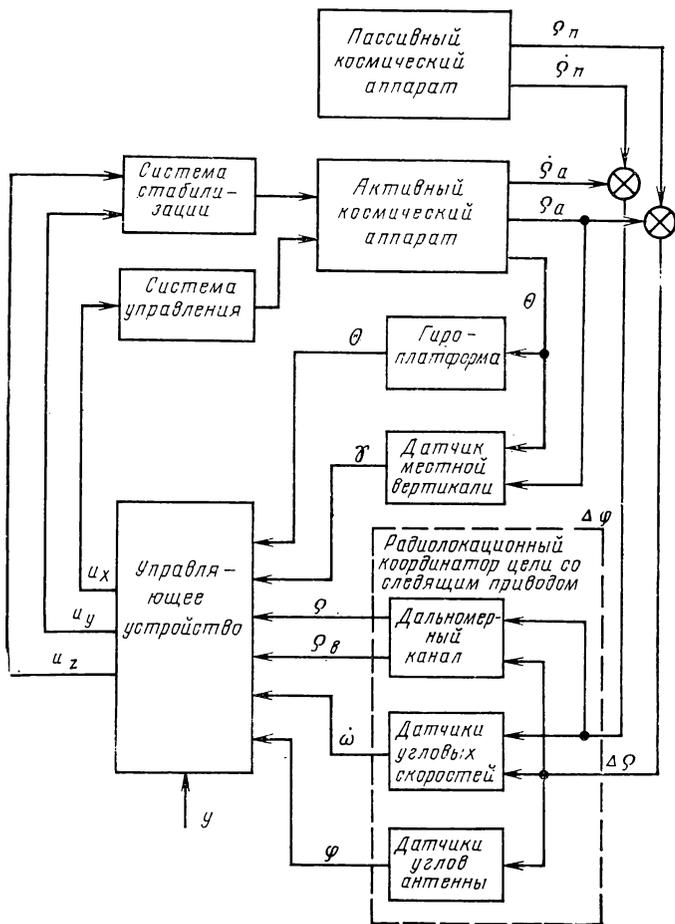


Рис. 9

сближения [участок  $(a, b)$ ] и разбросу разности скоростей КА свыше десятка метров в секунду.

Поэтому-то и возникает необходимость в терминальном управлении сближением на участке  $(a, b)$ , позволяющем уменьшить разброс расстояния между КА в конце участка сближения до сотен и даже десятков метров, а разброс скорости сближения — до одного — двух метров в секунду. Это существенно облегчает последующее причаливание (выполняемое часто вручную) активного КА к выбранному стыковочному узлу пассивного КА.

Автоматическое терминальное управление сближением начинается после завершения предварительных маневров сближения, в результате которых активный КА выводится в заданную зону встречи. Однако для этого прежде всего необходимо, чтобы пассивный КА был обнаружен и «захвачен» бортовым координатором цели активного КА — радиолокационным или с оптическим

визиром. Проведение поиска и захвата цели может осуществляться или пилотом, или бортовыми средствами автоматики. Для поиска и обнаружения пассивного КА обычно используются те же устройства (тот же координатор цели), которые применяются затем для получения информации о фазовых координатах взаимного положения КА.

В случае сближения с сотрудничающим КА на нем устанавливается радиоответчик или оптический отражатель, что позволяет значительно увеличить дальность измерений.

Поскольку случайные углы отклонения линии визирования (линии, соединяющей центры масс КА) от продольной оси активного КА в процессе сближения могут быть довольно большими, то применяется координатор со специальной системой слежения за целью, т. е. ориентируемый по линии визирования.

Опишем одну из возможных структурных схем бортовой системы управления сближением, представленную на рис. 9. Здесь  $\mathbf{q}_a$ ,  $\mathbf{q}_п$  и  $\mathbf{q}_a$ ,  $\mathbf{q}_п$  — векторы координат и скоростей активного и пассивного КА в инерциальной системе координат. Разности  $\Delta \mathbf{q}$  и  $\Delta \dot{\mathbf{q}}$  этих векторов, характеризующие взаимное положение аппаратов и их скорости, могут рассматриваться как входные сигналы радиолокационного координатора цели, ориентируемого при помощи следящей системы по линии визирования. Дальномерный канал координатора измеряет относительную дальность  $\rho$  и скорость сближения  $\rho_v$  (точнее, проекцию вектора скорости сближения на линию визирования). Направление вектора дальности определяется вектором  $\phi$  углов между осью чувствительности координатора и связанными осями активного КА и измеряется датчиками углов антенны. Измеряется также вектор  $\dot{\omega}$  угловых скоростей линии визирования при помощи соответствующих датчиков.

Результаты измерений, проведенных координатором цели, поступают на вход управляющего устройства, где они пересчитываются в данные об относительном положении КА во вращающейся орбитальной системе координат. Это позволяет строить довольно простые алгоритмы управления сближением, обеспечивающие высокое качество управления. Для формирования на борту КА такой системы координат, а также для проведения контроля реализации управляющих сигналов системы используются инерциальные датчики (гиростабилизированная платформа), измеряющие вектор  $\Theta$  углов ориентации активного КА в инерциальной системе координат, и датчик местной вертикали, измеряющий вектор  $\gamma$  углов, образуемых вертикалью со связанными осями активного КА. В некоторых случаях информация о векторе  $\gamma$  восстанавливается на борту по априорным данным и вектору  $\Theta$ .

По данным относительного положения КА управляющее устройство многорежимной системы управления формирует управляющие сигналы  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  в соответствии с установкой  $U$ , посредством которой задается режим сближения.

Отметим три основных режима:

экономического сближения, когда требуется минимизировать количество топлива, расходуемого на управление;

быстродействия, когда требуется, оставаясь в рамках располагаемого запаса топлива, сократить время сближения;

контролируемости, позволяющий проводить эффективный контроль пилотом правильности хода терминального управления сближением.

В случае, когда двигатель активного КА, используемый для создания управляющего ускорения центра масс при сближении, жестко ориентирован по продольной оси КА, обработка управляющих сигналов  $u_y$ ,  $u_z$ , вызывающих изменение углов ориентации вектора тяги, производится системой стабилизации КА, а обработка сигнала  $u_x$  осуществляется включением или изменением модуля тяги двигателя.

В качестве примера на рис. 10 представлены в орбитальной системе координат  $Ornb$  результаты некоторых расчетов траекторий сближения в виде границ зоны, внутри которой с заданной вероятностью лежат все траектории сближения. Начало координат  $O$  находится в центре масс активного КА, ось  $Or$  направлена по местной вертикали, ось  $Ol$  лежит в плоскости орбиты и ориентирована по направлению полета, ось  $Ob$  — перпендикулярна плоскости орбиты. Здесь же представлены заштрихованные эллипсоид начальных положений КА и эллипсоид положения КА в некоторый момент времени.

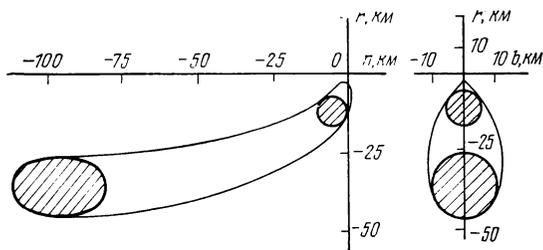


Рис. 10

### 1.3. Основное содержание теории терминальных систем

Задача терминального типа впервые была сформулирована и решена немецким астрономом Иоганном Ламбертом в 1761 г. в его труде «*Instignores Orbital Cometarume Proprietates*». Задача Ламберта состоит в нахождении кеплеровской орбиты, связывающей два данных вектора положения при заданном интервале времени. В монографии Ламберта эта задача рассматривалась применительно к обработке данных астрономических наблюдений. С развитием динамики космических полетов результаты Ламберта нашли применение при решении задач управления межорбитальными переходами искусственных космических тел.

Теория оптимизации терминальных систем управления развивается как ветвь общей теории оптимальных управляемых систем.

Первой работой, содержащей все основные элементы постановки и решения задачи теории оптимального управления, была опубликованная в середине 40-х годов статья [25]. В ней рассматривалась оптимизация управления выводением ракеты при ограничениях на управляющие воздействия и отыскивались такие изменения тяги двигателя, которые доставляли экстремум функционалу при минимальном расходе топлива.

Естественно, что большинство решений задач терминального управления базируется на общих методах оптимизации. Более того, терминальные системы весьма удобны для показа возможностей таких методов, как принцип максимума или динамическое программирование. Этим объясняется относительно большое число публикаций по терминальным системам, в которых исследуются те или иные аспекты методов оптимизации. Полезность подобных исследований для технических приложений весьма неравноценна.

Начала разработки математического аппарата для построения статистически оптимальных систем в некоторых частных случаях возмущений и для линейных объектов содержатся в той ветви теории автоматического управления, в основе которой лежат работы А. Н. Колмогорова, Н. Винера, Р. Калмана и др. Для более общего случая, при нелинейном объекте, когда оптимальное управляющее устройство не может быть представлено в виде соединения фильтра и детерминированного алгоритма управления, при неполной информации об объекте управления и т. п. разработка такого аппарата вызывает существенные трудности и не имеет завершеного решения. Для импульсных систем, состояние которых в каждый момент времени зависит от значений управлений только в предшествующие моменты времени, оптимальное управление корректно определяется так называемыми условиями дуального управления [38]. Однако потребный при этом огромный объем вычислений делает реализацию этих условий практически невыполнимой, особенно на борту подвижного объекта, где они должны выполняться на БЦВМ.

В обзоре [2], посвященном в основном вопросам синтеза детерминированных и стохастических терминальных систем управления, была дана характеристика и некоторых новых методов, учитывающих особенности задач терминального управления и отражающих условия практической реализации систем. Для задач проектирования терминальных систем были сформулированы приемы и способы улучшения качества их работы, основанные на выявленных при практических и теоретических разработках свойствах терминальных систем.

Определяя место терминальных систем среди других систем управления, следует отметить, что терминальные системы отличаются от обычных нетерминальных систем управления (например, систем стабилизации) как по назначению, так и по способу организации процесса управления.

Для систем обычного типа, как правило, устанавливается требование малости времени завершения переходного процесса  $t_{\text{кон}}$

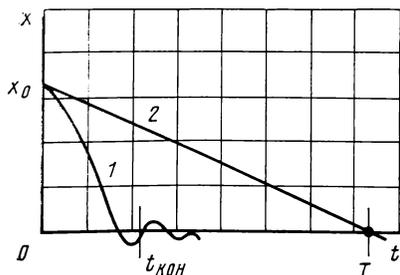


Рис. 11

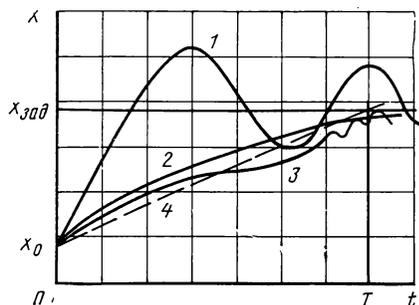


Рис. 12

при влиянии внешних воздействий или при снятии начального отклонения  $x_0$  (рис. 11, кривая 1).

В терминальных системах при переходе в новое состояние в качестве основного выдвигается требование достижения заданного состояния к заданному, терминальному моменту  $T$  (рис. 11, кривая 2).

Задачи терминального управления появились раньше, чем были созданы адекватные им методы теории. На этом первом этапе в большинстве случаев терминальные задачи решались на основе положений теории регулирования, развитых для задач не терминального типа. Эти положения предусматривают воспроизведение в той или иной форме воздействий по отклонению текущих значений координат состояния от их заданных значений  $x_{зад}$ . Процесс перехода из некоторого начального  $x_0$  в заданное конечное состояние  $x_{зад}$  в линейных системах при этом описывается комбинацией гармонических и экспоненциальных функций времени (рис. 12, кривые 1 и 2). Как следующий шаг, направленный на повышение качества терминального управления, может рассматриваться построение систем с увеличивающимся к терминальному моменту коэффициентом усиления.

Перечисленные приемы построения терминальных систем затрудняют достижение высокого качества управления или требуют специальных мер по сохранению устойчивости на последнем интервале работы (рис. 12, кривая 3).

Настоящий этап развития теории терминального управления опирается на иной подход к построению систем, более адекватный природе терминальных задач, чем описанные выше приемы. Этот подход предусматривает прогнозирование будущего движения системы от текущего момента  $t$  вплоть до терминального момента  $T$  и формирование по результатам этого прогноза процесса изменения управляющего воздействия на интервале  $[t, T]$ , приводящего систему в заданное конечное состояние. С целью компенсации неизбежно возникающих в реальных условиях погрешностей управления такая процедура повторяется и в последующие моменты времени, в результате чего обеспечивается требуемая коррекция процесса управления.

За счет фильтрации помех и повышения качества прогнозирования можно достичь уменьшения погрешности управления по мере приближения к терминальному моменту. Это позволяет использовать в терминальных системах сравнительно небольшие коэффициенты усиления.

Описанный способ организации процесса управления дает возможность достичь высокого качества управления в терминальный момент и позволяет вести управление при наложении разного рода ограничений на управляющие воздействия, допустимый расход энергии на управление и т. п.

На рис. 12 линия 4 соответствует процессу терминального управления с дополнительным условием минимизации производной управляемой координаты.

Кроме повышения качества управления, указанный подход к построению терминальных систем управления расширяет возможности применения систем при изменении условий их работы.

В соответствии с изложенной в разд. 1.1 проблематикой построения бортовых терминальных систем управления можно выделить три основных направления, по которым развивались теоретические работы в данной области.

Первое направление имеет целью повышение качества, прежде всего терминальной точности управления. Здесь, наряду с традиционными подходами теории оптимальных систем, нашли развитие неклассические способы повышения качества управления. Один из таких способов реализуется в порогово-дискретном принципе построения терминальных систем. Принцип позволяет получать первичную информацию о состоянии объектов при помощи метрологически совершенных узкодиапазонных датчиков, а процесс измерения сводить к фиксации временных интервалов, которые и характеризуют протекание управляемого процесса. Системы, построенные по этому принципу, относятся к классу систем с широко-импульсной модуляцией.

Для данного класса систем появляется возможность существенно повысить терминальную точность управления за счет рационального выбора интервалов квантования, т. е. выбора частоты совершения измерений и приложений к объекту управляющих воздействий. Дальнейшее развитие этого подхода привело к сравнительно мало изученному в классической теории управления способу оптимизации последовательности интервалов квантования в системе, приводящему к переменной по ходу процесса частоте измерений и управлений.

Терминальный характер процессов управления обуславливает и определенную специфику используемых приемов фильтрации. В частности, существенной здесь является возможность дополнительного повышения качества управления посредством развития теории калмановской фильтрации применительно к нелинейным терминальным системам, а также путем организации своеобразного второго уровня фильтрации — статистического оценивания при прогнозировании движения управляемой системы.

Второе направление теории бортовых терминальных систем имеет целью разработку методов, ведущих к повышению надежности систем управления\*.

Имеются две возможности такого повышения надежности.

Одна из них реализуется на этапе синтеза оптимального алгоритма управления и исходит из предпосылки о существовании связи между сложностью алгоритма и надежностью системы управления. Упрощение алгоритмов управления приводит к упрощению аппаратуры и снижению потребной вычислительной мощности БЦВМ. Поэтому при синтезе алгоритма управления целесообразно учитывать, кроме традиционных, и дополнительные ограничения, приводящие к упрощению алгоритма.

Другая возможность реализуется на этапе построения развернутого бортового алгоритма управления, непосредственно используемого для составления программы работы БЦВМ в контуре управления терминальной системы. Это построение основано на введении алгоритмической избыточности, которая, наряду с программной и аппаратной избыточностью, создает определенный резерв возможностей системы, позволяющей решить поставленную задачу управления в различных условиях работы — при авариях, возникновении отказов в аппаратуре, ошибках в программировании и т. п. Обеспечение работоспособности системы в этих условиях может осуществляться за счет управления упомянутым резервом путем целенаправленных изменений (реконфигураций) в объекте, аппаратуре, программе БЦВМ и в алгоритме управления.

Реконфигурация объектов известна давно и восходит к идеям К. Э. Циолковского, относящимся к управлению центровкой дирижабля, к теории непотопляемости кораблей С. О. Макарова и А. Н. Крылова. В последние годы идеи реконфигурации воплощаются в различных способах построения устойчивых к отказам систем управления, в том числе бортовых алгоритмов этих систем.

Третье направление теории терминальных систем связано с повышением достоверности и снижением трудоемкости инженерных расчетов при проектировании систем. Оно берет начало от разработки в общей теории управления методов анализа процессов управления для условий того этапа создания системы, когда она еще не реализована в аппаратуре (например, частотные методы анализа процессов, методы гармонического баланса и др.). В последующем, с появлением аналоговых и цифровых вычислительных машин и с использованием их для моделирования процессов управления, проведение подобного анализа существенно упростилось. На очередь стали такие задачи теории, как оценивание предельно достижимого качества управления в условиях, когда нет практической возможности не то что создать, но даже математически описать систему оптимального управления. Методы решения этой задачи необходимы конструктору, которому важно знать, как да-

---

\* Здесь имеется в виду та составляющая повышения надежности систем управления, которая обеспечивается рациональным выбором алгоритма управления.

леко от оптимальных находятся характеристики спроектированной им системы.

Другой круг методов данного направления связан с анализом точности бортовых терминальных систем в условиях, наиболее полно соответствующих натурным. Такой анализ предшествует принятию решения о возможности проведения натурального испытания системы. Ответственность за правильность принятия решения в большинстве случаев здесь чрезвычайно высока, так как ошибки в оценках терминальной точности могут быть губительными для объекта в целом. Поэтому, при анализе качества терминального управления используется детальная модель системы повышенной математической сложности, существенно затрудняющая оценивание качества управления даже при использовании самых совершенных ЦВМ.

Развиты методы, позволяющие при ограниченной мощности ЦВМ получать оценки качества управления с повышенной достоверностью.

Данное общее описание задач теории бортовых терминальных систем не претендует на полноту. Оно не содержит, в частности, в явном виде таких специфических разделов, как методы терминального управления в условиях неопределенности априорной информации, многокритериальности и т. д. Тем не менее, оно может помочь читателю ориентироваться в представленных в книге элементах теории бортовых терминальных систем, по мнению авторов, наиболее существенных для практических применений.

## Глава 2

# ОСНОВНЫЕ ЧЕРТЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В ТЕРМИНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Внешние возмущения, помехи, разброс параметров систем и другие возмущающие факторы в бортовых терминальных системах управления носят случайный характер. В большинстве практических случаев можно считать известными вероятностные характеристики случайных факторов. Управление, которое формируется с учетом этих вероятностных характеристик, называют стохастическим.

Вопросы теории систем стохастического управления описаны в работах [22, 34, 38, 43 и др.]. По-возможности не повторяясь, концептивно приведем здесь только те положения теории стохастического управления, которые носят систематизирующий характер и позволяют уяснить сущность и место в общей теории управления излагаемых в последующих разделах методов анализа и синтеза терминальных систем.

## 2.1. Задача стохастического управления

Начнем с описания обычной постановки задачи стохастического управления в импульсных терминальных системах. В дальнейшем эта постановка будет детализироваться и уточняться при рассмотрении различных аспектов теории терминальных систем.

Рассматривается объект управления, описываемый конечно-разностным уравнением

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-1}, \boldsymbol{\omega}_{i-1}) \quad (i=1, 2, \dots, I+1), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{x}_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(K)})$  — значение вектора\* координат состояния объекта в дискретный момент времени  $i$ ;  $\mathbf{x}_0$  — случайный вектор;  $\mathbf{u}_i$  — значение вектора управления в момент времени  $i$ ;  $\boldsymbol{\omega}_i$  — значение случайного вектора возмущающих факторов (возмущения) в момент времени  $i$ ; число  $I$  считается здесь заданным.

Вектор измеренных в  $i$ -й момент времени координат

$$\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\kappa}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i) \quad (i=1, 2, \dots, I), \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{h}_i$  — значение случайного вектора ошибок измерения в момент  $i$ .

В дальнейшем будем использовать следующее обозначение последовательностей:  $\mathbf{r}_{ji}^A = (r_j, r_{j+1}, \dots, r_i)$ , где в качестве  $r_i$  могут приниматься либо векторы  $\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{h}_i$ , либо вектор-функции  $\mathbf{f}_i, \boldsymbol{\kappa}_i$  и т. д. \*\*

Считается известной плотность  $P(\mathbf{x}_0, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{0I}, \bar{\mathbf{h}}_{1I})$  вероятности случайных векторов  $\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\omega}_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ),  $\mathbf{h}_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ).

Риск  $R$  — критерий, характеризующий качество терминального управления, задается как математическое ожидание  $M$  функции потерь  $\Psi$  от конечного состояния объекта управления в дискретный момент времени  $I+1$ :

$$R = M[\Psi(\mathbf{x}_{I+1}, \mathbf{x}_{\text{зад}})] = M[\Phi(\mathbf{x}_0, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{0I}, \bar{\mathbf{u}}_{0I}, \bar{\mathbf{f}}_{0I}, \mathbf{x}_{\text{зад}})], \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{x}_{\text{зад}}$  — заданное конечное состояние объекта.

Задача стохастического управления состоит в выборе последовательности  $\bar{\mathbf{u}}_{0I}$  управлений из некоторого допустимого множества  $U$ , обеспечивающей выполнение какого-либо условия, накладываемого на риск  $R$  (например, выполнение заданного неравенства, связанного с риском  $R$ , минимизация риска и др.).

## 2.2. Классы стохастического управления

Стохастическое управление должно быть физически реализуемым, т. е. управление  $\bar{\mathbf{u}}_i$  не может быть функцией предстоящих последовательностей  $\bar{\mathbf{y}}_{(i+1)I}, \bar{\mathbf{u}}_{(i+1)I}$  либо каких-то их частей.

\* Здесь и далее подразумевается, что запись вида  $\mathbf{x}_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(K)})$  определяет вектор-столбец.

\*\*  $r_{ji}$  будем считать в дальнейшем вектором-столбцом.

По характеру и степени использования априорной информации  $\bar{f}_{0I}, \bar{x}_{1I}, P(x_0, \bar{\omega}_{0I}, \bar{h}_{1I}), \psi$  и текущей информации  $y_{1I}, \bar{u}_{0(i-1)}$  при формировании физически реализуемого управления  $u_i$  различают три основных класса стохастического управления:

1. Программное управление (или управление по разомкнутому контуру)

$$u_i = u_{\text{при}}(\bar{f}_{0I}, P(x_0, \bar{\omega}_{0I}), x_{\text{зад}}),$$

где при формировании управления полностью игнорируется текущая информация об измеренных координатах и реализованных управлениях.

2. Управление с обратной связью

$$u_i = u_{\text{оси}}(y_{1i}, \bar{u}_{0(i-1)}, \bar{f}_{0I}, \bar{x}_{1i}, P(x_0, \bar{\omega}_{0I}, \bar{h}_{1I}), x_{\text{зад}}),$$

где при формировании управления используются поступающие по цепи обратной связи данные текущей информации, но никаких оценок будущих «поступлений» информации по обратной связи не производится.

3. Дуальное управление в замкнутом контуре

$$u_i = u_{\lambda i}(y_{1i}, \bar{u}_{0(i-1)}, \bar{f}_{0I}, \bar{x}_{1I}, P(x_0, \bar{\omega}_{0I}, \bar{h}_{1I}), \bar{x}_{\text{зад}}), \quad (2.4)$$

при котором дополнительно к информации, используемой при управлении с обратной связью, обрабатывается информация, относящаяся к будущим измерениям,  $-\bar{x}_{(i+1)I}, P(\bar{h}_{(i+1)I})$ .

Смысл названия «дуальное управление», данного А. А. Фельдбаумом, состоит в том, что здесь учитывается влияние управления не только на текущее состояние объекта, но и на состояние неопределенности в будущем. Действительно, стохастическое терминальное управление имеет двоякую сущность — оно направлено на приведение объекта из текущего состояния  $x_i$  в заданное  $x_{\text{зад}}$  и в то же время (в общем случае) на погрешность будущего оценивания координат состояния, а следовательно, и на погрешность приведения объекта в заданное состояние.

Воздействие управления на погрешность оценивания координат состояния здесь понимается в том смысле, что плотность распределения ошибки  $\delta_k$  оценивания в некоторый  $k$ -й момент времени ( $k = i+1, i+2, \dots, I$ ):

$$\delta_k = x_k - M(x_k/y_{1k}, u_{0(k-1)})$$

является функцией не только априорной информации о законах распределения случайных факторов  $x_0, \bar{\omega}_{0(k-1)}$ , но и [см. (2.1)] предыстории управления  $\bar{u}_{0(k-1)}$ :

$$P(\delta_k) = f_{\delta}(x_0, \bar{\omega}_{0(k-1)}, \bar{f}_{0(k-1)}, \bar{u}_{0(k-1)}).$$

Функция (2.4) дает возможность при выборе управления планировать такие значения характеристик погрешностей будущих оце-

нок координат состояния, при которых достигается высокое (в смысле риска  $R$ ) качество управления — или, как говорят, позволя-ет организовать «активное изучение объекта».

### 2.3. Оптимальное стохастическое управление

В дальнейшем будем рассматривать проблему синтеза бортовой терминальной системы управления, которую будем формулировать как задачу построения системы стохастически оптимального управления, обеспечивающей минимизацию терминального риска  $R$  для различных дополнительных (к оговоренным выше) условий, отражающих ту или иную специфику задачи. Соответствующее управление будем обозначать  $u_i^*$ .

Но вначале естественно решить вопрос о том, какому из классов стохастического управления принадлежит оптимальное управление  $u_i^*$  в случае, когда свобода выбора управления не стеснена никакими дополнительными условиями. При этом следует иметь в виду, что данные выше определения классов стохастического управления не связаны с выполнением требования оптимальности управления.

Оптимальное управление будем получать на основе применения принципа оптимальности Беллмана, в соответствии с которым каждое управление должно быть оптимальным относительно данного текущего состояния, независимо от того, как это состояние было достигнуто. Существенно, однако, то, что в условиях задачи стохастического управления состояние объекта известно не полностью. Вся располагаемая к моменту времени  $i$  информация о состоянии объекта заключена в априорных данных  $\bar{f}_{0(i-1)}$ ,  $\bar{x}_{1i}$ ,  $P(x_0, \bar{w}_{0(i-1)}, \bar{h}_{1i})$ , в совокупности наблюдений  $\bar{y}_{1i}$ , выполненных к этому моменту, и в последовательности всех прошлых управлений  $u_{0(i-1)}$ . Поэтому стохастическое управление  $u_i^*$  в соответствии с принципом Беллмана должно быть оптимальным относительно информационных данных

$$\hat{J}_i = (\bar{y}_{1i}, \bar{u}_{0(i-1)}, \bar{f}_{0(i-1)}, \bar{x}_{1i}, P(x_0, \bar{w}_{0(i-1)}, \bar{h}_{1i})).$$

Тогда оптимальное последнее управление  $u_I^*$  в терминальной системе определяется в результате минимизации риска  $R$  при имеющихся информационных данных  $\hat{J}_I$  или, что то же самое, в результате минимизации условного математического ожидания функции потерь, соответствующего данным  $\hat{J}_I$ :

$$u_I^* = \arg \left\{ \min_{u_I} M [\Psi(x_{I+1}, x_{\text{зак}}) / \hat{J}_I] \right\} = \arg \left\{ \min_{u_I} \int_{\Omega(x_0, \bar{w}_{0I})} \psi(x_0, \bar{w}_{0I}, \bar{f}_{0I}, x_{\text{зак}}) P(x_0, \bar{w}_{0I} / \bar{y}_{1I}, \bar{u}_{0(I-1)}) d\Omega(x_0, \bar{w}_{0I}) \right\}. \quad (2.5)$$

Здесь  $\Omega(x_0, \bar{w}_{0I})$  — область возможных значений составляющих векторов  $x_0, w_0, w_1, \dots, w_I$ .

Оптимальное управление  $u^*_{I-1}$  должно быть получено в результате минимизации риска  $R$  при информационных данных  $\hat{J}_{I-1}$  и условии, что последующее управление  $u_I$  будет удовлетворять (2.5) или, что то же самое, в результате минимизации условного (для данных  $\hat{J}_{I-1}$ ) математического ожидания выражения, стоящего в фигурных скобках (2.5):

$$u^*_{I-1} = \arg \left\{ \min_{u_{I-1}} M \left\{ \min_{u_I} M [\Psi(x_{I+1}, x_{\text{зад}}) / \hat{J}_I | \hat{J}_{I-1}] \right\} \right\}. \quad (2.6)$$

Представим выражение (2.6) в более детальном виде для случая, когда ошибки измерения  $\bar{h}_{iI}$  не зависят от других случайных факторов:

$$u^*_{I-1} = \arg \left\{ \min_{u_{I-1}} \int_{\bar{z}(y_I)} \left\{ \min_{u_I} \int_{\bar{z}(x_0, \bar{w}_{0I})} \psi(x_0, \bar{w}_{0I}, \bar{u}_{0I}, \bar{f}_{0I}, x_{\text{зад}}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times P(x_0, \bar{w}_{0I} | \bar{y}_{1I}, \bar{u}_{0(I-1)}) d\Omega(x_0, \bar{w}_{0I}) \right\} P(y_I | \bar{y}_{1(I-1)}, \bar{u}_{0(I-2)}) d\Omega(y_I) \right\}.$$

И далее, при попятном движении до дискретного момента времени  $i$ , получим

$$u^*_i = \arg \left\{ \min_{u_i} M \left\{ \dots \min_{u_{I-1}} M \left\{ M [\Psi(x_{I+1}, x_{\text{зад}}) / \hat{J}_I | \hat{J}_{I-1}] \dots / \hat{J}_i \right\} \right\} = \right. \\ = \arg \left\{ \min_{u_i} \int_{\bar{z}(y_{i+1})} \left\{ \dots \min_{u_{I-1}} \int_{\bar{z}(y_I)} \left\{ \min_{u_I} \int_{\bar{z}(x_0, \bar{w}_{0I})} \psi(x_0, \bar{w}_{0I}, \bar{u}_{0I}, \bar{f}_{0I}, x_{\text{зад}}) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times P(x_0, \bar{w}_{0I} | \bar{y}_{1I}, \bar{u}_{0(I-1)}) d\Omega(x_0, \bar{w}_{0I}) \right\} P(y_I | \bar{y}_{1(I-1)}, \bar{u}_{0(I-2)}) d\Omega(y_I) \dots \right\} \times \\ \left. \times P(y_{i+1} | \bar{y}_{1i}, u_{0(i-1)}) d\Omega(y_{i+1}) \right\}. \quad (2.7)$$

Как следует из этого выражения, формирование оптимального стохастического управления производится не только на основе информационных данных  $\hat{J}_i = \{\bar{y}_{1i}, \bar{u}_{0(i-1)}, \bar{f}_{0(i-1)}, \bar{x}_{1i}, P(x_0, \bar{w}_{0(i-1)}, \bar{h}_{1i})\}$ , характеризующих текущее состояние объекта, но с использованием данных  $\{\bar{f}_{iI}, \bar{x}_{(i+1)I}, P(\bar{w}_{iI}, \bar{h}_{(i+1)I})\}$ , в частности, для вычисления апостериорных плотностей  $P(y_{k+1} | \bar{y}_{1k}, \bar{u}_{0(k-1)}) (k=i, i+1, \dots, I-1)$ , посредством которых оцениваются погрешности «будущих» измерений и оценок координат состояния, а следовательно, и «предстоящих» потерь в риске  $R$ .

Таким образом, оптимальное стохастическое управление в общем случае терминальных систем принадлежит к классу дуального управления в замкнутом контуре, определяемого формулой (2.4).

В отдельных случаях, однако, плотность распределения погрешности оценивания координат не зависит от величины управлений, т. е.

$$P(\delta_k) = f_{\delta}(x_0, \bar{w}_{0(k-1)}, \bar{f}_{0(k-1)}).$$

Это означает, что изменение погрешностей будущих оценок координат состояния не зависит от текущего управления, процесс активного изучения объекта управления не может быть организован и оптимальное стохастическое управление принадлежит классу управлений с обратной связью.

Могут выполняться и более слабые условия: от управления не зависят только отдельные вероятностные моменты погрешности  $\delta_k$  оценивания, но именно эти моменты определяют значение риска  $R$ , и, следовательно, характеризуют погрешность изучения объекта для данной терминальной задачи управления.

Системы управления, в которых погрешности изучения объекта не зависят от управления, иногда называют нейтральными.

В бортовых терминальных системах дуальное управление не нашло применения из-за чрезвычайной трудоемкости отыскания управления из (2.7). Решить (2.7) удастся лишь в случае нейтральных систем (когда эффект дуальности отсутствует) или в некоторых простейших примерах, лишенных физического содержания.

Для того чтобы получить оптимальное управление в одном из двух других классов стохастического управления, необходимо при определении управления задаваться соответствующими дополнительными условиями. Существенную роль при этом могут играть и ограничения, накладываемые на управляющие воздействия. Эти ограничения формируют некоторое допустимое множество  $U$  управлений.

Оптимальное программное управление однозначным образом вытекает из предположения, что измерения текущего состояния не используются при формировании управления, и тогда оно непосредственно определяется при минимизации риска  $R$  как функции многих переменных  $u_0, u_1, \dots, u_I$ :

$$\bar{u}_{0I}^* = \arg \left\{ \min_{\bar{u}_{0I} \in U} M [\psi(x_0, \bar{w}_{0I}, \bar{u}_{0I}, \bar{f}_{0I}, x_{\text{зад}})] \right\}, \quad (2.8)$$

где математическое ожидание  $M[\cdot]$  соответствует априорному распределению  $P(x_0, \bar{w}_{0I})$ .

Несколько сложнее обстоит дело с оптимальным управлением с обратной связью: существует ряд различных дополнительных условий, приводящих к классу управлений с обратной связью.

## 2.4. Способы получения стохастического управления с обратной связью

**1. Системы с разделением функции управления.** Наиболее простой способ получения стохастического управления с обратной связью состоит в следующем.

Определяют детерминированное оптимальное управление в виде  $u_{\text{дет } i} = u_{\text{дет } i}(x_i)$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ), доставляющее минимум функции потерь  $\Psi(x_{I+1}, x_{\text{зад}})$  при условии, что измерения состояния объекта производятся без ошибок, а случайные возмущения  $\bar{v}_{0I}$  отсутствуют [сравните с (2.8)]:

$$\bar{n}_{\text{дет } iI}^{(i)} = \arg \left\{ \min_{\mathbf{u}_{iI} \in U} [\Psi_i(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{u}}_{iI}, \bar{\mathbf{f}}_{iI}, \mathbf{x}_{\text{зад}})] \right\} = (\mathbf{u}_{\text{дет } i}^{(i)}, \mathbf{u}_{\text{дет } (i+1)}^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{\text{дет } I}^{(i)});$$

$$\mathbf{u}_{\text{дет } i} = \mathbf{u}_{\text{дет } i}^{(i)} = \mathbf{u}_{\text{дет } i}(\mathbf{x}_i). \quad (2.9)$$

Затем в полученном законе управления в качестве аргумента используют вместо вектора координат состояния  $\mathbf{x}_i$  его статистическую оценку  $\hat{\mathbf{x}}_i = M(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}_{iI}, \mathbf{u}_{0(i-1)})$ . В результате стохастическое управление с обратной связью получается в виде

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{\text{дет } i}(\hat{\mathbf{x}}_i) \quad (i=0, 1, \dots, I). \quad (2.10)$$

Отметим, что это управление совпадает с оптимальным стохастическим управлением в случае линейных объектов и измерительных устройств при квадратической функции потерь, когда справедлива так называемая теорема разделения.

Системы, в которых реализуется управление (2.10), называют системами с разделением функции управления: управляющее устройство в них разделяется на последовательно соединенные эстиматор — устройство, определяющее оценки координат состояния объекта, и детерминированный оптимальный регулятор.

**2. Системы программного управления с оптимальной обратной связью.** Довольно большое распространение получило стохастическое управление с обратной связью, получаемое в предположении, что в будущем не будет больше производиться никаких измерений (но не управлений!), а те измерения, которые уже сделаны, используются оптимальным образом при формировании управления. Такое управление иногда называют программным управлением, формируемым оптимальным образом по сигналам обратной связи или просто программным управлением с оптимальной обратной связью [43]. Способ формирования такого управления состоит в следующем.

В каждый дискретный момент времени  $i$  определяют программу управлений  $\mathbf{u}_{iI}^{(i)} = (\mathbf{u}_i^{(i)}, \mathbf{u}_{i+1}^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_I^{(i)})$ , которая обеспечивает минимизацию критерия  $R$  для информационных  $\hat{J}_i$  при условии, что в дальнейшем измерений не будет [сравните с (2.8), (2.9)]:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{iI}^{(i)} &= \arg \left\{ \min_{\bar{\mathbf{u}}_{iI} \in U} M[\Psi(\mathbf{x}_{I+1}, \mathbf{x}_{\text{зад}}) / \hat{J}_i] \right\} = \\ &= \arg \left\{ \min_{\bar{\mathbf{u}}_{iI} \in U} M[\Psi_i(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{w}}_{iI}, \bar{\mathbf{f}}_{iI}, \mathbf{x}_{\text{зад}})] \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Затем реализуют первое из управлений полученной программы, т. е.  $\mathbf{u}_i^{(i)}$ ; затем после проведения очередного измерения  $\mathbf{y}_{i+1}$  определяют в соответствии с информационными данными  $\mathbf{J}_{i+1}$  новую программу  $\bar{\mathbf{u}}_{(i+1)I}^{(i+1)}$ , из которой реализуют опять только первое управление и т. д. В результате при программном управлении с оптимальной обратной связью реализуется последовательность управлений  $\mathbf{u}_0^{(0)}, \mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_I^{(I)}$ .

**3. Системы управления с независимой идентификацией.** Если рассматривать систему программного управления, а затем пред-

существующие две системы стохастического управления как некоторые субоптимальные, приближающиеся по качеству управления (риску  $R$ ) к системе дуального управления, то следующим приближением можно считать систему с независимой идентификацией объекта. Способ построения ее состоит в следующем.

Производится разбиение каждого из исходных случайных векторов на две группы:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= (\mathbf{x}'_0, \mathbf{x}''_0), \quad \mathbf{w}_i = (\mathbf{w}'_i, \mathbf{w}''_i) \quad (i=0, 1, \dots, I), \\ \mathbf{h}_i &= (\mathbf{h}'_i, \mathbf{h}''_i) \quad (i=1, 2, \dots, I). \end{aligned}$$

Случайные векторы  $(\mathbf{x}'_0, \overline{\mathbf{w}}'_{0I}, \overline{\mathbf{h}}'_{1I})$  и  $(\mathbf{x}''_0, \overline{\mathbf{w}}''_{0I}, \overline{\mathbf{h}}''_{1I})$  различаются характером воздействия на систему управления. Вектор  $(\mathbf{x}'_0, \overline{\mathbf{w}}'_{0I}, \overline{\mathbf{h}}'_{1I})$  состоит из таких составляющих векторов  $\mathbf{x}_0, \overline{\mathbf{w}}_{0I}, \overline{\mathbf{h}}_{1I}$ , действие которых приводит к тому, что система теряет свойство нейтральности. Вектор  $(\mathbf{x}'_0, \overline{\mathbf{w}}'_{0I}, \overline{\mathbf{h}}'_{1I})$  включает все остальные составляющие, в присутствии которых, если нет возмущений  $(\mathbf{x}''_0, \overline{\mathbf{w}}''_{0I}, \overline{\mathbf{h}}''_{1I})$ , система остается нейтральной (обычно вектор  $(\mathbf{x}'_0, \overline{\mathbf{w}}'_{0I}, \overline{\mathbf{h}}'_{1I})$  включает случайные величины, аддитивно по отношению к другим аргументам входящие в функции  $\mathbf{f}_i, \mathbf{x}_i$ ).

При формировании управления в момент времени  $i$  по информационным данным  $\hat{\mathbf{J}}_i = \{\overline{\mathbf{y}}_{1i}, \overline{\mathbf{u}}_{0(i-1)}, \overline{\mathbf{f}}_{0(i-1)}, \overline{\mathbf{x}}_{1i}, P(\mathbf{x}_0, \overline{\mathbf{w}}_{0(i-1)}, \overline{\mathbf{h}}_{1i})\}$  составляются оценки  $\hat{\mathbf{x}}_0(i), \hat{\mathbf{w}}_k(i)$  ( $k=0, 1, \dots, I$ ),  $\hat{\mathbf{h}}_k(i)$  ( $k=1, 2, \dots, I$ ) случайных векторов  $\mathbf{x}_0, \overline{\mathbf{w}}_{0I}, \overline{\mathbf{h}}_{1I}$  (как это обычно делается при независимой идентификации объекта в процессе управления или испытания):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0(i) &= M(\mathbf{x}_0''/\hat{\mathbf{J}}_i), \\ \hat{\mathbf{w}}_k(i) &= M(\mathbf{w}_k''/\hat{\mathbf{J}}_i) \quad (k=0, 1, \dots, I), \\ \hat{\mathbf{h}}_k(i) &= M(\mathbf{h}_k''/\hat{\mathbf{J}}_i) \quad (k=1, 2, \dots, I). \end{aligned}$$

Затем, в предположении, что по результатам будущих измерений будут уточняться только оценки векторов  $\mathbf{x}'_0, \overline{\mathbf{w}}'_{0I}, \overline{\mathbf{h}}'_{1I}$ , а величины остальных случайных факторов в течение всего процесса управления будут совпадать с их оценками  $\hat{\mathbf{x}}_0(i), \hat{\mathbf{w}}_k(i)$  ( $k=0, 1, \dots, I$ ),  $\hat{\mathbf{h}}_k(i)$  ( $k=1, 2, \dots, I$ ) определяют оптимальное стохастическое управление [сравните с (2.6)]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^* &= \arg \left\{ \min_{\mathbf{u}_i \in U} \int_{\mathcal{Q}(\mathbf{y}_{i+1})} \left\{ \dots \min_{\mathbf{u}_{I-1} \in U} \int_{\mathcal{Q}(\mathbf{y}_I)} \left\{ \min_{\mathbf{u}_I \in U} \int_{\mathcal{Q}(\mathbf{x}'_0, \overline{\mathbf{w}}'_{0I})} \psi(\hat{\mathbf{x}}_0(i), \mathbf{x}'_0, \hat{\mathbf{w}}_{0I}(i), \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \overline{\mathbf{w}}'_{0I}, \overline{\mathbf{u}}_{0I}, \overline{\mathbf{f}}_{0I}, \mathbf{x}_{\text{зап}}\right) P_i(\mathbf{x}'_0, \overline{\mathbf{w}}'_{0I}/\overline{\mathbf{y}}_{1I}, \overline{\mathbf{u}}_{0(i-1)}) d\Omega(\mathbf{x}'_0, \overline{\mathbf{w}}'_{0I}) \right\} \times \dots \\ &\quad \left. \times P_i(\mathbf{y}_I/\overline{\mathbf{y}}_{1(i-1)}, \overline{\mathbf{u}}_{0(i-2)}) d\Omega(\mathbf{y}_I) \dots \right\} P_i(\mathbf{y}_{i+1}/\overline{\mathbf{y}}_{1i}, \overline{\mathbf{u}}_{0(i-1)}) d\Omega(\mathbf{y}_{i+1}) \left. \right\} \\ &\quad (i=0, 1, \dots, I), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где плотности  $P_i(\cdot)$  вычисляются в предположении, что

$$\mathbf{x}_0'' = \hat{\mathbf{x}}_0(i), \quad \boldsymbol{\omega}_k'' = \hat{\boldsymbol{\omega}}_k(i) \quad (i=0, 1, \dots, I),$$

$$\mathbf{h}_k'' = \hat{\mathbf{h}}_k(i) \quad (i=1, 2, \dots, I).$$

Управление (2.12) вычисляется значительно проще, чем (2.7), по той причине, что оно соответствует синтезу оптимальной системы управления в классе нейтральных систем, предусматривающему принудительное отделение функции управления  $\mathbf{u}_i$  от процесса изучения объекта в последующие моменты времени  $i+1, i+2, \dots, I$ .

Заканчивая характеристику терминальных систем программного управления и управления с обратной связью, отметим, что в бортовых системах наибольшее распространение получило стохастическое управление с обратной связью; программное управление используется значительно реже, и оно играет, как правило, подсобную роль — для выработки программного процесса, относительно которого ведется управление с использованием измерений отклонения реального процесса от программного, так что в конечном итоге реализуется опять же управление с обратной связью.

## 2.5. Общая постановка задачи синтеза бортовых терминальных систем управления

В предшествующем рассмотрении намеренно был оставлен в стороне вопрос об отличительных особенностях объектов и измерительных устройств бортовых терминальных систем управления — тем самым выделялись те моменты теории стохастических систем, которые непосредственно применимы к терминальным системам.

Проведем теперь некоторые уточнения общей постановки задачи синтеза бортовых терминальных систем, отражающие специфику условий их работы.

Объекты управления бортовых терминальных систем по своей природе являются устройствами непрерывного действия. Дискретизация их определяется либо тактностью работы бортовой ЦВМ (тактностью опроса коммутационным устройством БЦВМ датчиков всего комплекса систем управления), либо дискретным принципом работы измерительного устройства терминальной системы.

Под дискретным моментом времени  $i$  в терминальных системах понимается момент достижения некоторой монотонно изменяющейся величиной  $T$  заданного значения  $T_i$ . В качестве величины  $T$  может фигурировать текущее время полета  $t$ , но могут использоваться и другие физические переменные: например, в системе управления выводением ракеты — кажущаяся скорость ракеты, в системе управления мягкой посадкой — высота космического аппарата над поверхностью планеты и др.

Соответственно и временные последовательности векторов  $\overline{\boldsymbol{\omega}}_{0I}$ ,  $\overline{\mathbf{h}}_{1I}$  есть продукт дискретизации некоторых многомерных случайных процессов  $\boldsymbol{\omega}(T)$ ,  $\mathbf{h}(T)$ . Весьма широкий класс этих процессов

составляют те, которые могут быть представлены в виде выходных сигналов некоторых линейных динамических звеньев (описываемых матрицами весовых функций  $\mathbf{g}_w(T, \tau)$ ,  $\mathbf{g}_h(T, \tau)$ ), на вход которых действуют белые векторные шумы  $\sigma_w(T)$ ,  $\sigma_h(T)$ :

$$\mathbf{w}(T) = \int_0^T \mathbf{g}_w(T, \tau) \sigma_w(\tau) d\tau, \quad \mathbf{h}(T) = \int_0^T \mathbf{g}_h(T, \tau) \sigma_h(\tau) d\tau.$$

Для уяснения свойств случайных временных последовательностей  $\overline{\mathbf{w}}_{0I}$ ,  $\overline{\mathbf{h}}_{1I}$  рассмотрим линейный объект управления

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{w}_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, I+1), \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — матрицы коэффициентов; случайный вектор  $\overline{\mathbf{w}}_{i-1}$  — приращение реакции объекта на выходной сигнал  $\mathbf{w}(T)$  на интервале  $[T_{i-1}, T_i]$ ,

$$\mathbf{w}_{i-1} = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \mathbf{g}_{об}(T, \tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau, \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{g}_{об}(T, \tau)$  — матрица весовых функций объекта относительно входного воздействия  $\mathbf{w}(T)$ .

Бортовые терминальные системы представляют собой по сути либо системы управления центром масс КА (или ракет-носителей), либо системы управления расходом запасов топлива, т. е. системы, объекты управления которых весьма инерционны сравнительно с динамикой процесса  $\mathbf{w}(T)$ . Это значит, что функция  $\mathbf{g}_{об}(T, \tau)$  изменяется медленно и на интервале  $[T_{i-1}, T_i]$  происходит весьма эффективная фильтрация случайного процесса  $\mathbf{w}(T)$ .

В результате оказывается, что последовательность векторов  $\mathbf{w}_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) принадлежит к типу низкочастотных дискретных случайных процессов с высокой корреляцией между значениями координат процесса в отдельные моменты времени  $i$ . Такие процессы вполне удовлетворительно (по крайней мере, для этапа синтеза систем) описываются разложением по относительно небольшому числу  $N_1$  координатных функций  $\eta_n'(i)$  со случайными коэффициентами  $v^{(n)}$  ( $n=1, 2, \dots, N_1$ ):

$$\mathbf{w}_i = \sum_{n=1}^{N_1} v^{(n)} \eta_n'(i) \quad (i=0, 1, \dots, I), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{v} = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(N_1)}).$$

Эффект дополнительной фильтрации, сглаживания случайного процесса  $\mathbf{w}(T)$  при формировании случайных возмущений  $\mathbf{w}_i$ , имеет место не только для (2.13), но практически и для всех объектов управления терминальных систем. Поэтому в этих системах широко используется представление случайных возмущений в виде (2.15).

В измерительных устройствах, значительно более быстродействующих, чем объекты управления терминальных систем, подобный эффект фильтрации выражен значительно слабее; последователь-

ность случайных ошибок измерения с достаточно высокой степенью точности здесь может быть представлена в виде

$$h_i = \sum_{n=1}^{N_2} h^{(n)} \eta_n''(i) + \sigma_i \quad (i=1, 2, \dots, I),$$

где  $h^{(n)}$  ( $n=1, 2, \dots, N_2$ ) — случайный коэффициент;  $\eta_n''(i)$  — векторная функция дискретного времени  $i$ ;  $\sigma_i$  — векторный дискретный белый шум.

В дальнейшем удобно считать, что ошибки измерения представляют собой последовательность независимых между собой случайных векторов (т. е. считать, что  $h_i = \sigma_i$ ); при этом расширяется пространство состояний объекта (за счет включения в него векторов  $h^{(n)} \eta_n''(i)$ ) и увеличивается соответствующим образом размерность вектора  $\mathbf{v}$  случайных коэффициентов. Удобно, кроме того, включать вектор  $\mathbf{x}_0$  начальных условий в вектор  $\mathbf{v}$ .

Следует отметить еще два обстоятельства.

В ряде случаев свойства самого объекта и вероятностные характеристики возмущений известны не полностью. Такое положение характерно, например, для первых этапов экспериментальной отработки новых типов объектов, для полетов в малоизученных средах дальнего космоса.

Наконец, дополнительные сложности возникают при терминальном управлении объектом многоцелевого назначения. Конструкция такого объекта предусматривает возможность его работы в широком диапазоне условий эксплуатации, заранее не определенных, но известных в каждом конкретном случае использования объекта.

Очевидно, все эти обстоятельства должны быть учтены в общей постановке задачи синтеза бортовой терминальной системы управления. Итак, эта задача состоит в следующем.

Рассматривается нелинейный динамический объект управления, который может быть описан уравнением

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}, T_i, \varepsilon) + \mathbf{F}_i^\circ(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}^\circ) \quad (i=1, 2, \dots, I+1) \quad (2.16)$$

где  $\mathbf{x}_i$  — значение вектора координат объекта в момент времени  $i$  достижения монотонно изменяющейся величиной  $T$  значения  $T_i$ ;  $\mathbf{u}_i$  — значение вектора управления в тот же момент времени;  $\mathbf{v}, \mathbf{v}^\circ$  — случайные векторы возмущений;  $\varepsilon$  — вектор уставок, определяющий характеристики объекта управления (т. е. параметры функции  $\mathbf{F}_i$ ) при назначенной цели его функционирования;  $\mathbf{F}_i$  — известная функция своих аргументов;  $\mathbf{F}_i^\circ$  — функция, относительно которой имеются сведения только самого общего характера (например, заданы ограничения на вероятностные моменты этой функции).

Вектор измеренных координат

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i, \mathbf{h}_i^\circ) \quad (i=1, 2, \dots, I),$$

где  $h_i$ ,  $h_i^\circ$  — случайные векторы ошибок измерений; значения вектора  $h_i$  в разные моменты независимы между собой.

Известны вероятностные характеристики независимых между собой векторов  $v$  и  $h_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ). Априорные законы распределения векторов  $v^\circ$ ,  $h_i^\circ$  известны не полностью — заданы только некоторые характеристики этих законов.

Требуется определить функцию управления  $u_i = u_i(\bar{y}_i, \bar{u}_{0(i-1)}, \epsilon)$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) из некоторого допустимого множества  $U$ , последовательность  $\bar{T}_{1I} = (T_1, T_2, \dots, T_I)$  и число  $I$ , обеспечивающие для принятых условий наименьшее значение риска — функции от конечного состояния объекта управления в момент достижения величиной  $T$  заданного (терминального) значения  $T_{I+1}$ :

$$R = M [\Psi(x_{I+1}, x_{зап}, \epsilon)].$$

Понятие допустимого множества  $U$  управления, используемое в формулировке задачи, включает не только естественные ограничения по энергетике, эффективности регулирующих органов системы, но и искусственно вводимые ограничения, позволяющие в какой-то мере учесть требования, предъявляемые к бортовой системе по надежности, массе и т. п.

В приведенной общей постановке задача синтеза бортовых терминальных систем чрезвычайно сложна. Получение ее решения в приемлемом для технического применения виде требует введения ряда допущений и проведения анализа наиболее важных для практики частных случаев постановки задачи.

## 2.6. Физические основы решения задачи

Несомненно, наиболее существенной частью сформулированной выше задачи синтеза бортовых терминальных систем является определение управления как функции измеренных координат и уже реализованных управлений. Эту часть будем называть задачей синтеза алгоритма терминального управления.

Некоторые положения общей теории стохастического управления, используемые при решении этой задачи, рассматривались в предшествующих разделах данной главы. Акцент при этом делался на различия между основными классами стохастического управления, определяемые полнотой использования при управлении информации о состоянии объекта, в частности, информации, относящейся к будущему состоянию.

Дадим теперь адекватную поставленной в разд. 2.5 задаче физическую трактовку существа процессов стохастического управления в терминальных системах, которая оказывается вполне содержательной в смысле возможностей конструирования тех или иных субоптимальных алгоритмов терминального управления.

Как известно, наиболее благоприятные условия для достижения высокой точности в синтезируемой системе обеспечиваются, если в ней реализуются свойства комбинированного управления, сочетающего управление по отклонению и по возмущению. В системах рассматриваемого типа информация о возмущениях может иметь

только форму статистических оценок возмущений, так как в бортовых условиях редко удастся осуществить прямое измерение возмущений.

Используя оценки возмущений, можно прогнозировать и заранее парировать те отклонения координат объекта в терминальный момент  $T_{I+1}$ , которые возникли бы под действием возмущений.

Сущность процедуры прогнозирования при этом состоит в следующем:

на основе принятой модели объекта производится анализ поведения системы до текущего момента  $T_i$  (так называемый анализ предыстории процесса управления) и с применением методов фильтрации находятся статистические оценки действующих в системе возмущений  $\nu$ ;

находится реакция объекта на воздействия, равные найденным оценками возмущений, в предположении, что после момента  $T_i$  управление объектом не производится;

определяется отклонение реакции объекта  $x_{I+1}$  в терминальный момент от заданного значения  $x_{зад}$ .

Полученное отклонение используется как входная команда регулятора, исполнение которой и реализует компенсацию возмущающих воздействий  $\nu$ , естественно, в рамках возможностей, предоставляемых множеством  $U$  допустимых управлений.

Заметим, что точность оценок возрастает к концу процесса управления по мере накопления текущей информации о состоянии объекта. Следовательно при статистическом подходе к синтезу системы в общем случае не может быть достигнута равномерная во времени степень компенсации возмущений. Поэтому статистический подход к формированию каналов компенсации возмущений наиболее правомерен именно применительно к терминальным системам, для которых основное значение имеет точность, достигаемая в конце процесса управления.

Описанный процесс компенсации возмущений в принятой, неизбежно упрощенной модели объекта отличается от процесса в реальной системе. Это обстоятельство было формализовано в постановке задачи введением в уравнение объекта функции  $f_i^0$ , характеризующей элемент неопределенности в наших знаниях о законах, которым подчиняется поведение объекта.

Действие неопределенности такого рода в системе, построенной только по принципу управления по возмущению, выразилось бы в появлении неконтролируемых отклонений координат объекта.

В рассматриваемой системе, реализующей управление по прогнозируемым координатам, эти отклонения парируются по контуру обратной связи. Эффект обратной связи здесь проявляется в результате искажения оценок возмущений и появления вследствие этого дополнительных составляющих в управлении.

Таким образом, можно считать, что физические основы решения задачи синтеза терминальной системы стохастического управления заключаются в построении системы в классе комбинированных систем управления с использованием принципов фильтрации и прогнозирования.

# СТАТИСТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ПО СТРУКТУРЕ УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

Общие принципы определения оптимальных функций управления в терминальных системах рассмотрены в гл. 2. Однако на основе этих принципов по-разному строятся различные методы синтеза алгоритмов управления. Способы этого построения существенным образом зависят от того множества  $U$  допустимых управлений, в котором определяется искомая функция управления.

Множество  $U$  формируют не только исходя из естественных ограничений по эффективности регулирующих органов системы и тому подобных факторов, но и с учетом априорных сведений об управляющем устройстве системы. В этом случае на свободу выбора алгоритма управления накладываются дополнительные ограничения, которые могут быть названы ограничениями по структуре управляющего устройства.

Целесообразность введения ограничений по структуре определяется следующим.

1. Терминальные системы составляют часть общего бортового управляющего комплекса, включающего, кроме них, системы стабилизации, устройства обработки навигационных данных и др. Эти системы, как правило, работают одновременно, и поэтому возникают определенные затруднения в реализации бортовых алгоритмов систем даже на весьма мощной БЦВМ. Эти трудности преодолеваются тем успешнее, чем проще в вычислительном отношении алгоритмы управления и чем меньший объем памяти требуется для воспроизведения в БЦВМ алгоритмов систем, в том числе и терминальных систем управления.

2. Существенная часть возможных отказов в работе систем связана с невыявленными в процессе отладки ошибками программирования бортовых алгоритмов для БЦВМ. Вероятность таких ошибок заметно возрастает с усложнением структуры алгоритмов. Поэтому введение ограничений на структуру при синтезе алгоритмов способствует повышению надежности функционирования системы.

3. Наложение дополнительных ограничений на структуру при синтезе алгоритмов управления приводит в некоторых случаях к появлению новых свойств стохастического управления, таких, например, как снижение чувствительности системы к возмущению  $\psi^\circ$ , по отношению к которому реакция объекта априори неизвестна.

С целью достижения большей простоты изложения без существенных потерь в общности в дальнейшем рассматриваются, главным образом, объекты с одной координатой управления. Распространение полученных в данной главе результатов на более общий случай производится так же, как, например, в монографии [38].

### 3.1. Синтез оптимальных алгоритмов терминального управления с ограничением по емкости памяти управляющего устройства

**1. Синтез алгоритмов терминального управления с ограничением по емкости оперативной памяти.** Одним из наиболее важных ограничений по структуре является ограничение по емкости оперативной памяти управляющего устройства. Емкость оперативной памяти измеряется числом ячеек памяти, используемой для накопления апостериорной информации; образующейся в процессе управления при поступлении текущей информации с датчиков системы, и для хранения промежуточных результатов вычислений управляющего сигнала. Требуемая емкость оперативной памяти тем меньше, чем меньше объем информации о ходе процесса управления, перерабатываемой в управляющем устройстве при формировании управляющего сигнала. Уточним постановку задачи, опуская те детали, которые для рассматриваемой задачи несущественны.

Считаются известными конечно-разностные уравнения, описывающие динамику объекта:

$$x_i^{(k)} = F_i^{(k)}(x_{i-1}, u_{i-1}, \mathbf{v}) \quad (k=1, 2, \dots, K; i=1, 2, \dots, I+1), \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{x}_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(K)})$ ;  $\mathbf{v} = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(N)})$ .

Измеренное со случайной ошибкой  $h_i$  значение  $y_i$  выходной координаты  $x_i = x_i^{(1)}$  поступает на вход управляющего устройства. При этом

$$y_i = x_i + h_i \quad (i=1, 2, \dots, I). \quad (3.2)$$

Управление должно удовлетворять неравенству вида

$$|u_i| \leq U_{\text{доп } i} \quad (i=0, 1, \dots, I), \quad (3.3)$$

где  $U_{\text{доп } i}$  — предельно допустимое значение управления  $u_i$ .

Полагается заданной априорная плотность распределения вероятности  $P(\mathbf{v})$  вектора возмущений  $\mathbf{v}$ . Помехи — ошибки измерения  $h_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ) — представляют собой последовательность независимых случайных величин с известными плотностями распределения  $P(h_i)$ .

Задача состоит в определении алгоритма работы управляющего устройства системы, при котором достигается минимальное значение риска

$$R = M[\Psi(x_{I+1})], \quad (3.4)$$

причем формирование очередного управления  $u_i$  должно производиться с использованием ограниченного объема информации о ходе процесса управления, так, чтобы управление являлось функцией вида

$$u_i = u_i(\bar{y}_{ji}, \bar{u}_{j(i-1)}) \quad (i=0, 1, \dots, I; j=i-p, j > 0), \quad (3.5)$$

любого вида

$$\Delta u_i = \Delta u_i(y_{ji}, \bar{\Delta u}_{j(i-1)}) \quad (i=0, 1, \dots, I; j=i-p, j > 0), \quad (3.5a)$$

любого вида

$$\Delta u_i = \Delta u_i(\bar{y}_{ji}, \bar{\Delta u}_{(j+1)(i-1)}) \quad (i=0, 1, \dots, I; j=i-p, j > 0), \quad (3.5b)$$

где  $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$  — приращение значения управляющей координаты в момент времени  $i$ . Ограничение по емкости памяти управляющего устройства осуществляется заданием числа  $p$ , характеризующего ширину «скользящего» интервала наблюдения; при формировании управления используется в качестве текущей только информация о ходе управления на этом интервале.

Запись типа  $j = j(i)$ ,  $j > 0$  здесь означает, что

$$j = \begin{cases} j(i), & \text{если } j(i) > 0, \\ 1, & \text{если } j(i) \leq 0. \end{cases}$$

Алгоритм работы управляющего устройства, соответствующий (3.5), оказывается удобным в реализации, когда исполнительный орган системы является позиционером, а алгоритм, соответствующий (3.5а) или (3.5б), когда исполнительный орган при обработке управляющих сигналов производит их суммирование, т. е. является интегрирующим звеном. В алгоритме (3.5б) не используется в отличие от алгоритма (3.5а) значение первой переключки исполнительного органа на интервале наблюдения  $[j, i]$ . Общий метод решения этой задачи изложен в работах [3, 4]. Этот метод существенно использует понятие вектора возмущений  $\mathbf{v}_j$ , приведенного к моменту времени  $j$ . Для случаев (3.5а), (3.5б) этот вектор определяется как  $\mathbf{v}_j = (\mathbf{v} \cup \mathbf{x}_j, u_j)$ , для случая (3.5)  $\mathbf{v}_j = (\mathbf{v} \cup \mathbf{x}_j, u_j = 0)$ . Процедура построения алгоритма управления по этому методу довольно сложна, и при  $j = 1$  она сводится к известной [38].

**2. Частный случай. Линейная система управления.** Рассмотрение этого случая позволит установить некоторые свойства терминального управления, полученного с учетом ограничения по емкости оперативной памяти, и наиболее простым образом перейти в следующих разделах к синтезу алгоритмов с ограничением по структуре другого типа. Когда объект управления является линейным и отсутствует ограничение (3.3) на управление, процедура определения алгоритма оптимального управления может быть значительно упрощена. Изложим эту процедуру применительно к задаче определения оптимального управления в виде функции (3.5).

Будем полагать, что критерием оптимальности управления является квадратический риск

$$R = M(x_{l+1}^2), \quad (3.6)$$

а априорные законы распределения вероятностей возмущений  $\mathbf{v} = \mathbf{x}_0$  и помех  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) являются нормальными с нулевыми математическими ожиданиями и заданными корреляционной матрицей  $\mathbf{K}_v$  возмущения  $\mathbf{v}$  и дисперсиями  $\sigma_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) помех  $h_i$ .

Система линейных конечно-разностных уравнений, описывающая объект, разрешенная относительно выходной координаты при фиксированном векторе  $\mathbf{v}_j$  ( $j = i - p$ ) может быть представлена в виде

$$x_{l+1} = \varphi_{j(l+1)}(\mathbf{v}_j, \bar{u}_{jl}) = \sum_{n=1}^N a_{ln}^{(j)} v_j^{(n)} + \sum_{r=j}^l b_{lr} u_r =$$

$$= A_l^{(j)} \mathbf{v}_j + B_l^{(j)} u_{jl} \quad (l = j-1, j, \dots, I; j = i-p, j > 0; i = 0, 1, \dots, I), \quad (3.7)$$

где  $a_{ln}^{(j)}$ ,  $b_{lr}$  — известные коэффициенты;  $A_l^{(j)} = \|a_{ln}^{(j)}\|$  — матрица-строка,  $n$  — номер элемента строк ( $n = 1, 2, \dots, N$ );  $B_l^{(j)} = \|b_{lr}\|$  — матрица-строка,  $r$  — номер элемента строки, зависящий от  $j$  ( $r = j, j+1, \dots, l$ ). В данном случае  $\mathbf{v}_j = \mathbf{x}_j$ ,  $A_{j-1}^{(j)} = \|1, 0, \dots, 0\|$  и считается, что  $u_{jl} = 0$  при  $l < j$ ,  $b_{lr} = 0$  при  $l < r$ .

Представим критерий оптимальности (3.6) в виде

$$R = M[(A_l^J \mathbf{v}_J + B_l^{(J)} \bar{u}_{Jl})^2] = D(\hat{x}_{I+1} / \bar{y}_{JI}, \bar{u}_{JI}) + D_{JI},$$

где  $J = I - p$ ;  $D(\hat{x}_{I+1} / \bar{y}_{JI}, \bar{u}_{JI})$  — дисперсия условного среднего  $\hat{x}_{I+1} = M(x_{I+1} / \bar{y}_{JI}, \bar{u}_{JI})$ ;  $D_{JI}$  — условная дисперсия величины  $x_{I+1}$  (т. е. дисперсия погрешности оценивания  $x_{I+1} - \hat{x}_{I+1}$ ).

Условная дисперсия  $D_{JI}$  не зависит от временных векторов  $\bar{y}_{JI}$ ,  $\bar{u}_{JI}$  и определяется только параметрами законов распределения вероятностей векторов  $\mathbf{v}_J$  и  $\bar{h}_{JI}$  и коэффициентами  $a_{ln}^{(J)}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ).

Таким образом, оптимальная функция управления в момент времени  $I$ , удовлетворяющая условию

$$u_I^* = \arg \left\{ \min_{u_I} M(x_{I+1}^2 / \bar{y}_{JI}, \bar{u}_{J(I-1)}) \right\}, \quad (3.8)$$

определится при минимизации дисперсии условного среднего:

$$\min_{u_I} D(\hat{x}_{I+1} / \bar{y}_{JI}, \bar{u}_{JI}) = \min_{u_I} M \{ [M(x_{I+1} / \bar{y}_{JI}, \bar{u}_{J(I-1)}; \bar{u}_I = 0) + b_{II} u_I]^2 \},$$

и, следовательно,

$$u_I^* = - \frac{1}{b_{II}} M(x_{I+1} / \bar{y}_{JI}, \bar{u}_{J(I-1)}; u_I = 0). \quad (3.9)$$

В свою очередь,

$$M(x_{I+1} / \bar{y}_{JI}, \bar{u}_{J(I-1)}; u_I = 0) = A_l^{(J)} M(\mathbf{v}_J / \bar{y}_{JI}, \bar{u}_{J(I-1)}) + B_l^{(J)} \bar{u}_{J(I-1)}, \quad (3.10)$$

где вектор  $M(\mathbf{v}_J / \bar{y}_{JI}, \bar{u}_{J(I-1)})$  может быть вычислен по известному соотношению (см., например, [20])

$$M(\mathbf{v}_J / \bar{y}_{JI}, \bar{u}_{J(I-1)}) = [(A^{(J)})^T \mathbf{K}_{JI}^{-1} A^{(J)} + \mathbf{K}_{v_J}^{-1}]^{-1} (A^{(J)})^T \mathbf{K}_{JI}^{-1} (\bar{y}_{JI}^*)^T. \quad (3.11)$$

Здесь  $A^{(J)} = \|a_{ln}^{(J)}\|$  — матрица коэффициентов уравнения (3.7) объекта размера  $(p+1) \times N$ , составленная из строк  $A_l^{(J)}$  ( $l$  — номер строки;  $n$  — номер столбца;  $\mathbf{K}_{JI}$  — корреляционная матрица случайного вектора  $\bar{h}_{JI}$  ошибок измерения, очевидным образом составленная из заданных дисперсий  $\sigma_l^2$  ( $l = J, J+1, \dots, I$ );  $\mathbf{K}_{v_J}$  — корр-

ляционная матрица случайного вектора  $\mathbf{v}_J$ ;  $y_{JI}^* = (y_J^*, y_{J+1}^*, \dots, y_I^*)$  — скорректированная последовательность  $\bar{y}_{JI}$  измеренных координат, приведенная к условию, что управления на интервале времени  $[J, I]$  отсутствуют, т. е.

$$y_J^* = y_J, \quad y_{I+1}^* = y_{I+1} - B_I^{(J)} \bar{u}_{JI} \quad (l = J, J+1, \dots, I-1);$$

знак «т» означает транспонирование, знак «-1» — обращение матрицы.

После подстановки (3.10) и (3.11) в (3.9) получим, что алгоритм формирования управления в момент времени  $I$  имеет линейную форму

$$u_I^* = \sum_{i=J}^I \alpha_{JI} y_i + \sum_{i=J}^{I-1} \beta_{JI} u_i, \quad (3.12)$$

где коэффициенты  $\alpha_{JI}$ ,  $\beta_{JI}$  получаются в результате приведения подобных членов в уравнениях (3.9) — (3.11).

При реализации управления (3.12) дисперсия условного среднего становится равной нулю, а функция риска — равной условной дисперсии

$$D_{JI} = A_I^{(J)} [K_{v_J}^{-1} + (A^{J-1})^T K_{JI}^{-1} A^{J-1}]^{-1} (A_I^{(J)})^T. \quad (3.13)$$

Таким образом, при реализации оптимального управления  $u_I^*$  значение риска  $R = D_{JI}$  не зависит от  $J-1$  предшествующих управлений  $u_{I-1}$ ,  $u_{I-2}$ , ...,  $u_J$ , но зависит от управления  $u_{J-1}$  ( $J = I-p$ ,  $J > 0$ ), поскольку это управление влияет на корреляционную матрицу  $K_{v_J}$  вектора приведенных возмущений  $\mathbf{v}_J$ . Отметим, кроме того, что квадратичная форма (3.13) неотрицательно определена ( $D_{JI} \geq \geq 0$  при любых  $A_I^{(J)}$ ) и  $D_{JI} = 0$  при  $A_I^{(J)} K_{v_J} (A_I^{(J)})^T = 0$ . Поэтому при попятном движении от конца процесса управления к началу можно, минуя моменты времени  $I-1$ ,  $I-2$ , ...,  $J$ , перейти к определению управления  $u_{J-1}^*$  из условия

$$u_{J-1}^* = \arg \left\{ \min_{u_{J-1} \in U} A_I^{(J)} K_{v_J} (A_I^{(J)})^T \right\},$$

где множество  $U$  определяется функцией заданного вида

$$u_{J-1} = u_{J-1}(\bar{y}_{J_1(J-1)}, \bar{u}_{J_1(I-2)}) \quad (J_1 = J-1-p, J_1 > 0).$$

Нетрудно заметить, что это условие эквивалентно

$$u_{J-1}^* = \arg \left\{ \min_{u_{J-1}} M(x_{I+1}^2 / \bar{y}_{J_1(J-1)}, \bar{u}_{J_1(J-1)}; \bar{u}_{JI} = 0) \right\}, \quad (3.14)$$

где условие  $\bar{u}_{JI} = 0$  означает, что значение  $x_{I+1}$  выходной координаты должно определяться в предположении  $u_j = u_{j+1} = \dots = u_I = 0$ .

Условие (3.14) аналогично (3.8). Повторяя проведенные выкладки применительно к определению управления в моменты  $J-1$ ,  $J_1-1$  и т. д., получим

$$u_i^* = \sum_{l=j}^i \alpha_{jl} y_l + \sum_{l=j}^{i-1} \beta_{jl} u_l \quad (i=I, I-(p+1), I-2(p+1), \dots; \\ i > 0; j=i-p, p > 0).$$

Таким образом, для данной идеализированной постановки линейной задачи синтеза по квадратическому критерию оптимальное стохастическое управление, получаемое с учетом ограничения по емкости оперативной памяти, определено только в некоторые равноотстоящие (с тактностью  $p+1$ ) дискретные моменты времени  $i$  (в пределе, когда  $p=I$ , т. е. в терминальной системе нет ограничений по памяти, определено только одно, последнее управление  $u_I$ ). Управления в остальные моменты времени в рамках данной задачи могут быть произвольными.

Наконец, отметим еще одно, существенное для дальнейшего изложения обстоятельство. Определение оптимальных управлений  $u_i^*$  в моменты  $i=I, I-(p+1), I-2(p+1), \dots$  производится исходя из стратегии управления, заключающейся в том, чтобы полагать все будущие управления равными нулю. Нетрудно убедиться, что если управление линейным объектом ищется в виде функций (3.5а) или (3.5б), то вид алгоритма и стратегия управления остаются теми же, но с заменой управлений их приращениями.

**3. Синтез алгоритмов терминального управления с ограничением по емкости долговременной памяти.** Емкость долговременной памяти измеряется числом ячеек памяти, используемых для хранения априорной информации (значений коэффициентов, программных величин). При построении оптимальных систем управления значительная часть долговременной памяти идет на воспроизведение переменных во времени коэффициентов алгоритма оптимального управления. Поэтому вполне эффективным средством ограничения потребной емкости долговременной памяти управляющего устройства является сокращение общего числа перемен коэффициентов алгоритма управления за все время терминального управления.

Одна из возможных схем решения задачи синтеза алгоритма с ограничением указанного вида описана в работе [4].

### 3.2. Синтез оптимальных алгоритмов управления с ограничением по виду операций, осуществляемых управляющим устройством

Осуществление любых математических операций в БЦВМ (кроме алгебраических и некоторых типов логических операций) сводится к выполнению последовательности (подпрограммы) большого числа алгебраических операций, что в конечном итоге приводит к ужесточению требований, предъявляемых к быстродействию БЦВМ. Поэтому применительно к автоматическим системам, использующим в замкнутом контуре управления БЦВМ, целесообразно принять, что в управляющем устройстве могут быть реализова-

ны только алгебраические операции (и, возможно, некоторые логические), общее число которых заранее ограничивается.

Возможные способы решения соответствующей задачи синтеза алгоритма управления будем излагать последовательно по мере их усложнения, исходя из описанного в разд. 2.1 решения линейной задачи терминального управления.

**1. Частный случай. Квазилинейный объект управления.** 1) Рассматривается квазилинейный объект управления, состоящий из последовательно соединенных нелинейной безынерционной части и линейной части объекта, находящийся под воздействием случайных возмущений (рис. 13). Считаются известными уравнения, описывающие линейную часть объекта:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \hat{A}^{(i)} \mathbf{x}_i + \hat{B}^{(i)} v_i, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_0, \quad (3.15)$$

где  $\hat{A}^{(i)}$  — матрица коэффициентов порядка  $K$ ;  $\hat{B}^{(i)}$  — матрица-строка с  $K$  элементами;  $v_i$  — значение выходной координаты нелинейной части системы в момент времени  $i$ .

Считается также известной нелинейная функция, связывающая управление  $u_i$  с координатой  $v_i$ :

$$v_i = v(u_i) \quad (i=0, 1, \dots, I).$$

Смешение измеряемой координаты  $x_i = x_i^{(1)}$  с шумом  $h_i$  производится по формуле (3.2) аддитивно, априорные плотности  $P(\mathbf{v})$ ,  $P(\bar{h}_{1I})$  случайных векторов  $\mathbf{v}$ ,  $\bar{h}_{1I} = (h_1, h_2, \dots, h_I)$  списываются нормальными законами с нулевыми математическими ожиданиями и известными корреляционными матрицами  $K_v$ ,  $K_{1I}$ .

Критерий оптимальности — квадратический риск (3.6).

Задача состоит в определении алгоритма работы управляющего устройства системы, при котором достигается минимальное значение риска  $R$ , причем управление определяется в виде линейных функций

$$u_i = \sum_{l=j}^i \alpha_{jl} y_l + \sum_{l=j}^{i-1} \beta_{jl} v_l \quad (i=0, 1, \dots, I; j=i-p, j > 0) \quad (3.16)$$

либо в виде линейных функций

$$\Delta u_i = \sum_{l=j}^i \alpha_{jl} y_l + \sum_{l=j}^{i-1} \beta_{jl} \Delta v_l \quad (i=0, 1, \dots, I; j=i-p, j > 0), \quad (3.17)$$

где  $\alpha_{jl}$ ,  $\beta_{jl}$  — коэффициенты, величины которых должны быть определены в результате решения задачи синтеза;  $\Delta v_i = v_i - v_{i-1}$ .

Заданием числа  $p$  осуществляется для данного случая, помимо ограничения по емкости оперативной памяти, ограничение общего числа операций, производимых в управляющем устройстве при формировании управляющего сигнала. Заданием вида (3.16) или (3.17) функции управления предусматривается реализация в управляющем устройстве при формировании управления только про-

стейших арифметических операций и логических операций, отображающих нелинейные преобразования  $v(u_i)$ .

Уравнения (3.15), разрешенные относительно выходной координаты  $x_i = x_i^{(1)}$  при фиксированном векторе  $\mathbf{v}_j$ , имеют вид

$$x_{i+1} = A_i^{(j)} \mathbf{v}_j + B_i^{(j)} \bar{v}_{jI} \quad (i = j-1, j, \dots, I; i \geq 0, j = i-p, j > 0; i = 0, 1, \dots, I).$$

Полагая, что закон распределения вероятности выходной координаты линейной части объекта может быть аппроксимирован нормальным законом, представим риск (3.6) в виде

$$R = D_J(I) + D(\hat{x}_{i+1} | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{JI}) \quad (J = I-p, J > 0),$$

где  $D_J(I)$  — средняя условная дисперсия величины  $x_{i+1}$ , не зависящая по свойству нормального закона распределения от реализаций  $\bar{y}_{JI}, \bar{v}_{JI}$ ;  $D(\hat{x}_{i+1} | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{JI})$  — дисперсия условного среднего  $\hat{x}_{i+1} = M(x_{i+1} | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{JI})$ .

Оптимальное последнее управление  $u_I^*$  определяется из условия

$$\min_{u_I} D(\hat{x}_{i+1} | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{JI}) = \min_{u_I} M \{ [M(x_{i+1} | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{J(i-1)}; \mathbf{v}_I = 0) + b_I v_I]^2 \}, \quad (3.18)$$

где условное математическое ожидание  $M(x_{i+1} | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{J(i-1)}; \mathbf{v}_I = 0) = m_I$  является линейной функцией измеренных координат системы и значений  $v_i$  на интервале  $[J, I]$ :

$$m_I = \sum_{i=J}^I \alpha_{JI}^* y_i + \sum_{i=J}^{I-1} \beta_{JI}^* v_i. \quad (3.19)$$

Коэффициенты  $\alpha_{JI}^*, \beta_{JI}^*$  вычисляются при приведении подобных членов в соотношении

$$m_I = A_I^{(J)} M(\mathbf{v}_J | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{J(i-1)}) + B_I^{(J)} \bar{v}_{J(i-1)},$$

где вектор  $M(\mathbf{v}_J | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{J(i-1)})$  определяется по соотношению (3.11) с заменой обозначения  $u$  на  $v$ . Величина  $v_I$  является известной нелинейной функцией искомого управления  $u_I$ . С учетом (3.16) запишем

$$v_I = v \left( \sum_{i=J}^I \alpha_{JI} y_i + \sum_{i=J}^{I-1} \beta_{JI} v_i \right). \quad (3.20)$$

Подставляя (3.19) и (3.20) в (3.18) и приравнявая нулю соответствующие производные от функции (3.18), получим, что оптимальные коэффициенты алгоритма управления для момента времени  $I$  должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned}
& 2\alpha_{JI}^* M(y_l^2) + \sum_{\substack{q=J \\ q \neq l}}^I \alpha_{Jq}^* M(y_l y_q) + \sum_{q=J}^{I-1} \beta_{Jq}^* M(y_l v_q) = \\
= & -2b_{II} M \left\{ v \left( \sum_{q=J}^I \alpha_{Jq} y_q + \sum_{q=J}^{I-1} \beta_{Jq} v_q \right) \right\} y_l \quad (l=J, J+1, \dots, I); \quad (3.21) \\
& 2\beta_{JI}^* M(v_l^2) + \sum_{q=J}^I \alpha_{Jq}^* M(v_l y_q) + \sum_{\substack{q=J \\ q \neq l}}^{I-1} \beta_{Jq}^* M(v_l v_q) = \\
= & -2b_{II} M \left\{ v \left( \sum_{q=J}^I \alpha_{Jq} y_q + \sum_{q=J}^{I-1} \beta_{Jq} v_q \right) \right\} v_l \quad (l=J, J+1, \dots, I-1).
\end{aligned}$$

Корреляционные моменты, входящие в (3.21), целесообразно вычислять при помощи ЦВМ, используя статистические методы оценки точности нелинейных систем (методы типа статистических испытаний или статистического моделирования, изложенные в гл. 11).

Для определения оптимальной стратегии предпоследнего управления (но не самого управления) в момент времени  $I-1$  воспользуемся приближенным представлением последнего управления  $u_I^*$ . Возможность такого представления связана с тем, что величина  $v(u_I^*)$  направлена на компенсацию прогнозируемого конечного значения выходной координаты [т. е. оценки (3.19)], являющегося линейной функцией координат процесса управления на интервале наблюдения. В случае, когда оптимальное управление определяется в виде таких же функций, оно приближенно пропорционально оценке (3.19):

$$u_I^* \approx \beta_I M(x_{I+1} | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{J(I-1)}; v_I = 0) = \beta_I m_I. \quad (3.22)$$

Обозначим  $\alpha_I = 1/\beta_I$ , и, следовательно,

$$M(x_{I+1} | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{J(I-1)}; v_I = 0) = \alpha_I u_I^*. \quad (3.23)$$

Представим с учетом (3.23) дисперсию условного среднего в виде

$$D(\hat{x}_{I+1} | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{JI}) = M \{ [\alpha_I u_I^* + b_{II} v(u_I^*)]^2 \}. \quad (3.24)$$

Оптимальное значение коэффициента  $\alpha_I$ , доставляющее минимум (3.24), найдем приравнявая нулю соответствующую производную от (3.24):

$$\alpha_I M(u_I^{*2}) + b_{II} M[u_I^* v(u_I^*)] = 0.$$

Отсюда получаем, что коэффициент  $\beta_I$  должен удовлетворять условию

$$b_{II} M[m_I v(\beta_I m_I)] = -M(m_I^2). \quad (3.25)$$

Составляющая риска, зависящая от управлений на интервале наблюдений  $[J, I]$ , — дисперсия условного среднего — при оптимальном последнем управлении (3.22) определяется из соотношений (3.18) и (3.25):

$$D(\hat{x}_{I+1} | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{JI}) = M\{[b_{II}v(\beta_I m_I)]^2\} - M\{M[m_I b_{II}v(\beta_I m_I)]\} = \\ = (k_I^{(1)2} - k_I^{(2)2}) M(m_I^2).$$

Здесь  $k_I^{(1)}$  — коэффициент статистической линеаризации известной нелинейной функции  $b_{II}v(u_I)$ , полученный из условия равенства дисперсий выходных координат линеаризованной и исходной нелинейной функций (первого условия статистической линеаризации) [15];  $k_I^{(2)}$  — коэффициент статистической линеаризации той же функции  $b_{II}v(u_I^*)$ , полученный из условия минимума математического ожидания разности выходных координат линеаризованной и исходной нелинейной функций (второго условия линеаризации).

Для типовых симметричных нелинейностей, характеризующихся наличием зон насыщения, разность  $k^{(1)2} - k^{(2)2}$  при изменении дисперсии  $M(m_I^2)$  условного входного сигнала  $m_I = M(x_{I+1} | \bar{y}_{JI}, \bar{v}_{J(I-1)}; v_I = 0)$  нелинейного элемента  $v(\beta_I m_I)$  меняется медленнее, чем величина дисперсии  $M(m_I^2)$ . Поэтому оптимальное предпоследнее управление  $u_{I-1}^*$  должно минимизировать указанную дисперсию с учетом дополнительной информации о ходе процесса управления в момент  $J-1$ :

$$\min_{u_{I-1}} M(m_I^2) = \min_{u_{I-1}} M\{[M(x_{I+1} | \bar{y}_{(J-1)I}, \bar{v}_{(J-1)(I-1)}; v_{I-1} = v_I = 0) + \\ + b_{I(I-1)}v_{I-1}]^2\}. \quad (3.26)$$

Это условие аналогично условию (3.18), по которому определяется последнее управление, с той разницей, что величина  $v_I$  здесь условно полагается равной нулю.

Последовательное проведение выкладок, аналогичных (3.18) — (3.26), правомерно для всех  $p$  моментов, предшествующих  $I$ -му.

При выборе управления в момент  $J-1 = I-p-1$  необходимо иметь в виду, что составляющая риска  $R$ , которую до сих пор можно было не учитывать при определении управления, — условная дисперсия  $D_J(I)$  — зависит от величины  $v_{J-1}$ , поскольку параметры закона распределения плотности вероятности вектора  $\mathbf{v}_J$  зависят от управлений в моменты времени, предшествующие  $J$ -му. Из соображений, положенных в основу анализа линейной задачи терминального управления, следует, что условие минимизации этой составляющей риска имеет вид (3.14). А это условие в данном случае совпадает с условием минимизации и другой составляющей риска — дисперсии условного среднего (в линейной задаче дисперсия условного среднего при оптимальном управлении равнялась нулю). Поэтому для выбора оптимального управления  $u_{J-1}^*$  имеем соотношение

$$u_{j-1}^* = \arg \left\{ \min_{u_{j-1}} [M(x_{l+1}/\bar{y}_{j,(l-1)}, \bar{v}_{j,(l-1)}; \bar{v}_{j,l} = \mathbf{0}) + b_{j(j-1)}v(u_{j-1})]^2 \right\} \quad (3.27)$$

$$(J_1 = J - p - 1).$$

Переходя при попятном движении к моментам  $J-2, J-3, \dots, i$ , получим подобные (3.18), (3.27) условия выбора оптимальных управлений в эти моменты времени. В результате получим аналогичные (3.21) соотношения (с заменой индексов  $J, I$  на  $j, i$ ) между корреляционными моментами координат оптимальной системы, которым должны удовлетворять коэффициенты  $\alpha_{ji}, \beta_{ji}$  линейного алгоритма управления.

Такие же соотношения можно получить для случая, когда управление ищется в виде (3.17); при этом величина  $v_q$  ( $q = j, j+1, \dots, i-1$ ) заменяются на  $\Delta v_q$ , а стратегия управления предусматривает неизменность будущих управлений  $v_s$  ( $s = i+1, i+2, \dots, I$ ), т. е.  $\Delta v_{(i+1)l} = 0$ .

Таким образом, при решении данной задачи получаем линейные алгоритмы терминального управления, отличающиеся от оптимальных алгоритмов в рассмотренной ранее линейной задаче синтеза тем, что управления здесь определены во все дискретные моменты времени терминального процесса.

2) Рассматривая тот же квазилинейный объект управления, будем считать, что на нелинейную часть также действуют случайные возмущения. При этом возмущения аддитивной (по отношению к управлению  $v_i$ ) природы будем приводить ко входу линейной части и включать в вектор возмущений, действующих на эту линейную часть; мультипликативные возмущения будем сводить к отклонению  $v$  коэффициента передачи объекта по управлению  $v_i$ :

$$x_{l+1} = A_l^{(j)} \mathbf{v}_j + (1+v) B_l^{(j)} \bar{v}_{j,l}, \quad v_i = v(u_i) \quad (l = j-1, j, \dots, I, l \geq 0; \\ j = i-p, j > 0; i = 0, 1, \dots, I). \quad (3.28)$$

Неизменным остаются способ (3.2) смешения полезного сигнала с шумом измерения и критерий оптимальности (3.6).

Необходимо определить оптимальную по риску (3.6) функцию управления  $u_i$  в виде дробно-рациональной функции от измеренных на интервале наблюдения  $[j, i]$  координат  $y_l$  и  $v_l$ . Это означает, что дополнительно к операциям, осуществляемым управляющим устройством в рассмотренном выше случае, здесь могут использоваться и арифметические операции типа деления.

Определение алгоритма управления, удовлетворяющего поставленным требованиям, практически может быть проведено в рамках системы с независимой идентификацией объекта (см. гл. 2). Введем в рассмотрение оценку  $\hat{v}(i) \equiv M(v/\bar{y}_{j,i}, \bar{v}_{j(i-1)})$  величины  $v$ . Отметим, что при известном векторе  $\bar{v}_{j(i-1)}$  случайная величина  $v$  входит в уравнение объекта (3.28) линейно, как и вектор  $\mathbf{v}_j$ . Поэтому, объединяя все случайные возмущения, действующие на объект, в общий  $(N+1)$ -мерный вектор  $\mathbf{v}_j^* = (\mathbf{v}_j, v)$ , определим оценку

$\hat{\mathbf{v}}_j^*(i)$  этого вектора (и в том числе оценку  $v(i)$  его последнего элемента  $\mathbf{v}_j^{*(N+1)} = v$ ) по соотношению

$$\hat{\mathbf{v}}_j^*(i) = \mathbf{M}(\mathbf{v}_j^* \bar{y}_{ji}, \bar{\mathbf{v}}_{j(i-1)}) = [(C^{(j)})^T \mathbf{K}_{ji}^{-1} C^{(j)} + \mathbf{K}_{v_j^*}^{-1}]^{-1} (C^{(j)})^T \mathbf{K}_{ji}^{-1} \bar{y}_{ji}^* \quad (3.29)$$

Здесь  $C^{(j)} = \|c_{ln}^{(j)}\|$  ( $l = j-1, j, \dots, i-1$ ;  $n = 1, 2, \dots, N+1$ ) — матрица, первые  $N$  столбцов которой составлены из столбцов матрицы  $\mathbf{A}^{(i)}$ , а элементы  $c_{l(N+1)}^{(j)}$  ( $l = j-1, j, \dots, i-1$ )  $(N+1)$ -го столбца образованы по правилу

$$c_{(j-1)(N+1)}^{(j)} = 0, \quad c_{l(N+1)}^{(j)} = B_l^{(j)} v_{jl} \quad (l = j, j+1, \dots, i-1)$$

[напоминаем, что матрица  $\mathbf{A}^{(j)}$  размера  $(p+1) \times N$  составлена из строк  $A_l^{(j)}$  ( $l = j-1, j, \dots, i-1$ ),  $\mathbf{K}_{ji}$ ,  $\mathbf{K}_{v_j^*}$  — корреляционные матрицы векторов  $\bar{h}_{ji}$  и  $\mathbf{v}_j^*$ ;  $y_{ji}^* = (y_j^*, y_{j+1}^*, \dots, y_i)$ , где  $y_j^* = y_j$ ,  $y_{i+1}^* = y_{i+1} - B_l^{(j)} v_{jl}$  ( $l = j, j+1, \dots, i-1$ ).

Применительно к переменной во времени  $i$  модели объекта управления, описываемой уравнением

$$x_{i+1} = A_l^{(j)} \mathbf{v}_j + (1 + \hat{v}(i)) B_l^{(j)} \bar{v}_{ji} \quad (l = j-1, j, \dots, I; i = 0, 1, \dots, I; j = i-p, j > 0), \quad (3.30)$$

формально поставим вспомогательную задачу определения управления, оптимального в классе линейных по координатам векторов  $y_{ji}$ ;  $\bar{\mathbf{v}}_{j(i-1)}$ . Решение этой задачи подобно тому, как это было сделано в случае 1), может быть представлено в виде

$$u_i^* = \frac{\beta_i}{1 + \hat{v}(i)} \mathbf{M}(x_{i+1} \bar{y}_{ji}, \bar{\mathbf{v}}_{j(i-1)}; \bar{\mathbf{v}}_{il} = \mathbf{0}, v = \hat{v}(i)), \quad (3.31)$$

где коэффициент  $\beta_i$  определяется условием

$$\beta_i = -\mathbf{M}(u_i^2) / \{b_{li} \mathbf{M}[u_i v(u_i)]\}.$$

(Для линейной задачи управления  $\beta_i = -1/\beta_{li}$ ).

Соотношение (3.31) для данного случая определяет стратегию управления в рамках системы с независимой идентификацией объекта управления. Из (3.29) получим, что управление (3.31) объектом (3.30) вспомогательной задачи

$$u_i^* = \frac{-\mathbf{M}(u_i^2)}{b_{li} \mathbf{M}[u_i v(u_i)]} \left[ \frac{A_l^{(j)}}{1 + \hat{v}(i)} \hat{\mathbf{v}}_j(i) + B_l^{(j)} \bar{\mathbf{v}}_{j(i-1)} \right]$$

применительно к координатам объекта (3.28) исходной задачи определено в виде дробно-рациональной функции. Поэтому это управление можно принять в качестве решения исходной задачи.

**2. Случай нелинейных объектов управления.** 1) Рассматривается объект управления весьма общего вида (3.1) с выходной координа-

той  $x_i = x_i^{(1)}$ , динамика которой при фиксированном векторе  $\boldsymbol{v}_j$  описывается уравнением

$$x_i = \varphi_{ji}(\boldsymbol{v}_j, \bar{u}_{j(l-1)}) \quad (l = j, j+1, \dots, I+1; j = i-p, j > 0; \\ i = 0, 1, \dots, I). \quad (3.32)$$

Способ измерения, критерий оптимальности, априорные вероятностные характеристики возмущений и ошибок измерения остаются такими же, как в рассмотренных квазилинейных случаях.

Требуется определить оптимальный по квадратическому критерию (3.6) алгоритм управления  $u_i$  как линейную функцию от измеренных на скользящем интервале наблюдения  $[j, i]$ , где  $j = i-p$ , координат  $y_l$  ( $l = j, j+1, \dots, i$ ) объекта и реализованных управлений  $u_l$  ( $l = j, j+1, \dots, i-1$ ). Поскольку не только задается вид алгоритма управления, но и ограничивается заданием числа  $p$  объем текущей информации, перерабатываемой в управляющем устройстве при формировании управления, то тем самым ограничивается общее число алгебраических операций, выполняемых в БЦВМ на данном такте  $i$  управления.

Для решения поставленной задачи позаимствуем из решения квазилинейных задач два положения: первое — оптимальная стратегия управления предусматривает формирование текущего управления  $u_i$  при условии, что в будущем управления не будет производиться; второе — закон распределения вероятности вектора  $(\bar{x}_{0(i+1)}, \bar{y}_{1i}, \bar{u}_{0i})$ , характеризующего процесс управления, может быть аппроксимирован нормальным законом.

В соответствии с первым положением введем в рассмотрение условное конечное значение  $z_i$  выходной координаты  $x_{i+1}$  объекта, полученное при условии, что начиная с  $(i+1)$ -го дискретного момента времени (и до конца) управления отсутствуют:

$$z_i = \varphi_{j(i+1)}(\boldsymbol{v}_j, \bar{u}_{ji}; \bar{u}_{(i+1)l} = 0) \\ (i = 0, 1, \dots, I; j = i-p, j > 0), \quad (3.33)$$

где функция  $\varphi_{j(i+1)}$ , как следует из (3.32), — известная функция своих аргументов.

В соответствии со вторым из принятых положений закон распределения вероятности  $(2p+3)$ -мерного вектора  $(z_i, \bar{y}_{ji}, \bar{u}_{ji})$  можно считать нормальным. В результате статистического моделирования процессов управления с вычислением (3.33) на БЦВМ может быть получена корреляционная матрица  $\mathbf{K}(i) = \|k_{rs}(i)\|$  вектора  $(z_i, \bar{y}_{ji}, \bar{u}_{ji})$ . Тогда оценка  $\hat{z}(i) = M(z_i | \bar{y}_{ji}, \bar{u}_{ji})$  величины  $z_i$ , составленная по информации о процессе управления, полученной на интервале  $[j, i]$ , как следует из известных результатов теории случайных функций [34], имеет вид

$$\hat{z}(i) = - \sum_{s=2}^{2+p} \frac{K_s(i)}{K_1(i)} y_{s_1+s} - \sum_{s=3+p}^{3+2p} \frac{K_s(i)}{K_1(i)} u_{s_2+s} \\ (i = 0, 1, \dots, I; s_1 = i-p+2, s_2 = i-2p-3; s_1, s_2 > 0),$$

где  $K_s(i)$  ( $s=1, 2, \dots, 3+2p$ ) — алгебраическое дополнение элемента  $k_{1s}(i)$  в определителе корреляционной матрицы  $\mathbf{K}(i)$ .

Управление  $u_i = u_{s_2+s}$  ( $s=3+2p$ ) по оптимальной стратегии должно сводить  $z(i)$  к нулю, т. е.

$$u_i^* = - \sum_{s=2}^{2+p} \frac{K_s(i)}{K_{s_3}(i)} y_{s_1+s} - \sum_{s=3+p}^{2+2p} \frac{k_s(i)}{K_{s_3}(i)} u_{s_2+s}$$

$$(i=0, 1, \dots, I; s_1=i-p-2; s_2=i-2p-3; s_3=3+2p). \quad (3.34)$$

Это и есть искомый линейный алгоритм управления. Определяемые через корреляционные моменты коэффициенты этого алгоритма вычисляются не в полете, а при проектировании терминальной системы. Эти моменты самым существенным образом зависят от принятого алгоритма управления. Поэтому при проектировании используется следующая итерационная процедура: вначале задаются нексторой функцией управления от измеренных координат и в результате статистического моделирования процессов управления при этой функции определяются корреляционные матрицы  $\mathbf{K}(i)$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) векторов  $(z_i, \bar{y}_{ji}, \bar{u}_{ji})$ ; затем по (3.34) вычисляются коэффициенты линейного алгоритма управления; снова проводится статистическое моделирование процессов управления при этом алгоритме, уточняются корреляционные матрицы и т. д. до тех пор, пока не будут определены корреляционные матрицы  $\mathbf{K}(i)$ , соответствующие оптимальному алгоритму управления.

Описанный итерационный процесс обычно оказывается довольно длительным и трудоемким. Однако в отдельных случаях (см. ниже) эта трудоемкость заметно снижается.

2) Иногда в нелинейных уравнениях (3.32) объекта могут быть выделены две части: одна, зависящая только от возмущений, и другая, зависящая только от управления  $u_i$ :

$$x_l = \varphi_{jl}(\mathbf{v}_j) + v_{jl}(\bar{u}_{j(l-1)}), \quad (3.35)$$

где 
$$v_{jl}(\bar{u}_{j(l-1)}) = \sum_{b=j}^{l-1} v_q(u_q); \varphi_{il}(\mathbf{v}_j), v_q(u_q)$$

— известные нелинейные функции.

Определим алгоритм управления объектом (3.35), доставляющий минимум риска (3.6) и определяемый в виде линейных функций от координат  $\bar{y}_{ji}$  и  $\bar{v}_{ji}$ . Это означает, что дополнительно к простейшим арифметическим операциям, реализуемым в управляющем устройстве при воспроизведении алгоритма (3.34), здесь могут использоваться и операции, отображающие нелинейности  $v_q(u_q)$  (в дальнейшем для упрощения записи будем опускать обозначение аргумента нелинейности:  $v_q(u_q) = v_q$ ).

Величина  $z_i^* = z_i - \sum_{q=j}^{i-1} v_q$ , а также вектор  $\bar{y}_{ji}^* = (y_j^*, y_{j+1}^*, \dots, y_i^*)$ , где

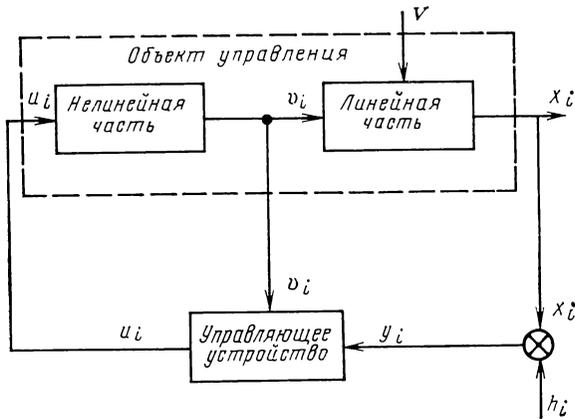


Рис. 13

$y_j^* = y_j$ ,  $y_l^* = y_l - \sum_{q=j+1}^{l-1} v_q$  ( $l = j+1, j+2, \dots, i$ ), не зависят, как следует из (3.35), от реализованных управлений  $\bar{u}_{j(i-1)}$ . Поэтому и корреляционная матрица  $K^*(i)$  вектора  $(z_i^*, \bar{y}_{ji}^*)$ , не зависящая от управлений, может быть определена при однократном статистическом моделировании процессов управления объектом (3.35). Оценка  $\hat{z}^*(i) = M(z_i^*/y_{ji}^*, v_{ji})$  имеет вид

$$\hat{z}^*(i) = - \sum_{s=2}^{2+p} \frac{K_s^*(i)}{K_1^*(i)} y_{s_1+s} \quad (i=0, 1, \dots, I; s_1 = i - p - 2, s_1 > 0).$$

Отметим, что

$$\hat{z}(i) = M(x_{I+1}/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)}; \bar{v}_{il} = 0) = \hat{z}^*(i) + \sum_{q=j}^{i-1} v_q.$$

Управление  $u_i^*$ , пропорциональное оценке  $\hat{z}(i)$  и минимизирующее риск (3.6), имеет вид

$$u_i^* = \frac{M(u_i^2)}{M(u_i v_i)} \left[ \sum_{s=2}^{2+p} \frac{K_s^*(i)}{K_1^*(i)} y_{s_1+s}^* - \sum_{q=j}^{i-1} v_q(u_q) \right]. \quad (3.36)$$

Этим выражением формируется алгоритм управления, линейный по координатам  $y_l$  ( $l = j, j+1, \dots, i$ ),  $v_q$  ( $q = j, j+1, \dots, i-1$ ) с коэффициентами, вычисляемыми априори по корреляционным моментам координат системы управления.

3) Рассматривается объект управления, который может быть описан нелинейным уравнением

$$x_l = \varphi_{jl}(v_j) + (1+v)v_{jl}(\bar{u}_{j(i-1)})$$

$$(l = j, j+1, \dots, I+1; j = i-p, j > 0; i = 0, 1, \dots, I+1).$$

Будем определять алгоритм управления  $u_i$ , обеспечивающий минимизацию риска (3.6), в виде дробно-рациональной функции величин  $y_l$  ( $l=j, j+1, \dots, i$ ) и  $v_q$  ( $q=j, j+1, \dots, i-1$ ).

Так же, как и в предыдущем случае, получим, что этот алгоритм имеет вид

$$u_i^* = \frac{M(u_i^2)}{M(u_i v_i)} \left( \frac{\widehat{K}_1(i)}{K_1^*(i)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sum_{s=2}^{2+p} K_s^*(i) y_{s_1+s}}{\widehat{K}_1(i) - \sum_{s=2}^{2+p} \widehat{K}_s(i) y_{s_1+s} - \sum_{s=p+3}^{2+2p} \widehat{K}_s(i) v_{s_2+1}} - \sum_{q=j}^{i-1} v_q \right) \\ (i=0, 1, \dots, I; s_1=i-p-2; s_2=i-2p-3; s_1, s_2 > 0), \quad (3.37)$$

где  $\widehat{K}_s(i)$  — алгебраическое дополнение элемента  $\widehat{k}_{1s}(i)$  в определителе корреляционной матрицы  $\widehat{K}(i)$   $2(p+1)$ -мерного вектора  $(v, y_{ji}, u_{j(i-1)})$ .

Аналогичным образом могут быть получены алгоритмы типа (3.34), (3.36) и (3.37), в которых вместо управлений  $u_i, v_i$  фигурируют их приращения  $\Delta u_i, \Delta v_i$ .

### 3.3. Примеры алгоритмов терминального управления

Некоторые примеры алгоритмов терминального управления уже приводились в разд. 3.2. Отмечалось, что введение ограничения  $p$  по емкости оперативной памяти в рамках системы с независимой идентификацией объекта обуславливает определенную стратегию управления, при которой формирование очередного управления производится в предположении, что в будущем никаких управляющих воздействий вводиться не будет (либо — в случае (3.5а), (3.5б) — будет происходить изменения управляющего воздействия).

Связь ограничений на управление со стратегией проследим на примере дискретного терминального управления объектом, представляющим собой интегрирующее (по переменной  $T$ ) звено. Этот пример имеет непосредственное отношение к системе СОБ, описанной в гл. 1.

Рассматривается объект

$$x_{i+1} = x_{i+1}^{(1)} = v^{(1)} - \Delta T_i v^{(2)} - v^{(3)} \Delta T_i u_i; \\ x_{i+1}^{(2)} = v^{(2)} + v^{(3)} u_i \quad (i=0, 1, \dots, I) \quad (3.38)$$

с измеренной выходной координатой

$$y_i = x_i + h_i \quad (i=1, 2, \dots, I).$$

Здесь  $v^{(1)}$  — возмущение типа случайного начального значения выходной координаты  $x_i^{(1)}$  объекта;  $v^{(2)}$  — возмущение типа случайного начального отклонения (с обратным знаком) производной вы-

ходной координаты;  $v^{(3)}$  — возмущение типа случайного коэффициента передачи управляющего органа системы.

Управление  $u_i$  должно удовлетворять одному из двух ограничений:

по фазовой координате

$$P(|x_i^{(2)}| \leq x_{\text{доп}i}^{(2)}) \geq P_{\text{зад}} \quad (3.39)$$

либо по модулю управления

$$|u_i| \leq U_{\text{доп}i}, \quad (3.40)$$

где  $x_{\text{доп}i}^{(2)}$ ,  $U_{\text{доп}i}$  — допустимые по модулю значения фазовой координаты  $x_i^{(2)}$  и управления  $u_i$ ;  $p_{\text{зад}}$  — заданная вероятность неперевышения фазовой координатой допустимого значения.

Случайные величины  $v^{(n)}$  ( $n=1, 2, 3$ ) полагаются подчиняющимися нормальному закону распределения вероятностей с математическими ожиданиями  $m_{vn}$  и корреляционной матрицей  $K_v = \|k_{nl}\|$  ( $n, l=1, 2, 3$ ) (причем  $v^{(3)}$  не зависит от  $v^{(1)}, v^{(2)}$ ). Ошибки измерения  $h_i$  считаются некоррелированными и также подчиняющимися нормальным законам распределения с дисперсией  $\sigma_i$ .

Критерий оптимальности  $R = M(x_{i+1}^2)$ .

Полученный на основе описанного подхода алгоритм управления, удовлетворяющего условиям (3.39) и  $p=1$ , имеет вид

$$u_i^* = u_i^{(i)} = \begin{cases} u_i & , \text{ если } U_i^{\min} \leq u_i \leq U_i^{\max}, \\ U_i^{\min} & , \text{ если } u_i < U_i^{\min}, \\ U_i^{\max} & , \text{ если } u_i > U_i^{\max}, \end{cases} \quad (3.41)$$

где  $u_i = \frac{1}{\hat{v}^{(3)}(i) \Delta T_i} \left[ \hat{v}^{(1)}(i) - \hat{v}^{(2)} \sum_{l=0}^i \Delta T_l - \hat{v}^{(3)}(i) \sum_{l=0}^{i-1} \Delta T_l u_l^* \right]$ , а

$U_i^{\min}$ ,  $U_i^{\max}$  — параметры алгоритма, определяемые априори из (3.39).

Выражение (3.41) представляет собой оптимальный алгоритм управления в системе с независимой идентификацией объекта для случая, когда не наложены ограничения на структуру управляющего устройства и предусматривается ограничение по фазовой координате вида (3.39).

Стратегия управления, вытекающая из (3.41), предусматривает парирование оценки конечного значения выходной координаты текущим управлением в предположении, что в будущем значение фазовой координаты  $x_l^{(2)}$  ( $l=i+1, i+2, \dots, I$ ) будет равно нулю.

Рассмотрим теперь случай существенного ограничения эффективности управляющего органа (3.40) без учета ограничения (3.39).

Алгоритм управления при этом имеет вид

$$u_i^* = \begin{cases} u_i, & \text{если } |u_i| \leq U_{\text{доп}i}; \\ U_{\text{доп}i} \operatorname{sign} u_i, & \text{если } |u_i| > U_{\text{доп}i}, \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\text{где } u_i = \frac{1}{\hat{v}^{(3)}(i) \Delta T_i} \left[ \hat{v}^{(1)}(i) - \hat{v}^{(2)}(i) \sum_{l=0}^i \Delta T_l - \hat{v}^{(3)}(i) \sum_{l=0}^{i-1} \Delta T_l u_l^* \right].$$

Такой алгоритм работы управляющего устройства обеспечивает наилучшую точность управления по риску  $R$  (в рамках систем с независимой идентификацией объекта) в случае малой располагаемой эффективности управляющего органа. Стратегия управления, определяемая соотношением (3.42), отличается от стратегии (3.41) и совпадает с той, которая была получена в разд. 3.2.

Рассмотрим частный случай оптимального управления, определяемого соотношением (3.56), когда в алгоритме полагается  $p=1$ , т. е. управление формируется по результатам двух смежных измерений управляемых координат. В этом случае алгоритм управления может быть приведен к двучленному виду

$$\Delta u_i^* = A_i (B_i y_i - y_{i-1}) \quad (i=2, 3, \dots, I), \quad (3.43)$$

где  $A_i, B_i$  — априори определяемые параметры алгоритма.

В частном случае, когда  $\sigma_i=0$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ), эти параметры вычисляются по простым соотношениям

$$A_i = \frac{1}{\Delta T_{i-1}}, \quad B_i = \frac{\sum_{l=i-1}^I \Delta T_l}{\sum_{l=i}^I \Delta T_l}.$$

При определении алгоритма (3.43) полагалось, что располагаемая эффективность  $U_{\text{доп}i}$  управляющего органа системы такова, что ее достаточно для компенсации действующих на систему возмущений, а, точнее, такова, что увеличение этой эффективности не приводит к заметному изменению точности терминального управления, оцениваемой риском  $R$ . Не учитывались также ограничения вида (3.39). Однако, при управлении (3.43) выполняются условия минимизации значений координаты  $x_i^{(2)}$  в процессе управления (например, при отсутствии ошибок измерения  $h_i$ , когда  $\sigma_i=0$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ), величина  $x_i^{(1)}$  уменьшается по линейному закону во времени  $i$  регулирования до нуля в конце процесса при постоянном и минимально потребном для этого значении координаты  $x_i^{(2)}$ ).

## ФИЛЬТРАЦИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В ТЕРМИНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Синтез алгоритмов терминального управления в предыдущей главе проводился в результате минимизации статистически заданного критерия оптимальности на базе принципа динамического программирования. При этом априори никак не задавалось требование, чтобы при синтезе выполнялись положения физических основ решения задачи стохастического терминального управления, сформулированные в разд. 2.6. Анализ алгоритмов управления, полученных в гл. 3 для частных случаев и примеров, тем не менее показывает, что они удовлетворяют этим положениям. В самом деле, эти алгоритмы формализуют процессы оценивания возмущений, действующих на системы, прогнозирования конечного состояния объекта и вычисления управляющего сигнала в соответствии с результатами прогнозирования и оптимальной стратегией управления. Нетрудно усмотреть в каждом из этих частных случаев и примеров существование некоторой величины  $z$ , обладающей следующими свойствами. Во-первых, эта величина характеризует терминальную цель управления в каждом процессе управления, и во-вторых, минимизация (по абсолютному значению) оценки этой величины в каждом процессе управления обеспечивает и минимизацию по совокупности процессов управления статистически заданного критерия  $R$ . Величину  $z$  принято называть промахом в терминальном управлении.

Из рассмотренных примеров нетрудно также заключить, что для квадратического критерия  $R = M[(x_{I+1} - x_{зад})^2]$  промахом является величина  $z = x_{I+1} - x_{зад}$ . Целью управления  $u_i$  ( $i = 0, 1, \dots, I$ ) в каждом процессе является минимизация абсолютной величины оценки  $\hat{z}(i)$  этого промаха в соответствии с оптимальной стратегией управления, определяемой, главным образом, накладываемыми на управление ограничениями (по эффективности, энергетике, структуре алгоритма управления и др.).

В данной главе представлен метод синтеза алгоритма управления, значительно более простой в практической реализации, чем описанные выше общие методы синтеза. Эта простота достигается, во-первых, принудительным использованием при синтезе системы упомянутых выше положений физических основ решения задачи терминального управления, т. е. посредством использования в явном виде принципов фильтрации и прогнозирования; во-вторых — априорным введением, наряду со статистическим критерием оптимальности, цели управления в каждом процессе, т. е. промаха в терминальном управлении; при этом критерий оптимальности используется только для определения оптимальной стратегии управления, парирующего оценку промаха.

## 4.1. Постановка задачи

Считаются известными уравнения, полностью описывающие динамику объекта управления:

$$\mathbf{x}_i = F_i(\mathbf{x}_{i-1}, u_{i-1}) \quad (i=1, 2, \dots, l+1). \quad (4.1)$$

где  $F_i = (F_i^{(1)}, F_i^{(2)}, \dots, F_i^{(K)})$  — известная вектор-функция;  $\mathbf{x}_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(K)})$  —  $K$ -мерный вектор координат состояния объекта в дискретный момент времени  $i$  (в этот вектор здесь будем включать и вектор случайных возмущений);  $u_i$  — управляющее воздействие, которое для упрощения изложения, как и раньше, будем считать скалярным.

Уравнения измерительного тракта имеют вид

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i) \quad (i=1, 2, \dots, l), \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{y}_i = (y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \dots, y_i^{(Q)})$  —  $Q$ -мерный вектор измеряемых координат;  $\mathbf{h}_i$  — вектор ошибок измерения. Полагаются известными априорные плотности распределения вероятностей векторов  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{h}_i$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ) и область  $U_i$  допустимых управлений. Математические ожидания векторов  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{h}_i$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ) равны нулю.

Точность терминального управления характеризуется:

в каждом процессе управления — промахом

$$z = z(\mathbf{x}_{l+1}, \mathbf{x}_{\text{зад}}); \quad (4.3)$$

по совокупности процессов управления — риском

$$R = M[\Psi(z)]. \quad (4.4)$$

Требуется найти оптимальный в смысле минимума риска  $R$  (4.4) алгоритм терминального управления объектом (4.1) в классе функций

$$u_i = u_i(\hat{\mathbf{x}}_i) \quad (i=0, 1, \dots, l), \quad (4.5)$$

где  $\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i(i)$  — оценка вектора  $\mathbf{x}_i$  координат состояния, составленная в момент времени  $i$ .

Требуется также указать способ построения оценок  $\hat{\mathbf{x}}_i$ , обеспечивающий в системе (4.1), (4.2), (4.5) минимальное значение рисков

$$R_i^{(k)} = M[(x_i^{(k)} - \hat{x}_i^{(k)})^2] \quad (i=0, 1, \dots, l; k=1, 2, \dots, K). \quad (4.6)$$

## 4.2. Модель объекта и стратегия управления

В практических задачах детальное математическое описание (3.1) динамики объекта управления и уравнения (3.2) измерительного тракта оказываются, как правило, весьма громоздкими. Эти уравнения могут быть использованы фактически только для получения оценок точности управления при выбранных структуре и параметрах системы.

На этапе же синтеза системы для построения алгоритма терминального управления (4.5) используются упрощенные уравнения объекта — его модель\*,

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{F}_{mi}(\mathbf{x}_{i-1}, u_{i-1}) \quad (i=1, 2, \dots, I+1). \quad (4.7)$$

В частном случае модель (4.7) может быть линейной:

$$\mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{A}}^{(i)} \mathbf{x}_{i-1} - \hat{\mathbf{B}}^{(i)} u_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, I+1), \quad (4.7a)$$

где  $\hat{\mathbf{A}}^{(i)}$  — матрица известных коэффициентов порядка  $K$ ;  $\hat{\mathbf{B}}^{(i)}$  — матрица-строка коэффициентов.

Вектор-функция  $\mathbf{F}_{mi} = (F_{mi}^{(1)}, F_{mi}^{(2)}, \dots, F_{mi}^{(K)})$  выбирается по возможности более простой, но такой, чтобы погрешности определения координат объекта от замены  $\mathbf{F}_i$  на  $\mathbf{F}_{mi}$  не превосходили заданных величин.

Соответственно упрощается и уравнение (4.2) измерительного тракта:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_{mi}(\mathbf{x}_i, h_i) \quad (i=1, 2, \dots, I). \quad (4.8)$$

В частном случае

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{x}_i + \mathbf{h}_i \quad (i=1, 2, \dots, I), \quad (4.8a)$$

где  $\mathbf{D}^{(i)}$  — матрица известных коэффициентов размера  $G \times K$ , причём  $G \leq Q$ .

Следуя физическим основам решения задачи стохастического терминального управления, описанным в разд. 2.6, управление (4.5) будем определять как функцию оценки  $\hat{\mathbf{x}}_i$  текущих координат  $\mathbf{x}_i$ , минимизирующую прогнозируемый промах:

$$u_i^* = \arg \left\{ \min_{u_i \in U_i} |z(\hat{\mathbf{x}}_i, u_i)| \right\}. \quad (4.9)$$

Прогнозирование промаха, т. е. составление в моменты  $i$  оценки ожидаемого промаха, будем производить из условия, что временной вектор  $\mathbf{u}_{(i+1)I} = (u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_I)$  будущих (по отношению к моменту времени  $i$ ) управлений линейно зависит от вектора текущих оценок

$$\bar{\mathbf{u}}_{(i+1)I} = \boldsymbol{\theta}_i \hat{\mathbf{x}}_i,$$

или от текущего управления

$$\bar{\mathbf{u}}_{(i+1)I} = \boldsymbol{\beta}(i) u_i. \quad (4.10)$$

Здесь  $\boldsymbol{\theta}_i$  и  $\boldsymbol{\beta}(i)$  — соответственно матрица коэффициентов размера  $(I-i) \times K$  и  $(I-i)$ -мерный вектор коэффициентов  $(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(I-i)})$ .

\* Размерность  $K_m$  вектора координат состояния модели в общем случае не равна размерности  $K$  вектора состояния объекта, причём  $K_m \leq K$ ; поскольку для данного рассмотрения эта особенность модели не существенна, принимаем  $K_m = K$ .

Исходя из уравнений (4.3), (4.7), (4.10), запишем условие (4.9) в виде

$$u^* = \arg \left\{ \min_{u_i \in U_i} |z [F_{Ml}(F_{M(l-1)} \dots (F_{M(i+1)}(\hat{x}_i, u_i), \beta^{(1)}u_i) \dots \beta^{(l-i)}u_i)]| \right\}. \quad (4.11)$$

Из функций управления (4.5), удовлетворяющих условию (4.11), при помощи вектора  $\beta = \beta(0) = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(l)})$  должна быть выбрана стратегия управления, обеспечивающая по совокупности процессов управления минимизацию риска (4.4) в допустимой области  $U_i$  управления. В отдельных, относительно простых случаях эта стратегия может быть определена заранее — так, как это сделано в предыдущей главе. Например, если  $U_i$  формализуется условием  $|u_i| \leq U_i$ , где  $U_i$  — задано, то  $\beta = (0, 0, \dots, 0)$  и, следовательно,

$$u_i^* = \begin{cases} u_i, & \text{если } |u_i| \leq U_i, \\ U_i \operatorname{sign} u_i, & \text{если } |u_i| > U_i, \end{cases}$$

$$\text{где } u_i = \arg \left\{ \min \left[ z [F_{Mi}(F_{M(i-1)} \dots (F_{M(i+1)}(\hat{x}_i, u_i), 0) \dots, 0)] \right] \right\}.$$

Если же  $U_i$  формализуется неравенством  $\left| \sum_{l=0}^i u_l \right| \leq U_i$ , то  $\beta = (-1, 0, 0, \dots, 0)$ , и, следовательно,

$$u_i^* = \begin{cases} u_i, & \text{если } \left| \sum_{l=0}^{i-1} u_l^* + u_i \right| \leq U_i, \\ \left[ u_i - \left| \sum_{l=0}^{i-1} u_l^* \right| \right] \operatorname{sign} u_i, & \text{если } \left| \sum_{l=0}^{i-1} u_l^* + u_i \right| > U_i, \end{cases}$$

$$\text{где } u_i = \arg \left\{ \min \left[ z [F_{Ml}(F_{M(i-1)} \dots (F_{M(i+2)}(F_{M(i+1)}(\hat{x}_i, u_i), -u_i), 0) \dots 0)] \right] \right\}.$$

В более общих случаях вектор  $\beta$  целесообразно определять при помощи поисковых методов минимизации риска (4.4) в результате статистического моделирования системы уравнений (4.1), (4.2), (4.7), (4.11).

Однако для этого необходимо, как это и предусмотрено постановкой задачи, указать способ построения оценок  $\hat{x}_i$ .

### 4.3. Оценки координат состояния калмановского типа

Рассмотрим сначала возможности использования для этой цели рекуррентного алгоритма фильтрации калмановского типа

$$\hat{x}_i = \hat{x}_i(i-1) + C^{(i)}(y_i - \hat{y}_i(i-1)) \quad (i=1, 2, \dots, l), \quad (4.12)$$

где  $\hat{\mathbf{x}}_i(i-1)$ ,  $\hat{\mathbf{y}}_i(i-1)$  — оценки векторов  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{y}_i$ , определяемые по информации, поступившей к  $(i-1)$ -му моменту времени;  $\mathbf{C}^{(i)} = \|\mathbf{c}_{kq}^{(i)}\|$  — весовая матрица Калмана.

Алгоритм (4.12) имеет оптимальную структуру [22] для линейного объекта вида (4.2а) и линейного измерительного тракта вида (4.8а).

Поэтому в случае нелинейных моделей (4.7) и (4.8) обычно полагают

$$\hat{\mathbf{x}}_i(i-1) = \mathbf{F}_{M_i}(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}, u_i), \quad \hat{\mathbf{y}}_i(i-1) = \mathbf{x}_{M_i}(\hat{\mathbf{x}}_i(i-1), \mathbf{h}_i = \mathbf{0}), \quad (4.13)$$

далее производят ту или иную линеаризацию моделей, после чего по известным выражениям [22] вычисляют значения весовой матрицы  $\mathbf{C}^{(i)}$ .

Однако при практических приложениях качество фильтрации, доставляемое этими алгоритмами, не всегда оказывается приемлемым, глазным образом из-за невязки между объектом (4.1) и результатом линеаризации его модели (4.7) (а также из-за невязки между измерительным трактом (4.2) и результатом линеаризации его модели (4.8)). В этих случаях неправомерно использование выражений Калмана для весовой матрицы  $\mathbf{C}^{(i)}$ .

Поэтому, используя в алгоритме (4.12) оценки (4.13), будем определять весовую матрицу  $\mathbf{C}^{(i)}$  непосредственно из условия минимума рисков  $R_i^{(k)}$  [40]:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{x}}_i^{(k)}} R_i^{(k)} = \min_{c_{kq}^{(i)} (q=1, 2, \dots, Q)} M \left\{ [\mathbf{x}_i^{(k)} - \hat{\mathbf{x}}_i^{(k)}(i-1)]^2 - 2 \sum_{q=1}^Q c_{kq}^{(i)} [\mathbf{x}_i^{(k)} - \right. \\ \left. - \hat{\mathbf{x}}_i^{(k)}(i-1)] [\mathbf{y}_i^{(q)} - \hat{\mathbf{y}}_i^{(q)}(i-1)] + \sum_{q, q_1}^Q c_{kq}^{(i)} c_{kq_1}^{(i)} [\mathbf{y}_i^{(q)} - \hat{\mathbf{y}}_i^{(q)}(i-1)] \times \right. \\ \left. \times [\hat{\mathbf{y}}_i^{(q_1)} - \hat{\mathbf{y}}_i^{(q_1)}(i-1)] \right\} (k=1, 2, \dots, K). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пусть} \quad \Lambda^{(i)} = \|\lambda_{kq}^{(i)}\| = M \{ [F_i(\mathbf{x}_{i-1}, u_{i-1}) - F_{M_i}(\hat{\mathbf{x}}_{i-1}, u_i) \times \\ \times [\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i) - \mathbf{x}_{M_i}(\hat{\mathbf{x}}_i(i-1), \mathbf{h}_i = \mathbf{0})]^T \} \quad (4.14) \end{aligned}$$

— матрица смешанных начальных моментов второго порядка координат векторов  $\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(i-1)$  и  $\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i(i-1)$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(i)} = \|\gamma_{q,q}^{(i)}\| = M \{ [\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i) - \mathbf{x}_{M_i}(\hat{\mathbf{x}}_i(i-1), \mathbf{h}_i = \mathbf{0})] [\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i) - \mathbf{x}_{M_i}(\hat{\mathbf{x}}_i(i-1), \mathbf{h}_i = \mathbf{0})]^T \} \quad (4.15) \end{aligned}$$

— матрица смешанных начальных моментов второго порядка координат вектора  $\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i(i-1)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{x}}_i^{(k)}} R_i^{(k)} = \min_{c_{kq}^{(i)} (q=1, 2, \dots, Q)} \left\{ M [(\mathbf{x}_i^{(k)} - \hat{\mathbf{x}}_i^{(k)}(i-1))^2] - 2 \sum_{q=1}^Q c_{kq}^{(i)} \lambda_{kq}^{(i)} + \right. \\ \left. + \sum_{q_1, q=1}^Q c_{kq}^{(i)} c_{kq_1}^{(i)} \gamma_{q_1, q}^{(i)} \right\} (k=1, 2, \dots, K; i=0, 1, \dots, I). \quad (4.16) \end{aligned}$$

Приравнивая нулю производную по  $c_{kq}^{(i)}$  от выражения, стоящего в фигурных скобках (4.16), получим

$$\sum_{q=1}^Q c_{kq}^{(i)} \gamma_{q,q}^{(i)} = \lambda_{kq}^{(i)} \quad (q=1, 2, \dots, Q; k=1, 2, \dots, K)$$

или  $C^{(i)}\Gamma^{(i)} = \Lambda^{(i)}$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ). Отсюда следует, что

$$C^{(i)} = \Lambda^{(i)}(\Gamma^{(i)})^{-1} \quad (i=0, 1, \dots, I). \quad (4.17)$$

В частном случае, когда можно считать, что

$$\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i) = \mathbf{x}_{mi}(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i), \quad M(\mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T) = 0 \quad (i \neq j),$$

и уравнения измерительного тракта линейны

$$\begin{aligned} \Lambda^{(i)} &= M[(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(i-1))(D^{(i)}\mathbf{x}_i + \mathbf{h}_i - D^{(i)}\hat{\mathbf{x}}_i(i-1))^T] = \\ &= M\{(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(i-1))[\mathcal{E}^{(i)}(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(i-1))]^T\} = K_i(i-1)(D^{(i)})^T; \\ \Gamma^{(i)} &= M[(\mathcal{E}^{(i)}\mathbf{x}_i + \mathbf{h}_i - D^{(i)}\hat{\mathbf{x}}_i(i-1))(D^{(i)}\mathbf{x}_i + \mathbf{h}_i - D^{(i)}\hat{\mathbf{x}}_i(i-1))^T] = \\ &= M\{D^{(i)}(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(i-1))[D^{(i)}(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(i-1))]^T + \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T\} = \\ &= \mathcal{E}^{(i)}K_i(i-1)(D^{(i)})^T + K_h^{(i)}, \end{aligned}$$

где  $K_i(i-1) = M\{(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(i-1))(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(i-1))^T\}$  (в случае линейного объекта  $K_i(i-1)$  — корреляционная матрица вектора  $\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i(i-1)$ );  $K_h^{(i)}$  — корреляционная матрица вектора  $\mathbf{h}_i$  ошибок измерения.

Тогда из общего условия (4.17) следует для случая линейного измерительного тракта (4.8а) известное выражение весовой матрицы Калмана

$$C^{(i)} = K_i(i-1)(D^{(i)})^T [\mathcal{E}^{(i)}K_i(i-1)(D^{(i)})^T + K_h^{(i)}]^{-1}.$$

#### 4.4. Оценки координат состояния при ограниченном интервале наблюдения

Рассмотрим теперь корреляционный способ построения оценок координат состояния в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}(\bar{y}_{ji}, \bar{u}_{(j+1)(i-1)}) \quad (j=i-p, j>0; i=1, 2, \dots, I+1), \quad (4.18)$$

где  $p$ , как и раньше, — число, назначением которого устанавливается ограничение по ширине скользящего интервала наблюдения, информация с которого используется при формировании оценок координат состояния объекта.

Оценки (4.18) может быть получена совершенно так же, как величина  $z(i)$  в разд. 3.2, п. 2. Покажем здесь возможность получения относительно простых алгоритмов фильтрации для случая, когда модель (4.7) объекта управления представлена в виде

$$\mathbf{x}_i = F'_{mi}(\mathbf{x}_{i-1}) + F''_{mi}(u_{i-1}) \quad (i=1, 2, \dots, I+1). \quad (4.19)$$

Тогда может быть использован линейный вариант оценки (4.18)

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{C}_*^{(i)} (\bar{\mathbf{y}}_{ji} - \bar{\mathbf{r}}_{ji}) \quad (i=1, 2, \dots, I), \quad (4.20)$$

где  $\bar{\mathbf{r}}_{ji} = (Y_j, Y_{j+1}, \dots, Y_i)$ ,  $\mathbf{Y}_i = \mathbf{x}_i [\mathbf{F}_{mi}^n(u_{i-1}), \mathbf{h}_i = \mathbf{0}]$

— составляющая вектора измерения (4.2), обусловленная влиянием управления  $u_{i-1}$ ;  $\mathbf{C}_*^{(i)}$  — матрица коэффициентов размера  $K \times [Q(p+1)]$ , подлежащая выбору из условия минимума рисков (4.6).

Пусть

$$\Lambda_*^{(i)} = M[\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_{i-1}, u_{i-1})(\bar{\mathbf{y}}_{ji} - \bar{\mathbf{r}}_{ji})^r] \quad (4.21)$$

— матрица смешанных начальных моментов второго порядка координат векторов  $\mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{y}_{ji}$  —  $\bar{\mathbf{r}}_{ji}$ ;

$$\Gamma_*^{(i)} = M[(\bar{\mathbf{y}}_{ji} - \bar{\mathbf{r}}_{ji})(\bar{\mathbf{y}}_{ji} - \bar{\mathbf{r}}_{ji})^r] \quad (4.22)$$

— матрица начальных моментов второго порядка координат вектора  $\mathbf{y}_{ji}$  —  $\bar{\mathbf{r}}_{ji}$ . Тогда аналогично (4.17) получим выражение для оптимальной матрицы коэффициентов оценки (4.20):

$$\mathbf{C}_*^{(i)} = \Lambda_*^{(i)} (\Gamma_*^{(i)})^r \quad (i=1, 2, \dots, I). \quad (4.23)$$

В более частном случае, при линейных моделях (4.7а) объекта и (4.8а) измерительного тракта алгоритм фильтрации (4.20) принимает линейный (относительно управления  $u_{j(i-1)}$  и измерений  $\mathbf{y}_{ji}$ ) вид.

Фильтр, описываемый уравнениями (4.12) — (4.15), (4.17) (либо — в другом варианте — уравнениями (4.20) — (4.23)), примечателен в том отношении, что все вычисления в процессе управления производятся на основе моделей (4.7), (4.8) объекта и измерительного тракта с использованием весовых матриц  $\mathbf{C}^{(i)}$  (либо  $\bar{\mathbf{C}}_*^{(i)}$ ) ( $i=1, 2, \dots, I$ ), которые могут быть определены априори по соотношению (4.17) [либо (4.23)].

Для этого — в случае калмановской фильтрации (4.12) — при разработке терминальной системы в процессе статистического моделирования на ЦВМ полных уравнений объекта (4.1) вычисляются матрицы  $\Lambda^{(i)}$ ,  $\Gamma^{(i)}$ . Поскольку значения этих матриц зависят от алгоритма управления в предшествующие моменты времени  $i=0, 1, \dots, i-1$ , вычисления при принятом векторе  $\beta$ , характеризующем стратегию терминального управления, производятся последовательно по схеме:

$$\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0, u_0, \hat{\mathbf{x}}_1(0), \hat{\mathbf{y}}_1(0) \rightarrow \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \Lambda^{(1)}, \Gamma^{(1)}, \mathbf{C}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_1, u_1, \hat{\mathbf{x}}_2(1), \\ \hat{\mathbf{y}}_2(1) \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_I, \Lambda^{(I)}, \Gamma^{(I)}, \mathbf{C}^{(I)}, \hat{\mathbf{x}}_I, u_I \rightarrow \mathbf{x}_{I+1}, R.$$

Время проведения вычислений на ЦВМ по данной схеме увеличивается незначительно по сравнению с машинным временем счета вероятностных точностных характеристик системы при выбранных

заранее параметрах системы. Варьируя вектор  $\beta$  и повторяя вычисления по указанной схеме, можно определить (с использованием того или иного метода поиска) оптимальную стратегию терминального управления — вектор  $\beta$ , обеспечивающий минимальное значение риска  $R$ .

Аналогичным образом можно поступать и в случае фильтрации типа (4.18).

#### 4.5. Алгоритмы оценивания промаха

В начале гл. 4 было введено понятие промаха  $z$  и определена процедура прогнозирования промаха на основании оценок координат состояния  $\hat{x}_i$ , управления  $u_i$  и будущих управлений  $\bar{u}_{(i+1)I}$ , выбираемых в соответствии с (4.10). Примем, что  $u_i = \beta^{(1)} u_{i-1}^*$ . Полученную в результате прогнозирования в момент  $i+1$  оценку  $\hat{z}_{i+1}$  промаха представим в виде

$$\hat{z}_{i+1} = \hat{z}_{i+1}(\hat{x}_{i+1}, \bar{u}_{(i+1)I}).$$

Проанализируем источники погрешностей прогнозирования промаха. Прежде всего, следует отметить методическую погрешность, связанную с использованием для вычисления  $z_{i+1}$  соотношений, полученных на основе упрощенной модели объекта. В тех случаях, когда не удастся получить в явном виде выражения, связывающие с приемлемой точностью величину промаха с оценками координат и управлением, для вычисления  $z_{i+1}$  можно использовать процедуры численного интегрирования полных уравнений объекта (4.1). Реализация такой процедуры предполагает наличие бортовой вычислительной машины. Тем не менее и здесь возникает методическая погрешность в оценке промаха, связанная с тем, что, как правило, не удастся выбрать достаточно малый шаг интегрирования из-за ограничений, накладываемых возможностями машины по быстродействию.

Кроме как перечисленными факторами методического характера ошибка прогнозирования вызывается теми воздействиями на объект возмущений, которые проявятся в будущем и не могут быть учтены при вычислении промаха сейчас, а также ошибками оценивания координат состояния. При этом последний из указанных факторов может оказаться определяющим, если оценка координат состояния произойдет на ограниченном интервале наблюдения.

С целью повышения точности прогнозирования промаха целесообразно на основе данных  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_{i+1}$  построить новую улучшенную оценку  $\hat{z}(i+1)$  [13]. Воспользуемся рекуррентным алгоритмом фильтрации калмановского типа

$$\hat{z}(i+1) = \hat{z}(i) + \Delta z_i + c_z^{i+1}(\hat{z}_{i+1} - \hat{z}(i) - \Delta z_i) \quad (i=0, 1, \dots, I-1), \quad (4.24)$$

где  $c_z^{i+1}$  — весовой коэффициент, а  $\Delta z_i$  — оценка изменения промаха

ха, возникающего при замене стратегии управления  $\bar{u}_{iI}$  на стратегию  $u_i^*$ ,  $\bar{u}_{(i+1)I}$ . Величина  $\Delta \hat{z}_i$  может быть получена на основе соотношения

$$\Delta \hat{z}_i = \hat{z}_i(\hat{x}_i, u_i^*, \bar{u}_{(i+1)I}) - \hat{z}_i(x_i, \bar{u}_{iI}).$$

Весовые коэффициенты  $c_z^{i+1}$  могут определяться из условия минимума рисков

$$R_z^{i+1} = M [(z_{i+1} - \hat{z}(i+1))^2] \quad (i=0, 1, \dots, I-1), \quad (4.25)$$

где  $z_{i+1}$  — фактическое значение промаха при управлении

$$u_0^*, u_1^*, \dots, u_i^*, \bar{u}_{(i+1)I}.$$

Аналогично тому, как это было сделано в разд. 4.3, найдем

$$c_z^{(i+1)} = \frac{\lambda_z^{(i+1)}}{\gamma_z^{i+1}}, \quad (4.26)$$

где  $\lambda_z^{i+1} = M [(z_{i+1} - \hat{z}(i) - \Delta z_i)(\hat{z}_{i+1} - \hat{z}(i) - \Delta z_i)]$ ,

$$\gamma_z^{i+1} = M [(\hat{z}_{i+1} - \hat{z}(i) - \Delta \hat{z}_i)^2].$$

Значения  $\lambda_z^{(i+1)}$ ,  $\gamma_z^{(i+1)}$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) определяются в процессе статистического моделирования системы управления.

Весовые коэффициенты, выбираемые в соответствии с (4.26), минимизируя ошибку прогнозирования промаха на каждом шаге, в общем случае обеспечивают лишь локальный минимум рисков (4.25). Ниже рассматривается метод синтеза, при котором выбор весовых коэффициентов подчинен единой цели — минимизации ошибки прогнозирования промаха на последнем шаге управления, т. е. риска

$$R_z^{(I)} = M [(z_I - \hat{z}(I))^2]. \quad (4.27)$$

Воспользовавшись выражением (4.24), получим для оценки  $\hat{z}(I)$  следующее соотношение:

$$\hat{z}(I) = \sum_{i=0}^I a_i \left( \hat{z}_i + \sum_{j=i}^{I-1} \Delta \hat{z}_j \right), \quad (4.28)$$

где  $a_i = c_z^{(i)} \prod_{j=i+1}^I (1 - c_z^{(j)})$ ;  $(4.29)$

$\hat{z}_0$  — априорная оценка промаха;  $\hat{z}_i + \sum_{j=i}^{I-1} \Delta \hat{z}_j$  — оценка промаха

на  $i$ -ом шаге управления, скорректированная с учетом поправок  $\Delta \hat{z}_j$ , на изменение стратегии управления на последующих шагах.

Пусть  $\eta_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) — ошибки оценки промаха, т. е.

$$\eta_i = \hat{z}(i) + \sum_{j=i}^{I-1} \Delta \hat{z}_j - z_I, \quad (4.30)$$

$K_\eta = \|k_{ij}^{(\eta)}\|$  — ковариационная матрица ошибок  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_I$ , а математические ожидания ошибок равны нулю. Будем считать, что определитель  $K_\eta$  не равен нулю, исключая возможность линейной зависимости между ошибками оценки промаха.

Подставляя (4.30) в (4.28), а (4.28) в (4.27), после выполнения операции математического ожидания найдем

$$R_z^I = \sum_{j,i=0}^I a_i a_j k_{ij}^{(\eta)}. \quad (4.31)$$

Минимизируя (4.31) по  $a_i$  при условии  $\sum_{i=0}^I a_i = 1$ , найдем опти-

мальные значения коэффициентов  $a_i = b_i/b$ , где  $b_i$  — сумма элементов  $i$ -ой строки матрицы, присоединенной к  $K_\eta$ ;  $b$  — сумма всех элементов такой матрицы. На основании (4.29) для весовых коэффициентов  $c_z^{(i)}$  может быть определено следующее соотношение:

$$c_z^{(i)} = \frac{a_i}{1 - \sum_{j=i+1}^I a_j} \quad (i = 1, 2, \dots, I).$$

Процедура нахождения весовых коэффициентов может быть построена следующим образом. Для предварительно выбранных  $c_z^{(i)}$  проводится статистическое моделирование системы управления и вычисляется ковариационная матрица ошибок прогнозирования промаха  $K_\eta$ . Затем в соответствии с изложенным выше подходом определяются оптимальные значения весовых коэффициентов и для них вновь проводится статистическое моделирование системы, вычисление  $K_\eta$  и новой итерации коэффициентов  $c_z^{(i)}$ . Такая процедура продолжается до тех пор, пока вновь полученная итерация коэффициентов  $c_z^{(i)}$  не окажется достаточно близкой к предыдущей. В том случае, когда ковариационная матрица ошибок прогнозирования  $K_\eta$  не зависит от управления, весовые коэффициенты  $c_z^{(i)}$  выбираются уже на первом шаге поиска.

## Глава 5

# ПРОБЛЕМА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ БОРТОВЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

При постановке задачи синтеза бортовых терминальных систем критерий оптимальности был выбран, исходя из основного назначения таких систем — с наилучшей точностью обеспечить приведение объекта в заданное состояние в назначенный момент времени или в назначенной точке пространства. Это позволило выявить спе-

цифику терминальных систем и сформулировать положение физических основ решения задачи синтеза.

Однако в большинстве практических терминальных задач, помимо требований к точности достижения заданной цели, к системе управления могут предъявляться и другие требования. Решение той или иной терминальной задачи всегда связано с определенными затратами энергии. При этом, как правило, выдвигается требование наиболее эффективного и экономичного использования имеющихся ресурсов, которое приводит к постановкам ряда оптимизационных задач. Так, например, при выведении космических аппаратов ракетами с ЖРД возникает задача максимизации энергетических показателей ракеты-носителя при заданных запасах топлива, решение которой позволит увеличить вес полезной нагрузки. При управлении сближением космических аппаратов также важно минимизировать затраты топлива.

Качество терминальных систем можно, кроме того, характеризовать быстродействием, надежностью управления, простотой аппаратной реализации, стоимостью, показателями эксплуатационного характера.

Таким образом, задачи терминального управления по существу являются многокритериальными. Поэтому представляет интерес рассмотреть постановку синтеза терминальных систем по нескольким критериям, выявить ее особенности и изложить способы решения, нашедшие применение в практике построения этих систем.

## 5.1. Постановка задачи

В предыдущих разделах движение объекта описывалось уравнениями дискретного вида. Однако, как уже отмечалось, объекты управления бортовых терминальных систем по своей природе являются устройствами непрерывного типа, и поэтому важно рассмотреть непрерывную модель объекта. Пусть движение объекта описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, T), \quad T \in [0, T_{I+1}], \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор координат объекта управления;  $T$  — непрерывный аргумент изменения координат состояния, в частности — текущее время  $t$ ;  $\mathbf{u}$  — вектор управляющих воздействий;  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор возмущений, представляемый векторным случайным процессом;  $\hat{\mathbf{f}}$  — заданная вектор-функция, компоненты которой предполагаются непрерывными и имеющими кусочно-непрерывные частные производные по координатам векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{u}$ , и по  $T$ ;  $T_{I+1}$  — терминальный момент времени, соответствующий окончанию работы системы.

Наблюдения производятся дискретно в моменты  $T_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ) и описываются уравнением

$$y_i = \mathbf{z}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i) \quad (i=1, 2, \dots, I), \quad (5.2)$$

где  $x_i$  — вектор координат объекта в дискретный момент  $i$ ;  $y_i$  — вектор измеренных координат;  $h_i$  — вектор ошибок измерения.

Цель управления состоит в том, чтобы перевести объект из начального состояния  $x_0$  в заданное конечное  $x_{\text{зад}}$ . В общем случае цель терминального управления характеризуется вектор-функцией  $z$  от конечного состояния  $x_{I+1} = x(T_{I+1})$ . При этом задается требуемое значение  $z_{\text{зад}}$  этой вектор-функции. Так, при выведении космического аппарата на заданную орбиту вектор-функции  $z$  определяется зависимостью параметров орбиты от координат состояния в конечной точке траектории выведения, соответствующей моменту выключения двигательной установки ракеты-носителя.

Задачи системы управления заключаются в том, чтобы наилучшим образом обеспечить выполнение терминальных условий  $z = z_{\text{зад}}$ . Так как эти условия задаются в векторной форме, то и критерий качества терминального управления должен быть векторным.

Будем считать, что заданная цель управления достижима, т. е. существует управление, обеспечивающее приведение объекта из области возможных начальных условий в заданное многообразие  $z = z_{\text{зад}}$  конечных состояний (в детерминированной постановке задачи — при отсутствии случайных возмущений и помех). Тогда можно считать, что в равной мере наилучшая точность управления может быть достигнута по всем составляющим вектора  $z$ . Другими словами, требования, выдвигаемые отдельными составляющими векторного терминального критерия, не противоречивы, и поэтому эти составляющие могут быть сравнительно просто объединены в скалярный терминальный критерий.

Пусть  $z_1 = z - z_{\text{зад}}$  — вектор промахов, составленный из ошибок приведения объекта в заданное многообразие состояний по каждой из компонент  $z$  (векторный аналог введенного ранее промаха управления). В практических задачах, как правило, задается допустимая область  $\Omega_z$ , внутри которой должны находиться значения вектора промахов  $z_1$ . Так как промах является случайной величиной, то, очевидно, существует вероятность выполнения заданных условий  $P(z_1 \in \Omega_z)$ . Управление должно максимизировать  $P(z_1 \in \Omega_z)$  или минимизировать  $1 - P(z_1 \in \Omega_z)$  — вероятность появления значений  $z_1$ , выходящих за пределы допустимой области. Однако минимизация вероятности выхода за пределы допустимой области для нахождения оптимального управления оказывается достаточно сложной процедурой и обычно заменяется минимизацией математического ожидания скалярной знакоположительной функции вектора промахов, т. е. терминальной функции потерь  $\Psi_1 = \Psi(z_1)$ .

В частном случае терминальная функция потерь  $\Psi_1$  может иметь квадратичную форму

$$\Psi_1 = z_1^T G_1 z_1, \quad (5.3)$$

где  $G_1$  — положительно определенная матрица.

В результате для терминального риска получим выражение

$$R_1 = M [\Psi_1(\mathbf{z}_1)]. \quad (5.4)$$

Кроме терминального критерия качество системы управления характеризуется также показателем интегрального типа

$$\Upsilon = \int_0^{T_{I+1}} \psi_T(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dT,$$

где  $\psi_T(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  — известная знакоопределенная функция, физическое содержание которой могут составлять затраты топлива или какого-либо другого энергетического ресурса, текущее время (в этом случае показателем качества является быстродействие) и др.

Прежде чем сформировать интегральный критерий качества, произведем дискретизацию задачи. Будем считать, что управление выбирается из класса кусочно-непрерывных вектор-функций вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{u}_i, T), \quad T \in [T_i, T_{i+1}], \quad (5.5)$$

где  $\mathbf{u}_i$  — вектор параметров, значения которых остаются неизменными на интервале  $[T_i, T_{i+1}]$  (размерность  $\mathbf{u}_i$  в общем случае может быть больше размерности  $\mathbf{u}$ ). В дальнейшем  $\mathbf{u}_i$  будем называть вектором дискретных управляющих воздействий, значения которого в моменты  $T_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ) выбираются как функции измерений и управляющих воздействий, известных из предыстории процесса управления, т. е.

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}), \quad (5.6)$$

где  $\bar{\mathbf{y}}_i = \bar{\mathbf{y}}_{1i} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_i)$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_{i-1} = \bar{\mathbf{u}}_{0(i-1)} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1})$ .

Таким образом, задача синтеза алгоритма управления заключается в нахождении вида функций (5.5), (5.6).

С учетом (5.5) можно записать

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} \psi_T(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dT = \psi_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i).$$

Примем, что  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}, T)$ , где  $\mathbf{v}$  — вектор случайных величин (возмущающих воздействий). В результате с учетом сделанных предположений можно получить дискретную модель объекта, описываемую уравнением вида

$$\mathbf{x}_i = F_i(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}) \quad (i=1, 2, \dots, I+1), \quad (5.7)$$

или

$$\mathbf{x}_i = \varphi_i(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}),$$

и дискретный аналог интегрального показателя качества

$$\Upsilon = \sum_{i=0}^I \psi_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i).$$

Пусть  $\mathbf{z}_2 = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_T)$  — вектор приращений интегрального показателя качества. Введем функцию потерь

$$\Psi_2 = \Psi_2(\mathbf{z}_2).$$

Математическое ожидание  $\Psi_2(\mathbf{z}_2)$  примем в качестве критерия (риска) интегрального типа

$$R_2 = M[\Psi_2(\mathbf{z}_2)]. \quad (5.8)$$

Критерии (5.4) и (5.8), в дальнейшем называемые локальными, противоречивы, так как улучшение одного из них приводит к ухудшению другого. Поэтому решение задачи синтеза сводится к выбору вида вектор-функций (5.5) и последовательности дискретных управлений  $\bar{\mathbf{u}}_T = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T)$ , где  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_{i-1})$ , из допустимой области  $U$  обеспечивающих компромисс между критериями (5.4) и (5.8).

Известные методы решения многокритериальных задач в основном сводятся либо к формированию свертки исходного векторного критерия в скалярный критерий, либо к взаимодействию человека, принимающего решение, с машиной, выполняющей процедуру оптимизации. Наиболее широкое распространение получила свертка в виде линейной комбинации локальных критериев с весовыми коэффициентами. Основная трудность, которая возникает при формировании скалярного критерия, связана с выбором весовых коэффициентов.

В рассматриваемой двухкритериальной задаче управления единый скалярный критерий  $R$  может быть определен выражением

$$R = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 1), \quad (5.9)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  — весовые коэффициенты, учитывающие степень важности терминальной и интегральной составляющих векторного критерия.

На практике количество критериев, которые должны учитываться при синтезе системы, часто превышает два критерия, принятые в изложенной постановке задачи синтеза. Для этих случаев будем считать, что либо множество критериев может быть свернуто в два критерия — интегрального и терминального типа, либо в общей задаче синтеза можно выделить несколько самостоятельных двухкритериальных задач (такая ситуация имеет место, например, в многорежимных терминальных системах управления).

## 5.2. Особенность задачи синтеза терминальной системы управления по нескольким критериям и способы ее решения

Особенность задачи многокритериального синтеза систем терминального управления заключается в том, что в процессе минимизации по сложному критерию приоритет должен быть отдан терминальной составляющей. Эта особенность определяется назначени-

ем бортовых терминальных систем, в силу которого основная задача управления состоит в достижении заданной цели. При этом, так как рассматриваемая задача носит статистический характер, достижение цели следует понимать в некотором вероятностном смысле.

Когда критерий  $R$  определен выражением (5.9), приоритет для терминальной составляющей может быть обеспечен соответствующим выбором весовых коэффициентов. Тем не менее в задании весовых коэффициентов и здесь остаются определенные трудности. Кроме того, при решении поставленной задачи с таким критерием приходится производить оптимизацию существенно нелинейной системы.

Методы синтеза систем терминального управления в сформулированной постановке, нашедшие широкое применение в практике проектирования, используют идею разбиения общей задачи синтеза на два этапа [23]. На первом этапе решается задача поиска оптимальной траектории движения из условия минимума интегрального критерия, обеспечивающей достижение заданного конечного состояния в номинальных невозмущенных условиях. Такое движение и соответствующее ему управление обычно называются программными. На втором этапе решается задача синтеза системы управления с обратной связью, реализующей движение объекта к заданной цели в условиях воздействия случайных возмущений и помех. Алгоритм управления возмущенным движением находится из условия минимума терминального критерия.

Пусть  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})$ , где  $\mathbf{u}^{(1)}$  — программное управление, обеспечивающее движение объекта в номинальных условиях;  $\mathbf{u}^{(2)}$  — управление с обратной связью, компенсирующее воздействие возмущающих факторов.

Такое разбиение вектора управления на различные по назначению составляющие — не просто формальный прием. В ряде случаев  $\mathbf{u}^{(1)}$  и  $\mathbf{u}^{(2)}$  имеют разную физическую природу и реализуются различными исполнительными органами.

Задача нахождения оптимального программного движения может быть сформулирована следующим образом. Рассматривается движение объекта, описываемое уравнением (5.1), при условии, что возмущающее воздействие  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , т. е.

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}, T), \quad T \in [0, T_{I+1}].$$

Требуется найти управление  $\mathbf{u}^{(1)}(T)$  из допустимой области  $U^{(1)}$ , которое переводит объект из начального состояния  $\mathbf{x}_0$  в заданное многообразие конечных состояний ( $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{\text{зад}}$ ) и обеспечивает минимум функционала

$$J = \int_0^{T_{I+1}} \psi_r(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dT.$$

Для решения подобного рода задач создан эффективный математический аппарат, использующий методы вариационного исчисления, динамическое программирование и принцип максимума.

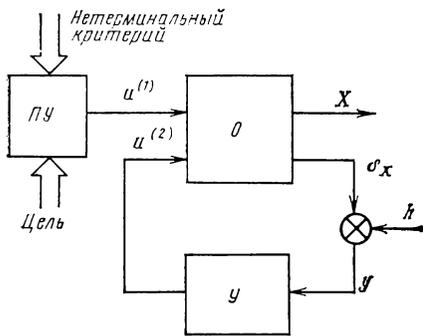


Рис. 14

А на базе этих методов разработаны алгоритмы численного решения, ориентированные на использование ЦВМ.

На этапе выбора программного движения при решении оптимизационной задачи часто удается представить оптимальное программное управление в виде

$$u^{(1)} = u^{(1)}(c, T), \quad (5.10)$$

где  $c$  — вектор параметров, зависящий от начальных и конечных условий. Выражение (5.10) мож-

но использовать при формировании (5.5).

Перейдем ко второму этапу синтеза терминального управления. В зависимости от того, как результаты первого этапа синтеза используются на втором этапе для построения процесса управления возмущенным движением объекта, терминальные системы можно разбить на два класса.

1. Терминальные системы управления с жесткой программной траекторией движения. Структурная схема такой системы показана на рис. 14 ( $O$  — объект управления,  $У$  — устройство управления с обратной связью,  $ПУ$  — программное устройство). Этот класс систем характеризуется следующим принципом действия. Программное управление  $u^{(1)}$ , выбранное на первом этапе, вводится в бортовую систему управления как заданная функция времени (или какого-либо другого непрерывного изменяющегося параметра  $T$ ). Таким образом, программная траектория движения  $X$  задается заранее и не подлежит изменению в процессе работы системы.

Управление возмущенным движением  $\delta x$  производится относительно программного. Другими словами  $u^{(2)}$  представляет собой дополнительно управляющее воздействие, направленное на компенсацию отклонения фактической траектории движения от программной к терминальному моменту  $T_{I+1}$ . Управление  $u^{(2)}$  строится в форме (5.6).

2. Терминальные системы управления с гибкими траекториями движения. В этом случае на первом этапе синтеза определяется класс терминальных управлений в виде уравнения (5.10). Управление в бортовой системе формируется на основе (5.10) как функция параметров  $c$ . Значения этих параметров могут изменяться в процессе работы системы в зависимости от результатов измерений, уточняющих сведения о фактическом состоянии объекта при воздействии на него возмущений. Таким образом, в системах с гибкими траекториями движения значения параметров  $c$ , изменяющиеся в моменты  $i=1, 2, \dots, I$ , по существу являются дискретными управляющими воздействиями  $u_i$ , введенными в общей постановке задачи синтеза (см. разд. 5.1). Поэтому в дальнейшем условимся вме-

сто  $c$  всегда писать  $u_i$  и считать вектор  $u_i$  вектором управления в системах рассматриваемого класса.

Отметим также, что в системах с гибкими траекториями движения уже нет необходимости в раздельном формировании программного управления и управления с обратной связью. Система вычисляет единое управление, реализующее движение к заданной цели.

Подведем некоторые итоги изложенного в данном разделе.

Рассмотренный подход к синтезу систем терминального управления, использующий идею разделения движения системы на программное и возмущенное, позволяет существенно упростить процедуру синтеза, разбивая ее на два этапа. При этом уже на первом этапе синтеза в условиях невозмущенного движения, исходя из требований интегрального критерия, решается одна из задач построения алгоритма системы — определяется вид вектор-функции (5.5), в соответствии с которой производится изменение воздействия управления на объект.

Другая задача синтеза, заключающаяся в нахождении алгоритма (5.6) формирования управляющих воздействий  $u_i$  по информации о предыстории процесса управления, решается на втором этапе синтеза в условиях возмущенного движения. При этом, так как требования интегрального критерия в основном учтены на первом этапе, можно сделать допущение при выборе алгоритма (5.6), производя этот выбор лишь на основании требований терминального критерия. С целью ограничения потерь качества системы, выражаемого интегральным критерием, возникающих в условиях возмущенного движения, можно либо предъявить дополнительные требования к системе, либо наложить специальные ограничения на выбор управления  $u_i$  или на отклонения координат объекта относительно программной траектории. Следует отметить, что учитываемые на втором этапе синтеза дополнительные критерии (см. разд. 5.6) не обязательно непосредственно связаны с затратами на программное движение и могут иметь отличный от этих затрат физический смысл.

### 5.3. Синтез управления возмущенным движением в системе с жесткой программной траекторией движения

Задача синтеза управления возмущенным движением, которая решается на втором этапе, значительно сложнее, чем задача нахождения оптимальной программы управления. Однако, для систем с жесткой программной траекторией, принимая во внимание относительную малость отклонений координат объекта от их программных значений, обычно оказывается возможным произвести линеаризацию уравнений объекта (5.1).

В этом случае задача синтеза может быть сформулирована следующим образом. Пусть

$$\delta x = x - x^*,$$

где  $\delta x$  — отклонение координат объекта при возмущенном движении относительно  $X$ ;  $X$  — оптимальная программная траектория движения.

Линеаризованные уравнения объекта, описывающие возмущенное движение, имеют вид

$$\delta \dot{x} = \hat{A} \delta x + \hat{B} u^{(2)} + \hat{L} \omega,$$

где  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{L}$  — матрицы частных производных вектор-функции  $\hat{f}$  по координатам векторов  $x$ ,  $u$ ,  $\omega$ , вычисленные при  $x=X$ ,  $\omega=0$ ,  $u=u^{(1)}$  ( $u^{(1)}$  — оптимальное управление в программном движении).

Координаты объекта измеряются дискретно в моменты  $T_i$  с ошибками  $h_i$ . Уравнение канала измерения в ряде случаев представляется как линейное:

$$y_i = D^{(i)} \delta x_i + h_i \quad (i=1, 2, \dots, l). \quad (5.11)$$

Один из возможных способов построения канала измерения (5.11) изложен в разд. 5.4.

После дискретизации уравнения объекта могут быть приведены к виду

$$\delta x_i = \hat{A}_{i-1} \delta x_{i-1} + \hat{B}_{i-1} u_{i-1} + \hat{L}_i v \quad (i=1, 2, \dots, l+1),$$

где  $\hat{A}_{i-1}$ ,  $\hat{B}_{i-1}$ ,  $\hat{L}_i$  — матрицы коэффициентов.

Управление  $u_i$  в каждый дискретный момент  $i$  определяется как функция известных из предыстории измерений и управляющих воздействий  $u_i = u_i(\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$ . Оптимальная последовательность управлений  $u_0, u_1, \dots, u_l$ , выбираемая из допустимой области  $U^{(2)}$ , должна минимизировать терминальный критерий (4.4). В инженерной практике широкое применение находит критерий минимума средней квадратической ошибки

$$R_1 = M [\delta x_{l+1}^T \Gamma \delta x_{l+1}], \quad (5.12)$$

где  $\Gamma$  — положительно-определенная матрица.

Риск (5.12) получается из (5.4) в случае (5.3) в результате линеаризации зависимости вектора промахов от координат состояния объекта в конечный момент времени.

При решении поставленной задачи можно использовать изложенные в гл. 3.4 методы синтеза терминальных систем управления в классе комбинированных систем с использованием принципов прогнозирования и фильтрации. В этом случае в задаче синтеза выделяются как самостоятельные этапы построения алгоритмов оценивания координат текущего состояния, прогнозирования конечного состояния и формирования управляющих воздействий. Принимая во внимание, что процесс компенсации возмущений в принятой неизбежно упрощенной модели объекта отличается от процесса в реальной системе, управление возмущенным движением необходимо строить итеративным путем. При этом методическая погрешность

выбора управления должна уменьшаться по мере приближения к терминальному моменту, что позволит обеспечить требуемую высокую точность итеративного управления бортовых терминальных систем.

Однако не всегда удается без ущерба для точности системы использовать прием линеаризации при постановке задачи в целом. В ряде случаев этот прием используется частично, например, при построении алгоритма фильтрации, алгоритма формирования управляющих воздействий (см. гл. 4). Но и в тех случаях, когда задача синтеза ставится как нелинейная, свойство сравнительно малости отклонений координат объекта в возмущенном движении относительно программного позволяет упростить решение.

#### 5.4. Принцип порогово-дискретного программного управления

В бортовых терминальных системах с жесткой программой, как правило, большую часть управляющего воздействия  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})$  составляет программное управление  $\mathbf{u}^{(1)}$  и значительно меньшую — управление с обратной связью  $\mathbf{u}^{(2)}$ , в том смысле, что диапазон программного изменения вектора координат состояния  $\mathbf{X}$  существенно больше диапазона отклонений  $\delta\mathbf{x}$  координат от программного значения. Поскольку программное управление  $\mathbf{u}^{(1)}$  на практике может быть воспроизведено с весьма высокой степенью точности, то системы управления с жесткой программой дают возможность достичь высокого качества управления.

Однако реализация этой возможности затрудняется следующим обстоятельством. Датчики терминальных систем, используемые для формирования управления по каналу обратной связи, чаще всего измеряют не отклонения  $\delta\mathbf{x}$  координат состояния от программных значений, а сами координаты состояния  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \delta\mathbf{x}$ . Поэтому эти датчики должны быть широкодиапазонными (например, измерять скорость от долей метра в секунду до нескольких километров в секунду, высоту — от метра до сотен километров, количество топлива — по всей высоте бака ракеты и т. д.). При построении таких датчиков приходится принимать весьма сложные меры для повышения стабильности их характеристик и снижения погрешностей измерения во всем диапазоне возможных значений измеряемых координат. Однако в ряде случаев эти погрешности остаются большими, что приводит к ухудшению качества терминального управления.

Поэтому некоторые терминальные системы управления строятся без применения широкодиапазонных датчиков — на основе принципа порогово-дискретного программного управления.

Переходя к пояснению этого принципа, будем считать, что на первом этапе синтеза системы (см. разд. 5.2) определены программные значения управления  $\mathbf{u}^{(1)}$  и координат  $\mathbf{X} = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)})$ .

Рассмотрим случай, когда программные значения координат представляются в виде функций

$$X^{(k)} = \hat{F}_k(T) \quad (k=1, 2, \dots, K),$$

где  $T$  — монотонно изменяющаяся в течение процесса управления величина, которая совпадает с какой-либо одной из составляющих вектора  $X$  (для конкретности, с  $X^{(1)}$ , имеющей в частном случае смысл текущего времени  $t$ ).

В системах порогово-дискретного программного управления каждый  $k$ -й датчик ( $k=1, 2, \dots, K^*$ ;  $K^* \leq K$ ) в процессе управления фиксирует моменты времени  $t_i^{(k)}$  достижения координатой  $x^{(k)}$  наперед заданного порогового значения  $X_i^{(k)}$ , находящегося во взаимном соответствии с пороговыми значениями остальных датчиков

$$X_i^{(k)} = \hat{F}_k(T_i),$$

где  $T_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ) — некоторая выбранная последовательность значений величины  $T = X^{(1)}$ .

При отсутствии ошибок измерения и возмущений, а также при точной реализации программного управления  $u^{(1)}$  соблюдается равенство

$$t_i^{(1)} = t_i^{(2)} = \dots = t_i^{(K^*)}.$$

Состояние объекта в дискретной системе будем характеризовать как и раньше значениями  $x_i^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) координат объекта в момент времени достижения величиной  $T$  порогового значения  $T_i$  или отклонениями  $\delta x_i^{(k)} = x_i^{(k)} - X_i^{(k)}$  этих значений координат от их программных величин. Полагая, что производные  $dX^{(k)}(T)/dT$ ,  $dX^{(1)}/dt$  мало изменяются на интервале  $[t_i^{(k)}, t_i^{(1)}]$ , получим приближенное равенство

$$\delta x_i^{(k)} \simeq \frac{dX^{(k)}(T)}{dT} \frac{dX^{(1)}}{dt} \Delta t_i^{(k)}, \quad (5.13)$$

где  $\Delta t_i^{(k)} = t_i^{(k)} - t_i^{(1)}$  (производные в равенстве (5.13) берутся в точке  $T = T_i = X_i^{(1)}$ ).

Таким образом, временные рассогласования  $\Delta t_i^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) однозначно определяют в дискретный момент времени  $i$  отклонения координат объекта от их программных значений. Пример формирования временных рассогласований  $\Delta t_i$  в двумерной системе порогово-дискретного программного управления показан на рис. 15 (Сплошные кривые — невозмущенное программное изменение координат  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  во времени  $t$ ; пунктирные — возмущенное изменение).

Следовательно, на основании анализа предистории процесса управления, которая характеризуется величинами  $\Delta t_i^{(2)}, \Delta t_i^{(3)}, \dots, \Delta t_i^{(K^*)}$  ( $i=1, 2, \dots, i$ ), измеряемыми в системе с ошибками из-за погрешностей фиксации моментов времени  $t_i^{(k)}$ , можно сформировать по изложенным в гл. 3, 4 методам управляющие сигналы  $u_i^{(2)}$ .

Описанный принцип порогово-дискретного программного управления позволяет:

использовать при управлении набор узкодиапазонных (в пределе — релейных) датчиков, что дает возможность снизить погрешности измерения и, следовательно, повысить качество терминального управления;

весьма простым образом использовать при управлении вычислительное устройство, поскольку разности времен  $\Delta t_i^{(k)}$  легко преобразуются в цифровой код при заполнении временного интервала импульсами выбранной частоты;

повысить точность управления за счет выбора оптимальной последовательности  $\bar{T}_{1i} = \bar{X}_{1i}^{(1)}$  пороговых величин (см. гл. 8).

Описанный принцип нетрудно распространить на случай, когда в моменты достижения координатой  $x^{(h)}$  пороговых значений  $X_i^{(h)}$  фиксируются не моменты времени  $t_i^{(k)}$ , а значения  $T_i^{(k)}$ .

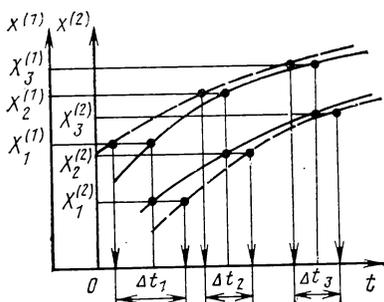


Рис. 15

## 5.5. Терминальные системы управления с гибкими траекториями движения

Терминальные системы с жесткими программными траекториями движения отличаются сравнительной простотой реализации. Однако системы этого класса ориентированы на решение какой-то одной конкретной задачи управления. В настоящее же время в связи с расширением круга задач, решение которых возлагается на бортовые терминальные системы, возникла потребность создания многоцелевых и многорежимных систем управления.

Например, многоцелевая система управления сближением должна обеспечивать удовлетворительное качество сближения для весьма широкого диапазона параметров орбит объектов. Эта система, как многорежимная, должна также иметь возможность работать в разных режимах, в частности, в режиме экономичного сближения, когда требуется по возможности сохранить топливо для проведения последующих за сближением маневров; в режиме быстрого действия, когда требуется сократить время сближения, ограничиваемое располагаемым запасом топлива; в режиме контролируемой сближения, когда процесс сближения должен позволять проведение эффективного контроля человеком правильности хода терминального управления сближением.

Одно из требований, которое предъявляется при создании таких систем, заключается в обеспечении простоты и оперативности перестройки терминальных систем на новую цель или новый режим управления.

Этому требованию не удовлетворяют системы с жесткими программными траекториями, так как для их перестройки на новые условия работы по-существу необходимо заново произвести процедуру синтеза.

Терминальным задачам управления многоцелевого и много режимного характера более соответствуют пути решения на основе использования систем с гибкими траекториями движения. Как уже отмечалось, в системах этого класса управлением является вектор  $\mathbf{u}_i$ , входящий в качестве параметра в вектор-функцию (5.5), в соответствии с которой производится изменение воздействия управления на объект (5.1). Вид (5.5) определяется на этапе синтеза в условиях невозмущенного движения. Управление  $\mathbf{u}_i$  выбирается в классе, определяемом уравнением (5.6).

Методика синтеза алгоритма (5.6) может быть построена следующим образом. Оптимальную последовательность  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l$  будем выбирать из условия минимума терминального критерия (5.5), который с учетом (5.3) может быть записан в виде

$$R_1 = M(\mathbf{z}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{z}_1). \quad (5.14)$$

Минимум (5.14) достигается, если на каждом шаге  $i$  управление  $\mathbf{u}_i$  минимизирует условный риск, соответствующий известным в момент  $i$  реализациям измерений (5.2) и управляющих воздействий  $\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}$ :

$$\mathbf{u}_i^* = \arg \left\{ \min_{\mathbf{u}_i \in U} M(\mathbf{z}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{z}_1 / \bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}) \right\}. \quad (5.15)$$

При некоторых допущениях для выбора  $\mathbf{u}_i$  вместо (5.15) можно использовать более простое условие

$$\mathbf{u}_i^* = \arg \left\{ \min_{\mathbf{u}_i \in U} [(M(\mathbf{z}_1 / \bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}))^T \mathbf{G}_1 M(\mathbf{z}_1 / \bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1})] \right\}, \quad (5.16)$$

где  $M(\mathbf{z}_1 / \bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1})$  — оценка  $\mathbf{z}_1$  (условное математическое ожидание  $\mathbf{z}_1$ , соответствующее известным реализациям  $\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_{i-1}$ ). Условие (5.16) оказывается аналогичным (4.9), введенному в гл. 4 для скалярного промаха, если под  $M(\mathbf{z}_1 / \bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1})$  понимать оценку  $\mathbf{z}_1$ , прогнозируемую на основании оценок координат состояния объекта  $\hat{\mathbf{x}}_i$  и будущей стратегии управления  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i+1} = \dots = \mathbf{u}_l$  с использованием уравнений объекта (5.7), т. е.

$$M(\mathbf{z}_1 / \bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}) = \hat{\mathbf{z}}(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i) = \hat{\mathbf{z}}_i. \quad (5.17)$$

В общем случае для нахождения  $\hat{\mathbf{z}}_i$  может быть построена процедура численного интегрирования уравнений объекта (5.1).

Алгоритмы формирования оценок координат объекта  $\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i(\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1})$  находятся на основе методов фильтрации. Возможные способы синтеза таких алгоритмов изложены в гл. 4.

Нахождение управления  $\mathbf{u}_i$  из (5.16) с учетом (5.17) производится при помощи итеративной процедуры.

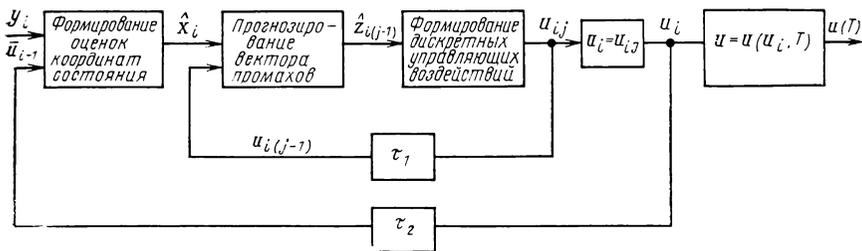


Рис. 16

Структурная схема алгоритма работы системы управления с гибкими траекториями представлена на рис. 16.

На этой структурной схеме элемент запаздывания  $\tau_1$  определяется временем, требуемым для нахождения управления  $u_i$  в соответствии с (5.16). Через  $u_{i(j-1)}$ ,  $\hat{z}_{i(j-1)}$  обозначены значения управления и промаха, найденные в  $(j-1)$ -й итерации ( $j=1, 2, \dots, J$ ). Элемент запаздывания  $\tau_2$  определяется дискретностью поступления текущей информации о процессе управления.

Реализация представленного на рис. 16 алгоритма возможна при наличии бортовой ЦВМ с хорошо развитой памятью и достаточно высоким быстродействием.

## 5.6. Введение статистических ограничений при многокритериальном синтезе терминальных систем

Изложенные в предыдущих разделах подходы к решению проблемы многокритериальности, очевидно, не исчерпывают всего множества возможных способов синтеза систем по многим критериям.

В данном разделе описывается специфический прием решения многокритериальной задачи синтеза терминальной системы, который может применяться как самостоятельно — при терминальном управлении линейным объектом, так и в сочетании с уже рассмотренными способами. Так, например, может быть, когда к системе, реализующей оптимальное по терминальному риску управление относительно жесткой программы, доставляющей минимум второму критерию, предъявляется дополнительное требование, формализуемое в виде третьего статистического критерия оптимальности. Прием этот заключается в замене терминального критерия соответствующим статистическим ограничением на допустимое множество управлений, учитываемое при синтезе системы.

Итак, рассматривается линейный нестационарный объект управления (представляющий собой, например, модель нелинейного объекта, линеаризованную относительно жесткой программы движения), выходная координата которого измеряется в дискретные моменты времени  $i$ . Считаются известными описывающие объект

уравнения, из которых может быть получено конечно-разностное уравнение

$$x_{i+1} = A_i \mathbf{v} + B_i \bar{u}_i \quad (i=0, 1, \dots, I). \quad (5.18)$$

Здесь  $A_i = \|a_{in}\|$ ,  $B_i = \|b_{ir}\|$  — матрицы-строки ( $n=1, 2, \dots, N$ ;  $r=0, 1, \dots, i$ );  $\mathbf{v} = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(N)})$  —  $N$ -мерный вектор возмущений. Измеренное со случайной аддитивной ошибкой  $h_i$  значение  $y = x_i + h_i$  поступает на вход управляющего устройства. Управление должно удовлетворять неравенству вида

$$|u_i| \leq U_{\text{доп}} \quad (i=1, 2, \dots, I), \quad (5.19)$$

где  $U_{\text{доп}}$  — предельно допустимое значение управления.

Априорные плотности распределения вероятностей векторов  $\mathbf{v}$  и  $\bar{h}_{1I}$  считаются нормальными с нулевыми математическими ожиданиями и известными корреляционными матрицами  $K_v$  и  $K_{1I}$  соответственно.

Положим, что качество управления рассматриваемым объектом оценивается двумя рисками:

$$R_1 = M(x_{I+1}^2), \quad (5.20)$$

$$R_2 = M[\Psi_2(\bar{x}_I, \bar{u}_I)]. \quad (5.21)$$

Исходя из приоритета риска (5.20) в терминальной системе перед риском (5.21), будем определять алгоритм управления, обеспечивающий условный минимум риска  $R_2$  при условии, что значение риска  $R_1$  не превосходит принятой (заданной) величины  $R_{\text{зад}}$ , близкой к точности безусловно оптимальной по риску  $R_1$  терминальной системы.

Предположим вначале, что отсутствуют ограничения (5.19) на управление. Тогда оптимальное по риску  $R_1$  управление на последнем интервале (протяженностью от момента времени  $I$  до  $I+1$ ) может быть определено из соотношения

$$u_I^* = -\frac{1}{b_{II}} M(x_{I+1}/\bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}; u_I=0). \quad (5.22)$$

Здесь  $M(x_{I+1}/\bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}; u_I=0)$ , как и раньше, — оценка значения выходной координаты  $x_{I+1}$ , полученная по результатам наблюдения предыстории процесса управления  $\bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}$  при условии равенства нулю последнего управления. Эта оценка, как отмечалось, может быть вычислена по соотношению

$$M(x_{I+1}/\bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}, u_I=0) = A_I M(\mathbf{v}/\bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}) + B_I \bar{u}_{I-1}. \quad (5.23)$$

Здесь  $M(\mathbf{v}/\bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}) = (A^* K_{II}^{-1} A + K_v^{-1})^{-1} A^* K_{II}^{-1} \bar{y}_I^*$ ,

где  $A$  — матрица коэффициентов уравнения (5.18) размера  $I \times N$ , составленная из строк  $A_i$  ( $i=0, 1, \dots, I-1$ );  $\bar{y}_I^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_I^*)$ , причем  $y_{I+1}^* = y_{I+1} - B_I \bar{u}_I$ .

Значение риска  $R_1$  при оптимальном управлении (5.22) оказывается разным условной дисперсии величины  $x_{I+1}$ .

$$R^* = A_I (4r K_{II}^{-1} A + K_v^{-1})^{-1} A_I^r. \quad (5.24)$$

Поскольку значение риска  $R^*$  не зависит от временного вектора  $\bar{u}_{I-1}$ , то условие (5.22) определяет множество функций управления  $u_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ), при которых достигается минимальное значение  $R^*$  риска  $R_1$ . Поэтому здесь может быть поставлена и решена задача определения функции управления, минимизирующей риск  $R_2$  в классе функций (5.22), минимизирующих риск  $R_1$ .

Однако решение этой задачи имеет невысокую практическую ценность, поскольку попытки осуществления полученного алгоритма управления в реальных системах с ограниченными управляющими воздействиями приводят обычно к существенному снижению точности управления.

Оптимальная по риску  $R_1$  функция управления при ограничении (5.19) имеет вид

$$u_i^* = \begin{cases} u_i, & \text{если } |u_i| \leq U_{\text{доп}}, \\ U_{\text{доп}} \operatorname{sign} u_i, & \text{если } |u_i| > U_{\text{доп}} \quad (i=0, 1, \dots, I), \end{cases} \quad (5.25)$$

где

$$u_i = -\frac{1}{b_{II}} M(x_{I+1} | \bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}; \bar{u}_{II} = 0). \quad (5.26)$$

Получаемое в результате управления (5.25) объектом (5.18) значение  $R_u^*$  риска  $R_1$  может быть вычислено экспериментальными методами (см. гл. 11). Для того чтобы поставленная задача имела решение, очевидно, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$R_{\text{зад}} > R_u^*. \quad (5.27)$$

В практике построения бортовых систем управления величина  $U_{\text{доп}}$  выбирается таким образом, чтобы введение ограничения (5.19) при функции управления (5.25) приводило к незначительному снижению точности управления по сравнению с предельными точностными возможностями системы, оцениваемыми величиной  $R^*$ . В этом случае малые отклонения управления от функции (5.25) на любом интервале времени, предшествующем последнему, влияют на риск  $R_1$  значительно меньше, чем такие же отклонения на последнем интервале. С другой стороны, оптимизация управления на последнем интервале по риску вида (5.21) из-за его интегрального характера дает, как правило, весьма малое приращение риска по сравнению с суммарной эффективностью оптимизации управления на всех предшествующих интервалах.

Указанные особенности систем терминального управления позволяют выделить класс функций управления, в котором весьма просто достигается ограничение по риску  $R_1$  и в котором, поэтому, целесообразно определять функцию, минимизирующую риск  $R_2$ .

Положим, что распределение плотности величины  $x_{I+1}$  при условии  $u_I = 0$  может быть аппроксимировано нормальным законом. Представим риск  $R_1$  в виде

$$R_1 = R^* + M\{[M(x_{I+1} | \bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}; u_I = 0) + b_{II} u_I]^2\}.$$

В силу отмеченных особенностей систем терминального управления величину управления  $u_I$  целесообразно определять соотношением (5.25) при  $i=I$ . В этом случае

$$R_1 = R^* + b_{II} U_{\text{доп}}^2 \frac{P_u(\theta)}{\theta \Phi(\theta)}, \quad (5.28)$$

$$\theta = \frac{b_{II} U_{\text{доп}}}{\sqrt{M \{ [M(x_{I+1} | \bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}; u_I = 0)]^2 \}}};$$

$\Phi(\theta)$  — интегральная функция Лапласа — Гаусса;  $P_u(\theta)$  — плотность нормального распределения вероятности.

Из равенств (5.24) и (5.28) может быть определена величина  $\theta$ , при которой  $R_1 = R_{\text{зад}}$ .

Величина  $2\Phi(\theta)$  характеризует вероятность, с которой располагаемая эффективность  $U_{\text{доп}}$  управляющего органа позволяет полностью реализовать вычисленный сигнал (5.26). Для обеспечения этой вероятности достаточно, чтобы предшествующие управления удовлетворяли условию

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b_{ii}} \left[ \theta \sqrt{R_i^*} - M(x_{i+1} | \bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}; \bar{u}_{ii} = 0) - \sum_{j=i+1}^I |b_{ij}| U_{\text{доп}} \right] \leq u_i \leq \\ & \leq -\frac{1}{b_{ii}} \left[ \theta \sqrt{R_i^*} + M(x_{i+1} | \bar{y}_i, u_{i-1}; \bar{u}_{ii} = 0) - \sum_{j=i+1}^I |b_{ij}| U_{\text{доп}} \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Здесь  $R_i^*$  — условная дисперсия величины  $x_{i+1}$ , определяемая из условия равенства нулю управлений в моменты  $i, i+1, \dots, I$  и вычисляемая аналогично (5.24).

Выражение (5.29) определяет условия запрета на большие перемещения регулирующего органа системы в первой части процесса управления.

Таким образом, границы области  $\omega(u_i)$  допустимого управления определяются по условию (5.29) как линейная функция измеренных координат и предшествующих управлений, а также по условию (5.19).

Оптимальная функция управления  $u_i^*$  в моменты  $i=0, 1, \dots, I-1$  может быть вычислена из условия

$$u_i^* = \arg \left\{ \min_{u_i \in \omega(u_i)} \gamma_i(\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}, u_i) \right\} \quad (i=0, 1, \dots, I-1),$$

$$\text{где } \gamma_i = \int_{\omega(\bar{y}_{(i+1)I})} \gamma_I(\bar{y}_I, \bar{u}_i; u_{i+1}^*, u_{i+2}^*, \dots, u_I^*) d\Omega(\bar{y}_{(i+1)I});$$

$$\gamma_I(\bar{y}_I, \bar{u}_I) = \int_{\omega(\mathbf{v})} \Psi_2(\bar{x}_I, \bar{u}_I) P(\mathbf{v}) \prod_{l=1}^I P(y_l | \mathbf{v}, \bar{u}_{l-1}) d\Omega(\mathbf{v}).$$

Определение по приведенной методике оптимальных управлений производится достаточно просто, особенно в тех случаях, ког-

да функции управления в моменты  $i=0, 1, \dots, I-1$  лежат на определяемых по формулам (5.19) и (5.29) границах области допустимого управления (например, при «энергетическом» критерии  $R_2$ ).

В некоторых случаях (например, когда в соответствии с риском  $R_2$  минимизируется производная регулируемой величины в заданный момент времени  $I$ ) приведенные соотношения определяют практически целый класс функций управления. Поэтому может быть аналогично поставлена и решена задача нахождения в указанном классе управления, минимизирующего некоторую функцию риска  $R_3$  и т. д.

## 5.7. Примеры многокритериального синтеза бортовых терминальных систем

Описанные в главе приемы синтеза систем проиллюстрируем на некоторых примерах бортовых терминальных систем. При этом первые два примера иллюстрируют построение систем с жесткими программами, последующие два — с гибкими, а последний пример — метод, описанный в разд. 5.6.

**1. Система регулирования кажущейся скорости ракеты.** В некоторых задачах ракетодинамики (запуск КА к другим планетам и др.) необходимо обеспечить заданное конечное состояние\* и, в частности, конечную скорость ракеты в строго назначенный момент времени  $t_{\text{назн}}$ . При этом следует также стремиться к минимальным затратам топлива на выведение ракеты.

В результате возникает задача синтеза системы управления скоростью ракеты по двум критериям оптимальности — терминальному и энергетическому.

В соответствии с положениями разд. 5.2, 5.3 рассматривается невозмущенный полет ракеты и устанавливается, что для минимизации энергозатрат на приведение скорости ракеты из некоторого ее начального значения  $W_p(t_0)$  в заданное  $W_{\text{зад}}$  необходимо минимизировать время выведения  $t_{I+1} = t_{\text{назн}} - t_0$ . Это означает, что двигатель ракеты должен работать в режиме максимально допустимой тяги  $P_{\text{max}}$ :

$$P_{\text{пр}}(t) = P_{\text{max}}, \quad t \in (t_0, t_{\text{назн}}) \quad (3.50)$$

( $P_{\text{пр}}(t)$  — программа изменения во времени  $t$  тяги двигателя), а момент запуска  $t_0$  следует подбирать из условия  $t_0 = t_{\text{назн}} - t_{I+1}$ , где  $t_{I+1}$  — время выведения, соответствующее условию (5.30). Полученной из (5.30) программе  $W_{\text{пр}}(t)$ ,  $t \in (t_0, t_{\text{назн}})$  набора скорости соответствует программа изменения в полете кажущейся скорости ракеты  $w_{\text{гр}}(t)$ ,  $t \in (0, t_{I+1})$ , — той составляющей скорости, которая обусловлена действием силы тяги двигателя (а также аэродинамических сил) и которая может быть непосредственно измерена инерциальными датчиками на борту ракеты.

\* Эта задача обычно решается автоматом, который управляет отделением полезной нагрузки.

Далее при рассмотрении возмущенного движения ракеты можно прийти к выводу, что для минимизации терминального критерия

$$R = M \{ [W_p(t_{\text{назн}}) - W_{\text{зад}}]^2 \}$$

целесообразно использовать систему регулирования кажущейся скорости (РКС) ракеты, обеспечивающую минимизацию риска

$$R_1 = M \{ [\omega'(t_{I+1}) - \omega_{\text{пр}}(t_{I+1})]^2 \}.$$

Здесь  $\omega_p'(t)$  — продольная составляющая кажущейся скорости  $\omega_p(t)$ ,  $t \in (0, t_{I+1})$  ракеты; возможность использования в данном случае риска  $R_1$  вместо  $R$  вытекает из обычно выполняемого условия малости углов атаки ракеты.

Таким образом, назначение системы РКС терминального типа состоит в том, чтобы на основе текущих измерений отклонений продольной составляющей кажущейся скорости от ее программного значения  $\omega_{\text{пр}}(t)$  обеспечить минимизацию риска  $R_1$  посредством изменения тяги двигателя ракеты. Алгоритм формирования управляющего сигнала РКС на изменение тяги двигателя может быть получен в соответствии с одним из изложенных в гл. 3, 4 методов.

В этом примере замечен характерный для ряда практических систем управления с жесткой программой недостаток. Заключается он в следующем.

Для того чтобы можно было регулировать скорость ракеты относительно программы, в системе РКС должны быть представлены определенные диапазоны регулирования тяги относительно его программного значения  $P_{\text{пр}}(t)$ : диапазоны дросселирования  $P_{\text{др}}$  и форсирования  $P_{\text{ф}}$  двигателя. Чтобы выделить диапазон форсирования  $P_{\text{ф}}$  на регулирование РКС в двигателе с ограниченной (величиной  $P_{\text{max}}$ ) тягой двигателя приходится снижать программное значение тяги, т. е. вместо (5.30) полагать

$$P_{\text{пр}}(t) = P_{\text{max}} - P_{\text{ф}}$$

и соответствующим образом увеличивать время  $t_{I+1}$  выведения, а также корректировать программы набора скорости  $W_{\text{пр}}(t)$  и  $\omega_{\text{пр}}(t)$ . А это означает, что в случае, когда на систему не действуют никаких возмущений, возможности энергетики ракеты используются не в полной мере — расходование топлива в этом режиме заведомо неоптимально.

Прием хотя бы частичного устранения отмеченного недостатка систем с жесткой программой иллюстрируется в дальнейшем на примере 5.

**2. Система регулирования опорожнения баков ракеты.** Основная, терминальная цель управления расходом топлива в системе регулирования опорожнения баков (СОБ) состоит в том, чтобы обеспечить синхронность опорожнения баков к моменту  $t_{I+1}$  времени выключения двигателя ракеты:

$$R_1 = M (\delta m_{I+1}^2),$$

где 
$$\delta m_i = \frac{m_{\text{ок}}(t_i)}{m_{\text{ок}}(0)} - \frac{m_{\text{г}}(t_i)}{m_{\text{г}}(0)};$$

$m_{ок}(t_i)$ ,  $m_T(t_i)$  — значения масс окислителя и горючего в моменты времени  $t_i$  ( $i=0, 1, \dots, I+1$ ;  $t_0=0$ ). Управляющие воздействия в СОБ реализуются изменением соотношения  $k_m$  мгновенных массовых расходов компонентов топлива в полете ракеты. В общем случае изменение соотношения расходов компонентов топлива через двигатель вызывает отклонение удельной тяги двигателя, что приводит к изменению  $\Delta\omega_{I+1}$  того значения кажущейся скорости ракеты, которое соответствует моменту израсходования рабочих запасов топлива. Можно показать, что для повышения энергетики ракеты следует максимизировать критерий

$$R_2 = M(\Delta\omega_{I+1}).$$

Анализ невозмущенного процесса набора скорости ракеты с использованием формулы Циолковского и с учетом зависимости вида

$$\delta P_{уд} = a\delta k_m^2 + b\delta k_m$$

( $\delta P_{уд}$ ,  $\delta k_m$  — относительные отклонения от номиналов удельной тяги двигателя и соотношения расходов  $k_m$ ) дает оптимальную в смысле максимизации конечной скорости ракеты программу изменения соотношения расходов\*

$$\delta k_{m\text{ оп}}(t) = \frac{b}{2a} \left( \frac{2\mu(t)}{1 + \mu(t_{I+1})} - 1 \right), \quad (5.31)$$

где  $\mu(t)$  — текущая относительная масса ракеты. Эту программу и следует воспроизводить в невозмущенном ходе опорожнения баков посредством, например, программных переключков дросселя СОБ.

В СОБ на основе информации с дискретных датчиков количества компонентов топлива в баках ракеты определяется (в возмущенном процессе опорожнения) отклонение расходования топлива от предписанного программой и формируется управляющий сигнал на компенсацию этих отклонений к моменту времени  $t_{I+1}$  выключения двигателя. В качестве алгоритма формирования терминального управления СОБ может быть принят какой-либо из алгоритмов, представленных в примерах гл. 3.

**3. Система управления выводением\*\* ракеты.** Назначение этой системы состоит в том, чтобы обеспечить достижение заданных терминальных (конечных) параметров движения центра масс ракеты в момент отделения полезной нагрузки. В результате полезная нагрузка выводится на заданную траекторию свободного полета. Система состоит из автомата управления отделением полезной нагрузки, который выдает команду на отделение в момент выполнения заданных условий на траекторные параметры и системы управления ориентацией вектора скорости\*\*\*, гарантирующей возможность

\* В отличие от [7, 28] при получении программы (5.31) суммарный расход топлива полагается не зависящим от соотношения расходов компонентов топлива.

\*\* В литературе (особенно переводной) эту систему так же, как и систему управления сближением, часто называют системой наведения.

\*\*\* Иногда в состав системы управления выводением включается и система РКС (см. пример 1).

достижения этих условий при минимальном расходе топлива ракеты.

Как известно [26], при задании терминальных условий по положению и скорости для невозмущенного плоского движения ракеты в однородном плоскопараллельном гравитационном поле оптимальный по расходу топлива угол тангажа  $\varphi$  определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c_1 + c_2 t}{c_3 + c_4 t}, \quad (5.32)$$

где  $c_1, \dots, c_4$  — коэффициенты, зависящие от граничных условий.

При работе в реальных возмущенных условиях выведения системы управления с гибкой программой коэффициенты  $c_1, \dots, c_4$  рассчитываются в полете ракеты. Исходными данными для расчета служат оценки текущих траекторных параметров ракеты и заданные терминальные условия на эти параметры. Подходы к составлению итерационных схем вычисления этих коэффициентов могут быть самыми различными, некоторые из них описаны в [39, 42].

#### 4. Системы управления сближением космических аппаратов.

В одном из практических режимов работы системы управления сближением КА (при спасании экипажа аварийного корабля и т. д.) требуется обеспечить выполнение терминальных условий сближения с критерием

$$R_1 = M \left[ \Psi \left( \mathbf{q}(t_{I+1}), \frac{d \rho(t_{I+1})}{dt} \right) \right]$$

(где  $\mathbf{q}(t)$  — вектор относительной дальности КА в момент времени  $t$ ) при минимальном общем времени сближения, удовлетворяющем критерию

$$R_2 = M(t_{I+1}),$$

где  $t_{I+1} = \arg \left[ \min_t \rho(t) \right]$ ;  $\rho(t)$  — модуль вектора  $\mathbf{q}(t)$ .

Ограничиваясь рассмотрением компланарного движения КА по близким к круговым орбитам до начала сближения, в соответствии с положениями разд. 5.3, обратимся к анализу невозмущенной траектории сближения. Этот анализ для случая малой (сравнительно с радиусом орбиты) разности высот начальных орбит КА дает оптимальный по быстрдействию закон изменения угла  $\varphi$  между местной горизонталью и вектором тяги непрерывно работающего двигателя активного КА [5]:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t - \frac{z}{\omega} c_4}{2c_2 \cos \omega t - 2c_1 \sin \omega t + 3c_4 t + c_3}, \quad (5.33)$$

где  $\omega$  — средняя угловая скорость движения КА вокруг планеты;  $c_1, \dots, c_4$  — постоянные, значения которых определяются начальными условиями сближения. (В частном случае, когда угол  $\omega t_{I+1}$  мал — так называемый случай «плоской» планеты — получаем за-

кон (5.32) изменения угла тангажа, представленный в предыдущем примере).

Рассматривая возмущенный процесс сближения, будем считать, что в полете производятся, естественно с ошибками, измерения относительного положения (и возможно, скорости), КА. По результатам этих измерений на борту активного КА составляются оценки текущих относительного положения и скорости сближения космических аппаратов и производятся уточнения значений постоянных  $c_1, \dots, c_4$  из условия, что эти значения при реализации закона управления (5.33) обеспечат перевод космических аппаратов из оцененного их состояния в требуемое терминальное. Получаемый алгоритм управления сближением принимается в качестве решения исходной двухкритериальной задачи управления сближением.

**5. Система управления мягкой посадкой КА на поверхность безатмосферной планеты.** Будем полагать, что требования, предъявляемые к системе управления мягкой посадкой по точности, экономичности управления, удобству обзора места посадки, в основном выполнены за счет выбора траектории спуска КА — номинальной программы работы системы — и в результате соответствующей организации управления относительно выбранной жесткой программы подобно тому, как это делалось в первых двух примерах.

Проанализируем недостаток такой организации управления посадкой, при которой предусматривается определение траектории спуска КА по номиналу тяги, уменьшенному на величину тяги, резервируемой для компенсации случайных возмущений. В результате при отсутствии возмущений в некоторой реализации условий посадки управление оказывается неоптимальным по расходу топлива. Недостаток этот в заметной мере преодолевается, если при синтезе относительно выбранной программы помимо терминального критерия, характеризующего точность посадки

$$R_1 = M(\Delta v_{I+1}^2),$$

принимать во внимание дополнительный критерий

$$R_2 = M(-\Delta m_{I+1}).$$

Здесь  $\Delta v_{I+1}$ ,  $\Delta m_{I+1}$  — отклонения скорости и массы спускаемого КА от программных значений в момент достижения аппаратом заданного (порогового) значения высоты  $H_{I+1}$  над поверхностью планеты. Для упрощения изложения в дальнейшем будем рассматривать случай вертикальной посадки КА; тогда выбор программы управления сводится к определению момента времени включения тормозного двигателя КА из условия уменьшения скорости снижения до заданного значения на заданной высоте  $H_{I+1}$ .

Синтез системы может быть проведен на основе изложенного в разд. 5.6 метода, предусматривающего условную оптимизацию системы по риску  $R_2$  при условии, что риск  $R_1$  не превосходит заданной величины  $R_{\text{зад}}$ :

$$\delta P_i^* = \begin{cases} \delta P_{\max}, & \text{если } \delta P_i > \delta P_{\max}; \\ \delta P_i, & \text{если } \delta P_{\min} \leq \delta P_i \leq \delta P_{\max}; \\ \delta P_{\min}, & \text{если } \delta P_i < \delta P_{\min}; \end{cases} \quad (5.34)$$

$$\delta P_i = - \frac{1}{b_{Ii}} [M(\Delta v_{I+1}/\delta P_i = 0; \delta P_{i+1} = \delta P_{\max}, \delta P_{i+2} = \delta P_{\max}, \dots$$

$$\dots, \delta P_i = \delta P_{\max}) - \theta \sqrt{D_{I+1}(i)}].$$

Здесь  $\delta P_{\max}$ ,  $\delta P_{\min}$  — максимально и минимально допустимые значения отклонений тяги тормозного двигателя от номинала;  $b_{Ii}$  — коэффициент влияния отклонения тяги в дискретный момент времени  $i$  на величину  $\Delta v_{I+1}$ ;  $D_{I+1}(i)$  — дисперсия ошибки прогнозирования в момент  $i$  координаты  $\Delta v_{I+1}$ ; коэффициент  $\theta$  вычисляется из условия  $R_1 = R_{\text{зад}}$  так, как это описано в разд. 5.5.

Математическое ожидание, входящее в это выражение, представляет собой оценку конечной скорости снижения, полученную в текущий дискретный момент времени  $i$  (и вычисленную на основе проведенного комплекса измерений радиолокатором, инерциальными датчиками) при условии, что начиная с момента  $i+1$  последующие значения тяги равны ее максимально допустимой величине.

Управление (5.34) отражает следующие физические предпосылки: уменьшение риска  $R_2$  при синтезе системы управления посадкой относительно уже выбранной программы возможно лишь за счет уменьшения гравитационных потерь, т. е. за счет сокращения времени движения КА по номинальной траектории спуска, обеспечиваемого дросселированием двигателя в начале спуска. Величина тяги, до которой дросселируется двигатель, определяется таким образом, чтобы влияние возмущений и нарастающие при дросселировании тяги отклонения скорости от программного значения могли бы быть затем скомпенсированы с заданной вероятностью  $p_{\text{зад}} = \Phi(\theta)$  к концу процесса управления посадкой.

## Глава 6

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНЫХ ТОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕРМИНАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Из изложенного ранее следует, что при разработке бортовых систем конструктору приходится принимать ряд допущений и дополнительных ограничений, которые неизбежно приводят к снижению качества управления. Для того чтобы оценивать количественно потери качества, необходимо иметь некоторый «эталон» — предельные потенциальные возможности системы.

Сравнивая точностные характеристики, которые обеспечиваются алгоритмами управления, имеющими простую аппаратную реа-

лизацию, с предельными показателями точности, можно более правильно и обоснованно выбрать структуру системы. Кроме того, зная предельные возможности системы, можно оценить целесообразность оптимизации для улучшения точности уже разработанной и реализованной в аппаратуре структурной схемы.

Эти предельные возможности представляют собой численные значения наилучших показателей качества (например, наивысшей точности управления в терминальный момент), достижимых при заданных характеристиках объекта, действующих на объект возмущающих факторах, располагаемых средствах измерения и эффективности регулирующих органов.

Однако непосредственное нахождение этого эталона требует определения оптимального управления, что представляет собой трудную, а подчас неразрешимую практически задачу.

Не менее актуальна проблема оценки предельных возможностей для задачи синтеза терминальных систем управления по нескольким критериям, рассмотренной в гл. 4. Здесь знание эталона необходимо, чтобы обосновать разделение задачи синтеза на расчет программного движения и формирование алгоритма управления с обратной связью для возмущенного движения.

Терминальные системы управления в общем случае относятся к классу замкнутых систем с неполной информацией об объекте регулирования, в которых темп накопления информации об объекте зависит от управления. Нахождение оптимального управления в таких системах представляет собой многошаговый процесс последовательных минимизаций. При этом получение минимизируемого функционала на каждом шаге связано с приближенным интегрированием и запоминанием в общем случае функций многих переменных. Реализация соответствующего метода требует большого объема вычислений, который практически нереально выполнить даже на современных ЦВМ.

В связи с этим была поставлена задача нахождения сравнительно простой оценки точности оптимальной системы без определения оптимального управления. Идея решения этой задачи заключается в отыскании достаточно узкого множества рисков, включающих в себя значение риска оптимальной системы, определяющего предельные точностные возможности [14].

## 6.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу управления объектом, состояние которого описывается уравнением вида

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, l + 1). \quad (6.1)$$

Координаты объекта наблюдаются в канале измерения, определяемом уравнением

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{h}_i \quad (i = 1, 2, \dots, l). \quad (6.2)$$

Качество управления характеризуется критерием (риском  $R$ ), представляющим собой линейную комбинацию терминальной составляющей и составляющей интегральности типа

$$R = M[\Psi_1(\mathbf{z}_1)] + M[\Psi_2(\mathbf{z}_2)],$$

где  $\Psi_1, \Psi_2$  — знакоположительные функции потерь. Будем предполагать, что весовые коэффициенты, при помощи которых производится свертка терминальной и интегральной составляющих в полный критерий, входят в состав функций потерь.

В целях удобства записи введем следующие упрощения в обозначениях:

$$\Psi_1(\mathbf{z}_1) = \Psi_1, \quad \Psi_2(\mathbf{z}_2) = \Psi_2.$$

Тогда выражение для риска  $R$  может быть записано в следующем виде:

$$R = \sum_{s=1}^S R_s, \quad R_s = M(\Psi_s) \quad (s=1, 2). \quad (6.3)$$

Будем считать, что управление  $\mathbf{u}_i$  относится к классу регулярных функций и зависит от известных из предыстории реализаций измерений  $\bar{\mathbf{y}}_i$  и управляющих воздействий  $\bar{\mathbf{u}}_{i-1}$ , т. е.  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1})$ . Оптимальной будем называть последовательность управлений  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_I)$  из допустимой области  $U$ , дающую минимум риску (6.3). Величина введенного риска, соответствующая оптимальной последовательности, определяет предельные возможности системы управления.

Под оценкой риска  $R^*$  оптимальной системы будем понимать нахождение величин  $R'$  и  $R''$ , отвечающих неравенству  $R' \leq R \leq R''$ . Величины  $R'$  и  $R''$  назовем соответственно нижней и верхней оценками риска оптимальной системы.

Для оценки риска оптимальной системы поставим задачу нахождения функций управления, выбранных таким образом, что соответствующие им величины риска могут быть приняты в качестве верхней и нижней оценок оптимального риска. При этом предполагается, что отыскание функций управления, реализующих верхнюю и нижнюю оценки, проще по сравнению с нахождением оптимальной функции.

При решении задачи используется математическая запись формулы риска, вывод которой дается ниже. Рассмотрим  $s$ -е слагаемое риска — удельный риск  $R_s = M(\Psi_s)$ :

$$R_s = \int_{\mathfrak{z}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_I)} \Psi_s P(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_I) d\Omega(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_I). \quad (6.4)$$

Основная цель последующих преобразований заключается в том, чтобы выразить безусловное математическое ожидание функции потерь  $\Psi_s$ , определяемое из (6.4), через условное (апостериор-

ное) математическое ожидание, соответствующее имеющимся в системе к моменту  $I$  реализациям  $\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}$  на основании которых производится выбор управляющего воздействия.

В соответствии с теоремой умножения вероятностей плотность вероятности

$$P(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_I) = P(\mathbf{v}/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_I) P(\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_I). \quad (6.5)$$

Так как  $\mathbf{u}_I$  является детерминированной функцией  $\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}$ , то

$$P(\mathbf{v}/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_I) = P(\mathbf{v}/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}). \quad (6.6)$$

Аналогично (6.5) плотность вероятности  $P(\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_I)$  может быть представлена выражением  $P(\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_I) = P(\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}) \delta_I$ , где  $\delta_I = P(\mathbf{u}_I/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1})$  —  $\delta$ -функция. В свою очередь,

$$P(\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}) = P(\bar{\mathbf{y}}_I/\bar{\mathbf{y}}_{I-1}, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}) P(\bar{\mathbf{y}}_{I-1}, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}).$$

Продолжая этот процесс, получим следующую формулу:

$$P(\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_I) = \prod_{i=1}^I P(\mathbf{y}_i/\bar{\mathbf{y}}_{i-1}, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}) \prod_{i=0}^I \delta_i. \quad (6.7)$$

С учетом (6.5) — (6.7) удельный риск (6.4) может быть определен выражением

$$R_s = \int_{\Omega(\bar{\mathbf{y}}_I)} \left\{ \int_{\Omega(\mathbf{v})} \Psi_s P(\mathbf{v}/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}) d\Omega(\mathbf{v}) \right\} \prod_{i=1}^I P(\mathbf{y}_i/\bar{\mathbf{y}}_{i-1}, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}) d\Omega(\bar{\mathbf{y}}_I), \quad (6.8)$$

где  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1})$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ). Введем обозначение  $M_C(A/B)$  — математическое ожидание функции  $A$  по области возможных значений случайного аргумента  $C$  с условной плотностью вероятности  $P(C/B)$ . Кроме того, в тех случаях, когда в качестве условия  $B$  используются реализации векторов  $\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}$  в целях простоты записи будем опускать  $\bar{\mathbf{u}}_{i-1}$  (принимая во внимание, что  $\bar{\mathbf{u}}_{i-1}$  является детерминированной функцией  $\bar{\mathbf{y}}_{i-1}$ ).

С учетом введенного обозначения

$$M_v(\Psi_s/\bar{\mathbf{y}}_I) = \int_{\Omega(\mathbf{v})} \Psi_s P(\mathbf{v}/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}) d\Omega(\mathbf{v}). \quad (6.9)$$

Отметим, что величина  $M_v(\Psi_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$  представляет собой условный риск, соответствующий данным реализациям  $\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}$ . Запишем (6.8), принимая во внимание (6.9),

$$R_s = \int_{\Omega(\bar{\mathbf{y}}_I)} M_v(\Psi_s/\bar{\mathbf{y}}_I) \prod_{i=1}^I P(\mathbf{y}_i/\bar{\mathbf{y}}_{i-1}, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}) d\Omega(\bar{\mathbf{y}}_I), \quad (6.10)$$

а с учетом введенного выше обозначения вместо (6.10) получим

$$R_s = M_{y_I} [M_v(\Psi_s | \bar{y}_I)]. \quad (6.11)$$

В дальнейшем будем оперировать с выражением удельного риска (6.11).

Для определения апостериорной плотности вероятности  $P(\mathbf{v} | \bar{y}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1})$  воспользуемся формулой Байеса

$$P(\mathbf{v} | \bar{y}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}) = \frac{P(\mathbf{v}) P(\bar{y}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1} | \mathbf{v})}{\int_{\Omega(\mathbf{v})} P(\mathbf{v}) P(\bar{y}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1} | \mathbf{v}) d\Omega(\mathbf{v})}. \quad (6.12)$$

Плотность вероятности  $\bar{P}(\bar{y}_I, \mathbf{u}_{I-1} | \mathbf{v})$  может быть получена путем преобразования априорного распределения  $P(\mathbf{v}, \bar{h}_I)$  возмущений и помех с учетом (5.7), уравнений объекта (5.1) и канала измерения (6.2) при условии, что  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{I-1}$  — известные детерминированные величины.

## 6.2. Физическое содержание проблемы

Для обоснованного выбора метода нахождения оценок оптимального риска важно определить качественный характер оптимального управления на основе исследования структуры риска, выделить основные факторы, определяющие предельные возможности системы. Такого рода анализ физического содержания задачи оценки оптимального риска и излагается в данном разделе.

Для определения качественного характера оптимального управления преобразуем условный риск  $M_v(\Psi_s | \bar{y}_I)$ . Разобьем вектор  $\mathbf{v}$  на параметрические и непараметрические возмущения. В общем случае нелинейных систем такое разбиение может быть сделано лишь условно. Пусть  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}', \mathbf{v}'')$ , где  $\mathbf{v}'$  — вектор случайных возмущений, качество оценивания которых слабо зависит от выбора управлений (более строгое определение этого свойства будет дано ниже),  $\mathbf{v}''$  — вектор случайных возмущений, качество оценивания которых может быть улучшено выбором управлений. В дальнейшем  $\mathbf{v}'$  будем называть возмущениями, действующими на входе объекта, а  $\mathbf{v}''$  — параметрическими возмущениями.

Допустим, что параметрические возмущения — известные неслучайные величины. Найдем выражение условного риска  $M_v(\Psi_s | \bar{y}_I, \mathbf{v}'')$  ( $M_{v'}(\cdot)$  — математическое ожидание по случайному аргументу  $\mathbf{v}'$ ). Будем рассматривать случай, когда функция потерь  $\Psi_s = \Psi_s(\mathbf{z}_s)$  ( $s=1, 2$ ) может быть аппроксимирована в области наиболее вероятных значений вектора  $\mathbf{z}_s$  выражением

$$\Psi_s(\mathbf{z}_s) = \Psi_s(\mathbf{z}_s^*) + L(\mathbf{z}_s^*)(\mathbf{z}_s - \mathbf{z}_s^*) + (\mathbf{z}_s - \mathbf{z}_s^*)^T G(\mathbf{z}_s^*)(\mathbf{z}_s - \mathbf{z}_s^*), \quad (6.13)$$

где  $\mathbf{z}_s^*$  — значение вектора  $\mathbf{z}_s$ ;  $L(\mathbf{z}_s^*), G(\mathbf{z}_s^*)$  — матрица-строка и

положительно-определенная матрица коэффициентов, зависящих  $\mathbf{z}_s^*$ .

Пусть  $\mathbf{z}_s^* = \tilde{\mathbf{z}}_s = M'_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{v}'')$ . Принимая во внимание, что  $\mathbf{z}_2 = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_I)$ , будем полагать, что  $\hat{\mathbf{z}}_2^* = M'_v(\mathbf{z}_2/\bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{v}'') = [M'_v \times (\psi_0/\mathbf{v}''), M'_v(\psi_1/\bar{\mathbf{y}}_1, \mathbf{v}''), \dots, M'_v(\psi_I/\bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{v}''), \dots, M'_v(\psi_I/\bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{v}'')]$ . Применим к (6.13) операцию условного математического ожидания, соответствующего известным реализациям величин  $\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}, \mathbf{v}''$ . С учетом того, что безусловное математическое ожидание от линейной части в (6.13) равно нулю, можно записать для  $M'_v(\Psi_s/\bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{v}'')$  следующее выражение:

$$M'_v(\Psi_s/\bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{v}'') = \Psi_s(\tilde{\mathbf{z}}_s) + D'_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{v}''), \quad (6.14)$$

где  $D'_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{v}'') = M'_v[(\mathbf{z}_s - \tilde{\mathbf{z}}_s)^T \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{z}}_s)(\mathbf{z}_s - \tilde{\mathbf{z}}_s)]$ .

Принимая во внимание, что  $P(\mathbf{v}', \mathbf{v}''/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}) = P(\mathbf{v}'/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}, \mathbf{v}'') P(\mathbf{v}''/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1})$ , получим

$$M_v(\Psi_s/\bar{\mathbf{y}}_I) = M_v''[M'_v(\Psi_s/\bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{v}'')], \quad (6.15)$$

где  $M_v''(\cdot)$  — математическое ожидание по случайному аргументу  $\mathbf{v}''$ . Аппроксимируем  $\Psi_s(\tilde{\mathbf{z}}_s)$ , полагая в (6.13)  $\mathbf{z}_s = \tilde{\mathbf{z}}_s$  и  $\mathbf{z}_s^* = \tilde{\mathbf{z}}_s^* = M_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$ . Полученное с учетом такой аппроксимации выражение (6.14) подставим в (6.15). В результате с учетом того, что  $M_v''(\tilde{\mathbf{z}}_s/\bar{\mathbf{y}}_I) = M_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$ , найдем

$$M_v(\Psi_s/\bar{\mathbf{y}}_I) = \Psi_s[M_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)] + D'_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I) + D''_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I), \quad (6.16)$$

где  $D'_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I) = M_v''[D'_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I, \mathbf{v}'')]$ ,

$$D''_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I) = M_v''[(\tilde{\mathbf{z}}_s - \hat{\mathbf{z}}_s)^T \mathbf{G}(\hat{\mathbf{z}}_s)(\tilde{\mathbf{z}}_s - \hat{\mathbf{z}}_s)]. \quad (6.17)$$

Рассмотрим физическое содержание составляющих условного риска (6.16). Составляющие  $D'_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$  и  $D''_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$  будем называть условными дисперсиями.

Условная дисперсия  $D'_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$  характеризует качество оценивания возмущений. Вектор  $\mathbf{v}'$  определен так, что величина  $D'_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$  слабо зависит от выбора управлений. Формально это свойство может быть определено следующим образом. Пусть  $D^*$  — значение  $D'_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$  для случая, когда на вход объекта не подаются управляющие воздействия. Будем полагать, что для всех возможных значений  $\bar{\mathbf{y}}_I$

$$|D^* - D'_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)| \ll D^*.$$

Эффективность воздействия управления на условный риск (6.16) главным образом определяется величиной  $\Psi_s M(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$ . Кроме этого, от выбора управления зависит также и величина условной дисперсии  $D''_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$ .

Анализируя выражение (6.17), можно убедиться, что величина  $D_v''(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$  характеризует погрешность оценки вектора  $\mathbf{z}_s$ , возникающую из-за неточности знания параметрических возмущений. Другими словами, в риске (6.16) составляющая  $D_v''(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$  характеризует погрешность оценивания параметрических возмущений по совокупности наблюдений и управлений, сделанных к моменту времени  $I$ , а также связанную с этой погрешностью неопределенность, которая вносится в объект управлением. Величина этой составляющей может быть уменьшена выбором управлений в моменты времени, предшествующие моменту  $I$ . Это свойство и определяет дуальный характер оптимального управления.

Следует отметить, что условные дисперсии  $D_v'(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$ ,  $D_v''(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$  представляют собой статистическую информацию, характеризующую совокупность наблюдений  $\bar{\mathbf{y}}_I$  и управляющих воздействий  $\bar{\mathbf{u}}_{I-1}$ . Величина  $D_v'(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$  главным образом определяется возможностями канала измерения, а величина  $D_v''(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$  помимо этого, как уже отмечалось, зависит от выбора стратегии управления.

Как следует из анализа физического содержания риска, при решении сформулированной выше проблемы оценки предельных возможностей системы можно выделить два этапа.

Первый этап связан с определением условных плотностей вероятностей  $P(\mathbf{v}/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1})$ ,  $P(\bar{\mathbf{v}}'/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}, \mathbf{v}'')$ ,  $P(\mathbf{v}''/\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1})$  для нелинейных уравнений объекта и нахождением в явном виде выражения условного риска  $M_v(\Psi_s/\bar{\mathbf{y}}_I)$ . Выделенные здесь достаточно сложные и трудоемкие задачи могут решаться независимо от выбора управления на основе методов нелинейной фильтрации и нелинейных оценок случайных параметров. В общем случае здесь может быть получено лишь приближенное решение.

При построении оценок предельных возможностей системы будем рассматривать второй этап решения общей проблемы, предполагая задачи фильтрации решенными. Этот этап связан с формированием стохастического уравнения динамического программирования, определяющего оптимальное управление на каждом дискретном шаге работы системы, и с нахождением оценок наилучших показателей качества системы, которые могут быть достигнуты при оптимальной стратегии управления.

При решении задачи для нас будут важны некоторые свойства рассматриваемых систем терминального управления. Прежде чем перейти к формулированию этих свойств, найдем выражение безусловного риска  $R_s$ . В результате подстановки (6.16) в (6.11) получим

$$R_s = R_{s_{\text{упр}}} + R_{s_{\text{оц}}} + R_{s_{\text{нч}}}, \quad (6.18)$$

где  $R_{s_{\text{упр}}} = M_{\bar{\mathbf{y}}_I}[\Psi_s[M_v(\mathbf{z}_s/\bar{\mathbf{y}}_I)]]$  — составляющая риска, характеризующая качество управления, направленного непосредственно на изменение состояния системы в соответствии с заданной целью;

$R_{s_{\text{оц}}} = M_{\bar{y}_I} [D'_v(z_s/\bar{y}_I)]$  — составляющая риска, характеризующая качество оценивания возмущений, действующих на входе объекта, при условии детерминированности параметров объекта:  $R_{s_{\text{ид}}} = M_{\bar{y}_I} [D''_v(z_s/\bar{y}_I)]$  — составляющая риска, характеризующая качество оценки случайных параметров объекта (идентификации объекта) и связанную с погрешностью идентификации неопределенность, вносимую в объект управлением.

Как уже отмечалось, требования к качеству управления в терминальных системах (минимизируемый риск  $R$ ) формируются таким образом, чтобы в результате управления прежде всего обеспечивалось достижение заданной цели. Для стохастических систем возникает задача — найти формальное условие, характеризующее в вероятностном смысле достижение терминальной цели.

Будем считать, что управление обеспечивает приведение объекта в заданное состояние в конечный момент, если качество такого управления по крайней мере не хуже, чем качество оценивания возмущений и идентификации случайных параметров объекта, т. е. для терминальной составляющей полного риска выполняется следующее неравенство:

$$R_{1\text{упр}} \leq R_{1\text{оц}} + R_{1\text{ид}}. \quad (6.19)$$

Будем предполагать, что существует класс стратегий управления из допустимой области, который обеспечивает достижение системой заданной цели в смысле, определяемом условием (6.19).

Сформулированное таким образом свойство будем называть свойством управляемости терминальной системы. Управляемость системы является необходимым условием для постановки задачи оценки ее предельных возможностей, достигаемых при оптимальном управлении. В противном случае [при невыполнении (6.19)] существенно снижается эффективность оптимизации, а имеющиеся ресурсы управления целиком будут направлены на приведение объекта в заданное состояние в конечный момент времени, т. е. на уменьшение составляющей  $R_{1\text{упр}}$ .

Сформулируем еще одно свойство, характеризующее структуру интегральной составляющей полного риска.

Пусть  $M(\Psi_2/\bar{y}_i, \bar{u}_I)$  — условное математическое ожидание интегральной функции потерь, соответствующее известным реализациям  $\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}$ , полученное в предположении, что управляющие воздействия  $u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_I$  выбираются только на основе информации, известной в момент времени  $i$ , и не зависят от наблюдений  $\bar{y}_{i+1}, \bar{y}_{i+2}, \dots, \bar{y}_I$ . Отметим, что процедура нахождения  $M(\Psi_2/\bar{y}_i, \bar{u}_I)$  не зависит от выбора стратегии управления и ничем не отличается от процедуры получения  $M(\Psi_2/\bar{y}_I)$ .

Для  $M(\Psi_2/\bar{y}_i, \bar{u}_I)$  аналогично (6.16) можно записать

$$M(\Psi_2/\bar{y}_i, \bar{u}_I) = \Psi_2 [M_v(z_2/\bar{y}_i, \bar{u}_I)] + D'_v(z_2/\bar{y}_i, \bar{u}_I) + D''_v(z_2/\bar{y}_i, \bar{u}_I). \quad (6.20)$$

Произведем в (6.20) осреднение по реализациям  $\bar{y}_i$ . Тогда аналогично безусловному риску  $R_2$  [см. (6.18) при  $s=2$ ] получим безусловный риск  $R_2^{(i)}$ , определяемый следующим образом:

$$R_2^{(i)} = R_{2\text{упр}}^{(i)} + R_{2\text{оц}}^{(i)} + R_{2\text{ид}}^{(i)}, \quad (6.21)$$

где  $R_{2\text{упр}}^{(i)} = M_{\bar{y}_i} [\Psi_2 [M_v(z_2/\bar{y}_i, \bar{u}_I)]]$ ,

$$R_{2\text{оц}}^{(i)} = M_{\bar{y}_i} [D'_v(z_2/\bar{y}_i, \bar{u}_I)], \quad R_{2\text{ид}}^{(i)} = M_{y_i} [D''_v(z_2/\bar{y}_i, \bar{u}_I)].$$

Отметим, что  $R_2^{(i)} = R_2$ .

В формуле (6.21)  $R_{2\text{оц}}^{(i)}$  и  $R_{2\text{ид}}^{(i)}$  характеризуют точность оценивания интегрального показателя качества по результатам наблюдений и управляющих воздействий, сделанных к моменту времени  $i$ . Будем предполагать, что

$$R_2^{(i)} \gg R_{2\text{оц}}^{(i)} + R_{2\text{ид}}^{(i)}. \quad (6.22)$$

Условие (6.22) по-существу означает, что в интегральном риске удельный вес составляющей, определяемой точностью оценивания, мал и поэтому можно не принимать во внимание возможность улучшения этой компоненты риска  $R_2$  за счет выбора управления.

Свойство (6.22) имеет место, например, в случаях, когда в интегральном критерии качества преобладает систематическая составляющая, характеризующая затраты на достижение цели при движении системы в номинальных невозмущенных условиях.

### 6.3. Определение стратегий управления, реализующих верхнюю и нижнюю оценки риска оптимальной системы

Методы определения субоптимального управления, реализующего верхнюю границу оценки риска оптимальной системы, могут быть построены на основе использования некоторых допущений, упрощающих процедуру нахождения управления. Однако, при этих допущениях по крайней мере должен сохраняться качественный характер оптимального управления. При этом следует иметь в виду, что ключевую роль в стохастически оптимальной системе играет использование статистической информации о будущих наблюдениях для формирования управляющих воздействий, направленных на изучение характеристик объекта.

Способ выбора субоптимального управления, который будет здесь изложен, использует метод динамического программирования. С учетом (6.11) выражение риска (6.3) может быть записано в виде

$$R = M_{\bar{y}_I} (Q_{I+1}), \quad (6.23)$$

$$\text{где } Q_{I+1} = M_v [(\Psi_1 + \Psi_2)/\bar{y}_I] = M_v(\Psi_1/\bar{y}_I) + M_v(\Psi_2/\bar{y}_I) \quad (6.24)$$

$\bar{u}_{I-1}$  — условный риск, соответствующий известным реализациям  $\bar{y}_I$ ,  $\bar{u}_{I-1}$ .

На последнем  $I$ -ом шаге управление выбирается из условия

$$u_I^* = \arg \left\{ \min_{u_I} Q_{I+1} \right\}.$$

Обозначим через  $Q_{I+1}^*$  значение условного риска, полученное с учетом  $u_I^*$ .

На  $(I-1)$ -ом шаге управление должно выбираться из условия минимума условного риска, соответствующего известным реализациям  $\bar{y}_{I-1}$ ,  $\bar{u}_{I-2}$ . Для того чтобы получить его выражение, необходимо найти математическое ожидание  $Q_{I+1}^*$  по области значений  $y_I$  с условной плотностью вероятности  $P(y_I/\bar{y}_{I-1}, \bar{u}_{I-1})$ , т. е. выполнить операцию следующего вида:  $M_{y_I}(Q_{I+1}^*/\bar{y}_{I-1})$ . Эта задача может быть решена лишь приближенно. Примем, что математическое ожидание функции  $Q_{I+1}^*$  равно значению этой функции при  $y_I$ , равном условному математическому ожиданию  $\hat{y}_I$ , соответствующему известным реализациям  $\bar{y}_{I-1}$ ,  $\bar{u}_{I-1}$ , т. е.

$$M_{y_I}(Q_{I+1}^*/\bar{y}_{I-1}) = Q_{I+1}^*(\hat{y}_I), \quad (6.25)$$

где  $\hat{y}_I = M(y_I/\bar{y}_{I-1})$ .

Будем выбирать управление на  $(I-1)$ -ом шаге из условия

$$u_{I-1}^* = \arg \left\{ \min_{u_{I-1}} Q_{I+1}^*(\hat{y}_I) \right\}. \quad (6.26)$$

Так как  $Q_{I+1}^*(\hat{y}_I) = \min_{u_{I-1}} Q_{I+1}(\hat{y}_I)$ , то обозначая

$$Q_I = Q_{I+1}(y_I), \quad (6.27)$$

можно получить следующее условие для нахождения управления на  $(I-1)$ -ом шаге:

$$u_{I-1}^* = \arg \left\{ \min_{u_{I-1}, u_I} Q_I \right\}. \quad (6.28)$$

При этом управление  $u_{I-1}^*$ , выбранное из (6.28), будет полностью совпадать с (6.26).

Найденное управление  $u_{I-1}^*$  хуже оптимального в смысле введенного риска  $R$ , тем не менее оно относится к классу дуального управления. В этом можно убедиться, если проанализировать вид функционала  $Q_I$ , который минимизируется на  $(I-1)$ -ом шаге. Его выражение определяется на основании использования соотношений (6.27), (6.24), (6.16). Нетрудно заметить, что  $Q_I$  сохраняет структуру риска (6.16) и включает в себя статистическую информацию, характеризующую совокупность наблюдений и управляющих воздействий, известных на  $I$ -ом шаге (т. е. величина  $Q_I$  включает в се-

дисперсию  $D_v''(z_s/\bar{y}_I)$  ( $s=1,2$ ), в которой  $y_I$  заменяется на  $\bar{y}_I$ . Поэтому управление  $u_{I-1}^*$ , выбранное из (6.28), будет направлено на улучшение этой информации.

На  $(I-2)$ -ом шаге управление должно выбираться из условия минимума условного риска, соответствующего известным реализациям  $\bar{y}_{I-2}$ ,  $\bar{u}_{I-3}$ . Введем обозначение  $Q_I^* = \min_{u_{I-1}, u_I} Q_I$ . Тогда с учетом допущения (6.25), сделанном на  $(I-1)$ -ом шаге, условный риск, соответствующий известным реализациям  $\bar{y}_{I-2}$ ,  $\bar{u}_{I-3}$ , будет равен  $M_{y_{I-1}}(Q_{I-1}^*/y_{I-2})$ .

Аналогично тому, как это было сделано на  $(I-1)$ -ом шаге, примем, что  $M_{y_{I-1}}(Q_I^*/\bar{y}_{I-2}) = Q_I^*(\hat{y}_{I-1})$ , где  $\hat{y}_{I-1} = M(y_{I-1}/\bar{y}_{I-2})$ , и будем выбирать управление на  $(I-2)$ -ом шаге из условия минимума  $Q_I^*(\hat{y}_{I-1})$ . Принимая во внимание, что  $Q_I^*(\hat{y}_{I-1}) = \min_{u_{I-1}, u_I} Q_I(\hat{y}_{I-1})$  и обозначая  $Q_{I-1} = Q_I(\hat{y}_{I-1})$ , получим условие для нахождения управления на  $(I-2)$ -ом шаге:

$$u_{I-2}^* = \arg \left\{ \min_{u_{I-2}, u_{I-1}, u_I} Q_{I-1} \right\}.$$

Продолжая эту процедуру, найдем аналогичное условие для выбора управления на  $i$ -ом шаге

$$u_i^* = \arg \left\{ \min_{u_i} Q_{i+1} \right\}, \quad (6.29)$$

где минимизируемый функционал  $Q_{i+1}$  определяется в результате решения уравнений

$$Q_j = Q_{j+1}(\hat{y}_j) \quad (j=I, I-1, \dots, i+1), \quad (6.30)$$

где  $\hat{y}_j = M(\bar{y}_j/y_{j-1})$ , с начальным условием

$$Q_{I+1} = M_v(\Psi_1/y_I) + M_v(\Psi_2/\bar{y}_I).$$

Таким образом, для нахождения субоптимального управления на каждом шаге  $i$  необходимо решить детерминированную оптимизационную задачу с функционалом (6.29). В результате решения этой задачи определяется программа управляющих воздействий, в состав которой входит искомое управление  $u_i^* = u_i^*(y_i, \bar{u}_{i-1})$ .

Величина риска, соответствующая такому субоптимальному управлению, принимается в качестве верхней оценки риска оптимальной системы. Верхняя оценка может быть получена в результате статистического моделирования системы (6.1), (6.2), управление в которой определяется из (6.29), (6.30). Здесь могут быть использованы методы анализа статистической точности систем, изложенные в гл. 11.

Процедуру нахождения субоптимального управления, реализующего верхнюю оценку, можно упростить в тех случаях, когда рассматриваемые системы управления обладают свойством, определяемым неравенством (6.22).

Вернемся к выбору управления на  $(I-1)$ -ом шаге. Как уже отмечалось, оно должно выбираться из условия минимума условного риска, соответствующего известным реализациям  $\bar{y}_{I-1}$ ,  $\bar{u}_{I-2}$ . Его выражение можно записать в следующем виде:

$$M_{y_I}(Q_{I+1}^*|\bar{y}_{I-1}) = M_{y_I} \left\{ \min_{u_I} [M_v(\Psi_1|\bar{y}_I) + M_v(\Psi_2|\bar{y}_I)|\bar{y}_{I-1}] \right\}. \quad (6.31)$$

Пусть 
$$M_v(\Psi_2|\bar{y}_I) = M_v(\Psi_2|\bar{y}_{I-1}, \bar{u}_I) + \Delta_I, \quad (6.32)$$

где  $M_v(\Psi_2|\bar{y}_{I-1}, \bar{u}_I)$  — оценка  $\Psi_2$  по известным на  $(I-1)$ -ом шаге реализациям  $\bar{y}_{I-1}$ ,  $\bar{u}_I$  (в предположении, что  $\bar{u}_I$  не зависит от  $\bar{y}_I$ ), а  $\Delta_I$  — поправка, учитывающая  $I$ -е измерение.

Процедуру минимизации (6.31) с учетом (6.32) по управлению  $\bar{u}_{I-1}$  можно упростить. Проанализируем физический смысл минимизации  $\Delta_I$  по  $\bar{u}_{I-1}$ . Поправка  $\Delta_I$  включает в себя статистическую информацию о совокупности наблюдений и управляющих воздействий, известной на  $I$ -ом шаге, которую можно улучшить благодаря выбору управления на  $(I-1)$ -ом шаге. Таким образом, в результате минимизации  $\Delta_I$  по  $\bar{u}_{I-1}$  достигается некоторое повышение качества оценивания  $\Psi_2$  на  $I$ -ом шаге. Однако, с учетом (6.22) это повышение качества можно не принимать во внимание. Такое допущение по существу означает, что можно не учитывать  $\Delta_I$  в функционале, минимизируемом на  $(I-1)$ -ом шаге, полагая в (6.31)

$$M_v(\Psi_2|\bar{y}_I) = M_v(\Psi_2|\bar{y}_{I-1}, \bar{u}_I).$$

Введем обозначения:  $Q_{(I+1)1} = M_v(\Psi_1|\bar{y}_I)$ ,  $Q_{I2} = M(\Psi_2|\bar{y}_{I-1}, \bar{u}_I)$ .

Тогда получим следующее условие для нахождения  $\bar{u}_{I-1}^*$ :

$$\bar{u}_{I-1}^* = \arg \left\{ \min_{\bar{u}_{I-1}, u_I} (Q_{I1} + Q_{I2}) \right\}, \text{ где } Q_{I1} = Q_{(I+1)1}(\hat{y}_I).$$

Продолжая изложенную процедуру минимизации на  $(I-2)$ -й шаг и т. д., найдем условие для выбора управления на  $i$ -ом шаге

$$\bar{u}_i^* = \arg \left\{ \min_{\bar{u}_i} (Q_{(i+1)1} + Q_{(i+1)2}) \right\},$$

где  $Q_{(i+1)1}$  определяется в результате решения уравнений

$$Q_{j1} = Q_{(j+1)1}(\hat{y}_j), \quad \hat{y}_j = M(y_j|\bar{y}_{j-1}) \quad (j = I, I-1, \dots, i+1)$$

при условии  $Q_{(i+1)1} = M_v(\Psi_1|\bar{y}_i)$ , а  $Q_{(i+1)2} = M_v(\Psi_2|\bar{y}_i, \bar{u}_i)$ .

Перейдем к определению стратегии управления, при помощи которой может быть найдена нижняя оценка оптимального риска.

Обратимся к выражению полного риска (6.23). В этом выражении операция математического ожидания производится с использованием плотности вероятности  $P(\bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1})$ , определяемой из (6.7).

Пусть  $P(\mathbf{y}_i/\bar{\mathbf{y}}_{i-1}, \bar{\mathbf{u}}_{i-1})$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ) — плотности нормального распределения. Введем переменные

$$y_{iq}^0 = \frac{y_i^{(q)} - M(y_i^{(q)}/\bar{\mathbf{y}}_{i-1})}{\sqrt{D(y_i^{(q)}/\bar{\mathbf{y}}_{i-1})}} \quad (i=1, 2, \dots, I) (q=1, 2, \dots, Q), \quad (6.33)$$

где  $D(y_i^{(q)}/\bar{\mathbf{y}}_{i-1})$  — условная дисперсия  $y_i^{(q)}$ , соответствующая известным реализациям  $\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-1}$ . Произведем в (6.23) замену переменных  $\bar{\mathbf{y}}_I$  на  $\bar{\mathbf{y}}_I^0 = (\mathbf{y}_1^0, \mathbf{y}_2^0, \dots, \mathbf{y}_I^0)$ ,  $\mathbf{y}_i^0 = (y_{i1}^0, y_{i2}^0, \dots, y_{iQ}^0)$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ).

В результате получим

$$R = M_{\bar{\mathbf{y}}_I^0}(Q_{I+1}). \quad (6.34)$$

Отметим, что в (6.34)  $Q_{I+1}$  является функцией  $\bar{\mathbf{y}}_I^0, \bar{\mathbf{u}}_I$ .

Предположим, что управляющие воздействия  $\bar{\mathbf{u}}_I$  определяются из условия

$$\bar{\mathbf{u}}_I = \arg \left\{ \min_{\bar{\mathbf{u}}_I} Q_{I+1} \right\} \quad (6.35)$$

так, что для всех моментов времени  $i$  управление зависит от полного вектора  $\bar{\mathbf{y}}_i^0$ :

$$\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_i^*(\bar{\mathbf{y}}_i^0). \quad (6.36)$$

Вектор  $\bar{\mathbf{y}}_i^0$  полностью может быть определен лишь в том случае, когда известен полный вектор наблюдений  $\bar{\mathbf{y}}_i$ . Следовательно, функция управления (6.36) использует будущие реализации наблюдений и поэтому физически нереализуема. Для сравнения отметим, что класс физически реализуемых управлений, в котором ищется оптимальное управление, с учетом (6.33) может быть определен формулой

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\bar{\mathbf{y}}_i^0). \quad (6.37)$$

Нетрудно показать, что функция управления (6.36) лучше любой из функций, принадлежащих (6.37), в смысле введенного риска. Действительно, значение условного риска  $Q_{I+1}$ , входящего в равенство (6.34), полученное с учетом (6.36), меньше его значения, соответствующего любому управлению, выбранному в классе физически реализуемых. Поэтому и значение риска (6.34), соответствующее физически нереализуемому управлению (6.36), меньше оптимального риска и может быть принято в качестве нижней оценки, т. е.

$$R' = M_{\bar{\mathbf{y}}_I^0} \left( \min_{\bar{\mathbf{u}}_I} Q_{I+1} \right).$$

Физически нереализуемое управление аналогичным образом может быть построено и для негауссовых распределений  $\underline{y}_I$ . В общем случае для этого следует полагать, что в (6.23) в соответствии с уравнениями объекта произведена замена осреднения по переменным  $\underline{y}_I$  на осреднение по  $\omega = (\mathbf{v}, \bar{h}_I)$ , при этом  $R = M_v(Q_{I+1})$ .

## 6.4. Нахождение оценок оптимального риска терминальной системы управления линейным объектом

Задача нахождения верхней и нижней оценок оптимального риска существенно упрощается в случае систем управления линейными объектами вида

$$x_{i+1} = \sum_{n=1}^N a_{in} v^{(n)} + v^{(N+1)} \sum_{r=0}^i b_{ir} u_r \quad (i=0, 1, \dots, I), \quad (6.38)$$

когда  $y_{i+1} = x_{i+1} + h_{i+1}$  ( $i=0, 1, \dots, I-1$ ), где  $a_{in}$ ,  $b_{ir}$  — известные коэффициенты;  $v^{(n)}$ ,  $h_{i+1}$  — возмущения и помехи типа гауссовых;  $v^{(N+1)}$  — случайное параметрическое возмущение  $v^{(N+1)} > 0$ , и при квадратичном терминальном критерии оптимальности  $R_1 = M(x_{I+1}^2)$ .

Аналогично выражению (6.23) в рассматриваемом случае можно записать

$$R_1 = M_{\underline{y}_I} [M_v(x_{I+1}^2 / \bar{y}_I)], \quad (6.39)$$

где  $M_v(x_{I+1}^2 / \bar{y}_I)$  — условный риск, соответствующий известным реализациям  $\underline{y}_I$ ,  $\bar{u}_{I-1}$ ,  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}', \mathbf{v}'')$ ,  $\mathbf{v}' = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(N)})$ ,  $\mathbf{v}'' = v^{(N+1)}$ .

Найдем выражение  $M_v(x_{I+1}^2 / \bar{y}_I)$ . Воспользуемся приемом, который был изложен в разд. 6.2. Предварительно примем, что параметр объекта  $v^{(N+1)}$  — известная величина, и определим условный риск, соответствующий известным реализациям  $\bar{y}_I$ ,  $\bar{u}_{I-1}$ ,  $v^{(N+1)}$ . Тогда из (6.14) с учетом свойств математических ожиданий и дисперсий, принимая во внимание уравнения объекта, получим

$$M'_v(x_{I+1}^2 / \bar{y}_I, v^{(N+1)}) = \left( A_I \tilde{\mathbf{v}}(I) + v^{(N+1)} \sum_{r=0}^I b_{(I+1)r} u_r \right)^2 + A_I \mathbf{K}_{vI} A_I^T, \quad (6.40)$$

где  $A_I$  — матрица-строка коэффициентов  $a_{In}$ ;  $\tilde{\mathbf{v}}(I)$  — вектор условных математических ожиданий возмущений  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(N)}$ , соответствующих известным реализациям  $\bar{y}_I$ ,  $\bar{u}_{I-1}$ ,  $v^{(N+1)}$ ;  $\mathbf{K}_{vI}$  — ковариационная матрица условного распределения  $\mathbf{v}'$ , соответствующего известным реализациям  $\bar{y}_I$ ,  $\bar{u}_{I-1}$ ,  $v^{(N+1)}$ .

Для  $\tilde{\mathbf{v}}(I)$  и  $\mathbf{K}_{vI}$  при гауссовых возмущениях и помехах из (6.12) с учетом уравнений объекта могут быть получены следующие

щис соотношения:

$$\hat{\boldsymbol{v}}(I) = \boldsymbol{K}_{vI} (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{II}^{-1} \bar{\boldsymbol{y}}_I - v^{(N+1)}) \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{II}^{-1} \boldsymbol{B} \bar{\boldsymbol{u}}_{I-1} + \bar{\boldsymbol{K}}_v^{-1} \bar{\boldsymbol{m}}_v, \quad (6.41)$$

$$\boldsymbol{K}_{vI} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{II}^{-1} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}_v^{-1})^{-1}$$

где  $\boldsymbol{K}_v$ ,  $\boldsymbol{K}_{I,I}$  — ковариационные матрицы априорных распределений возмущений и помех;  $\bar{\boldsymbol{m}}_v$  — вектор априорных математических ожиданий возмущений;

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{01} a_{02} \dots a_{0N} \\ a_{11} a_{12} \dots a_{1N} \\ \dots \dots \dots \\ a_{I1} a_{I2} \dots a_{IN} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{10} & b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{I0} & b_{I1} & b_{I2} & \dots & b_{I(I-1)} \end{pmatrix}$$

— матрицы, составленные из коэффициентов уравнений объекта. Выражение (5.40) после подстановки в него (5.41) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} M'_v(x_{I+1}^2 / \bar{y}_I, v^{(N+1)}) &= [A_I \boldsymbol{K}_{vI} (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{II}^{-1} \bar{\boldsymbol{y}}_I + \boldsymbol{K}_v^{-1} \bar{\boldsymbol{m}}_v) + v^{(N+1)}] \times \\ &\times \left( \sum_{r=0}^I b_{Ir} u_r - \sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r \right)^2 + A_I \boldsymbol{K}_{vI} A_I^T, \end{aligned} \quad (6.42)$$

где  $b'_r$  — элементы матрицы-строки

$$\boldsymbol{B}' = A_I \boldsymbol{K}_{vI} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{II}^{-1} \boldsymbol{B}. \quad (6.43)$$

Теперь в соответствии с выражением (6.15) произведем в (6.42) осреднение по области возможных значений случайного параметра  $v^{(N+1)}$ . В результате найдем

$$\begin{aligned} M_v(x_{I+1} / \bar{y}_I) &= \left( A_I \hat{\boldsymbol{v}}(I) + \hat{v}_{(I)}^{(N+1)}(I) \sum_{r=0}^I b_{Ir} u_r \right)^2 + \\ &+ D(v^{(N+1)} / \bar{y}_I) \left( \sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r - \sum_{r=0}^I b_{Ir} u_r \right)^2 + A_I \boldsymbol{K}_{vI} A_I^T. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Здесь  $\hat{\boldsymbol{v}}(I) = \boldsymbol{K}_{vI} (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{II}^{-1} \bar{\boldsymbol{y}}_I - \hat{v}^{(N+1)}(I) \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{K}_{II}^{-1} \boldsymbol{B} \bar{\boldsymbol{u}}_{I-1} + \boldsymbol{K}_v^{-1} \bar{\boldsymbol{m}}_v)$  (6.45)

— вектор оценок возмущений  $\boldsymbol{v}'$  по совокупности наблюдений и управляющих воздействий, известных в момент времени  $I$ , (вектор условных математических ожиданий величин  $v^{(1)}, v^2, \dots, v^{(N)}$ , соответствующих известным реализациям  $\bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}$ );

$\hat{v}^{(N+1)}(I)$ ,  $D(v^{(N+1)} / \bar{y}_I)$  — условное математическое ожидание и условная дисперсия величины  $v^{(N+1)}$ , соответствующие известным реализациям  $\bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}$ .

На  $I$ -ом шаге управление определяется из условия минимума  $Q_{I+1} = M(x_{I+1}^2 / \bar{y}_I)$ . Минимум (6.44) достигается при

$$u_I^* = - \frac{A_I \hat{v}(I) \hat{v}^{(N+1)}(I) - D(v^{(N+1)} / \bar{y}_I) \sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r}{b_{II} [(\hat{v}^{(N+1)}(I))^2 + D(v^{(N+1)} / \bar{y}_I)]} - \frac{1}{b_{II}} \sum_{r=0}^{I-1} b_{Ir} u_r. \quad (6.46)$$

Для нахождения управления на  $(I-1)$ -ом шаге определим вид функционала  $Q_I$ . С этой целью положим в (6.44)

$$y_I = \hat{y}_I = M(y_I \bar{y}_{I-1}). \quad (6.47)$$

В (6.44) от  $y_I$  зависят  $\hat{v}(I)$  и  $\hat{v}^{(N+1)}(I)$ . Обозначая через  $\hat{v}(I, \hat{y}_I)$  и  $\hat{v}^{(N+1)}(I, \hat{y}_I)$  значения  $\hat{v}(I)$  и  $\hat{v}^{(N+1)}(I)$  при условии (6.47), найдем

$$Q_I = \left[ A_I \hat{v}(I, \hat{y}_I) + \hat{v}^{(N+1)}(I, \hat{y}_I) \sum_{r=0}^I b_{Ir} u_r \right]^2 + D(v^{(N+1)} / \bar{y}_I) \times \\ \times \left( \sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r - \sum_{r=0}^I b_{Ir} u_r \right)^2 + A_I K_{vI} A_I^T. \quad (6.48)$$

Произведем минимизацию (6.48) вначале по  $u_I$ , а затем по  $u_{I-1}$ . Можно показать, что

$$\min_{u_I} Q_I = A_I K_{vI} A_I^T + \frac{D(v^{(N+1)} / \bar{y}_I)}{D(v^{(N+1)} / \bar{y}_I) + [\hat{v}^{(N+1)}(I, \hat{y}_I)]^2} \times \\ \times \left[ A_I \hat{v}(I, \hat{y}_I) + \hat{v}^{(N+1)}(I, \hat{y}_I) \sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r \right]^2. \quad (6.49)$$

Докажем, что

$$A_I \hat{v}(I, \hat{y}_I) = A_I \hat{v}(I-1) - (\hat{v}^{(N+1)}(I, \hat{y}_I) - \hat{v}^{(N+1)}(I-1)) \sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r, \quad (6.50)$$

где  $\hat{v}(I-1)$ ,  $\hat{v}^{(N+1)}(I-1)$  — оценки (условные математические ожидания) возмущений  $\mathbf{v}'$ ,  $v^{(N+1)}$ , соответствующие известным реализациям  $\bar{y}_{I-1}$ ,  $\bar{u}_{I-2}$ . Для  $A_I \hat{v}(I)$ , принимая во внимание (6.45), можно записать следующее выражение:

$$A_I \hat{v}(I) = \sum_{r=1}^I \xi_r y_r - \hat{v}^{(N+1)}(I) \sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r, \quad (6.51)$$

где  $\xi_r$  — элементы матрицы-строки

$$\Xi = A_I K_{vI} A_I^T K_{II}^{-1}, \quad (6.52)$$

а  $b_r'$  определяются из (6.43).

Так как  $\hat{v}(I-1) = M_{y_I}(\hat{v}(I)/\bar{y}_{I-1})$ ,  $\hat{v}^{(N+1)}(I-1) = M_{y_I}(v^{(N+1)}/\bar{y}_{I-1})$ ,

$$\begin{aligned} \text{то} \quad A_I \hat{v}(I-1) &= M_{y_I}(A_I \hat{v}(I)/\bar{y}_{I-1}) = \sum_{r=1}^{I-1} \xi_r y_r + \xi_I \hat{y}_I - \\ &\quad - v^{(N+1)}(I-1) \sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Сравнивая (6.51) с (6.53), найдем

$$A_I \hat{v}(I) = A_I \hat{v}(I-1) + \xi_I (y_I - \hat{y}_I) - (\hat{v}^{(N+1)}(I) - \hat{v}^{(N+1)}(I-1)) \sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r. \quad (6.54)$$

Полагая в (6.54)  $y_I = \hat{y}_I$ , получим (6.50).

С учетом доказанного соотношения (6.50) найдем

$$\begin{aligned} \min_{u_I} Q_I &= A_I K_{vI} A_I^T + \frac{D(v^{(N+1)}/\bar{y}_I)}{D(v^{(N+1)}/\bar{y}_I) + [\hat{v}^{(N+1)}(I, \hat{y}_I)]^2} (A_I \hat{v}(I-1) + \\ &\quad + \hat{v}^{(N+1)}(I-1) \sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r)^2. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Минимизируя (6.55) по  $u_{I-1}$ , получим

$$u_{I-1}^* = - \frac{A_I \hat{v}(I-1)}{b'_{I-1} \hat{v}^{(N+1)}(I-1)} - \frac{1}{b'_{I-1}} \sum_{r=0}^{I-2} b'_r u_r. \quad (6.56)$$

При этом можно показать, что

$$\min_{u_I u_{I-1}} Q_I = A_I K_{vI} A_I^T$$

и не зависит от управляющих воздействий  $u_{I-2}$ ,  $u_{I-3}$  и т. д.

Продолжая процедуру поиска субоптимального управления в соответствии с (6.29), (6.30) для моментов времени  $(I-2)$ ,  $(I-3)$  и т. д., найдем, что минимумы функционалов  $Q_{I-1}$ ,  $Q_{I-2}$  и т. д. по  $u_I$ ,  $u_{I-1}$  также равны  $A_I K_{vI} A_I^T$  и не зависят от управлений  $u_{I-2}$ ,  $u_{I-3}$  и т. д. Это означает, что субоптимальные управления, начиная с момента времени  $(I-2)$ , неопределенны.

Таким образом, стратегия управления, реализующая верхнюю оценку оптимального риска, должна удовлетворять соотношениям (6.46), (6.56). В выборе же управляющих воздействий, предшествующих моменту времени  $(I-1)$ , имеется свобода, и они могут быть сформированы с учетом других требований, определяемых конкретными условиями задачи.

При построении верхней оценки оптимального риска здесь предполагалось, что субоптимальная стратегия находится внутри допу-

стимой области  $U$ , определяемой ограничениями, накладываемыми на управление. Когда это предположение не выполняется, такие ограничения могут быть учтены при выборе субоптимального управления; при этом управление будет однозначно определено для всех дискретных моментов  $i$ .

Перейдем к определению нижней оценки  $R'$ . Функция управления, реализующая нижнюю оценку, находится из условия минимума условного риска, соответствующего известным реализациям  $\bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}$ , т. е.  $Q_{I+1}$ . Вид условного риска  $Q_{I+1}$  определяется выражением (6.44). Ранее было получено соотношение (6.46), определяющее управление на  $I$ -ом шаге из условия минимума  $Q_{I+1}$ . Подставляя (6.46) в (6.44), найдем

$$\min_{u_I} Q_{I+1} = A_I K_{vI} A_I^T + \frac{D(v^{N+1}/\bar{y}_I)}{D(v^{N+1}/\bar{y}_I) + (\hat{v}^{N+1}(I))^2} \times \\ \times \left( A_I \hat{v}(I) + \hat{v}^{(N+1)}(I) \sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r \right)^2. \quad (6.57)$$

В уравнении (6.57) от управления зависит только второе слагаемое, оно всегда неотрицательно и обращается в нуль при условии

$$\sum_{r=0}^{I-1} b'_r u_r = - \frac{A_I \hat{v}(I)}{\hat{v}^{(N+1)}(I)}. \quad (6.58)$$

Это условие физически нереализуемо, так как управление на  $(I-1)$ -ом шаге в соответствии с (6.58) зависит от наблюдения, которое будет сделано на будущем,  $I$ -ом шаге, и войдет в оценки  $\hat{v}(I), \hat{v}^{(N+1)}(I)$ . Однако, такое физически нереализуемое управление позволяет построить достаточно простую нижнюю оценку оптимального риска. Действительно, с учетом (6.58)

$$\min_{u_I} Q_{I+1} = A_I K_{vI} A_I^T. \quad (6.59)$$

Так как выражение (6.59) не зависит от реализаций наблюдений и управляющих воздействий, то

$$R' = A_I K_{vI} A_I^T. \quad (6.60)$$

## 6.5. О сходимости верхней и нижней оценок оптимального риска

Для выявления практической значимости результатов, полученных при исследовании предельных возможностей системы в соответствии с изложенным способом важно оценить степень близости верхней и нижней границ области, внутри которой находится риск оптимальной системы. Принимая это во внимание, докажем свойст-

во сходимости верхней и нижней оценок при увеличении числа дискретных измерений на заданном интервале управления.

Верхняя оценка определяется как значение риска (6.39), соответствующее субоптимальной стратегии управления (6.46), (6.56). Минимум условного риска  $Q_{I+1}$  по управлению на последнем шаге определяется выражением (6.57). Подставляя (6.54) в (6.57), с учетом (6.56) найдем выражение условного риска  $Q_{I+1}$ , соответствующее субоптимальной стратегии управления (6.46), (6.56):

$$Q_{I+1} = A_I K_{vI} A_I^T + \frac{D(v^{(N+1)}/\bar{y}_I)}{D(v^{(N+1)}/\bar{y}_I) + (\hat{v}^{(N+1)}(I))^2} \xi_I^2 (y_I - \hat{y}_I)^2. \quad (6.61)$$

Осредняя условный риск (6.61) по реализации наблюдений в соответствии с (6.39), получим следующее выражение верхней оценки оптимального риска:

$$R'' = A_I K_{vI} A_I^T + \xi_I^2 M_{\bar{y}_I} \left[ \frac{D(v^{(N+1)}/\bar{y}_I)}{D(v^{(N+1)}/\bar{y}_I) + (\hat{v}^{(N+1)}(I))^2} (y_I - \hat{y}_I)^2 \right]. \quad (6.62)$$

Положим в (6.62)  $\frac{D(v^{(N+1)}/\bar{y}_I)}{D(v^{(N+1)}/\bar{y}_I) + (\hat{v}^{(N+1)}(I))^2} = 1$

и выполним осреднение по реализациям  $\bar{y}_I$ . В результате получим неравенство

$$R'' < A_I K_{vI} A_I^T + \xi_I^2 M_{\bar{y}_{I-1}} [D(y_I/y_{I-1})]. \quad (6.63)$$

Определим степень близости оценок оптимального риска величиной

$$\delta = \frac{R'' - R'}{R'}. \quad (6.64)$$

Будем считать, что помехи  $h_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ) представляют собой последовательность независимых случайных величин. Тогда из (6.52) найдем

$$\xi_I = A_I K_{vI} A_{I-1}^T \frac{1}{\sigma_I^2}, \quad (6.65)$$

где  $A_{I-1}$  — матрица-строка коэффициентов  $a_{(I-1)n}$ ,  $\sigma_I$  — среднеквадратическое значение помехи в  $I$ -ом измерении. Подставим в (6.64) выражения (6.60) и (6.63) с учетом (6.65). В результате подстановки получим следующую оценку, ограничивающую сверху величину  $\delta$ :

$$\delta < \frac{(A_I K_{vI} A_{I-1}^T)^2}{A_I K_{vI} A_{I-1}^T \sigma_I^4} M_{\bar{y}_I} [D(y_I/\bar{y}_{I-1})]. \quad (6.66)$$

При увеличении числа измерений  $I$  на заданном интервале управления ковариационная матрица  $K_{vI}$  стремится к нулевой матри-

це, а следовательно, и выражение стоящее справа в неравенстве (6.66), также стремится к нулю. В результате с ростом числа измерений  $I$  стремится к нулю величина  $\delta$ , а это означает, что оценки сходятся друг к другу.

Проиллюстрируем возможности применения метода оценки предельных точностных показателей на одном из конкретных примеров. На рис. 17 для типовой дискретной системы управления расходом топлива штриховкой показана область, границы которой определены в соответствии с изложенной методикой. Кривые, отмеченные словами «Решения конструктора», характеризуют точность системы, при проектировании которой были наложены ограничения на структуру управляющего устройства. Эта система была синтезирована в соответствии с методом, изложенным в разд. 3.1, при различных  $\rho$ .

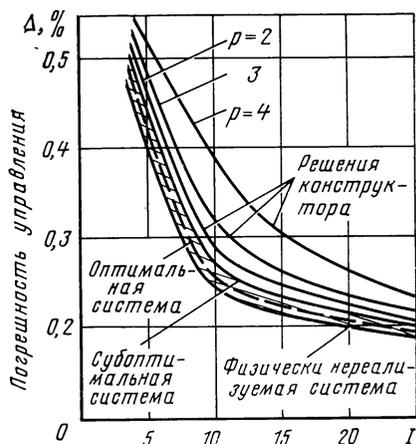


Рис. 17

## Глава 7

# ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

В предыдущих разделах задача синтеза решалась в предположении, что априорно известно статистическое описание объекта и действующих на него возмущающих факторов. Однако, в ряде случаев более реалистичен подход к задаче синтеза, который предполагает, что такого рода априорная информация известна лишь частично (т. е. существует неопределенность априорной информации).

Этот подход особенно актуален для бортовых терминальных систем управления, для которых типичны малоизученные условия работы и характерны постановки задач, в которых о параметрах объекта или действующих на объект возмущениях имеются сведения только самого общего характера.

В общей теории управления можно выделить следующие направления исследований проблемы управления в условиях неопределенности априорной информации.

Теория инвариантности позволяет выбрать условия независимости качества системы от непредвиденных изменений характеристик возмущающих воздействий. Практическая реализация инвариант-

ных систем основывается на принципе двухканальности [29]. Для расширения возможностей применения условий инвариантности системы целесообразно строить в классе комбинированных систем управления. Независимость системы управления от воздействия параметрических возмущений может быть обеспечена на основе использования принципов построения самонастраивающихся систем [30]. При рассмотрении как инвариантных, так и самонастраивающихся систем использовались, главным образом, детерминированные подходы. Чтобы учесть неопределенность условий работы при рассмотрении адаптивных [41] и статистически оптимальных систем управления, применялись вероятностные подходы. При построении систем с адаптацией и статистически-оптимальных систем первоначально исходили из разных предпосылок об уровнях априорных знаний, а в настоящее время по-существу исходят из единой концепции. Эта концепция ориентирует на максимальное использование всей имеющейся информации, включая сведения, определяющие некоторое множество возможных видов характеристик объектов.

## 7.1. Анализ постановки задачи синтеза систем терминального управления

В общей постановке задачи терминального управления неопределенность описания объекта и действующих на него возмущений формализовалась введением в уравнение объекта (2.16) функции  $F_i^\circ$ , возмущений  $\mathbf{v}^\circ$ , входящих в  $F_i^\circ$  в качестве аргумента, и помех  $\mathbf{h}_i^\circ$ , действующих в канале измерения. Предполагалось, что относительно  $F_i^\circ$ ,  $\mathbf{v}^\circ$ ,  $\mathbf{h}_i^\circ$  имеются сведения только самого общего характера.

Для данного рассмотрения упростим уравнение объекта (2.16) и запишем его в виде

$$\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{v}, \bar{u}_{i-1}) + \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{v}^\circ) \quad (i=1, 2, \dots, I+1), \quad (7.1)$$

где  $\boldsymbol{\varphi}_i^\circ$  — функция неопределенного вида, аналогичная  $F_i^\circ$  в (2.16). Примем также, что канал измерения описывается линейным уравнением

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_i^\circ \quad (i=1, 2, \dots, I). \quad (7.2)$$

Будем считать, что система управления принадлежит к классу систем, использующих принципы прогнозирования и фильтрации. Пусть алгоритм формирования оценок  $\hat{\mathbf{v}}_i$  возмущений  $\mathbf{v}$  строится следующим образом:

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{v}}_{i-1} + \mathbf{C}_i(\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i), \quad \hat{\mathbf{y}}_i = \boldsymbol{\varphi}_i(\hat{\mathbf{v}}_{i-1}, \bar{u}_{i-1}), \quad (7.3)$$

где  $\mathbf{C}_i$  — матрица весовых коэффициентов.

Управление выбирается таким, чтобы скомпенсировать реакцию объекта на возмущения, равные найденным оценкам.

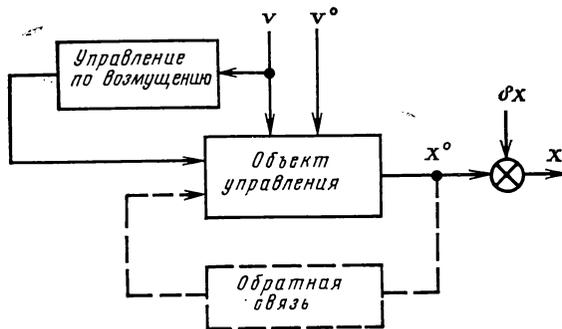


Рис. 18

Покажем, что в построенной таким образом системе управления проявляются свойства комбинированного управления.

Введем новое измерение  $y_i' = y_i - \varphi_i^0(v^0)$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) и вектор оценок возмущения  $\tilde{v}_i$ , полученный по измерениям  $y_i'$ , при этом

$$\tilde{v}_i = \tilde{v}_{i-1} + C_i(y_i' - \hat{y}_i'), \quad \hat{y}_i' = \varphi_i(\tilde{v}_{i-1}, \bar{u}_{i-1}), \quad (7.4)$$

а

$$\hat{v}_i = \tilde{v}_i + \Delta_i, \quad (7.5)$$

где  $\Delta_i$  — вектор поправок, зависящий от функций  $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_l^0$ , искажающих оценки  $\tilde{v}_i$ .

Примем, что  $\varphi_i(\hat{v}_{i-1}, \bar{u}_{i-1}) = \varphi_i(\tilde{v}_{i-1}, \bar{u}_{i-1}) + L_i \Delta_{i-1}$ .

Тогда нетрудно показать, что

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + C_i(\varphi_i^0 - L_i \Delta_{i-1}). \quad (7.6)$$

Таким образом, в алгоритме (6.3) выделены два независимых канала (7.4) и (7.6), в одном из которых формируются оценки  $\tilde{v}_i$  возмущений  $v$ , не зависящие от  $\varphi_i^0$ , а в другом — поправки  $\Delta_i$ , содержащие информацию о  $\varphi_i^0$ . Это разделение — условное, но оно позволяет выявить наличие в рассматриваемой системе свойств комбинированного управления.

Действительно, можно считать, что управление, направленное на компенсацию реакции объекта на воздействия, равные оценкам возмущений  $\tilde{v}_i$  реализует эффект управления по возмущению. Отклонения координат объекта  $\varphi_i^0$ , вызванные возмущениями  $v^0$  неопределенного характера, парируются по контуру обратной связи. Эффект обратной связи проявляется в результате искажения оценок  $\tilde{v}_i$  поправками  $\Delta_i$ , содержащими информацию о  $\varphi_i^0$ , и появления вследствие этого дополнительных составляющих в управлении.

Описанный механизм комбинированного управления иллюстрируется структурной схемой, представленной на рис. 18. На этой

схеме сплошными линиями выделен контур управления по возмущению, а пунктирными — контур обратной связи. На рис. 18 погрешность оценивания  $\delta x$  возмущения  $v$  (из-за ошибок измерения  $\bar{h}_i$ ) приведена к выходу объекта, так как можно считать, что величина этой погрешности не зависит от управления (здесь эффектом дуального управления пренебрегают). Значение вектора выходных координат  $x^o$  объекта, поступающее на вход канала обратной связи, при условии, что эффект воздействия  $v$  нейтрализуется в канале управления по возмущению, определяется реакцией объекта на  $v^o$ , при этом  $x^o = \varphi^o(v^o)$ . На рис. 18 с целью упрощения в обозначениях величин опущен индекс  $i$ .

По сути дела объектом всего предыдущего рассмотрения был контур управления по возмущению. Теперь рассмотрим, какие требования необходимо предъявить к алгоритму (7.3) для того, чтобы обеспечить наилучшие условия работы контура обратной связи.

Найдем оценку  $\hat{x}_i$  координат состояния объекта по оценкам  $\hat{v}_i$  возмущений. Сформируем  $\hat{x}_i$  следующим образом:

$$\hat{x}_i = \varphi_i(\hat{v}_i, \bar{u}_{i-1}) = \varphi_i(\tilde{v}_i, \bar{u}_{i-1}) + L_i \Delta_{i-1} + L_i C_i (\varphi_i^o - L_i \Delta_{i-1}). \quad (7.7)$$

Нетрудно заметить, что наилучшие условия для парирования отклонений координат объекта  $\varphi_i^o$  обеспечиваются в том случае, когда

$$\hat{x}_i = \varphi_i(\tilde{v}_i, \bar{u}_{i-1}) + \varphi_i^o. \quad (7.8)$$

А для того, чтобы оценки (7.7) были равны (7.8), необходимо выполнить условие

$$L_i C_i = E,$$

где  $E$  — единичная диагональная матрица.

Качество управления по возмущению во многом зависит от того, насколько хорошо в алгоритме (7.3) реализуются свойства фильтрации случайных помех. Известно, что  $C_i$  в этом случае должны убывать с ростом  $I$ .

Таким образом, требования, предъявляемые к алгоритму формирования оценок возмущений (назначению матрицы весовых коэффициентов в (7.3), противоречивы. В связи с этим необходимо построить формальный метод выбора такого алгоритма оценивания, при котором достигается некоторый компромисс между требованиями к каждому из контуров комбинированного управления.

Выше были рассмотрены особенности построения системы управления в условиях неопределенности информации относительно части действующих на объект возмущений. Задача синтеза еще более усложняется при учете неопределенности априорных данных о помехах в канале измерения  $h_i^o$ .

В зависимости от того, какие сведения имеются относительно  $\varphi_i^o$ ,  $v^o$ ,  $h_i^o$ , можно выделить следующие виды неопределенности описания объекта:

1. Неопределенные факторы  $\varphi_i^o$ ,  $v^o$ ,  $h_i^o$  имеют случайную природу, но их вероятностное описание задано неоднозначно — извест-

но лишь некоторое множество, которому должны принадлежать характеристики этого описания.

2. Значения  $\varphi_i^\circ$ ,  $\mathbf{v}^\circ$ ,  $\mathbf{h}_i^\circ$  неизвестны, но задана область, внутри которой они находятся.

При этом задаче синтеза системы управления из условия достижения некоторого гарантированного результата при неопределенности первого типа наиболее соответствует минимаксно-статистический подход к решению, а при неопределенности второго типа — минимаксный подход.

## 7.2. Основной подход к решению задачи синтеза терминальных систем управления в условиях неопределенности априорной информации

Для решения задачи синтеза при наличии неопределенности значений  $\varphi_i^\circ$ ,  $\mathbf{v}^\circ$ ,  $\mathbf{h}_i$  можно предложить следующий подход.

Произведем преобразование терминального риска  $R$ . Допустим, что известны реализации неопределенных факторов

$$\mathbf{v}^\circ, \bar{\varphi}_{I+1}^\circ = (\varphi_1^\circ, \varphi_2^\circ, \dots, \varphi_{I+1}^\circ), \bar{\mathbf{h}}_I^\circ = (\mathbf{h}_1^\circ, \mathbf{h}_2^\circ, \dots, \mathbf{h}_I^\circ).$$

При помощи модификации формулы Байеса определим условную плотность вероятности вектора возмущений  $\mathbf{v}$  в виде

$$P(\mathbf{v} | \bar{\mathbf{y}}_I, \bar{\mathbf{u}}_{I-1}, \bar{\boldsymbol{\theta}}_I, \bar{\varphi}_{I+1}^\circ, \bar{\mathbf{h}}_I^\circ) = \frac{\prod_{i=1}^I \prod_{k=1}^K (P_{ik})^{\delta_{ik}} \prod_{n=1}^N (P_n)^{\delta_{0n}}}{\int_{\mathcal{Q}(v)} \prod_{i=1}^I \prod_{k=1}^K (P_{ik})^{\delta_{ik}} \prod_{n=1}^N (P_n)^{\delta_{0n}} d\Omega(\mathbf{v})}. \quad (7.9)$$

Здесь  $P_n = P(v^{(n)})$ ,  $P_{ik} P(y_i^k - \varphi_i^k(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}) - \varphi_i^{\circ(k)}(\mathbf{v}^\circ) - h_i^{\circ(k)})$  — априорные плотности вероятности величин  $v^{(n)}$  и  $h_i^{(k)}$  [ $v^{(n)}$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) предполагаются статистически независимыми];  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_I = (\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_I)$  — вектор параметров, где  $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_{01}, \theta_{02}, \dots, \theta_{0N})$ ,  $\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{ik})$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ), причем  $0 \leq \theta_{0n}, \theta_{ik} \leq 1$ . Особенность введенной здесь условной плотности вероятности (7.9) заключается в зависимости ее от вектора параметров  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_I$ , при помощи которого можно менять объем и удельный вес измерительной информации, используемой при формировании апостериорного распределения (7.9).

Воспользовавшись уравнением (7.9), можно определить условный риск — условное математическое ожидание функции потерь, которое будет зависеть не только от информации о предыстории процесса и управления, но также и от значений  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_I$  и реализаций неопределенных факторов  $\bar{\varphi}_I^\circ, \bar{\mathbf{h}}_I^\circ$ .

Выделим в условном риске составляющую, определенную при условии, что  $\bar{\varphi}_I^\circ = 0, \bar{\mathbf{h}}_I^\circ = 0$ , и поправку к ней, учитывающую эффект воздействия на систему управления неопределенных факторов  $\bar{\varphi}_I^\circ, \bar{\mathbf{h}}_I^\circ$ . Очевидно, что аналогичное разбиение получит и без-

условный риск  $R$  при этом  $R = \bar{R} + R^\circ$ , где через  $\bar{R}$  обозначен риск системы, в которой отсутствуют неопределенные факторы  $\bar{\varphi}_I^\circ$ ,  $\bar{h}_I^\circ$ , а через  $R^\circ$  — дополнительная составляющая, возникающая в риске  $R$  из-за воздействия на систему неопределенных факторов. Нетрудно заметить, что  $\bar{R}$  и  $R^\circ$  соответственно характеризуют качество управления по возмущению и по контуру обратной связи в синтезируемой комбинированной системе.

Тогда процедура синтеза системы может быть построена следующим образом. Воспользуемся минимаксно-статистическим принципом, в соответствии с которым предполагается, что природа выбирает наихудшие вероятностные характеристики возмущений неопределенного типа. В этих условиях конструктор сможет выбирать класс процессов возмущенного движения, которые должны компенсироваться системой управления. Если такой класс выбран, то можно определить вид алгоритма системы, а по-существу — алгоритма оценивания возмущений или координат состояния.

Выбранный алгоритм должен обеспечивать оценивание возмущений, порождающих возмущенное движение системы заданного класса, и прогнозирование реакции объекта на эти возмущения с наилучшей точностью.

Кроме того, конструктор может за счет назначения  $\bar{\varphi}_I$  регулировать объем информации о предыстории процесса, используемой при оценке возмущений.

Класс процессов на выходе объекта можно характеризовать величиной дисперсии погрешности оценивания выходной координаты объекта с использованием имеющихся в системе средств измерения. При этом, чем шире класс процессов, который выбирается конструктором, тем больше величина дисперсии погрешности оценивания из-за ошибок измерения. Сужение такого класса может привести к ошибкам другого рода.

Выбор класса процессов на выходе объекта, которые должны распознаваться и компенсироваться системой управления, может производиться на основе метода, аналогичного описанному в [9]. Однако, при выборе такого класса здесь будем исходить из более простого и очевидного условия.

Будем считать, что управление должно обеспечивать компенсацию процессов возмущенного движения объекта, относительно характера изменения которых имеется полная априорная информация (т. е. процессов, описываемых уравнением (7.1), в правой части которого отсутствуют неопределенные факторы). Формально это означает, что вид алгоритма системы может быть выбран в результате решения байесовской оптимизационной задачи с терминальным риском  $\bar{R}$ .

Принимая во внимание ограниченность класса процессов, исходя из которого конструктор выбирает алгоритм системы, будем предполагать, что природа выбирает вероятностные характеристики неопределенных факторов, порождающие процессы, из более широкого класса. При этом, формируя наихудшие процессы  $\bar{\varphi}_I^\circ$ ,  $\bar{h}_I^\circ$

из заданного множества, природа максимизирует составляющую риска  $R^\circ$ .

Теперь конструктор может улучшить качество системы выбором параметров  $\Phi_I$ . Значения  $\Phi_I$  находятся из условия минимума риска  $\bar{R}$ , включающего в себя  $\bar{R}$  и  $R^\circ$ .

Изложенный подход к синтезу терминальных систем комбинированного управления в следующем разделе иллюстрируется на примере формирования алгоритма прогнозирования конечного состояния.

### 7.3. К задаче прогнозирования при синтезе терминальных систем управления

Рассмотрим некоторые подходы к построению алгоритма прогнозирования отклонений выходной координаты в конечный момент времени терминальных бортовых систем управления в тех характерных для практики случаях, когда известна лишь часть статистических характеристик объекта управления. В соответствии с принятым ранее допущением будем рассматривать задачу прогнозирования как самостоятельную, независимо от того, каким способом формируются управляющие воздействия.

Ограничимся рассмотрением линейных объектов вида

$$x_{i+1} = \sum_{n=1}^N a_{in} v^{(n)} + \sum_{r=0}^i b_{ir} u_r + \varphi_{i+1}^\circ(\mathbf{v}^\circ) \quad (i=0, 1, \dots, I), \quad (7.10)$$

$$y_i = x_i + h_i \quad (i=1, 2, \dots, I),$$

где  $v^{(n)}$ ,  $h_i$  — возмущения и помехи гауссового типа.

Неопределенность описания объекта вызывается воздействием случайного вектора возмущений  $\mathbf{v}^\circ$ . Сведения о реакции объекта на эти возмущения ограничиваются данными о дисперсии и математическом ожидании  $\varphi_i^\circ(\mathbf{v}^\circ)$ .

Пусть

$$D[\varphi_{i+1}^\circ(\mathbf{v}^\circ)] \leq D_{I+1}, \quad D(\Delta\varphi_i) \leq D_i,$$

$$\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1}^\circ(\mathbf{v}^\circ) - \varphi_i^\circ(\mathbf{v}^\circ) \quad (i=1, 2, \dots, I),$$

где  $D_{I+1}$ ,  $D_i$  заданы.

Примем для простоты, что  $M[\varphi_i^\circ(\mathbf{v}^\circ)] = 0$ .

Задание статистических характеристик такого рода объясняется, например, следующим. В практике проектирования бортовых систем управления часто встречаются случаи, когда известны реализации возмущений, полученные в результате натурального эксперимента. Однако число таких реализаций, как правило, бывает небольшим, и их статистическая обработка позволяет получить с приемлемой достоверностью данные лишь о математическом ожидании и дисперсии.

Рассмотрим задачу прогнозирования значения выходной координаты  $x_{I+1}$  на  $I$ -ом шаге. В соответствии с изложенным в преды-

дущем параграфе подходом будем искать оптимальный алгоритм прогнозирования  $x_{I+1}$  по данным  $\bar{y}_I, \bar{u}_{I-1}$  в следующем классе:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{I+1} &= A_I \hat{\mathbf{v}}(I), \quad \hat{\mathbf{v}}(I) = K_{vI} (A^T K_{II}^{-1} \Theta \bar{y}_I^* + K_v^{-1} \Theta_v m_v), \\ K_{vI} &= (A^T K_{II}^{-1} \Theta A + K_v^{-1} \Theta_v)^{-1}, \\ \bar{y}_I^* &= (y_1^*, y_2^*, \dots, y_I^*), \quad y_i^* = y_i - \sum_{r=0}^{i-1} b_{(i-1)r} u_r.\end{aligned}$$

Здесь  $\hat{x}_{I+1}, \hat{\mathbf{v}}(I)$  — оценки  $x_{I+1}, \mathbf{v}$ ;  $m_v$  — априорное математическое ожидание вектора  $\mathbf{v}$ ;  $\Theta, \Theta_v$  — диагональные матрицы, элементы  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_I, \vartheta_{01}, \dots, \vartheta_{0I}$  которых подлежат выбору.

Пусть  $y_i' = y_i^* - \varphi_i^\circ(\mathbf{v}^\circ)$ , тогда

$$\hat{\mathbf{v}}(I) = K_{vI} (A^T K_{II}^{-1} \Theta \bar{y}_I' + K_v^{-1} \Theta_v m_v) - K_{vI} A^T K_{II}^{-1} \Theta \bar{\varphi}_I^\circ,$$

где  $\bar{y}_I' = (y_1', y_2', \dots, y_I')$ .

Анализируя выражение, полученное для  $\hat{\mathbf{v}}(I)$ , нетрудно заметить, что воздействие  $\mathbf{v}^\circ$  на объект возмущения вызывает смещение оценок  $\hat{\mathbf{v}}(I), \hat{x}_{I+1}$ . Смещение  $\hat{x}_{I+1}$  характеризуется величиной  $A_I K_{vI} A^T K_{II}^{-1} \Theta \bar{\varphi}_I^\circ$ , которая несет в себе информацию об отклонении реального процесса  $y_i$  на выходе объекта от процесса, соответствующего поведению объекта при  $\bar{\varphi}_I^\circ = 0$ . В этом состоит механизм формирования сигнала обратной связи — одной из составляющих сигнала в комбинированной системе.

Качество комбинированного управления зависит от точности оценки возмущений  $\mathbf{v}$  и от того, как в алгоритме прогнозирования используется информация об отклонениях реального процесса из-за воздействия возмущения  $\mathbf{v}^\circ$ . Указанные факторы, влияющие на качество управления, определяются выбором элементов матриц  $\Theta, \Theta_v$  в алгоритме прогнозирования.

Оптимальные значения элементов матриц  $\Theta, \Theta_v$  будем искать из условия минимума риска  $R = M[(x_{I+1} - \hat{x}_{I+1})^2]$ .

Найдем выражение риска с учетом алгоритма прогнозирования и уравнений объекта

$$\begin{aligned}R &= \tilde{R} + R^\circ, \quad \tilde{R} = M \{ [A_I K_{vI} (K_v^{-1} \Theta_v \mathbf{v} - K_v^{-1} \Theta_v m_v - A^T K_{II}^{-1} \Theta \bar{h}_I)]^2 \}, \\ R^\circ &= M \{ [A_I K_{vI} A^T K_{II}^{-1} \Theta \Delta \bar{\varphi}_I + \varphi_{I+1}^\circ (1 - A_I K_{vI} A^T K_{II}^{-1} \Theta e)]^2 \},\end{aligned}$$

где  $\Delta \bar{\varphi}_I = (\Delta \varphi_1^\circ, \Delta \varphi_2^\circ, \dots, \Delta \varphi_I^\circ)$ ; единичная матрица-столбец размера  $1 \times I$ . Проведем осреднение в выражении риска. Будем считать, что возмущение  $\mathbf{v}^\circ$  максимизирует риск. Выбирая из этого условия корреляционную матрицу величин  $\Delta \varphi_1^\circ, \Delta \varphi_2^\circ, \dots, \Delta \varphi_I^\circ, \varphi_i$ , получим

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= A_I K_{vI} (K_v^{-1} \Theta_v^2 + A^T K_{II}^{-1} \Theta^2 A) K_{vI} A_I^T, \\ R^\circ &= [A_I K_{vI} A^T K_{II}^{-1} \Theta \bar{\sigma}_I + |1 - A_I K_{vI} A^T K_{II}^{-1} \Theta e| \sigma_{I+1}]^2,\end{aligned}$$

где  $|A_I K_{vI} A^T K_{II}^{-1}|$  — матрица-строка, элементы которой равны абсолютным значениям элементов.

$$A_I K_{vI} A^T K_{II}^{-1}; \quad \bar{\sigma}_I = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_I),$$

$$\sigma_i = \sqrt{D_i}, \quad \sigma_{I+1} = \sqrt{D_{I+1}}.$$

Аналогичным образом решается задача прогнозирования на любом другом шаге дискретного управления.

Проведем качественный анализ влияния выбора элементов матриц  $\Theta$ ,  $\Theta_v$  на характеристики комбинированного управления. Рассмотрим случай, когда  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ .

Первая составляющая  $\tilde{R}$  риска  $R$  характеризует точность оценки возмущений  $\mathbf{v}$ . Наивысшая точность оценки возмущений достигается, когда  $\Theta$ ,  $\Theta_v$  — единичные матрицы. При этом используется вся информация, полученная в процессе измерений выходной координаты.

Вторая составляющая  $R^\circ$  характеризует механизм формирования обратной связи, проявляющийся при воздействии возмущения, характеризующего фактор неопределенности. При условии  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$  наименьшему значению этой составляющей риска соответствует матрица  $\Theta$ , в которой все элементы, кроме последнего, равны нулю, а матрица  $\Theta_v = 0$ . При таком выборе  $\Theta$ ,  $\Theta_v$  в оценке вектора  $\mathbf{v}$  максимизируется удельный вес текущей информации.

Следует ожидать, что матрицы  $\Theta$ ,  $\Theta_v$ , доставляющие наименьшее значение риску, будут представлять собой некоторое компромиссное решение, приводящее к оптимальному ограничению объема используемой при прогнозировании информации.

В заключение отметим следующие интересные факты: оценки возмущений, наилучшие в смысле критерия

$$R = M[(x_{I+1} - \hat{x}_{I+1})^2],$$

не совпадают с оценками, доставляющими минимум

$$M[(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}(I))^2];$$

для формирования оценок на  $I$ -ом шаге недостаточно знать оценки на предыдущем шаге и текущее измерение, полученное в  $I$ -ый момент — необходима вся измерительная информация о предыстории процесса управления. Последняя особенность минимаксных оценок существенно затрудняет их построение в рекуррентной форме.

#### 7.4. Синтез алгоритмов оценивания возмущений при усеченных априорных распределениях

Перейдем к исследованию задачи синтеза в условиях неопределенности другого типа. Будем считать, что функция  $\phi_i^\circ$ , характеризующая реакцию объекта (7.10) на воздействие возмущений  $\mathbf{v}^\circ$ , известна и линейна относительно  $\mathbf{v}^\circ$ , а неопределенность содержится в данных о плотности распределения вероятности  $P(\mathbf{v})$ . Здесь предполагается, что вектор  $\mathbf{v}$  включает в себя и компоненты  $\mathbf{v}^\circ$ .

Можно выделить два класса распределений  $P(\boldsymbol{\nu})$ . К одному из них отнесем неограниченные распределения, в соответствии с которыми  $\boldsymbol{\nu}$  могут принимать бесконечно большие значения. В этом случае априорные сведения о  $\boldsymbol{\nu}$  оказывают существенное влияние на его оценку лишь на начальном этапе процесса управления, когда объем измерительной информации сравнительно мал. По мере накопления такой информации удельный вес априорных данных уменьшается, что и определяет свойство грубости оценок возмущений  $\boldsymbol{\nu}$  к неточностям априорных знаний о виде распределения  $P(\boldsymbol{\nu})$  и его характеристик.

Перейдем к рассмотрению второго класса, включающего усеченные распределения  $P(\boldsymbol{\nu})$ , в соответствии с которыми случайный вектор  $\boldsymbol{\nu}$  может принимать значения только из некоторой ограниченной области. Оказывается, что сведения о принадлежности  $P(\boldsymbol{\nu})$  к классу усеченных распределений оказывают существенное влияние на определение вида оценок возмущений  $\boldsymbol{\nu}$ , а степень усечения влияет на результаты и точность оценивания.

Рассмотрим одномерную задачу оценивания возмущения  $v$ . Пусть априорная плотность распределения вероятностей  $P(v)$  имеет следующий вид:

$$P(v) = \beta \gamma P'(v),$$

где  $P'(v)$  — неограниченная исходная плотность распределения вероятностей;  $\gamma$  — нормирующий множитель;

$$\beta = \beta(v) = \begin{cases} 1 & \text{при } v \in [V_1, V_2], \\ 0 & \text{при } v \notin [V_1, V_2]; \end{cases}$$

$V_1, V_2$  — заданные предельно допустимые значения величины  $v$ .

Найдем оптимальную оценку возмущения  $v$  — условное математическое ожидание величины  $v$ , соответствующее известным на  $I$ -ом шаге реализациям измерений  $\bar{y}_i$  и управляющих воздействий  $\bar{u}_{i-1}$ . Воспользовавшись формулой Байеса, определим условную плотность вероятности

$$P(v | \bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) = \frac{P(v, \bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})}{\int_{\Omega(v)} P(v, \bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) d\Omega(v)}. \quad (7.11)$$

Учитывая, что  $P(v, \bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) = \beta \gamma P'(v, \bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$ ,  $P'(v, \bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) = P'(v | \bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) P(\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$  (здесь через  $P'(\cdot)$  обозначены плотности вероятностей, соответствующие неограниченному распределению  $v$ ), получим

$$P(v | \bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) = \beta \gamma_i P'(v | \bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}), \quad (7.12)$$

где  $\gamma_i = \left[ \int_{\Omega(v)} \beta P'(v | \bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) d\Omega(v) \right]^{-1}$ .

Конкретизируем задачу. Будем считать, что распределения  $P'(v)$ ,  $P(\bar{h}_i)$  — гауссовы, а усечение распределения  $v$  симметрично, при этом  $V_1 = m - 3\sigma$ ,  $V_2 = m + 3\sigma$ , где  $m, \sigma$  — априорные математическое

ожидание и среднеквадратическое отклонение возмущения  $v$ . В этом случае апостериорная плотность вероятности, определяемая в соответствии с (7.12), — усеченная гауссова плотность вероятности, и для нее могут быть получены следующие соотношения, определяющие математическое ожидание и дисперсию:

$$M(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) = M'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) + g_i \sqrt{D'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})}; \quad (7.13)$$

$$D(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) = D'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) \{1 - g_i^2 - \gamma_i [v_2 \eta(v_2) - v_1 \eta(v_1)]\};$$

$$\eta(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right); \quad v_1 = \frac{V_1 - M'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})}{\sqrt{D'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})}};$$

$$v_2 = \frac{V_2 - M'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})}{\sqrt{D'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})}}; \quad g_i = \gamma_i [\eta(v_1) - \eta(v_2)],$$

где  $M'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$ ,  $D'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$

— условные математическое ожидание и дисперсия величины  $v$ , соответствующие неограниченному распределению  $v$ .

Анализируя полученные соотношения, можно записать (7.13)

в виде  $M(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) = G[M'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})]$ ,

где  $G$  — нелинейная функция, ограничивающая  $M(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$  таким образом, что при неограниченном увеличении  $M'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$  в области положительных или отрицательных значений величина  $M(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$  не может превышать соответственно  $V_2$  или  $V_1$ .

Следовательно, учет ограничений в априорном распределении возмущения  $v$  при синтезе алгоритмов обработки информации о предыстории процесса управления даже для линейных задач и гауссовых возмущений приводит к нелинейным оценкам вида (7.13). Блок формирования такой оценки может быть представлен как последовательное соединение линейного фильтра, предназначенного для вычисления  $M'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$ , и статического нелинейного звена, которое приближенно, но с сохранением основных свойств описывается характеристикой типа насыщения

$$M(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) = \begin{cases} M'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) & \text{при } V_1 \leq M'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) \leq V_2; \\ V_1 & \text{при } M'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) < V_1; \\ V_2 & \text{при } M'(v/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}) > V_2. \end{cases}$$

Аналогичным образом с включением нелинейных звеньев типа насыщения могут строиться и алгоритмы формирования оценок координат состояния. Для определения граничных значений области насыщения в этом случае могут быть построены так называемые предельные процессы управления с возмущениями  $V_1$  и  $V_2$ , ограничивающие область возможных отклонений координат состояния системы.

Вывод о том, что алгоритмы формирования оценок должны включать характеристики с насыщением, полученный для одномерного возмущения с усеченным распределением, можно гипотетически распространить и на многомерные задачи.

Включение в алгоритм оценивания нелинейности типа насыщения оказывается полезным для борьбы с большими выбросами помех в канале измерения. Этот факт отмечался, например, в [47] и при построении робастных алгоритмов оценивания в [32].

## 7.5. Минимаксный синтез терминальных систем управления линейным объектом

Рассмотрим теперь тот случай неопределенности априорной информации, когда считаются неизвестными вероятностные характеристики возмущений  $\mathbf{v}^\circ$  и ошибок измерения  $h_i^\circ$  и априорно задаются лишь ограничения, стесняющие значения  $\mathbf{v}_i^\circ$  и  $h_i^\circ$ , а также функция  $\varphi_i^\circ$ . Заметим, что в этом случае для синтеза системы может использоваться обычный статистический подход, реализуемый, например, в предположении равномерности распределения возмущений и ошибок измерения в допустимых диапазонах (могут условно приниматься и любые другие законы распределения вероятностей, удовлетворяющие заданным ограничениям). К аналогичным результатам можно прийти и при использовании алгоритмов стохастической аппроксимации в качестве средства адаптации к априорной неопределенности [41].

В этом разделе, однако, за основу будет принят другой, минимаксный, подход к синтезу системы, который, вообще говоря, правомочен в следующих, вполне реальных ситуациях.

1. Возмущения и помехи, действующие на проектируемую систему управления, определяются стратегией управления другой системы (или человека), цель которой прямо противоположна цели искомого управления.

2. В силу особой важности результатов работы системы управления требуется, чтобы отклонения от цели управления, характеризующие точность управления, не превосходили заданного значения при любых априорно допустимых сочетаниях возмущений и помех. Такая ситуация характерна для тех систем, работа которых связана с жизнеобеспечением человека в космосе или безаварийностью функционирования объекта в целом.

Для упрощения изложения в разделе будем считать, что на объект управления действуют только возмущения  $\mathbf{v}^\circ$  и помехи  $h_i^\circ$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ), а верхний индекс « $^\circ$ » здесь будем опускать.

Рассматривается линейный нестационарный объект управления, выходная координата которого измеряется в дискретные моменты времени  $i$ . Уравнения, описывающие объект, имеют вид

$$x_{i+1} = A_i \mathbf{v} + B_i \bar{u}_i \quad (i=0, 1, \dots, I), \quad (7.14)$$

где  $A_i = \|a_{in}\|$  — матрица-строка коэффициентов  $a_{in}$  ( $n=1, 2, \dots, N$ );

$B_i = \|b_{i,r}\|$  — матрица-строка коэффициентов  $b_{i,r}$  ( $r=1, 2, \dots, i$ ). Отметим, что в (7.14) отсутствует начальное управление  $u_0$ , обоснованный выбор которого в условиях поставленной задачи невозможен.

Измеренная сумма величины  $x_i$  и аддитивной случайной ошибки  $h_i$  ( $y_i = x_i + h_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ )) поступает на вход управляющего устройства. Управление должно удовлетворять неравенству

$$|u_i| \leq U_{\text{доп } i} \quad (i=1, 2, \dots, I), \quad (7.15)$$

где  $U_{\text{доп } i}$  — допустимое значение абсолютной величины  $u_i$ .

Считается, что возмущения и ошибки измерения по абсолютной величине не превосходят соответственно некоторых известных величин  $V_n^{(n)}$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) и  $H_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ):

$$|v^{(n)}| \leq V^{(n)}, \quad |h_i| \leq H_i, \quad (7.16)$$

причем  $\mathbf{v} = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(N)})$ .

При формулировке задачи синтеза системы управления условно будем рассматривать процесс управления объектом (6.14) как некоторую игру между «природой», воздействующей на процесс управления выбором значений возмущений  $v^{(n)}$ , а также ошибок измерения  $h_i$ , и «конструктором», определяющим функцию управления  $u_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ) от измеренных координат объекта и предшествующих управлений  $u_r$  ( $r=1, 2, \dots, i-1$ ).

Примем, что исход игры характеризуется величиной  $|x_{I+1}|$  (т. е. модулем значения выходной координаты в  $(I+1)$ -й момент времени), которую будем рассматривать как выигрыш для природы и проигрыш для конструктора.

Не вдаваясь в анализ обоснованности такого предположения (кратко об этом говорилось выше), будем считать, что в интересах природы увеличить выигрыш  $|x_{I+1}|$ . Естественно, с другой стороны, что в интересах конструктора сделать свой проигрыш  $|x_{I+1}|$  возможно меньшим. Учитывая, что каждое из управлений  $u_i$  может быть представлено в виде функции векторов  $\mathbf{v} = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(N)})$  и  $\bar{h}_i = (h_1, h_2, \dots, h_i)$ , получим из (7.14), что величина  $|x_{I+1}|$  является известным функционалом от вектора  $\mathbf{v}$  и вектора  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{v}, \bar{h}_I)$ , составленного из функции  $u_i(\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$ .

При реализации некоторого вектора управления  $\mathbf{u}$  наибольший проигрыш для конструктора получится, если природа осуществит такой выбор векторов  $\mathbf{v}^*$ ,  $\bar{h}_I^*$ , что

$$|x_{I+1}(\mathbf{u}(\mathbf{v}^*, \bar{h}_I^*), \mathbf{v}^*)| = \max_{\mathbf{v}, \bar{h}_I \in \omega_{II}} |x_{I+1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \bar{h}_I)| = R(\mathbf{u}).$$

Здесь допустимая область  $\omega_{II}$  определяется неравенствами (7.16). Желая по возможности сильнее уменьшить свой проигрыш, конструктор должен искать такое управление  $\mathbf{u}^*$ , при котором величина  $R(\mathbf{u}^*)$  является минимальной по всем возможным управлениям.

Таким образом, ставится задача определения функции  $u_i = u_i(\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$ , обеспечивающей условие

$$\min_{u_i \in \omega_k} \max_{v, h_i \in \omega_{ii}} |x_{i+1}(u, v, \bar{h}_i)| = R(u^*), \quad (7.17)$$

где  $\omega_k$  определяется неравенством (7.15).

Отличие сформулированной задачи от обычно рассматриваемых при игровом подходе к синтезу систем состоит в том, что одна из сторон в игре (природа) воздействует на процесс управления не только посредством влияния возмущений, но и искажением используемой другой стороной информации об игровой обстановке (через помехи в измерительном канале).

Введя вектор  $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x^*)$ , координаты которого определяются соотношением

$$x_i^* = x_i - B_{i-1} \bar{u}_{i(i-1)}, \quad (7.18)$$

будем использовать следующую форму записи уравнений объекта:

$$\bar{x}_{i+1}^* = A_i v \quad (i=0, 1, \dots, I), \quad (7.19)$$

где  $A_i$  — матрица, составленная из строк  $A_r$  ( $r=0, 1, \dots, i$ ).

В соответствии с принципом динамического программирования будем определять оптимальное управление  $u_i^*$  в дискретный момент времени  $I$ . Представим для этого критерий оптимальности (7.7) в виде

$$R(u_i^*) = \min_{u_i \in \omega_k} \max_{v, \bar{h}_i \in \omega_{ii}} \left| \left( A_i v + \sum_{r=1}^{I-1} b_{Ir} u_r + b_{II} u_i \right) \right|. \quad (7.20)$$

Рассмотрим вначале случай, когда отсутствуют ограничения (7.15) на управления. Величина  $u_i$  тогда представляет собой линейную функцию измеренных координат  $\bar{y}_I$  и предшествующих управлений  $\bar{u}_{i-1}$ , которая с учетом критерия (7.20), а также уравнения (7.19) может быть представлена в виде

$$u_i^* = -\frac{1}{b_{II}} \left( G_I \bar{y}_i + \sum_{r=1}^{I-1} b_{Ir} u_r \right), \quad (7.21)$$

где  $G_I = \|g_{Ir}\|$  — матрица-строка искоемых коэффициентов оптимального управления  $u_i^*$ ;  $\bar{y}_I^*$  — вектор, составленный из измеренных значений  $y_i^* = x_i^* + h_i$  величин  $x_i^*$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ).

С учетом (7.21) критерий оптимальности запишем следующим образом:

$$R(u_i^*) = \min_{G_I} \max_{v, \bar{h}_i \in \omega_{ii}} |(A_i v - G_I \bar{y}_i^*)|. \quad (7.22)$$

Любые сочетания по  $N$  уравнений из числа  $I+1$  уравнений (7.19) составляют равносильные системы линейных уравнений.

имеющие одно и то же решение относительно вектора  $\mathbf{v}$ . Поэтому можно составить линейные комбинации из этих уравнений

$$\Theta^l A_{I-1} \mathbf{v} = \Theta^{(l)} \bar{x}_I^*, \quad (7.23)$$

где  $\Theta^l = \|\|\vartheta_{nl}^{(l)}\|\|$  — неособенная матрица произвольных коэффициентов  $\vartheta_{nl}^{(l)} (n=1, 2, \dots, N; l=1, 2, \dots, l)$ .

Решение системы уравнений (7.23)

$$\mathbf{v} = (\Theta^l A_{I-1})^{-1} \Theta^{(l)} \bar{x}_I^*$$

не зависит от выбора коэффициентов  $\vartheta_{nl}^{(l)}$ .

Для любой матрицы  $G_I$  возможно подобрать такую матрицу  $\Theta^{(l)}$  размера  $N \times I$  и диагональную матрицу  $\Delta^{(l)} = \|\|\delta_n^{(l)}\|\|$  порядка  $N$ , чтобы соблюдалось равенство

$$G_I = A_I \Delta^{(l)} (\Theta^{(l)} A_{I-1})^{-1} \Theta^{(l)}. \quad (7.24)$$

В результате с учетом соотношения  $y_i^* = \bar{x}_i^* + \bar{h}_i$  условие (7.22) может быть представлено в виде

$$R(u_I^*) = \min_{\Delta^{(l)}, \Theta^{(l)}} \max_{\mathbf{v}, \bar{h}_I \in \omega_{II}} |A_I [\tilde{\Delta}^{(l)} \mathbf{v} - \Delta^{(l)} (\Theta^{(l)} A_{I-1})^{-1} \Theta^{(l)} \bar{h}_I]|. \quad (7.25)$$

Здесь  $\tilde{\Delta}^{(l)}$  — диагональная матрица, ненулевые элементы которой равны  $1 - \delta_n^{(l)}$ .

Максимум критерия  $|x_{I+1}|$  по всем возможным величинам возмущений и помех достигается, если величины  $v^{(n)} (n=1, 2, \dots, N)$  и  $h_i (i=1, 2, \dots, I)$  равны по абсолютной величине их предельно допустимым значениям  $V^{(n)}$  и  $H_i$  соответственно, а знак совпадает со знаком коэффициентов, с которыми эти величины входят в (7.25). Таким образом, для определения оптимального управления  $u_I^*$  получаем условие

$$R(u_I^*) = \min_{\Delta^{(l)}, \Theta^{(l)}} (|\Xi_I| V + |G_I| \bar{H}_I), \quad (7.26)$$

где  $\Xi_I = \|\|\xi_{In}\|\| = A_I \tilde{\Delta}^{(l)}$  — матрица-строка коэффициентов

$$\xi_{In} = a_{In} (1 - \delta_{nn}^{(l)}) \quad (n=1, 2, \dots, N); G_I$$

определяется здесь соотношением (7.24), а вертикальные черточки, в которые заключаются матрицы, означают, что все элементы матрицы берутся по абсолютной величине;  $V$  — вектор, составленный из предельных значений возмущений.

В рассматриваемом случае отсутствия ограничений на управление величина  $R(u_I^*)$  не зависит от управлений, предшествующих последнему, и поэтому определение  $u_i^* (i=1, 2, \dots, I-1)$  может быть проведено исходя из других условий, формулируемых, например, в виде дополнительного критерия оптимальности.

Отметим, что при отсутствии ограничений на величины возмущений  $v^{(n)}$  (т. е. при  $V^{(n)} \rightarrow \infty$ ) величины коэффициентов  $\delta_{nn}^{(l)}$  долж-

ны полагаться равными единице. Действительно, как следует из рассмотрения (7.26), величина  $R(u_I^*)$  при любых ненулевых значениях коэффициентов  $\xi_{In}$  оказывается неограниченной. Условие  $\delta_{nn}^{(I)} = 1$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) означает, что при реализации нулевых ошибок измерения ( $\bar{h}_I = 0$ ) минимаксно-оптимальный алгоритм управления обеспечивает точное равенство нулю величины  $x_{I+1}$ .

В случае, когда на управление положено ограничение (7.15), оптимальное управление в момент  $I$  принимает вид

$$u_I^* = \begin{cases} u_I, & \text{если } |u_I| \leq U_{\text{доп}I}, \\ U_{\text{доп}I} \text{sign } u_I, & \text{если } |u_I| > U_{\text{доп}I}, \end{cases}$$

где  $u_I$  — линейная функция измеренных в предшествующие моменты времени координат и предшествующих управлений, коэффициенты которой определяются при помощи матриц  $\Delta^{(I)}$ ,  $\Theta^{(I)}$ , полученных из условия (7.26).

Определение предшествующих управлений  $u_i^*$  ( $i=1, 2, \dots, I-1$ ) может быть здесь проведено в одном из двух вариантов.

В первом варианте полагается, что величина  $U_{\text{доп}i}$  является известной в моменты времени  $j=1, 2, \dots, i-1$  и принимающей любое значение в диапазоне  $(0, U)$ . Такой вариант имеет место, например, при оптимизации одной из взаимосвязанных систем с общими управляющими органами. В этом же варианте целесообразно определять управление и в том случае, когда значение  $U_{\text{доп}i}$  априори известно, но к качеству управления не предъявляется никаких дополнительных требований, помимо оговариваемых критерием  $R(u)$ .

При выборе управления  $u_i^*$  ( $i=1, 2, \dots, I-1$ ) наиболее тяжелые для конструктора условия будущих управлений складываются при  $U_{\text{доп}s} = 0$  ( $s=i+1, i+2, \dots, I$ ). С учетом ранее приведенных соотношений оптимальная функция управления определяется следующим образом:

$$u_i^* = \begin{cases} u_i & \text{если } |u_i| \leq U_{\text{доп}i}, \\ U_{\text{доп}i} \text{sign } u_i, & \text{если } |u_i| > U_{\text{доп}i}. \end{cases} \quad (7.27)$$

Здесь

$$u_i = -\frac{1}{b_{Ii}} \left( G_i \bar{y}_i + \sum_{r=1}^{i-1} b_{Ir} u_r \right), \quad (7.28)$$

а коэффициенты  $G_i$  определяются из условий

$$G_i = A_I \Delta^{(i)} (\Theta^{(i)} A_{i-1})^{-1} \Theta^{(i)}; \quad (7.29)$$

$$R(u_i^*) = \min_{\Delta^{(i)}, \Theta^{(i)}} (\bar{\Xi}_i | V + |G_i | \bar{H}_i); \quad \bar{\Xi}_i = A_I \tilde{\Delta}^{(i)}.$$

Во втором варианте величины  $U_{\text{доп}i}$  считаются известными в моменты  $s=1, 2, \dots, i$ ; кроме того, задается дополнительный критерий оптимальности. В этом варианте может быть поставлена и (при некоторых, оговоренных ниже, условиях) решена задача определе-

ния функции управления, обеспечивающей условный минимум дополнительного критерия при условии, что достигается минимум максимальной абсолютной величины координаты  $x_{I+1}$ .

Для выполнения этого условия, т. е. условия (7.17), достаточно, чтобы последнее управление определялось соотношениями (7.27) — (7.29) при  $i=I$ , а предшествующие управления лежали в некотором диапазоне, гарантирующем полную реализацию последнего управления  $u_I$ :

$$M_i^* + \sum_{r=1}^{i-1} b_{Ir} u_r - \sum_{r=i+1}^I |b_{Ir}| U_{\text{доп } r} \leq b_{Ii} u_i \leq m_i^* + \sum_{r=1}^{i-1} b_{Ir} u_r + \sum_{r=i+1}^I |b_{Ir}| U_{\text{доп } r} \quad (i=1, 2, \dots, I-1). \quad (7.30)$$

Здесь  $M_i^*$ ,  $m_i^*$  — соответствующие реализованной предыстории ( $\bar{y}_i$ ,  $\bar{u}_{i-1}$ ) процесса управления максимальное и минимальное отклонения управляемой координаты в момент времени  $I+1$ , обусловленные действием возмущения  $v$ . Величины  $M_i^*$ ,  $m_i^*$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} M_i^* &= G_i \bar{y}_i^* + |G_i| \bar{H}_i; \\ m_i^* &= G_i \bar{y}_i^* - |G_i| H_i, \end{aligned} \quad (7.31)$$

где матрицы-строки  $G_i$  определяются соотношениями (7.29).

Функции управления в дискретные моменты  $i=1, 2, \dots, I-1$  определяются из условия минимума заданного дополнительного критерия при наложении на управления ограничений (7.30).

Таким образом, решение задачи синтеза алгоритма управления во втором варианте возможно при таких значениях величин  $U_{\text{доп } i}$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ), при которых выполняются неравенства (7.30) для любых сочетаний возмущений и ошибок измерений, стесненных условиями (7.16).

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим простейший пример: на объект управления, представляющий собой интегрирующее звено, действует одно возмущение  $v$ , а выходная координата измеряется через равные промежутки времени  $\Delta T$ . Уравнение (7.14) в этом примере имеет вид

$$x_{i+1} = (i+1) \Delta T v + \Delta T \sum_{r=1}^i u_r \quad (i=0, 1, \dots, I). \quad (7.32)$$

Измеренное в моменты времени  $i\Delta T$  с аддитивной ошибкой  $h_i$  значение выходной координаты  $y_i$  поступает на вход управляющего устройства, формирующего управление  $u_i$ , ограниченное по модулю величиной  $U_{\text{доп } i}$ . Ограничиваются также и абсолютные величины ошибок измерения — величиной  $H_i = H$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ). Требуется определить алгоритм управления, обеспечивающий выполнение условия (7.17).

Поскольку возмущение  $v$  является скаляром, то матрица коэффициентов  $\Theta$  содержит только одну строку, а матрицы  $A_i$  и  $\Delta^{(i)}$  состоят из одного элемента, причем, как следует из (7.32),  $A_i = a_i = (i+1)\Delta T$ . Ограничения на величину  $v$  не наложено; следовательно, в соответствии с изложенным  $\Delta^{(i)} = \delta_{11}^{(i)} = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ). В соответствии с (7.29) коэффициенты функции управления в момент  $i$  определяются из условий

$$g_{il} = (I+1)\vartheta_{1l}^{(i)} \left/ \sum_{j=1}^i j\vartheta_{1j}^{(i)} \right. \quad (l = 1, 2, \dots, i); \quad (7.33)$$

$$R(u_i^*) = \min_{\vartheta_{1l}^{(i)} (l=1, 2, \dots, i)} \left[ (I+1)H \sum_{l=1}^i |\vartheta_{1l}^{(i)}| \left/ \left| \sum_{l=1}^i l\vartheta_{1l}^{(i)} \right| \right. \right] \quad (i = 1, 2, \dots, I). \quad (7.34)$$

Условие (7.34) достигается при  $\vartheta_{1l}^{(i)} = 0$  ( $l = 1, 2, \dots, i-1$ ) и  $\vartheta_{1i}^{(i)} \neq 0$ . Это означает, что в (7.33)  $g_{il} = 0$  ( $l = 1, 2, \dots, i-1$ ) и  $g_{ii} = (I+1)/i$ , а искомая оптимальная функция управления имеет вид (7.27), где

$$u_i = -\frac{1}{i\Delta T} \left[ (I+1)y_i - (I+1-i)\Delta T \sum_{r=1}^{i-1} u_r \right] \quad (i = 1, 2, \dots, I).$$

В рассмотренном примере выявляется довольно типичная (и уже отмечавшаяся в разд. 7.4) для большинства минимаксных задач терминального управления особенность: несмотря на то, что при синтезе системы не накладывалось ограничений на структуру алгоритма управления, минимаксно-оптимальное управление формируется с учетом только части информации о предыстории процесса управления. В этом можно усмотреть еще один довод в пользу привлечения ограничений по структуре (см. разд. 3.1) при статистическом синтезе алгоритмов управления: введение таких ограничений позволяет как бы снижать чувствительность системы по отношению к неучитываемым при статистическом синтезе случайным факторам  $v^\circ$  и  $h_i^\circ$ .

## Глава 8

# СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОМ МНОГОЦЕЛЕВОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Изложенные в предыдущих разделах методы и приемы синтеза алгоритмов управления применимы, главным образом, к объектам одноцелевого назначения, предназначенным для выполнения одной полетной задачи при фиксированном векторе уставки  $\varepsilon$  (см. разд. 2.5).

Рассматривая космический объект многоцелевого назначения, отметим, что в одних случаях этот объект представляет собой космический летательный аппарат многоразового использования, назначение которого меняется от полета к полету, в других — это один из серии однотипных космических аппаратов одноразового использования, выполняющих различные программы полета с использованием унифицированной системы управления.

Изменение цели (задачи или программы) полета космического объекта, характеризующееся вектором уставок  $\epsilon$ , приводит к изменению статистических характеристик возмущений и помех, а также к изменению параметров объекта управления.

Можно указать следующие способы построения системы управления объектом многоцелевого назначения:

1. Способ, предусматривающий задание закона распределения вероятностей назначения целей полета (распределения вероятностей вектора  $\epsilon$ ) и проведение статистического синтеза системы с учетом этого закона. Однако этот способ нельзя признать полностью отвечающим рассматриваемой задаче построения системы, так как цель полета (вектор уставок  $\epsilon$ ), хотя однозначно не задана при проектировании, непосредственно перед началом работы терминальной системы становится известной. Неиспользование же этой информации о цели полета приводит к снижению качества управления.

2. Способ, предусматривающий определение на борту космического объекта при помощи бортовой ЦВМ статистически оптимального алгоритма управления с учетом изменившихся исходных данных.

Этот способ требует выполнения в бортовых условиях большого объема вычислений и приводит к ухудшению надежностных и эксплуатационных характеристик системы.

3. Способ, заключающийся в проведении перед каждым запуском объекта соответствующих исследований, направленных на уточнение алгоритма управления с учетом принятой программы полета.

Такой способ может найти и находит применение при проведении уникальных космических экспериментов, если программа полета для эксперимента определена с большой степенью однозначности.

4. Способ, предусматривающий использование субоптимальных алгоритмов управления, построенных с учетом дополнительных требований по упрощению перенастройки алгоритма при изменении вектора уставок  $\epsilon$ . Этот способ представляется в настоящее время наиболее рациональным в инженерном отношении и рассматривается в данной главе.

Проведем более детальное обсуждение постановки задачи синтеза алгоритма управления многоцелевым объектом.

## 8.1. Формулировка задачи синтеза алгоритмов терминального управления объектами многоцелевого назначения

Рассматривается объект управления, описываемый системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, T, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad T \in [0, T_{I+1}(\boldsymbol{\varepsilon})], \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad (8.1)$$

где  $\mathbf{x}$  — значение  $K$ -мерного вектора координат объекта в момент «времени»  $T$ ;  $\mathbf{u}$  — значение вектора управления;  $\mathbf{v}$  —  $N$ -мерный вектор возмущений;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — вектор уставок, характеризующий номинальные условия работы системы при фиксированной цели полета космического объекта.

В моменты  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ) отдельные координаты объекта управления измеряются со случайными ошибками:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{x}_i + \mathbf{h}_i \quad (i = 1, 2, \dots, I). \quad (8.2)$$

Здесь  $\mathbf{h}_i$  — вектор ошибок измерения;  $\mathbf{D}^{(i)}$  — известная матрица коэффициентов.

Заданы априорные законы распределения вероятностей  $P(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $P(\mathbf{h}_i, \boldsymbol{\varepsilon})$  векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{h}_i$ .

Считаем, что при синтезе системы известна зависимость моментов времени измерения координат (и соответственно моментов реализации управляющих воздействий) от вектора уставок  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Например, можно просто считать, что эти моменты равномерно распределены на интервале  $[0, T_{I+1}(\boldsymbol{\varepsilon})]$  при неизменном общем их числе  $I$ .

Положим, что задача управления объектом состоит в том, чтобы приблизить к заданным значениям  $\mathbf{x}_{\text{зад}}^{(l)}(\boldsymbol{\varepsilon})$  первые  $L$  составляющих конечного (терминального) значения вектора  $\mathbf{x}$ , т. е. по возможности уменьшить промахи

$$\mathbf{z}^{(l)} = \mathbf{x}^{(l)}(T_{I+1}(\boldsymbol{\varepsilon})) - \mathbf{x}_{\text{зад}}^{(l)}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (l = 1, 2, \dots, L).$$

Качество управления будем характеризовать двумя показателями работы системы: точностью и «энергозатратами» управления. Примем, что статистическая точность терминального управления оценивается риском

$$R_1 = M(\mathbf{z}^2),$$

(где обозначено  $\mathbf{z}^2 = (z^{(1)2}, z^{(2)2}, \dots, z^{(L)2})$ ), а энергозатраты функций потерь

$$Y = \int_0^{T_{I+1}} \psi_T(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dT$$

(где  $\psi_T(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  — известная функция своих аргументов).

Условия задачи формально не отличаются от условий задачи многокритериального синтеза, рассмотренной в гл. 5. Однако, име-

ется существенная разница, заключающаяся в том, что уравнения объекта, вероятностные характеристики возмущений и помех и промах терминального управления зависят от вектора уставок  $\epsilon$ , который становится известным практически только перед началом процесса терминального управления. Разница эта, в частности, заключается в том, что первый из описанных в гл. 5 приемов многокритериального синтеза, приводящий к построению системы с жесткой программой, становится непригодным к практическому использованию: оптимальную по критерию  $\Upsilon$  программу невозмущенного движения в этой системе приходится пересчитывать в бортовых условиях заново при каждой смене цели управления — вектора  $\epsilon$ . А реализация второго приема многокритериального синтеза, приводящая к построению системы с гибкой программой, практически не усложняется в том смысле, что организация процесса расчета на борту значений параметров  $u_i$  оптимального по  $\Upsilon$  закона управления для заданных краевых условий (см. гл. 5) остается неизменной.

Таким образом, терминальным системам управления многоцелевых объектов адекватен принцип построения систем с гибкой программой управления. Принимая этот принцип к исполнению, будем считать, что в системе воспроизводится оптимальный (для невозмущенного движения) по критерию  $\Upsilon$  закон управления  $u(u_i, \tau)$ ,  $\tau \in [T_i, T_{i+1}]$ , с изменяемым в дискретные моменты времени  $i$  параметром  $u_i$ , который в гл. 5 условно был назван вектором управления.

Задача будет состоять в том, чтобы определить управление  $u_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) так, чтобы достигалось минимальное значение риска  $R_1$  для каждого из возможных значений вектора уставок  $\epsilon$ .

Требование простоты перенастройки алгоритма на новую цель, т. е. простоты зависимости функции управления от вектора уставок  $\epsilon$ , здесь не формализуется: предполагается, что решение задачи будет осуществляться в рамках такой субоптимальной системы, чтобы заведомо облегчалось выполнение этого требования.

## 8.2. Определение алгоритма управления в виде функции измеренных координат и уставок

Начнем с рассмотрения случая, когда алгоритм управления ищется в виде функции

$$u_i = u_i(\bar{y}_{ji}, \bar{u}_{j(i-1)}, \epsilon) \quad (j=i-p),$$

где выбором числа  $p$  устанавливается ограничение по емкости памяти управляющего устройства (см. гл. 3).

При реализации гибкой программы управления  $L$ -мерный вектор параметров  $u_i$  закона управления  $u(u_i, \tau, \epsilon)$   $\tau \in [T_i, T_{i+1}]$ , находится в результате решения краевой задачи движения объекта (8.1) с граничными условиями  $x_i$ ,

$$x_{\text{зад}}(\epsilon) = (x_{\text{зад}}^{(1)}(\epsilon), x_{\text{зад}}^{(2)}(\epsilon), \dots, x_{\text{зад}}^{(L)}(\epsilon)),$$

где  $\hat{x}_i = \hat{x}_i(i)$  — оценка вектора  $x_i = x(T_i)$  координат состояния объекта, составленная в дискретный момент времени  $i$ . Из этого следует, что во-первых, априори определена стратегия управления (см. гл. 4):  $\beta = (1, 1, \dots, 1)$ . Во-вторых, посредством интегрирования уравнений (8.1) при известной функции  $u = u(u_i, \delta, \varepsilon)$ ,  $\tau \in [T_i, T_{i+1}]$ , может быть определено уравнение  $z_i = z_{i1}(x_i, u_i, v, \varepsilon)$ , где  $z_i$  — значение вектора  $z$ , полученное в предположении, что начиная с момента времени  $i$  до терминального момента  $I+1$  вектор управления в соответствии со стратегией  $\beta$  равен  $u_i$ . Это уравнение можно использовать в линеаризованном виде

$$z_i = A^{(i)}(\varepsilon)v + B^{(i)}(\varepsilon)u_i + \Gamma^{(i)}(\varepsilon)x_i - x_{\text{зад}}(\varepsilon), \quad (8.3)$$

где  $A^{(i)}(\varepsilon)$ ,  $B^{(i)}(\varepsilon)$ ,  $\Gamma^{(i)}(\varepsilon)$  — матрицы известных коэффициентов  $a_{in}^{(i)}(\varepsilon)$ ,  $\beta_{iq}^{(i)}(\varepsilon)$ ,  $\gamma_{ik}^{(i)}(\varepsilon)$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $q = 1, 2, \dots, L$ ;  $k = 1, 2, \dots, K$ ).

Тогда, чтобы существовало управление  $u_i$ , обеспечивающее заданные значения первых  $L$  составляющих вектора  $x_{i+1}$  (равенство нулю вектора  $z_i$ ) для каждого набора векторов  $x_i, v$ , необходимо, чтобы матрица  $B^{(i)}(\varepsilon)$  была неособенной.

Наконец, в-третьих, может считаться известной функция управления

$$u_i = \chi(\hat{z}_i, \varepsilon) \quad (i=0, 1, \dots, I), \quad (8.4)$$

где  $\hat{z}_i = \hat{z}_i(\bar{y}_{ji}, \bar{u}_{j(i-1)}, \varepsilon)$  — статистическая оценка вектора  $z_i$ , составленная по результатам наблюдения процесса управления на интервале  $[j, i]$ . Для линеаризованного объекта (8.3)

$$u_i = -[B^{(i)}(\varepsilon)]^{-1} \hat{z}_i.$$

Из изложенного следует, что в терминальной системе управления с гибкой программой дополнительные трудности в перенастройке алгоритма управления на новую цель  $\varepsilon$  возникают только в части составления статистических оценок  $\hat{z}_i$ : эти оценки являются сложными функциями векторов  $\bar{y}_{ji}$ ,  $\bar{u}_{j(i-1)}$  и параметров закона  $P(x_j)$  распределения вероятностей вектора фазовых координат  $x_j$ ; в свою очередь, закон  $P(x_j)$  весьма сложным образом зависит (при известном алгоритме управления в моменты времени  $0, 1, \dots, j$ ) от параметров объекта (8.1), управления и закона распределения векторов  $v$  и  $\bar{h}_{1j}$ .

Для получения субоптимальной системы управления заменим в (8.4) оценку  $\hat{z}_i$  ее приближенным, упрощенным значением  $\tilde{z}_i$ . Число  $p$ , определяющее потребную для формирования управления емкость памяти, примем равным тому числу измерений, которое было бы минимально необходимым для вычисления вектора  $z_i$  по результатам измерений при отсутствии ошибок измерения. Число это, естественно, зависит от состава измерений, т. е. от матрицы  $D^{(i)}$  в (8.2).

При таком выборе числа  $p$  несмещенную, в смысле  $M(\tilde{z}_i) = M(z_i)$ , приближенную оценку  $\tilde{z}_i$  будем формировать по правилу

$$\tilde{z}_i = \Delta^{(i)}(\xi_i - M(z_i)) + M(z_i) \quad (i=p, p+1, \dots, l), \quad (8.5)$$

где  $\Delta^{(i)}$  — диагональная матрица порядка  $L$  коэффициентов  $\delta_i^{(i)}$ ;  $\xi_i$  — условная оценка вектора  $z_i$ , вычисляемая в предположении, что ошибки измерения на интервале  $[j, i]$  равны нулю. Вычисление  $\xi_i$  производится следующим образом. На основе линеаризованного уравнения (8.1) с использованием известных векторов  $y_s = D^{(s)}x_s$  ( $s=j, j+1, \dots, i$ ) и управлений  $u_s$  ( $s=j, j+1, \dots, i-1$ ) определяются векторы  $x_i, v$ , и затем осуществляется прогнозирование координат объекта по уравнению (8.3).

В результате оценка  $\tilde{z}_i$  оказывается линейной функцией составляющих векторов  $\bar{y}_{ji}, \bar{u}_{j(i-1)}$ . Коэффициенты этой функции, а также и координаты вектора  $M(z_i)$  обычно выражаются достаточно просто в явном виде через координаты вектора уставок  $v$ .

Матрица коэффициентов  $\Delta^{(i)}$  должна быть выбрана таким образом, чтобы обеспечивалась наилучшая в смысле минимума риска  $R_1$  конечная точность управления.

Для объекта управления, описываемого уравнением типа (8.3), условие оптимальности матрицы коэффициентов  $\Delta_i$  при квадратическом критерии качества может быть представлено в виде

$$\Delta^{(i)*} = \arg \left\{ \min_{\Delta^{(i)}} M[D_i(z_i) + (\hat{z}_i - \tilde{z}_i)^2] \right\}, \quad (8.6)$$

где оценка  $\tilde{z}_i$  определяется соотношением (8.5), а  $D_i(z_i)$  есть  $L$ -мерный вектор условных дисперсий величин  $z_i$ , соответствующих реализованной предыстории процесса управления (другими словами,  $D_i(z_i)$  есть вектор дисперсий ошибок оценивания  $z - \tilde{z}_i$ ).

Для аналитических выкладок закон распределения координат  $z_i$  будем полагать нормальным, а дисперсию  $D_i(z_i)$  — считать равной средней условной дисперсии  $D(i) = M[D_i(z_i)]$ , зависящей только от номера  $i$ . Тогда из (8.6) может быть аналитически определено оптимальное значение  $\Delta^{(i)*}$  матрицы  $\Delta^{(i)}$ .

Однако на практике более целесообразно находить оптимальные коэффициенты поисковыми методами при непосредственном вычислении условного среднего риска  $R_1(i) = M(z^2/\bar{y}_{ji}, \bar{u}_{j(i-1)})$ . Эти вычисления производятся с использованием программы расчетов на ЦВМ статистической точности управления при возможно более полном учете особенностей и нелинейностей, присущих объекту (8.1). В результате будет осуществляться в неявном виде статистическая линеаризация объекта управления, что повышает эффективность процесса синтеза по сравнению со случаем, когда проводится линеаризация (8.3) объекта в детерминированном плане.

Получаемое в конечном итоге значение матрицы  $\Delta^{(i)*}$  зависит главным образом от вероятностных характеристик возмущений и

помех. На основе определения этой матрицы для разных значений вектора  $\varepsilon$  может быть построена и воспроизведена в бортовой ЦВМ приближенная зависимость матрицы коэффициентов  $\Delta^{(i)*}$  от вектора  $\varepsilon$ .

В ряде случаев эта зависимость оказывается слабовыраженной. Объясняется это тем, что основное влияние вектора  $\varepsilon$  на терминальное управление осуществляется через изменения оценок  $\xi_i$ , которые, как уже отмечалось, зависят всего в явном виде зависят от вектора  $\varepsilon$ . В этих случаях матрица коэффициентов  $\Delta^{(i)}$  в выражении (8.5) может при изменении цели управления оставаться неизменной.

**Пример.** Рассмотрим управление сближением двух космических аппаратов. Считаем, что до начала сближения аппараты двигались по низким околоземным компланарным орбитам, близким к круговым; в процессе сближения расстояние между КА мало по сравнению с радиусами орбит. Цель полета активного КА задается скалярной величиной, представляющей собой угловую скорость  $\omega$  движения по орбите пассивного КА (т. е.  $\varepsilon = \omega$ ).

В отличие от примера 4, рассмотренного в гл. 5, будем рассматривать случай, когда терминальное управление сближением должно происходить не в режиме быстрогодействия, а в режиме экономичного расходования топлива, и, следовательно, критерий  $M(t_{I+1})$  заменяется на

$$R_2 = M(-m_{I+1}),$$

где  $m_{I+1}$  — значение массы активного КА в момент  $t_{I+1}$  окончания процесса сближения (естественно, что начальное значение массы КА в задаче оговаривается).

Для невозмущенного процесса сближения, когда считается в точности известным положение обоих КА в пространстве, а модуль тяги двигателя КА не лимитирует процесс сближения, оптимальное по расходу топлива значение вектора тяги активного КА — закон управления  $u(t)$  сближением — известно: это импульсное управление

$$u(t) = \delta(t_0, t) c, \quad (8.7)$$

где  $\delta(t_0, t) = 1$ , если  $t = t_0$  и  $\delta(t_0, t) = 0$ , если  $t \neq t_0$ . Вектор параметров  $c$  имеет физический смысл вектора корректирующей скорости, на которую должен измениться вектор скорости активного КА в момент  $t_0$  с тем, чтобы движение этого КА происходило по полуэллипсу Гомана, обеспечивая терминальное время сближения  $t_{I+1} = t_0 + \pi/\omega$  ( $t_0$  — момент времени, в который КА занимают определенное начальное положение относительно друг друга).

Управление возмущенным процессом сближения будем искать в соответствии с (8.7) в виде функции

$$u(t) = \delta(t_i, t) u_i \quad (i=0, 1, \dots, I), \quad (8.8)$$

где  $u_i$  — вектор корректирующей скорости в момент времени  $t_i$ .

Двумерный вектор управления  $u_i$  ( $i=0, 1, \dots, l$ ) должен быть сформирован по результатам измерений  $y_s = x_s + h_s$  ( $s=0, 1, \dots, i$ ) четырехмерного вектора  $x_s = [x^{(1)}(t_s), x^{(2)}(t_s), x^{(3)}(t_s), x^{(4)}(t_s)]$  относительного положения КА в плоскости орбит так, чтобы обеспечивалось минимальное значение терминального критерия

$$R_1 = [M(z^{(1)2}), M(z^{(2)2})],$$

где  $z^{(1)} = x^{(1)}(t_{I+1})$ ,  $z^{(2)} = x^{(2)}(t_{I+1})$ ;  $x^{(1)}(t)$ ,  $x^{(2)}(t)$  характеризуют относительную дальность КА в момент времени  $t$ .

Исходя из линеаризованных уравнений относительного движения КА во вращающейся орбитальной системе координат, связанной с пассивным КА:

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= x^{(3)} + u^{(1)}(t), & \frac{dx^{(2)}}{dt} &= x^{(4)} + u^{(2)}(t), \\ \frac{dx^{(3)}}{dt} &= 2\omega x^{(4)}, & \frac{dx^{(4)}}{dt} &= -2\omega x^{(3)} + 3\omega^2 x^{(2)}, \end{aligned}$$

$$u(t) = (u^{(1)}(t), u^{(2)}(t)),$$

получим на основе (8.8) и (8.5) при  $p=1$ , что вектор управления состоит из составляющих

$$u_i^{(1)} = \frac{\delta_1^{(i)} \zeta_i^{(1)} \sin \omega (t_{I+1} - t_i) - 2\delta_2^{(i)} \zeta_i^{(2)} [1 - \cos \omega (t_{I+1} - t_i)]}{3(t_{I+1} - t_i) \sin \omega (t_{I+1} - t_i) - \frac{8}{\pi} [1 - \cos \omega (t_{I+1} - t_i)]}; \quad (8.9)$$

$$u_i^{(2)} =$$

$$= \frac{2\delta_1^{(i)} \zeta_i^{(1)} [1 - \cos \omega (t_{I+1} - t_i)] + \delta_2^{(i)} \zeta_i^{(2)} [4 \sin \omega (t_{I+1} - t_i) - 3\omega (t_{I+1} - t_i)]}{3(t_{I+1} - t_i) \sin \omega (t_{I+1} - t_i) - \frac{8}{\pi} [1 - \cos \omega (t_{I+1} - t_i)]},$$

где  $t_{I+1} = t_0 + \pi/\omega$ ; вектор  $\zeta_i = (\zeta_i^{(1)}, \zeta_i^{(2)})$  условной оценки промаха рассчитывается по формулам

$$\begin{aligned} \zeta_i^{(1)} &= y_i^{(1)} + 6[\omega(t_{I+1} - t_i) - \sin \omega(t_{I+1} - t_i)] y_i^{(2)} + \\ &+ \left[ \frac{4}{\omega} \sin \omega(t_{I+1} - t_i) - 3(t_{I+1} - t_i) \right] y_i^{(3)} + \frac{2}{\omega} [1 - \cos \omega(t_{I+1} - t_i)] y_i^{(4)}, \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \zeta_i^{(2)} &= [4 - 3 \cos \omega(t_{I+1} - t_i)] y_i^{(2)} - \frac{2}{\omega} [1 - \cos \omega(t_{I+1} - t_i)] y_i^{(3)} + \\ &+ \left[ \frac{1}{\omega} \sin \omega(t_{I+1} - t_i) \right] y_i^{(4)}, \end{aligned}$$

а значения коэффициентов  $\delta_1^{(i)}$ ,  $\delta_2^{(i)}$  ( $i=0, 1, \dots, l$ ) определяются так, как описано в данном разделе.

Очевидно, что алгоритм управления сближением, определенный соотношениями (8.9) и (8.10), при изменении параметров орбиты пассивного КА легко перенастраивается в результате задания уставки  $\varepsilon = \omega$ .

### 8.3. Определение алгоритма управления в виде функции прошлых оценок, измеренных координат и уставок

В предыдущем разделе ограничение по емкости памяти управляющего устройства осуществлялось, следуя положениям гл. 3, принудительным ограничением интервала предыстории процесса управления (интервала наблюдения), информация о котором используется при формировании управления.

В общей теории стохастического управления более известен другой способ снижения требуемой емкости памяти управляющего устройства, основанный на использовании понятия достаточных статистик (достаточных координат). Как уже отмечалось в гл. 2, стохастическое оптимальное управление находится при минимизации условного риска, соответствующего реализованной предыстории процесса управления. Для вычисления этого риска необходимо знание условной плотности вероятности  $P(\mathbf{x}_i/\mathbf{y}_{1i}, \bar{\mathbf{u}}_{0(i-1)})$ . Предположим, что существует некоторый вектор  $\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_i(\mathbf{y}_{1i}, \bar{\mathbf{u}}_{0(i-1)})$ , такой, что  $P(\mathbf{x}_i/\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{0(i-1)}) = P(\mathbf{x}_i/\boldsymbol{\tau}_i)$ . Тогда зависимость управления  $\mathbf{u}_i$  от векторов  $\mathbf{y}_{1i}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_{0(i-1)}$  может быть сведена к зависимости  $\mathbf{u}_i$  от вектора  $\boldsymbol{\tau}_i$ , который и является вектором достаточных координат.

Удобства использования достаточных координат определяются возможностью рекуррентного их вычисления, когда каждое последующее значение вектора  $\boldsymbol{\tau}_i$  определяется на основе его предшествующего значения  $\boldsymbol{\tau}_{i-1}$  и вновь поступивших данных  $\mathbf{y}_i$ ,  $\mathbf{u}_{i-1}$ .

Для линейного (или линеаризованного) объекта достаточные координаты состоят из условных математических ожиданий  $\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i(i) = \mathbf{M}(\mathbf{x}_i/\bar{\mathbf{y}}_{1i}, \bar{\mathbf{u}}_{0(i-1)})$  фазовых координат объекта (оценок координат). Один из возможных способов использования достаточных координат  $\mathbf{x}_i$  при формировании управления приводился в гл. 4.

Исходя из некоторых результатов предыдущих глав, проведем краткое сопоставление двух описанных здесь способов.

1. Использование достаточных координат при формировании управления (способ 2) не приводит к ухудшению точностных характеристик системы. В то же время ограничение объема информации о предыстории процесса управления, предусматриваемое способом 1, ведет к снижению точности управления (за исключением случая  $p=1$ ).

2. Требуемая для управления емкость оперативной памяти при реализации способа 2 однозначно определяется уравнением объекта и критерием оптимальности, т. е. не может быть произвольно выбрана. Емкость памяти при воспроизведении способа 1 зависит

от задания числа  $p$  и, следовательно, может быть выбрана так, чтобы достичь разумного компромисса в стремлениях иметь достаточно точную и вместе с тем простую систему управления.

3. Чувствительность системы к неточностям в математическом описании объекта управления (или к неопределенности априорной информации) при реализации способа 1 оказывается меньшей, чем при использовании способа 2.

Из данного сопоставления следует, что вопрос о том, какой способ снижения потребной емкости памяти предпочтительней, может быть решен только применительно к конкретным условиям.

Для линейных объектов управления в ряде случаев оказывается целесообразным применение третьего способа ограничения емкости памяти. Суть способа 3 состоит в том, что при формировании управления  $u_i$  вычисляется и запоминается также вектор оценок  $\hat{x}_i^{(Q)}$  для  $Q$  фазовых координат  $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(Q)}$  ( $Q \leq K$ ). Вектор оценок  $\hat{x}_i^{(Q)}$  используется в дальнейшем при определении управления  $u_{i+p}$ , в качестве некоторого дополнительного «измерения» координат вектора  $x_i$ . Соответственно и управление  $u_i$  является функцией вида

$$u_i = u_i(\hat{x}_{j-1}^{(Q)}, \bar{y}_{ji}, \bar{u}_{j(i-1)}) \quad (i=1, 2, \dots, I; j=i-p).$$

Очевидно, что при  $Q=0$  способ 3 по точности управления эквивалентен способу 1, при  $Q=K$  — способу 2, а при  $0 < Q < K$  он в той или иной мере сочетает свойства способов 1 и 2.

В этом и последующем разделе для упрощения записей будем рассматривать случай скалярного промаха управления  $z_i$ , когда считается, что в результате исследования невозмущенного движения системы определен вид скалярной функции управления

$$u_i = \chi_i(\hat{z}_i, \varepsilon) \quad (i=1, 2, \dots, I). \quad (8.11)$$

При этом будем полагать, без нарушения общности, что  $M(v) = 0, M(h_i) = 0$ .

Обозначим, через  $\zeta_{i1}, \kappa_{i1}$  условные значения координаты  $z_i$  и вектора  $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(Q)})$ , вычисляемые по реализованным векторам  $\bar{y}_{ji}, \bar{u}_{j(i-1)}$  и линеаризованным уравнениям объекта в предположении, что  $y_s = \mu_s = D^{(s)} x_s$  ( $s=j, j+1, \dots, i$ ). Определим такое число  $G$  первых составляющих векторов  $\mu_s$  ( $s=j, j+1, \dots, i$ ), чтобы эти составляющие в совокупности с векторами  $\hat{x}_{j-1}^{(Q)}, \bar{u}_{j(i-1)}$  позволили точно вычислить значения  $z_i, x_i^{(Q)}$ .

Обозначим через  $\zeta_{i2}, \kappa_{i2}$  условные значения координаты  $z_i$  и вектора  $x_i^{(Q)}$ , вычисляемые из линеаризованных уравнений объекта по реализованным векторам  $\bar{y}_{ji}, \bar{u}_{j(i-1)}$  и полученному ранее вектору оценок  $\hat{x}_{j-1}^{(Q)}$  в предположении, что  $y_{ji}^{(G)} = \bar{\mu}_{ji}^{(G)} = (\mu_{j1}^{(G)}, \mu_{j+1}^{(G)}, \dots, \mu_i^{(G)})$ ,  $x_{j-1}^{(Q)} = \hat{x}_{j-1}^{(Q)}$ . Приближенные оценки  $\tilde{z}_i, \tilde{x}_i^{(Q)}$  будем формировать по правилу

$$\tilde{z}_i = \alpha_i \zeta_{i1} + (1 - \alpha_i) \zeta_{i2}, \quad \tilde{x}_i^{(Q)} = \beta_i \kappa_{i1} + (1 - \beta_i) \kappa_{i2}, \quad (8.12)$$

где  $\delta_i, \vartheta_i, \alpha_i, \beta_i$  — коэффициенты. Эти приближенные оценки будем принимать вместо  $\hat{z}_i, \hat{x}_i^{(Q)}$ .

В результате оценки  $\tilde{z}_i$  и  $\tilde{x}_i^{(Q)}$  оказываются линейными функциями составляющих векторов  $\tilde{x}_{j-1}^{(Q)}, \tilde{y}_{ji}, u_{j(i-1)}$ . Параметры этих функций обычно выражаются достаточно просто в явном виде через координаты вектора уставок  $\varepsilon$ .

Коэффициенты  $\delta_i, \vartheta_i, \alpha_i, \beta_i$  должны быть выбраны таким образом, чтобы обеспечивалась наилучшая в смысле минимума терминального риска конечная точность управления. По аналогии с (8.6) можно записать условие для определения оптимальных значений этих коэффициентов:

$$(\delta_i^*, \vartheta_i^*, \alpha_i^*, \beta_i^*) = \arg \min_{\delta_i, \vartheta_i, \alpha_i, \beta_i} \{M [D_i(z_i) + (\tilde{z}_i - \tilde{z}_i)^2]\},$$

где  $\tilde{z}_i$  рассчитывается по (8.12).

Очевидно, что изложенные в данном и предыдущем разделах приемы синтеза алгоритма управления многоцелевым объектом могут быть использованы и вне рамок систем с гибкой программой. В случае, когда в постановке задачи задается только риск  $R_1$ , стратегия управления, определяющая функцию (8.4), может быть найдена при синтезе алгоритма управления с фиксированной уставкой  $\varepsilon$  на основе, например, метода, представленного в гл. 4.

Пример, иллюстрирующий применение положений данного параграфа приводится в конце следующего раздела.

#### 8.4. Определение алгоритма управления с использованием составного критерия оптимальности

Рассмотрим теперь случай, когда помимо указанных в постановке задачи двух критериев оптимальности задается третий критерий. Для конкретности изложения будем считать, как и в разд. 8.3, скалярными промах  $z_i$  и управление  $u_i$ , а дополнительный критерий оптимальности примем в виде

$$R_3 = M \left[ \sum_{i=1}^I (e_i u_i)^2 \right], \quad (8.13)$$

где  $e_i$  — заданные коэффициенты. Этим критерием в ряде практических случаев оцениваются некоторые энергетические характеристики процессов управления.

Будем считать известным весовой коэффициент  $\alpha$ , с помощью которого терминальный и дополнительный критерии оптимальности свертываются в составной критерий

$$R = R_1 + \alpha R_3, \quad (8.14)$$

заменяющий в исходной постановке задачи риск  $R_1 = M(z^2)$ . Задачу синтеза алгоритма управления удобно интерпретировать следующим образом. Оптимальное управление  $u_i$  должно быть выбрано

так, чтобы вариации управления  $u_i$  ( $i=1, 2, \dots, I$ ), приводящие к улучшению риска  $R_3$  на величину  $\delta R$ , вызывали ухудшение риска  $R_1$  на величину  $\alpha \delta R$ . Оптимальное по критерию (8.14) управление линейризованным объектом будем искать в классе функций [сравните с (8.11)]

$$u_i = p_i \chi_i(\hat{z}_i, \epsilon) \quad (i=1, 2, \dots, I), \quad (8.15)$$

где  $p_i$  — некоторый коэффициент, оптимальное значение  $p_i^*$  которого должно доставлять минимум риска  $R$ . Для линейризованного объекта функция  $\chi_i$  определяется соотношением  $u_i = -\hat{z}_i / \beta^{(i)}(\epsilon)$ , где коэффициент  $\beta^{(i)}(\epsilon)$  является скалярным аналогом матрицы  $\mathbf{B}^{(i)}(\epsilon)$  в уравнении (8.3).

Тогда условный средний риск  $R_1(i) = M(z_i / \bar{y}_{1i}, \bar{u}_{1i})$  может быть вычислен по рекуррентному соотношению

$$R_1(i) = D(i) + (1 - p_i)^2 (R_1(i-1) - D(i)) \quad (i=1, 2, \dots, I). \quad (8.16)$$

Как следует из выражения (8.16), условный средний риск  $R_1(i)$  складывается из средней условной дисперсии  $D(i)$  и не скомпенсированной управлением  $u_i$  части  $(1 - p_i)^2 D_i(\hat{z}_i)$  дисперсии  $D_i(\hat{z}_i) = R_1(i-1) - D(i)$  условного среднего  $\hat{z}_i$ . Учитывая, что  $R_1(I) = R_1$ , из (8.16) получим

$$R_1 = D(I) + (1 - p_I)^2 \{D(I-1) - D(I) + (1 - p_{I-1})^2 \{D(I-2) - D(I-1) + \dots + (1 - p_i)^2 [R_1(i-1) - D(i)] \dots\}. \quad (8.17)$$

Соответственно риск (8.13) принимает вид

$$R_3 = \sum_{i=1}^I \frac{e_i^2 p_i^2}{\beta^{(i)^2}(\epsilon)} [R_1(i-1) - D(i)]. \quad (8.18)$$

Сформируем функцию  $d_i = \frac{\partial R_1}{\partial p_i} / \frac{\partial R_3}{\partial p_i}$  и из (8.17) и (8.18) получим, что

$$d_i = \frac{1 - p_i}{p_i} \left[ \frac{\beta^{(i)^2}(\epsilon)}{e_i^2} \right]^2 \prod_{s=i+1}^I (1 - p_s) \quad (i=I, I-1, \dots, 1). \quad (8.19)$$

Формально это соотношение можно было бы, приравнявая  $d_i$  к  $\alpha$ , использовать для нахождения оптимальных коэффициентов  $p_i^*$  алгоритма управления. Однако следует иметь в виду, что оно получено для линейризованных уравнений объекта управления. Поэтому в практических приложениях целесообразно использовать не количественное соотношение, отраженное в (8.19), а его качественное содержание, заключающееся в том, что оптимальный коэффициент  $p_i^*$  алгоритма зависит от выбора последующих коэффициентов  $p_s$  ( $s=i+1, i+2, \dots, I$ ) и не зависит (точнее, зависит в меньшей степени) от коэффициентов в предшествующие моменты времени  $1, 2, \dots, i-1$ .

Как и раньше, синтез алгоритма целесообразно проводить с использованием программы расчетов на ЦВМ статистической точности управления, составленной с возможно более полным учетом возмущений и присущих системе нелинейностей. На основании проведения таких расчетов при некотором первоначальном выбранном наборе  $p_1, p_2, \dots, p_I$  для изменяемых значений коэффициента  $p_I$  могут быть выявлены зависимости рисков  $R_1$  и  $R_3$  от коэффициента  $p_I$ ; может быть определено то его значение  $p_I^*$ , при котором  $\partial R_1 / \partial p_I = -\alpha \partial R_3 / \partial p_I$ . Далее для изменяемого  $p_{I-1}$  при  $p_I = p_I^*$  проводятся соответствующие расчеты на ЦВМ, выявляются зависимости рисков от коэффициентов  $p_{I-1}$  и т. д. до тех пор, пока не будут определены оптимальные значения всех коэффициентов алгоритма управления.

Очевидно, что эта процедура синтеза позволяет легко учесть многоцелевой характер объекта управления, для чего при расчете процессов управления следует заменять оценку  $\hat{z}_i$  аппроксимированным по (8.12) значением.

Очевидно также, что описанная процедура вполне может быть использована и в случае, когда критерий  $\Upsilon$  не задается. В этом случае, как отмечалось в разд. 8.3, стратегия и функция управления находятся для фиксированного вектора  $\epsilon$  на основе изложенных в предыдущих главах методов синтеза.

**Пример.** Для иллюстрации представленной в разд. 8.3, 8.4 процедуры получения алгоритма управления объектом многоцелевого назначения рассмотрим задачу управления боковым (в орбитальной системе координат) движением активного КА в процессе сближения двух космических аппаратов. В отличие от предыдущего примера полагаем, что КА до начала сближения двигались по некомпланарным орбитам; орбиты — близкие к круговым, разность их высот и расстояние между КА малы по сравнению с радиусами орбит.

Требуется к некоторому заданному моменту времени  $t_{I+1}$  обеспечить полет обоих КА в одной плоскости. При этом риск  $\Upsilon$  или  $R_2$  в постановку задачи в явном виде не вводится, но зато предполагается, что заданное время бокового сближения  $t_{I+1} - t_1$  ( $t_1$  — момент начала бокового сближения) заведомо меньше времени  $\pi/\omega$  ( $\omega$  — угловая орбитальная скорость движения пассивного КА).

Вектор уставок, характеризующий цель полета, здесь двумерный:  $\epsilon = (t_{I+1}, \omega)$ . Относительное боковое движение КА в орбитальной вращающейся системе координат может быть представлено в конечно-разностной форме:

$$x_i^{(1)} = x_{i-1}^{(1)} \cos \omega(t_i - t_{i-1}) + \frac{x_{i-1}^{(2)} + u_{i-1}}{\omega} \sin \omega(t_i - t_{i-1}), \quad (8.20)$$

$$x_i^{(2)} = -\omega x_{i-1}^{(1)} \sin \omega(t_i - t_{i-1}) + (x_{i-1}^{(2)} + u_{i-1}) \cos \omega(t_i - t_{i-1}),$$

где  $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}$  — боковое уклонение и боковая составляющая скорости относительного движения двух КА в момент времени  $t_i$ ;  $u_{i-1}$  — боковая составляющая корректирующей скорости, сообщаемой ак-

тивному КА в момент времени  $t_{i-1}$  (принимается, что скорость движения КА при реализации управления  $u_i$  меняется скачком).

Измерения координат  $x_i^{(1)}$ ,  $x_i^{(2)}$  проводятся в соответствии с (8.2), причем матрица  $D^{(i)}$  — единичная, второго порядка.

Полагая  $x_{\text{зад}}^{(1)} = 0$ , точность управления в каждом процессе будем характеризовать координатой  $z = x_{I+1}^{(1)}$ , по совокупности процессов управления — риском  $R_1 = M(z^2)$ .

Дополнительные требования к управлению, обусловленные стремлением к экономии суммарного расхода топлива, формализуются риском (8.13), где коэффициенты  $e_i$  определены через удельную тягу двигателя и текущую массу активного КА.

В качестве составного критерия, по которому будем оценивать качество управления, принимается (8.14).

Полагая  $p=1$ ,  $Q=1$ ,  $G=1$ ,  $\delta_i=1$ , получим следующие выражения для приближенных оценок (8.12):

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i = & \alpha_i y_i^{(1)} \cos \omega(t_{I+1} - t_i) + \frac{y_i^{(2)}}{\omega} [(1 - \alpha_i) \operatorname{tg} \omega(t_i - t_{i-1}) \cos \omega(t_{I+1} - t_i) + \\ & + \sin \omega(t_{I+1} - t_i)] + (1 - \alpha_i) \tilde{x}_{i-1}^{(1)} \frac{\cos \omega(t_{I+1} - t_i)}{\cos \omega(t_i - t_{i-1})}, \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\tilde{x}_i^{(1)} = \vartheta_i \left\{ \beta_i y_i^{(1)} + (1 - \beta_i) \left[ \frac{y_i^{(2)}}{\omega} \operatorname{tg} \omega(t_i - t_{i-1}) + \tilde{x}_{i-1}^{(1)} \frac{1}{\cos \omega(t_i - t_{i-1})} \right] \right\}$$

$$(i=2, 3, \dots, I), \quad \tilde{x}_1^{(1)} = \vartheta_1 y_1^{(1)}.$$

Соответственно субоптимальное управление  $u_i^*$  объектом (8.20) имеет вид

$$u_i^* = - \frac{p_i^* \omega \tilde{z}_i}{\sin \omega(t_{I+1} - t_i)}. \quad (8.22)$$

Оптимальные значения коэффициентов  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\vartheta_i$ ,  $p_i$  выбираются при минимизации риска (8.14), вычисляемого на ЦВМ с использованием уравнений, детально описывающих движение КА в поле тяготения планеты. Оптимизация производится в соответствии с изложенной выше процедурой.

Наконец, отметим, что алгоритм управления (8.21), (8.22) легко перенастраивается при изменении вектора уставок  $\varepsilon = (t_{I+1}, \omega)$ .

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ КВАНТОВАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В данной главе будем рассматривать задачу оптимизации последовательности интервалов квантования  $\Delta T_i$  импульсной терминальной системы управления.

Выбор оптимальной (или близкой к ней) последовательности интервалов  $\Delta T_i$  представляет собой важный этап проектирования терминальной системы и в ряде случаев оказывает существенное влияние на качество управления. Пример зависимости погрешности  $R$  управления от числа  $I$  интервалов квантования в терминальной системе показан на рис. 19 ( $I$  — при равномерной последовательности; 2 — при оптимальной последовательности интервалов квантования).

Потребность в такой оптимизации возникла впервые при проведении коррекции траекторий полета космических аппаратов: наличие случайных ошибок определения параметров орбиты в условиях падающей с течением времени эффективности коррекции приводит к тому, что если коррекция производится слишком поздно, то может потребоваться большой корректирующий импульс и значительное количество топлива на борту аппарата; излишне ранняя коррекция, более экономичная по энергетике, может привести к недостаточной точности управления и к необходимости повторного выполнения коррекции.

Оптимизация последовательности интервалов квантования здесь выступала как средство решения многокритериальной задачи терминального управления — определялось число и распределение во времени импульсов коррекции, обеспечивающие минимизацию расходуемого топлива при условии, что терминальный риск, статистически характеризующий конечную точность коррекций, не превышает заданного значения (либо достигается минимизация этого риска при ограниченном запасе топлива). Развитие применительно к такой постановке задачи методы [1] предусматривали получение оптимальных моментов времени проведения коррекций в функции времени полета, не зависящих от результатов измерений, либо [27] в функции результатов проведенных измерений.

В других постановках многокритериальной задачи каждому измере-

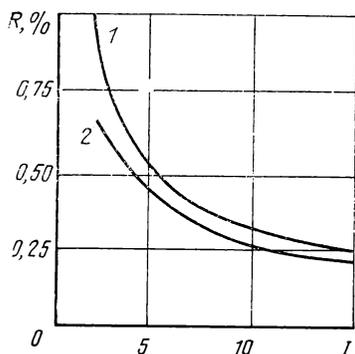


Рис. 19

нию, например, присваивалась некоторая стоимость, суммируемая с терминальным риском и определялась последовательность интервалов квантования, оптимальная в смысле этого суммарного критерия [21].

Задачу оптимизации последовательности интервалов квантования здесь будем решать безотносительно к проблеме многокритериальности так, как это было предусмотрено общей постановкой задачи терминального управления, данной в гл. 2; определяем программу изменения (в дискретном времени) интервалов квантования  $\Delta T_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) и общее число  $I$  этих интервалов, при которых достигается минимальное значение терминального риска  $R$ . (Естественно, что алгоритм управления при этом считается заданным или выбранным в соответствии с одним из описанных выше методов).

Эту задачу можно считать распадающейся на две: первая — оптимизация  $\Delta T_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) при заданном числе  $I$ , вторая — выбор числа  $I$ , при котором либо достигается минимальное значение \* риска  $R$ , либо градиент функции  $R(I)$  становится настолько малым, что дальнейшее увеличение числа  $I$  становится неэффективным.

## 9.1. Постановка задачи

Рассмотрим импульсную систему управления, описываемую совокупностью уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= F_i(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}, T_i) \quad (i=1, 2, \dots, I+1); \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i) \quad (i=1, 2, \dots, I); \\ \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}_i(\bar{\mathbf{y}}_{ji}, \bar{\mathbf{u}}_{j(i-1)}) \quad (i=0, 1, \dots, I; j=i-p). \end{aligned}$$

Из этой совокупности, очевидно, могут быть получены конечно-разностные уравнения

$$\begin{aligned} \Delta x_i^{(k)} &= \Phi_{ki}(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(K)}; i, V_1, V_2, \dots, V_N; \Delta T_i) \\ & \quad (k=1, 2, \dots, K; i=0, 1, \dots, I). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Здесь  $\Delta x_i^{(k)} = x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}$  — приращение координаты системы в дискретный момент времени  $i$ ;  $V_1, V_2, \dots, V_N$  — случайные величины, характеризующие случайные возмущения  $\mathbf{v}$ , действующие на объект, и ошибки измерения  $\mathbf{h}_i$  в системе управления;  $\Delta T_i = T_{i+1} - T_i$  — интервал квантования. Символ  $i$ , стоящий перед набором возмущений  $V_1, V_2, \dots, V_N$ , означает, что некоторые из случайных факторов  $V_1, V_2, \dots, V_N$  могут действовать, только начиная с момента времени  $i$ .

В дальнейшем считается, что случайные величины  $V_1, V_2, \dots, V_N$  приведены к канонической системе несвязных случайных величин,

---

\* Возможность существования минимума функции  $R(I)$  определяется главным образом тем обстоятельством, что при уменьшении величин  $\Delta T_i$  (с увеличением  $I$ ) возрастает погрешность терминального управления, обусловленная отличием модели объекта, используемой при формировании управления, от реального объекта управления.

число  $N$  которых конечно; предполагается, что центральные моменты нечетных порядков этих величин равны нулю.

Функции  $\Phi_{k_i}$  могут быть неаналитическими. В данной главе рассматриваются системы с нелинейностями, имеющими только симметричные относительно начала координат характеристики.

Интервалы  $\Delta T_i$  должны удовлетворять неравенству

$$\Delta T_i^{\min} \leq \Delta T_i \leq \Delta T_i^{\max} \quad (i=0, 1, \dots, I), \quad (9.2)$$

где  $\Delta T_i^{\min}$ ,  $\Delta T_i^{\max}$  — заданные минимально и максимально допустимые значения интервала  $\Delta T_i$ .

Кроме того, интервалы должны удовлетворять в терминальной системе очевидному условию типа «интегрального» равенства

$$\sum_{i=0}^I \Delta T_i - T_{I+1} = 0 \quad (9.3)$$

( $T_{I+1}$  — полное время работы системы).

Напомним (см. разделы 2.5 и 5.3), что величины  $\Delta T_i$ ,  $T_i$  не обязательно имеют физический смысл времени полета; и интервал  $\Delta T_i = T_{i+1} - T_i$  характеризует, в частности, разность смежных пороговых значений  $T_i$ , при достижении которых монотонно изменяющейся координатой  $T$  системы определяется дискретный момент времени  $i$  управления.

Здесь рассматривается случай, когда критерием оптимальности для выбора последовательности  $\Delta T_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) является некоторая функция от математических ожиданий  $m_{i+1}^{(k)}$  и среднеквадратических значений  $\sigma_{i+1}^{(k)}$  координат системы  $x_{i+1}^{(k)}$  в дискретный момент времени  $I+1$ :

$$R = W(m_{I+1}^{(1)}, m_{I+1}^{(2)}, \dots, m_{I+1}^{(K)}; \sigma_{I+1}^{(1)}, \sigma_{I+1}^{(2)}, \dots, \sigma_{I+1}^{(K)}). \quad (9.4)$$

## 9.2. Статистическая линеаризация многовходовых нелинейных систем

Статистическую оптимизацию  $\Delta T_i$  удобно проводить с использованием некоторых идей, положенных в основу методов статистической линеаризации. Эти методы, как известно, предусматривают замену нелинейных функций такими линейными, которые в определенном смысле статистически равноценны данным нелинейным функциям. В рассматриваемом случае, когда критерием оптимальности является функция от моментов первых двух порядков координат, в качестве условия статистической равноценности следует принять условие [15] равенства моментов первого и второго порядков нелинейной и линейной функций при данном законе распределения аргумента.

Рассмотрим многомерную нелинейную безынерционную систему, находящуюся под воздействием  $N$  возмущений  $V_1, V_2, \dots, V_N$  с нулевыми математическими ожиданиями и имеющую  $K$  выходных

координат  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(K)}$ , которые однозначно связаны с возмущениями нелинейными соотношениями

$$x^{(k)} = \varphi_k(V_1, V_2, \dots, V_N) \quad (k=1, 2, \dots, K). \quad (9.5)$$

Опишем метод статистической линеаризации, пригодный для анализа нелинейных систем с возмущениями, подчиняющимися любым симметричным законам распределения с конечными вероятностными моментами.

В методе используются некоторые особенности изложенного в гл. 11 способа формирования возмущений при анализе вероятностных характеристик нелинейных систем. Забегая несколько вперед, отметим, что суть этого способа сводится к представлению каждого из частных значений (событий — реализаций)  $\xi_{sn}$  возмущения  $V_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ), используемых при статистическом моделировании для расчета  $s$ -го процесса управления ( $s=1, 2, \dots, S$ ), конечной суммой некоторых составляющих  $\xi_{sn}^{(g)}$  ( $g=1, 2, \dots, G$ ), формируемых по правилу

$$\xi_{sn}^{(g)} = c \beta_g \alpha_{st} \sigma_{Vn} \quad (g=1, 2, \dots, G), \quad (9.6)$$

где  $c$  — некоторый постоянный коэффициент;  $\beta_g$  — коэффициент, зависящий от закона распределения вероятностей возмущения  $V_n$ ;  $\alpha_{st}$  — элемент ортогональной по столбцам матрицы  $\|\alpha_{st}\|$ , равный  $+1$  или  $-1$ ;  $t$  — номер столбца матрицы  $\|\alpha_{st}\|$ , однозначно определяемый по номерам  $n, g$ . Величины математического ожидания  $m^{(k)}$  и дисперсии  $\sigma^{(k)2}$  координаты  $x^{(k)}$  при выборе соответствующего числа  $S$  реализаций процессов управления могут быть вычислены с достаточной для практического применения точностью по формулам

$$m^{(k)} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S x_{ks} \quad (k=1, 2, \dots, K), \quad (9.7)$$

$$\sigma^{(k)2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S x_{ks}^2 - m^{(k)2} \right) \quad (k=1, 2, \dots, K),$$

где  $x_{ks} = \varphi_k(\xi_{s1}, \xi_{s2}, \dots, \xi_{sN})$ .

Обозначим через  $\xi_c$  всю группу систематических возмущений, действующих на систему. Математические ожидания  $m_{ng}^{(k)}$  координаты  $x^{(k)}$  для случая, когда некоторая  $g$ -я составляющая возмущения  $\xi_{sn}$  рассматривается как систематическая, а все остальные составляющие возмущений — как случайные (величина  $\xi_c$  при этом условно считается подчиняющейся биномиальному закону), могут быть вычислены следующим образом:

$$m_{ng}^{(k)} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S x_{ks} \text{sign} \xi_{sn}^{(g)}. \quad (9.8)$$

Введем обозначение

$$r_{kn} = \left( \sum_{g=1}^G m_{ng}^{(k)2} \left/ \sum_{g=1}^G \xi_{sn}^{(g)2} \right. \right)^{1/2} \quad (9.9)$$

$$(n = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, K)$$

и предположим сначала, что число  $S = GN + 1$ . Последнее означает, что матрица  $\|a_{st}\|$  является квадратной, первый столбец матрицы, состоящий из элементов, равных  $+1$ , не используется; следующие  $GN$  столбцов используются при формировании  $GN$  составляющих  $\xi_{sn}^{(g)}$  ( $n = 1, 2, \dots, N; g = 1, 2, \dots, G$ ). С учетом (9.6) — (9.9) составим равенство

$$\sum_{n=1}^N r_{kn}^2 c^2 V_n = \sum_{n=1}^N \frac{\sum_{g=1}^G \left( \sum_{s=1}^S x_{ks} \text{sign} \xi_{sn}^{(g)} \right)^2}{c^2 S^2 \sum_{g=1}^G \beta_g^2}. \quad (9.10)$$

Имея в виду (см. гл. 11), что  $\sum_{g=1}^G \beta_g^{(2)} = 1$ , перепишем (9.10) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N r_{kn}^2 c^2 V_n &= \frac{1}{c^2 S^2} \sum_{n=1}^N \sum_{g=1}^G \sum_{s=1}^S x_{ks}^2 + \frac{1}{c^2 S^2} \sum_{s_1, s_2} 2x_{ks_1} x_{ks_2} \times \\ &\times \left( \sum_{n=1}^N \sum_{g=1}^G \text{sign} \xi_{s_1 n}^{(g)} \xi_{s_2 n}^{(g)} \right) \quad (s_1 \neq s_2). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Величина  $\sum_{s=1}^S x_{ks}^2$  не зависит от номеров  $n, g$  и поэтому

$$\frac{1}{c^2 S^2} \sum_{n=1}^N \sum_{g=1}^G \sum_{s=1}^S x_{ks}^2 = \frac{GN}{c^2 S^2} \sum_{s=1}^S x_{ks}^2.$$

Заметим, что первое выражение в (9.7) может быть представлено в виде

$$m^{(k)} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S x_{ks} a_{s1} \quad (k = 1, 2, \dots, K),$$

и прибавим к правой части (9.11) тождественно равную нулю величину

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} (m^{(k)2} - m^{(k)2}) &= \frac{1}{c^2 S^2} \sum_{s=1}^S x_{ks}^2 - \\ - \frac{1}{c^2 S^2} \sum_{s_1 s_2} 2x_{ks_1} x_{ks_2} a_{s_1 1} a_{s_2 1} &- \frac{1}{c^2} m^{(k)2} \quad (s_1 \neq s_2). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Учитывая сделанное выше замечание о порядке использования столбцов матрицы  $\|\alpha_{st}\|$ , запишем

$$\sum_{n=1}^N \sum_{g=1}^G \text{sign } \xi_{s_1 n}^{(g)} \xi_{s_2 n}^{(g)} = \sum_{t=2}^{GN+1} \alpha_{s_1 t} \alpha_{s_2 t}. \quad (9.13)$$

Тогда из (9.11) — (9.13) получим

$$\sum_{n=1}^N r_{kn}^2 \sigma_{Vn}^2 = \frac{GN+1}{c^2 S^2} \sum_{s=1}^S x_{ks}^2 + \frac{1}{c^2 S^2} \sum_{s_1 s_2} 2x_{ks_1} x_{ks_2} \sum_{t=1}^{GN+1} \alpha_{s_1 t} \alpha_{s_2 t} - \frac{1}{c^2} m^{(k)^2} \quad (s_1 \neq s_2; s, s_1, s_2 = 1, 2, \dots, GN+1; k = 1, 2, \dots, K). \quad (9.14)$$

Из свойства ортогональности квадратной матрицы по столбцам

$$\sum_{s=1}^{GN+1} \alpha_{s t_1} \alpha_{s t_2} = 0 \quad (t_1 \neq t_2; t_1, t_2 = 1, 2, \dots, GN+1).$$

следует и ортогональность матрицы по строкам

$$\sum_{t=1}^{GN+1} \alpha_{s_1 t} \alpha_{s_2 t} = 0 \quad (s_1 \neq s_2; s_1, s_2 = 1, 2, \dots, GN+1) \quad (9.15)$$

Из уравнений (9.7), (9.14) и (9.15) следует, что

$$\sum_{n=1}^N r_{kn}^2 \sigma_{Vn}^2 = \sigma^{(k)^2} \quad (k = 1, 2, \dots, K). \quad (9.16)$$

Если  $S > GN+1$ , то имеющийся набор возмущений  $V_1, V_2, \dots, V_N$  дополняется фиктивным случайным возмущением  $V_{N+1}$ , частные значения  $\xi_{s(N+1)}$  которого получаются суммированием  $S - (GN+1)$  составляющих  $\xi_s^{(g)}$  ( $g = GN+2, GN+3, \dots, S$ ). Для набора возмущений  $V_1, V_2, \dots, V_{N+1}$  справедливо приведенное выше доказательство.

Отмечая, что

$$m_{(N+1)g}^{(k)} = 0 \quad (g = GN+2, GN+3, \dots, S)$$

и, следовательно,

$$r_{k(N+1)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K),$$

получаем, что свойство (9.16) справедливо и при  $S > GN+1$ .

Это свойство оказывается удобным для проведения статистической линейаризации многовыходовых безынерционных нелинейных систем при ограниченном числе  $S$  реализаций выходных координат  $x^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ). Все статистические коэффициенты передачи  $r_{kn}$  вычисляются весьма просто по (9.9) в результате моделирования всего лишь  $S$  процессов управления.



$m_i^{(k)}$  координат  $x_i^{(k)}$  исходной системы. Поэтому допустимые значения  $\Delta T_i$ , обеспечивающие минимум функции от координат  $x_{i(N+1)}^{(k)}$ ,  $X_i^{(k)}$  статистически эквивалентной системы при действии на нее определенного (детерминированного) сочетания возмущений  $\xi_c$ ,  $\xi_n = \sigma v_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ), обеспечивают одновременно минимум такой же функции от математического ожидания  $m_i^{(k)}$  и среднеквадратического отклонения  $\sigma_i^{(k)}$  координат исходной системы при действии на нее случайных возмущений  $V_1, V_2, \dots, V_n$ .

При проведении оптимизации необходимо определить функции  $\Phi_{hin}$ , через которые по (9.19) определяются и величины  $X_i^{(k)}$ . Особенностью этих функций является их непрерывность в области допустимых изменений  $x_{in}^{(k)}$ ,  $\Delta T_i$  даже в тех случаях, когда соответствующие функции  $\Phi_{hi}$  являются существенно нелинейными. Объясняется это тем, что величины  $\Delta x_{in}^{(k)}$  определяются по (9.9) и (9.17) через математические ожидания координат  $x_i^{(k)}$ . Случайные компоненты при этом производят усреднение характеристики в диапазоне возможных значений аргумента, и, таким образом, нелинейности исходной системы при переходе к эквивалентной существенно сглаживаются. Функция  $\Phi_{hin}$  может быть поэтому разложена в ряд Маклорена по аргументам  $x_{in}^{(k)}$ ,  $\Delta T_i$ ,  $\xi_n$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ). Предполагая, что остаточный член этого ряда  $(Q+1)$ -го порядка пренебрежимо мал, определим коэффициенты ряда через конечные приращения величины  $x_{in}^{(k)}$  при различных значениях аргументов функции.

#### 9.4. Оптимизация статистически эквивалентной системы

Рассмотрим динамическую систему, описываемую совокупностью уравнений (9.18) и (9.19), для которой в качестве критерия оптимальности принята функция

$$R = W(x_{(I+1)(N+1)}^{(1)}, x_{(I+1)(N+1)}^{(2)}, \dots, x_{(I+1)(N+1)}^{(K)}; X_{I+1}^{(1)}, X_{I+1}^{(2)}, \dots, X_{I+1}^{(K)}), \quad (9.20)$$

соответствующая (9.4).

Если остаточный член  $(Q+1)$ -го порядка разложения функции  $\Phi_{hin}$  равен нулю, то вычисленные по указанному в разд. 9.3 способу коэффициенты ряда не зависят от выбора  $\Delta T_i$ ; поэтому при первом же определении оптимальной последовательности  $\Delta T_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) для статистически эквивалентной системы при ограничениях (9.2), (9.3) решается поставленная задача для исходной системы. В случае, если остаточный член мал, но отличен от нуля, первое определение оптимальных  $\Delta T_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) для эквивалентной системы является только приближенным решением поставленной задачи. После вычисления коэффициентов разложения функции  $\Phi_{hin}$  в точке, задаваемой первым приближением оптималь-

ной последовательности  $\Delta T_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ), необходимо уточнить значение оптимальной последовательности интервалов квантования  $\Delta T_i$ . Далее этот процесс продолжается итерационно до тех пор, пока с заданной степенью точности не будет найдено окончательное решение задачи.

Наиболее простой математический аппарат для оптимизации эквивалентной системы в каждом цикле итерации дает принцип максимума. Заметим, что дискретные аналоги принципа максимума применительно к системам типа исходной системы (9.1) (система с неаналитическими нелинейностями) несправедливы. При оптимизации же эквивалентной системы с учетом ограничений (9.2) могут быть использованы локальные формулировки принципа максимума [33].

Чтобы выполнить условие (9.3), воспользуемся результатом работы [35]. Полагая, что функции  $\Phi_{kin}$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам, получим, что импульс-функции  $p_{in}^{(k)}$  и  $p_i^{(k)}$ , приращения которых определяются формулами

$$\Delta p_{(i-1)n}^{(k)} = - \sum_{k_1=1}^K \left( \sum_{n_1=1}^{N+1} p_{in}^{(k_1)} \frac{\partial \Phi_{k_1, in}}{\partial x_{in}^{(k_1)}} + p_i^{(k_1)} \frac{\partial \Delta X_i^{(k_1)}}{\partial x_{in}^{(k_1)}} \right),$$

$$\Delta p_{i-1}^{(k)} = - \sum_{k_1=1}^K p_i^{(k_1)} \frac{\partial \Delta X_i^{(k_1)}}{\partial X_i^{(k_1)}},$$

и дискретный аналог гамильтониана, определяемый формулой

$$H(i, Y_i, \Delta T_i) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{N+1} p_{in}^{(k)} \Phi_{kin} + \sum_{k=1}^K p_i^{(k)} \Delta X_i^{(k)},$$

также являются непрерывными и имеют непрерывные частные производные по тем же аргументам. Здесь для сокращения записи введен вектор  $Y_i$  с составляющими

$$x_{in}^{(k)} = Y_i^{(d_{1n+k})}, \quad p_{in}^{(k)} = Y_i^{(d_{2n+k})}, \quad X_i^{(k)} = Y_i^{(d_3+k)}, \quad p_i^{(k)} = Y_i^{(d_4+k)}, \quad \text{где}$$

$$d_{1n} = K(n-1), \quad d_{2n} = K(N+n), \quad d_3 = 2K(N+1), \quad d_4 = 2K(N+1).$$

Краевые условия для импульс-функций определяются по виду функции  $R$ .

Приращение  $\Delta R$  функции  $R$  при изменении интервала  $\Delta T_i$  на величину  $\Delta_i$  может быть записано через гамильтониан следующим образом [35]:

$$\Delta R = - \sum_{i=0}^I [H(i, Y_i, \Delta T_i + \Delta_i) - H(i, Y_i, \Delta T_i)] + \eta, \quad (9.21)$$

где  $\eta = \eta_1 + \eta_2$  — остаточный член, причем

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^I \sum_d \left\{ \frac{\partial}{\partial Y_i^{(d)}} [-H(i, Y_i, \Delta T_i + \Delta_i) + H_i(i, Y_i, \Delta T_i)] \right\} \Delta Y_i^{(d)}, \quad (9.22)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^I \sum_{d_1, d_2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial Y_i^{(d_1)} \partial Y_i^{(d_2)}} [-H(i, Y_i + \vartheta \Delta Y_i, \Delta T_i + \Delta_i) + H(i, Y_i + \theta \Delta Y_i, \Delta T_i + \Delta_i)] \right\} \Delta Y_i^{(d_1)} \Delta Y_i^{(d_2)}. \quad (9.23)$$

Здесь  $0 < \vartheta < 1$ ,  $0 < \theta < 1$ .

Если существует оптимальное значение интервала  $\Delta T_i$ , то при малых отклонениях интервала от его оптимального значения должно иметь место неравенство

$$\Delta R \geq 0. \quad (9.24)$$

Но при малых величинах  $\Delta_i$  малы и значения  $\Delta Y_i$ , а также приращения производных гамильтониана, стоящие в фигурных скобках (9.22) и (9.23). Следовательно, в этом случае остаточный член  $\eta$  представляет собой величину второго порядка малости по сравнению с приращением гамильтониана в (9.21).

Тогда, учитывая условия (9.3), получим из (9.21) и (9.24), что необходимым условием оптимальности последовательности интервалов квантования является условие

$$\Delta \Lambda \leq 0 \quad (9.25)$$

при малых отклонениях интервала  $\Delta T_i$  от его оптимального значения. Здесь

$$\Lambda = \sum_{i=0}^I H(i, Y_i, \Delta T_i) + \lambda \left( \sum_{i=0}^I \Delta T_i - T_{I+1} \right),$$

где множитель Лагранжа  $\lambda$  определяется так, чтобы выполнялось условие (9.3).

Если при односторонних вариациях интервалов на границе допустимых по (9.2) значений интервалов выполняется условие  $\Delta \Lambda \geq 0$ , то необходимое условие оптимальности  $\Delta T_i$  ( $i=0, 1, \dots, I$ ) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \Delta T_i} H(i, Y_i, \Delta T_i) + \lambda = 0 \quad (i=0, 1, \dots, I). \quad (9.26)$$

Удобства применения принципа максимума в формулировке (9.25) или (9.26) в общем случае уменьшаются, поскольку при этом необходимо выбрать единственное правильное решение из большого числа возможных вариантов последовательностей интервалов, удовлетворяющих этому принципу. Тем не менее, существует большой класс задач оптимизации последовательности интервалов

квантования бортовых терминальных систем, для которых решение по данному принципу оказывается единственным.

Таким образом, изложенный в главе метод предусматривает для упрощения процедуры оптимизации последовательности интервалов квантования замену исходной системы статистически эквивалентной. Выходные координаты эквивалентной системы при действии на нее определенного сочетания возмущений совпадают с моментами первого и второго порядков координат исходной системы. К эквивалентной системе в общем случае применима локальная формулировка дискретного аналога принципа максимума.

## Глава 10

# АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Большинство известных методов расчета и проектирования бортовых систем управления, также как и те, которые были рассмотрены в предыдущих разделах, базируются на теоретических результатах, относящихся к случаю нормального функционирования системы.

Однако для создателей бортовых систем управления космическими объектами, пожалуй, самой острой проблемой является проблема отказов в системах. Важность и актуальность этой проблемы особенно возрастают в настоящее время в связи с выдвиганием требований к увеличению длительности активного существования космических объектов.

В обеспечение таких требований существенный вклад могут внести алгоритмические способы повышения надежности управления. В настоящей главе определяется место, которое эти способы занимают среди прочих известных средств повышения надежности систем управления, формируются основные подходы к синтезу алгоритмов управления терминальных систем, устойчивых к отказам.

### 10.1. Понятие надежности управления и анализ основных средств ее обеспечения

Будем рассматривать бортовые системы, которые строятся из условия неизбежности отказов отдельных их частей и в идеологию построения которых заложена способность сохранения приемлемого качества управления при появлении отказов.

В ряде работ, преимущественно зарубежных авторов (см., например, [48]), системы, устойчивые к отказам, получили название «fault tolerant systems». Это название в основном использовалось применительно к вычислительным системам и означало инвариантность результатов вычислений при появлении отказов. Оно может

быть распространено и на системы управления. Свойство устойчивости к отказам систем управления в смысле сохранения приемлемой точности управления при появлении отказов будем называть надежностью управления, а системы, которые этим свойством обладают — толерантными системами управления.

Понятие надежности управления является достаточно общим и выступает как одно из наиболее важных требований, предъявляемых к системам управления. Исходя из этого требования разработан ряд средств, которые используются при построении систем на разных уровнях их реализации.

Вопросы обеспечения устойчивости систем к отказам отдельных их частей благодаря соответствующей аппаратной реализации систем есть предмет известной теории надежности. Здесь, наряду с повышением физической надежности элементов аппаратуры, выбором щадящих режимов работы, организацией профилактического обслуживания используются принципы структурной и информационной избыточности.

Существенное развитие эти принципы получили в системах управления с БЦВМ, где они находят развернутое воплощение:

1. При аппаратном построении самой БЦВМ, выборе ее архитектуры. Здесь, наряду с известными методами резервирования, дублирования и мажорирования, иницированными принципом структурной избыточности, реализована идеология модульного построения ЦВМ с различной глубиной модуляризации. В частности, бортовые вычислительные комплексы могут включать несколько параллельно работающих ЦВМ, либо строиться на базе микропроцессорной техники с различной степенью дифференциации функций и возможностей микропроцессоров. Надежность также повышается на основе корректирующих кодов, встроенного контроля модулей и других способов, вытекающих из принципа информационной избыточности.

2. При разработке математического обеспечения БЦВМ. Здесь используются такие способы, как дублирование в памяти особо важных программ и данных, введение тестовых и диагностических программ.

3. При организации (в том числе автоматизации) процесса программирования. Такая организация имеет целью снижение вероятности ошибок при составлении программ.

Можно найти глубокую аналогию используемых здесь приемов (модульный принцип составления программ, формирование тестовых задач и т. д.) с упомянутыми выше.

Работы по системному программированию открывают новые возможности повышения эффективности программного обеспечения сложных комплексов, оптимизации программ и машинизации программирования.

Таким образом, к настоящему времени имеются развитые методики построения устойчивых к отказам систем БЦВМ в контуре управления посредством создания избыточности на уровнях аппаратной и программной реализации.

Существенным для этих методик является требование, чтобы отказы отдельных элементов не вызывали изменение состояния системы, определяющего динамику ее движения.

Принципиально иной подход к построению толерантных систем исходит из предположения о возможности таких отказов отдельных частей системы, которые оказывают влияние на динамику ее движения, и рассматривает состояние системы с таким отказом, как одно из возможных ее состояний. Формальное описание динамики поведения системы с отказами рассматривалось в ряде работ (см., например, [36]).

В рамках этого подхода уже может быть поставлена задача синтеза алгоритма управления системы, включающая требование обеспечения надежности управления в виде критерия. Такой критерий можно характеризовать качеством управления системы, в которой имеет место по крайней мере один отказ из заданного множества.

Возможности повышения надежности управления на уровне составления алгоритмов управления исследованы в меньшей мере. Дело в том, что синтез алгоритмов управления до сих пор производился, главным образом, из условия достижения высокого качества управления при нормальном функционировании системы.

В некоторых случаях такой алгоритм (основной алгоритм) дополнялся так называемыми резервными алгоритмами управления. Тогда при возникновении отказа какого-либо элемента системы производилось опознавание вида отказа и переход с основного на резервный алгоритм в соответствии с видом отказа.

Однако более перспективными представляются способы повышения надежности управления, предусматривающие совершенствование основного алгоритма управления. Так, в теории управления рассматриваются робастные алгоритмы фильтрации [12, 45], которые могут удовлетворительно работать и в условиях, отличных от условий нормального функционирования системы.

Известны и другие алгоритмические приемы повышения надежности управления [47]. В сущности, эти приемы, как и робастные алгоритмы, реализуют принцип, при помощи которого достигается заметное снижение потерь в качестве работы системы в нерасчетных режимах (при отказах) за счет незначительного снижения качества управления в режиме нормального функционирования. Этот принцип можно назвать принципом перераспределения качества управления.

В дальнейшем будут рассматриваться алгоритмические способы повышения надежности управления, основанные на применении принципов избыточности и перераспределения качества к построению основных алгоритмов управления бортовых терминальных систем.

Отказы отдельных элементов системы, как правило, влекут за собой изменения предписанного алгоритма управления, приводят к отличию условий работы системы от принятых при проектировании и, в конечном итоге, снижают качество управления. Между тем,

системы терминального управления обладают той особенностью, что достижение заданной цели возможно при различном протекании управляемого процесса.

При этом имеется возможность при выборе стратегии управления добиться минимизации потерь в терминальной точности в режимах с отказами при незначительном ухудшении точности управления в режиме нормального функционирования по сравнению с оптимальным управлением.

С другой стороны, в системах управления космических объектов практически всегда имеется информационная избыточность, которая обычно используется для повышения качества управления в условиях действия помех и ошибок измерения.

Формирование управляющих воздействий в космических объектах обычно производится по информации от нескольких датчиков, каждому из которых соответствует свой канал измерений. Например, в системе управления мягкой посадкой имеются каналы измерения высоты и скорости снижения; в системе синхронизации опознавания баков — каналы измерения количества каждого из двух компонентов топлива; в системе управления сближением КА — каналы измерения относительной дальности и скорости сближения.

Информационная избыточность выражается в возможности прогнозирования динамики объекта по анализу какой-либо части предыстории процесса управления, либо по информации, поступающей только от части датчиков (в многосвязных системах, например, о поведении всей системы можно судить по данным о поведении некоторых подсистем [31]). Отмеченные физические предпосылки позволяют предложить способы построения алгоритмов терминального управления, направленные на повышение надежности управления.

При этом будут рассматриваться отказы следующих типов:

- 1) обрывы в цепи каналов измерений, приводящие к исчезновению соответствующих сигналов;
- 2) обрывы в цепи исполнения управляющих команд;
- 3) отказы, приводящие к появлению ложных сигналов в цепях измерения и исполнения управляющих команд;
- 4) отказы в объекте управления, приводящие к скачкообразному изменению его состояния в момент отказа;
- 5) отказы или сбои в работе каких-либо блоков БЦВМ, приводящие к невыполнению либо ошибочному выполнению части алгоритма управления.

Будем считать, что в процессе управления становятся известными факты возникновения отказов типов 1, 2, 4 и 5; отказы типа 3 не распознаются.

Идентификация отказов может быть выделена как самостоятельная задача. Эта задача может стать предметом специального исследования и не рассматривается в данной работе.

## 10.2. Формулировка условий задачи терминального управления с учетом отказов элементов системы

Будем считать известными уравнения, детально описывающие динамику объекта (детальная модель):

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, T), \quad T \in [0, T_{l+1}], \quad (10.1)$$

и дискретно-разностные уравнения, приближенно описывающие эту динамику (упрощенная модель)

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{F}_{m_i}(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-1}) \quad (i=1, 2, \dots, l+1). \quad (10.2)$$

Изменение в поведении объекта из-за возникновения в нем отказов формализуем добавлением к координатам состояния функции  $\psi_i^{\circ}(\mathbf{v}^{\circ})$  неопределенного вида (сведения о характере изменения этой функции ограничены и описаны в гл. 7), т. е.

$$\mathbf{x}_i^{(\circ)} = \mathbf{x}_i + \nu_i \psi_i^{(\circ)}(\mathbf{v}^{\circ}),$$

где  $\nu_i$  — индикаторная функция вида

$$\nu_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i=1, 2, \dots, g-1, \\ 1 & \text{при } i=g, g+1, \dots, l+1. \end{cases}$$

Здесь  $g$  — момент отказа в объекте.

Координаты объекта измеряются по  $Q$  каналам измерения так, что вектор измеряемых координат имеет вид

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{h}_i), \quad (10.3)$$

где  $\mathbf{B}_i$  — диагональная индикаторная матрица, ненулевой элемент которой, стоящий в  $q$ -ом столбце, имеет вид

$$\beta_i^{(q)} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=1, 2, \dots, g_q-1, \\ 0 \text{ либо } \rho & \text{при } i=g_q, g_q+1, \dots, l. \end{cases}$$

Здесь  $\rho$  — неопределенная величина;  $g_q$  — дискретный момент времени отказа  $q$ -го канала измерения ( $q=1, 2, \dots, Q$ ). Обрыву в цепи измерения соответствует  $\beta_i^{(q)}=0$ , появлению ложного сигнала —  $\beta_i^{(q)}=\rho$ .

Для имитации обрывов в цепях исполнения управляющих команд и ложных сигналов в этих же цепях введем в алгоритм управления диагональную индикаторную матрицу  $\Gamma_i$ , аналогичную  $\mathbf{B}_i$ , т. е. будем считать, что

$$\mathbf{u}_i = \Gamma_i \mathbf{u}_i(\bar{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{u}}_{i-1}).$$

Диагональные элементы  $\gamma_i^{(l)}$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ) матрицы  $\Gamma_i$  изменяют свое состояние в дискретные моменты  $g_l$  отказа в цепях исполнения управляющего воздействия. Отметим, что значением  $\gamma_i^{(l)}=\rho$  можно характеризовать не только появление ложного сигнала в цепи ис-

полнения, но и возможные случаи снижения эффективности исполнительных органов системы, когда  $\rho$  будет принимать значения, меньшие единицы.

Будем считать, что отказы или сбои в работе каких-либо блоков БЦВМ приводят к невыполнению или ошибочному выполнению одной из основных операций алгоритма терминальной системы: формирования оценок координат состояния, прогнозирования конечного состояния (промаха), формирования управляющих воздействий.

Обычная, известная уже задача синтеза терминальной системы состоит в том, чтобы на основе заданных моделей объекта управления построить функцию  $u_i$  от измеренных координат и предыстории управления, которая обеспечивала бы оптимальное по терминальному риску  $R$  управление исходным объектом.

В данном же случае для обеспечения надежности управления потребуем, чтобы алгоритм системы выбирался из условия того же терминального риска в предположении, что в каждом процессе управления происходит один отказ из заданного множества отказов ( $v_i = 1$ ;  $\beta_i^{(q)} = 0$ ,  $\rho$ ;  $\gamma_i^{(l)} = 0$ ,  $\rho$ ;  $i = 1, 2, \dots, I$ ;  $q = 1, 2, \dots, Q$ ;  $l = 1, 2, \dots, L$ ). Каждому отказу безотносительно от момента его возникновения поставим в соответствие порядковый номер  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Отказы будем считать независимыми.

Пусть  $R_{in}$  — значение риска, соответствующее состоянию системы с одним отказом, имеющим номер  $n$ , возникшим на интервале времени  $[(i-1), i]$  (или, проще говоря, в момент  $i$ ). Будем считать известными вероятности  $p_{in}$  таких отказов. Тогда средний терминальный риск системы с отказом можно определить выражением

$$R_{cp} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I R_{in} \tilde{p}_{in}, \quad (10.4)$$

где  $\tilde{p}_{in}$  — условная вероятность отказа номера  $n$  в момент времени  $i$ , определенная при условии, что в системе имеет место один отказ из заданного множества.

Значения  $\tilde{p}_{in}$  могут быть найдены на основании известных величин  $p_{in}$  из следующих выражений:

$$\tilde{p}_{in} = \frac{p_{in}}{\sum_{\substack{r=1 \\ r \neq n}}^N \left( p_r \frac{1 - p_n}{1 - p_r} \right) + p_n}; \quad p_r = \sum_{i=1}^I p_{ir}.$$

Риск можно использовать в качестве формального показателя, характеризующего свойство устойчивости системы к отказам или надежность управления.

В теории надежности наиболее широко используется в качестве критерия вероятность выполнения системой задачи, заданных требований или просто вероятность выдерживания заданных допусков.

По-существу, этот обобщенный критерий представляет собой свертку рисков, характеризующих точность работы системы при ее нормальном функционировании и в режимах с отказами. В качестве весовых коэффициентов здесь используются вероятность нормального функционирования системы, а также  $p_{in}$ . При этом, так как значения вероятностей  $p_{in}$  обычно задаются весьма малыми, применение обобщенного критерия при синтезе системы может привести к не совсем правильным рекомендациям по выбору алгоритма управления. В частности, можно недооценить имеющиеся возможности сокращения потерь качества системы в режимах с отказами.

Предполагаемый подход к синтезу систем управления, устойчивых к отказам, с использованием критерия (10.4) значительно менее критичен к неопределенности сведений о вероятностях нормального функционирования системы и отказов отдельных ее частей.

При формировании критерия (10.4) рассматривался случай, когда в системе имеет место один отказ из заданного множества, так как предполагалось, что вероятность двух и более отказов в системе мала. Тем не менее, изложенный подход может быть обобщен и на более сложные модели процесса возникновения неисправностей в системе.

При синтезе толерантной терминальной системы исходя из критерия (10.4) можно рассмотреть независимо две самостоятельные задачи; задачу синтеза структуры алгоритма системы управления и выбор стратегии управления.

### 10.3. Задача синтеза структуры алгоритма управления толерантной терминальной системы

Решение задачи синтеза алгоритма системы на основе минимизации критерия (10.4) может быть получено формальным применением изложенных ранее методов. При этом, если производится опознавание отказа (здесь имеются в виду отказы типов 1, 2, 4, 5), то оптимальный алгоритм управления определяется для каждого из возможных состояний системы из условия минимума риска  $R_{in}$ . В результате для работы каждой системы должна быть предусмотрена библиотека алгоритмов, на которые система будет перестраиваться в зависимости от вида отказа и момента времени его возникновения. Очевидно, что такое решение, по сути дела обеспечивающее избыточность алгоритмов, оказывается чрезвычайно сложным и требует для реализации большого объема памяти вычислительного устройства.

Для того, чтобы сделать постановку задачи синтеза более содержательной, необходимо наложить некоторые ограничения на сложность выбираемых решений.

Основное ограничение состоит в том, что, во-первых, строится один и тот же алгоритм для всех режимов работы системы. Во-вторых, этот алгоритм определяется таким образом, чтобы он в конечном итоге реализовал оптимальную функциональную зависи-

мость управления от измеренных координат, найденную в условиях нормального функционирования системы, что позволит в этом основном режиме сохранить высокую точность работы системы. Устойчивость же к отказам в таком алгоритме обеспечивается выбором процедуры формирования управления.

Как известно, при формировании управления в алгоритме помимо измеренных координат используются еще априорные данные, включающие статистические характеристики возмущений, уравнения моделей объекта и канала измерения. Под процедурой формирования управления понимается последовательность обработки текущей и априорной информации. Можно сказать, что такого рода последовательность определяет структуру алгоритма. Нетрудно заметить, что структура алгоритма не определяется однозначно найденной в результате оптимизации функциональной зависимостью управления от измеренных координат.

Так, например, в условиях избыточности измерительной информации можно предложить несколько способов обработки имеющихся измерительных данных для вычисления оптимальных оценок координат состояния. При наличии в априорных данных нескольких моделей объекта разной степени сложности возможны варианты построения процесса прогнозирования промаха. Другими словами, при обычном синтезе системы всегда имеется некоторая свобода в организации процедуры формирования управления.

При нормальном функционировании системы вид такой процедуры не имеет никакого значения для процесса управления и обычно выбирается из условий простоты реализации. В режимах же с отказами от того, как построена процедура вычисления управления, зависят степень уязвимости алгоритма по отношению к изменениям, вызываемым отказами, и в результате — потери качества системы.

Для обеспечения надежности управления основные операции алгоритма терминальной системы, реализующего оптимальную функциональную зависимость управления от измеренных координат, разбиваются на ряд последовательно и параллельно выполняемых этапов вычисления. Процесс обработки исходной информации организуется таким образом, что в конце каждого этапа образуется сигнал, имеющий физический смысл оценки координат состояния, промаха и управления, а на каждом последующем этапе производится уточнение предыдущих результатов.

Такая декомпозиция алгоритма делает возможным в зависимости от вида отказа отбирать сигналы, пригодные для формирования управления. Операциями над такими сигналами ограничиваются действия, которые могут быть произведены в алгоритме при получении информации об отказе. Ограничения могут быть наложены также на вид и число операций.

Так как сигналы, используемые для формирования управления в режиме с отказами, — промежуточные и менее точные, чем окончательный сигнал, вычисляемый при нормальной работе системы, возникают потери качества системы, определяемые величиной риска

$R_{in}$ . Задача синтеза системы, в которой наилучшим образом обеспечивается надежность управления, заключается в выборе из заданного класса такой структуры алгоритма формирования управления, которой соответствуют минимальные средние потери качества в режимах с отказами, определяемые риском (10.4).

В общем случае нелинейной системы не всегда можно добиться полной эквивалентности исходного и декомпозированного алгоритмов в смысле окончательного результата формирования управления. В этом случае можно допустить некоторое снижение качества системы с декомпозированным алгоритмом в режиме нормального функционирования, принимая во внимание существенное сокращение потерь качества этой системы в режимах с отказами.

Дадим формализованное описание декомпозированного алгоритма. Опишем для момента времени  $i$  процедуру формирования управления, состоящую из  $S$  последовательных этапов вычислений, на каждом из которых в свою очередь предусматривается возможность параллельного формирования требуемых сигналов. Для простоты индекс  $i$  в обозначениях будем опускать. Пусть  $J_0$  — множество имеющихся в начале вычислительной процедуры на момент  $i$  текущих и априорных данных. Множество  $J_0$  может, например, включать следующие элементы:  $\bar{y}_{ji}^{(q)}$  ( $q=1, 2, \dots, Q$ ) — текущие измерения на ограниченном интервале предыстории  $[j, i]$ ;  $\hat{x}_{(i-1)q}^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) — оценки координат состояния, найденные в момент времени  $i-1$  по результатам измерений в  $q$ -ом канале  $\bar{u}_j^{(l)(i-1)}$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ) — управляющие воздействия, вычисленные в предыдущие моменты времени на выбранном ограниченном интервале предыстории  $[j, i-1]$ ;  $F_{mi}, \hat{f}$  — функции, характеризующие упрощенное описание объекта в соответствии с (10.2) и подробную модель объекта (10.1).

Обозначим через  $J_s$  множество сигналов, каждый из которых представляет собой вектор оценок координат, промаха или значений управления, вычисленных на  $s$ -ом этапе работы алгоритма системы ( $s=1, 2, \dots, S$ ). Отметим, что в  $J_s$  могут входить также элементы исходных данных, содержащихся в  $J_0$ . Каждому элементу из  $J_s$  поставим в соответствие порядковый номер  $m=1, 2, \dots, M_s$ .

Будем считать, что каждый сигнал  $j_s^m \in J_s$  образуется в результате применения оптимального оператора  $A_s^m(J_{s-1}^m)$  к подмножеству  $J_{s-1}^m$  из множества сигналов  $J_{s-1}$ , вычисленных на  $(s-1)$ -ом этапе. Под оптимальностью здесь может, например, пониматься достижение наилучшей точности нахождения сигналов  $j_s^m \in J_s$ . В общем случае при выборе  $A_s^m$  следует исходить из условия обеспечения оптимальности окончательного сигнала управления. На первом этапе сигналы  $j_1^{(m)} \in J_1$  формируются на основе исходных информационных данных  $j_0^{(m)} \in J_0$ . С ростом  $s$  множество  $J_s$  сужается. На последнем этапе образуется окончательный сигнал управления, который и реализуется системой ( $u=J_s$ ). Описанным образом можно представить операцию оценивания координат (тогда  $J_s = \hat{x}$ ). Де-

композиция может быть произведена и для операции прогнозирования промаха (тогда  $J_s = \hat{z}$ ).

После того, как принято, что  $j_s^m = A_s^m (J_{s-1}^m)$ , остается формализовать правила разбиения  $J_{s-1}$  на подмножества  $J_{s-1}^m \subset J_{s-1}$  ( $m = 1, 2, \dots, M_s$ ). Возможные способы такого разбиения ограничим следующими условиями. Подмножества  $J_{s-1}^m$  должны быть непересекающимися или иметь в пересечении число элементов, не превышающее заданное. Эти условия являются дополнительными ограничениями на сложность выбираемой процедуры формирования управления.

Поставим в соответствие каждому подмножеству  $J_{s-1}^m$  индикатор — числовую функцию  $b_{s-1}^m(r)$ , которая принимает значение единицы, если  $j_{s-1}^r \in J_{s-1}^m$ , а в противном случае — значение нуля. Составим из значений  $b_{s-1}^m(r)$  ( $r = 1, 2, \dots, M_{s-1}$ ) матрицу-строку и образуем из таких строк матрицу  $\mathbf{B}_{s-1}$ . Нетрудно заметить, что выбор  $\mathbf{B}_{s-1}$  задает разбиение множества  $J_{s-1}$  на подмножества  $J_{s-1}^m$ , а другими словами — правила, определяющие из каких элементов  $j_{s-1}^r \in J_{s-1}$  образуется каждый сигнал  $j_s^m \in J_s$ . Сформулированные выше ограничения относительно пересечений множеств  $J_{s-1}^m$ , эквивалентны ограничениям на число элементов, равных единице, в каждом столбце матрицы  $\mathbf{B}_{s-1}$ . Таким образом, можно записать следующее выражение, характеризующее работу алгоритма на каждом  $s$ -ом этапе его вычислительной процедуры:

$$j_s^m = A_s^m (J_{s-1}^m), \quad J_{s-1}^m = \bigcup_{r=1}^{M_{s-1}} b_{s-1}^m(r) j_{s-1}^r$$

( $m = 1, 2, \dots, M_s$ ).

Описанная процедура из  $S$  последовательных этапов вычисления в конце концов реализует некоторую функциональную зависимость управления от априорных данных и измерений. Для линейных систем можно показать, что существует множество процедур, определяемых выбором  $\mathbf{B}_s$  ( $s = 1, 2, \dots, S$ ), реализующих в условиях нормальной работы системы функциональную зависимость, оптимальную в смысле терминальной точности.

Рассмотрим работу декомпозированного алгоритма в режимах с отказами. Введем множество сигналов, сформированных на всех  $S$  этапах работы алгоритма,  $j \in J = \bigcup_{s=1}^S J_s$ . Выделим в множестве  $J$  подмножества  $J^m$  ( $m = 1, 2, \dots, M_0$ ) сигналов, при вычислении которых использовалась исходная информация  $j_0^m \in J_0$ , и их дополнения — подмножества  $\bar{J}^m = J / J^m$ . Отметим, что окончательный сигнал  $J_s$  принадлежит  $J^m$  для всех  $m$ , так как при формировании  $J_s$  используется вся имеющаяся информация  $j_0^m \in J_0$ .

Будем полагать, что описанные ранее отказы в системе приводят к потере соответствующих элементов информационных данных

$j_0^m \in J_0$ . При этом в алгоритме не вычисляются сигналы  $j \in J^m$ , так как они зависят от  $j_0^m$ , а формируются промежуточные сигналы  $j \in \bar{J}^m$ , которые используют только часть исходной информации  $J_0$ .

Для того чтобы и в режимах с отказами в алгоритме формировались окончательные сигналы оценок координат, промаха и управления, определили дополнительные операции, которые производятся над имеющимися промежуточными сигналами  $j \in \bar{J}^m$  после получения информации об отказе.

Для отказов типа обрыв в цепи измерения ( $g_i^{(q)} = 0$ ), приводящих к потере сигнала  $y_i^{(q)}$ , в ряде случаев можно произвести восстановление потерянного измерения, сформировав его оценку по сигналам  $j \in \bar{J}^m$ , имеющим в данном случае физический смысл оценок координат состояния. После такого восстановления можно сделать вычисления сигналов  $j \in J^m$ , которые не были выполнены из-за отказа.

Другой путь перестройки алгоритма заключается в том, что окончательные сигналы координат состояния, промаха и управления непосредственно формируются по имеющимся промежуточным сигналам  $j \in \bar{J}^m$ . Так, например, при отказе в объекте управления ( $v_i = 1$ ) можно считать неверными оценки координат  $\hat{x}_{i-1}^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ), полученные в предыдущий  $(i-1)$ -й момент времени, и для дальнейших вычислений использовать предварительные оценки координат, которые сформированы только по результатам текущих измерений  $\bar{y}_{ji}^{(k)}$  на выбранном интервале  $[j, i]$  предыстории.

Теперь можно сформулировать основные требования, которые предъявляются к выбору матриц  $B_s$ , определяющих структуру алгоритма толерантной системы управления. Прежде всего, необходимо, чтобы при любом отказе из заданного множества в алгоритме всегда был сформирован по крайней мере один промежуточный сигнал, имеющий физический смысл оценки координат, промаха или управления. Для обеспечения наилучшей точности управления в режимах с отказами необходимо, чтобы такие сигналы образовывались с использованием максимально возможного количества исходных данных. Такое требование невозможно выполнить одновременно для всех типов отказов при введенных ограничениях на сложность алгоритма управления. Компромиссное решение может быть найдено в результате минимизации риска (9.4).

## 10.4. Построение алгоритмов оценивания координат состояния и прогнозирования промаха

Рассмотрим задачу обеспечения свойств толерантности в алгоритмах оценивания координат состояния по результатам измерений нескольких датчиков. Следует отметить, что уже в структуре рекуррентных алгоритмов типа фильтра Калмана (4.12) можно выделить элементы, рекомендуемые подходом, изложенным в предыдущем разделе. Дело в том, что в таких алгоритмах всегда имеются промежуточные сигналы в виде оценок координат, полученных

в предыдущий дискретный момент времени управления, которые могут использоваться для восстановления измерений неисправных датчиков формированием оценок этих измерений в соответствии с соотношением  $\hat{y}_i = x_i(F_{Mi}(\hat{x}_{i-1}, u_{i-1}), 0)$ .

Однако, отмеченная структура не обладает достаточной гибкостью, что ограничивает возможности перестройки алгоритма оценивания координат для сокращения потерь в точности системы в аномальных режимах. Она не удовлетворяет требованиям устойчивости к отказам в объекте, при появлении которых предыдущие оценки координат оказываются неверными. Кроме того, если идентификация отказа производится с запаздыванием относительно момента его появления в системе, алгоритмы (4.12) могут оказаться просто неработоспособными. Действительно, в этих случаях за время запаздывания могут быть вычислены совершенно неверные оценки, которые уже нельзя использовать для управления. При этом будет потеряна вся информация о предыстории процесса управления, в том числе и информация, поступившая от работоспособных датчиков.

В соответствии с подходом, изложенным в предыдущем разделе, процедура оценивания координат должна состоять из нескольких этапов и включать независимые парциальные каналы обработки информации отдельных групп датчиков, а в пределе — отдельных датчиков.

Если предполагать, что в системе возможен только один отказ типа обрыва в цепи измерения ( $\beta_i^{(q)} = 0$ ), и вероятности  $p_{iq}$  одинаковы, то процедуру оценивания следует строить следующим образом. Датчики измеряемых величин разбиваются на две группы, для каждой из которых строится свой парциальный канал обработки информации. При нормальном функционировании системы на втором этапе оценивания производится осреднение парциальных сигналов. При отказе датчика в одном из парциальных каналов для восстановления измерений этого датчика могут использоваться оценки, полученные в другом канале. После такого восстановления формируются оценки координат и в парциальном канале с неисправным датчиком, а затем производится осреднение парциальных каналов.

Будем полагать, что в критерии (10.4)  $n=q$  ( $q=1, 2, \dots, Q$ ) и значение риска  $R_{iq}$  характеризует точность оценивания координат состояния при отказе в цепи измерения  $q$ -го датчика. Для большей определенности можно принять в качестве  $R_{iq}$  математическое ожидание квадрата ошибки оценивания координат состояния. Тогда разбиение датчиков на группы следует производить таким образом, чтобы точность оценивания, характеризуемая критерием (10.4), была наилучшей.

Для повышения точности оценивания координат состояния в аномальных режимах работы системы каждый из двух выделенных каналов обработки информации можно в свою очередь разбить на два парциальных канала, предусмотрев последующее осреднение их сигналов. Теперь при отказе одного из датчиков в алгоритме

будут сформированы два промежуточных сигнала, имеющих физический смысл оценок координат. Осреднив эти сигналы, получим более точные оценки координат, которые можно использовать для восстановления недостающего измерения либо для последующих вычислений. Отметим, что повышение точности оценивания в аномальных режимах здесь достигается за счет усложнения операций, выполняемых в алгоритме при получении информации об отказе.

Рассмотрим задачу осреднения парциальных оценок. Пусть  $\hat{x}_{i1}$ ,  $\hat{x}_{i2}$  — парциальные оценки координат состояния, полученные к  $i$ -му моменту времени по информации соответствующего канала  $\bar{y}_{i1}$ ,  $\bar{u}_{i-1}$  и  $y_{i2}$ ,  $u_{i-1}$ . Здесь  $y_{i1}$ ,  $y_{i2}$  — величины, измеренные датчиком или группой датчиков, включенных соответственно в первый и во второй парциальные каналы.

Аналогично оценкам  $\hat{x}_{i1}$ ,  $\hat{x}_{i2}$  введем парциальные оценки возмущений  $\hat{v}_1(i)$ ,  $\hat{v}_2(i)$ .

Если ошибки измерения в парциальных каналах статистически независимы и  $P(\mathbf{v}/\bar{y}_{i1}, \bar{u}_{i-1}) = P(\mathbf{v}/\hat{v}_1(i))$ ,  $P(\mathbf{v}/y_{i2}, \bar{u}_{i-1}) = P(\mathbf{v}/\hat{v}_2(i))$  то можно показать, что

$$P(\mathbf{v}, \bar{y}_{i1}, \bar{y}_{i2}, \bar{u}_{i-1}) = P(\mathbf{v}, \hat{v}_1(i), \hat{v}_2(i)) G(\bar{y}_{i1}, \bar{y}_{i2}, \bar{u}_{i-1}), \quad (10.5)$$

где 
$$G(\bar{y}_{i1}, \bar{y}_{i2}, \bar{u}_{i-1}) = \frac{P(\bar{y}_{i1}, \bar{u}_{i-1}) P(\bar{y}_{i2}, \bar{u}_{i-1})}{P(\hat{v}_1(i)) P(\hat{v}_2(i))}.$$

Подставляя (10.5) в формулу Байеса, получим

$$P(\mathbf{v}/\bar{y}_{i1}, \bar{y}_{i2}, \bar{u}_{i-1}) = \frac{P(\mathbf{v}, \hat{v}_1(i), \hat{v}_2(i))}{\int_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}, \hat{v}_1(i), \hat{v}_2(i)) d\Omega(\mathbf{v})}. \quad (10.6)$$

Из (10.6) следует, что

$$P(\mathbf{v}/\bar{y}_{i1}, \bar{y}_{i2}, \bar{u}_{i-1}) = P(\mathbf{v}/\hat{v}_1(i), \hat{v}_2(i)).$$

А это означает, что для получения апостериорной плотности распределения возмущений, а следовательно, и их оптимальных (в смысле минимума дисперсии ошибки) оценок по информации обоих парциальных каналов достаточными статистиками являются оценки  $\hat{v}_1(i)$ ,  $\hat{v}_2(i)$ . При этом для случая гауссовых возмущений и помех, линейных уравнений объекта и канала измерения можно найти следующее выражение, определяющее оптимальную оценку координат состояния как среднюю из парциальных (будем предполагать, что в оценках  $\hat{x}_{i1}$ ,  $\hat{x}_{i2}$  удельный вес априорных данных о возмущениях  $v$  мал):

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{i1} + A_i(\hat{x}_{i2} - \hat{x}_{i1}). \quad (10.7)$$

Здесь  $A_i = (K_{i1}^{-1} + K_{i2}^{-1})^{-1} K_{i2}^{-1}$ , где  $K_{i1}$ ,  $K_{i2}$  — ковариационные матрицы ошибок оценок  $\hat{x}_{i1}$ ,  $\hat{x}_{i2}$ . Составление средней оценки координат состояния из парциальных оценок в виде (10.7) распространим на общий случай задач терминального управления.

Прежде чем перейти к изложению следующих приемов повышения надежности управления, проанализируем работу алгоритма оценивания для случая, когда в системе имеется только два датчика измерения.

При появлении отказа (обрыва) в одном из датчиков принудительно прекращается уточнение парциальной оценки, соответствующей этому каналу. При этом полученное ранее значение оценки корректируется по формуле  $\hat{x}_{i1} = F_{Mi}(\hat{x}_{(i-1)1}, u_{i-1})$ . По другому же каналу парциальная оценка продолжает уточняться по вновь поступающей информации. Если оценка  $\hat{x}_{i1}$ , вычисляемая в канале с отказом, по своей точности тем не менее

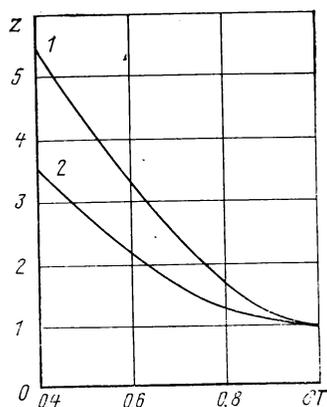


Рис. 20

остается близкой к оценке другого парциального канала, то можно и в этом аномальном режиме сформировать среднюю оценку (10.7). В противном случае для дальнейших вычислений в алгоритме системы лучше использовать только парциальную оценку работоспособного канала измерения. Эффективность выделения парциальных каналов обработки информации иллюстрируется на примере СОБ. На рис. 20 показаны графики относительной ошибки управления  $z$  как функции относительного момента времени  $\delta T$  возникновения отказа. (1 — система без защиты от отказа; 2 — система с парциальными каналами обработки измерений).

Перейдем к рассмотрению аномальных режимов, вызванных отказами в объекте, и адекватных им приемов построения алгоритма оценивания координат. Как уже отмечалось в разд. 9.2, при отказе в объекте ( $v_i=1$ ) изменение его координат состояния становится неопределенным из-за воздействия дополнительного возмущения, относительно которого имеются априорные сведения общего типа. Такая задача рассматривалась в гл. 7. Относительно дополнительного возмущения считалось известным только то, что дисперсия отклика на него объекта в каждый момент времени ограничена. Оказалось, что оптимальное управление в этом случае является функцией не всей предыстории процесса управления, а только некоторой ее части. Этот вывод, полученный для линейных систем, распространим и на случай нелинейных объектов. Тогда становится очевидным способ построения парциальных оценок, обеспечивающий устойчивость к отказам в объекте. Для простоты будем считать, что парциальный канал использует информацию только одного датчика измерения. Формирование парциальных оценок будем производить в два этапа. На первом этапе строятся предварительные оценки

$$\tilde{x}_{iq} = \tilde{x}_{iq}(y_j^{(q)}, y_{j+1}^{(q)}, \dots, y_i^{(q)}; \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_{i-1}) (q=1, 2) \quad (10.8)$$

по ограниченному, например, минимальному отрезку  $[j, i]$  предысто-

рии процесса управления ( $j=i-K$ , где  $K$  — размерность вектора  $\mathbf{x}_i$  состояния) в результате решения уравнений (10.2), (10.3) в предположении  $\tilde{\mathbf{h}}_i=0$ . На втором этапе имитируется фильтрация процесса  $\tilde{\mathbf{x}}_{1q}, \tilde{\mathbf{x}}_{2q}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{iq}$ , в результате которой получаем

$$\hat{\mathbf{x}}_{iq} = F_{mi}(\hat{\mathbf{x}}_{(i-1)q}, \mathbf{u}_{i-1}) + \Gamma_{iq}[\tilde{\mathbf{x}}_{iq} - F_{mi}(\hat{\mathbf{x}}_{(i-1)q}, \mathbf{u}_{i-1})], \quad (10.9)$$

где  $\hat{\mathbf{x}}_{iq} = (\hat{x}_{iq}^{(1)}, \hat{x}_{iq}^{(2)}, \dots, \hat{x}_{iq}^{(K)})$  — парциальная оценка вектора  $\mathbf{x}_i$ , полученная на втором этапе;  $\Gamma_{iq}$  — матрица весовых коэффициентов фильтра.

При возникновении в некоторый момент времени отказа в объекте (скачкообразном измерении его координат состояния) оценки (10.9) становятся неверными, и, начиная с этого момента времени, следует полагать

$$\hat{\mathbf{x}}_{iq} = \tilde{\mathbf{x}}_{iq}. \quad (10.10)$$

До сих пор декомпозиция алгоритма управления производилась только для операции формирования оценок координат. Промах в этом случае прогнозируется по окончательной оценке  $\hat{\mathbf{x}}_i$ . В отдельных случаях декомпозиция может быть продолжена и на операцию прогнозирования промаха. При этом на основе парциальных оценок координат состояния  $\hat{\mathbf{x}}_{iq}$  вычисляются парциальные оценки промаха  $\hat{\mathbf{z}}_{iq} = \hat{\mathbf{z}}_i(\hat{\mathbf{x}}_{iq})$ , а затем на втором этапе осреднением парциальных оценок формируется окончательная оценка промаха  $\hat{\mathbf{z}}_i^{(l)} = \alpha_1^{(l)} \hat{\mathbf{z}}_{i1}^{(l)} + \alpha_2^{(l)} \hat{\mathbf{z}}_{i2}^{(l)}$ , где  $\alpha_1^{(l)}, \alpha_2^{(l)}$  — весовые коэффициенты,  $l=1, 2, \dots, L$ .

Кроме этого, парциальные оценки промаха также могут формироваться по двухэтапной схеме в соответствии с алгоритмами, описанными в гл. 4.

Опишем еще один способ построения процедуры прогнозирования промаха для повышения надежности формирования сигналов промаха при отказах и сбоях в БЦВМ.

Во многих терминальных системах качество управления существенно зависит от точности прогнозирования конечного состояния (промаха). Поэтому прогнозирование приходится осуществлять на основе детальной модели (10.1) объекта управления, что часто приводит к необходимости выполнять на борту численное интегрирование уравнений движения объекта. Многократное применение процедуры численного интегрирования в темпе, требуемом для управления, приводит к возрастанию как объема вычислений, так и требуемого быстродействия БЦВМ. В результате увеличивается вероятность ошибочного вычисления управляющего сигнала на БЦВМ, подверженной отказам типа 5. Поэтому процедуру численного интегрирования уравнения (10.1) целесообразно использовать в сочетании с приближенным прогнозированием по упрощенной модели (9.2). При этом приближенное прогнозирование производится в темпе, требуемом для управления, т. е. в процессе управления формируется последовательность  $\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{z}}_l$ , где  $\tilde{\mathbf{z}}_i$  — промах,

прогнозируемый в  $i$ -й момент времени с использованием оценки  $\hat{x}_i$  и модели (10.2). Прогнозирование на основе численного интегрирования уравнения (10.1) осуществляется медленнее — с тактом  $\tau$  ( $\tau \geq 1$  и может принимать значения 1, 2, 3 и т. д.), так что формируется последовательность  $\delta_r$  ( $r=1, 1+\tau, \dots; r \leq l$ ), где  $\delta_1=0$ ;  $\delta_r$  — невязка результатов прогнозирования, полученных к моменту времени  $r$  на основе моделей (10.1) и (10.2) с использованием величины  $\hat{x}_{r-\tau}$ .

Величины  $\delta_r$  используются в качестве поправки для периодической корректировки результатов приближенного прогнозирования:

$$\hat{z}_i = \tilde{z}_i + \delta_r (i=r, r+1, \dots, r+\tau-1; r=1, 1+\tau, \dots; i \leq l).$$

Изложенный способ прогнозирования позволяет снизить требования к быстродействию БЦВМ, повысить надежность вычислений и обеспечить высокую надежность прогнозирования.

Отметим, что при прогнозировании промаха, помимо знания оценок координат состояния, необходимы сведения о стратегии будущих управлений. Этот вопрос будет обсуждаться в следующем разделе.

## 10.5. Выбор стратегии терминального управления в толерантной системе

Под стратегией понимается правило, по которому каждому прогнозируемому промаху  $\hat{z}_i$  ставится в соответствие последовательность будущих управлений  $u_i, u_{i+1}, \dots, u_l$ . Из этой последовательности прикладывается к объекту (реализуется) только первое управление  $u_i$ .

До сих пор стратегия терминального управления определялась либо ограничениями, накладываемыми на управление, либо дополнительными требованиями к процессу управления (критериями оптимальности нетерминального типа).

Представляется целесообразным, если это возможно, стратегию управления выбирать из условия минимизации потерь в терминальной точности управления при отказах. Эти потери характеризуются критерием (10.4). Так как здесь рассматриваются отказы типа обрыва в исполнительной цепи, то положим  $n=l$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ) и под  $R_{il}$  будем понимать значение терминального риска, соответствующее состоянию системы с отказом в одном из исполнительных органов в момент времени  $i$ .

Рассмотрим систему с одним исполнительным органом (т. е.  $L=1$ ). В этом случае критерий (10.4) запишется в следующем виде:

$$R_{cp} = \sum_{i=1}^l R_i \tilde{p}_i, \quad \tilde{p}_i = p_i \sum_{i=1}^l p_i, \quad (10.11)$$

где  $R_i = R(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}; u_i = u_{i+1} = \dots = u_l = 0)$ ;

$p_i$  — вероятность отказа в цепи исполнительного органа в момент времени  $i$ .

Нетрудно заметить, что критерий (10.11) эквивалентен критерию интегрального типа. Стратегия управления, минимизирующая (10.11), в каждый момент времени  $i$  может быть найдена в результате формального применения метода динамического программирования.

Однако, решение может быть существенно упрощено введением допущения, основанного на пренебрежении дуальным характером управления. Будем выбирать стратегию управления в момент времени  $i$ , минимизируя риск, соответствующий состоянию системы, в которой в следующий  $(i+1)$ -й момент времени произойдет отказ типа обрыва в исполнительной цепи. Тогда реализуемые управления  $u_i^*$  ( $i=1, 2, \dots, I-1$ ) могут быть выбраны из следующего условия

$$u_i^* = \arg \{ \min_{u_i \in U} R(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*; u_i; u_{i+1} = \dots = u_I = 0) \}, \quad (10.12)$$

а последовательность будущих управлений, используемых при прогнозировании промаха  $z_i$  — из условия  $u_{i+1} = u_{i+2} = \dots = u_I = 0$ .

При таком выборе стратегии управления терминальная точность управления в безаварийном режиме работы системы ухудшается незначительно по сравнению с оптимальной стратегией управления, выбираемой без учета отказа.

Что же касается других критериев нетерминального типа, характеризующих, например, энергетические затраты на управление, то следует принимать во внимание возможность их ухудшения при выборе управления из условия (10.12).

Если в системе имеется несколько регулирующих органов, реализующих векторное управление ( $L > 1$ ), то при поступлении в момент времени  $i$  информации об отказе в цепи исполнения  $l$ -го управляющего воздействия для сокращения потерь в точности системы можно изменить стратегию управления, которая реализуется работоспособными исполнительными органами.

Последовательность будущих управлений (по отношению к моменту времени  $i$ ) для каждого исполнительного органа удобно представить линейно зависящей от текущего управления  $u_i^{(l)}$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ) [(см. уравнение (4.10)]. Эта зависимость задается выбором вектора коэффициентов  $\beta_l(i)$  для каждого  $l$ -го исполнительного органа системы.

Для каждого отказа  $m$ -го исполнительного органа ( $m=1, 2, \dots, L$ ) в результате минимизации риска  $R_{im}$  может быть выбрана последовательность коэффициентов  $\beta_l(i)$  ( $l=1, 2, \dots, L; l \neq m$ ). Эта последовательность и будет определять стратегию управления, на которую должна переходить система в аномальных режимах, вызванных отказами в цепях исполнения.

## 10.6. Дополнительные средства повышения надежности управления

Выше были рассмотрены способы построения алгоритмов терминальных толерантных систем управления с учетом отказов типа 1, 2, 4, 5. Дополнительно к описанным средствам повышения надежности управления можно предложить приемы защиты от ложных сигналов в цепях измерения и исполнения управляющих команд.

Возникновение ложных сигналов в каналах измерения будем считать эквивалентным появлению больших ошибок измерения, существенно превышающих их проектный уровень. С другой стороны, для большинства практических задач область значений, которые могут принимать координаты состояния, ограничена. Учет таких ограничений при синтезе алгоритмов обработки информации, как показано в гл. 6, приводит к нелинейным оценкам вида:

$$x_{iq}^{(k)} = \begin{cases} \hat{x}_{iq}^{(k)}, & \text{если } X_{2i}^{(k)} \leq \hat{x}_{iq}^{(k)} \leq X_{1i}^{(k)}, \\ X_{1i}^{(k)}, & \text{если } x_{iq}^{(k)} > X_{1i}^{(k)}, \\ X_{2i}^{(k)}, & \text{если } \hat{x}_{iq}^{(k)} < X_{2i}^{(k)} \quad (k=1, 2, \dots, K), \end{cases} \quad (10.13)$$

где  $x_{iq}^{(k)}$  — координата на выходе линейного фильтра (10.9) либо (10.10);  $X_{1i}^{(k)}$ ,  $X_{2i}^{(k)}$  — параметры нелинейного звена.

При нормальном функционировании системы значения оценок координат обычно лежат в области линейной части характеристики (10.13). Однако при появлении в канале измерения больших ложных сигналов могут быть вычислены большие значения  $\hat{x}_{iq}^{(k)}$ , и нелинейная оценка  $x_{iq}^{(k)}$  будет существенно отличаться от линейной.

Защита от ложных сигналов в цепях исполнения может быть также осуществлена установкой в этих цепях нелинейных звеньев с характеристикой вида (10.13).

Избыточность сигналов оценок позволяет выделить в алгоритме часть (в дальнейшем называемую ядром), обладающую минимальной сложностью и обеспечивающую работоспособность системы, хотя и с несколько худшим качеством, чем полный алгоритм. Примем, что такое снижение качества управления для аварийных режимов считается допустимым. При формировании оценок координат в терминальных системах в качестве такого ядра следует принять, прежде всего, один (либо некоторые) из парциальных каналов, оказывающий наибольшее влияние на качество управления. В этом канале выделяются (для ядра) операции (10.7), (10.8), (10.10), (10.13). В качестве ядра алгоритма прогнозирования здесь целесообразно принять операции вычисления последовательности  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_I$ , дополненные условием  $\tilde{z}_i = \tilde{z}_i$  при отказе типа 5.

При создании комплекса бортовых систем КА наиболее ответственные системы реализуются в наиболее надежных аппаратных решениях, например, в той части бортового вычислительного комплекса, которая имеет повышенную надежность. Целесообразно в

этой же части воспроизводить и ядра алгоритмов остальных систем. Таким образом можно обеспечить повышение надежности терминального управления при отказах типа 5.

## 10.7. Пример построения алгоритма управления толерантной терминальной системы

Применение алгоритмических способов повышения надежности управления проиллюстрируем на примере терминальной системы управления сближением спутников. Один из спутников — назовем его активным КА — требуется перевести в ближайшую окрестность другого — пассивного КА — за заданное время  $t_{I+1}$ .

Подробная модель (10.1) объекта управления вытекает из уравнений движения спутников

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} &= -\frac{\mu}{\rho_a^3} \mathbf{q}_a + \mathbf{g}_a + \mathbf{g}_{дв}; \\ \frac{\partial^2 \rho_{п}}{\partial t^2} &= -\frac{\mu}{\rho_{п}^3} \mathbf{q}_{п} + \mathbf{g}_{п}, \end{aligned} \quad (10.14)$$

где  $\mathbf{q}_a$  ( $\mathbf{q}_{п}$ ) — трехмерный вектор положения активного (пассивного) КА относительно центра Земли;  $\mathbf{g}_a$  ( $\mathbf{g}_{п}$ ) — трехмерный вектор ускорения, действующий на активный (пассивный) КА из-за несферичности поля тяготения и влияния атмосферы Земли;  $\mathbf{g}_{дв}$  — трехмерный вектор управляющего ускорения сообщаемого активному КА двигательной установкой  $\rho_a$  ( $\rho_{п}$ ) — модуль вектора  $\mathbf{q}_a$  ( $\mathbf{q}_{п}$ );  $\mu$  — гравитационный параметр.

Ограничимся рассмотрением управления по координате бокового уклонения активного КА от плоскости орбиты пассивного. Для получения упрощенной модели объекта управления будем считать, что пассивный КА вращается по круговой орбите с угловой орбитальной скоростью  $\omega$ , расстояние между спутниками мало по сравнению с  $\rho_{п}$ , а относительная скорость движения спутников при проведении коррекции полета активного КА изменяется скачком. Тогда относительное движение спутников в направлении по нормали к плоскости орбиты пассивного КА может быть описано уравнениями

$$\begin{aligned} x_i^{(1)} &= x_{i-1}^{(1)} \cos \omega(t_i - t_{i-1}) + \frac{x_{i-1}^{(2)} + u_{i-1}}{\omega} \sin \omega(t_i - t_{i-1}), \\ x_i^{(2)} &= -\omega x_{i-1}^{(1)} \sin \omega(t_i - t_{i-1}) + (x_{i-1}^{(2)} + u_{i-1}) \cos \omega(t_i - t_{i-1}) \quad (10.15) \\ &(i = 1, 2, \dots, I + 1). \end{aligned}$$

Здесь  $x_i^{(1)}$  — боковое уклонение активного КА от плоскости пассивного в момент времени  $t_i$  проведения  $i$ -й коррекции;  $x_i^{(2)}$  — боковая скорость сближения непосредственно перед осуществлением

$i$ -й коррекции;  $u_i$  — приращение боковой скорости в результате осуществления  $i$ -й коррекции.

Точность управления сближением по боковому уклонению будем характеризовать риском  $R = M(z^2)$ , где  $z = x_{I+1}$ .

В моменты времени  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ) производятся измерения  $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}$  фазовых координат  $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}$ .

В соответствии с предложенным способом производим декомпозицию операции оценивания координат состояния на два независимых канала. В канале 1 используются только измерения  $y_i^{(1)}$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ), в канале 2 — измерения  $y_i^{(2)}$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ).

В каждый момент времени  $i$  в канале 1 производится формирование предварительных оценок

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i1}^{(1)} &= y_i^{(1)}; \\ \tilde{x}_{i1}^{(2)} &= y_i^{(1)} \operatorname{ctg} \omega (t_i - t_{i-1}) - y_{i-1}^{(1)} \frac{\omega}{\sin \omega (t_i - t_{i-1})}, \end{aligned} \quad (10.16)$$

а в канале 2 — предварительных оценок

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i2}^{(1)} &= -y_i^{(2)} \frac{1}{\omega} \operatorname{ctg} \omega (t_i - t_{i-1}) + (y_{i-1}^{(2)} + u_{i-1}) \frac{1}{\omega \sin \omega (t_i - t_{i-1})}; \\ \tilde{x}_{i2}^{(2)} &= y_i^{(2)}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Затем, с использованием оценок  $\hat{x}_{(i-1)q}$  ( $q = 1, 2$ ) координат состояния, полученных в  $(i-1)$ -й момент времени ( $\hat{x}_{0q} = 0$ ), по формуле (10.9) вычисляем линейные оценки  $\hat{x}_{iq}$ . При этом значения  $F_{mi}(\hat{x}_{(i-1)q}, u_{i-1})$  определяются из формул (10.15) при подстановке в них вместо  $x_{i-1}^{(k)}$  значений  $\hat{x}_{(i-1)q}^{(k)}$  ( $k, q = 1, 2$ ). Подвергая  $\hat{x}_{iq}^{(k)}$  ( $k, q = 1, 2$ ) нелинейному преобразованию (10.13), получаем парциальные оценки  $x_{iq}$ . Итоговая оценка  $\hat{x}_i$  координат состояния определяется по формуле (10.7).

Опишем работу алгоритма формирования оценок при отказах в системе управления сближением.

При обрыве  $q$ -й цепи измерения в некоторый  $g$ -й момент времени вместо оценки  $\hat{x}_{gq}$ , вычислявшейся из (10.9), формируются оценки  $\hat{x}_{gq}$  из формул (10.15) при подстановке в них  $u_{g-1}$  и вместо  $x_{g-1}$  — значений  $\hat{x}_{(g-1)q}$ ; в следующий  $(g+1)$ -й момент времени — опять по тем же формулам с подстановкой  $\hat{x}_{gq}$  и т. д. Вычисления оценок в других каналах при этом продолжают обычным порядком, т. е. по формулам (10.16) или (10.17) и (10.9).

Защита от появления ложных сигналов в цепях измерения осуществляется в результате использования (10.13).

Если в некоторый  $g$ -й момент времени пассивный КА, который до сих пор совершал пассивный полет, производит коррекцию своего движения (что для системы управления сближением эквивалентно отказу в объекте), то формируется запрет на реализацию

управления  $u_g$ , а в следующие моменты  $i=g+1, g+2, \dots, I$  полагается  $\hat{x}_{iq} = \tilde{x}_{iq}$ , где  $\tilde{x}_{iq}$  вычисляются из (10.16), (10.17).

В качестве ядра алгоритма формирования оценок координат (напоминаем, что воспроизведение ядра в БЦВМ должно осуществляться с наиболее высокой надежностью) следует принять операции, соответствующие (10.16) (т. е. каналу 1) и формулам  $\hat{x}_{iq} = \tilde{x}_{iq}$ ,  $\hat{x}_i = \tilde{x}_{i1}$  и (10.13).

Переходя к операции прогнозирования, запишем формулу упрощенного прогнозирования

$$\tilde{z}_i = \hat{x}_i^{(1)} \cos \omega(t_{I+1} - t_i) + \hat{x}_i^{(2)} \frac{\sin \omega(t_{I+1} - t_i)}{\omega}. \quad (10.18)$$

Для вычисления поправок  $\delta_r$  производится численное интегрирование уравнений (10.14) на интервале  $[t_{r-\tau}, t_{I+1}]$  при начальных условиях  $\mathbf{q}_a(t_{r-\tau}), \mathbf{q}_n(t_{r-\tau}) = \mathbf{q}_a(t_{r-\tau}) + \hat{X}_{r-\tau}$  и при задании вектора управления (ускорения)  $\mathbf{g}_{\text{лв}}(\mathbf{u}_{r-\tau})$ . Здесь  $\mathbf{q}_a(t_{r-\tau})$  берется из решения навигационной задачи;  $\hat{X}_{r-\tau}$  — оценка фазового вектора взаимного положения спутников, составленная по результатам бортовых измерений взаимного положения (эта оценка включает и оценку  $\hat{\mathbf{x}}_{r-\tau}$  фазового вектора бокового уклонения); трехмерный вектор коррекции  $\mathbf{u}_{r-\tau}$  скорости включает и коррекцию  $u_{r-\tau}$  боковой скорости.

Результат интегрирования должен быть получен к моменту времени  $t_r$ . Из трехмерного вектора промаха  $\mathbf{q}_n(t_{I+1}) - \mathbf{q}_a(t_{I+1})$  выделяется боковой промах  $z_{pr}$ . Поправка  $\delta_r$  вычисляется по формуле

$$\delta_r = z_{pr} - \hat{x}_{r-\tau}^{(1)} \cos \omega(t_{I+1} - t_{r-\tau}) - \frac{\hat{x}_{r-\tau}^{(2)} + u_{r-\tau}}{\omega} \sin \omega(t_{I+1} - t_{r-\tau}).$$

В качестве ядра алгоритма прогнозирования следует принять формулу (10.18), дополненную условием  $z_i = \tilde{z}_i$ .

Управляющее воздействие вычисляется по формуле

$$u_i = - \frac{\hat{z}_i \omega}{\sin \omega(t_{I+1} - t_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, I), \quad (10.19)$$

полученной при минимизации риска  $R$  при условии, что  $u_{i+1} = \dots = u_I = 0$ .

Управление  $u_i$  с целью защиты от ложных сигналов в цепи исполнения подвергается нелинейному преобразованию типа (10.13).

Формула (10.19) и преобразование типа (10.13) принимаются в качестве ядра алгоритма формирования управления.

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ БОРТОВЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ СИ- СТЕМ

Принятие решения о пригодности бортовой системы к эксплуатации основывается, в частности, на оценке точности управления, обеспечиваемой системой. Такая оценка должна быть достаточно достоверной, и, следовательно, ее необходимо получать при проектировании с возможно более полным учетом реальных условий работы системы, особенностей и нелинейностей, присущих системе. Поэтому при анализе бортовых систем управления космических объектов они рассматриваются как сложные нелинейные системы, находящиеся под воздействием возмущений, как внешних, так и параметрических, приложенных к различным входам. Возмущения эти носят в большей своей части случайный характер, и оценка точности систем требует применения статистических методов.

Точное решение задачи статистического исследования систем, кроме приводимых к линейным [34], возможно лишь в частных случаях.

Приближенным методам оценки статистической точности нелинейных систем управления посвящено много работ. Библиография их достаточно известна.

Большое число работ посвящено методам статистической линеаризации, в ряде случаев удобным для применения в инженерной практике. Для систем, описываемых уравнениями высокого порядка с большим числом нелинейностей, резко возрастает громоздкость уравнений, получаемых в результате применения методов статистической линеаризации, что снижает их практическую ценность. Кроме того, возможность оценки точности методов статистической линеаризации не вытекает из процедуры их использования и требует привлечения других приемов статистического исследования.

Наиболее адекватен природе явлений в стохастических системах метод Монте-Карло, который применим к любым системам управления, и оценка погрешностей которого проста. Точность метода Монте-Карло определяется числом  $S$  реализованных при расчетах процессов управления. Если расчет одного процесса длится долго, то общее число реализаций не удастся взять большим. При этом погрешности оценок точности управления в ряде случаев становятся недопустимо большими.

Таким образом, существует противоречие между временем получения искомого оценок и их точностью. Сгладить это противоречие удастся применением методов эквивалентных возмущений [15]. Сначала по специальным правилам исследователь вычисляет неслучайные возмущения, эквивалентные в определенном смысле исходным случайным, а затем проводит ряд испытаний системы при найденных возмущениях и на основании этих испытаний получает

оценку статистической точности системы при исходных возмущениях.

Однако методы эквивалентных возмущений обладают тем недостатком по сравнению с прямым методом Монте-Карло, что они приводят при росте числа возмущений к резкому возрастанию трудоемкости вычислений, так как число  $S$  требуемых реализаций в этих методах жестко связано с числом  $N$  возмущений.

При анализе точности бортовых терминальных систем приходится, помимо тех возмущений, которые учитывались при синтезе системы, принимать во внимание для повышения достоверности анализа и другие возмущающие факторы, влиянием которых на динамику процессов управления при синтезе можно было пренебречь. Прием разложения возмущений, представляемых случайными функциями времени  $T$ , в виде отрезков канонических рядов также умножает число  $N$  возмущений. Для большинства бортовых терминальных систем число  $N=30\ldots 100$ . Поэтому применительно к исследованию статистической точности терминальных систем с большим числом возмущений возникает задача разработки методов, свободных от недостатков метода Монте-Карло и методов [15]. Один из путей решения этой задачи состоит в таком ослаблении требований к эквивалентности возмущений, при котором часть условий эквивалентности выполняется точно, а часть — приближенно.

Для выработки требований, которым должны отвечать разрабатываемые методы, целесообразно классифицировать системы управления по трудоемкости расчета процесса управления.

К первому типу отнесем системы со сравнительно небольшой трудоемкостью расчета процесса управления. Для таких систем можно производить статистический анализ с необходимой степенью точности по методу Монте-Карло при ограниченном возможностях практического счета на ЦВМ объеме вычислительной работы.

Ко второму типу отнесем системы с большей трудоемкостью расчета, затрудняющей применение метода Монте-Карло к анализу этих систем.

К третьему типу — системы, для которых невозможно получить оценки статистической точности системы по Монте-Карло из-за очень большой трудоемкости расчета процесса управления.

Системы управления первого типа могут допускать сравнительно большое число реализаций процессов управления при статистическом анализе. Обработка результатов реализации, которая производится по методу эквивалентных возмущений, должна быть в этом случае простой, не требующей больших затрат машинного времени. Указанным требованиям отвечает метод I, в соответствии с которым число  $S$  реализаций процессов управления составляет  $(6\ldots 12)N$  (где  $N$  — число возмущений). Метод I позволяет повысить точность статистического анализа систем по сравнению с методом Монте-Карло без повышения объема вычислений.

При статистическом анализе нелинейных систем второго типа следует стремиться к сокращению числа реализаций процессов

управления при сохранении достаточно высокой точности анализа за счет усложнения алгоритма обработки результатов реализации (метод II,  $S=2N$ ).

При анализе систем третьего типа приходится с целью максимального сокращения числа реализаций процессов управления допускать снижение точности анализа. Наиболее пригодным в этом случае методом эквивалентных возмущений является метод III, в соответствии с которым минимальное число  $S \approx 2\sqrt{N}$ .

### 11.1. Постановка задачи

Пусть совокупность нелинейных дифференциальных, либо дифференциально-разностных уравнений, описывающая систему автоматического управления, имеет для каждой выборки случайных возмущений, действующих на систему управления, единственное решение

$$x^{(k)} = \Phi_k(V_1, V_2, \dots, V_N) \quad (k=1, 2, \dots, K). \quad (11.1)$$

Здесь  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(K)}$  — выходные координаты системы управления, которые могут включать в себя отдельные компоненты векторов  $x_i$  ( $i=1, \dots, I+1$ ) координат состояния объекта управления;  $V_1, V_2, \dots, V_N$  — случайные величины, характеризующие постоянные в процессе управления случайные возмущения, ошибки измерения, отклонения параметров системы от номинальных, разложения случайных функций времени.

В дальнейшем считается, что случайные величины  $V_1, V_2, \dots, V_N$  приведены к канонической системе несвязанных случайных величин, число  $N$  которых конечно.

Предполагается, что заданные законы распределения величин  $V_1, V_2, \dots, V_N$  позволяют вычислять моменты любых порядков. Эти моменты конечны. Кроме того, без нарушения общности полагается, что математические ожидания случайных величин равны нулю и величины  $V_1, V_2, \dots, V_N$  имеют нулевые моменты нечетных порядков:

$$\mu_{n_1 n_2 \dots n_{2r}} = M[V_{n_1} V_{n_2} \dots V_{n_{2r}}] \quad (r=1, 2, \dots; n_1, n_2, \dots, n_{2r}=1, 2, \dots, N) \quad (11.2)$$

$$\mu_{n_1 n_2 \dots n_{2l-1}} = 0 \quad (l=1, 2, \dots; n_1, n_2, \dots, n_{2l-1}=1, 2, \dots, N).$$

С учетом оговоренных условий будем определять моменты первых двух порядков тех координат, которые характеризуют точность управления. Знание математического ожидания  $\mu_k^{(1)}$  и дисперсии  $\mu_k^{(2)}$  выходных координат  $x^{(k)}$ , как правило, достаточно для инженерных оценок точности систем управления. Распространение метода на получение оценок моментов более высокого порядка не составляет принципиальных трудностей.

## 11.2. Метод I

Полагая, что функции  $\Phi_k$  и  $\Phi_k^2$  представляются в виде  $N$ -мерных полиномов по  $V_1, V_2, \dots, V_N$  степени  $q$ , вычислим в соответствии с методом эквивалентных возмущений искомые величины  $\mu_k^{(1)}, \mu_k^{(2)}$  по формуле

$$\mu_k^{(r)} = \frac{1}{c^2} \sum_{s=1}^S \alpha_s \Phi_k^r(\xi_{s1}, \xi_{s2}, \dots, \xi_{sN}) + \frac{c^2 - 1}{c^2} \Phi_k^r(0, 0, \dots, 0). \quad (11.3)$$

Здесь  $c$  — вещественное число, а веса  $\alpha_s$  ( $s=1, 2, \dots, S$ ) и частные значения (реализации)  $\xi_{s1}, \xi_{s2}, \dots, \xi_{sN}$  величин  $V_1, V_2, \dots, V_N$ , при которых вычисляются  $S$  частных значений функции  $\Phi_k^r(V_1, V_2, \dots, V_N)$ , должны удовлетворять системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^S \alpha_s = 1 \quad (s=1, 2, \dots, S), \\ & \sum_{s=1}^S \alpha_s \xi_{sn_1} \xi_{sn_2} \dots \xi_{sn_{2l}} = \mu_{n_1 n_2 \dots n_{2l}} \\ & \left( l=1, 2, \dots, \frac{1}{2}q - \left\{ \frac{1}{2}q \right\}; n_1, n_2, \dots, n_{2l} = 1, 2, \dots, N \right), \quad (11.4) \\ & \sum_{s=1}^S \alpha_s \xi_{sn_1} \xi_{sn_2} \dots \xi_{sn_{2l-1}} = 0 \\ & \left( l=1, 2, \dots, \frac{1}{2}q + \left\{ \frac{1}{2}q \right\}; n_1, n_2, \dots, n_{2l-1} = 1, 2, \dots, N \right), \end{aligned}$$

где  $\{ \}$  означают дробную часть числа.

Если функции  $\Phi_k, \Phi_k^2$  не могут быть представлены точно в виде полиномов  $q$ -го порядка по  $V_1, V_2, \dots, V_N$ , то вычисления по формулам (11.3), (11.4) дают некоторое приближенное решение задачи. Поставленная задача решается с точным учетом собственных моментов возмущений до  $q$ -го порядка, а смешанных — до третьего порядка.

Значения  $\alpha_s, \xi_{sn}$  ( $s=1, 2, \dots, S; n=1, 2, \dots, N$ ) будем формировать по правилу

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \frac{1}{S} \quad (s=1, 2, \dots, S), \quad \xi_{sn} = \sqrt{\mu_{nn}} \sum_{g=1}^G \beta_g \alpha_{sng} \\ & \left( s=1, 2, \dots, \frac{1}{2}S; n=1, 2, \dots, N; g=1, 2, \dots, G \right), \quad (11.5) \\ \xi_{sn} &= -\sqrt{\mu_{nn}} \sum_{g=1}^G \beta_g \alpha_{sng} \\ & \left( s=\frac{1}{2}S+1, \frac{1}{2}S+2, \dots, S; n=1, 2, \dots, N; g=1, 2, \dots, G \right), \end{aligned}$$

где  $\alpha_{sn^*}$  — элемент ортогональной по столбцам матрицы  $\|\alpha_{sn^*}\|$ , равный  $+1$  или  $-1$ ; каждому возмущению  $V_n$  соответствуют  $G$  столбцов матрицы  $\|\alpha_{sn^*}\|$ , так что зависимость  $n^* = (n, g)$  однозначна;  $s^* = s - \frac{1}{2}S$ ;  $\beta_g$  — коэффициент.

Построение входящей в (11.5) матрицы  $\|\alpha_{sn^*}\|$  и определение величин коэффициентов  $\beta_g$  производится в результате специальных исследований свойств комбинаций матриц Адамара и решения нелинейной системы уравнений, получаемой из условий (11.4), записанных относительно собственных моментов до выбранного  $q$ -го порядка с учетом (11.5) и свойств матрицы  $\|\alpha_{sn^*}\|$ . Методика этого исследования опубликована в [6].

Воспользовавшись конечными результатами работы [6], приведем в качестве примера алгоритм формирования эквивалентных возмущений для определения статистической точности системы любой сложности с числом возмущений  $N < 96$  при  $q=9$ :

$$\xi_{sn} = \sqrt{\mu_{nn}} \sum_{g=1}^G \beta_g \{(1 - 2\theta_{bh})(1 - 2\theta_{bf})(1 - 2\vartheta_{df})\} \left( s = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}S \right), \quad (11.6)$$

$$\xi_{sn} = -\sqrt{\mu_{nn}} \sum_{g=1}^G \beta_g \{(1 - 2\theta_{b^*h})(1 - 2\theta_{b^*f})(1 - 2\vartheta_{d^*f})\} \left( s = \frac{1}{2}S + 1, \frac{1}{2}S + 2, \dots, S \right). \quad (11.6a)$$

Здесь величины в фигурных скобках представляют собой элементы матрицы  $\|\alpha_{sn^*}\|$ ,

$$\begin{aligned} b &= \left[ \frac{s-1}{S^*} \right] + 1, \quad d = s - S^* \left[ \frac{s-1}{S^*} \right], \\ b^* &= \left[ \frac{s^*-1}{S^*} \right] + 1, \quad d^* = s^* - S^* \left[ \frac{s^*-1}{S^*} \right], \\ h &= \left[ \frac{n^*-1}{S^*} \right] + 1, \quad f = n^* - S^* \left[ \frac{n^*-1}{S^*} \right]; \\ n^* &= n - 4S^*(s-1) + 1; \quad G=6; \quad S=1152; \quad S^*=24. \end{aligned} \quad (11.7)$$

В формулах (11.7) знак  $[ ]$  означает целую часть числа.

Величина  $\theta_{bh}$  определяется как число, стоящее в  $h$ -ом разряде константы  $\theta_b$ , записанной в двоичном коде. Константы  $\theta_b$  указаны в табл. 1. Величины  $\theta_{bf}$ ,  $\vartheta_{df}$ ,  $\theta_{b^*h}$ ,  $\vartheta_{d^*f}$  определяются аналогично при помощи констант  $\theta_b$  и  $\vartheta_d$  (см. табл. 1).

Значения  $\beta_g$  приведены в табл. 2 для нормального ограниченного закона распределения возмущений с предельным значением  $\Delta = 3\sqrt{\mu_{nn}}$  и равномерного закона.

Таблица 1

b, d	Константы						b, d	Константы					
	θ <sub>b</sub>			φ <sub>d</sub>				θ <sub>b</sub>			φ <sub>d</sub>		
1	012	066	05	000	000	00	13	022	005	72	000	077	77
2	370	103	44	334	233	42	14	340	160	33	334	244	35
3	122	732	02	156	115	61	15	112	751	75	156	162	16
4	064	451	01	267	026	70	16	054	432	76	267	051	07
5	177	221	17	133	413	34	17	047	242	60	133	464	43
6	246	375	46	055	605	56	18	276	316	31	055	672	21
7	314	604	43	026	702	67	19	324	667	34	026	775	10
8	221	252	57	213	321	33	20	211	231	20	213	356	44
9	343	437	51	305	530	55	21	373	454	26	305	547	22
10	105	114	14	342	634	26	22	135	177	63	342	643	51
11	051	747	12	161	316	13	23	061	724	65	161	361	64
12	237	560	50	270	527	05	24	207	503	27	270	055	72

Таблица 2

Кoeffици- ент	Нормаль- ный огра- ниченный закон	Равномерный закон		Кoeffици- ент	Нормаль- ный огра- ниченный закон	Равномерный закон	
		n < 47	n > 47			n < 47	n > 47
β <sub>1</sub>	0,4535	0,8896	0,1842	β <sub>4</sub>	0,5019	0,0763	0,1303
β <sub>2</sub>	0,5019	0,1842	0,0763	β <sub>5</sub>	0,3207	0,1303	0,8896
β <sub>3</sub>	0,2683	0,4244	0	β <sub>6</sub>	0,3794	0	0,4244

Эти коэффициенты вычислены с учетом величин моментов равномерного распределения до девятого порядка, определяемых известными соотношениями [34], и собственных моментов  $\mu_n^{(p)}$  нормального ограниченного распределения величины  $V_n$ , определяемых соотношениями

$$\mu_{V_n}^{(2l-1)} = 0,$$

$$\mu_{V_n}^{(2l)} = (2l-1)!! \mu_{nn}^l \left[ 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\Delta}^2\right)}{\Phi(\bar{\Delta})} \sum_{i=1}^l \frac{\bar{\Delta}^{2i-1}}{(2i-1)!!} \right], \quad (11.8)$$

где  $\bar{\Delta} = \Delta/\sqrt{\mu_{nn}}$ ;  $\Phi(\bar{\Delta})$  — нормальная функция распределения вероятностей.

Анализ чисел, получаемых по алгоритму (11.6), показывает, что их характеристики, формально соответствующие смешанным моментам высших порядков (выше третьего) случайных чисел, одинаковы для ряда возмущений  $V_n$ . Для того чтобы они были различными (псевдослучайно зависели от номера  $n$ ), целесообразно знаки коэффициентов  $\beta_g$ , представленных в табл. 3, определять по правилу

$$\text{sign } \beta_g = -1 \text{ при } g = n - \left[ \frac{n}{G} \right] G \text{ или } g = n + 1 - \left[ \frac{n+1}{G} \right] G,$$

и  $\text{sign } \beta_g = 1$  в остальных случаях. (Знак [ ] означает целую часть числа.)

При этом сами величины  $\xi_{sn}$  изменяются псевдослучайно при изменении  $n$  от 1 до  $N$ . В этом смысле метод I приближается к методу Монте-Карло, с той разницей, что отдельные моменты выборок возмущений строго соответствуют заданным.

### 11.3. Метод II

Рассмотрим возможность дальнейшего сокращения числа  $S$  реализаций процессов управления для систем с нечетной функцией  $\Phi_k$ .

Будем вначале полагать, что функция  $\Phi_k$  может быть представлена точно в виде  $N$ -мерного полинома третьего порядка относительно  $V_n$ . В качестве эквивалентных возмущений  $\xi_{sn}$  и весов  $\alpha_s$  будем использовать величины, формируемые по правилу

$$\alpha_s = \frac{2}{S} \zeta_1, \quad \xi_{sn} = \xi_1 \sqrt{\mu_{nn}} \alpha_{sn} \quad \left( s = 1, 2, \dots, \frac{1}{2} S \right);$$

$$\alpha_s = \frac{2}{S} \zeta_2, \quad \xi_{sn} = \xi_2 \sqrt{\mu_{nn}} \alpha_{sn} \quad \left( s = \frac{1}{2} S + 1, \frac{1}{2} S + 2, \dots, S \right),$$

где  $\zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2$  — коэффициенты, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \zeta_1 + \zeta_2 &= 1, \\ \zeta_1 \xi_1^2 + \zeta_2 \xi_2^2 &= 1, \\ \zeta_1 \xi_1^3 + \zeta_2 \xi_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (11.9)$$

При этом удовлетворяется система уравнений (11.4), составленная с учетом моментов исходных возмущений до третьего порядка, и, следовательно, может быть вычислено точное значение величины  $\mu_k^{(1)}$ .

Однако, средневзвешенное по весам  $\alpha_s$  значение  $\overline{\Phi_k^2}$  реализованных величин  $\Phi_k^2$  при этом отличается от величины  $\mu_k^{(2)}$ . (для выполнения равенства  $\overline{\Phi_k^2} = \mu_k^{(2)}$ , необходимо, чтобы уравнения (11.4) составлялись с учетом моментов исходных возмущений до шестого порядка).

При соответствующем выборе матрицы  $\|a_{sn}\|$  появляется возможность на основании приближенного вычисления отдельных коэффициентов полинома определить поправку к значению  $\overline{\Phi_k^2}$ , учитывая моменты возмущений выше третьего порядка.

Если функция  $\Phi_k$  не представляется точно полиномом третьего порядка, вычисление величин  $\mu_k^{(1)}$  и  $\mu_k^{(2)}$  производится с погрешностью, зависящей от выбора значений  $\zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2$ . Эта погрешность тем меньше, чем ближе режим работы системы (в смысле условий работы нелинейных элементов) при действии на нее эквивалентных возмущений к режиму в реальных условиях работы системы. Так, например, при ограниченной эффективности управляющего

органа системы количественная оценка «близости» указанных режимов работы может быть проведена при помощи величины

$$\chi(\xi_r) = M \{ [P(u) - P_r(u)]^2 \} \quad (r=1,2), \quad (11.10)$$

где  $P(u)$  и  $P_r(u)$  — плотности вероятности величины  $u$  управляющей координаты в процессе управления при реальных условиях работы системы и при действии на систему эквивалентных возмущений.

Предельная зависимость  $\chi(\xi_1)$  при  $N \rightarrow \infty$  и выполнении условий теоремы Ляпунова относительно возмущений представлена на рис. 21.

Веса  $\zeta_1, \zeta_2$ , с которыми результаты реализаций процесса управления учитываются при вычислении моментов координат, целесообразно принимать обратно пропорциональными величине  $\chi(\xi_r)$ , т. е. дополнительно к (11.9) следует принять

$$\eta^* = \zeta_1 \chi(\xi_1) - \zeta_2 \chi(\xi_2) = 0; \quad (11.11)$$

График функции  $\eta(\zeta_1)$ , построенный с учетом (11.9), представлен на рис. 22. Из его рассмотрения следует что равенство (11.11) приближенно выполняется в диапазоне  $\zeta_1 = 0,4 \dots 0,6$ . Для того чтобы иметь возможность вычислять поправку к  $\bar{\Phi}_k^2$ , необходимо так выбирать  $\zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2$ , чтобы при  $\eta^* \approx 0$   $\xi_1 \neq \xi_2$ . Воспользовавшись результатами выбора в [68] матрицы  $\|a_{sn}\|$ , обладающей необходимыми свойствами, приведем в качестве примера основные формулы для вычисления моментов второго порядка координаты системы с

$$\begin{aligned} \mu_k^{(2)} = & 0,9471 \sum_{s=1}^S \alpha_s \Phi_k^2(\xi_{s1}, \xi_{s2}, \dots, \xi_{sN}) + 0,0529 \sum_{n=1}^N A_n^2 \mu_{nn} + \\ & + \sum_{n=1}^N 2A_n B_n (\mu_{Vn}^{(4)} - 0,9644 \mu_{nn}^2) + \sum_{n=1}^N B_n^2 (\mu_{Vn}^{(6)} - \mu_{nn}^3) \quad (k=1,2, \dots, K), \end{aligned} \quad (11.12)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A_n = & 4,4761 \left[ \sum_{s=\frac{1}{2}S+1}^S \Phi_k(\xi_{s1}, \xi_{s2}, \dots, \xi_{sN}) \text{sign } \xi_{sn} - \right. \\ & \left. - 2,9840 \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}S} \Phi_k(\xi_{s1}, \xi_{s2}, \dots, \xi_{sN}) \text{sign } \xi_{sn} \right] \frac{1}{\sqrt{\mu_{nn}}}; \\ B_n = & \left[ 3,3545 \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}S} \Phi_k(\xi_{s1}, \xi_{s2}, \dots, \xi_{sN}) \text{sign } \xi_{sn} - \right. \\ & \left. - 3,8401 \sum_{s=\frac{1}{2}S+1}^S \Phi_k(\xi_{s1}, \xi_{s2}, \dots, \xi_{sN}) \text{sign } \xi_{sn} \right] \frac{1}{\sqrt{\mu_{nn}^3}}; \end{aligned}$$

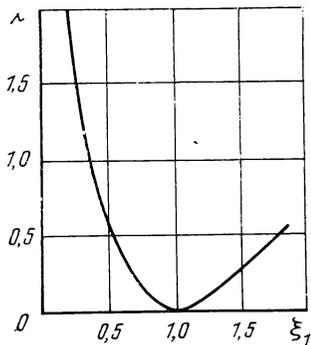


Рис. 21

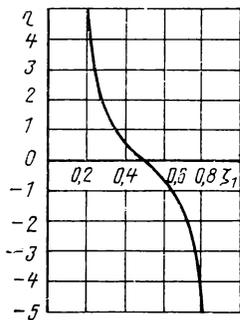


Рис. 22

$\mu_{V_n}^{(2l)}$  — собственный момент порядка  $2l$  исходного возмущения  $V_n$ ;

$$\alpha_s = 0,006250 \quad \left(s = 1, 2, \dots, \frac{1}{2} S\right),$$

$$\alpha_s = 0,009375 \quad \left(s = \frac{1}{2} S + 1, \frac{1}{2} S + 2, \dots, S\right), \quad S = 128.$$

Алгоритм формирования эквивалентных возмущений при этом имеет вид

$$\xi_{sn} = 1,07966 (1 - 2\theta_{bh})(1 - 2\theta_{bf})(1 - 2\vartheta_{df}) \quad \left(s = 1, 2, \dots, \frac{1}{2} S\right),$$

$$\xi_{sn} = -0,94316 (1 - 2\theta_{b^*h})(1 - 2\theta_{b^*f})(1 - 2\vartheta_{d^*f}) \quad (11.13)$$

$$\left(s = \frac{1}{2} S + 1, \frac{1}{2} S + 2, \dots, S\right),$$

где  $b, b^*, d, d^*, s^*$  вычисляются так же, как в (11.7) при  $S^* = 8$ ,

$$h = \left[\frac{n}{S^*}\right] + 1, \quad f = n + 1 - S^* \left[\frac{n}{S^*}\right],$$

а  $\theta_{bh}, \theta_{bf}, \theta_{b^*h}, \theta_{b^*f}, \vartheta_{df}, \vartheta_{d^*f}$  определяются, как и в предшествующем примере, при помощи констант  $\theta_b$  и  $\vartheta_d$ , приведенных в табл. 3.

Таблица 3

Константы	$b, d$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$\theta_b$	000	125	063	146	017	132	074	151
$\vartheta_d$	000	027	116	055	072	164	131	143

## 11.4. Метод III

Минимальное число  $S$  реализаций процесса управления, по которым может быть получена методом эквивалентных возмущений оценка статистической точности системы, составляет  $S=N+1$ . При этом эквивалентные возмущения  $\xi_{sn}$  ( $s=1, 2, \dots, S$ ;  $n=1, 2, \dots, N$ ) должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \xi_{sn} &= 0; & \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \xi_{sn}^2 &= \mu_{nn}; \\ \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \xi_{sn_1} \xi_{sn_2} &= 0 \quad (n, n_1, n_2 = 1, 2, \dots, N; n_1 \neq n_2). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Для ряда систем даже такое число  $S$  оказывается слишком большим.

Потребуем, чтобы эквивалентные возмущения удовлетворяли более слабым условиям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \xi_{sn} &= 0, & \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \xi_{sn}^2 &= \mu_{nn}, \\ \max \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \frac{\xi_{sn_1}}{\sqrt{\mu_{n_1 n_1}}} \frac{\xi_{sn_2}}{\sqrt{\mu_{n_2 n_2}}} &\rightarrow \min, & S &< N+1 \end{aligned} \quad (11.15)$$

$(n, n_1, n_2 = 1, 2, \dots, N; n_1 \neq n_2).$

Можно предполагать, что погрешность определения моментов первых порядков в результате вычисления среднеарифметического и среднеквадратического значений реализованных координат при выполнении условий (11.15) является в среднем наименьшей для данного числа  $S$ .

Будем рассматривать совокупность величин  $\xi_{sn}/\sqrt{\mu_{nn}}$  ( $s=1, 2, \dots, S$ ) как  $S$ -разрядный набор из  $+1$  и  $-1$ . Воспользуемся принятым в теории кодов понятием расстояния между наборами, определяемого как число разрядов, в которых эти наборы различаются. Тогда последнее из условий (11.15) аналогично требованиям, предъявляемым к расстоянию между сообщениями в оптимальных кодах. Это требование может быть выполнено с использованием матриц Адамара. Выполнение других требований не встречает затруднений.

Приведем в качестве примера алгоритм формирования эквивалентных возмущений для системы управления с числом возмущений  $N < 64$  сначала для  $S=16$ :

$$\xi_{sn} = \sqrt{\mu_{nn}} \delta_{sh} \delta_{sf}^* \quad (s=1, 2, \dots, 8), \quad (11.16)$$

$$\xi_{sn} = -\sqrt{\mu_{nn}} \delta_{s^*h} \delta_{s^*f}^* \quad (s=9, 10, \dots, 16), \quad (11.16a)$$

где  $h = n + 1 - 8 \left[ \frac{n}{8} \right]$ ,  $f = \left[ \frac{n}{8} \right] + 1$ .

Матрицы  $\|\theta_{sh}^*\|$  ( $\|\theta_{s^*h}\|$ ) и  $\|\vartheta_{sf}\|$  ( $\|\vartheta_{s^*f}\|$ ) имеют следующий вид (единица опущена):

Матрица  $\|\theta_{sh}^*\|$

$+$   $+$   $+$   $+$   $+$   $+$   $+$   $+$   
 $+$   $+$   $-$   $-$   $-$   $+$   $+$   $+$   
 $+$   $+$   $-$   $+$   $+$   $-$   $-$   $-$   
 $+$   $-$   $-$   $+$   $-$   $+$   $+$   $-$   
 $+$   $+$   $+$   $-$   $-$   $-$   $+$   $-$   
 $+$   $-$   $+$   $+$   $-$   $-$   $-$   $+$   
 $+$   $-$   $-$   $-$   $+$   $+$   $+$   $+$   
 $+$   $-$   $+$   $-$   $+$   $+$   $-$   $-$

Матрица  $\|\vartheta_{sf}\|$

$+$   $+$   $+$   $+$   $+$   $+$   $+$   $+$   
 $+$   $-$   $+$   $-$   $+$   $-$   $+$   $-$   
 $+$   $+$   $-$   $-$   $+$   $+$   $-$   $-$   
 $+$   $-$   $-$   $+$   $+$   $-$   $-$   $+$   
 $+$   $+$   $+$   $+$   $-$   $-$   $-$   $-$   
 $+$   $-$   $+$   $-$   $-$   $+$   $-$   $+$   
 $+$   $+$   $-$   $-$   $-$   $-$   $+$   $+$   
 $+$   $-$   $-$   $+$   $-$   $+$   $+$   $-$

При нечетной функции  $\Phi_k$  можно ограничиться использованием только восьми сочетаний возмущений, получаемых по (11.16).

При увеличении числа  $S$  целесообразно, разбивая сочетания возмущений последовательно на  $Z$  групп по 8 сочетаний, формировать первую группу возмущений  $\xi_{sn}^{(1)}$  ( $s=1, 2, \dots, 8$ ) по правилу (11.16), а некоторую  $z$ -ю группу по правилу

$$\xi_{sn}^{(z)} = \xi_{sn}^{(1)} \vartheta_{zf}^* \quad (z = 1, 2, \dots, Z). \quad (11.17)$$

## 11.5. О точности методов

Универсальной, пригодной для любых систем управления, оценки точности метода эквивалентных возмущений не существует. Можно провести лишь очевидные сопоставления различных вариантов метода между собой, приводящие к выводу, что точность метода растет с числом  $S$  реализаций процессов управления. Обычно ограничиваются, кроме того, утверждением, что при одном и том же числе  $S$  погрешность оценки статистической точности системы по методу эквивалентных возмущений в среднем меньше, чем при вычислениях по методу Монте-Карло. Для получения более близкой оценки погрешности метода, зависящей от типа анализируемой системы управления, следует проводить вычисления моментов координат при разных выборках чисел  $\xi_{sn}$ , получаемых изменением нумерации возмущений, и оценивать разброс вычисляемых моментов координат системы.

Укажем способ вычисления несколько завышенной оценки погрешности методов I, III применительно к нелинейным автоматическим системам с линейным (или близким к линейному) объектом управления для случая, когда можно считать, что выходная координата подчиняется нормальному закону распределения.

Определяемая дисперсия  $M(x_i^2)$  выходной координаты  $x_i = x_i^{(1)}$  в дискретный момент времени  $i$  складывается из условной дисперсии  $D_i$ , полученной для известной реализации предыстории процесса управления, и дисперсии  $D(\hat{x}_i/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})$  условного среднего  $\hat{x}_i$  выходной координаты:

$$M(x_i^2) = D_i + D(\hat{x}_i/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1}). \quad (11.18)$$

Заметим, что величина  $D_i$  при  $i=I+1$  характеризует предельные точностные возможности  $R^*$  терминального управления линейным объектом по риску  $R=M(x_{I+1}^2)$  (см. разд. 4.6).

Соответственно уравнению (11.18) дисперсия погрешности  $\delta$  оценивания момента  $M(x_i^2)$  определяется соотношением

$$D\{\delta[M(x_i^2)]\} = D\{\delta(D_i)\} + D\{\delta[D(\hat{x}_i/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})]\}.$$

Если действующие на систему возмущения подчиняются нормальному закону распределения вероятностей, то погрешности  $\delta(D_i)$  и  $\delta[D(\hat{x}_i/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})]$  метода Монте-Карло подчиняются нормальным законам с дисперсиями

$$D\{\delta(D_i)\} = \frac{3D_i}{S}, \quad D\{\delta[D(\hat{x}_i/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})]\} = \frac{3D(\hat{x}_i/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})}{S}.$$

Для получения оценки с некоторым запасом положим, что при переходе к методу эквивалентных возмущений дисперсия погрешности  $\delta[D(\hat{x}_i/\bar{y}_i, \bar{u}_{i-1})]$  остается неизменной. Дисперсия погрешности определения по методам I и II величины  $D_i$  при линейном объекте управления равна нулю. Поэтому погрешность  $\delta_\delta$  методов I и II эквивалентных возмущений оценивается соотношением

$$D\{\delta_\delta[M(x_i^2)]\} = \frac{3[M(x_i^2) - D_i]}{S} \approx \frac{3(\mu_1^{(2)} - R^*)}{S}, \quad (11.19)$$

где  $\mu_1^{(2)}$  вычисляется по (11.3) или (11.12);  $R^*$  вычисляется по (5.24) с заменой индекса  $I$  на  $i$ .

Расчеты по формуле (11.19) применительно к конкретным бортовым терминальным системам показали, что выигрыш в точности оценивания вероятностных характеристик системы при переходе от метода Монте-Карло на методы эквивалентных возмущений характеризуется в среднем величиной  $D(\delta)/D(\delta_\delta) = 5...20$ . Более детальная оценка точности методов, проведенная путем сопоставления результатов расчета вероятностных моментов координат системы при различных выборках чисел, дает величину  $D(\delta)/D(\delta_\delta) = 15...80$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в книге методы теории бортовых терминальных систем управления и описанные принципы их реализации, разумеется, не составляют всего аппарата построения систем. Однако они в сочетании с другими результатами теории и с другими, может быть более известными, принципами построения, дают возможность решать многие прикладные задачи исследования и проектирования бортовых терминальных систем управления. Таким образом, эти методы входят в состав аппарата проектирования систем, пополняя арсенал средств, которые ведут конструктора от поставленных техническим заданием требований к заключительному акту сдачных испытаний серийных систем в составе объектов управления. При этом рабочие методы проектирования доведены до стадии, при которой инженер-проектант может ими пользоваться в своей по-

вседневной деятельности — созданы библиотеки программ для синтеза и анализа систем на вычислительных машинах.

Работы, выполняемые на основе изложенных в книге методов и приемов, не исчерпывают обязанностей специалиста в области управления, участвующего в сложном, многостадийном, непрерывно развивающемся и совершенствующемся и весьма трудоемком творческом процессе проектирования бортовых систем.

Рассмотрим, что в целом должен знать и делать тот, кто отвечает за разработку принципов построения и алгоритмов работы систем, гарантируя устойчивость, качество и надежность управления.

Прежде всего нужно знать детально все характеристики объекта управления, которые могут повлиять на выбор системы управления. Нужно знать математическую модель объекта, включающую полное описание его динамики в возмущенном движении, характеристики возмущающих воздействий, способы получения информации о состоянии объекта и точностные характеристики информационных трактов, если они выбраны конструктором объекта или аппаратуры управления. Нужно создавать упрощенные модели объекта, сохраняющие основные черты его динамики, но простые настолько, чтобы их можно было использовать в аналитических оценочных исследованиях и в предварительном моделировании, которое нередко удобно проводить на аналоговых вычислительных машинах при сравнительно невысокой точности, но с большой гибкостью при выборе вариантов. Но затем нужно снова вернуться к полной модели объекта, пополнить ее полученными в процессе проектирования дополнительными уточнениями для использования ее в процедуре статистического синтеза алгоритма и с тем, чтобы на этапе анализа спроектированной системы лабораторные «полеты» управляемых объектов на цифровых или аналого-цифровых комплексах возможно точнее соответствовали предстоящим натурным полетам. Наконец, модификации модели объекта используются при отработке систем на специальных стендах, на которых часть системы моделируется математически на вычислительных машинах, а другая часть берется натурной или моделируется физически — блоки аппаратуры управления или даже сами объекты, которым соответствующими устройствами подвески доставляется число степеней свободы, по возможности приближающее условия модельного движения к натурным.

В книге мало места уделено вопросам конкретной аппаратной реализации систем. Во многом аппаратные решения при терминальном управлении совпадают с решениями в задачах нетерминального типа. В едином ключе строятся бортовые вычислительные комплексы, в которых реализуются, наряду с высокими вычислительными мощностями, идеология устойчивости к отказам (толерантности), возможность перепрограммирования в полете и т. п. Но есть и особенности в приборном выполнении терминальных систем, касающиеся главным образом измерительных трактов, доставляющих основную информацию для ведения процесса терми-

нального управления и, в меньшей мере, исполнительных органов систем управления.

При синтезе систем чрезвычайно важно знать основные характеристики информационных трактов — помехи и шумы, сопутствующие измерениям координат состояния объекта управления. Важно также знать возможности получения косвенной информации и возможности декомпозиции, распараллеливания информационных трактов в интересах повышения надежности управления.

В этих же целях нужно знать архитектурный облик и основные характеристики бортового вычислительного комплекса, возможности размещения в нем выделенного «ядра» алгоритма управления, возможности последовательной и параллельной декомпозиции вычислений при реализации алгоритма управления в БЦВМ. Разумеется, необходимо знание и таких характеристик вычислительного комплекса, как его разрядность, тактность и другие показатели, которые могут повлиять на динамику и точность системы управления в целом за счет реализации ее алгоритмов в цифровом виде.

Отметим, что отвечающий за алгоритм управления должен работать в тесном контакте с разработчиками программ для БЦВМ. Полученный в результате синтеза алгоритм управления, если его даже удастся представить в простой конечной форме — (раньше этот этап назывался разработкой «закона регулирования») — еще не является исходным материалом для работы программиста. Требуется создание иного представления алгоритма — формализованного так, чтобы работа программиста была максимально облегчена и, главное, чтобы не осталось места возможным алогичностям и неоднозначностям в толковании процедуры вычислений. Большое значение здесь имеют методы автоматизации программирования на БЦВМ с применением специально ориентированных машинных языков и методов.

Весьма важным в процессе создания бортовых терминальных систем управления является этап подготовки, проведения и анализа результатов натурных испытаний. За этот этап также отвечает разработчик принципов построения и алгоритмов управления. Разумеется, здесь ответственность становится коллективной, совместной с создателями объекта, аппаратуры системы управления, телеметрии и всех служб, обеспечивающих прием, переработку и анализ результатов испытаний. В этот нелегкий коллективный труд отвечающий за динамику и точность системы вкладывает свои знания результатов анализа модельных испытаний системы — он знает, что вероятнее всего нужно ожидать в результате натурных испытаний. Он участвует в формировании требований к телеметрированию работы системы в полете, в создании перечня подлежащих передаче на землю параметров, в назначении точности их регистрации и т. д., а также в создании методики анализа результатов испытаний, которая может содержать как упрощенные оценочные приемы для ручного расчета, так и полную процедуру анализа для постановки на универсальной или специализированной ЦВМ в наземных условиях.

При этом следует наилучшим образом использовать тот сравнительно небольшой объем информации, который дает телеметрия, эффективно использовать косвенные показатели работы системы на основе изучения телеметрических данных, полученных в том же полете, о поведении других систем и агрегатов объекта. В конечном итоге по малой выборке (малому числу натуральных полетов) необходимо получить приемлемое приближение к статистически более представительной выборке, полученной в результате статистического анализа точности при проектировании системы.

Разработчик принципов построения и алгоритмов должен участвовать в разборе тех эпизодов, когда система в полете работала с замечаниями, т. е. функционировала не так, как того от нее ожидали. Этот этап относится к процессу доводки системы и нередко требует проведения значительных дополнительных исследований перед передачей системы в составе объекта в серийное производство.

Отметим некоторые перспективные проблемы теории бортовых терминальных систем управления. Эти проблемы возникают в связи с наметившимся в последние годы новым кругом задач терминального управления, характерных для перспективных программ космических исследований. Системы управления, реализующие эти задачи, могут быть названы системами терминального управления нового поколения. Они могут быть предназначены для управления объектами, обладающими высокой приспособляемостью в широком смысле этого слова. В еще большей степени, чем это было отмечено в этой книге, будет актуальной способность к достижению объектами различных целей полета, к переконфигурации, к возможности работать как в широком множестве наперед заданных режимов, так и в условиях, заранее неопределенных, в том числе в аварийных ситуациях, в нерасчетных режимах, при отказах отдельных элементов, блоков и подсистем. Из сказанного вытекает требование дальнейшего повышения гибкости (возможности решения задачи управления на объектах с перечисленными свойствами), приспособляемости и надежности управления бортовых терминальных систем. Это и можно считать основной отличительной чертой бортовых терминальных систем управления нового поколения.

Естественно, что в аппаратной реализации систем будут использованы все средства повышения надежности, продолжительности активной жизни и гибкости систем, построенных на основе средств вычислительной техники и микроэлектроники. В настоящей работе намечены пути дальнейшего пополнения арсенала средств повышения надежности и гибкости бортовых систем управления. Это предлагается сделать за счет выбора рациональных принципов построения и алгоритмов управления систем. Материалы этой книги и другие публикации показывают, что в настоящее время сформировались основные направления теории бортовых систем терминального управления, которые открывают перспективы создания высокосоввершенных систем. Эти направления современной теории управления заслуживают своего дальнейшего развития

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г., Ярошевский В. А. Маневрирование космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1970. 416 с.
2. Андриенко А. Я., Иванов В. П., Петров Б. Н., Портнов-Соколов Ю. П. Вопросы теории терминальных систем управления (обзор). — Автоматика и телемеханика, 1974, № 5, с. 44—60.
3. Андриенко А. Я. Статистический синтез оптимальных импульсных систем управления с ограничениями по емкости памяти управляющего устройства. — Автоматика и телемеханика, 1968, № 7, с. 44—53.
4. Андриенко А. Я., Иванов В. П., Петров Б. Н., Портнов-Соколов Ю. П. Задачи и методы теории бортовых терминальных систем управления. — Автоматика и телемеханика, 1976, № 7, с. 36—51.
5. Андриенко А. Я., Чадаев А. И. Оптимальное по быстродействию управление сближением космических аппаратов с двигателями большой тяги. — В сб.: Оптимальное управление в механических системах, т. 1. Киев: изд-во Киевского университета, 1979, с. 41—42.
6. Андриенко А. Я. Метод задания возмущений при исследовании статистической точности нелинейных систем управления. В сб.: Техническая кибернетика. М.: Наука, 1965, с. 3—9.
7. Африкано Р. С., Логстон Т. С. Оптимизация характеристик ракеты-носителя «Сатурн-5». — Вопросы ракетной техники, 1970, № 2, с. 12—34.
8. Богуславский И. А. Об оценке фазовых координат линейной системы в статистически неопределенных ситуациях. — Автоматика и телемеханика, 1971, № 1, с. 31—38.
9. Вапник В. Н., Червоненкис А. Я. Об эффективных алгоритмах поиска оптимальных решений по эмпирическим данным. — В кн.: V Всесоюзное совещание по проблемам управления. Рефераты докладов, ч. II. М.: Наука, 1971, с. 113—117.
10. Волков Б. Я., Куприянов Н. С. Критерий устойчивости линейных систем со многими запаздываниями. — Техническая кибернетика, 1968, № 5, с. 170—175.
11. Ермилов Ю. А., Иванова Е. Е., Пантюшин С. В. Управление сближением космических аппаратов. М.: Наука, 1977. 448 с.
12. Ершов А. А. Стабильные методы оценки параметров (обзор). — Автоматика и телемеханика, 1978, № 8, с. 66—100.
13. Завадский В. К. Двухуровневая фильтрация в задачах терминального управления. Автоматика и телемеханика, 1979, № 1, с. 44—51.
14. Иванов В. П. Метод оценки риска оптимальной импульсной системы терминального управления линейным объектом. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 9, с. 73—78.
15. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
16. Королев С. П. Творческое наследие. Избранные труды и документы. Под ред. М. В. Келдыша. М.: Наука, 1980. 591 с.
17. Лебедев А. А., Соколов В. Б. Встреча на орбите. — М.: Машиностроение, 1969, 266 с.
18. Лебедев А. А., Герасюта Н. Ф. Баллистика ракет. Некоторые задачи баллистики ракет дальнего действия. М.: Машиностроение, 1970. 244 с.

19. Легостаев В. П., Раушенбах Б. В. Автоматическая сборка в космосе. — Космические исследования, 1969, т. VII, вып. 6, с. 803—813.
20. Линник Ю. Ю. Метод наименьших квадратов и основы математической теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962. 211 с.
21. Маслов Е. П. Управление случайным процессом и контроль. — Автоматика и телемеханика, 1969, № 4, с. 183—192.
22. Медич Д. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973. 440 с.
23. Моисеев Н. И. Оптимизация и управление (эволюция идей и перспективы). — Техническая кибернетика, 1974, № 4, с. 3—16.
24. Новая транспортная космическая система США (обзор) /Под общ. ред. акад. Б. Н. Петрова. М.: Институт проблем управления, 1978. Ч. 1, 190 с.; ч. 2, 196 с.
25. Охоцимский Д. Е. К теории движения ракет. — Прикл. матем. и механ., 1946, т. 10, № 2, с. 203—214.
26. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. — Успехи физических наук, 1957, т. 63, вып. 1а, с. 5—32.
27. Охоцимский Д. Е., Рясин В. А., Чепцов Н. Н. Оптимальная стратегия при корректировании. — Докл. АН СССР, 1967, с. 175, № 1, с. 47—50.
28. Перельгин Б. П., Пискарева И. Б. Оптимальное программное регулирование соотношения компонентов в ракетном двигателе. В кн.: Тр. IV чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей Ф. А. Цандера. кн. II. Институт истории естествознания и техники АН СССР, 1978, с. 83—88.
29. Петров Б. Н. О применении условий инвариантности. — В кн.: Тр. II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, т. 2. М.: Наука, 1955. 248 с.
30. Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Крутова И. Н., Земляков С. Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем. М.: Машиностроение, 1972. 260 с.
31. Петров Б. Н., Гусев Ю. М., Ефанов В. П. и др. Об одном подходе к синтезу многосвязных систем автоматического регулирования высокой надежности. — Известия ВУЗ СССР, Приборостроение, 1976, № 1, с. 34—39.
32. Поляк Б. Т. Учет априорной информации в адаптивных алгоритмах. — В кн.: VII Всесоюзное совещание по проблемам управления. Тезисы докладов, кн. I. М.: изд. Института проблем управления (Москва) и Института Технической кибернетики (Минск), 1977, с. 87—89.
33. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных систем. М.: Наука, 1973. 255 с.
34. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. 883 с.
35. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I—III. Автоматика и телемеханика, 1959, № 10—12, с. 1320—1334, 1441—1458, 1562—1577.
36. Скляревич А. Н. Линейные системы с возможными нарушениями. М.: Наука, 1975. 351 с.
37. Тищенко Н. М. Введение в проектирование сложных систем автоматки. М.: Энергия, 1976. 305 с.
38. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966. 623 с.
39. Хауссерман В. Описание и характеристика систем навигации, наведения управления ракеты-носителя «Сатурн» — В кн.: Тр. III Международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства (Тулуза, 1970). М.: Наука, 1972, с. 5—35.
40. Хомякова Л. М. К задаче фильтрации в нелинейных системах. — Автоматика и телемеханика, 1979, № 1, с. 65—71.
41. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. 399 с.
42. Чандлер Д., Смит И. Итеративное наведение ракет. — Вопросы ракетной техники, 1967, № 12, с. 55—67.

43. **Bar-Shalom Y., Tse E.** Concepts and methods in stochastic control. Reprinted from control and dynamic systems advances in theory and applications. New-York—San Francisco—London: Academic Press, 1976, vol. 12. 112 p.
44. **Bellman R.** Adaptive control processes. Princ. Univ. Press, 1961. 255 p.
45. **Huber P. J.** Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte-Carlo. — Annals of mathematical statistics, 1973, vol. 1, p. 73—101.
46. **Petrov B. N., Portnov-Sokolov Yu. P., Andrienko A. Ya.** Control aspects of efficient rocket propulsion systems. — Acta Astronautica, 1977, vol. 4, N. 11—12, p. 1127—1136.
47. **Petrov B. N., Portnov-Sokolov Yu. P., Andrienko A. Ya., Ivanov V. P.** On the reduction of the loss of terminal control accuracy under contingent operating conditions. — Proceedings of the XII International symposium on space technology and science. — Tokyo: 1977, p. 359—364.
48. **Scull D. P.** On-board computers for control. Preprint of the VIII IFAC symposium on automatic control in space. — Oxford UK: 1979, p. 14.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие . . . . .	3
От авторов . . . . .	5
<b>Глава 1. Основные проблемы и содержание теории бортовых терминальных систем управления . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1. Проблемы построения бортовых терминальных систем управления . . . . .	6
1.2. Примеры бортовых терминальных систем управления . . . . .	14
1.3. Основное содержание теории терминальных систем . . . . .	33
<b>Глава 2. Основные черты стохастического управления в терминальных системах . . . . .</b>	<b>38</b>
2.1. Задача стохастического управления . . . . .	39
2.2. Классы стохастического управления . . . . .	39
2.3. Оптимальное стохастическое управление . . . . .	41
2.4. Способы получения стохастического управления с обратной связью . . . . .	43
2.5. Общая постановка задачи синтеза бортовых терминальных систем управления . . . . .	46
2.6. Физические основы решения задачи . . . . .	49
<b>Глава 3. Статистический синтез алгоритмов терминального управления с ограничением по структуре управляющего устройства . . . . .</b>	<b>51</b>
3.1. Синтез оптимальных алгоритмов терминального управления с ограничением по емкости памяти управляющего устройства . . . . .	52
3.2. Синтез оптимальных алгоритмов управления с ограничением по виду операций, осуществляемых управляющим устройством . . . . .	56
3.3. Примеры алгоритмов терминального управления . . . . .	66
<b>Глава 4. Фильтрация и прогнозирование в терминальных системах управления . . . . .</b>	<b>69</b>
4.1. Постановка задачи . . . . .	70
4.2. Модель объекта и стратегия управления . . . . .	70
4.3. Оценки координат состояния калмановского типа . . . . .	72
4.4. Оценки координат состояния при ограниченном интервале наблюдения . . . . .	74
4.5. Алгоритмы оценивания промаха . . . . .	76
<b>Глава 5. Проблема многокритериальности при построении бортовых терминальных систем . . . . .</b>	<b>78</b>
5.1. Постановка задачи . . . . .	79
5.2. Особенность задачи синтеза терминальной системы управления по нескольким критериям и способы ее решения . . . . .	82
5.3. Синтез управления возмущенным движением в системе с жесткой программной траекторией движения . . . . .	85
5.4. Принцип порогово-дискретного программного управления . . . . .	87
5.5. Терминальные системы управления с гибкими траекториями движения . . . . .	89
5.6. Введение статистических ограничений при многокритериальном синтезе терминальных систем . . . . .	91
5.7. Примеры многокритериального синтеза бортовых терминальных систем . . . . .	95
<b>Глава 6. Статистическая оценка предельных точностных характеристик терминальных систем управления . . . . .</b>	<b>100</b>
6.1. Постановка задачи . . . . .	101
6.2. Физическое содержание проблемы . . . . .	104
6.3. Определение стратегий управления, реализующих верхнюю и нижнюю оценки риска оптимальной системы . . . . .	108
6.4. Нахождение оценок оптимального риска терминальной системы управления линейным объектом . . . . .	113
	199

	<i>Стр.</i>
6.5. О сходимости верхней и нижней оценок оптимального риска . . . . .	117
<b>Глава 7. Терминальное управление в условиях неопределенности априорной информации . . . . .</b>	<b>119</b>
7.1. Анализ постановки задачи синтеза систем терминального управления . . . . .	120
7.2. Основной подход к решению задачи синтеза терминальных систем управления в условиях неопределенности априорной информации . . . . .	123
7.3. К задаче прогнозирования при синтезе терминальных систем управления . . . . .	125
7.4. Синтез алгоритмов оценивания возмущений при усеченных априорных распределениях . . . . .	127
7.5. Минимаксный синтез терминальных систем управления линейным объектом . . . . .	130
<b>Глава 8. Синтез алгоритмов терминального управления объектом многоцелевого назначения . . . . .</b>	<b>136</b>
8.1. Формулировка задачи синтеза алгоритмов терминального управления объектами многоцелевого назначения . . . . .	138
8.2. Определение алгоритма управления в виде функции измеренных координат и уставок . . . . .	139
8.3. Определение алгоритма управления в виде функции прошлых оценок, измеренных координат и уставок . . . . .	144
8.4. Определение алгоритма управления с использованием составного критерия оптимальности . . . . .	146
<b>Глава 9. Статистическая оптимизация временной последовательности интервалов квантования импульсных систем терминального управления . . . . .</b>	<b>150</b>
9.1. Постановка задачи . . . . .	151
9.2. Статистическая линеаризация многовыходовых нелинейных систем . . . . .	152
9.3. Методика замены исходной нелинейной системы статистически эквивалентной системой . . . . .	156
9.4. Оптимизация статистически эквивалентной системы . . . . .	157
<b>Глава 10. Алгоритмические способы повышения надежности терминального управления . . . . .</b>	<b>160</b>
10.1. Понятие надежности управления и анализ основных средств ее обеспечения . . . . .	160
10.2. Формулировка условий задачи терминального управления с учетом отказов элементов системы . . . . .	164
10.3. Задача синтеза структуры алгоритма управления толерантной терминальной системы . . . . .	166
10.4. Построение алгоритмов оценивания координат состояния и прогнозирования промаха . . . . .	170
10.5. Выбор стратегии терминального управления в толерантной системе . . . . .	175
10.6. Дополнительные средства повышения надежности управления . . . . .	177
10.7. Пример построения алгоритма управления толерантной терминальной системы . . . . .	178
<b>Глава 11. Статистическая оценка точности управления бортовых терминальных систем . . . . .</b>	<b>181</b>
11.1. Постановка задачи . . . . .	183
11.2. Метод I . . . . .	184
11.3. Метод II . . . . .	187
11.4. Метод III . . . . .	190
11.5. О точности методов . . . . .	191
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>192</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>196</b>

70 коп.