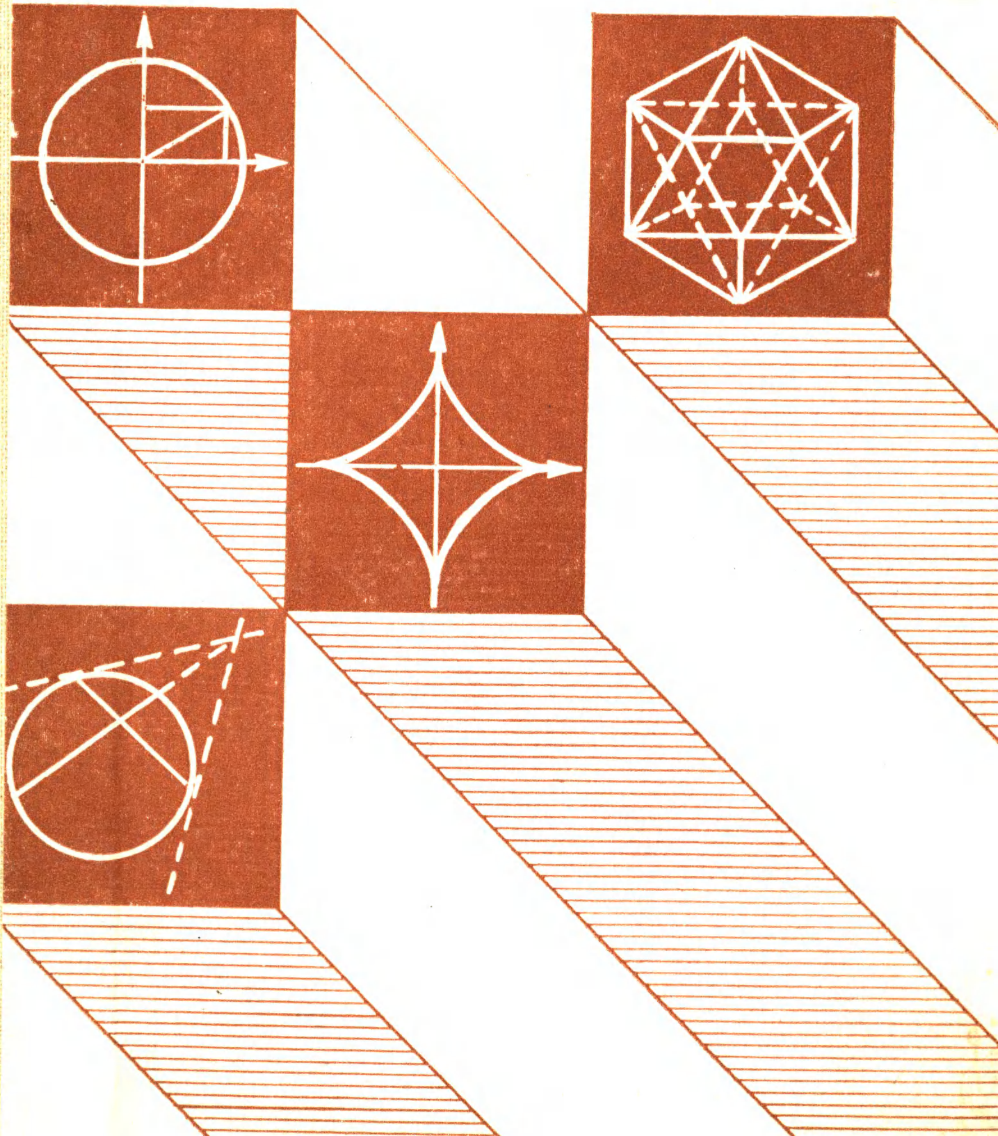
А. В. Погорелов

ГЕОМЕТРИЯ



А. В. Погорелов

ГЕОМЕТРИЯ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов,
обучающихся по специальности «Математика»

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.151
П 43
УДК 513

Погорелов А. В. **Геометрия.** — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 288 с.

Книга охватывает основные разделы геометрии для математических специальностей университетов и пединститутов. Она содержит аналитическую геометрию, теорию кривых и поверхностей, основания геометрии, в том числе проективную геометрию, и некоторые вопросы элементарной геометрии, в частности, вопросы геометрических построений. Книга отличается безупречностью изложения, снабжена достаточным числом упражнений различной трудности.

Книга предназначена для студентов математических специальностей университетов и пединститутов.

П $\frac{1702040000-064}{053(2)-83}$ 81-83

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ
ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга предлагается в качестве учебного пособия для студентов педагогических специальностей университетов и пединститутов и содержит обязательный курс геометрии, предусмотренный программой. Особенностью этого курса является то, что он во всех своих частях обращен к элементарной геометрии и поэтому обеспечивает высокую профессиональную подготовку будущего учителя школы или преподавателя вуза.

Предлагаемый курс геометрии органически связан со школьным изложением этого предмета. Он начинается темой координаты и векторы, что для хорошо подготовленного абитуриента будет приятным повторением. Вообще, первая часть пособия — аналитическая геометрия — усваивается легко и, по существу, сводится к приобретению навыков в применении метода координат и векторной алгебры к решению элементарных геометрических задач.

Вторая часть книги — дифференциальная геометрия — содержит основные факты теории кривых и поверхностей.

Оригинальной является третья часть книги — основания геометрии. В отличие от традиционных курсов, где основные вопросы, связанные с аксиоматическим построением геометрии, решаются на основе аксиоматики Гильберта (или Вейля), в данном курсе все это изложение опирается на школьную аксиоматику. Таким образом, вопросы непротиворечивости, полноты и независимости аксиом решаются по отношению к аксиоматике, которая хорошо известна и исследование которой представляет безусловный профессиональный интерес. Третья часть книги заканчивается изложением основных фактов проективной геометрии в ее аналитической интерпретации.

Четвертая часть книги посвящена некоторым вопросам элементарной геометрии. Сюда вошли вопросы, которые в школьном курсе либо излагаются недостаточно полно, например, геометрические построения, либо излагаются недостаточно глубоко, например, вопросы измерения длин, площадей и объемов.

Характеризуя пособие в целом, можно сказать, что оно начинается школьным изложением и возвращается к нему на более высоком уровне, давая обширные и глубокие знания по предмету школьного преподавания. Мы полагаем, что такое изложение должно вызвать безусловный интерес к профессии учителя в школе и преподавателя вуза.

Пользуюсь случаем поблагодарить моих сотрудников Ю. А. Аминова, А. И. Медяника, А. Д. Милку, Ю. С. Слободяна за критические замечания и помощь в работе над пособием.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА I

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Введение координат на плоскости

Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy — *оси координат* (рис. 1). Точкой пересечения O — *началом координат* — каждая из осей разбивается на две полуоси. Условимся одну из них называть *положительной*, отмечая ее на чертеже стрелкой, а другую — *отрицательной*.

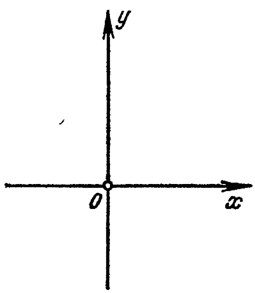


Рис. 1.

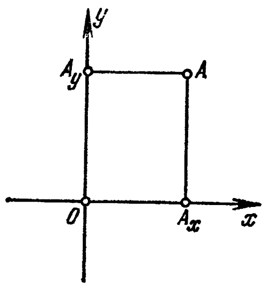


Рис. 2.

Каждой точке A плоскости мы сопоставим пару чисел — *координаты точки* — *абсциссу* (x) и *ординату* (y) по следующему правилу.

Через точку A проведем прямую, параллельную *оси ординат* (Oy) (рис. 2). Она пересечет *ось абсцисс* (Ox) в некоторой точке A_x. Под абсциссой точки A мы будем понимать число x, равное по абсолютной величине расстоянию от O до A_x, положительное, если A_x принадлежит положительной полуоси, и отрицательное, если A_x принадлежит отрицательной полуоси. Если точка A_x совпадает с O, то полагаем x равным нулю.

Ордината (y) точки A определяется аналогично.

Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки, например: $A(x, y)$.

Оси координат разбивают плоскость на четыре прямых угла — *квадранта* — I, II, III, IV (рис. 3). В пределах одного квадранта знаки обеих координат сохраняются и имеют значения, указанные на рисунке.

Точки *оси* x (оси абсцисс) имеют равные нулю ординаты (y), а точки *оси* y (оси ординат) — равные нулю абсциссы (x). У начала координат абсцисса и ордината равны нулю.

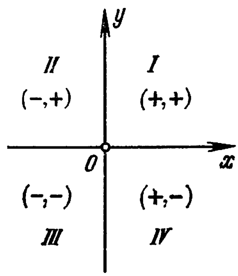


Рис. 3.

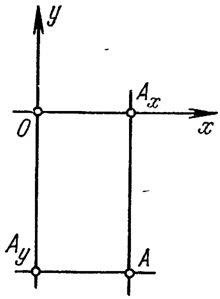


Рис. 4.

Плоскость, на которой введены описанным выше способом координаты x и y, будем называть *плоскостью* xy. Произвольную точку на этой плоскости с координатами x и y будем иногда обозначать просто (x, y).

Для произвольной пары вещественных чисел x *и* y *существует, и притом единственная, точка* A *на плоскости* xy, *для которой* x *будет абсциссой, а* y — *ординатой.*

Действительно, пусть для определенности $x>0$, а $y<0$. Возьмем на положительной полуоси x точку A_x на расстоянии x от начала O, а на отрицательной полуоси y — точку A_y на расстоянии $|y|$ от O. Проведем через точки A_x и A_y прямые, параллельные осям y и x соответственно (рис. 4). Эти прямые пересекутся в некоторой точке A, абсцисса которой, очевидно, x и ордината y. В других случаях $x<0$, $y>0$; $x>0$, $y>0$ и $x<0$, $y<0$ — доказательство аналогично.

§ 2. Расстояние между точками

Пусть на плоскости xy даны две точки: A_1 с координатами x_1, y_1 и A_2 с координатами x_2, y_2. *Выразим расстояние между точками* A_1, A_2 *через координаты этих точек.*

Допустим, что $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные осям координат (рис. 5). Расстояние между точками A и A_1 равно $|y_1 - y_2|$, а расстояние между точками A и A_2 равно $|x_1 - x_2|$. Применяя к прямоугольному треугольнику A_1AA_2 теорему Пифагора, получим

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=d^2, \qquad (*)$$

где d — расстояние между точками A_1 и A_2.

Хотя формула (*) для расстояния между точками выведена нами в предположении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, она остается верной и в других случаях. Действительно, при $x_1=x_2$, $y_1 \neq y_2$ (рис. 6) d равно $|y_1-y_2|$. Тот же результат дает и формула (*). Аналогично обстоит дело при $x_1 \neq x_2$, $y_1=y_2$. При $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ точки A_1 и A_2 совпадают и формула (*) дает $d=0$.

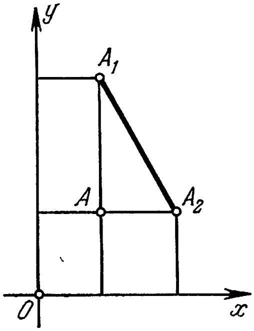


Рис. 5.

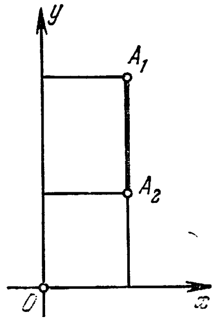


Рис. 6.

В качестве упражнения *найдем координаты центра окружности, описанной около треугольника с вершинами* (2, —2), (—2, 2), (1, 5).

Пусть (x, y)—центр описанной окружности. Он находится на одинаковом расстоянии от вершин треугольника. Приравнивая квадраты этих расстояний, находим уравнения для определения координат x и y. Имеем

$$(x-2)^2+(y+2)^2=(x+2)^2+(y-2)^2,$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=(x-1)^2+(y-5)^2.$$

После очевидных упрощений получим

$$-x+y=0, \qquad -x+7y-9=0.$$

Отсюда находим: $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{3}{2}$.

§ 3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости xy даны две различные точки: $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$. *Найдем координаты x и y точки A, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $\lambda_1:\lambda_2$.*

Пусть отрезок A_1A_2 не параллелен оси x. Спроектируем точки A_1, A, A_2 на ось y (рис. 7). Имеем

$$\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{\bar{A}_1\bar{A}}{\bar{A}\bar{A}_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Так как точки $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}$ имеют соответственно те же ординаты, что и точки A_1, A_2, A, то

$$\bar{A}_1\bar{A}=|y_1-y|, \qquad \bar{A}\bar{A}_2=|y-y_2|.$$

Следовательно,

$$\frac{|y_1-y|}{|y-y_2|}=\frac{\lambda_1}{\lambda}.$$

Так как $\bar{A}$ лежит между $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$, то y_1-y и $y-y_2$ одного знака. Поэтому

$$\frac{|y_1-y|}{|y-y_2|}=\frac{y_1-y}{y-y_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Отсюда находим

$$y=\frac{\lambda_2 y_1+\lambda_1 y_2}{\lambda_1+\lambda_2}. \qquad (*)$$

Если отрезок A_1A_2 параллелен оси x, то

$$y_1=y_2=y.$$

Тот же результат дает и формула (*), которая, таким образом, верна при любом расположении точек A_1, A_2.

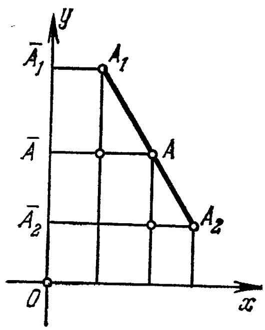


Рис. 7.

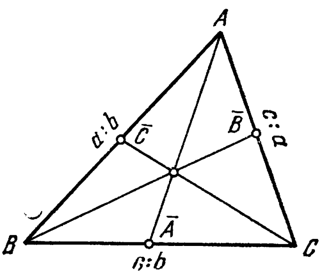


Рис. 8.

Абсцисса точки A находится аналогично. Для нее получается формула

$$x=\frac{\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

В качестве упражнения докажем теорему Чевы из элементарной геометрии Эта теорема гласит: *если стороны треугольника делятся в отношении $a:b$ $c:a$, $b:c$ в порядке обхода треугольника, то отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками деления противолежащих сторон, пересекаются в одной точке.*

Пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ — вершины треугольника и $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ — точки деления противолежащих сторон (рис. 8). Координаты точки $\bar{A}$:

$$x=\frac{bx_2+cx_3}{b+c}, \qquad y=\frac{by_2+cy_3}{b+c}.$$

Разделим отрезок $A\bar{A}$ в отношении $(b+c):a$. Координаты точки деления будут

$$x=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \qquad y=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}.$$

Если отрезок $B\bar{B}$ разделить в отношении $(a+c):b$, то получим те же координаты точки деления. Те же координаты получаются при делении отрезка $C\bar{C}$ в отношении $(a+b):c$. Таким образом, отрезки $\bar{A}A$, $\bar{B}B$ и $\bar{C}C$ имеют общую точку, что и требовалось доказать.

Заметим, что теоремы элементарной геометрии о пересечении медиан, биссектрис и высот треугольника являются частными случаями теоремы Чевы. Поясним это.

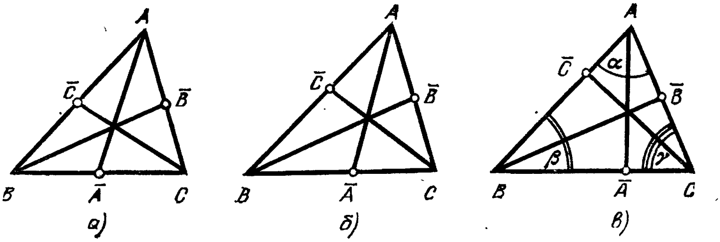


Рис. 9.

В случае медиан (рис. 9, *а*) $A\bar C:\bar C B=1:1$, $B\bar A:\bar A C=1:1$, $C\bar B:\bar B A=1:1$. В случае биссектрис (рис. 9, *б*) $A\bar C:\bar C B=AC:BC$, $B\bar A:\bar A C=AB:AC$, $C\bar B:\bar B A=$ $=BC:AB$. В случае высот (рис. 9, *в*) $A\bar C:\bar C B=\frac{C\bar C}{\operatorname{tg}\alpha}:\frac{C\bar C}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}:\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, $B\bar A:\bar A C=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}:\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$, $C\bar B:\bar B A=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}:\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Мы видим, что во всех случаях словия теоремы Чевы выполняются.

§ 4. Понятие об уравнении кривой. Уравнение окружности

Пусть на плоскости xy дана некоторая линия или, как говорят, *кривая* (рис. 10). Уравнение $\varphi(x, y)=0$ называется *уравнением кривой в неявной форме*, если ему удовлетворяют координаты x, y любой точки этой кривой и любая пара чисел x, y, удовлетворяющая уравнению $\varphi(x, y)=0$, представляет собой координаты точки кривой. Очевидно, кривая определяется своим уравнением, поэтому можно говорить о задании кривой ее уравнением.

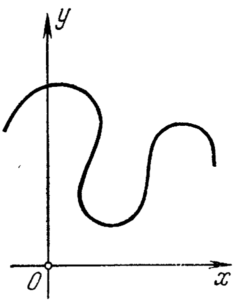


Рис. 10.

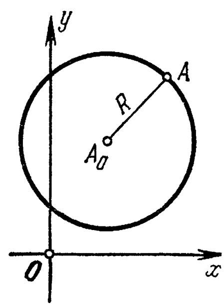


Рис. 11.

В аналитической геометрии часто рассматриваются две задачи: 1) по заданным геометрическим свойствам кривой составить ее уравнение; 2) по заданному уравнению кривой выяснить ее геометрические свойства. Рассмотрим эти задачи в применении к простейшей из кривых — окружности.

Пусть $A_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка плоскости xy и R — любое положительное число. Составим уравнение окружности с центром A_0 и радиусом R (рис. 11).

Пусть $A(x, y)$ — произвольная точка окружности. Ее расстояние от центра A_0 равно R. Квадрат расстояния точки A от A_0 равен $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$. Таким образом, координаты x, y

каждой точки A окружности удовлетворяют уравнению

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0. \qquad (*)$$

Обратно, любая точка A, координаты x, y которой удовлетворяют уравнению $(*)$, принадлежит окружности, так как ее расстояние от A_0 равно R.

В соответствии с данным выше определением уравнение $(*)$ *есть уравнение окружности с центром* A_0 *и радиусом* R.

Рассмотрим теперь вторую задачу для кривой, заданной уравнением

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \qquad (a^2+b^2-c>0).$$

Уравнение кривой можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$(x+a)^2+(y+b)^2-(\sqrt{a^2+b^2-c})^2=0.$$

Из этого уравнения видно, что каждая точка (x, y) кривой находится на одном и том же расстоянии, равном $\sqrt{a^2+b^2-c}$ от точки $(-a, -b)$, и, следовательно, *кривая представляет собой окружность с центром* $(-a, -b)$ *и радиусом* $\sqrt{a^2+b^2-c}$.

В качестве примера, иллюстрирующего применение метода аналитической геометрии, рассмотрим следующую задачу. *Найти геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний которых от двух данных точек A и B постоянно и равно* $k \neq 1$. (Геометрическим местом точек называется фигура, которая состоит из всех точек, обладающих заданным геометрическим свойством. В данном случае речь идет о множестве таких точек плоскости, для которых отношение расстояний от двух данных точек A и B постоянно.)

Пусть $2a$ — расстояние между точками A и B. Введем прямоугольную декартову систему координат на плоскости, приняв прямую AB за ось x и середину отрезка AB за начало координат. Пусть для определенности точка A находится на положительной полуоси x. Тогда координаты точки A будут $x=a$, $y=0$, а координаты точки B будут $x=-a$, $y=0$. Пусть (x, y) — произвольная точка геометрического места. Квадраты ее расстояний от точек A и B равны соответственно $(x-a)^2+y^2$ и $(x+a)^2+y^2$. Уравнение геометрического места:

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2,$$

или

$$x^2+y^2+\frac{2(k^2+1)}{k^2-1}ax+a^2=0.$$

Геометрическое место точек представляет собой окружность (окружность Аполлония).

§ 5. Уравнения кривой в параметрической форме

Представим себе, что точка A движется вдоль кривой. Пусть к моменту t ее координаты $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$. Систему уравнений

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t),$$

задающую координаты произвольной точки кривой как функции параметра t, называют *уравнениями кривой в параметрической форме*.

Параметр t — не обязательно время, это может быть любая другая величина, характеризующая положение точки на кривой.

Составим уравнение окружности в параметрической форме.

Пусть центр окружности находится в начале координат, а радиус равен R. Положение точки A на окружности мы будем характеризовать углом α, который образует радиус OA с положительной полуосью x (рис. 12). Очевидно, координаты точки A равны $R\cos\alpha$, $R\sin\alpha$, и, следовательно, уравнение окружности таково:

$$x = R\cos\alpha, \qquad y = R\sin\alpha.$$

Имея уравнение кривой в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad (*)$$

можно получить ее уравнение в неявной форме:

$$f(x, y) = 0.$$

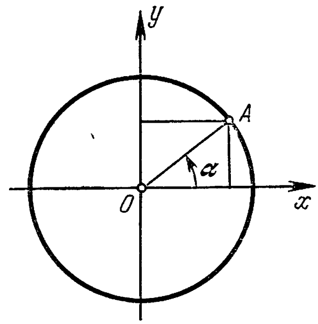


Рис. 12.

Для этого достаточно исключить параметр t из уравнений $(*)$, найдя его из одного уравнения и подставив в другое, или другим способом.

Например, чтобы получить уравнение окружности, заданной уравнениями в параметрической форме, в неявной форме, достаточно возвести оба равенства в квадрат и сложить почленно. Тогда получим знакомое уравнение $x^2 + y^2 = R^2$.

Исключение параметра из уравнений кривой в параметрической форме не всегда дает уравнение кривой в неявной форме в смысле данного выше определения. Может случиться, что ему удовлетворяют точки, не принадлежащие кривой. В этой связи рассмотрим два примера.

Пусть кривая γ задана уравнениями в параметрической форме:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \qquad (0 \leqslant t < 2\pi).$$

Если эти уравнения разделить на a и b соответственно, возвести в квадрат и сложить почленно, то получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Этому уравнению, очевидно, удовлетворяют все точки кривой γ. Обратно, если точка (x, y) удовлетворяет этому уравнению, то найдется угол t, для которого $x/a = \cos t$, $y/b = \sin t$, и, следовательно, любая точка плоскости, удовлетворяющая этому уравнению, принадлежит кривой γ.

Пусть теперь кривая γ задается уравнениями

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \qquad y = b\,\mathrm{sh}\,t \qquad (-\infty < t < +\infty),$$

где

$$\mathrm{ch}\,t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \qquad \mathrm{sh}\,t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Если эти уравнения разделить соответственно на a и b, а затем возвести в квадрат и вычесть почленно, то получится уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Точки кривой γ удовлетворяют этому уравнению. Однако не всякая точка, удовлетворяющая уравнению, принадлежит γ. Такова, например, точка $(-a, 0)$. Она удовлетворяет уравнению, но не принадлежит кривой, так как на кривой $a \operatorname{ch} t \neq -a$.

Иногда уравнение кривой в неявной форме понимают более широко, не требуя, чтобы каждая точка, удовлетворяющая уравнению, принадлежала кривой.

§ 6. Точки пересечения кривых

Пусть в плоскости xy даны две кривые: кривая γ_1, заданная уравнением

$$f_1(x, y) = 0,$$

и кривая γ_2, заданная уравнением

$$f_2(x, y) = 0.$$

Найдем точки пересечения кривых γ_1 и γ_2, т. е. координаты этих точек.

Пусть $A(x, y)$ — точка пересечения кривых γ_1 и γ_2. Так как точка A лежит на кривой γ_1, то ее координаты удовлетворяют уравнению $f_1(x, y) = 0$. Так как точка A лежит на кривой γ_2, то ее координаты удовлетворяют уравнению $f_2(x, y) = 0$. Таким образом, координаты любой точки пересечения кривых γ_1 и γ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$f_1(x, y) = 0, \qquad f_2(x, y) = 0.$$

Обратно, любое вещественное решение этой системы уравнений дает координаты одной из точек пересечения кривых.

Аналогично поступаем в случае, если кривая γ_1 задана уравнением

$$f_1(x, y) = 0,$$

а кривая γ_2 — уравнениями в параметрической форме

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Тогда координаты x, y точек пересечения удовлетворяют системе трех уравнений:

$$f_1(x, y) = 0, \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Если обе кривые заданы уравнениями в параметрической форме

$$\gamma_1\colon\ x = \varphi_1(t), \qquad y = \psi_1(t);$$
$$\gamma_2\colon\ x = \varphi_2(\tau), \qquad y = \psi_2(\tau),$$

то координаты x, y точек пересечения удовлетворяют системе четырех уравнений:

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \psi_1(t);$$
$$x = \varphi_2(\tau), \qquad y = \psi_2(\tau).$$

Пример. Найти точки пересечения окружностей

$$x^2 + y^2 = 2ax, \qquad x^2 + y^2 = 2by.$$

Вычитая уравнения почленно, находим $ax=by$. Подставляя $y=ax/b$ в первое уравнение, получим

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x^2-2ax=0.$$

Отсюда

$$x_1=0, \quad x_2=\frac{2ab^2}{a^2+b^2}.$$

Им соответствуют

$$y_1=0, \quad y_2=\frac{2ba^2}{a^2+b^2}.$$

Искомые точки пересечения (0, 0) и $\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2}, \frac{2ba^2}{a^2+b^2}\right)$.

§ 7. Взаимное расположение двух окружностей

Выясним, *каково взаимное расположение двух окружностей, если их радиусы a и b, а расстояние между центрами c.*

Пусть O и O_1 — центры окружностей. Примем точку O за начало декартовой системы координат, а полупрямую OO_1 — за положительную полуось x Уравнения окружностей будут:

$$x^2+y^2=a^2, \qquad (x-c)^2+y^2=b^2. \qquad (*)$$

Если окружности пересекаются, то координаты x, y точки пересечения удовлетворяют обоим уравнениям (*). И обратно, если система уравнений (*) имеет решение, т. е. существуют x и y, удовлетворяющие обоим уравнениям, то они являются координатами точки пересечения окружностей. Число точек пересечения (если окружности пересекаются) равно числу решений системы.

Будем решать систему уравнений (*). Для этого сначала вычтем уравнения почленно. Получим $2cx-c^2=a^2-b^2$. Отсюда $x=(a^2+c^2-b^2)/2c$. Подставляя это значение x в первое уравнение, получим:

$$\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2+y^2=a^2.$$

Отсюда

$$y=\pm\sqrt{a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2}.$$

Преобразуем подкоренное выражение как разность квадратов:

$$\left(a+\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)\left(a-\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)=$$

$$=\frac{1}{4c^2}(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)=$$

$$=\frac{1}{4c^2}[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]=\frac{1}{4c^2}(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c).$$

Итак,

$$y=\pm\frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}.$$

Отсюда видно, что если $a+c>b$, $a+b>c$ и $b+c>a$, то подкоренное выражение положительно и, следовательно, система (*) имеет решения. Причем, таких решений будет два. Одно отвечает знаку «+» перед корнем, а второе — знаку «—». Соответственно окружности пересекаются в двух точках.

Если хотя бы один из сомножителей $a+c-b$, $a+b-c$, $b+c-a$ равен нулю, то система (*) имеет одно решение. Окружности касаются.

Если один из сомножителей под знаком корня отрицателен, то система (*) не имеет решений и окружности не пересекаются. Два сомножителя под знаком корня не могут быть отрицательными, так как тогда их сумма отрицательна. А она заведомо положительна. Например, если $a+c-b<0$ и $a+b-c<0$, то их сумма $(a+c-b)+(a+b-c)=2a<0$. А это невозможно. Точно так же будет и в других случаях.

Таким образом, *если одно из чисел a, b, c больше суммы двух других, то окружности не пересекаются; если одно из этих чисел равно сумме двух других, то окружности касаются; если каждое из этих чисел меньше суммы двух других, то окружности пересекаются в двух точках.*

Проведенное исследование позволяет решить вопрос о существовании треугольника с данными сторонами. Именно, для того, чтобы данные отрезки длины a, b, c были сторонами некоторого треугольника, достаточно, чтобы большее из чисел a, b, c было меньше суммы двух других. Действительно, возьмем отрезок AB длины c и проведем окружности с центрами в точках A и B и радиусами a, b соответственно. По доказанному эти окружности пересекаются в некоторой точке C. Треугольник ABC имеет стороны $AB=c$, $AC=a$, $BC=b$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

1. На прямой, параллельной оси x, взяты две точки. У одной из них ордината $y=2$. Чему равна ордината другой точки?

2. Из точки $A(2, 3)$ опущен перпендикуляр на ось x. Найти координаты основания перпендикуляра.

3. Через точку $A(2, 3)$ проведена прямая, параллельная оси x. Найти координаты точки пересечения ее с осью y.

4. Найти геометрическое место точек плоскости xy, для которых абсцисса $x=3$.

5. Даны точки $A(-3, 2)$, $B(4, 1)$. Доказать, что отрезок AB пересекает ось y, но не пересекает ось x.

6. Какую из полуосей оси y (положительную или отрицательную) пересекает отрезок AB в предыдущей задаче?

7. Найти расстояние от точки $(-3, 4)$ до оси x (оси y).

8. На биссектрисе первого квадранта взята точка с ординатой $y=2$. Чему равна абсцисса этой точки?

9. Решить предыдущую задачу, если точка находится на биссектрисе второго квадранта.

10. Найти геометрическое место точек плоскости xy, для которых $x=y$.

11. Найти геометрическое место точек плоскости xy, для которых $x=-y$.

12. Где находятся те точки плоскости xy, для которых а) $|x|=a$; б) $|x|=|y|$?

13. Где находятся те точки плоскости xy, для которых а) $|x|<a$; б) $|x|<a$, $|y|<b$?

14. Найти координаты точки, симметричной точке $A(x, y)$ относительно оси x; оси y; начала координат.

15. Найти координаты точки, симметричной точке $A(x, y)$ относительно биссектрисы первого (второго) координатного угла.

16. Как изменятся координаты точки $A(x, y)$, если за ось x принять ось y, а за ось y принять ось x?

17. Даны точки $A(4, -2)$, $B(1, 2)$, $C(-2, 6)$. Найти расстояния между этими точками, взятыми попарно.

18. Доказать, что точки A, B, C в предыдущей задаче лежат на одной прямой. Какая из этих точек лежит между двумя другими?

19. Найти на оси x точку, равноудаленную от точек $(1, 2)$ и $(2, 3)$.

20. Найти точку, равноудаленную от осей координат и точки $(3, 6)$.

21. Даны координаты двух вершин A и B равностороннего треугольника ABC. Как найти координаты третьей вершины? Рассмотреть пример: $A(0, 1)$, $B(2, 0)$.

22. Даны координаты двух смежных вершин A и B квадрата $ABCD$. Как найти координаты остальных вершин? Рассмотреть пример: $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

23. Какому условию должны удовлетворять координаты вершин треугольника ABC, чтобы он был прямоугольным с прямым углом при вершине C?

24. Какому условию должны удовлетворять координаты вершин треугольника ABC для того, чтобы угол A был больше угла B?

25. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин. Как узнать, является он вписанным в окружность или нет?

26. Доказать, что при любых вещественных a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 имеет место неравенство

$$\sqrt{(a_1-a)^2+(b_1-b)^2}+\sqrt{(a_2-a)^2+(b_2-b)^2} \geqslant \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}.$$

Какому геометрическому факту оно соответствует?

27. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(3, 2)$. Найти координаты четвертой вершины D и точки пересечения диагоналей O.

28. Доказать, что точки $A(-1, -2)$, $B(2, -5)$, $C(1, -2)$, $D(-2, 1)$ являются вершинами параллелограмма. Найти точку пересечения его диагоналей.

29. Даны один конец отрезка $(1, 1)$ и его середина $(2, 2)$. Найти второй конец отрезка.

30. Доказать, что точки $(3, 0)$, $(1, 0)$, $(1, -2)$, $(3, -2)$ являются вершинами квадрата.

31. Даны координаты вершин треугольника: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Найти координаты точки пересечения медиан.

32. Даны координаты середин сторон треугольника: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Найти координаты вершин.

33. Дан треугольник с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Найти координаты вершин подобного и подобно расположенного треугольника с коэффициентом подобия λ и центром подобия в точке (x_0, y_0).

34. Говорят, что точка A *делит внешним образом* отрезок A_1A_2 в отношении $\lambda_1:\lambda_2$, если эта точка лежит на прямой, соединяющей точки A_1, A_2 вне отрезка A_1A_2, и отношение расстояний ее от точек A_1 и A_2 равно $\lambda_1:\lambda_2$. Показать, что координаты точки A выражаются через координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2) точек A_1 и A_2 по формулам

$$x=\frac{\lambda_2 x_1-\lambda_1 x_2}{\lambda_2-\lambda_1}, \quad y=\frac{\lambda_2 y_1-\lambda_1 y_2}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

35. Даны два отрезка координатами своих концов. Как узнать, не прибегая к чертежу, пересекаются отрезки или нет?

36. *Центром тяжести двух масс* μ_1 и μ_2, расположенных в точках $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, называется точка A, делящая отрезок A_1A_2 в отношении $\mu_2:\mu_1$. Таким образом, ее координаты —

$$x=\frac{\mu_1 x_1+\mu_2 x_2}{\mu_1+\mu_2}, \quad y=\frac{\mu_1 y_1+\mu_2 y_2}{\mu_1+\mu_2}.$$

Центр тяжести n масс μ_i, расположенных в точках A_i, определяется по индукции. Именно, если A'_n — центр тяжести первых $n-1$ масс, то центр тяжести всех n масс определяется как центр тяжести двух масс: μ_n, расположенной в точке A_n, и $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}$, расположенной в точке A'_n. Вывести формулы для координат центра тяжести масс μ_i, расположенных в точках $A_i(x_i, y_i)$:

$$x=\frac{\mu_1 x_1+\ldots+\mu_n x_n}{\mu_1+\ldots+\mu_n}, \quad y=\frac{\mu_1 y_1+\ldots+\mu_n y_n}{\mu_1+\ldots+\mu_n}.$$

37. Найти центр окружности на оси x, если известно, что окружность проходит через точку $(1, 4)$ и радиус окружности равен 5.

38. Какие особенности в расположении окружности

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \quad (a^2+b^2-c>0)$$

относительно системы координат имеют место, если

а) $a=0$; б) $b=0$; в) $c=0$; г) $a=0$, $b=0$; д) $a=0$, $c=0$; е) $b=0$, $c=0$?

39. Показать, что если в левую часть уравнения окружности подставить координаты любой точки, лежащей вне круга, то получится квадрат касательной, проведенной из этой точки к окружности.

40. *Степенью точки* A относительно окружности называется произведение отрезков секущей, проведенной через точку A, взятое со знаком «+» для внешних точек и со знаком «—» ля внутренних. Показать, что левая часть уравнения окружности

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

при подстановке в нее координат произвольной точки дает степень этой точки относительно окружности.

41. Составить уравнение геометрического места точек плоскости xy, сумма расстояний которых от двух данных точек $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ постоянна и равна $2a$ (*эллипс*). Показать, что уравнение приводится к виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=a^2-c^2$.

42. Составить уравнение геометрического места точек плоскости xy, разность расстояний которых от двух данных точек $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ постоянна и равна $2a$ (*гипербола*). Показать, что уравнение приводится к виду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=c^2-a^2$.

43. Составить уравнение геометрического места точек плоскости xy, равноудаленных от точки $F(0, p)$ и оси x (*парабола*).

44. Показать, что уравнениями в параметрической форме

$$x=R\cos t+a, \qquad y=R\sin t+b$$

задается окружность радиуса R с центром в точке (a, b).

45. Составить уравнение кривой, которую описывает точка отрезка длины a, делящая его в отношении $\lambda:\mu$, когда концы отрезка скользят по координатным осям. Принять в качестве параметра угол, образуемый отрезком с осью x. Что представляет собой кривая, если $\lambda:\mu=1$?

46. Треугольник двумя своими вершинами скользит по координатным осям. Составить уравнение кривой, которую при этом описывает третья вершина (рис. 13).

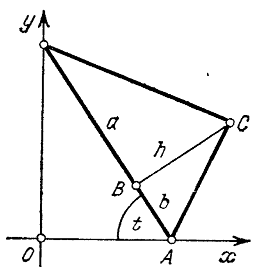


Рис. 13.

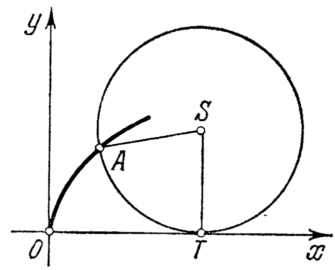


Рис. 14.

47. Составить уравнение кривой, которую описывает точка A окружности радиуса R, катящейся по оси x (рис. 14). Принять в качестве параметра путь s, пройденный центром окружности. Считать, что в начальный момент $(s=0)$ точка A совпадает с началом координат.

48. Кривая задана уравнением

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=0.$$

Показать, что введением параметра $t=y/x$ можно получить следующие уравнения этой кривой в параметрической форме:

$$x=-\frac{d+et}{a+bt+ct^2}, \qquad y=-\frac{dt+et^2}{a+bt+ct^2}.$$

49. Составить уравнение окружности с центром в точке (1, 2), касающейся оси x.

50. Составить уравнение окружности с центром (—3, 4), проходящей через начало координат.

51. Доказать, что окружность $x^2+y^2+2ax+1=0$ не пересекается с осью y.

52. Доказать, что окружность $x^2+y^2+2ax=0$ касается оси y.

53. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнения окружности

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

для того, чтобы окружность а) не пересекалась с осью x; б) пересекалась с осью x в двух точках; в) касалась оси x?

54. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнений окружностей

$$x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0,$$
$$x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0,$$

чтобы окружности а) пересекались; б) касались?

55. Найти точки пересечения двух окружностей

$$x^2+y^2=1 \quad \text{и} \quad x=\cos t+1, \; y=\sin t.$$

56. Найти точки пересечения двух кривых, заданных уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{matrix} x=s^2+1, \\ y=s \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} x=t^2, \\ y=t+1. \end{matrix}$$

57. Показать, что точки пересечения кривых

$$ax^2+by^2=c, \qquad Ax^6+By^6=C$$

расположены симметрично относительно осей координат.

ГЛАВА II
ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Параллельный перенос

Введем на плоскости декартовы координаты x, y. Преобразование фигуры F, при котором произвольная ее точка (x, y) переходит в точку $(x+a, y+b)$, где a и b — постоянные, называется *параллельным переносом* (рис. 15). Параллельный перенос задается формулами

$$x'=x+a, \qquad y'=y+b. \tag{*}$$

Эти формулы выражают координаты x', y' точки, в которую переходит точка (x, y) при параллельном переносе.

Параллельный перенос есть движение. Действительно, две произвольные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ переходят в точки $A'(x_1+a, y_1+b)$, $B'(x_2+a, y_2+b)$ и $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$, $A'B'^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$. Отсюда $AB=A'B'$. Таким образом, преобразование сохраняет расстояния, а значит, является движением.

Название «параллельный перенос» оправдывается тем, что *при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.* Действительно, пусть точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ переходят в точки

$A'(x_1+a,\ y_1+b)$, $B'(x_2+a,\ y_2+b)$ (рис. 16). Середина отрезка AB' имеет координаты

$$x=\frac{x_1+x_2+a}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2+b}{2}.$$

Те же координаты имеет и середина отрезка $A'B$. Отсюда следует что диагонали четырехугольника $AA'B'B$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, этот четырехугольник — параллелограмм. А у параллелограмма противолежащие стороны AA' и BB' параллельны и равны.

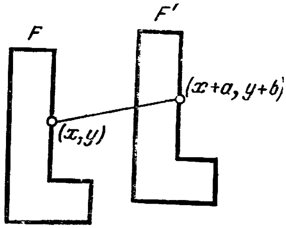


Рис. 15.

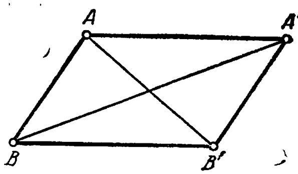


Рис. 16.

Заметим, что у параллелограмма $AA'B'B$ параллельны и две другие противолежащие стороны AB и $A'B'$. Отсюда следует, что *при параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).*

Каковы бы ни были две точки A и A', существует, и притом единственный, параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.

Доказательство. Начнем с доказательства единственности. Пусть X — произвольная точка фигуры и X' — точка, в которую она переходит при параллельном переносе (рис. 17). Как мы знаем, отрезки XA' и AX' имеют общую середину O. Задание точки X однозначно определяет точку O — середину отрезка $A'X$. А точки A и O однозначно определяют точку X', так как O является серединой отрезка AX'. Однозначность в определении точки X' и означает единственность параллельного переноса.

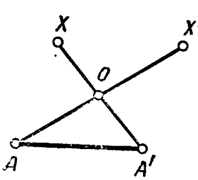


Рис. 17.

Докажем существование параллельного переноса, переводящего точку A в A'. Введем декартовы координаты на плоскости. Пусть a_1, a_2 — координаты точки A и a_1', a_2' — координаты точки A'. Параллельный перенос, задаваемый формулами

$$x'=x+a_1'-a_1,\qquad y'=y+a_2'-a_2,$$

переводит точку A в A'. Действительно, при $x=a_1$ и $y=a_2$ получаем $x'=a_1'$, $y'=a_2'$. Что и требовалось доказать.

Из единственности параллельного переноса, переводящего данную точку A в данную точку A', которая устанавливается без использования системы координат, следует, что *в любой декартовой системе координат параллельный перенос задается формулами вида*

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b.$$

Конечно, постоянные a и b зависят от выбора системы координат.

В качестве упражнения решим следующую задачу.

При параллельном переносе точка (1, 1) переходит в точку (—1, 0). В какую точку перейдет начало координат?

Решение. Любой параллельный перенос задается формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$. Так как точка (1, 1) переходит в точку (—1, 0), то $-1 = 1 + a$, $0 = 1 + b$. Отсюда $a = -2$, $b = -1$. Таким образом, наш параллельный перенос, переводящий точку (1, 1) в (—1, 0), задается формулами $x' = x - 2$, $y' = y - 1$. Подставляя в эти формулы координаты начала ($x = 0$, $y = 0$), получим $x' = -2$, $y' = -1$. Итак, начало координат переходит в точку (—2, —1).

Преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос. Два параллельных переноса, выполненные один за другим, дают снова параллельный перенос.

Доказательство. Любой параллельный перенос задается формулами вида

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b.$$

Обратное преобразование задается формулами того же вида

$$x = x' - a, \qquad y = y' - b,$$

а следовательно, является параллельным переносом. Первое утверждение доказано.

Рассмотрим теперь два параллельных переноса, задаваемые формулами

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b;$$
$$x'' = x' + c, \qquad y'' = y' + d.$$

Преобразование, которое получается в результате последовательного выполнения этих параллельных переносов, задается формулами

$$x'' = x + a + c, \qquad y'' = y + b + d.$$

Это преобразование есть параллельный перенос. Теорема доказана полностью.

§ 2. Абсолютная величина и направление вектора

Вектором мы будем называть направленный отрезок (рис. 18). Для обозначения векторов будем пользоваться строчными латинскими буквами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ... Иногда вектор обозначают указанием концов отрезка, изображающего вектор. Например, вектор на рис. 18 можно обозначить $\overrightarrow{AB}$. При таком способе обозначения вектора $\boldsymbol{a}$ точка A называется *началом*, а точка B — *концом вектора* $\boldsymbol{a}$. При обозначении вектора с помощью концов изображающего его отрезка на первом месте всегда ставится начало вектора. Иногда для обозначения вектора употребляется запись $\bar{a}$ или $\vec{a}$ (читается: «вектор a»).

Две полупрямые называются *одинаково направленными*, если они совмещаются параллельным переносом, т. е. существует параллельный перенос, который переводит одну полупрямую в другую.

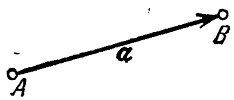


Рис. 18.

Если полупрямые a и b одинаково направлены и полупрямые b и c одинаково направлены, то полупрямые a и c тоже одинаково направлены. Действительно, так как a и b одинаково направлены, то существует параллельный перенос, который переводит полупрямую a в полупрямую b. Так как b и c одинаково направлены, то существует параллельный перенос, который переводит полупрямую b в c. Эти два параллельных переноса, выполненные последовательно, дают параллельный перенос, который переводит полупрямую a в c. Следовательно, полупрямые a и c одинаково направлены.

Две полупрямые называются *противоположно направленными*, если каждая из них одинаково направлена с полупрямой, дополнительной к другой.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *одинаково направленными*, если полупрямые AB и CD одинаково направлены. *Абсолютной величиной* (*или модулем*) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора $\boldsymbol{a}$ обозначается $|\boldsymbol{a}|$. Абсолютная величина вектора $\overrightarrow{AB}$ также обозначается AB.

Два вектора называются *равными*, если они совмещаются параллельным переносом. Это означает, что существует параллельный перенос, который переводит начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора. Отсюда следует, что *равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине. Обратно, если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны.* Действительно, пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — одинаково направленные векторы, равные по абсолютной величине. Параллельный перенос, переводящий точку C в A, совмещает полупрямую CD с полупрямой AB, так как они одинаково направлены. А так как отрезки AB и CD равны, то при этом точка D совмещается с точкой B, т. е. параллельный перенос переводит вектор $\overrightarrow{CD}$ в вектор $\overrightarrow{AB}$. Значит, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.

Решим следующую задачу.

Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Доказать равенство векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

Решение. Подвергнем вектор $\overrightarrow{AB}$ параллельному переносу, при котором точка A переходит в точку D (рис. 19). При этом переносе точка A смещается по прямой AD, а значит, точка B смещается по параллельной прямой BC. Прямая AB переходит в параллельную прямую, а значит, в прямую DC. Следовательно, точка B переходит в точку C. Таким образом, наш параллельный перенос переводит вектор $\overrightarrow{AB}$ в вектор $\overrightarrow{DC}$, а значит, эти векторы равны.

Обозначая вектор его концами $(\overrightarrow{AB})$, естественно и, как увидим дальше, целесообразно рассматривать вектор, у которого концы совпадают $(\overrightarrow{AA})$. Этот вектор будем называть *нулевым вектором* и обозначать $\mathbf{0}$. О направлении нулевого вектора не говорят. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю. Все нулевые векторы равны по определению.

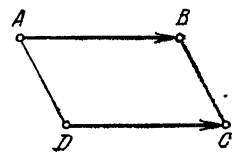


Рис. 19.

Из свойств параллельного переноса следует, что *из любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и притом только один*. Для доказательства достаточно выполнить параллельный перенос, при котором начало вектора перейдет в данную точку.

§ 3. Координаты вектора

Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ имеет началом точку $A_1(x_1, y_1)$, а концом — точку $A_2(x_2, y_2)$. *Координатами вектора* $\boldsymbol{a}$ будем называть числа $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$. Координаты вектора будем ставить рядом с буквенным обозначением вектора, в данном случае — $\boldsymbol{a}(a_1, a_2)$ или просто $\overrightarrow{(a_1\ a_2)}$. Координаты нулевого вектора равны нулю.

Из формулы, выражающей расстояние между двумя точками через их координаты, следует, что абсолютная величина вектора с координатами a_1, a_2 равна $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

Равные векторы имеют равные соответствующие координаты. И обратно, если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.

Доказательство. Пусть $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ — начало и конец вектора $\boldsymbol{a}$. Так как равный ему вектор $\boldsymbol{a}'$ получается из вектора $\boldsymbol{a}$ параллельным переносом, то его началом и концом будут соответственно $A_1'(x_1+c, y_1+d)$ и $A_2'(x_2+c, y_2+d)$. Отсюда видно, что оба вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ имеют одни и те же координаты x_2-x_1, y_2-y_1.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть соответствующие координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1'A_2'}$ равны. Докажем, что векторы равны. Пусть x_1' и y_1' — координаты точки A_1', а x_2', y_2' — координаты точки A_2'. По условию теоремы $x_2-x_1=x_2'-x_1'$, $y_2-y_1=y_2'-y_1'$. Отсюда $x_2'=x_2+x_1'-x_1$, $y_2'=y_2+y_1'-y_1$. Параллельный перенос, задаваемый формулами $x'=x+x_1'-x_1$, $y'=y+y_1'-y_1$, переводит точку A_1 в точку A_1', а точку A_2 в точку A_2', т. е. векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1'A_2'}$ равны. Теорема доказана.

Задача. Даны три точки: $A(1,\ 1)$, $B(-1,\ 0)$, $C(0,\ 1)$. Найти точку $D(x,\ y)$ так, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были равны.

Решение. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $(-2,\ -1)$. Координаты вектора $\overrightarrow{CD}$: $(x-0,\ y-1)$. Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $x-0=-2$, $y-1=-1$. Отсюда находим координаты точки D: $x=-2$, $y=0$.

§ 4. Сложение векторов

Суммой векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ с координатами a_1, a_2 и b_1, b_2 называется вектор $\boldsymbol{c}$ с координатами a_1+b_1, a_2+b_2, т. е.

$$\boldsymbol{a}(a_1,\ a_2)+\boldsymbol{b}(b_1,\ b_2)=\boldsymbol{c}(a_1+b_1,\ a_2+b_2).$$

Для любых векторов $\boldsymbol{a}(a_1,\ a_2)$, $\boldsymbol{b}(b_1,\ b_2)$, $\boldsymbol{c}(c_1,\ c_2)$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$

Для доказательства достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, стоящих в правой и левой частях равенств. Мы видим, что они равны. А векторы с соответственно равными координатами равны.

Каковы бы ни были точки A, B, C, *имеет место векторное равенство*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

Доказательство. Пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$—данные точки. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$, координаты вектора $\overrightarrow{BC}$: $(x_3-x_2,\ y_3-y_2)$. Следовательно, координаты вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$: $(x_3-x_1,\ y_3-y_1)$. А это есть координаты вектора $\overrightarrow{AC}$. Таким образом векторы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ равны. Теорема доказана.

Из этой теоремы получается следующий способ построения суммы произвольных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Надо из конца вектора $\boldsymbol{a}$ отложить вектор $\boldsymbol{b}'$, равный вектору $\boldsymbol{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\boldsymbol{a}$, а конец—с концом вектора $\boldsymbol{b}'$, будет суммой векторов $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (рис. 20).

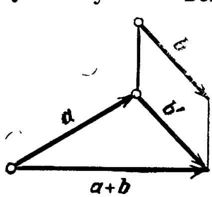


Рис. 20.

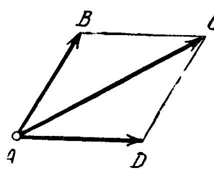


Рис. 21.

Задача. $ABCD$—параллелограмм. Докажите векторное равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (*«правило параллелограмма» сложения векторов*).

Решение. Имеем: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 21). Но векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равны. Поэтому $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Разностью векторов $\boldsymbol{a}(a_1, a_2)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2)$ называется такой вектор $\boldsymbol{c}(c_1, c_2)$, который в сумме с вектором $\boldsymbol{b}$ дает вектор $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$. Отсюда находим координаты вектора $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$: $c_1 = a_1-b_1$, $c_2=a_2-b_2$.

Задача. Даны векторы с общим началом: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Докажите, что $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

Решение. Имеем: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. А это значит, что $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

§ 5. Умножение вектора на число

Произведением вектора $\overrightarrow{(a_1, a_2)}$ и числа λ называется вектор $\overrightarrow{(\lambda a_1, \lambda a_2)}$, т. е.

$$\overrightarrow{(a_1, a_2)}\lambda=\lambda\overrightarrow{(a_1, a_2)}=\overrightarrow{(\lambda a_1, \lambda a_2)}.$$

Из определения операции умножения вектора на число следует, что *для любого вектора* $\boldsymbol{a}$ *и чисел* λ, μ

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

Для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *и числа* λ

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

Абсолютная величина вектора $\lambda\boldsymbol{a}$ *равна* $|\lambda||\boldsymbol{a}|$. *Направление вектора* $\lambda\boldsymbol{a}$ *совпадает с направлением вектора* $\boldsymbol{a}$, *если* $\lambda>0$ *и противоположно направлению вектора* $\boldsymbol{a}$, *если* $\lambda<0$.

Доказательство. Построим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, равные векторам $\boldsymbol{a}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$ соответственно (O — начало координат). Пусть a_1 и a_2 — координаты вектора $\boldsymbol{a}$. Тогда координатами точки A будут числа a_1 и a_2, а координатами точки B будут λa_1, λa_2.

В случае, если $0<\lambda<1$, точка B лежит на отрезке OA и делит его в отношении $\lambda:(1-\lambda)$, так как ее координаты допускают представление

$$\lambda a_1=\frac{0\cdot(1-\lambda)+\lambda a_1}{(1-\lambda)+\lambda}, \quad \lambda a_2=\frac{0\cdot(1-\lambda)+\lambda a_2}{(1-\lambda)+\lambda}.$$

В случае $\lambda>1$ точка A лежит на отрезке OB и делит его в отношении $1:(\lambda-1)$. Таким образом, в обоих случаях, т. е. при $\lambda>0$, вектор $\overrightarrow{OB}$ имеет направление вектора $\overrightarrow{OA}$.

В случае $\lambda<0$ точка O лежит на отрезке AB и делит его в отношении $1:|\lambda|$. Поэтому при $\lambda<0$ вектор $\overrightarrow{OB}$ имеет направление, противоположное вектору $\overrightarrow{OA}$.

Для абсолютной величины вектора $\lambda\boldsymbol{a}$ получаем:

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\lambda a_1)^2+(\lambda a_2)^2}=|\lambda|\sqrt{a_1^2+a_2^2}=|\lambda||\boldsymbol{a}|.$$

Теорема доказана.

Задача. Даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ противоположно направлены.

Решение. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: x_2-x_1 и y_2-y_1. Координаты вектора $\overrightarrow{BA}$: x_1-x_2 и y_1-y_2. Мы видим, что $\overrightarrow{AB}=(-1)\overrightarrow{BA}$. А значит, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ противоположно направлены.

§ 6. Коллинеарные векторы

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно, если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}(a_1, a_2)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2)$ — данные векторы. Допустим, что векторы коллинеарны. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{c}=\pm\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$, где знак «+» берется, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одинаково направлены, и знак «—», когда они противоположно направлены. Вектор $\boldsymbol{c}$ равен вектору $\boldsymbol{a}$, так как они одинаково направлены и имеют одну и ту же абсолютную величину. Приравнивая координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$, получим:

$$a_1=\pm\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}b_1, \quad a_2=\pm\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}b_2.$$

Отсюда $\frac{b_1}{a_1}=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, $\frac{b_2}{a_2}=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. Значит, $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$, т. е. координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пропорциональны.

Пусть теперь у векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ координаты пропорциональны. Докажем, что векторы коллинеарны. Имеем:

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}.$$

Обозначая общее значение этих отношений через λ, получим: $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. А это значит, что векторы коллинеарны.

Задача. Известно, что векторы $\boldsymbol{a}(1, -1)$ и $\boldsymbol{b}(-2, m)$ коллинеарны. Найти, чему равно m.

Решение. У коллинеарных векторов координаты пропорциональны. Следовательно, $\frac{-2}{1}=\frac{m}{-1}$. Отсюда $m=2$.

§ 7. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отличны от нулевого и не коллинеарны, то любой вектор $\boldsymbol{c}$ допускает, и притом единственное, представление:

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

Доказательство. Если $\boldsymbol{c}$ — нулевой вектор, то $\boldsymbol{c}=0\cdot\boldsymbol{a}+0\cdot\boldsymbol{b}$. Пусть вектор $\boldsymbol{c}$ ненулевой. Проведем через концы вектора $\boldsymbol{c}$ прямые, параллельные векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 22). В результате получим представление вектора $\boldsymbol{c}$ в виде суммы векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{b}_1$, коллинеарных $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно. Имеем:

$$\boldsymbol{a}_1=\lambda\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b}_1=\mu\boldsymbol{b}.$$

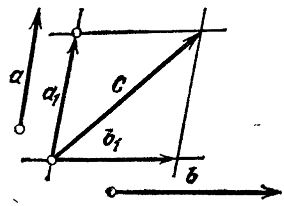


Рис. 22.

Следовательно,

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

Докажем единственность представления. Пусть имеются два представления:

$$\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c}=\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим

$$0=(\lambda_1-\lambda_2)\,\boldsymbol{a}+(\mu_1-\mu_2)\,\boldsymbol{b}.$$

Но это равенство возможно только при $\lambda_1-\lambda_2=0$, $\mu_1-\mu_2=0$, так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Единственность доказана.

Вектор называется *единичным*, если его абсолютная величина равна единице. Единичные векторы, имеющие направления положительных координатных полуосей, называются *координатными векторами или ортами*. Мы будем их обозначать $\boldsymbol{e}_1(1,\ 0)$ на оси x, $\boldsymbol{e}_2(0,\ 1)$ на оси y.

Любой вектор $\boldsymbol{a}(a_1,\ a_2)$ допускает представление в виде

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2.$$

Действительно, $\overrightarrow{(a_1,\ a_2)}=\overrightarrow{(a_1,\ 0)}+\overrightarrow{(0,\ a_2)}=a_1\overrightarrow{(1,\ 0)}+a_2\overrightarrow{(0,\ 1)}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$.

Задача. Даны векторы $\boldsymbol{a}(1,\ 0)$, $\boldsymbol{b}(1,\ 1)$, $\boldsymbol{c}(-1,\ 0)$. Разложить вектор $\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Решение. Приравнивая соответствующие координаты векторов $\boldsymbol{c}$ и $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, получим два уравнения, из которых находим λ и μ: $-1=\lambda\cdot1+\mu\cdot1$, $0=\lambda\cdot0+\mu\cdot1$. Отсюда $\mu=0$, $\lambda=-1$.

§ 8. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\boldsymbol{a}(a_1,\ a_2)$ и $\boldsymbol{b}(b_1,\ b_2)$ называется число $a_1b_1+a_2b_2$. Для скалярного произведения векторов употребляется такая же запись, как и для произведения чисел. Скалярное произведение $\boldsymbol{aa}$ обозначается $\boldsymbol{a}^2$. Очевидно, $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$.

Из определения скалярного произведения векторов следует, *что для любых векторов* $\boldsymbol{a}(a_1,\ a_2)$, $\boldsymbol{b}(b_1,\ b_2)$, $\boldsymbol{c}(c_1,\ c_2)$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}.$$

Действительно, левая часть равенства есть $(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2$, а правая — $a_1c_1+a_2c_2+b_1c_1+b_2c_2$. Очевидно, они равны.

Углом между ненулевыми векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называется угол BAC. Углом между любыми двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом. Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы и φ — угол между ними. Имеем:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}=$$
$$=\boldsymbol{aa}+\boldsymbol{ba}+\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bb}=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2,$$

или

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{ab}.$$

Отсюда видно, что скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ выражается через длины векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, а поэтому не зависит от выбора системы координат, т. е. скалярное произведение не изменится, если систему координат выбрать специальным образом. Возьмем систему координат xy так, как показано на рис. 23. При таком выборе системы координат координатами вектора $\boldsymbol{a}$ будут $|\boldsymbol{a}|$ и 0, а координатами вектора $\boldsymbol{b}$ будут $|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$ и $|\boldsymbol{b}|\sin\varphi$. Скалярное произведение

$$\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi+0\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\varphi=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что *если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. И обратно, если скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.*

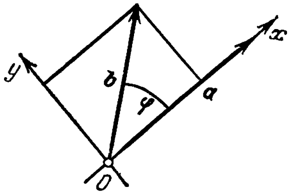


Рис. 23.

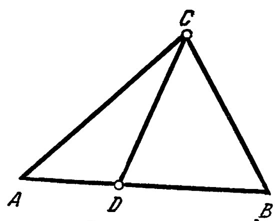


Рис. 24.

Применим скалярное умножение векторов к доказательству теоремы Стюарта из элементарной геометрии. Эта теорема гласит: *пусть ABC — треугольник и D — точка на его стороне AB (рис. 24). Тогда $AC^2\cdot BD+BC^2\cdot AD-CD^2\cdot AB=AB\cdot AD\cdot BD$.*

Доказательство. Имеем векторные равенства

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA},\quad \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}.$$

Возводя эти равенства скалярно в квадрат, получим:

$$AC^2=CD^2+DA^2+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA},$$
$$BC^2=CD^2+DB^2+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB}.$$

Умножая первое равенство на BD, а второе на AD и складывая их почленно, получим:

$$AC^2 \cdot BD + BC^2 \cdot AD =$$
$$= (CD^2 \cdot BD + CD^2 \cdot AD) + (AD^2 \cdot BD + BD^2 \cdot AD) + 2\,(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} \cdot BD + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB} \cdot AD).$$

Так как $AD + DB = AB$, то первая скобка в правой части равенства равна $CD^2 \cdot AB$, вторая равна $AB \cdot AD \cdot BD$. Третья скобка равна $2\overrightarrow{CD}\,(\overrightarrow{DA} \cdot BD + \overrightarrow{DB} \cdot AD) = 0$, так как векторы $\overrightarrow{DA} \cdot BD$ и $\overrightarrow{DB} \cdot AD$ равны по абсолютной величине и противоположно направлены.

Таким образом, получается равенство

$$AC^2 \cdot BD + BC^2 \cdot AD - CD^2 \cdot AB = AB \cdot AD \cdot BD.$$

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Параллельный перенос задается формулами $x' = x + 1$, $y' = y - 1$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки: (0, 0), (1, 0), (0, 2)?

2. Найти величины a и b в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, если известно, что точка (1, 2) переходит в точку (3, 4).

3. Существует ли параллельный перенос, при котором точка (1, 2) переходит в точку (3, 4), а точка (0, 1) — в точку (—1, 0)?

4. AB и CD — параллельные прямые. Точки B и D лежат по одну сторону от секущей AC. Доказать, что лучи AB и CD одинаково направлены.

5. Доказать, что в упр. 4 лучи AB и CD противоположно направлены, если точки B и D лежат по разные стороны от секущей AC.

6. На прямой даны точки A, B, C, причем точка B лежит между точками A и C. Среди векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ назвать одинаково направленные и противоположно направленные.

7. Доказать, что для векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеет место неравенство $|\overrightarrow{AC}| \leqslant |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$.

8. Доказать, что для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеет место неравенство $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

9. Даны точки A (0, 1), B (1; 0), C (1, 2), D (2, 1). Доказать равенство векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

10. Абсолютная величина вектора $\boldsymbol{a}$ (5, m) равна 13. Найти m.

11. Найти модуль вектора $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a} = (\overrightarrow{1, -4})$, $\boldsymbol{b} = (\overrightarrow{-4, 8})$.

12. Показать, что сумма n векторов с общим началом в центре правильного n-угольника и концами в его вершинах равна нулю.

13. Три вектора имеют общее начало O, а концы — в вершинах треугольника ABC. Показать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{0}$ тогда и только тогда, когда O является точкой пересечения медиан треугольника.

14. Вектор $\boldsymbol{r}_{mn}$ имеет началом точку (x_0, y_0), а концом — точку $(m\delta, n\delta)$, где m и n — целые числа, по абсолютной величине не превосходящие M и N соответственно. Найти сумму всех векторов $\boldsymbol{r}_{mn}$, выразив ее через вектор $\boldsymbol{r}$ с началом в точке (0, 0) и концом в точке (x_0, y_0).

15. Конечная фигура F в плоскости xy имеет начало координат центром симметрии. Показать, что сумма векторов с общим началом и концами в целочисленных точках фигуры F (точках с целочисленными координатами) равна нулю тогда и только тогда, когда общим началом векторов является начало координат.

16. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}$ (1, 2) и $\boldsymbol{b}$ (0,5; 1) одинаково направлены, а векторы $\boldsymbol{c}$ (—1, 2) и $\boldsymbol{d}$ (0,5; —1) противоположно направлены.

17. Дан вектор $\boldsymbol{a}$ (3, 4). Найти вектор $\boldsymbol{b}$, одинаково направленный с вектором $\boldsymbol{a}$, имеющий в два раза большую длину.

18. Решить упр. 17 для вектора $\boldsymbol{b}$, противоположно направленного с вектором $\boldsymbol{a}$.

19. Найти абсолютную величину вектора $-2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}$ (3, 2), $\boldsymbol{b}$ (0, -1).

20. Абсолютная величина вектора $\lambda\boldsymbol{a}$ равна 5. Найти λ, если вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты (-6, 8).

21. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ (2, -4), $\boldsymbol{b}$ (1, 2), $\boldsymbol{c}$ (1, -2), $\boldsymbol{d}$ (-2, -4). Указать пары коллинеарных векторов.

22. Какие векторы в упр. 21 одинаково направлены, а какие противоположно направлены? Какие из этих векторов имеют равные абсолютные величины?

23. При каком значении n векторы $\boldsymbol{a}$ (n, 1), $\boldsymbol{b}$ (4, n) коллинеарны и одинаково направлены?

24. Среди векторов $\boldsymbol{a}\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\boldsymbol{b}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\boldsymbol{c}\,(0, -1)$, $\boldsymbol{d}\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ найти единичные и указать, какие из них коллинеарны.

25. Найти единичный вектор, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}$ (6, 8), одинаково с ним направленный.

26. Точки M и N являются серединами отрезков AB и CD соответственно. Доказать векторное равенство $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$.

27. $\boldsymbol{e}_1$ (1, 0) и $\boldsymbol{e}_2$ (0, 1) — координатные векторы. Чему равны координаты вектора $2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$?

28. Чему равны λ и μ в представлении вектора $\boldsymbol{a}$ (-5, 4): $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$?

29. Доказать неравенство для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $(\boldsymbol{ab})^2\leqslant \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

30. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}$ (1, 2), $\boldsymbol{b}\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

31. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Найти абсолютную величину вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, если известно, что абсолютные величины векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны 1, а угол между ними 60°.

32. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ из предыдущего упражнения.

33. Даны вершины треугольника: A (1, 1), B (4, 1), C (4, 5). Найти косинусы углов треугольника.

34. Найти углы треугольника с вершинами $A\,(0, \sqrt{3})$, $B\,(2, \sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

35. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}$ (m, n) и $\boldsymbol{b}$ ($-n$, m) либо перпендикулярны, либо равны нулевому.

36. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ (3, 4) и $\boldsymbol{b}$ (m, 2). При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

37. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ (1, 0) и $\boldsymbol{b}$ (1, 1). Найти λ такое, чтобы вектор $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ был перпендикулярен вектору $\boldsymbol{a}$.

38. При каком значении λ вектор $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ в упр. 37 перпендикулярен вектору $\boldsymbol{b}$?

39. Доказать, что если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — единичные неколлинеарные векторы, то векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ отличны от нулевого, и перпендикулярны.

40. Единичные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол 60°. Доказать, что вектор $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{a}$.

41. Векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ перпендикулярны. Доказать, что $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

42. Даны четыре точки: A (1, 1), B (2, 3), C (0, 4), D (-1, 2). Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

43. Даны четыре точки: A (0, 0), B (-1, 1), C (0, 2), D (1, 1). Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

44. Доказать, что если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — любые, не равные нулевому и неколлинеарные векторы, то

$$\lambda^2\boldsymbol{a}^2+2\lambda\mu(\boldsymbol{ab})+\mu^2\boldsymbol{b}^2\geqslant 0,$$

причем, равенство имеет место только при $\lambda=\mu=0$.

ГЛАВА III
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Общий вид уравнения прямой

Докажем, что *любая прямая на плоскости xy имеет уравнение вида*

$$ax+by+c=0, \tag{*}$$

где a, b, c — постоянные. И обратно, *любое уравнение вида* (*) *является уравнением некоторой прямой.*

Доказательство. Пусть g — произвольная прямая, $A_0(x_0, y_0)$ — точка на ней и $\boldsymbol{n}(a_1, a_2)$ — вектор, перпендикулярный прямой g (рис. 25). Пусть $A(x, y)$ — произвольная точка, лежащая на прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{A_0A}$ и $\boldsymbol{n}$ перпендикулярны, а значит, их скалярное произведение равно нулю. Таким образом, каждая точка прямой g удовлетворяет уравнению

$$(x-x_0)a_1+(y-y_0)a_2=0. \tag{**}$$

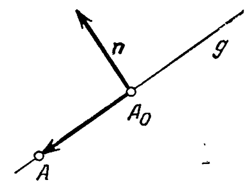


Рис. 25.

Обратно, если точка $A(x, y)$ удовлетворяет этому уравнению, то это значит, что $\overrightarrow{A_0A}\cdot\boldsymbol{n}=0$, и, следовательно, точка A лежит на прямой g.

Согласно определению уравнение (**) является уравнением прямой g. Его можно переписать так:

$$a_1x+a_2y+(-a_1x_0-a_2x_0)=0.$$

Мы видим, что оно имеет вид (*). Тем самым первое утверждение доказано.

Пусть теперь имеется уравнение

$$ax+by+c=0.$$

Покажем, что оно является уравнением некоторой прямой. Пусть x_0, y_0 — какое-нибудь решение этого уравнения:

$$ax_0+by_0+c=0.$$

С помощью этого соотношения наше уравнение можно преобразовать так:

$$ax+by-ax_0-by_0=0,$$

или

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$

А в таком виде, как мы видели, оно представляет собой уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}(a, b)$. Второе утверждение доказано.

Заметим, что в *уравнении прямой*

$$ax+by+c=0$$

коэффициенты a и b представляют собой координаты вектора, перпендикулярного прямой.

В качестве упражнения составим уравнение прямой, проходящей через две данные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Вектор $e(x_2-x_1, y_2-y_1)$ лежит на искомой прямой. Вектор $e'(y_1-y_2, x_2-x_1)$ перпендикулярен вектору e, так как скалярное произведение $ee'=0$. Значит, вектор e' перпендикулярен прямой. А тогда, как мы уже знаем, уравнение прямой можно записать в виде

$$(x-x_1)(y_1-y_2)+(y-y_1)(x_2-x_1)=0.$$

В более удобной для запоминания форме это уравнение записывают так:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Задача. Выяснить, что представляет собой геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна.

Решение. Пусть (x_0, y_0) и (x_0', y_0') — данные точки и (x, y) — произвольная точка рассматриваемого геометрического места точек. Имеем

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(x-x_0')^2-(y-y_0')^2=c=\text{const},$$

или

$$2x(x_0'-x_0)+2y(y_0'-y_0)+x_0^2+y_0^2-x_0'^2-y_0'^2-c=0.$$

Мы видим, что наше уравнение линейно, т. е. первой относительно x и y степени с постоянными коэффициентами. Следовательно, наше геометрическое место точек представляет собой прямую.

§ 2. Расположение прямой относительно системы координат

Выясним, какие особенности в расположении прямой относительно системы координат имеют место, если ее уравнение $ax+by+c=0$ того или иного частного вида.

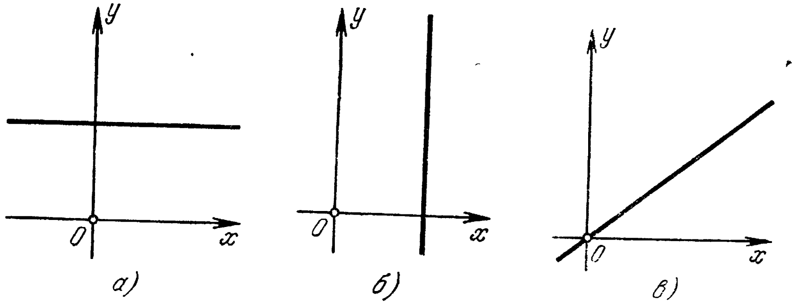


Рис. 26.

1. $a=0$. В этом случае уравнение прямой можно переписать так:

$$y=-\frac{c}{b}.$$

Таким образом, все точки прямой имеют одну и ту же ординату $(-c/b)$, и следовательно, *прямая параллельна оси* x (рис. 26, *а*). В частности, *если и* $c=0$, *то прямая совпадает с осью* x.

2. $b=0$. Этот случай рассматривается аналогично. *Прямая параллельна оси y* (рис. 26, *б*) *и совпадает с ней, если и $c=0$.*

3. $c=0$. *Прямая проходит через начало координат*, так как его координаты (0, 0) удовлетворяют уравнению прямой (рис. 26, *в*).

Если в уравнении прямой $ax+by+c=0$ коэффициент при y не равен нулю, то это уравнение можно разрешить относительно y. Получаем

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}.$$

Или, обозначая $-a/b=k$, $-c/b=q$, получим:

$$y=kx+q.$$

Выясним геометрический смысл коэффициента k в этом уравнении. Возьмем две точки на прямой $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1<x_2$. Их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$y_1=kx_1+q, \qquad y_2=kx_2+q.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$ Отсюда

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

В случае, представленном на рис. 27, *а*, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\operatorname{tg}\alpha$. В случае, представленном на рис. 27, *б*, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\operatorname{tg}\alpha$. Таким образом, коэффициент k в уравнении прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью x.

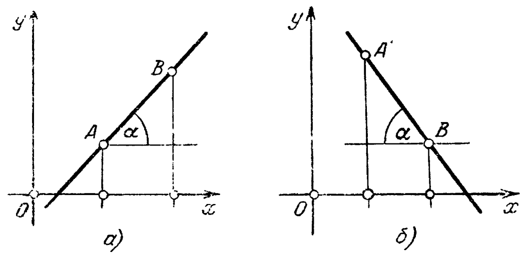


Рис. 27.

Обычно говорят, что *коэффициент k в уравнении прямой равен тангенсу угла наклона прямой к оси x*, считая этот угол отрицательным в случае, представленном на рис. 27, *б*. Коэффициент k в уравнении прямой называется *угловым коэффициентом прямой*.

§ 3. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть даны уравнения двух прямых:

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Выясним, *какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямых, чтобы прямые были параллельны (перпендикулярны)*.

Как мы знаем, коэффициенты при x и y в уравнении прямой представляют собой координаты вектора, перпендикулярного прямой. Поэтому, для того, чтобы прямые были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы перпендикулярные им векторы были коллинеарны. Отсюда получается *условие параллельности прямых*:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

Для того, чтобы прямые были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы перпендикулярные им векторы были перпендикулярны, а значит, их скалярное произведение равно нулю. Отсюда получается *условие перпендикулярности прямых*

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$

Задача. Дана прямая своим уравнением $ax+by+c=0$ и точка (x_0, y_0). Составить уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0), параллельной (перпендикулярной) данной прямой.

Решение. Составим сначала уравнение параллельной прямой. Так как искомая прямая параллельна данной, то вектор $\overrightarrow{(a, b)}$, перпендикулярный данной прямой, будет перпендикулярен и искомой прямой. А зная точку и вектор, перпендикулярный прямой, получаем ее уравнение:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$

Найдем теперь уравнение прямой, перпендикулярной данной. Вектор $\overrightarrow{(a, b)}$ перпендикулярен данной прямой. Вектор $\overrightarrow{(-b, a)}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{(a, b)}$, так как их скалярное произведение равно нулю. Поэтому вектор $\overrightarrow{(-b, a)}$ перпендикулярен искомой прямой. А теперь без труда пишем ее уравнение:

$$-b(x-x_0)+a(y-y_0)=0.$$

Задача. Даны пересекающиеся прямые своими уравнениями:

$$ax+by+c=0, \quad a_1x+b_1y+c_1=0.$$

Найти угол между прямыми.

Решение. Углом между прямыми называется меньший из углов, которые получаются в пересечении прямых. Этот угол либо равен углу между векторами, перпендикулярными прямым, либо дополняет его до 180°. Поэтому косинус угла между прямыми с точностью до знака равен косинусу угла между векторами $\overrightarrow{(a, b)}$ и $\overrightarrow{(a_1, b_1)}$. Пользуясь скалярным произведением векторов, получаем уравнение для угла φ между прямыми

$$|aa_1+bb_1|=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cos\varphi.$$

Отсюда и находим φ $\left(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

§ 4. Уравнение пучка прямых

Пусть две пересекающиеся прямые заданы уравнениями:

$$ax+by+c=0,$$
$$a_1x+b_1y+c_1=0.$$

Составим уравнение

$$\lambda(ax+by+c)+\mu(a_1x+b_1y+c_1)=0 \qquad (*)$$

(λ и μ — постоянные). Это уравнение линейно, а значит, является уравнением некоторой прямой. Координаты точки пересечения данных прямых удовлетворяют этому уравнению, так как для них $ax+by+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$. Уравнение (*) называется *уравнением пучка прямых*.

Уравнение пучка прямых оказывается полезным при решении некоторых задач, когда надо составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения двух данных прямых и удовлетворяющей какому-либо дополнительному условию. В качестве иллюстрации решим следующую задачу.

Задача. Даны уравнения двух пересекающихся прямых $ax+by+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$. Найти уравнение прямой, которая проходит через данную точку (x_0, y_0) и точку пересечения данных прямых.

Решение. Прямая, задаваемая уравнением $\lambda(ax+by+c)+\mu(a_1x+b_1y+c_1)=0$, проходит через точку пересечения данных прямых. Потребуем, чтобы она проходила и через данную точку (x_0, y_0). Для этого надо, чтобы $\lambda(ax_0+by_0+c)+\mu(a_1x_0+b_1y_0+c_1)=0$. При любых λ и μ, не равных нулю одновременно и удовлетворяющих этому уравнению, прямая пучка будет проходить через точку (x_0, y_0). В частности, можно взять $\lambda=a_1x_0+b_1y_0+c_1$, $\mu=-(ax_0+by_0+c)$. Тогда уравнение искомой прямой будет

$$(ax+by+c)(a_1x_0+b_1y_0+c)-(a_1x+b_1y+c_1)(ax_0+by_0+c)=0.$$

§ 5. Уравнение прямой в нормальной форме

Уравнение прямой $ax+by+c=0$ называется уравнением *в нормальной форме*, если $a^2+b^2=1$. Очевидно, чтобы общее уравнение прямой привести к нормальной форме, достаточно разделить его на $\pm\sqrt{a^2+b^2}$.

Уравнение прямой в нормальной форме имеет простой геометрический смысл. Именно, *если в его левую часть подставить координаты любой точки плоскости, то получится число, равное с точностью до знака расстоянию от этой точки до прямой.* Причем это число для точек одной полуплоскости, определяемой прямой, положительно, а для другой — отрицательно. Докажем это.

Пусть

$$ax+by+c=0$$

— уравнение прямой в нормальной форме. Пусть $A_0(x_0, y_0)$ — какая-нибудь точка прямой. Тогда $ax_0+by_0+c=0$, и уравнение нашей прямой можно представить в виде

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$

Пусть теперь $A_1(x_1, y_1)$ — любая точка плоскости. Подставляя ее координаты в левую часть уравнения прямой, получим

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_0A_1},$$

где $n(a, b)$ — единичный вектор $(a^2+b^2=1)$. Имеем $|n\cdot\overrightarrow{A_0A_1}| = A_0A_1\cdot\cos\theta = A_1B$ (рис. 28). Таким образом, действительно, при подстановке координат точки A_1 в левую часть уравнения прямой получается с точностью до знака расстояние A_1B точки A_1 от прямой.

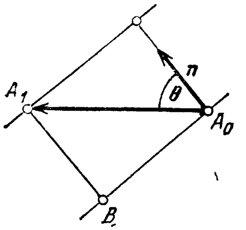


Рис. 28.

Очевидно, знак выражения $n\cdot\overrightarrow{A_0A_1}$ зависит от того, как направлены векторы n и $\overrightarrow{A_0A_1}$: в одну полуплоскость или в разные. Поэтому для точек одной полуплоскости выражение положительно, а для другой — отрицательно.

Задача. Выяснить, что представляет собой геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных пересекающихся прямых.

Решение. Пусть $ax+by+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$ — уравнения данных прямых в нормальной форме. При подстановке координат произвольной точки в уравнения прямых получаются с точностью до знака расстояния этой точки от прямых. Отсюда следует, что точки искомого геометрического места удовлетворяют уравнению

$$|ax+by+c| = |a_1x+b_1y+c_1|.$$

Это уравнение эквивалентно двум уравнениям

$$ax+by+c = a_1x+b_1y+c_1,$$
$$ax+by+c = -(a_1x+b_1y+c_1).$$

Таким образом, искомое геометрическое место точек состоит из двух прямых. Очевидно, это прямые, содержащие биссектрисы углов, которые получаются при пересечении данных прямых.

§ 6. Преобразование координат

Пусть на плоскости введены две системы координат xy и $x'y'$ (рис. 29). *Установим связь между координатами произвольной точки относительно этих систем координат.*

Пусть

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

— уравнения осей y' и x' в нормальной форме в системе координат xy.

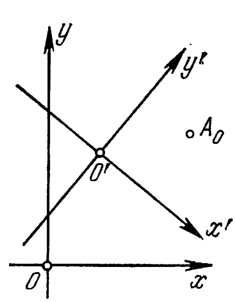


Рис. 29.

Уравнение прямой в нормальной форме определено однозначно с точностью до перемены знака у всех коэффициентов уравнения. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что для некоторой точки A_0 (x_0, y_0) первого квадранта системы координат $x'y'$

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1 > 0,$$
$$a_2x_0+b_2y_0+c_2 > 0$$

(в противном случае знаки коэффициентов можно заменить на противоположные).

Мы утверждаем, что *координаты произвольной точки x', y' относительно системы координат $x'y'$ выражаются через координаты x, y той же точки в системе координат xy по формулам*

$$x' = a_1x + b_1y + c_1, \qquad (*)$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2.$$

Докажем, например, первую формулу. Абсолютная величина левой и правой частей формулы одинакова, так как представляет собой расстояние точки от оси y'. В каждой из полуплоскостей, определяемых осью y', левая и правая части формулы сохраняют знак и меняют его при переходе из одной полуплоскости в другую. А так как для точки A_0 знаки совпадают, то они совпадают для любой точки плоскости.

Вторая формула доказывается аналогично.

Так как

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

представляют собой уравнения двух перпендикулярных прямых в нормальной форме, то коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 формул (*) связаны соотношениями

$$a_1^2 + b_1^2 = 1,$$
$$a_2^2 + b_2^2 = 1, \qquad (**)$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Принимая во внимание первые две формулы (**), коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 можно представить так:

$$a_1 = \cos\alpha, \quad b_1 = \sin\alpha,$$
$$a_2 = \cos\alpha_1, \quad b_2 = \sin\alpha_1.$$

Тогда из третьего соотношения (**) получаем

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \sin\alpha\sin\alpha_1 = \cos(\alpha - \alpha_1) = 0,$$

откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$. Итак, формулы преобразования координат (*) можно записать в одной из следующих двух форм:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + c_1,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + c_2$$

или

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + c_1,$$
$$y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + c_2.$$

Первая из них охватывает все случаи, когда система координат $x'y'$ может быть получена движением из системы координат xy. Вторая система формул охватывает случаи, когда система координат $x'y'$ получается из системы xy движением и зеркальным отражением.

Величины α, c_1 и c_2 в формулах преобразования координат имеют простой геометрический смысл: α — с точностью до кратного 2π — угол, образуемый осью x' с осью x, а c_1 и c_2 — координаты начала системы координат xy в системе координат $x'y'$.

Задача. На плоскости xy введена новая система координат $x'y'$. Оси координат новой системы в системе координат xy задаются уравнениями

$$3x+4y+10=0, \quad -4x+3y-15=0.$$

Найти формулы перехода от координат x, y к координатам x', y', если известно, что старое начало координат принадлежит первому квадранту в новой системе.

Решение. Преобразуем уравнения новых осей к нормальной форме. Получим

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+2=0, \quad -\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-3=0.$$

Формулы перехода, как мы знаем, имеют вид

$$x'=\pm\left(\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+2\right), \quad y'=\pm\left(-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-3\right).$$

Выбор знака в правых частях формул определяется тем, что начало старой системы координат принадлежит первому квадранту в новой системе. Значит, при подстановке $x=0$ и $y=0$ в правые части формул должны получаться положительные значения. Для этого в первой формуле надо взять знак «+», а во второй знак «—».

§ 7. Движения в плоскости

Формулы преобразования координат

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha+c_1,$$
$$y'=\pm(-x\sin\alpha+y\cos\alpha+c_2) \qquad (*)$$

имеют другую важную интерпретацию. Возьмем любые две точки плоскости A_1 и A_2. Расстояние между ними можно выразить в системе координат xy и системе координат $x'y'$. Имеем:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2. \qquad (**)$$

Рассмотрим теперь преобразование плоскости xy, при котором произвольная ее точка (x, y) переходит в точку (x', y') по формулам $(*)$. Из равенства $(**)$ следует, что это преобразование плоскости есть движение.

Нетрудно видеть, что любое движение в плоскости xy задается формулами вида $(*)$. Именно, если данное движение переводит систему координат xy в систему координат $x'y'$, то формулы преобразования координат будут формулами, задающими данное движение.

Движение, задаваемое формулами $(*)$, можно получить из простейшего движения, задаваемого формулами

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$
$$y'=\pm(-x\sin\alpha+y\cos\alpha), \qquad (***)$$

и параллельного переноса $x'=x+c_1$, $y'=y+c_2$.

Движение, задаваемое формулами (***) со знаком «+» во второй формуле, есть поворот около начала координат. Движение, задаваемое формулами (***) со знаком «—» во второй формуле, есть зеркальное отражение, т. е. симметрия относительно некоторой прямой, проходящей через начало координат.

§ 8. Инверсия

Пусть O — произвольная точка плоскости и R — положительное число. Преобразование, при котором произвольная точка X, отличная от O, переходит в точку X' на луче OX такую, что $OX \cdot OX' = R^2$, называется *инверсией*. Точка O называется *центром инверсии*, а число R — *радиусом инверсии*. Очевидно, при инверсии точка X' переходит в X.

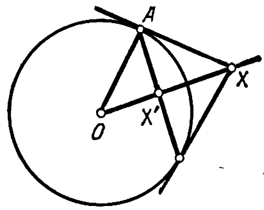


Рис. 30.

Преобразование инверсии можно наглядно представить себе следующим образом. Проведем окружность с центром O и радиусом R (рис. 30). Если точка X лежит вне круга, ограниченного окружностью, то для получения точки X' надо провести касательную к окружности из точки X и из точки касания опустить перпендикуляр на прямую OX. Основание этого перпендикуляра и будет точкой X'. Действительно, в прямоугольном треугольнике OAX, как мы знаем, $OA^2 = OX' \cdot OX$.

Если точка X лежит внутри круга, то надо провести через нее хорду, перпендикулярную прямой OX, и в конце хорды построить касательную к окружности. Пересечение касательной с прямой OX и будет точка X'.

Если точка X лежит на окружности, то X' совпадает с X.

При инверсии окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность; окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую; прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии; прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя.

Доказательство. Примем центр инверсии O за начало декартовой системы координат xy. Выразим координаты x, y точки X через координаты x', y' точки X', в которую переходит X при инверсии. Так как векторы $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OX'}$ коллинеарны, то $x = \lambda x'$, $y = \lambda y'$. Так как $OX' \cdot OX = R^2$, то $(x'^2 + y'^2)((\lambda x')^2 + (\lambda y')^2) = R^4$. Отсюда находим $\lambda = R^2/(x'^2 + y'^2)$. Таким образом,

$$x = \frac{R^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = \frac{R^2 y'}{x'^2 + y'^2}. \tag{*}$$

Возьмем теперь произвольную окружность. Она задается уравнением вида

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Подставив в это уравнение выражения для x и y, даваемые формулами (*), получим уравнение кривой, в которую переходит окружность при инверсии:

$$\frac{1}{x'^2+y'^2}(R^4+aR^2x'+bR^2y'+c(x'^2+y'^2))=0.$$

Кривая, задаваемая уравнением

$$R^4+aR^2x+bR^2y+c(x^2+y^2)=0$$

при $c\neq 0$, как мы знаем, есть окружность. Таким образом, преобразование инверсии переводит окружность, не проходящую через центр инверсии, в окружность.

Если окружность проходит через центр инверсии ($c=0$), она переходит в прямую

$$R^4+aR^2x+bR^2y=0.$$

Прямая $ax+by+c=0$, не проходящая через центр инверсии ($c\neq 0$), переходит в окружность

$$aR^2x+bR^2y+c(x^2+y^2)=0,$$

проходящую через центр инверсии (начало координат).

Прямая $ax+by=0$, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую $aR^2x+bR^2y=0$, т. е. в себя. Теорема доказана полностью.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

1. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек (0, 1) и (1, 2).

2. Найти точки пересечения прямой $x+2y+3=0$ с осями координат.

3. Найти точку пересечения прямых $x+2y+3=0$ и $4x+5y+6=0$.

4. Составить уравнение прямой, которая проходит через точки $A(-1, 1)$, $B(1, 0)$.

5. Чему равны коэффициенты a и b в уравнении прямой $ax+by=1$, если известно, что она проходит через точки (1, 2) и (2, 1)?

6. Чему равен коэффициент c в уравнении прямой $x+y+c=0$, если она проходит через точку (1, 2)?

7. При каком c прямая $x+y+c=0$ касается окружности $x^2+y^2=1$?

8. Доказать, что три прямые $x+2y=3$, $2x-y=1$ и $3x+y=4$ пересекаются в одной точке.

9. Доказать, что прямые $x+2y=3$ и $2x+4y=3$ не пересекаются.

10. Составить уравнение прямой, зная, что она параллельна оси x и проходит через точку (2, 3).

11. Составить уравнение прямой, зная, что она проходит через начало координат и точку (2, 3).

12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и равноотстоящей от точек (x_1, y_1), (x_2, y_2).

13. Показать, что три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) тогда и только тогда лежат на прямой, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

14. Показать, что уравнением

$$a^2x^2+2abxy+b^2y^2-c^2=0$$

задается пара прямых. Найти уравнение каждой прямой в отдельности.

15. Показать, что любая прямая допускает параметрическое задание уравнениями вида

$$x=at+b, \quad y=ct+d \qquad (-\infty<t<\infty).$$

И обратно, любую такую систему уравнений можно рассматривать как уравнения некоторой прямой в параметрической форме. Эта прямая задается уравнением в неявной форме

$$(x-b)\,c-(y-d)\,a=0.$$

16. Кривая γ задается уравнением

$$\omega(x,\ y)=0,$$

где ω — многочлен степени n относительно x и y. Показать, что если кривая γ имеет с некоторой прямой более n точек пересечения, то она содержит эту прямую целиком.

17. *Радикальной осью* двух окружностей называется геометрическое место точек равных степеней относительно этих окружностей (см. упр. 40 к гл. II). Показать, что радикальная ось есть прямая. Если окружности пересекаются, то она проходит через точки пересечения.

18. При каком условии прямая

$$ax+by+c=0$$

пересекает положительную полуось x (отрицательную полуось x)?

19. При каком условии прямая

$$ax+by+c=0$$

не пересекает первого координатного угла?

20. Показать, что прямые, задаваемые уравнениями

$$ax+by+c=0, \quad ax-by+c=0 \qquad (b\neq 0),$$

располож. ны симметрично относительно оси x.

21. Показать, что прямые, задаваемые уравнениями

$$ax+by+c=0, \quad ax+by-c=0,$$

расположены симметрично относительно начала координат.

22. Задан пучок прямых

$$ax+by+c+\lambda(a_1x+b_1y+c_1)=0.$$

Выяснить, при каком значении параметра λ прямая пучка параллельна оси x (оси y), при каком значении λ прямая проходит через начало координат.

23. При каком условии прямая

$$ax+by+c=0$$

вместе с осями координат ограничивает равнобедренный треугольник?

24. Показать, что площадь треугольника, ограниченного прямой

$$ax+by+c=0 \qquad (a,\ b,\ c\neq 0)$$

и осями координат,

$$S=\frac{1}{2}\,\frac{c^2}{|ab|}.$$

25. Найти касательные к окружности

$$x^2+y^2+2ax+2by=0,$$

параллельные координатным осям.

26. Показать, что прямые $ax+by+c=0$, $bx-ay+c'=0$ пересекаются под прямым углом.

27. Какой угол с осью x образует прямая

$$y=x\operatorname{ctg}\alpha \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<0\right)?$$

28. Составить уравнения сторон правильного треугольника со стороной 1, приняв за оси координат одну из сторон и высоту, опущенную на эту сторону.

29. Найти внутренние углы треугольника, ограниченного прямыми

$$x+2y=0, \quad 2x+y=0, \quad x+y=1.$$

30. При каком условии для прямых

$$ax+by=0, \qquad a_1x+b_1y=0$$

ось x является биссектрисой образованных ими углов?

31. Вывести для угла θ, образуемого прямой

$$x=at+b, \quad y=ct+d$$

с осью x, формулу

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{c}{a}.$$

32. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x&=a_1t+b_1, \\ y&=a_2t+b_2 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x&=c_1t+d_1, \\ y&=c_2t+d_2. \end{aligned}$$

33. Показать, что четырехугольник, ограниченный прямыми

$$\pm ax \pm by+c=0 \qquad (a,\ b,\ c \neq 0),$$

есть ромб. Оси координат являются его диагоналями.

34. Показать, что две прямые, отсекающие на координатных осях отрезки равной длины, либо параллельны, либо перпендикулярны.

35. Найти условие параллельности (перпендикулярности) прямых, заданных уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x&=\alpha_1t+a_1, \\ y&=\beta_1t+b_1 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x&=\alpha_2t+a_2, \\ y&=\beta_2t+b_2. \end{aligned}$$

36. Найти условие параллельности (перпендикулярности) прямых, одна из которых задана уравнением

$$ax+by+c=0,$$

а другая — уравнениями в параметрической форме

$$x=\alpha t+\beta, \quad y=\gamma t+\delta.$$

37. В семействе прямых, заданных уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

(λ — параметр семейства), найти прямую, параллельную (перпендикулярную) прямой

$$ax+by+c=0.$$

38. Даны уравнения сторон треугольника и точка своими координатами. Как узнать, лежит эта точка внутри треугольника или вне его?

39. Показать, что расстояние между параллельными прямыми

$$ax+by+c_1=0, \quad ax+by+c_2=0$$

равно

$$\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

40. Составить уравнения прямых, параллельных прямой

$$ax+by+c=0,$$

находящихся от нее на расстоянии δ.

41. Составить уравнение прямой, параллельн (ойперпендикулярной) прямой

$$ax+by+c=0,$$

проходящей через точку пересечения прямых

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \quad a_2x+b_2y+c_2=0.$$

42. При каком условии точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) расположены симметрично относительно прямой

$$ax+by+c=0?$$

43. Составить уравнение кривой $x^2-y^2=a^2$, [приняв за новые оси координат прямые

$$x+y=0, \quad x-y=0.$$

ГЛАВА IV
КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

§ 1. Полярные координаты

Проведем из произвольной точки O на плоскости полупрямую g и зададим некоторое направление отсчета углов около точки O. Каждой точке A плоскости можно сопоставить два числа ρ и θ: ρ — расстояние точки A до O, θ — угол, образуемый полупрямой OA с полупрямой g (рис. 31).

Числа ρ и θ называются *полярными координатами точки* A. Точка O называется *полюсом*, а полупрямая g — *полярной осью.*

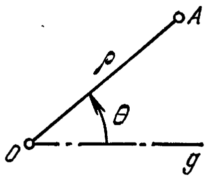


Рис. 31.

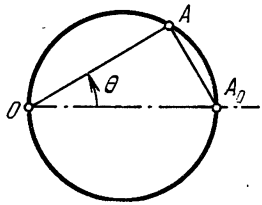


Рис. 32.

Подобно тому, как и в случае декартовых координат, можно говорить об уравнении кривой в полярных координатах. Именно, уравнение

$$\varphi(\rho, \theta)=0$$

называется *уравнением кривой в полярных координатах*, если полярные координаты каждой точки кривой ему удовлетворяют. И обратно, любая пара чисел ρ, θ, удовлетворяющая этому уравнению, представляет собой полярные координаты одной из точек кривой.

Составим для примера уравнение в полярных координатах окружности, проходящей через полюс, с центром на полярной оси и радиусом R. Из прямоугольного треугольника OAA_0 получаем $OA=OA_0\cos\theta$ (рис. 32). Отсюда уравнение окружности:

$$\rho=2R\cos\theta.$$

Введем на плоскости $\rho\theta$ систему декартовых координат xy, приняв полюс O за начало декартовой системы координат, полярную ось — за положительную полуось x, а направление положительной полуоси y выберем так, чтобы она образовала с полярной осью при выбранном направлении отсчета углов угол $+\pi/2$.

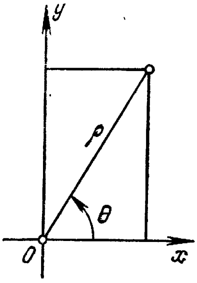


Рис. 33.

Между полярными и декартовыми координатами точки очевидным образом устанавливается следующая простая связь:

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta. \qquad (*)$$

(рис. 33). Это позволяет, зная уравнение кривой в полярных координатах, получить ее уравнение в декартовых координатах, и наоборот.

Составим, например, уравнение произвольной прямой в полярных координатах. Уравнение прямой в декартовых координатах:

$$ax + by + c = 0.$$

Вводя в это уравнение ρ и θ вместо x и y согласно формулам $(*)$, получим

$$\rho(a\cos\theta + b\sin\theta) + c = 0.$$

Полагая, далее

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha, \qquad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\rho_0,$$

получим уравнение прямой в форме

$$\rho\cos(\alpha - \theta) = \rho_0.$$

§ 2. Конические сечения

Коническим сечением называется кривая, по которой пересекает круговой конус произвольная плоскость, не проходящая через его вершину (рис. 34). Конические сечения обладают рядом замечательных свойств. Одно из них заключается в следующем.

Каждое коническое сечение, кроме окружности, представляет собой геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний которых от некоторой точки F и некоторой прямой δ постоянно. Точка F называется фокусом конического сечения, а прямая δ — директрисой.

Докажем это свойство. Пусть γ — кривая, по которой плоскость σ пересекает конус (рис. 35). Впишем в конус сферу, касающуюся плоскости σ, и обозначим F точку касания сферы с плоскостью. Пусть ω — плоскость, в которой лежит окружность касания сферы с конусом. Возьмем на кривой γ произвольную точку M. Проведем через точку M образующую конуса и обозначим B точку пересечения ее с плоскостью ω. Опустим, наконец, перпендикуляр из точки M на прямую δ пересечения плоскостей σ и ω.

Утверждается, что кривая γ по отношению к точке F и прямой δ обладает указанным выше свойством. Действительно, $FM=BM$ как касательные к сфере из одной точки. Далее, если

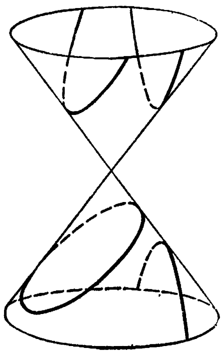


Рис. 34.

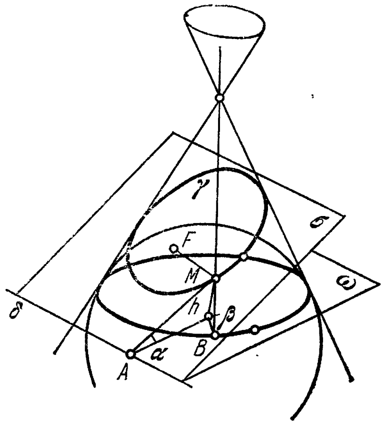


Рис. 35.

обозначить h расстояние точки M от плоскости ω, то $AM = h/\sin\alpha$, $BM = h/\sin\beta$, где α — угол между плоскостями ω и σ, а β — угол между образующими конуса и плоскостью ω.

Отсюда следует, что

$$\frac{AM}{FM}=\frac{AM}{BM}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

т. е. отношение AM/FM не зависит от точки M. Утверждение доказано.

В зависимости от того, каково отношение λ расстояний произвольной точки конического сечения от фокуса и директрисы, кривая называется *эллипсом* ($\lambda < 1$), *параболой* ($\lambda = 1$) и *гиперболой* ($\lambda > 1$). Число λ называется *эксцентриситетом* конического сечения.

Пусть F — фокус конического сечения и δ — его директриса (рис. 36). В случае эллипса и параболы ($\lambda \leqslant 1$) все точки кривой располагаются по одну сторону директрисы, именно со стороны, где находится фокус F. Действительно, для всякой точки A, расположенной с другой стороны директрисы

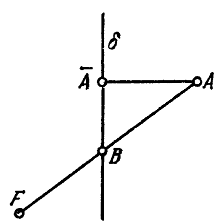


Рис. 36.

$$\frac{AF}{A\bar{A}} > \frac{AB}{A\bar{A}} \geqslant 1.$$

Напротив, у гиперболы ($\lambda > 1$) есть точки, расположенные по обе стороны директрисы. Гипербола состоит из двух ветвей, разделяемых директрисой.

§ 3. Уравнения конических сечений в полярных координатах

Составим уравнение конического сечения в полярных координатах, приняв за полюс системы координат $\rho\theta$ фокус конического сечения, а полярную ось проведем так, чтобы она была перпендикулярна директрисе и пересекала ее (рис. 37).

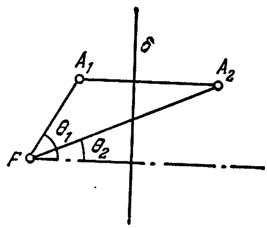


Рис. 37.

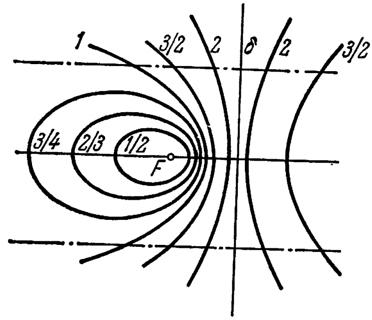


Рис. 38.

Пусть p — расстояние фокуса от директрисы. Расстояние произвольной точки A конического сечения от фокуса равно ρ, а расстояние от директрисы $p - \rho\cos\theta$ или $\rho\cos\theta - p$, смотря по тому, как располагаются точки A и F, — по одну сторону директрисы или по разные. Отсюда уравнение конического сечения

$$\frac{\rho}{p-\rho\cos\theta} = \lambda \qquad (*)$$

в случае эллипса и параболы,

$$\frac{\rho}{p-\rho\cos\theta} = \pm\lambda \qquad (**)$$

в случае гиперболы (знак «+» соответствует одной ветви гиперболы, а знак «—» другой).

Решая уравнения (*), (**) относительно ρ, получаем

$$\rho = \frac{\lambda p}{1+\lambda\cos\theta}$$

— *уравнения эллипса и параболы*,

$$\rho = \frac{\pm\lambda p}{1\pm\lambda\cos\theta}$$

— *уравнения гиперболы*. Здесь знак «+» отвечает одной ветви гиперболы, а знак «—» другой ветви.

На рис. 38 показано, как изменяется форма конического сечения в зависимости от эксцентриситета λ.

§ 4. Уравнения конических сечений в декартовых координатах в канонической форме

В § 3 мы получили уравнения конических сечений в полярных координатах $\rho\theta$. Перейдем теперь к системе декартовых координат xy, приняв полюс O за начало координат, а полярную ось — за положительную полуось x.

Из уравнений (*) и (**) § 3 для любого конического сечения имеем

$$\rho^2 = \lambda^2 (p - \rho \cos\theta)^2.$$

Отсюда, принимая во внимание формулы, устанавливающие связь между полярными и декартовыми координатами точки, получаем

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 (p - x)^2,$$

или

$$(1 - \lambda^2) x^2 + 2p\lambda^2 x + y^2 - \lambda^2 p^2 = 0. \qquad (*)$$

Это уравнение значительно упрощается, если сместить начало координат вдоль оси x соответствующим образом.

Рассмотрим сначала случай эллипса и гиперболы. В этом случае уравнение (*) можно записать так:

$$(1 - \lambda^2)\left(x + \frac{p\lambda^2}{1 - \lambda^2}\right)^2 + y^2 - \frac{p^2\lambda^2}{1 - \lambda^2} = 0.$$

Введем теперь новые координаты x', y' по формулам

$$x + \frac{\lambda^2 p}{1 - \lambda^2} = x', \qquad y = y',$$

что соответствует переносу начала координат в точку

$$\left(-\frac{\lambda^2 p}{1 - \lambda^2},\ 0\right).$$

Тогда уравнение кривой примет вид

$$(1 - \lambda^2) x'^2 + y'^2 - \frac{\lambda^2 p^2}{1 - \lambda^2} = 0,$$

или, полагая для краткости

$$\frac{\lambda^2 p^2}{(1 - \lambda^2)^2} = a^2, \qquad \frac{\lambda^2 p^2}{|1 - \lambda^2|} = b^2,$$

получим следующие уравнения:

для эллипса

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

для гиперболы

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Параметры a и b называются *полуосями* эллипса (гиперболы). В случае параболы ($\lambda=1$) уравнение (*) будет иметь вид

$$2px+y^2-p^2=0,$$

или

$$y^2-2p\left(-x+\frac{p}{2}\right)=0;$$

введением новых координат

$$x'=-x+\frac{p}{2}, \quad y'=y$$

оно преобразуется к виду

$$y'^2-2px'=0.$$

Полученные нами в координатах x', y' уравнения конических сечений называются *каноническими*.

Задача. Составить уравнение конического сечения с фокусом $F(x_0, y_0)$ директрисой $ax+by+c=0$ и эксцентриситетом λ.

Решение. Приведем уравнение директрисы к нормальной форме. Получим

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0.$$

Расстояние точки (x, y) от фокуса равно

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Расстояние этой точки от директрисы равно

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Так как отношение этих расстояний равно эксцентриситету λ, то уравнение конического сечения будет

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{|ax+by+c|}=\lambda,$$

или

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\frac{\lambda^2}{a^2+b^2}(ax+by+c)^2.$$

§ 5. Исследование формы конических сечений

Эллипс (рис. 39)—

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Заметим, что *оси координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат — центром симметрии.* Действительно, если точка (x, y) принадлежит эллипсу, то симметричные ей точки относительно осей координат $(-x, y)$, $(x, -y)$ и относительно начала координат $(-x, -y)$ тоже принадлежат эллипсу, так как удовлетворяют его уравнению вместе с точкой (x, y). Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются *вершинами эллипса*.

Весь эллипс содержится внутри прямоугольника $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, образуемого касательными к эллипсу в его вершинах (рис. 40).

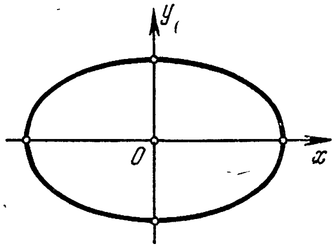


Рис. 39.

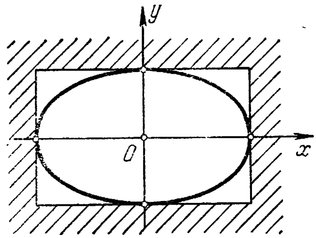


Рис. 40.

Действительно, если точка (x, y) расположена вне прямоугольника, то для нее выполняется по крайней мере одно из неравенств $|x| > a$ или $|y| > b$, но тогда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$$

и точка не может принадлежать эллипсу.

Особенно наглядно получается эллипс из окружности путем ее равномерного сжатия. Начертим на плоскости окружность

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \qquad (*)$$

Представим себе, что плоскость xy равномерно сжимается относительно оси x так, что точка (x, y) переходит в точку (x', y'), где $x' = x$, а $y' = \frac{b}{a} y$. При этом окружность $(*)$ перейдет в некоторую кривую (рис. 41). Координаты любой ее точки удовлетворяют уравнению

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

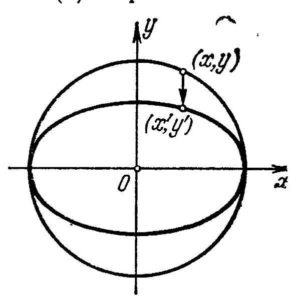


Рис. 41.

Таким образом, эта кривая — эллипс.

Гипербола (рис. 42) —

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Буквально так же, как и в случае эллипса, заключаем, что *оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат — центром симметрии.*

Гипербола состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси y, расположенных вне прямоугольника $|x| < a$, $|y| < b$, внутри двух углов, образованных его диагоналями (продолжениями диагоналей, рис. 43).

Действительно, внутри прямоугольника $|x| < a$ и, следовательно,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1,$$

т. е. внутри прямоугольника нет точек гиперболы.

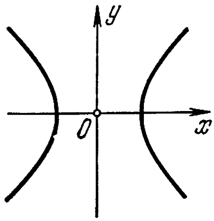


Рис. 42.

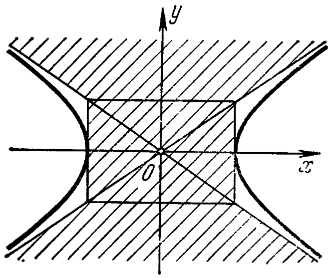


Рис. 43.

Нет их и в оставшейся заштрихованной на рис. 43 части плоскости, так как для любой точки (x, y) из этой части плоскости

$$\frac{b}{a} < \left|\frac{y}{x}\right|,$$

откуда

$$\frac{|x|}{a} < \frac{|y|}{b},$$

и, следовательно,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 0 < 1.$$

Отметим еще следующее свойство гиперболы. Если точка (x, y), двигаясь вдоль гиперболы, неограниченно удаляется от начала координат $(x^2 + y^2 \to \infty)$, то ее расстояние от одной из диагоналей прямоугольника, которые, очевидно, задаются уравнениями

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

неограниченно убывает (стремится к нулю).

Прямые

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

называются *асимптотами* гиперболы.

Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

по отношению к рассмотренной гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

называется *сопряженной*. Она имеет те же асимптоты, но располагается в дополнительных вертикальных углах, образованных асимптотами (рис. 44).

Парабола (рис. 45)

$$y^2-2px=0$$

имеет ось x *осью симметрии*, так как вместе с точкой (x, y) ей принадлежит симметричная относительно оси x точка $(x, -y)$.

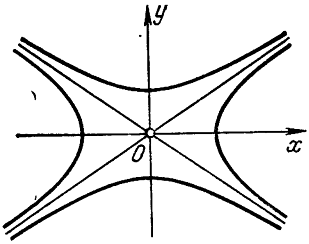


Рис. 44.

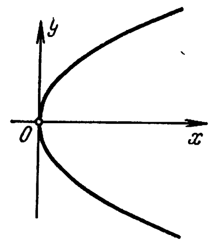


Рис. 45.

Точка пересечения параболы с ее осью называется *вершиной параболы*. Таким образом, в данном случае вершиной параболы является начало координат.

§ 6. Касательная к коническому сечению

Касательной к кривой в точке A называется предельное положение секущей AB, когда точка B неограниченно приближается к A (рис. 46).

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$. Составим уравнение касательной в точке $A(x_0, y_0)$. Пусть $B(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ — точка кривой, близкая к A. Уравнение секущей:

$$y-y_0=\frac{\Delta y}{\Delta x}(x-x_0).$$

При $B \to A$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0),$$

и мы получаем уравнение касательной

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \qquad (*)$$

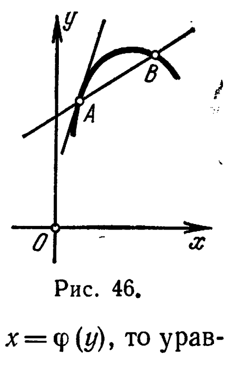


Рис. 46.

Аналогично, если кривая задана уравнением $x=\varphi(y)$, то уравнение касательной в точке (x_0, y_0) будет

$$x-x_0=\varphi'(y_0)(y-y_0). \qquad (**)$$

Составим уравнение касательной к коническому сечению.

Случай параболы. Уравнение параболы можно записать в виде

$$x = \frac{y^2}{2p}.$$

Тогда уравнение касательной в форме (**) будет

$$x - x_0 = \frac{y_0}{p}(y - y_0),$$

или

$$yy_0 - y_0^2 + px_0 - px = 0.$$

Так как точка (x_0, y_0) лежит на параболе и, следовательно, $y_0^2 - 2px_0 = 0$, то уравнение касательной можно представить в следующей окончательной форме:

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0.$$

Случай эллипса (гиперболы). Пусть (x_0, y_0) — точка эллипса, причем $y_0 \neq 0$. В окрестности этой точки эллипс можно задать уравнением

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

где квадратный корень надо брать с тем же знаком, что и y_0. Уравнение касательной пс формуле (*):

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b}{a^2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}}(x - x_0),$$

или

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x - x_0).$$

Умножая его на y_0/b^2 и перенося все члены в левую часть равенства, получим

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0,$$

или

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0,$$

так как $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

В окрестности каждой точки эллипса (x_0, y_0), где $x_0 \neq 0$, эллипс можно задать уравнением

$$x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Квадратный корень берется с тем же знаком, что и x_0. Тогда аналогичным рассуждением с помощью формулы (**) приходим к уравнению касательной

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Так как в каждой точке эллипса x_0 и y_0 не могут быть одновременно нулями, то в любой точке (x_0, y_0) уравнение касательной к эллипсу будет

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

получается аналогично и имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Покажем, что *касательная к коническому сечению имеет с ним только одну общую точку (точку касания)*. **Действительно, возьмем, например, эллипс**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0):

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Будем искать точки пересечения эллипса с его касательной. Исключая x из уравнений, получим для y

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{a^2}{x_0^2}\left(\frac{yy_0}{b^2}-1\right)^2-1=0,$$

или

$$y^2\frac{a^2}{b^2x_0^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)-2y\frac{a^2y_0}{x_0^2b^2}+\frac{a^2}{x_0^2}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)=0.$$

Так как точка (x_0, y_0) лежит на эллипсе, то $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ и уравнение для принимает вид

$$\frac{a^2}{b^2x_0^2}(y^2-2yy_0+y_0^2)=0.$$

Это уравнение имеет два слившихся корня $y=y_0$. Аналогично, исключая y из уравнений эллипса и его касательной, получаем $x=x_0$. Таким образом, эллипс имеет с касательной только одну общую точку, точку касания (x_0, y_0). Аналогичное доказательство—для гиперболы и параболы.

Задача. Найти уравнение касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

параллельных прямой $y=kx$.

Решение. Любая прямая, параллельная данной, имеет уравнение вида $y=kx+c$. Будем искать точки пересечения этой прямой с эллипсом. Подставляя $y=kx+c$ в уравнение эллипса, получим

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)+2x\frac{kc}{b^2}+\frac{c^2}{b^2}-1=0. \qquad (***)$$

Среди прямых $y=kx+c$ касательные отличаются тем, что они имеют только одну точку пересечения с эллипсом. Это значит, что квадратное уравнение (***) имеет слившиеся корни. А в этом случае дискриминант уравнения равен нулю, т.е.

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)-\frac{k^2c^2}{b^4}=0.$$

Отсюда находим значения c, для которых прямая $y=kx+c$ будет касательной к эллипсу.

§ 7. Фокальные свойства конических сечений

По определению у конического сечения имеется фокус и директриса. Покажем, что *у эллипса и гиперболы есть еще один фокус и директриса*. Действительно, пусть коническое сечение—эллипс. В каноническом расположении его директриса δ_1 параллельна оси y, а фокус F_1 расположен на оси x (рис. 47). Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Так как эллипс в таком расположении симметричен относительно оси y, то у него есть фокус F_2 и директриса δ_2, симметричные относительно оси y фокусу F_1 и директрисе δ_1. Аналогичным рассуждением устанавливается существование двух фокусов и директрис у гиперболы.

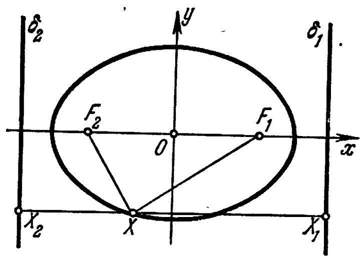


Рис. 47.

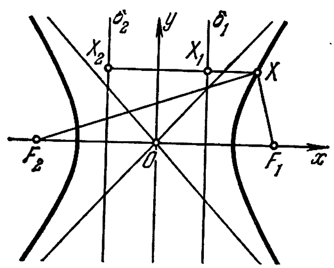


Рис. 48.

Покажем, что *сумма расстояний произвольной точки эллипса от его фокусов постоянна*, т. е. не зависит от точки. Действительно, для произвольной точки X (см. рис. 47) имеем

$$\frac{XF_1}{XX_1}=\lambda, \quad \frac{XF_2}{XX_2}=\lambda.$$

Отсюда

$$XF_1+XF_2=\lambda(X_1X_2)=\text{const}.$$

Аналогично показывается, что *разность расстояний произвольной точки гиперболы от ее фокусов постоянна* (рис. 48).

Найдем фокусы эллипса и гиперболы в каноническом расположении.

Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Пусть c — расстояние от центра эллипса до фокусов. Сумма расстояний вершины $(0, b)$ от фокусов равна $2\sqrt{b^2+c^2}$. Сумма расстояний вершины $(a, 0)$ от фокусов равна $2a$. Отсюда

$$\sqrt{b^2+c^2}=a,$$

и, следовательно,

$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Сравниваем разность расстояний от фокусов точки гиперболы с абсциссой c, где c — расстояние от центра гиперболы до фокусов, и разность расстояний вершины $(a, 0)$ от фокусов. При этом для расстояния c фокусов гиперболы от ее центра получается формула

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

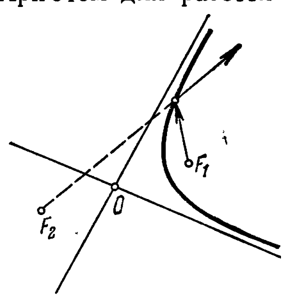


Рис. 49.

Отметим следующее оптическое свойство эллипса. *Световые лучи, исходящие из одного фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус.* Иными словами, если $A(x_0, y_0)$ — точка эллипса, то отрезки AF_1 и AF_2 образуют с касательной в точке A равные углы.

Для доказательства этого свойства достаточно показать, что отношение расстояний фокуса от касательной и от точки касания A не зависит от того, какой взят фокус: F_1 или F_2.

Квадрат расстояния фокуса $F_1(c, 0)$ от точки касания $A(x_0, y_0)$ равен

$$AF_1^2=(x_0-c)^2+y_0^2=(x_0-c)^2+\left(b^2-\frac{x_0^2b^2}{a^2}\right)=x_0^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2cx_0+b^2+c^2$$

или, замечая, что $a^2=b^2+c^2$,

$$AF_1^2=\frac{x_0^2c^2}{a^2}-2cx_0+a^2=\left(\frac{cx_0}{a}-a\right)^2.$$

Расстояние фокуса $F_1(c, 0)$ от касательной в точке $A(x_0, y_0)$ равно

$$h_1=k\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right|,$$

где k — нормирующий множитель, приводящий уравнение касательной к нормальной форме.

Отсюда следует, что

$$\frac{h_1}{AF_1}=\frac{k}{a}.$$

Для другого фокуса $F_2(-c, 0)$, очевидно, получится то же отношение. Утверждение доказано.

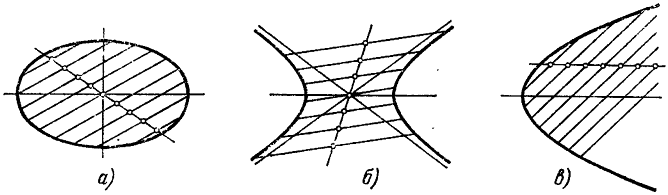
Аналогичным оптическим свойством обладает гипербола. Именно, световые лучи, исходящие из одного фокуса, после зеркального отражения от гиперболы кажутся исходящими из другого фокуса (рис. 49).

Оптическое свойство параболы состоит в том, что лучи, исходящие из фокуса параболы, после зеркального отражения от параболы параллельны ее оси.

§ 8. Диаметры конического сечения

Диаметром эллипса (*гиперболы*) называется любая прямая, проходящая через центр эллипса (гиперболы). *Диаметром параболы* называется любая прямая, параллельная ее оси, а также сама ось.

Произвольная прямая пересекает коническое сечение не более чем в двух точках. Если точек пересечения две, то отрезок прямой с концами в точках пересечения называется *хордой*. Имеет место следующее свойство конических сечений.



а) б) в)

Рис. 50.

Середины параллельных хорд конического сечения лежат на диаметре (рис. 50).

Это свойство очевидно, если хорды перпендикулярны оси симметрии. В этом случае середины хорд лежат на этой оси.

Рассмотрим общий случай. Семейство параллельных прямых, не параллельных осям координат, можно задать уравнениями

$$y = kx + b \qquad (k \neq 0),$$

где k одно и то же для всех прямых.

Уравнения эллипса и гиперболы можно объединить следующей записью:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0.$$

Концы хорд удовлетворяют системе уравнений

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0, \qquad y = kx + b.$$

Подставляя вместо y в первое уравнение $kx + b$, находим уравнение, которому удовлетворяют абсциссы x_1 и x_2 концов хорды:

$$(\alpha + \beta k^2) x^2 + 2\beta kbx + \beta b^2 - 1 = 0.$$

По свойству корней квадратного уравнения

$$x_1 + x_2 = -\frac{2\beta kb}{\alpha + \beta k^2}.$$

Таким образом, абсцисса середины хорды

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{\beta k b}{\alpha + \beta k^2}.$$

Ординату y_c найдем, подставляя x_c в уравнение хорды $y = kx + b$:

$$y_c = -\frac{\beta k^2 b}{\alpha + \beta k^2} + b = \frac{\alpha b}{\alpha + \beta k^2}.$$

Отсюда

$$y_c = -\frac{\alpha}{\beta k} x_c.$$

Таким образом, середины параллельных хорд $y = kx + b$ лежат на прямой, проходящей через начало координат — центр эллипса (гиперболы). Ее угловой коэффициент

$$k' = -\frac{\alpha}{\beta k}.$$

Диаметр

$$y = k'x$$

называется *сопряженным* по отношению к диаметру

$$y = kx,$$

параллельному хордам.

Очевидно, свойство сопряженности диаметров взаимно, так как угловой коэффициент диаметра, сопряженного

$$y = k'x,$$

равен

$$-\frac{\alpha}{\beta k'} = k.$$

Рассмотрим случай параболы. Координаты концов хорд удовлетворяют системе

$$y^2 - 2px = 0, \quad y = kx + b.$$

Исключая x, находим уравнение для ординат концов:

$$y^2 - \frac{2py}{k} + \frac{2pb}{k} = 0.$$

Отсюда, подобно предыдущему,

$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{k}.$$

Таким образом,

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{k} = \text{const}.$$

Середины хорд лежат на прямой, параллельной оси x (оси параболы).

Отметим еще одно свойство сопряженных диаметров. *Если диаметр пересекает коническое сечение, то касательные в точках пересечения параллельны сопряженному диаметру.*

Действительно, пусть (x_0, y_0) — точка пересечения диаметра $y=kx$ с эллипсом (гиперболой) $\alpha x^2+\beta y^2=1$. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0): $\alpha x x_0+\beta y y_0-1=0$. Ее угловой коэффициент $k'=-\alpha x_0/\beta y_0$. Так как точка (x_0, y_0) лежит на диаметре $y=kx$, то $y_0=kx_0$. Поэтому

$$k'=-\frac{\alpha}{\beta k},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что *в случае окружности диаметр, сопряженный данному, — это диаметр, перпендикулярный ему.* Это следует из теоремы элементарной геометрии: середины параллельных хорд окружности лежат на диаметре, перпендикулярном хордам.

§ 9. Кривые второго порядка

Кривой второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0, \qquad (*)$$

в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля.

Очевидно, *это определение инвариантно относительно выбора системы координат*, так как координаты точки в любой другой системе координат выражаются линейно через координаты ее в системе xy и, следовательно, уравнение в любой другой системе координат будет иметь вид (*).

Выясним, что представляет собой геометрически кривая второго порядка.

Отнесем кривую к новой системе координат $x'y'$, связанной с системой xy формулами

$$x=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha,$$
$$y=-x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Уравнение кривой, сохраняя при этом форму (*), будет иметь коэффициент при $x'y'$

$$2a'_{12}=2a_{11}\cos\alpha\sin\alpha-2a_{22}\sin\alpha\cos\alpha+2a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$
$$=(a_{11}-a_{22})\sin 2\alpha+2a_{12}\cos 2\alpha.$$

Очевидно, всегда можно выбрать угол α так, чтобы этот коэффициент был равен нулю. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что в исходном уравнении (*) $a_{12}=0$.

Дальше будем различать два случая:

Случай А: оба коэффициента a_{11} и a_{22} отличны от нуля.

Случай В: один из коэффициентов a_{11} или a_{22} равен нулю. Не ограничивая общности, будем считать $a_{11}=0$.

В случае А переходом к новой системе координат $x'y'$:

$$x'=x+\frac{a_1}{a_{11}}, \quad y'=y+\frac{a_2}{a_{22}},$$

приводим уравнение (*) к виду

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+c=0 \tag{**}$$

и различаем следующие подслучаи:

A_1: $c\neq 0$, знаки a_{11}, a_{22} одинаковы и противоположны c. Кривая представляет собой, очевидно, эллипс.

A_2: $c\neq 0$, знаки a_{11} и a_{22} противоположны. Кривая — гипербола.

A_3: $c\neq 0$, знаки a_{11}, a_{22} и c одинаковы. Уравнению не удовлетворяет ни одна вещественная точка. Кривая называется *мнимой*.

A_4: $c=0$, знаки a_{11} и a_{22} различны. Кривая распадается на пару прямых, так как уравнение (**) можно записать в форме

$$\left(x'-\sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,y'\right)\left(x'+\sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,y'\right)=0.$$

A_5: $c=0$, знаки a_{11} и a_{22} одинаковы. Уравнение можно записать в форме

$$\left(x'-i\sqrt{\frac{c_{22}}{a_{11}}}\,y'\right)\left(x'+i\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,y'\right)=0.$$

Кривая распадается на пару *мнимых прямых*, пересекающихся в вещественной точке (0, 0).

Рассмотрим теперь случай В.

В этом случае переходом к новой системе координат $x'y'$:

$$x'=x, \qquad y'=y+\frac{a_2}{a_{22}},$$

уравнение кривой приводим к виду

$$2a_1x'+a_{22}y'^2+c=0. \tag{***}$$

Дальше различаем следующие подслучаи:

B_1: $a_1\neq 0$. Кривая — парабола, так как переходом к новым координатам

$$x''=x'+\frac{c}{2a_1}, \qquad y''=y'$$

уравнение (***) приводится к виду

$$2a_1x''+a_{22}y''^2=0.$$

B_2: $a_1=0$, a_{22} и c противоположных знаков. Кривая распадается на пару параллельных прямых

$$y \pm \sqrt{-\frac{c}{a_{22}}}=0.$$

B_3: $a_1=0$, a_{22} и c одного знака. Кривая распадается на пару мнимых непересекающихся прямых

$$y \pm i\sqrt{\frac{c}{a_{22}}}=0.$$

B_4: $a_1=0$, $c=0$. Кривая — пара совпадающих прямых. Таким образом, *вещественная кривая второго порядка представляет собой либо коническое сечение (эллипс, гиперболу, параболу), либо пару прямых (может быть, совпадающих).*

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Показать, что уравнение любой окружности в полярных координатах можно записать в форме

$$\rho^2+2a\rho\cos(\alpha+\theta)+b=0.$$

Определить координаты ее центра ρ_0, θ_0 и радиус R.

2. Выразить расстояние между точками через полярные координаты этих точек.

3. Какой геометрический смысл имеют α и ρ_0 в уравнении прямой в полярных координатах

$$\rho\cos(\alpha-\theta)=\rho_0?$$

4. Составить уравнение в полярных координатах геометрического места оснований перпендикуляров, опущенных из точки A окружности на ее касательные (*кардиоида*, рис. 51). Принять за полюс точку A, а за полярную ось — продолжение радиуса OA.

5. Составить уравнение *лемнискаты Бернулли*. Так называется геометрическое место точек, произведение расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) постоянно и равно $|F_1F_2|^2/4$. Принять за полюс середину отрезка, соединяющего фокусы, а за полярную ось — полупрямую, проходящую через один из фокусов.

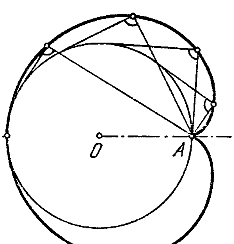


Рис. 51.

6. Доказать, что пересечение кругового цилиндра плоскостью, не перпендикулярной оси, есть эллипс. Чему равен эксцентриситет этого эллипса, если плоскость пересекает ось цилиндра под острым углом α.

7. Показать, что кривая, заданная уравнением

$$\rho=\frac{c}{1+a\cos\theta+b\sin\theta},$$

представляет собой коническое сечение. При каком условии кривая является эллипсом; гиперболой; параболой?

8. Составить уравнение эллипса по трем точкам $(\rho_1, 0)$, $(\rho_2, \pi/2)$, (ρ_3, π), зная, что его фокус находится в полюсе системы координат $\rho\theta$.

9. Пусть A и B — точки пересечения конического сечения с прямой, проходящей через фокус F. Доказать, что

$$\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}$$

не зависит от прямой.

10. Показать, что преобразование инверсии параболы относительно фокуса переводит ее в кардиоиду (см. упр. 4).

11. Показать, что любая прямая пересекает коническое сечение не более чем в двух точках.

12. Пусть k — любое коническое сечение и F — его фокус. Показать, что расстояние произвольной точки A конического сечения до фокуса F линейно выражается через координаты точки x, y, т. е.

$$AF = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

где α, β, γ — постоянные.

13. Показать, что геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть эллипс.

14. Показать, что геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть гипербола.

15. Что представляет собой геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей k_1 и k_2? Рассмотреть различные случаи взаимного расположения окружностей k_1 и k_2, а также случай вырождения одной из окружностей в прямую.

16. Обосновать следующий способ построения эллипса. Стороны CD и AC прямоугольника делят на одинаковое число равных отрезков (рис. 52). Точки деления соединяют с A и B. При этом отмеченные точки пересечения лежат на эллипсе с большой осью AB. Малая полуось равна половине высоты прямоугольника.

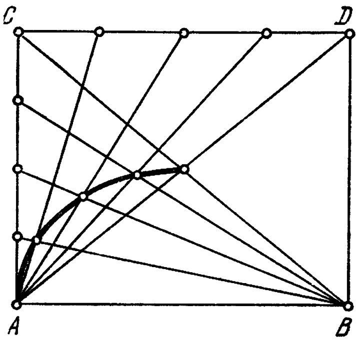


Рис. 52.

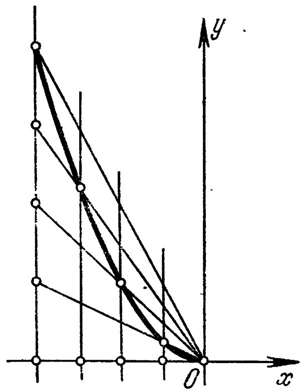


Рис. 53.

17. Обосновать способ построения параболы, представленный на рис. 53.

18. Выразить расстояние точки (x, y) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ от ее асимптот через абсциссу (x) этой точки. Показать, что расстояние точки (x, y) от одной из асимптот неограниченно убывает, когда $|x| \to \infty$.

19. Доказать, что произведение расстояний точки гиперболы от ее асимптот постоянно, т. е. не зависит от точки.

20. Доказать, что ортогональная проекция окружности на плоскость есть эллипс.

21. Показать, что прямая, параллельная оси параболы, пересекает параболу в одной точке.

22. Показать, что прямая, параллельная асимптоте гиперболы, пересекает гиперболу в одной точке.

23. Показать, что уравнение гиперболы с асимптотами

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

можно записать в форме

$$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=\text{const}.$$

24. Касательные к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

имеют угловой коэффициент k. Определить точки касания.

25. Показать, что отрезок касательной к гиперболе между асимптотами делится точкой касания пополам.

26. Показать, что касательная к гиперболе вместе с асимптотами определяет треугольник постоянной площади.

27. Выразить условие касания прямой

$$y-y_0=\lambda(x-x_0)$$

с эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Показать, что геометрическое место вершин (x_0, y_0) прямых углов, стороны которых касаются эллипса, есть окружность.

28. Показать, что вершины прямых углов, стороны которых касаются параболы, лежат на директрисе, а прямая, соединяющая точки касания, проходит через фокус.

29. Обосновать следующий способ построения фокусов эллипса. Из вершины на малой полуоси описывают окружность радиусом, равным большой полуоси. Точки пересечения этой окружности с большой осью эллипса и будут его фокусами.

30. Доказать оптическое свойство гиперболы.

31. Найти фокус параболы в каноническом расположении.

32. Найти директрисы конических сечений в каноническом расположении.

33. Показать, что все конические сечения k_λ, задаваемые уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1,$$

где λ — параметр семейства, *софокусны*, т. е. имеют общие фокусы.

34. Показать, что через каждую точку плоскости xy, не принадлежащую осям координат, проходит два конических сечения семейства k_λ (упр. 33) — эллипс и гипербола.

35. Показать, что эллипс и гипербола семейства k_λ (упр. 33), проходящие через точку (x_0, y_0), пересекаются в этой точке под прямым углом, т. е. касательные к ним в точке (x_0, y_0) перпендикулярны.

36. Хорда эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

делится в точке (x_0, y_0) пополам. Найти угловой коэффициент хорды.

37. Показать, что эллипс допускает параметрическое задание

$$x=a\cos t, \qquad y=b\sin t.$$

Какому условию удовлетворяют значения параметра t, отвечающие концам сопряженных диаметров? Доказать, что сумма квадратов сопряженных диаметров эллипса постоянна (теорема Аполлония). Сформулировать и доказать соответствующую теорему для гиперболы.

38. Любой эллипс можно представить как проекцию круга. Показать, что сопряженным диаметрам эллипса в этом проектировании соответствуют перпендикулярные диаметры круга. Опираясь на это, доказать, что площадь параллелограмма, образованного касательными на концах сопряженных диаметров, постоянна.

39. Показать, что площадь любого параллелограмма с вершинами в концах сопряженных диаметров эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

имеет одно и то же значение, равное $2ab$.

40. Известно, что среди всех четырехугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат. Показать, что среди всех четырехугольников, вписанных в эллипс, наибольшую площадь имеют параллелограммы с вершинами в концах сопряженных диаметров.

41. Показать, что площадь эллипса с полуосями a, b равна πab.

42. Можно ли в эллипс вписать треугольник так, чтобы касательная в каждой его вершине была параллельна противолежащей стороне? С каким произволом это можно сделать? Чему равна площадь такого треугольника, если полуоси эллипса a и b?

43. Выяснить, что представляют собой кривые, задаваемые уравнениями:

а) $x^2-xy+y^2-x+y=0$;

б) $xy+y^2-x+y=0$;

в) $x^2-4xy+4y^2+x=0$;

г) $x^2-y^2+x+y=0$;

д) $x^2+2xy+y^2-1=0$.

44. Показать, что кривая второго порядка

$$(ax+by+c)^2-(a_1x+b_1y+c_1)^2=0$$

распадается на пару прямых, может быть, совпадающих.

45. Как известно, все точки эллипса находятся в ограниченной части плоскости xy. Исходя из этого, показать, что кривая второго порядка $(ax+by+c)^2+(\alpha x+\beta y+\gamma)^2=k^2$, если выражения $ax+by$, $\alpha x+\beta y$ независимы и $k \neq 0$, является эллипсом.

46. Показать, что кривая второго порядка

$$(ax+by+c)(\alpha x+\beta y+\gamma)=k\neq 0$$

при условии независимости выражений $ax+by$, $\alpha x+\beta y$ является гиперболой.

47. Показать, что кривая второго порядка

$$(ax+by+c)^2-(\alpha x+\beta y+\gamma)^2=k\neq 0,$$

если $ax+by$, $\alpha x+\beta y$ независимы, есть гипербола.

48. Показать, что если некоторая прямая пересекает кривую второго порядка в трех точках, то кривая распадается на пару прямых, может быть, совпадающих.

49. Показать, что если две нераспадающиеся кривые второго порядка имеют пять общих точек, то они совпадают.

ГЛАВА V

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Введение декартовых координат в пространстве

Возьмем три взаимно перпендикулярные прямые x, y, z, пересекающиеся в одной точке O (рис. 54). Проведем через каждую пару этих прямых плоскость. Плоскость, проходящая через прямые x и y, называется плоскостью xy. Две другие плоскости называются соответственно xz и yz. Прямые x, y, z называются *координатными осями* или *осями координат*, точка их пересечения O — *началом координат*, а плоскости xy, yz и xz — *координатными плоскостями*. Точка O разбивает каждую из осей координат на две полупрямые. Условимся одну из них называть положительной, а другую — отрицательной.

Возьмем теперь произвольную точку A и проведем через нее плоскость, параллельную плоскости yz (рис. 55). Она пересечет ось x в некоторой точке A_x. *Координатой* x точки A будем называть число, равное по абсолютной величине длине отрезка OA_x, положительное, если точка A_x лежит на положительной полуоси x, и отрицательное, если она лежит на отрицательной полуоси. Если точка A_x совпадает с точкой O, то полагаем $x=0$. Аналогично определяются координаты y и z точки A. Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки: $A\ (x,\ y,\ z)$. Иногда будем обозначать точку просто ее координатами $(x,\ y,\ z)$.

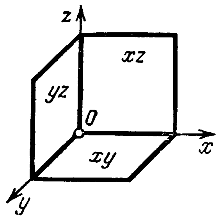


Рис. 54.

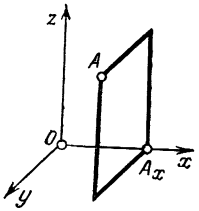


Рис. 55.

Выразим расстояние между двумя точками $A_1(x_1,\ y_1\ z_1)$ *и* $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ *через координаты этих точек.*

Рассмотрим сначала тот случай, когда прямая A_1A_2 не параллельна оси z (рис. 56). Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость xy в точках $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$. Эти точки имеют те же координаты x и y, что и точки A_1 и A_2, а координата z у них равна нулю. Проведем теперь плоскость через точку A_2, параллельную плоскости xy. Она пересечет прямую $A_1\bar{A}_1$ в некоторой точке C. По теореме Пифагора

$$A_1A_2^2=A_1C^2+CA_2^2.$$

Отрезки CA_2 и $\bar{A}_1\bar{A}_2$ равны, а

$$\bar{A}_1\bar{A}_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Длина отрезка A_1C равна $|z_1-z_2|$. Поэтому

$$A_1A_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

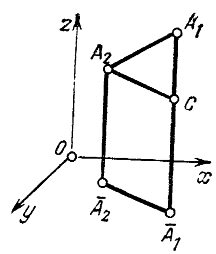


Рис. 56.

Если отрезок A_1A_2 параллелен оси z, то $A_1A_2=|z_1-z_2|$. Тот же результат дает и полученная формула, так как в этом случае $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Пусть $A\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $B\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ — две произвольные точки. *Выразим координаты x, y, z точки C, делящей отрезок AB в отношении* $\lambda:\mu$, *через координаты точек A и B.* Для этого проведем через точки A, B, C прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость xy в точках $A'(x_1,\ y_1,\ 0)$, $B'(x_2,\ y_2,\ 0)$ и

$C'(x, y, 0)$. По свойству параллельного проектирования

$$\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{AC}{CB}=\frac{\lambda}{\mu}.$$

Как мы знаем, на плоскости xy координаты точки C', делящей отрезок $A'B'$ в отношении $\lambda:\mu$, выражаются по формулам

$$x=\frac{\mu x_1+\lambda x_2}{\lambda+\mu}, \quad y=\frac{\mu y_1+\lambda y_2}{\lambda+\mu}.$$

Аналогично, если точки A, B, C спроектировать на плоскость xz, то получим формулы

$$x=\frac{\mu x_1+\lambda x_2}{\lambda+\mu}, \quad z=\frac{\mu z_1+\lambda z_2}{\lambda+\mu}.$$

Таким образом, координаты точки C:

$$x=\frac{\mu x_1+\lambda x_2}{\lambda+\mu}, \quad y=\frac{\mu y_1+\lambda y_2}{\lambda+\mu}, \quad z=\frac{\mu z_1+\lambda z_2}{\lambda+\mu}.$$

§ 2. Параллельный перенос в пространстве

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка (x, y, z) фигуры переходит в точку $(x+a, y+b, z+c)$, где a, b, c — постоянные. Параллельный перенос в пространстве задается формулами

$$x'=x+a, \quad y'=y+b, \quad z'=z+c,$$

выражающими координаты x', y', z' точки, в которую переходит точка (x, y, z) при параллельном переносе. Так же, как и на плоскости, доказываются следующие свойства параллельного переноса.

1. Параллельный перенос есть движение.

2. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

3. При параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).

4. Каковы бы ни были точки A и A', существует, и притом единственный, параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.

5. Два параллельных переноса, выполненных последовательно, дают параллельный перенос.

6. Преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос.

Новым для параллельного переноса в пространстве является следующее свойство.

7. *При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.*

Доказательство. Пусть α — произвольная плоскость. Проведем в этой плоскости две пересекающиеся прямые a и b. При параллельном переносе прямые a и b переходят либо в себя, либо в параллельные прямые a' и b'. Плоскость α переходит в некоторую плоскость α', проходящую через прямые a' и b'. Если плоскость α' не совпадает с α, то она, как известно, параллельна α.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между параллельными им пересекающимися прямыми. Из свойств параллельного переноса следует, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от того, какие взять параллельные им пересекающиеся прямые.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость, если прямая не перпендикулярна плоскости. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними считается равным 90°.

Угол между пересекающимися плоскостями принимается равным углу между прямыми, которые получаются в пересечении этих плоскостей с плоскостью, перпендикулярной прямой их пересечения. Угол между параллельными плоскостями принимается равным нулю.

Из свойств параллельного переноса следует, что определяемый так угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости.

§ 3. Векторы в пространстве

В пространстве, как и на плоскости, вектором называется направленный отрезок. Так же определяются основные понятия для векторов в пространстве: абсолютная величина вектора, направление вектора, равенство векторов.

Координатами вектора с началом в точке $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2, y_2, z_2)$ называются числа x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1. Так же, как и на плоскости, доказывается, что равные векторы имеют соответственно равные координаты, и обратно, векторы с соответственно равными координатами равны. Это дает основание для обозначения вектора его координатами: $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ или $\overrightarrow{(a_1, a_2, a_3)}$.

Так же, как и на плоскости, определяются действия для векторов в пространстве: сложение, умножение на число и скалярное произведение.

Суммой векторов $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется вектор $\boldsymbol{c}(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$. Так же, как и на плоскости, доказывается, что сложение векторов в пространстве *коммутативно* и *ассоциативно*. Это значит, что для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \quad \text{(коммутативность)},$$

для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} \quad \text{(ассоциативность)}.$$

Так же, как и на плоскости, доказывается векторное равенство

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

Произведением вектора $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ и числа λ называется вектор $\boldsymbol{a}'(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$. Так же, как и на плоскости, доказывается, что абсолютная величина вектора $\lambda\boldsymbol{a}$ равна $|\lambda||\boldsymbol{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\boldsymbol{a}$, если $\lambda < 0$.

Так же, как и на плоскости, доказывается, что умножение вектора на число обладает двумя свойствами *дистрибутивности*. Именно, для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и числа λ

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$

для любых двух чисел λ и μ и вектора $\boldsymbol{a}$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

Скалярным произведением векторов $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется число $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Так же, как и на плоскости, доказывается, что скалярное произведение векторов в пространстве равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между векторами.

Так же, как и на плоскости, доказывается, что скалярное произведение векторов обладает свойством дистрибутивности, т. е. для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}.$$

§ 4. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Так же, как и на плоскости, два отличных от нуля вектора в пространстве называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Так же, как и на плоскости, доказывается, что если вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$ или равен нулевому вектору, то $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, где λ — некоторое число.

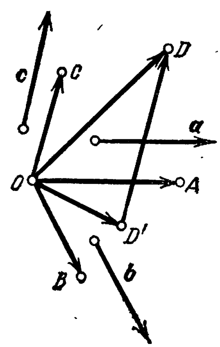


Рис. 57.

Три ненулевых вектора в пространстве называются *компланарными*, если равные им векторы с общим началом лежат в одной плоскости. Подобно тому, как на плоскости любой вектор разлагается по двум неколлинеарным векторам, *в пространстве любой вектор разлагается по трем некомпланарным векторам, причем это разложение единственное*. Докажем это.

Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — три некомпланарных вектора и $\boldsymbol{d}$ — любой вектор. Докажем, что $\boldsymbol{d}$ допускает, и притом единственное, разложение:

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}.$$

Отложим от произвольной точки O четыре вектора: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, равные векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ соответственно, и обозначим через α плоскость, в которой лежат векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рис. 57).

Если точка D лежит на прямой OC, то $\overrightarrow{OD}=\nu\overrightarrow{OC}$. Отсюда $\boldsymbol{d}=\nu\boldsymbol{c}$.

Если точка D не лежит на прямой OC, то проведем через нее прямую, параллельную прямой OC. Она пересечет плоскость α в некоторой точке D'. Векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{D'D}$ коллинеарны. Поэтому $\overrightarrow{D'D}=\nu\overrightarrow{OC}$. Вектор $\overrightarrow{OD'}$ лежит в плоскости α с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Поэтому $\overrightarrow{OD'}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$. Так как $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD'}+\overrightarrow{D'D}$, то

$$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC},$$

или

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}.$$

Существование разложения вектора $\boldsymbol{d}$ доказано.

Докажем единственность разложения. Допустим, существует другое разложение

$$\boldsymbol{d}=\lambda'\boldsymbol{a}+\mu'\boldsymbol{b}+\nu'\boldsymbol{c}.$$

Тогда

$$(\lambda'-\lambda)\,\boldsymbol{a}+(\mu'-\mu)\,\boldsymbol{b}+(\nu'-\nu)\,\boldsymbol{c}=0.$$

Умножим скалярно это равенство на вектор $\boldsymbol{e}$, перпендикулярный векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Тогда получим

$$(\lambda'-\lambda)\,(\boldsymbol{ae})=0.$$

Так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}$ ненулевые и не перпендикулярны, то $\boldsymbol{ae}\neq 0$, а значит, $\lambda'-\lambda=0$. Аналогично доказывается, что $\mu'-\mu=0$, $\nu'-\nu=0$. Тем самым единственность разложения доказана.

Единичные векторы, имеющие направления координатных осей, называются *ортами*. Обозначим их $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ соответственно осям x, y, z. Тогда *для любого вектора* $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ *имеет место разложение*

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3.$$

Действительно,

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{(a_1,\ 0,\ 0)}+\overrightarrow{(0,\ a_2,\ 0)}+\overrightarrow{(0,\ 0,\ a_3)}=$$
$$=a_1\overrightarrow{(1,\ 0,\ 0)}+a_2\overrightarrow{(0,\ 1,\ 0)}+a_3\overrightarrow{(0,\ 0,\ 1)}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3.$$

§ 5. Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ на вектор $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется вектор $\boldsymbol{c}(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$. Для обозначения векторного произведения вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ мы будем употреблять запись $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$. Из определения векторного произведения непосредственно следует, что $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$. Если один или оба вектора нулевые, то их векторное произведение равно нулевому вектору.

Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулевому вектору. И обратно, если векторное произведение ненулевых векторов равно нулевому вектору, то векторы коллинеарны.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$ — коллинеарные векторы. Тогда $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, а значит, $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$, $b_3=\lambda a_3$. Подставляя эти значения для b_1, b_2, b_3 в выражение для $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$, видим, что все координаты вектора $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ равны нулю, а значит, $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=0$.

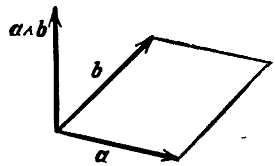


Рис. 58.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=0$. Это значит, что $a_2b_3-a_3b_2=0$, $a_3b_1-a_1b_3=0$, $a_1b_2-a_2b_1=0$. Отсюда

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}, \quad \frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2},$$

т. е. координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пропорциональны, а значит, векторы коллинеарны.

Пусть теперь векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ненулевые и неколлинеарные. Выясним, каково направление вектора $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ и его абсолютная величина. Имеем

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}=(a_2b_3-a_3b_2)\,a_1+(a_3b_1-a_1b_3)\,a_2+(a_1b_2-a_2b_1)\,a_3=0.$$

Аналогично $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}=0$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Чтобы найти абсолютную величину вектора $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$, воспользуемся тождеством:

$$(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-b_3a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2=$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

В справедливости этого тождества убеждаемся непосредственной проверкой.

Замечая, что $a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\boldsymbol{a}|^2$, $b_1^2+b_2^2+b_3^2=|\boldsymbol{b}|^2$, $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$ (φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$), из тождества получаем

$$|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\varphi.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют общее начало. В этом случае $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\varphi$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 58).

В качестве упражнения найдем площадь треугольника с вершинами в точках $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$. Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_3}$ по абсолютной величине равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Площадь этого параллелограмма равна удвоенной площади треугольника ABC. Таким образом,

$$S_\triangle=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_3}|.$$

Координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_3}$ равны:

$$\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} y_2=y_1 & z_2-z_1 \\ y_3=y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2\right\}^{1/2}.$$

В частности, если треугольник ABC лежит в плоскости xy, то

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|.$$

§ 6. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$ $\boldsymbol{c}(c_1, c_2, c_3)$, взятых в данном порядке, называется число

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для обозначения смешанного произведения векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ употребляется запись $(\boldsymbol{abc})$.

Название «смешанное произведение» оправдывается следующим для него выражением:

$$(\boldsymbol{abc})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}).$$

Действительно, раскрывая определитель по элементам первой строки, получим

$$(\boldsymbol{abc})=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}).$$

При перестановке двух строк определителя меняется знак. Отсюда следует, что *смешанное произведение* $(\boldsymbol{abc})$ *меняет знак при перестановке местами двух любых сомножителей, а при циклической перестановке сомножителей не меняется, т. е.*

$$(\boldsymbol{abc})=-(\boldsymbol{bac})=-(\boldsymbol{acb})=-(\boldsymbol{cba}).$$

Но

$$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{cab}).$$

Из представления смешанного произведения векторов

$$(\boldsymbol{abc})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})$$

видно, что *смешанное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда по крайней мере один из векторов равен нулевому, или векторы компланарны.*

Смешанное произведение отличных от нулевого некомпланарных векторов имеет простой геометрический смысл. Именно, *если векторы имеют общее начало, то их смешанное произведение с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построен-*

ного на этих векторах (рис. 59). Действительно,

$$|(\boldsymbol{abc})| = |(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}| = |S(\boldsymbol{ec})| = S\,|(\boldsymbol{ec})| = SH,$$

где S — площадь основания параллелепипеда, H — его высота, а $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, перпендикулярный основанию.

В качестве упражнения найдем объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, равен ушестеренному объему тетраэдра. Поэтому объем тетраэдра

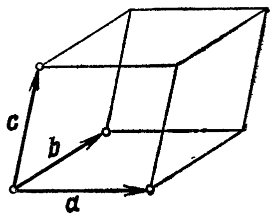


Рис. 59.

$$V = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4})| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|. \qquad (*)$$

Этому выражению можно придать более симметричную форму. Именно:

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}\right|.$$

Действительно, если первую колонку этого определителя вычесть из остальных и раскрыть его по элементам первой строки, то мы получим выражение (*).

§ 7. Общие декартовы координаты

Декартовы координаты, которыми мы пользовались до сих пор, называются прямоугольными, потому что оси координат образуют друг с другом прямые углы. Наряду с прямоугольными координатами в геометрии и ее приложениях используются также так называемые *общие декартовы координаты* (*или косоугольные*). Их можно ввести следующим образом.

Проведем из произвольной точки O пространства три прямые Ox, Oy, Oz, не лежащие в одной плоскости, и отложим на каждой из прямых из точки O ненулевые векторы $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ (рис. 60). Как мы знаем, любой вектор $\overrightarrow{OA}$ допускает, и притом единственное, представление вида

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z.$$

Числа x, y, z называются *общими декартовыми координатами* точки A.

Прямые Ox, Oy, Oz называются *осями координат*: Ox — ось x, Oy — ось y, Oz — ось z. Плоскости Oxy, Oyz, Oxz называются *координатными плоскостями*: Oxy — плоскость xy, Oyz — плоскость yz, Oxz — плоскость xz.

Каждая из осей координат разбивается точкой O (*началом координат*) на две полуоси. Те из полуосей, куда направлены векторы $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$, называются *положительными*, другие — *отрицательными*.

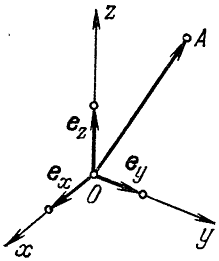


Рис. 60.

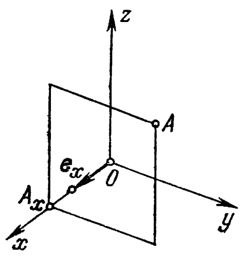


Рис. 61.

Геометрически координаты точки A получаются следующим образом. Проведем через точку A плоскость, параллельную плоскости yz. Она пересечет ось x в некоторой точке A_x (рис. 61). Тогда координата x точки A по абсолютной величине равна длине отрезка OA_x, измеренного единицей длины $|\boldsymbol{e}_x|$, причем положительна, если A_x принадлежит положительной полуоси x, и отрицательна, если A_x принадлежит отрицательной полуоси x.

Две другие координаты точки — y и z — определяются аналогичным построением.

Если оси координат взаимно перпендикулярны, а векторы $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ единичные, то координаты будут *прямоугольными декартовыми координатами*.

В дальнейшем мы, как правило, будем пользоваться прямоугольными декартовыми координатами. Все случаи использования общих декартовых координат будут специально оговариваться.

§ 8. Преобразование координат

Пусть в пространстве введены две общие декартовы системы координат xyz и $x'y'z'$ (рис. 62). *Выразим координаты произвольной точки A в системе координат $x'y'z'$ через координаты ее в системе xyz.*

Имеем:

$$\overrightarrow{O'A} = x'\boldsymbol{e}_{x'} + y'\boldsymbol{e}_{y'} + z'\boldsymbol{e}_{z'},$$

$$\overrightarrow{O'O} = x'_0\boldsymbol{e}_{x'} + y'_0\boldsymbol{e}_{y'} + z'_0\boldsymbol{e}_{z'},$$

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z,$$

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} = (x'_0\boldsymbol{e}_{x'} + y'_0\boldsymbol{e}_{y'} + z'_0\boldsymbol{e}_{z'}) + (x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z).$$

Векторы $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ допускают однозначное представление через векторы $\boldsymbol{e}_{x'}$, $\boldsymbol{e}_{y'}$, $\boldsymbol{e}_{z'}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_x &= \alpha_{11}\boldsymbol{e}_{x'} + \alpha_{12}\boldsymbol{e}_{y'} + \alpha_{13}\boldsymbol{e}_{z'}, \\ \boldsymbol{e}_y &= \alpha_{21}\boldsymbol{e}_{x'} + \alpha_{22}\boldsymbol{e}_{y'} + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_{z'}, \\ \boldsymbol{e}_z &= \alpha_{31}\boldsymbol{e}_{x'} + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_{y'} + \alpha_{33}\boldsymbol{e}_{z'}, \end{aligned} \qquad (*)$$

где α_{ij}—координаты векторов e_x, e_y, e_z относительно базиса $e_{x'}$, $e_{y'}$, $e_{z'}$.

Подставляя эти выражения в формулу для $\overrightarrow{O'A}$, получим

$$\overrightarrow{O'A}=(x'_0+\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z)\,e_{x'}+\\+(y'_0+\alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z)\,e_{y'}+\\+(z'_0+\alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z)\,e_{z'}.$$

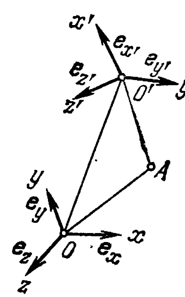


Рис. 62.

Выражения в скобках в этой формуле суть координаты вектора $\overrightarrow{O'A}$ относительно базиса $e_{x'}$, $e_{y'}$, $e_{z'}$, т. е. координаты точки A в системе $x'y'z'$. Мы получаем искомые формулы:

$$\begin{aligned} x'&=\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z+x'_0,\\ y'&=\alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z+y'_0,\\ z'&=\alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z+z'_0. \end{aligned}\qquad (**)$$

Коэффициенты этих формул имеют следующие значения: α_{11}, α_{12}, α_{13}—координаты вектора e_x относительно базиса $e_{x'}$, $e_{y'}$, $e_{z'}$; α_{21}, α_{22}, α_{23}—координаты вектора e_y; α_{31}, α_{32}, α_{33}—координаты вектора e_z; x'_0, y'_0, z'_0—координаты точки O в системе координат $x'y'z'$.

Заметим, что детерминант

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Действительно, непосредственно проверяется, что

$$(e_xe_ye_z)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}(e_{x'}\,e_{y'}\,e_{z'}).$$

Так как $(e_xe_ye_z)\neq 0$, то $\Delta\neq 0$.

Для всех систем координат $x'y'z'$, которые могут быть непрерывно переведены друг в друга, детерминант Δ имеет один и тот же знак. (Непрерывность изменения системы координат понимается как непрерывность изменения начала O' и базиса $e_{x'}$, $e_{y'}$, $e_{z'}$.) Действительно, так как $(e_xe_ye_z)$ отлично от нуля, то Δ отличен от нуля. Так как, кроме того, Δ изменяется непрерывно, то он не может принимать значений разных знаков.

Систему формул (**) при условии $\Delta\neq 0$ всегда можно истолковать как переход от некоторой системы координат $x'y'z'$ к системе координат xyz, начало которой находится в точке (x'_0, y'_0, z'_0), а базисные векторы выражаются через базисные векторы системы $x'y'z'$ по формулам (*).

Если обе системы координат xyz и $x'y'z'$ прямоугольные, то коэффициенты формул (**) удовлетворяют *условиям* *ортогональности*

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2=1, \quad \alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}+\alpha_{13}\alpha_{23}=0,\\
&\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{23}^2=1, \quad \alpha_{21}\alpha_{31}+\alpha_{22}\alpha_{32}+\alpha_{23}\alpha_{33}=0,\\
&\alpha_{31}^2+\alpha_{32}^2+\alpha_{33}^2=1, \quad \alpha_{31}\alpha_{11}+\alpha_{32}\alpha_{12}+\alpha_{33}\alpha_{13}=0,
\end{aligned} \qquad (***)$$

которые получаются, если воспользоваться формулами (*) и соотношениями ортогональности базисов

$$\begin{aligned}
&e_x^2=e_y^2=e_z^2=1, \quad e_xe_y=e_ye_z=e_ze_x=0,\\
&e_{x'}^2=e_{y'}^2=e_{z'}^2=1, \quad e_{x'}e_{y'}=e_{y'}e_{z'}=e_{z'}e_{x'}=0.
\end{aligned}$$

Обратно, формулы (**), если выполняются условия (***), всегда можно истолковать как переход от некоторой прямоугольной системы координат $x'y'z'$ к системе прямоугольных координат xyz, начало которой находится в точке (x_0', y_0', z_0'), а базисные векторы задаются формулами (*). В силу условий (***) базисные векторы e_x, e_y, e_z единичные и попарно перпендикулярные.

Заметим, что в случае прямоугольных декартовых координат xyz и $x'y'z'$ имеем $\Delta=\pm 1$, причем $\Delta=+1$, если одну систему координат можно непрерывным движением совместить с другой. Если же это нельзя сделать движением *без зеркального отражения*, то $\Delta=-1$.

§ 9. Уравнения поверхности и кривой в пространстве

Пусть имеется поверхность (рис. 63).

Уравнение

$$f(x, y, z)=0 \qquad (*)$$

называется *уравнением поверхности в неявной форме*, если координаты каждой точки поверхности удовлетворяют этому уравнению. И обратно, любая тройка чисел x, y, z, удовлетворяющая уравнению (*), представляет собой координаты одной из точек поверхности.

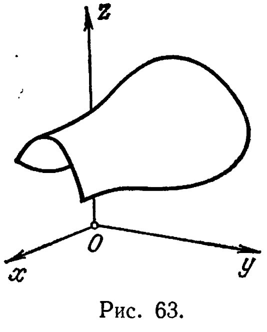


Рис. 63.

Систему уравнений

$$x=f_1(u, v), \quad y=f_2(u, v), \quad z=f_3(u, v), \quad (**)$$

задающую координаты точек поверхности как функции двух параметров (u, v), называют *уравнениями поверхности в параметрической форме*.

Исключая параметры u, v из системы (**), можно получить уравнение поверхности в неявной форме.

Составим уравнение произвольной сферы в прямоугольных декартовых координатах x, y, z.

Пусть (x_0, y_0, z_0)—центр сферы, а R—ее радиус. Каждая точка (x, y, z) сферы находится на расстоянии R от центра, а следовательно, удовлетворяет уравнению

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0. \qquad (***)$$

Обратно, любая точка (x, y, z), удовлетворяющая уравнению (***), находится на расстоянии R от (x_0, y_0, z_0), и, следовательно, принадлежит сфере. Согласно определению, уравнение (***) есть уравнение сферы.

Составим уравнение кругового цилиндра с осью Oz и радиусом R (рис. 64).

Возьмем в качестве параметров u, v, характеризующих положение точки (x, y, z) на цилиндре, координату $z(v)$ и угол (u), который плоскость, проходящая через ось z и точку (x, y, z), образует с плоскостью xz. Тогда получим

$$x=R\cos u, \quad y=R\sin u, \quad z=v$$

— *уравнения цилиндра в параметрической форме.*

Возводя первые два уравнения в квадрат и складывая почленно, получим *уравнение цилиндра в неявной форме:*

$$x^2+y^2=R^2.$$

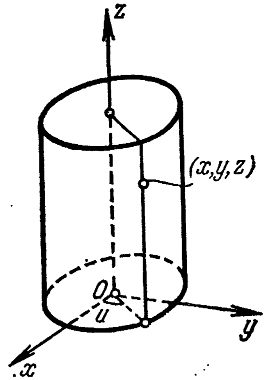


Рис. 64.

Пусть имеем некоторую кривую в пространстве. Систему уравнений

$$f_1(x, y, z)=0, \quad f_2(x, y, z)=0$$

называют *уравнениями кривой в неявной форме*, если координаты каждой точки кривой удовлетворяют обоим уравнениям. И обратно, любая тройка чисел, удовлетворяющая обоим уравнениям, представляет собой координаты некоторой точки кривой.

Систему уравнений

$$x=\varphi_1(t), \quad y=\varphi_2(t), \quad z=\varphi_3(t),$$

задающую координаты точек кривой как функции некоторого параметра (t), называют *уравнениями кривой в параметрической форме.*

Две поверхности, как правило, пересекаются по кривой. Очевидно, если поверхности задаются уравнениями $f_1(x, y, z)=0$ и $f_2(x, y, z)=0$, то кривая, по которой пересекаются поверхности, задается системой уравнений

$$f_1(x, y, z)=0, \quad f_2(x, y, z)=0.$$

Составим уравнение произвольной окружности в пространстве. Любую окружность можно представить как пересечение двух сфер. Следовательно, любая окружность может быть задана системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-R_1^2=0,\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-R_2^2=0.\end{aligned}\right\}$$

Кривая и поверхность, как правило, пересекаются в отдельных точках. Если поверхность задается уравнением $f(x, y, z)=0$, а кривая — уравнениями $f_1(x, y, z)=0$, $f_2(x, y, z)=0$, то точки пересечения кривой с поверхностью удовлетворяют системе трех уравнений:

$$f(x, y, z)=0, \; f_1(x, y, z)=0, \; f_2(x, y, z)=0.$$

Решая эту систему, находим координаты точек пересечения.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

1. Даны точки $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 2)$, $C(0, 0, 3)$, $D(1, 2, 0)$. Какие из этих точек лежат: а) в плоскости xy; б) на оси z; в) в плоскости yz?

2. Дана точка $A(1, 2, 3)$. Найти основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси и координатные плоскости.

3. Найти расстояния от точки $(1, 2, -3)$ до: а) координатных плоскостей; б) осей координат; в) начала координат.

4. В плоскости xy найти точку $D(x, y, 0)$, равноудаленную от трех данных точек $A(0, 1, -1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(0, -1, 0)$.

5. Найти точки, равноотстоящие от точек $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ и отстоящие от плоскости yz на расстояние 2.

6. На оси x найти точку $C(x, 0, 0)$, равноудаленную от двух точек $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 1, 3)$.

7. Составить уравнение геометрического места точек пространства, равноудаленных от точки $A(1, 2, 3)$ и начала координат.

8. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(1, 3, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(1, 1, 4)$, $D(2, 2, 2)$ является параллелограммом.

9. Даны четыре точки: $A(6, 7, 8)$, $B(8, 2, 6)$, $C(4, 3, 2)$, $D(2, 8, 4)$. Доказать, что они являются вершинами ромба.

10. Даны один конец отрезка $A(2, 3, -1)$ и его середина $C(1, 1, 1)$. Найти второй конец отрезка $B(x, y, z)$.

11. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(2, 3, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(4, 1, 0)$. Найти координаты четвертой вершины D и точки E пересечения диагоналей.

12. Даны точки $(1, 2, 3)$, $(0, -1, 2)$, $(1, 0, -3)$. Найти точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

13. Даны точки $(1, 2, 3)$, $(0, -1, 2)$, $(1, 0, -3)$. Найти точки, симметричные им относительно начала координат.

14. Найти значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, если при этом параллельном переносе точка $A(1, 0, 2)$ переходит в точку $A'(2, 1, 0)$.

15. При параллельном переносе точка $A(2, 1, -1)$ переходит в точку $A'(1, -1, 0)$. В какую точку переходит начало координат?

16. Даны точки $A(2, 7, -3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-3, -4, 5)$, $D(-2, 3, -1)$. Указать среди векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ равные.

17. Даны точки $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(0, 2, -1)$. Найти точку $D(x, y, z)$, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.

18. Найти точку D в упр. 17, если сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равна нулю.

19. Даны векторы $\overrightarrow{(2, n, 3)}$ и $\overrightarrow{(3, 2, m)}$. При каких m и n эти векторы коллинеарны?

20. Дан вектор $\boldsymbol{a}(1, 2, 3)$. Найти коллинеарный ему вектор с началом в точке $A(1, 1, 1)$ и концом B на плоскости xy.

21. Даны векторы $\boldsymbol{a}(2, -1, 3)$ и $\boldsymbol{b}(1, 3, n)$. При каком значении n эти векторы перпендикулярны?

22. Даны точки $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(0, 2 -1)$. Найти на сси z такую точку $D(0, 0, c)$, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были перпендикулярны.

23. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол 60°, а вектор $\boldsymbol{c}$ им перпендикулярен. Найти абсолютную величину вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

24. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найти угол φ между векторами: а) $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$; б) $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

25. Даны точки $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$, $D(2, -3, 1)$. Найти косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

26. Даны точки $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$. Найти косинус угла C треугольника ABC.

27. Показать, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны вектору $\boldsymbol{c}$, то

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = 0.$$

28. Показать, что если вектор $\boldsymbol{b}$ перпендикулярен $\boldsymbol{c}$, а вектор $\boldsymbol{a}$ параллелен вектору $\boldsymbol{c}$, то

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}).$$

29. Показать, что для произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ и вектора $\boldsymbol{b}$, перпендикулярного $\boldsymbol{c}$,

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}).$$

30. Показать, что для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}).$$

31. Найти площадь основания треугольной пирамиды, у которой боковые ребра равны l, а углы при вершине α, β, γ.

32. Замечая, что

$$((\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c})\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}),$$

вывести тождество

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\boldsymbol{d} \end{vmatrix}.$$

33. С помощью тождества

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})$$

вывести формулу сферической тригонометрии

$$\sin\alpha \sin\gamma \cos B = \cos\beta - \cos\gamma \cos\alpha,$$

где α, β, γ — стороны треугольника на единичной сфере, а B — угол этого треугольника, противолежащий стороне β.

34. Вывести тождество

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}).$$

35. Показать, что для любых четырех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = 0.$$

36. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — три вектора, удовлетворяющие условию

$$(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3) \neq 0.$$

Показать, что тогда любой вектор $\boldsymbol{r}$ допускает представление

$$\boldsymbol{r} = \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)\,\boldsymbol{e}_1}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)} + \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_2}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)} + \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_3}{(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)}.$$

37. Показать, что решение системы векторных уравнений

$$(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \gamma, \quad (\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) = \alpha, \quad (\boldsymbol{r}\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}) = \beta,$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — данные векторы, удовлетворяющие условию

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) \neq 0,$$

а $\boldsymbol{r}$ — искомый вектор, можно записать в виде

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{a}\alpha + \boldsymbol{b}\beta + \boldsymbol{c}\gamma).$$

38. Показать, что если e_1, e_2, e_3 и r — любые четыре вектора, удовлетворяющие единственному условию $(e_1e_2e_3) \neq 0$, то имеет место тождество

$$r = \frac{(e_1 \wedge e_2)(re_3)}{(e_1e_2e_3)} + \frac{(e_2 \wedge e_3)(re_1)}{(e_1e_2e_3)} + \frac{(e_3 \wedge e_1)(re_2)}{(e_1e_2e_3)}.$$

39. Показать, что решение системы векторных уравнений

$$ax = \alpha, \quad bx = \beta, \quad cx = \gamma,$$

где a, b, c — данные векторы, а x — искомый вектор, при $(abc) \neq 0$ можно записать в форме

$$x = \frac{(a \wedge b)\gamma + (b \wedge c)\alpha + (c \wedge a)\beta}{(abc)}.$$

40. Доказать, что векторы r_1, r_2, r_3 компланарны тогда и только тогда, если

$$\begin{vmatrix} r_1r_1 & r_1r_2 & r_1r_3 \\ r_2r_1 & r_2r_2 & r_2r_3 \\ r_3r_1 & r_3r_2 & r_3r_3 \end{vmatrix} = 0.$$

41. Доказать, что для любых четырех векторов r_1, r_2, r_3, r_4

$$\begin{vmatrix} r_1r_1 & r_1r_2 & r_1r_3 & r_1r_4 \\ r_2r_1 & r_2r_2 & r_2r_3 & r_2r_4 \\ r_3r_1 & r_3r_2 & r_3r_3 & r_3r_4 \\ r_4r_1 & r_4r_2 & r_4r_3 & r_4r_4 \end{vmatrix} = 0.$$

42. Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 — четыре луча, исходящие из одной точки, α_{ij} — угол между лучами l_i и l_j. Доказать тождество

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_{12} & \cos\alpha_{13} & \cos\alpha_{14} \\ \cos\alpha_{21} & 1 & \cos\alpha_{23} & \cos\alpha_{24} \\ \cos\alpha_{31} & \cos\alpha_{32} & 1 & \cos\alpha_{34} \\ \cos\alpha_{41} & \cos\alpha_{42} & \cos\alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

43. Показать, что координаты вектора r относительно базиса e_1, e_2, e_3 определяются равенствами

$$\lambda_1 = \frac{(re_2e_3)}{(e_1e_2e_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{(re_3e_1)}{(e_1e_2e_3)}, \quad \lambda_3 = \frac{(re_1e_2)}{(e_1e_2e_3)}.$$

44. Показать, что координаты вектора r относительно базиса $(e_2 \wedge e_3)$, $(e_3 \wedge e_1)$, $(e_1 \wedge e_2)$ равны соответственно:

$$\lambda_1 = \frac{re_1}{(e_1e_2e_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{re_2}{(e_1e_2e_3)}, \quad \lambda_3 = \frac{re_3}{(e_1e_2e_3)}.$$

45. Разлагая векторы a, b, c по ортогональному базису, с помощью теоремы умножения определителей доказать тождество

$$(abc)^2 = \begin{vmatrix} aa & ab & ac \\ ba & bb & bc \\ ca & cb & cc \end{vmatrix}.$$

46. Доказать тождество

$$(a \wedge b \quad b \wedge c \quad c \wedge a) = (abc)^2.$$

47. Показать, что объем треугольной пирамиды с боковыми ребрами a, b, c и плоскими углами при вершине α, β, γ

$$V = \frac{1}{6}abc \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}^{1/2}.$$

48. Найти расстояние между двумя точками в общих декартовых координатах, если положительные полуоси образуют попарно углы α, β, γ, а базисные векторы e_x, e_y, e_z единичные.

49. Найти центр сферы, описанной около тетраэдра с вершинами $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, $(0, 0, 0)$.

50. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке. Выразить ее координаты через координаты вершин тетраэдра.

51. Доказать, что прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке. Выразить ее координаты через координаты вершин тетраэдра.

52. Пусть $A_i(x_i, y_i, z_i)$ — вершины тетраэдра. Показать, что точки с координатами

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3+\lambda_4x_4,$$
$$y=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3+\lambda_4y_4,$$
$$z=\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3+\lambda_4z_4$$

при

$$\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3>0,\ \lambda_4>0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$$

расположены внутри тетраэдра.

53. Для того, чтобы четыре точки $A_i(x_i, y_i, z_i)$ лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно выполнение равенства:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Доказать.

54. Показать, что поверхность, задаваемая уравнением вида

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0,$$

если $a^2+b^2+c^2-d>0$, есть сфера. Найти координаты ее центра и радиус.

55. Окружность задана пересечением двух сфер:

$$f_1(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+2a_1x+2b_1y+2c_1z+d_1=0,$$
$$f_2(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+2a_2x+2b_2y+2c_2z+d_2=0.$$

Показать, что любую сферу, проходящую через эту окружность, можно задать уравнением

$$\lambda_1f_1(x, y, z)+\lambda_2f_2(x, y, z)=0.$$

56. Показать, что поверхность, задаваемая уравнением вида $\varphi(x, y)=0$, цилиндрическая. Она образована прямыми, параллельными оси z.

57. Составить уравнение прямого кругового конуса с осью Oz, вершиной O и углом при вершине, равным 2α.

58. Составить уравнение поверхности, которую описывает середина отрезка, концы которого принадлежат кривым γ_1 и γ_2:

$$\gamma_1\colon \begin{matrix} z=ax^2, \\ y=0; \end{matrix} \qquad \gamma_2\colon \begin{matrix} z=by^2, \\ x=0. \end{matrix}$$

59. Составить уравнение поверхности, которую описывает прямая, пересекая кривые γ_1, γ_2, оставаясь все время параллельной плоскости yz:

$$\gamma_1\colon \begin{matrix} z=f(x), \\ y=a; \end{matrix} \qquad \gamma_2\colon \begin{matrix} z=\varphi(x), \\ y=b; \end{matrix} \qquad (a\neq b).$$

60. Показать, что кривая

$$z=\varphi(x), \qquad y=0 \qquad (x>0)$$

при вращении около оси z описывает поверхность, задаваемую уравнением

$$z=\varphi(\sqrt{x^2+y^2}).$$

61. Показать, что цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси z, проходящая через кривую

$$z=f(x), \quad z=\varphi(y),$$

задается уравнением

$$f(x)-\varphi(y)=0.$$

62. Как будут выглядеть формулы преобразования координат, если плоскость xy совпадает с плоскостью $x'y'$?

63. Известно, что в некоторой системе координат уравнением

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx=R^2$$

задается сфера. Найти углы между осями координат.

64. Пусть имеются две системы координат xyz и $x'y'z'$ с общим началом O. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис первой системы, а $e_1 \wedge e_2$, $e_2 \wedge e_3$, $e_3 \wedge e_1$ — базис второй. Составить формулы перехода от одной системы к другой.

65. Переход от одной прямоугольной декартовой системы координат xyz к другой прямоугольной декартовой системе координат $x'y'z'$ с тем же началом можно выполнить в три этапа:

$$\text{I} \quad \begin{aligned} x_1 &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 &= x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z_1 &= z; \end{aligned}$$

$$\text{II} \quad \begin{aligned} x_2 &= x_1, \\ y_2 &= y_1\cos\theta - z_1\sin\theta, \\ z_2 &= y_1\sin\theta + z_1\cos\theta; \end{aligned}$$

$$\text{III} \quad \begin{aligned} x' &= x_2\cos\psi - y_2\sin\psi, \\ y' &= x_2\sin\psi + y_2\cos\psi, \\ z' &= z_2. \end{aligned}$$

Углы φ, θ, ψ называются углами Эйлера. Выяснить их геометрический смысл.

ГЛАВА VI
ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Уравнение плоскости

Докажем, что *любая плоскость в пространстве имеет уравнение вида*

$$ax+by+cz+d=0, \tag{*}$$

где a, b, c, d — постоянные. И обратно, любое уравнение вида (*) *является уравнением некоторой плоскости.*

Доказательство. Пусть $A_0(x_0, y_0, z_0)$ — какая-нибудь точка плоскости и $\boldsymbol{n}(a, b, c)$ — вектор, перпендикулярный плоскости (рис. 65). Пусть $A(x, y, z)$ — произвольная точка, лежащая на плоскости. Тогда векторы $\overrightarrow{A_0A}$ и $\boldsymbol{n}$ перпендикулярны, а значит, их скалярное произведение равно нулю. Таким образом, каждая точка плоскости удовлетворяет уравнению

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \tag{**}$$

Обратно, если точка $A(x, y, z)$ удовлетворяет этому уравнению, то это значит, что $\overrightarrow{A_0A}\cdot\boldsymbol{n}=0$, и следовательно, точка A лежит на плоскости. Таким образом, уравнение (**) является уравнением нашей плоскости. Его можно переписать так:

$$ax+by+cz+(-ax_0-by_0-cz_0)=0.$$

Мы видим, что оно имеет вид (*). Тем самым первое утверждение доказано.

Пусть теперь имеется уравнение

$$ax+by+cz+d=0.$$

Покажем, что оно является уравнением некоторой плоскости. Пусть x_0, y_0, z_0—какое-нибудь решение этого уравнения:

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0.$$

С помощью этого соотнсшения наше уравнение можно преобразовать так:

$$ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0,$$

или

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

А в таком виде, как мы знаем, оно представляет собой уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0), перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ (a, b, c). Второе утверждение доказано.

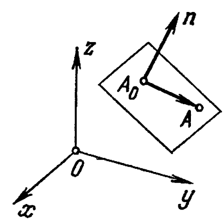


Рис. 65.

Заметим, что *в уравнении плоскости*

$$ax+by+cz+d=0$$

коэффициенты a, b, c представляют собой координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

Как мы знаем, формулы перехода от одной декартовой системы координат к другой линейны. Поэтому *уравнение плоскости в любой, не обязательно прямоугольной, системе координат линейно, т. е. имеет вид* (*)

§ 2. Расположение плоскости относительно системы координат

Выясним, какие особенности существуют в расположении плоскости относительно системы координат, если ее уравнение имеет тот или иной частный вид.

1. $a=0$, $b=0$. Вектор $\boldsymbol{n}$ (перпендикулярный плоскости) параллелен оси z. Плоскость параллельна плоскости xy, в частности, совпадает с плоскостью xy, если и $d=0$.

2. $b=0$, $c=0$. Плоскость параллельна плоскости yz и совпадает с ней, если $d=0$.

3. $c=0$, $a=0$. Плоскость параллельна плоскости xz и совпадает с ней, если $d=0$.

4. $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. Вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен оси x: $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{n}=0$. Плоскость параллельна оси x, в частности, проходит через нее, если $d=0$.

5. $a \neq 0$, $b=0$, $c \neq 0$. Плоскость параллельна оси y и проходит через нее, если $d=0$.

6. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c=0$. Плоскость параллельна оси z и проходит через нее, если $d=0$.

7. $d=0$. Плоскость проходит через начало координат (координаты 0, 0, 0 удовлетворяют уравнению плоскости).

Если в уравнении плоскости коэффициент при z отличен от нуля, то уравнение можно разрешить относительно z. Тогда оно принимает вид

$$z = px + qy + r.$$

Коэффициенты p и q в этом уравнении плоскости называются *угловыми коэффициентами.*

§ 3. Уравнение плоскости в нормальной форме

Если точка $A(x, y, z)$ принадлежит плоскости

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (*)$$

то ее координаты удовлетворяют уравнению (*).

Выясним, какой геометрический смысл имеет выражение

$$ax + by + cz + d,$$

если точка A не принадлежит плоскости.

Опустим из точки A перпендикуляр на плоскость. Пусть $A_0(x_0, y_0, z_0)$ — основание перпендикуляра. Так как точка A_0 лежит на плоскости, то

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

Отсюда

$$ax + by + cz + d =$$
$$= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{A_0A} = \pm |\boldsymbol{n}| \delta,$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор, перпендикулярный плоскости, с координатами a, b, c, а δ — расстояние точки A от плоскости.

Таким образом,

$$ax + by + cz + d$$

положительно по одну сторону плоскости, отрицательно по другую, а по абсолютной величине пропорционально расстоянию точки A от плоскости. Коэффициент пропорциональности:

$$\pm |\boldsymbol{n}| = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Если в уравнении плоскости

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

то

$$ax + by + cz + d$$

будет равно с точностью до знака расстоянию точки от плоскости. В этом случае говорят, что плоскость задана *уравнением в нормальной форме.*

Очевидно, чтобы получить нормальную форму уравнения плоскости (*), достаточно разделить его на

$$\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

§ 4. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть имеются две плоскости

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Выясним, при каком условии эти плоскости: а) параллельны, б) перпендикулярны.

Так как a_1, b_1, c_1 — координаты вектора $\boldsymbol{n}_1$, перпендикулярного первой плоскости, а a_2, b_2, c_2 — координаты вектора $\boldsymbol{n}_2$, перпендикулярного второй плоскости, то плоскости параллельны, если векторы $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ параллельны, т. е. если их координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

Это условие вместе с тем достаточно для параллельности плоскостей, если они не совпадают.

Для того, чтобы плоскости (*) были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы указанные векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ были перпендикулярны, что для ненулевых векторов эквивалентно условию

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0 \quad \text{или} \quad a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0.$$

Пусть уравнениями (*) заданы две произвольные плоскости. Найдем угол, образуемый этими плоскостями.

Угол θ между плоскостями равен углу между векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, перпендикулярными плоскостям, либо дополняет его до 180°. Поэтому в любом случае

$$|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|=|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|\cos\theta.$$

Отсюда

$$\cos\theta=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

§ 5. Уравнения прямой

Любую прямую можно задать как пересечение двух плоскостей. Следовательно, *любая прямая может быть задана уравнениями*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

из которых первое задает одну плоскость, а второе — другую. Обратно, *любая совместная система двух таких независимых уравнений представляет собой уравнения некоторой прямой.*

Пусть $A_0(x_0, y_0, z_0)$ — какая-нибудь фиксированная точка прямой, $A(x, y, z)$ — произвольная точка прямой и $e(k, l, m)$ — ненулевой вектор, параллельный прямой (рис. 66). Тогда векторы $\overrightarrow{A_0A}$ и e параллельны, следовательно, их координаты пропорциональны, т. е.

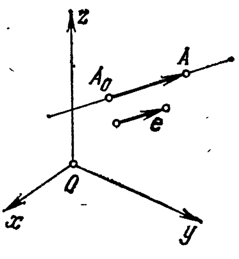


Рис. 66.

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}. \qquad (**)$$

Эта форма уравнения прямой называется *канонической* и представляет собой частный случай (*), так как допускает эквивалентную запись

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}, \qquad \frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m},$$

соответствующую (*).

Пусть прямая задана уравнениями (*). Составим ее уравнение в канонической форме. Для этого достаточно найти какую-нибудь точку A_0 на прямой и вектор e, параллельный прямой.

Всякий вектор $e(k, l, m)$, параллельный прямой, будет параллелен каждой из плоскостей (*), и обратно. Следовательно, k, l, m удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} a_1k+b_1l+c_1m=0, \\ a_2k+b_2l+c_2m=0. \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

Таким образом, в качестве x_0, y_0, z_0 для канонического уравнения прямой можно взять любое решение системы (*), а в качестве коэффициентов k, l, m — любое решение (***), например:

$$k=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad l=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad m=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Из уравнения прямой в канонической форме можно получить ее уравнения в параметрической форме. Именно, полагая общее значение трех отношений канонического уравнения равным t, получим

$$x=kt+x_0, \qquad y=lt+y_0, \qquad z=mt+z_0$$

— *уравнения прямой в параметрической форме.*

Выясним, каковы особенности в расположении прямой относительно системы координат, если некоторые из коэффициентов канонического уравнения равны нулю.

Так как вектор $e(k, l, m)$ параллелен прямой, то при $m=0$ прямая параллельна плоскости xy ($ee_z=0$), при $l=0$ прямая параллельна плоскости xz, при $k=0$ прямая параллельна плоскости yz.

При $k=0$ и $l=0$ прямая параллельна оси z ($e \parallel e_z$), при $l=0$ и $m=0$ прямая параллельна оси x, при $k=0$ и $m=0$ прямая параллельна оси y.

§ 6. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых

Пусть имеются плоскость и прямая, заданные уравнениями

$$ax+by+cz+d=0,$$

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}.$$

Так как вектор $(\overrightarrow{a, b, c})$ перпендикулярен плоскости, а вектор $(\overrightarrow{k, l, m})$ параллелен прямой, то *прямая и плоскость будут параллельны, если эти векторы перпендикулярны, т. е. если*

$$ak+bl+cm=0. \qquad (*)$$

Если при этом точка (x_0, y_0, z_0), принадлежащая прямой, удовлетворяет уравнению плоскости

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0,$$

то *прямая лежит в плоскости.*

Прямая и плоскость перпендикулярны, если векторы $(\overrightarrow{a, b, c})$ *и* $(\overrightarrow{k, l, m})$ *параллельны, т. е. если*

$$\frac{a}{k}=\frac{b}{l}=\frac{c}{m}. \qquad (**)$$

Можно получить условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости, если прямая задана пересечением плоскостей

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$$

Достаточно заметить, что вектор с координатами

$$k=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad l=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad m=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

параллелен прямой, и воспользоваться условиями (*) и (**).

Пусть две прямые заданы уравнениями в канонической форме

$$\frac{x-x'}{k'}=\frac{y-y'}{l'}=\frac{z-z'}{m'},$$

$$\frac{x-x''}{k''}=\frac{y-y''}{l''}=\frac{z-z''}{m'}. \qquad (***)$$

Так как вектор $(\overrightarrow{k', l', m'})$ параллелен первой прямой, а вектор $(\overrightarrow{k'', l'', m''})$ параллелен второй прямой, то *прямые* *параллельны, если*

$$\frac{k'}{k''}=\frac{l'}{l''}=\frac{m'}{m''}.$$

В частности, прямые совпадают, если при этом точка первой прямой, например, (x', y', z'), удовлетворяет уравнению второй прямой, т. е. если

$$\frac{x'-x''}{k''}=\frac{y'-y''}{l''}=\frac{z'-z''}{m''}.$$

Прямые перпендикулярны, если векторы $(\overrightarrow{k', l', m'})$ *и* $(\overrightarrow{k'', l'', m''})$ *перпендикулярны, т. е. если*

$$k'k''+l'l''+m'm''=0.$$

§ 7. Основные задачи на прямую и плоскость

Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

Вектор $e(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ лежит на прямой. Следовательно, наша прямая задается уравнениями

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Пусть $A(x, y, z)$—произвольная точка плоскости. Тогда векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A}$ компланарны, а следовательно, их смешанное произведение равно нулю. Отсюда получаем искомое уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку (x_0, y_0, z_0) *и параллельной плоскости*

$$ax+by+cz+d=0.$$

Искомое уравнение:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

В самом деле, эта плоскость проходит через данную точку и параллельна данной плоскости.

Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0, y_0, z_0) *параллельно данной прямой*

$$\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m}.$$

Искомое уравнение:

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}.$$

Прямая, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно плоскости

$$ax+by+cz+d=0,$$

задается уравнением

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Плоскость, перпендикулярная прямой

$$\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m},$$

проходящая через точку (x_0, y_0, z_0), задается уравнением

$$k(x-x_0)+l(y-y_0)+m(z-z_0)=0.$$

Составим уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) параллельно прямым

$$\frac{x-x'}{k'}=\frac{y-y'}{l'}=\frac{z-z'}{m'},$$

$$\frac{x-x''}{k''}=\frac{y-y''}{l''}=\frac{z-z''}{m''}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{(k', l', m')}$ и $\overrightarrow{(k'', l'', m'')}$ параллельны плоскости, то их векторное произведение перпендикулярно плоскости. Отсюда искомое уравнение:

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} l' & m' \\ l'' & m'' \end{vmatrix}+(y-y_0)\begin{vmatrix} m' & k' \\ m'' & k'' \end{vmatrix}+(z-z_0)\begin{vmatrix} k' & l' \\ k'' & l'' \end{vmatrix}=0,$$

или в компактной записи:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ k' & l' & m' \\ k'' & l'' & m'' \end{vmatrix}=0.$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

1. Найти отрезки, которые плоскость $ax+by+cz+d=0$ отсекает на осях координат, если $abcd \neq 0$.

2. Доказать, что прямая пересечения плоскостей, заданных уравнениями $a_1x+b_1y=d_1$, $a_2x+b_2y=d_2$, параллельна оси z.

3. Доказать, что плоскости, заданные уравнениями

$$ax+by+cz+d=0, \quad ax+by+cz+d_1=0,$$

не имеют общих точек, если $d \neq d_1$.

4. Доказать, что любая плоскость, параллельная плоскости $ax+by+cz+$ $+d=0$, задается уравнением вида $ax+by+cz+d'=0$, где $d' \neq d$.

5. Плоскость задана уравнением $ax+by+cz+d=0$. Какому условию должны удовлетворять координаты точки $P(k, l, m)$, чтобы прямая, проходящая через эту точку и начало координат, была перпендикулярна к плоскости?

6. Дана точка $P(k, l, m)$. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат O и перпендикулярной к прямой OP.

7. Найти точку пересечения трех плоскостей, заданных уравнениями

$$x+y+z=1, \quad x-2y=0, \quad 2x+y+3z+1=0.$$

8. Доказать, что плоскости, заданные уравнениями

$$x+y+z=1, \quad 2x+y+3z+1=0, \quad x+2z+1=0,$$

не имеют ни одной общей точки.

9. При каком условии плоскость, заданная уравнением $ax+by+cz+d=0$, перпендикулярна к плоскости xy?

10. Плоскость задана уравнением $2x+3y+z=1$. Указать какой-нибудь вектор, параллельный плоскости.

11. Прямая является пересечением плоскостей $2x+3y+z=1$, $x+y+z=1$. Указать какой-нибудь вектор, параллельный прямой.

12. Составить уравнение плоскости, если заданы две симметрично расположенные относительно нее точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).

13. Что представляет собой геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(ax+by+cz+d)^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2=0?$$

14. Показать, что кривая, задаваемая уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z)+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ f(x, y, z)+a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0, \end{array}\right\}$$

плоская, т. е. все точки этой кривой принадлежат некоторой плоскости.

15. Написать уравнение плоскости, проходящей через окружность, по которой пересекаются две сферы:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0.$$

16. Показать, что преобразование инверсии переводит сферу либо в сферу, либо в плоскость.

17. Показать, что уравнение любой плоскости, проходящей через прямую, по которой пересекаются плоскости

$$ax+by+cz+d=0,$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0,$$

может быть представлено в виде

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0.$$

18. Показать, что плоскость, проходящая через три данные точки (x_i, y_i, z_i), $i=1, 2, 3$, задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

19. Найти условия, при которых плоскость

$$ax+by+cz+d=0$$

пересекает положительную полуось x (y, z).

20. Найти объем тетраэдра, ограничиваемого координатными плоскостями и плоскостью

$$ax+by+cz+d=0,$$

если $abcd \neq 0$.

21. Доказать, что точки пространства, для которых

$$|x|+|y|+|z|<a,$$

расположены внутри октаэдра с центром в начале координат и вершинами на осях.

22. Дана плоскость σ уравнением в прямоугольных декартовых координатах

$$ax+by+cz+d=0.$$

Составить уравнение плоскости σ', симметричной σ относительно плоскости xy (начала координат O).

23. Дано семейство плоскостей, зависящее от параметра λ,

$$ax+by+cz+d+\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0.$$

Найти в семействе плоскость, параллельную оси z.

24. В семействе плоскостей

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)+\mu(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)=0$$

найти плоскость, параллельную плоскости xy. Параметрами семейства являются λ и μ.

25. Плоскости, задаваемые уравнениями в прямоугольных декартовых координатах:

$$ax+by+cz+d=0,$$
$$ax+by+cz+d'=0,$$

где $d\neq d'$, не имеют общих точек, следовательно, параллельны. Найти расстояние между этими плоскостями.

26. Плоскость

$$ax+by+d=0$$

параллельна оси z. Найти расстояние оси z от этой плоскости.

27. Что представляет собой геометрическое место точек, расстояния которых до двух данных плоскостей находятся в данном отношении?

28. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости

$$ax+by+cz+d=0$$

и отстоящих от нее на расстоянии δ.

29. Показать, что точки пространства, удовлетворяющие условию

$$|ax+by+cz+d|<\delta^2,$$

расположены между параллельными плоскостями

$$ax+by+cz+d\pm\delta^2=0.$$

30. Заданы уравнения плоскостей, в которых лежат грани тетраэдра, и точка M своими координатами. Как узнать, лежит точка M внутри тетраэдра или нет?

31. Составить формулы перехода к новой прямоугольной декартовой системе координат $x'y'z'$, если новые координатные плоскости в старой системе задаются уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0.$$

32. Найти углы, образуемые плоскостью

$$ax+by+cz+d=0$$

и осями координат.

33. Найти угол, образуемый плоскостью

$$z=px+qy+l$$

с плоскостью xy.

34. Показать, что площадь фигуры F в плоскости

$$z=px+qy+l$$

и площадь ее проекции $\bar{F}$ на плоскость xy связаны соотношением

$$S(F)=\sqrt{1+p^2+q^2}\,S(\bar{F}).$$

35. При каком условии плоскость

$$ax+by+cz+d=0$$

пересекает оси x и y под равными углами? При каком условии она пересекает под равными углами все три оси x, y и z?

36. Среди плоскостей пучка

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

найти плоскость, перпендикулярную плоскости

$$ax+by+cz+d=0.$$

37. Пусть

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

— уравнения трех плоскостей, не параллельных одной прямой. Доказать, что любая плоскость, проходящая через точку пересечения данных, имеет уравнение вида

$$\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)+\lambda_3(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)=0.$$

38. При каком условии прямая, заданная уравнением в канонической форме, пересекает ось x (y, z)? При каком условии прямая параллельна плоскости xy (yz, zx)?

39. Показать, что геометрическое место точек, равноудаленных от трех попарно непараллельных плоскостей, есть прямая.

40. Показать, что геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника, есть прямая. Составить ее уравнения, если заданы координаты вершин треугольника.

41. Показать, что через каждую точку поверхности

$$z=axy$$

проходят две прямые, целиком лежащие на поверхности.

42. Доказать, что если прямые, задаваемые уравнениями

$$\left.\begin{array}{l}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{l}a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,\\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0,\end{array}\right\}$$

пересекаются, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0.$$

43. Найти условие параллельности (перпендикулярности) прямой

$$\left.\begin{array}{l}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{array}\right\}$$

и плоскости

$$ax+by+cz+d=0.$$

44. Найти условие параллельности (перпендикулярности) прямых

$$\left.\begin{array}{l}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{l}a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,\\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0.\end{array}\right\}$$

45. Найти уравнение конической поверхности с вершиной (x_0, y_0, z_0), образующие которой пересекают плоскость

$$ax+by+cz+d=0$$

под углом α.

46. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и параллельной плоскостям

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$$

47. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $(0, 0, 2R)$, если она проходит через окружность, задаваемую пересечением сферы

$$x^2+y^2+z^2=2Rz$$

с плоскостью

$$ax+by+cz+d=0\,.$$

Выяснить, что представляет собой пересечение этой конической поверхности с плоскостью xy.

48. *Стереографической проекцией сферы* называется проекция из произвольной ее точки на касательную плоскость в диаметрально противоположной точке. Показать, что при стереографическом проектировании окружностям на сфере соответствуют окружности и прямые на плоскости проекции.

49. Составить уравнение плоскости, равноудаленной от двух скрещивающихся прямых, заданных уравнениями в канонической форме.

50. Показать, что любая плоскость, проходящая через прямую

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,\end{aligned}\right\}$$

задается уравнением вида

$$\lambda\,(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu\,(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0.$$

51. Показать, что плоскость, проходящая через прямую

$$\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m}$$

и точку $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, не лежащую на прямой, задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x'-x_0 & y'-y_0 & z'-z_0\\ k & l & m\end{vmatrix}=0.$$

52. Показать, что любая прямая, пересекающая данные прямые:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,\\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0,\end{aligned}\right\}$$

задается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \lambda\,(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu\,(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,\\ \lambda'\,(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)+\mu'\,(a_4x+b_4y+c_4z+d_4)=0.\end{aligned}\right\}$$

53. Показать, что коническая поверхность, образованная прямыми, проходящими через начало координат и пересекающими кривую $\varphi(x,\ y)=0,\ z=1$, задается уравнением $\varphi\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0$.

ГЛАВА VII
ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Специальная система координат

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.\quad (*)$$

Очевидно, *это определение инвариантно относительно выбора системы координат*. Действительно, уравнение поверхности в любой другой системе координат $x'y'z'$ получается из уравнения (*) заменой x, y и z линейными выражениями относительно x', y', z' и, следовательно, в координатах x', y', z' также будет иметь вид (*).

Любая плоскость пересекает поверхность второго порядка по кривой второго порядка. Действительно, так как определение поверхности инвариантно относительно выбора системы координат, то можно считать, что секущей плоскостью является плоскость xy $(z=0)$. А эта плоскость, очевидно, пересекает поверхность по кривой второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{14}x+2a_{24}y+a_{44}=0.$$

Чтобы исследовать геометрические свойства поверхности второго порядка, естественно отнести ее к такой системе координат, в которой ее уравнение будет наиболее простым.

Сейчас *мы укажем систему координат, в которой уравнение поверхности значительно упростится. Именно, коэффициенты при yz, xz и xy в уравнении поверхности будут равны нулю.*

Рассмотрим функцию $F(A)$ точки $A(x, y, z)$, определяемую во всем пространстве, кроме начала координат, равенством

$$F(A)=\frac{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz}{x^2+y^2+z^2}.$$

На единичной сфере $(x^2+y^2+z^2=1)$ она ограничена и, следовательно, достигает абсолютного минимума в некоторой точке A_0. А так как она постоянна вдоль любого луча, исходящего из начала координат $(F(\lambda x, \lambda y, \lambda z)=F(x, y, z))$, то в A_0 функция F достигает абсолютного минимума значений по отношению ко всему пространству (а не только на единичной сфере).

Введем новые декартовы координаты x', y', z', сохранив начало O и приняв полупрямую OA_0 за положительную полуось z. Как известно, связь между координатами x, y, z и x', y', z' устанавливается формулами вида

$$\begin{aligned} x&=\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+\alpha_{13}z',\\ y&=\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'+\alpha_{23}z',\\ z&=\alpha_{31}x'+\alpha_{32}y'+\alpha_{33}z'. \end{aligned} \qquad (**)$$

Уравнение поверхности в новых координатах x', y', z' получается из уравнения (*) заменой x, y, z на x', y', z' согласно формулам (**) и имеет вид

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{23}y'z'+$$
$$+2a'_{13}x'z'+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0.$$

Функция F в новых координатах имеет вид

$$F(A)=\frac{a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{23}y'z'+2a'_{13}x'z'}{x'^2+y'^2+z'^2}$$

и получается заменой в старом выражении для F x, y, z на x', y', z' также согласно формулам (**). Знаменатель по форме не изменился, так как представляет собой квадрат расстояния точки A от начала координат, который в обеих системах выражается одинаково.

Согласно выбору системы координат $x'y'z'$ минимум функции F достигается при $x'=0$, $y'=0$, $z'=1$. Поэтому, если в выражении для F положить $x'=0$, $z'=1$, то получим функцию одной переменной

$$f(y')=\frac{a'_{22}y'^2+2a'_{23}y'+a'_{33}}{1+y'^2},$$

которая достигает минимума при $y=0$. Следовательно,

$$\frac{df(y')}{dy'}=0 \qquad \text{при } y'=0.$$

Но

$$\left.\frac{df(y')}{dy'}\right|_{y'=0}=2a'_{23}.$$

Таким образом, коэффициент при $y'z'$ в уравнении поверхности равен нулю. Аналогично показывается, что коэффициент при $x'z'$ тоже равен нулю.

Итак, уравнение поверхности в системе координат $x'y'z'$ будет

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{33}z'^2+a'_{44}=0.$$

Если теперь ввести новые координаты x'', y'', z'' по формулам

$$x'=x''\cos\theta+y''\sin\theta,$$
$$y'=-x''\sin\theta+y''\cos\theta,$$
$$z'=z'',$$

то так же, как и при рассмотрении кривых второго порядка, соответствующим выбором угла θ можно добиться того, что коэффициент при $x''y''$ тоже будет равен нулю.

Итак, *существует такая система прямоугольных декартовых координат, в которой уравнение поверхности имеет вид*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0.$$

§ 2. Классификация поверхностей второго порядка

Как показано в предыдущем параграфе, переходом к соответствующей системе координат уравнение поверхности второго порядка можно привести к виду

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0. \qquad (*)$$

Будем различать три основных случая:

А: все три коэффициента при квадратах координат в уравнении (*) отличны от нуля;

В: два коэффициента отличны от нуля, а третий, например a_{33}, равен нулю;

С: один коэффициент, например a_{33}, отличен от нуля, а два других равны нулю.

В случае А переходом к новой системе координат согласно формулам

$$x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}; \qquad y' = y + \frac{a_2}{a_{22}}, \qquad z' = z + \frac{a_3}{a_{33}},$$

что соответствует переносу начала координат, приводим уравнение поверхности к виду

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + \delta = 0.$$

Теперь различаем следующие подслучаи случая А:

A_1: $\delta = 0$. Поверхность представляет собой *конус — мнимый*, если α, β, γ одного знака, *вещественный*, если среди чисел α, β, γ есть числа разных знаков.

A_2: $\delta \neq 0$, α, β, γ одного знака. Поверхность представляет собой *эллипсоид — мнимый*, если α, β, γ, δ одного знака, *вещественный*, если знак δ противоположен знаку α, β, γ.

A_3: $\delta \neq 0$, из четырех коэффициентов α, β, γ, δ два коэффициента одного знака, а два других — противоположного. Поверхность — *однополостный гиперболоид*.

A_4: $\delta \neq 0$, один из первых трех коэффициентов противоположен по знаку остальным. Поверхность — *двуполостный гиперболоид*.

В случае В переходом к новым координатам по формулам

$$x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \qquad y' = y + \frac{a_2}{a_{22}}, \qquad z' = z$$

приводим уравнение поверхности к виду

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + 2pz' + q = 0.$$

Здесь надо различать следующие подслучаи:

B_1: $p = 0$, $q = 0$. Поверхность распадается на пару плоскостей

$$x' \pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\, y' = 0$$

— *мнимых*, если α и β одного знака, *вещественных*, если α и β противоположных знаков.

B_2: $p = 0$, $q \neq 0$. Поверхность представляет собой *цилиндр — мнимый*, если α, β и q одного знака, *вещественный*, если есть коэффициенты разных знаков. В частности, если α и β одного знака, то имеем *эллиптический цилиндр*, если α и β разных знаков, — *гиперболический цилиндр*.

B_3: $p \neq 0$. *Параболоиды*. Переходя к новым координатам

$$x'' = x', \qquad y'' = y', \qquad z'' = z' + \frac{q}{2p},$$

приводим уравнение поверхности к виду

$$\alpha x''^2 + \beta y''^2 + 2pz'' = 0.$$

Параболоид *эллиптический*, если α и β одного знака, и *гиперболический*, если α и β разных знаков.

В случае С перейдем к новым координатам x', y', z':

$$x' = x\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z + \frac{a_3}{a_{33}}.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\gamma z'^2 + px + qy + r = 0,$$

и можно различать следующие подслучаи:

C_1: $p = 0$, $q = 0$. *Поверхность распадается на пару параллельных плоскостей — мнимых*, если γ и r одного знака, *вещественных*, если γ и r противоположных знаков, *совпадающих*, если $r = 0$.

C_2: хотя бы один из коэффициентов p или q отличен от нуля. Сохраняя направление оси z, возьмем плоскость $px + qy + r = 0$ за плоскость $y'z'$. Тогда уравнение примет вид

$$\gamma z'^2 + \delta x' = 0.$$

Поверхность — *параболический цилиндр*.

§ 3. Эллипсоид

Уравнение эллипсоида (рис. 67)

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$$

делением на δ, полагая $\delta/\alpha = -a^2$, $\delta/\beta = -b^2$, $\delta/\gamma = -c^2$, приведем к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \qquad (*)$$

Положительные числа a, b, c называются *полуосями* эллипсоида

Из уравнения (*) видно, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида, а начало координат — центром симметрии.

Подобно тому, как эллипс получается равномерным сжатием из окружности, любой эллипсоид получается из сферы равномерным сжатием относительно двух перпендикулярных плоскостей. Именно, если a — бóльшая из полуосей эллипсоида, то он может быть получен из сферы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0$$

равномерным сжатием ее относительно плоскости xy с коэффициентом сжатия c/a и относительно плоскости xz с коэффициентом сжатия b/a.

Если две полуоси эллипсоида равны, например $a = b$, то он называется *эллипсоидом вращения*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Пересекая его любой плоскостью $z=h$, параллельной плоскости xy, получим окружность

$$x^2+y^2=\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)a^2, \quad z=h$$

с центром на оси z. Таким образом, *в этом случае эллипсоид образуется при вращении эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

лежащего в плоскости xz, около оси z (рис. 68).

Если все три полуоси эллипсоида равны, то он представляет собой сферу.

Линия пересечения эллипсоида с произвольной плоскостью представляет собой эллипс.

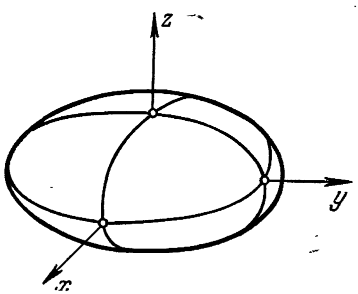


Рис. 67.

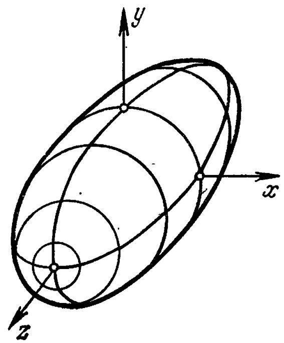


Рис. 68.

Действительно, эта линия представляет собой кривую второго порядка. Так как эта линия конечна (эллипсоид конечен), то она не может быть ни гиперболой, ни параболой, ни парой прямых, а следовательно, она эллипс.

§ 4. Гиперболоиды

Подобно тому, как это делалось в случае эллипсоида, уравнение гиперболоидов можно привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

(*однополостный гиперболоид*, рис. 69),

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

(*двуполостный гиперболоид,* рис. 70).

Оба гиперболоида имеют координатные плоскости плоскостями симметрии, а начало координат — центром симметрии.

Если полуоси a и b гиперболоида равны, то он называется *гиперболоидом вращения* и получается вращением около оси z гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0, \qquad y=0$$

в случае однополостного гиперболоида и гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0, \qquad y=0$$

в случае двуполостного гиперболоида.

Общий гиперболоид ($a \neq b$) может быть получен из гиперболоида вращения ($a=b$) равномерным сжатием (или растяжением) относительно плоскости xz в отношении b/a.

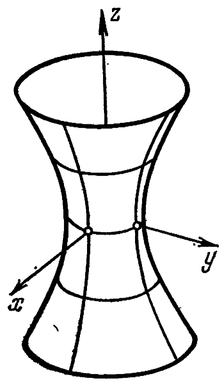


Рис. 69.

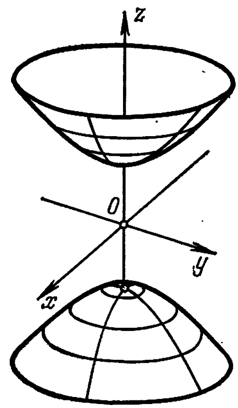


Рис. 70.

При пересечении гиперболоидов произвольной плоскостью могут получаться различные конические сечения. Например, плоскости $z=h$, параллельные плоскости xy, пересекают однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

по эллипсам

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}-1=0, \qquad z=h,$$

а плоскости $y=h$ ($|h| \neq b$), параллельные плоскости xz,— по гиперболам

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1+\frac{h^2}{b^2}=0, \qquad y=h.$$

Плоскость $y=b$ пересекает гиперболоид по двум прямым:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad y=b.$$

§ 5. Параболоиды

Уравнения параболоидов приводятся к виду

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

(*эллиптический параболоид*, рис. 71),

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

(*гиперболический параболоид*, рис. 72).

Плоскости xz и yz являются плоскостями симметрии параболоидов. Их пересечение (ось z) называется *осью параболоида*, а пересечение оси с поверхностью параболоида—*вершиной*.

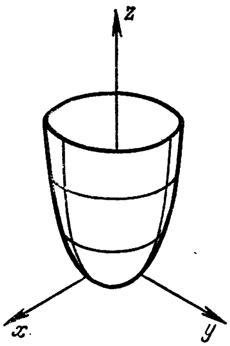


Рис. 71.

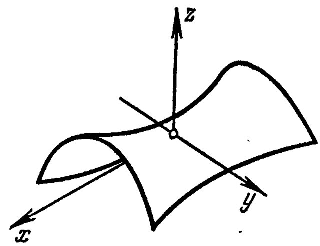


Рис. 72.

При $a=b$ эллиптический параболоид называется *параболоидом вращения*. Он получается при вращении параболы

$$z=\frac{x^2}{a^2}, \quad y=0$$

около оси z.

Общий эллиптический параболоид можно получить из параболоида вращения

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}$$

равномерным сжатием (растяжением) относительно плоскости xz.

Оба параболоида (эллиптический и гиперболический) плоскостями, параллельными координатным плоскостям xz и yz, пересекаются по равным, параллельно расположенным параболам. Действительно, плоскости $x=h$ пересекают эллиптический параболоид по параболам

$$z-\frac{h^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}, \qquad x=h.$$

Если каждую из этих парабол сдвинуть в направлении z на отрезок h^2/a^2, то получим одну и ту же параболу

$$z=\frac{y^2}{b^2}, \qquad x=h.$$

Отсюда следует, что *эллиптический параболоид образуется при параллельном сдвиге параболы* $z=\frac{y^2}{b^2}$, $x=0$, *когда ее вершина движется вдоль параболы* $z=\frac{x^2}{a^2}$, $y=0$ (рис. 73). *Аналогично образуется гиперболический параболоид* (рис. 74).

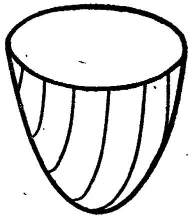


Рис. 73.

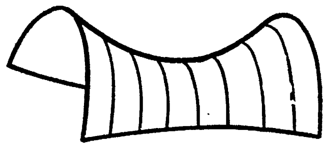


Рис. 74.

Плоскости, параллельные плоскости xy, кроме самой плоскости xy, пересекают эллиптический параболоид по эллипсам, а гиперболический — по гиперболам. Плоскость xy пересекает гиперболический параболоид по двум прямым.

§ 6. Конус и цилиндры

Уравнение конуса и цилиндров второго порядка можно записать в форме

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (\textit{конус}, \text{ рис. } 75),$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad (\textit{цилиндр эллиптический}, \text{ рис. } 76),$$

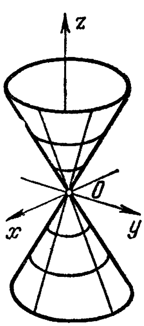


Рис. 75.

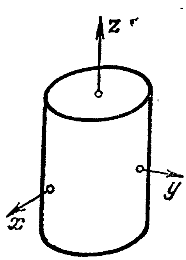


Рис. 76.

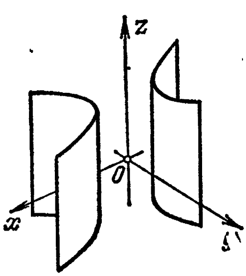


Рис. 77.

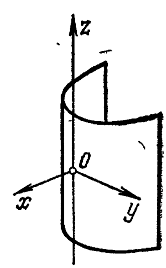


Рис. 78.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad (\textit{цилиндр гиперболический}, \text{ рис. } 77),$$

$$\frac{x^2}{a^2}-py=0 \quad (\textit{цилиндр параболический}, \text{ рис. } 78).$$

Произвольный конус получается из кругового конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

равномерным сжатием (растяжением) относительно плоскости xz.

Цилиндры эллиптический, гиперболический, параболический пересекают плоскость xy по эллипсу, гиперболе, параболе и образуются прямыми, параллельными оси z, пересекающими указанные кривые.

Произвольный эллиптический цилиндр получается из кругового равномерным сжатием (растяжением) относительно плоскости xz.

В заключение заметим, что с однополостным и двуполостным гиперболоидами

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\pm 1=0$$

естественным образом связан конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

который называется *асимптотическим конусом.*

Каждая плоскость, проходящая через ось z, пересекает гиперболоиды по гиперболам, а конус — по двум образующим, которые являются асимптотами этих гипербол. В частности, например, плоскость $xz\,(y=0)$ пересекает гиперболоиды по гиперболам

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\pm 1=0,$$

а конус — по двум прямым

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

которые являются асимптотами этих гипербол.

§ 7. Прямолинейные образующие на поверхностях второго порядка

Конус и цилиндры являются не единственными поверхностями второго порядка, содержащими прямолинейные образующие. Оказывается, этим свойством обладают также однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.

Действительно, *каждая прямая* g_λ, *задаваемая уравнениями*

$$z=\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right), \quad 1=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right), \tag{*}$$

лежит на гиперболическом параболоиде

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}, \tag{**}$$

так как каждая точка (x, y, z), удовлетворяющая уравнениям (*), удовлетворяет уравнению (**), которое из них получается как следствие, почленным перемножением.

Кроме семейства g_λ на гиперболическом параболоиде располагается еще одно семейство прямых g'_λ:

$$z=\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right), \qquad 1=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Аналогично: *на однополостном гиперболоиде*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

располагаются два семейства прямолинейных образующих

$$g_\lambda:\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right);$$

$$g'_\lambda:\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

В обоих случаях (гиперболического параболоида и однополостного гиперболоида) *прямолинейные образующие одного семейства не пересекаются, а прямолинейные образующие разных семейств пересекаются.*

Наличие прямолинейных образующих на гиперболическом параболоиде и однополостном гиперболоиде позволяет дать новый способ образования этих поверхностей. Именно, возьмем три

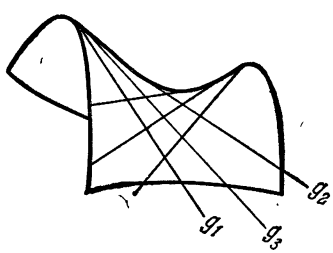


Рис. 79.

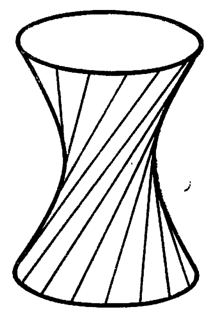


Рис. 80.

прямолинейные образующие g_1, g_2, g_3 одного семейства. Тогда каждая прямолинейная образующая g второго семейства пересекает g_1, g_2, g_3. Следовательно, поверхность образуется прямыми g, пересекающими три данные (рис. 79).

Что касается однополостного гиперболоида вращения, то он образуется также вращением любой его прямолинейной образующей около оси поверхности (рис. 80).

§ 8. Диаметры и диаметральные плоскости поверхности второго порядка

Прямая пересекается с поверхностью второго порядка, как правило, в двух точках. Если точек пересечения две, то отрезок прямой с концами в точках пересечения называется *хордой.*

Середины параллельных хорд поверхности второго порядка лежат в плоскости (диаметральной плоскости). Докажем это.

Пусть поверхность второго порядка задана уравнением в произвольной декартовой прямоугольной системе координат:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{44}=0. \qquad (*)$$

Для краткости записи в последующих выкладках введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} 2F&=a_{11}x^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{44},\\ F_x&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14},\\ F_y&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24},\\ F_z&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}.\end{aligned}$$

Пусть хорды параллельны прямой $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$. Обозначим x, y, z координаты середины произвольной хорды. Тогда координаты концов хорды можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1&=x+\lambda t, & y_1&=y+\mu t, & z_1&=z+\nu t,\\ x_2&=x-\lambda t, & y_2&=y-\mu t, & z_2&=z-\nu t.\end{aligned}$$

Подставляя эти координаты в уравнение поверхности (*), получаем

$$2F\pm 2t(\lambda F_x+\mu F_y+\nu F_z)+$$
$$+t^2(a_{11}\lambda^2+a_{22}\mu^2+a_{33}\nu^2+2a_{12}\lambda\mu+2a_{23}\mu\nu+2a_{31}\nu\lambda)=0.$$

Из этого равенства следует, что коэффициент при t должен быть равен нулю:

$$\lambda F_x+\mu F_y+\nu F_z=0. \qquad (**)$$

Это и есть уравнение диаметральной плоскости, соответствующей хордам данного направления $\lambda:\mu:\nu$.

Если поверхность имеет центр, то каждая диаметральная плоскость проходит через центр. Следовательно, *центр поверхности определяется уравнениями*

$$F_x=0, \quad F_y=0, \quad F_z=0. \qquad (***)$$

Для кривых второго порядка можно провести совершенно аналогичное рассмотрение. Приведем окончательный результат.

Пусть кривая задана уравнением

$$2\Phi=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Положим

$$\begin{aligned}\Phi_x&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},\\ \Phi_y&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}.\end{aligned}$$

Тогда *диаметр, соответствующий хордам направления* $\lambda:\mu$, *т. е. параллельным прямой*

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu},$$

задается уравнением

$$\lambda\Phi_x + \mu\Phi_y = 0.$$

Центр кривой (если кривая имеет центр) определяется из системы уравнений

$$\Phi_x = 0, \quad \Phi_y = 0.$$

§ 9. Оси симметрии кривой. Плоскости симметрии поверхности

Определим плоскости симметрии поверхности, заданной уравнением в произвольных координатах.

Пусть $\lambda:\mu:\nu$ — направление, перпендикулярное плоскости симметрии. Так как середины хорд направления $\lambda:\mu:\nu$ лежат в плоскости симметрии, то плоскость симметрии задается уравнением

$$\lambda F_x + \mu F_y + \nu F_z = 0. \tag{*}$$

Так как направление $\lambda:\mu:\nu$ перпендикулярно плоскости (*), то

$$\frac{a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu}{\lambda} = \frac{a_{21}\lambda + a_{22}\mu + a_{23}\nu}{\mu} = \frac{a_{31}\lambda + a_{32}\mu + a_{33}\nu}{\nu}. \tag{**}$$

Определив из этой системы уравнений $\lambda:\mu:\nu$ и подставив в уравнение (*), получим уравнение плоскости симметрии поверхности.

Чтобы упростить отыскание $\lambda:\mu:\nu$ из системы (**), обозначим ξ общее значение трех отношений (**). Тогда получим эквивалентную систему

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \xi)\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0, \\ a_{21}\lambda + (a_{22} - \xi)\mu + a_{23}\nu = 0, \\ a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33} - \xi)\nu = 0. \end{aligned}\right\} \tag{***}$$

Так как λ, μ, ν не все равны нулю, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \xi & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \xi & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \xi \end{vmatrix} = 0.$$

Определяя отсюда ξ и подставляя его в систему (***), находим из нее $\lambda:\mu:\nu$.

Умея находить плоскости симметрии поверхности, нетрудно найти систему координат, в которой уравнение поверхности имеет каноническую форму.

Соответствующее рассмотрение для кривых второго порядка приводит к выводу:

оси симметрии кривой второго порядка задаются уравнениями

$$\lambda\Phi_x + \mu\Phi_y = 0.$$

Из системы

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \xi)\lambda + a_{12}\mu = 0, \\ a_{21}\lambda + (a_{22} - \xi)\mu = 0, \end{aligned}\right\}$$

где ξ — корень уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\xi & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\xi \end{vmatrix} = 0,$$

определяется $\lambda:\mu$.

Система координат, в которой уравнение кривой принимает каноническую форму, определяется из соображений, аналогичных тем, которые выше применены для поверхностей.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

1. Кривая в плоскости

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$$

представляет собой эллипс (гиперболу, параболу). Что представляет собой поверхность второго порядка

$$z=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a?$$

2. Показать, что поверхность второго порядка

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)^2+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)^2=0$$

распадается на пару плоскостей.

3. Чтобы получить проекцию на плоскость xy кривой пересечения поверхности

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{44}=0 \qquad (*)$$

с плоскостью

$$z=ax+by+c,$$

надо подставить $z=ax+by+c$ в уравнение (*). Доказать.

4. Показать, что сечение поверхности второго порядка параллельными плоскостями подобны и подобно расположены.

5. Показать, что коническая поверхность, образованная прямыми, проходящими через данную точку и пересекающими кривую второго порядка, есть поверхность второго порядка.

6. Составить уравнение поверхности, которую описывает прямая

$$\left.\begin{aligned} z&=ax+b, \\ z&=cy+d \end{aligned}\right\} \qquad (a,\ b,\ c,\ d \neq 0)$$

при вращении около оси z.

7. Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

если $a<c$, представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек — фокусов — постоянна. Найти фокусы эллипсоида.

8. Пусть имеется эллипсоид

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta=0.$$

Показать, что если поверхность

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta-\lambda(x^2+y^2+z^2+\mu)=0$$

распадается на пару плоскостей, то эти плоскости пересекают эллипсоид по окружностям. Обосновать на этом способ разыскания круговых сечений эллипсоида.

9. Показать, что эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

допускает задание уравнениями в параметрической форме:

$$x=a\cos u\cos v,\quad y=b\cos u\sin v,\quad z=c\sin u.$$

10. Что представляет собой поверхность

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1,$$

если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0?$$

11. Найти круговые сечения гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

12. Показать, что через каждую точку пространства, не принадлежащую координатным плоскостям, проходят три поверхности семейства

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

(λ — параметр семейства) — эллипсоид, однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид.

13. Показать, что плоскость $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}+\frac{z+z_0}{2}=0$, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) гиперболического параболоида $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+z=0$, пересекает параболоид по двум прямолинейным образующим разных семейств.

14. Найти прямолинейные образующие гиперболического параболоида $z=axy$.

15. Составить уравнение поверхности, образованной прямыми, параллельными плоскости xy, пересекающими две данные скрещивающиеся прямые.

16. Показать, что уравнение кругового конуса с вершиной в начале координат, осью $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$ и углом при вершине 2α можно записать в виде

$$\frac{(\lambda x+\mu y+\nu z)^2}{(x^2+y^2+z^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}=\cos^2\alpha.$$

17. Показать, что уравнение кругового цилиндра радиуса R и с осью $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$ можно записать в виде

$$x^2+y^2+z^2-R^2=\frac{(\lambda x+\mu y+\nu z)^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}.$$

18. Найти ось кругового конуса

$$x^2+y^2+z^2-(ax+by+cz)^2=0.$$

19. Найти вершину и ось параболы

$$(ax+by+c)^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА VIII

КАСАТЕЛЬНАЯ И СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТИ КРИВОЙ

§ 1. Понятие кривой

Понятие преобразования фигуры (множества точек) известно из элементарной геометрии. Напомним его. Если каждую точку фигуры F сместить каким-нибудь образом, то мы получим новую фигуру F'. Говорят, что она получена *преобразованием* из фигуры F. Преобразование фигуры F называется *непрерывным*, если оно близкие точки фигуры F переводит в близкие точки фигуры F'. Это значит, что если точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F', то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что любая точка Y фигуры F, которая отстоит от X на расстоянии меньшем δ, переходит в точку фигуры F', которая отстоит от X' на расстоянии меньшем ε. Преобразование, переводящее различные точки фигуры F в различные точки фигуры F', называется *топологическим*, если это преобразование и обратное к нему преобразование фигуры F' в F непрерывны. Преобразование фигуры называется *локально топологическим*, если оно является топологическим в достаточно малой окрестности каждой ее точки.

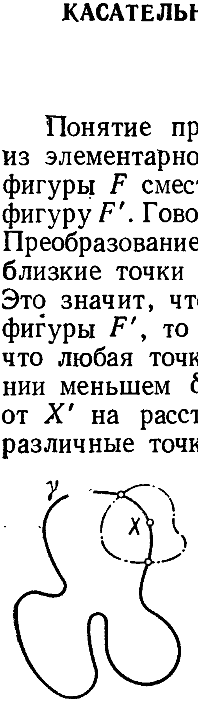


Рис. 81.

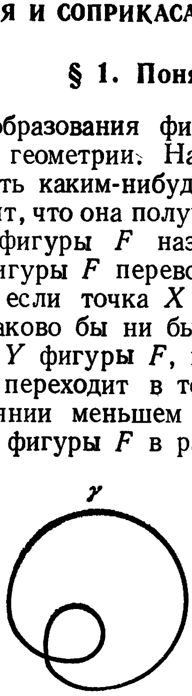


Рис. 82.

Дадим теперь несколько определений, относящихся к понятию кривой. *Элементарной кривой* мы будем называть фигуру, полученную топологическим преобразованием открытого отрезка. *Простой кривой* будем называть фигуру, каждая точка которой имеет пространственную окрестность такую, что часть фигуры, содержащаяся в этой окрестности, является элементарной кривой (рис. 81). *Общей кривой* мы будем называть фигуру, полученную локально топологическим преобразованием простой кривой. Общая кривая на рис. 82 получается локально топологическим преобразованием окружности.

Ввиду таких определений, изучение любой кривой «в малом» сводится к изучению элементарной кривой. Пусть γ—элементарная кривая, являющаяся топологическим преобразованием отрезка AB. Если на прямой AB как числовой оси ввести координату t, то преобразование отрезка AB в кривую γ можно задать уравнениями

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t), \tag{$*$}$$

где f_1, f_2, f_3—непрерывные функции, причем для различных значений t' и t''

$$(f_1(t')-f_1(t''))^2+(f_2(t')-f_2(t''))^2+(f_3(t')-f_3(t''))^2\neq 0.$$

Уравнения ($*$) мы будем называть уравнениями кривой γ в параметрической форме (t—параметр). Элементарная кривая допускает различные задания в параметрической форме. Например, кривую γ можно задать уравнениями:

$$x=f_1(\varphi(\tau)), \quad y=f_2(\varphi(\tau)), \quad z=f_3(\varphi(\tau)),$$

где $\varphi(\tau)$—любая непрерывная строго монотонная функция от τ.

§ 2. Регулярная кривая

Кривую γ мы будем называть *регулярной* (k раз дифференцируемой), если она допускает регулярную параметризацию, т. е. задание уравнениями в параметрической форме

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t),$$

где f_1, f_2, f_3—регулярные (k раз дифференцируемые) функции удовлетворяющие условию

$$f_1'^2+f_2'^2+f_3'^2\neq 0.$$

При $k=1$ кривая называется *гладкой*.

Кривая называется *аналитической*, если она допускает аналитическую параметризацию (функции f_1, f_2, f_3—аналитические).

Некоторые кривые при подходящем выборе осей координат допускают параметрическое задание вида

$$x=t, \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t),$$

или, что то же,

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x).$$

Эта параметризация иногда оказывается очень удобной для исследования кривой. В связи с этим возникает вопрос: когда кривая хотя бы «в малом» допускает такую параметризацию? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Пусть γ—регулярная кривая,

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t)$$

— ее регулярное параметрическое задание в окрестности точки

(x_0, y_0, z_0), *соответствующей* $t=t_0$. *Тогда, если при* $t=t_0$ $f_1'(t)\neq 0$, *то в достаточно малой окрестности точки* (x_0, y_0, z_0) *кривая может быть задана уравнениями*

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x),$$

где $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$— *регулярные функции от* x.

Доказательство. По теореме о неявных функциях существует регулярная функция $\chi(x)$, равная t_0 при $x=x_0$, удовлетворяющая тождественно уравнению

$$x=f_1(\chi(x))$$

для x, близких x_0. Дифференцируя это тождество при $x=x_0$, получим $1=f_1'(t_0)\chi'(x_0)$. Отсюда $\chi'(x_0)\neq 0$. Это значит, что функция $\chi'(x)$ монотонна вблизи $x=x_0$, и мы можем вместо t ввести параметр x, полагая $t=\chi(x)$. Получим

$$y=f_2(\chi(x)), \quad z=f_3(\chi(x)).$$

Теорема доказана.

§ 3. Особые точки кривой

Пусть γ—кривая и P—точка на ней. Точка P называется *обыкновенной точкой*, если в окрестности этой точки кривая допускает гладкую параметризацию:

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t), \quad f_1'^2+f_2'^2+f_3'^2\neq 0.$$

Если такой параметризации не существует, точка называется *особой*. Вопрос об особых точках плоской кривой во многих практически важных случаях решает следующая теорема.

Пусть γ—*кривая, заданная уравнениями в параметрической форме*

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t).$$

Тогда точка P кривой будет обыкновенной точкой, если в этой точке первая отличная от нуля производная функций f_1 и f_2 нечетная. Точка P будет особой, если первая отличная от нуля производная будет четной.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что точка P—начало координат, а значение параметра t, отвечающее точке P, равно нулю. По формуле Тейлора

$$x=\frac{t^n}{n!}(f_1^{(n)}(0)+\varepsilon_1(t)), \quad y=\frac{t^m}{m!}(f_2^{(m)}(0)+\varepsilon_2(t)).$$

Пусть для определенности $n\leqslant m$.

В случае нечетного n введем вместо t параметр

$$\tau=t^n$$

(τ — монотонная функция t). Получаемая при этом параметризация кривой будет гладкой, так как

$$\left.\frac{df_1}{d\tau}\right|_P = \lim_{t\to 0}\frac{f_1(t)}{t^n} = \frac{1}{n!}f_1^{(n)}(0) \neq 0.$$

Следовательно, при n нечетном точка P обыкновенная.

Пусть теперь n четное. В этом случае в окрестности точки P $f_1(t)$ сохраняет знак (знак $f_1^{(n)}(0)$). Следовательно, кривая в окрестности этой точки лежит либо в полуплоскости $x>0$, если $f_1^{(n)}(0)>0$, либо в полуплоскости $x<0$, если $f_1^{(n)}(0)<0$. Допустим, точка P обыкновенная, а значит, кривая в окрестности этой точки допускает гладкую параметризацию:

$$x=\varphi_1(\tau),\quad y=\varphi_2(\tau),$$
$$\varphi_1'^2+\varphi_2'^2\neq 0.$$

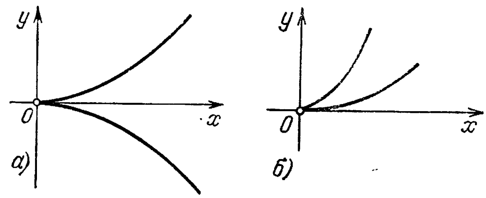


Рис. 83.

Так как $\varphi_1'^2+\varphi_2'^2\neq 0$, а φ_1 имеет порядок не выше φ_2, то в точке P $\varphi_1'\neq 0$. Следовательно, $\varphi_1(\tau)$ в окрестности точки P меняет знак, а значит, кривая γ в окрестности точки P располагается в обеих полуплоскостях $x<0$ и $x>0$. Мы пришли к противоречию. Итак, при n четном точка P особая.

При n четном и m нечетном особая точка называется *точкой возврата первого рода*. Вид кривой в окрестности такой точки показан на рис. 83, *а*. При n четном и m четном ($n<m$) особая точка называется *точкой возврата второго рода*. Вид кривой в окрестности такой особой точки показан на рис. 83, *б*.

Случай, когда $m=n$, сводится к двум рассмотренным случаям ($n<m$) при соответствующем повороте осей координат.

§ 4. Вектор-функция скалярного аргумента

В дальнейшем изложении мы будем широко пользоваться элементарными средствами векторного анализа. В связи с этим дадим определение основных понятий.

Говорят, что в интервале $a<t<b$ задана *вектор-функция*, если каждому значению t из этого интервала сопоставлен вектор $\boldsymbol{f}(t)$. Для вектор-функций, так же как и для скалярных функций, вводится понятие предела. Именно, *пределом вектор-функции* $\boldsymbol{f}(t)$ при $t\to t_0$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, для которого

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{c}|=0.$$

(Заметим, что $|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{c}|$ есть скалярная функция, а для нее понятие предела определено.)

Для вектор-функций имеют место теоремы о пределе, аналогичные теоремам о пределе для скалярных функций. Именно, если

$\boldsymbol{f}(t)$ и $\boldsymbol{g}(t)$ — вектор-функции, а $\lambda(t)$ — скалярная функция и при $t \to t_0$ $\boldsymbol{f}(t) \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{g}(t) \to \boldsymbol{b}$, $\lambda(t) \to m$, то

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{f}(t) \pm \boldsymbol{g}(t) \to \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}, \\
\lambda(t)\boldsymbol{f}(t) \to m\boldsymbol{a}, \\
\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{g}(t) \to \boldsymbol{ab}, \\
\boldsymbol{f}(t) \wedge \boldsymbol{g}(t) \to \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}.
\end{gathered}$$

Доказательство этих утверждений основано на тех же соображениях, что и для скалярных функций. В качестве примера докажем последнее утверждение. Имеем

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = |(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{a}) \wedge (\boldsymbol{g}-\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{g}-\boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{a}| \leqslant \\
\leqslant |\boldsymbol{f}-\boldsymbol{a}||\boldsymbol{g}-\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{f}-\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{g}-\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $t \to t_0$ $|\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| \to 0$, а значит, $\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{g} \to \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$.

Для вектор-функций вводится понятие непрерывности, как и для скалярных функций. Именно, вектор-функция $\boldsymbol{f}(t)$ называется *непрерывной* при $t = t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}(t_0).$$

Производной вектор-функции $\boldsymbol{f}(t)$ называется предел отношения

$$\frac{\boldsymbol{f}(t+h) - \boldsymbol{f}(t)}{h}$$

при $h \to 0$. Производная обозначается $\boldsymbol{f}'(t)$.

Так же, как и для скалярных функций, доказываются следующие правила дифференцирования.

Если $\boldsymbol{f}(t)$ и $\boldsymbol{g}(t)$ — вектор-функции, а $\lambda(t)$ — скалярная функция, то

$$\begin{gathered}
(\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' \pm \boldsymbol{g}', \\
(\lambda \boldsymbol{f})' = \lambda' \boldsymbol{f} + \lambda \boldsymbol{f}', \\
(\boldsymbol{fg})' = \boldsymbol{f}'\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}\boldsymbol{g}', \\
(\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' \wedge \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{g}'.
\end{gathered}$$

Производная первой производной $\boldsymbol{f}'$ называется второй производной и обозначается $\boldsymbol{f}''$. Аналогично определяются третья, четвертая и т. д. производные.

Вектор-функция, имеющая непрерывные производные до k-го порядка на отрезке (a, b), называется k раз дифференцируемой на этом отрезке.

Пусть $\boldsymbol{f}(t)$ — вектор-функция и $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ — координаты вектора $\boldsymbol{f}(t)$. Тогда, если скалярные функции λ, μ, ν дифференцируемы, то вектор-функция $\boldsymbol{f}$ тоже дифференцируема. И обратно, если вектор-функция $\boldsymbol{f}$ дифференцируема, то скалярные функции λ, μ, ν дифференцируемы.

Действительно, если через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ обозначить орты, то

$$\boldsymbol{f}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{e}_1 + \mu(t)\boldsymbol{e}_2 + \nu(t)\boldsymbol{e}_3. \tag{*}$$

Очевидно, из дифференцируемости функций λ, μ, ν следует дифференцируемость вектор-функции $\boldsymbol{f}$. Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно заметить, что

$$\lambda(t)=\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{e}_1, \quad \mu(t)=\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{e}_2, \quad \nu(t)=\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{e}_3.$$

Для вектор-функций имеет место формула Тейлора. Именно

$$\boldsymbol{f}(t+h)=\boldsymbol{f}(t)+h\boldsymbol{f}'(t)+\ldots+\frac{h^n}{n!}(\boldsymbol{f}^{(n)}(t)+\boldsymbol{\varepsilon}(t, h)),$$

где $|\boldsymbol{\varepsilon}(t, h)| \to 0$ при $h \to 0$.

Для доказательства этой формулы достаточно представить вектор-функцию $\boldsymbol{f}(t)$ в виде (*) и воспользоваться формулой Тейлора для функций $\lambda(t)$, $\mu(t)$ и $\nu(t)$.

Три уравнения параметрического задания кривой

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t)$$

можно представить в виде одного векторного уравнения

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t), \tag{**}$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор точки кривой, т. е. вектор, начало которого в начале координат, а конец на кривой

$$\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{e}_1+f_2(t)\boldsymbol{e}_2+f_3(t)\boldsymbol{e}_3.$$

Уравнение (**) называется *векторным уравнением кривой*. Регулярность кривой означает регулярность вектор-функции $\boldsymbol{f}$, а условие $f_1'^2+f_2'^2+f_3'^2 \neq 0$ означает, что вектор $\boldsymbol{f}' \neq \boldsymbol{0}$.

§ 5. Касательная кривой

Понятие касательной к кривой нам уже известно. Сейчас мы дадим другое определение касательной, эквивалентное прежнему, но более удобное для наших ближайших целей.

Пусть γ — кривая, P — точка на ней и g — прямая, проходящая через точку P. Возьмем на кривой точку Q, близкую к P, и обозначим ее расстояния от точки P и прямой g через d и δ соответственно (рис. 84). Мы будем называть прямую g *касательной* к кривой γ в точке P, если $\delta/d \to 0$, когда $Q \to P$.

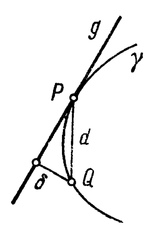


Рис. 84.

Если кривая γ в точке P имеет касательную, то прямая PQ при $Q \to P$ сходится к этой касательной. Обратно, если прямая PQ при $Q \to P$ сходится к некоторой прямой, то эта прямая является касательной. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что δ/d есть синус угла, образуемого прямыми g и PQ.

Гладкая кривая γ имеет в каждой точке касательную, и притом единственную. Если

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$$

— *векторное уравнение кривой, то касательная в точке P, соответствующей значению параметра t, имеет направление вектора* $\boldsymbol{f}'(t)$.

Доказательство. Допустим, что кривая γ в точке $P(t)$ имеет касательную g. Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор на прямой g. Расстояние d точки $Q(t+h)$ от точки P равно $|\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)|$. Расстояние δ точки Q от касательной равно $|(\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t))\wedge\boldsymbol{\tau}|$. По определению касательной

$$\frac{\delta}{d}=\frac{|(\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t))\wedge\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)|}\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Но

$$\frac{|(\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t))\wedge\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)|}=\frac{\left|\frac{(\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t))\wedge\boldsymbol{\tau}}{h}\right|}{\left|\frac{\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)}{h}\right|}\to\frac{|\boldsymbol{f}'(t)\wedge\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{f}'(t)|}.$$

Отсюда $\boldsymbol{f}'\wedge\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{0}$. И так как $\boldsymbol{f}'\neq\boldsymbol{0}$, то векторы $\boldsymbol{f}'$ и $\boldsymbol{\tau}$ коллинеарны. Таким образом, если касательная существует, то она имеет направление вектора $\boldsymbol{f}'$ и, следовательно, единственная.

То, что прямая g, проходящая через точку P и имеющая направление вектора $\boldsymbol{f}'$, является касательной, тоже верно. Действительно, как показывают предыдущие выкладки, для такой прямой

$$\frac{\delta}{d}=\frac{\left|(\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t))\wedge\frac{\boldsymbol{f}'(t)}{|\boldsymbol{f}'(t)|}\right|}{|\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)|}\to\frac{|\boldsymbol{f}'(t)\wedge\boldsymbol{f}'(t)|}{|\boldsymbol{f}'(t)|^2}=0.$$

§ 6. Уравнения касательной для различных случаев задания кривой

Как мы знаем, прямая, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) и имеющая направление вектора $\overrightarrow{(a, b, c)}$, задается уравнениями

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Мы знаем направление касательной к кривой и поэтому без труда получаем ее уравнение. Если кривая задана уравнениями

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t),$$

то ее касательная в точке, отвечающей значению параметра t, имеет направление вектора $\boldsymbol{f}'(t)$ с координатами $f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)$. Поэтому уравнения касательной в этой точке будут

$$\frac{x-f_1(t)}{f_1'(t)}=\frac{y-f_2(t)}{f_2'(t)}=\frac{z-f_3(t)}{f_3'(t)}.$$

В случае плоской кривой, задаваемой уравнениями

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t),$$

уравнение касательной запишется так:

$$\frac{x-f_1(t)}{f_1'(t)}=\frac{y-f_2(t)}{f_2'(t)}.$$

Уравнения касательной в случае задания кривой уравнениями

$$y=f(x), \qquad z=\varphi(x) \tag{$*$}$$

просто получаются из уравнения касательной для случая параметрического задания кривой. Достаточно заметить, что задание кривой уравнениями ($*$) эквивалентно параметрическому заданию

$$x=t, \quad y=f(t), \quad z=\varphi(t).$$

Поэтому уравнения касательной к кривой в точке с абсциссой x_0 запишутся так:

$$x-x_0=\frac{y-f(x_0)}{f'(x_0)}=\frac{z-\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)},$$

или в эквивалентной форме:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$
$$z=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0).$$

Если кривая плоская и задана уравнением $y=f(x)$, мы получаем знакомое уравнение

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Составим уравнения касательной к кривой, заданной уравнениями в неявной форме

$$\varphi(x, y, z)=0, \quad \psi(x, y, z)=0$$

в точке (x_0, y_0, z_0), где ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix}$$

равен двум. Пусть

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

— какая-нибудь регулярная параметризация кривой в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) и t_0—значение параметра, отвечающее этой точке.

Имеем тождества

$$\varphi(x(t), y(t), z(t))=0, \quad \psi(x(t), y(t), z(t))=0.$$

Дифференцируя эти тождества, получим

$$\varphi_x x'+\varphi_y y'+\varphi_z z'=0, \qquad \psi_x x'+\psi_y y'+\psi_z z'=0.$$

Отсюда видно, что вектор касательной $r'(x', y', z')$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)}$, $\overrightarrow{(\psi_x, \psi_y, \psi_z)}$ и поэтому имеет направление их векторного произведения. Таким образом, мы приходим к уравнению касательной

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\varphi_y & \varphi_z\\ \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\varphi_z & \varphi_x\\ \psi_z & \psi_x\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}}$$

(производные $\varphi_x, \varphi_y, \ldots, \psi_z$ берутся в точке касания (x_0, y_0, z_0)).

Если кривая плоская и задана уравнением $\varphi(x, y)=0$, то уравнение ее касательной будет

$$\frac{x-x_0}{\varphi_y}=\frac{y-y_0}{-\varphi_x},$$

или

$$(x-x_0)\varphi_x+(y-y_0)\varphi_y=0.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что эта кривая как пространственная задается двумя уравнениями $\varphi(x, y)=0$, $z=0$.

Нормальной плоскостью кривой в точке P называется плоскость, проходящая через точку P, перпендикулярная касательной в этой точке. Очевидно, не составляет труда написать уравнение этой плоскости, так как вектор касательной перпендикулярен этой плоскости.

§ 7. Соприкасающаяся плоскость кривой

Пусть γ—кривая и P—точка на ней, α—плоскость, проходящая через точку P. Обозначим через d расстояние точки Q кривой от точки P, а через δ—расстояние ее от плоскости α. Мы будем называть плоскость α *соприкасающейся плоскостью* кривой γ в точке P, если отношение $\delta/d^2 \to 0$, когда $Q \to P$ (рис. 85).

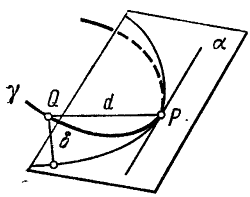


Рис. 85.

Дважды дифференцируемая кривая γ в каждой точке имеет соприкасающуюся плоскость. При этом она либо единственная, либо любая плоскость, содержащая касательную кривой, является соприкасающейся. Если

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

— уравнение кривой, то соприкасающаяся плоскость параллельна векторам $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$.

Доказательство. Пусть α—соприкасающаяся плоскость кривой γ в точке P, соответствующей значению параметра t. Обозначим через $\boldsymbol{e}$ единичный вектор нормали к плоскости α. Имеем

$$d=|\boldsymbol{r}(t+h)-\boldsymbol{r}(t)|, \qquad \delta=|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}(t+h)-\boldsymbol{r}(t))|,$$

$$\frac{\delta}{d^2}=\frac{|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}(t+h)-\boldsymbol{r}(t))|}{(\boldsymbol{r}(t+h)-\boldsymbol{r}(t))^2}=\frac{\left|\boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{r}'(t)h+\frac{\boldsymbol{r}''(t)}{2}h^2+\varepsilon_1h^2\right)\right|}{(\boldsymbol{r}'(t)h+\varepsilon_2h)^2}=$$

$$=\frac{\left|\frac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}'(t)}{h}+\frac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}''(t)}{2}+\varepsilon_1\right|}{\boldsymbol{r}'^2(t)+\varepsilon_3}.$$

Так как при $Q \to P$ $\delta/d^2 \to 0$, $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$, а $\boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{er}'(t)=0$, то $\boldsymbol{er}''(t)=0$. Таким образом, если соприкасающаяся плоскость существует, то векторы $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$ параллельны ей.

В том, что соприкасающаяся плоскость всегда существует, нетрудно убедиться. Для этого возьмем плоскость α, параллельную векторам $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$ (по отношению к нулевому вектору мы считаем любую плоскость ему параллельной). Тогда $\boldsymbol{er}'(t)=0$, $\boldsymbol{er}''(t)=0$, и следовательно,

$$\frac{\delta}{d^2}=\frac{|\varepsilon_1|}{\boldsymbol{r}'^2(t)+\varepsilon_3} \to 0 \quad \text{при } Q \to P.$$

Таким образом, в каждой точке кривой существует соприкасающаяся плоскость. Она будет единственной, если векторы $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ не коллинеарны. Если же эти векторы коллинеарны, или вектор $\boldsymbol{r}''=\mathbf{0}$, то любая плоскость, проходящая через касательную к кривой, будет соприкасающейся.

Составим уравнение соприкасающейся плоскости кривой в точке P. Пусть $A(x, y, z)$ — произвольная точка соприкасающейся плоскости. Тогда три вектора $\overrightarrow{PA}$, $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ компланарны. Каждый из них либо параллелен плоскости α, либо лежит в ней. Следовательно, их смешанное произведение равно нулю. Пусть кривая задана уравнениями

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t).$$

Координаты вектора $\boldsymbol{r}'$: f_1', f_2', f_3'.
Координаты вектора $\boldsymbol{r}''$: f_1'', f_2'', f_3''.
Координаты вектора $\overrightarrow{PA}$: $x-f_1$, $y-f_2$, $z-f_3$.

Так как смешанное произведение векторов $\overrightarrow{PA}$, $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ равно нулю, то уравнение соприкасающейся плоскости будет

$$\begin{vmatrix} x-f_1(t) & y-f_2(t) & z-f_3(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) \end{vmatrix}=0.$$

Каждая прямая, проходящая через точку кривой перпендикулярно касательной, называется *нормалью* кривой. Среди этих прямых в случае, когда соприкасающаяся плоскость единственная, выделяются две нормали: *главная нормаль* — нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, и *бинормаль* — нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости. Так как известны уравнения касательной и соприкасающейся плоскости, то вывод уравнений главной нормали и бинормали, очевидно, не составляет труда.

§ 8. Огибающая семейства плоских кривых

Кривая γ: $x=x(t)$, $y=y(t)$ называется *огибающей* семейства кривых γ_t: $\varphi(x, y, t)=0$ (t — параметр семейства), если в каждой точке (t) кривой γ ее касается кривая γ_t, т. е. имеет с ней общую касательную (рис. 86).

При таком определении огибающей, подставляя $x(t)$ и $y(t)$ в уравнение $\varphi(x, y, t)=0$, получим тождество

$$\varphi(x(t), y(t), t)=0.$$

Дифференцируя это тождество, получим

$$\varphi_x x' + \varphi_y y' + \varphi_t = 0.$$

Оказывается, $\varphi_x x' + \varphi_y y' = 0$. Действительно, $\overrightarrow{(x', y')}$ — вектор касательной кривой γ, а $(\varphi_y, -\varphi_x)$ — вектор касательной кривой γ_t в той же точке. Так как они коллинеарны, то $x'/\varphi_y = y'/-\varphi_x$. Отсюда $\varphi_x x' + \varphi_y y' = 0$.

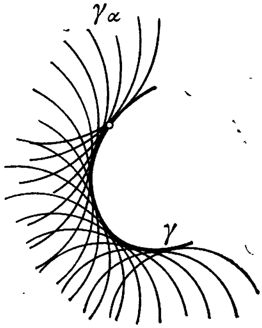


Рис. 86.

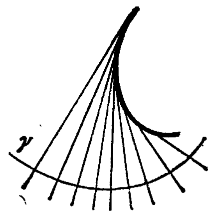


Рис. 87.

Таким образом, функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\varphi(x, y, t)=0, \qquad \varphi_t(x, y, t)=0.$$

Отсюда их и находят.

В качестве примера найдем огибающую нормалей плоской кривой (рис. 87). Пусть кривая задана уравнениями

$$x=x(t), \qquad y=y(t).$$

Так как x' и y' — координаты вектора касательной, то уравнение нормали будет

$$(x-x(t))\, x' + (y-y(t))\, y' = 0. \qquad (*)$$

Дифференцируя это уравнение по t, получим

$$(x-x(t))\, x''(t) + (y-y(t))\, y''(t) - x'^2(t) - y'^2(t) = 0.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением $(*)$ относительно x и y, получим уравнения огибающей

$$x = x(t) - \frac{(x'^2+y'^2)\, y'}{y''x' - x''x'},$$

$$y = y(t) - \frac{(x'^2+y'^2)\, x'}{x''y' - y''x'}.$$

(Предполагается, что $y''x' - x''y' \neq 0$.)

Огибающая нормалей плоской кривой называется ее *эволютой*. Эволюта кривой обладает многими замечательными свойствами, некоторые из них мы отметим в дальнейшем изложении.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VIII

1. Точка M движется в пространстве так, что ее проекция на плоскость xy равномерно движется по окружности $x^2+y^2=a^2$ с угловой скоростью ω, а проекция на ось z движется равномерно со скоростью c. Кривая, которую описывает точка M, называется *винтовой линией*. Составить ее уравнение в параметрической форме, приняв за параметр время t. Считать, что в начальный момент ($t=0$) точка M имеет координаты a, 0, 0.

2. Окружность радиуса a равномерно катится без проскальзывания по оси x со скоростью v. Найти уравнение кривой, которую описывает точка окружно-

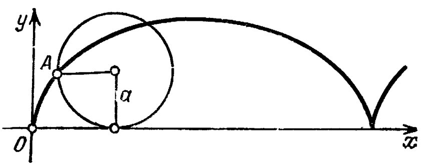


Рис. 88.

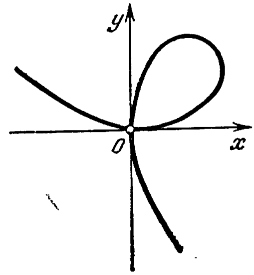


Рис. 89.

сти, если в начальный момент ($t=0$) она совпадает с началом координат (кривая называется *циклоидой*, рис. 88).

3. Найти уравнение в параметрической форме кривой

$$x^3+y^3-3axy=0 \quad (\textit{лист Декарта}, \text{ рис. } 89),$$

приняв в качестве параметра $t=y/x$.

4. Винтовая линия

$$x=a\cos\omega t, \qquad y=a\sin\omega t, \qquad z=ct$$

проектируется на плоскость xy прямыми, параллельными плоскости yz, образующими угол θ с осью z. При каком θ проекция будет иметь особые точки. Выяснить характер особых точек.

5. Найти особые точки циклоиды

$$x=vt-a\sin\frac{vt}{a}, \qquad y=a\left(1-\cos\frac{vt}{a}\right).$$

Выяснить характер особых точек.

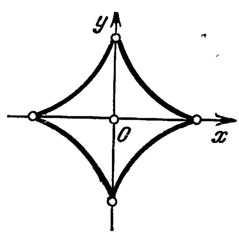


Рис. 90.

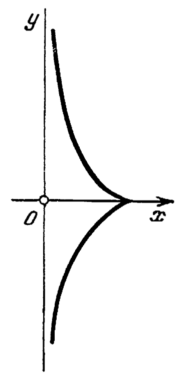


Рис. 91.

6. Найти особые точки *астроиды* (рис. 90) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. Выяснить характер особых точек.

7. Найти особые точки *трактрисы* (рис. 91)

$$x=a\sin t, \qquad y=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) \qquad (0<t<\pi).$$

Выяснить характер особых точек.

8. Для винтовой линии

$$x=\cos t, \qquad y=\sin t, \qquad z=t$$

в точке (1, 0, 0) составить уравнения: касательной, соприкасающейся плоскости, нормальной плоскости, главной нормали, бинормали.

9. Составить уравнение касательной к кривой, заданной уравнениями

$$x^2+y^2+z^2=1, \qquad x^2+z^2=x,$$

в точке (0, 0, 1).

10. Найти уравнение касательной к кривой $x=t^2$, $y=t^3$ в точке (0, 0).

11. Найти уравнение параболы вида

$$y=x^2+ax+b,$$

касающейся окружности

$$x^2+y^2=2.$$

12. Доказать, что у трактрисы (упр. 7) отрезок касательной между точкой касания и осью y постоянен, т. е. не зависит от выбора точки касания.

13. На бинормалях винтовой линии отложены отрезки одной и той же длины. Что представляет собой кривая, образуемая концами этих отрезков?

14. Под каким углом пересекаются гиперболы:

$$xy=c_1, \qquad x^2-y^2=c_2?$$

15. Дано семейство кривых g_λ:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1.$$

Доказать, что через каждую точку плоскости xy, не лежащую на осях координат, проходят две кривые семейства и они пересекаются под прямым углом.

16. Показать, что если касательные кривой проходят через одну и ту же точку, то это прямая или часть прямой.

17. Показать, что касательные винтовой линии:

$$x=a\cos\omega t, \quad y=a\sin\omega t, \quad z=bt$$

наклонены под постоянным углом к плоскости xy. Показать, что главные нормали этой винтовой линии пересекают ось z.

18. Показать, что если касательные кривой параллельны некоторой плоскости, то кривая плоская.

19. При каком условии прямые

$$\left.\begin{aligned} a_1(t)\,x+b_1(t)\,y+c_1(t)\,z+d_1(t)=0,\\ a_2(t)\,x+b_2(t)\,y+c_2(t)\,z+d_2(t)=0 \end{aligned}\right\}$$

являются касательными некоторой кривой? Найти эту кривую.

20. Составить уравнение соприкасающейся плоскости кривой, заданной уравнениями

$$\varphi(x, y, z)=0, \qquad \psi(x, y, z)=0,$$

в точке (x, y, z).

21. Заданы соприкасающиеся плоскости кривой:

$$A(t)\,x+B(t)\,y+C(t)\,z+D(t)=0.$$

Найти уравнения кривой

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t).$$

22. Найти огибающую семейства прямых, отсекающих от координатного угла Oxy треугольник с площадью $2a^2$. Что представляет собой эта огибающая?

23. Найти огибающую семейства прямых, на которых координатные оси вырезают отрезок постоянной длины a. Что представляет собой эта огибающая?

24. Найти огибающую траекторий материальной точки, выбрасываемой из начала координат со скоростью v_0 под разными углами (*парабола безопасности*).

ГЛАВА IX
КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ КРИВОЙ

§ 1. Длина кривой

Пусть элементарная кривая задана уравнениями

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t).$$

Длиной дуги (отрезка) кривой $a \leqslant t \leqslant b$ называется предел длин ломаных с вершинами в точках $(x(t_i),\ y(t_i))$, $t_1=a,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n=b$ $(t_1<t_2<t_3\ldots)$, вписанных в кривую, при условии, что длины звеньев ломаных неограниченно убывают.

Любой отрезок гладкой кривой имеет определенную длину. Если кривая задана уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, *то длина отрезка* $a\leqslant t\leqslant b$ *кривой определяется по формуле*

$$s=\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt.$$

Доказательство. Длина ломаной равна

$$\sum_k |\boldsymbol{r}(t_k)-\boldsymbol{r}(t_{k-1})|=\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt+\left\{\sum_k (t_k-t_{k-1})\,|\boldsymbol{r}'(t_k)|-\right.$$
$$\left.-\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt\right\}+\left\{\sum_k |\boldsymbol{r}(t_k)-\boldsymbol{r}(t_{k-1})|-\sum_k (t_k-t_{k-1})\,|\boldsymbol{r}'(t_k)|\right\}.$$

Второй член в правой части равенства сколь угодно мал при достаточно малых t_k-t_{k-1} по определению интеграла. Третий член допускает представление в виде

$$\sum_k \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{r}'(t)\,dt\right|-\sum_k \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{r}'(t_k)\,dt\right|,$$

а следовательно, не превосходит

$$\sum_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left|\boldsymbol{r}'(t)-\boldsymbol{r}'(t_k)\right| dt.$$

(Разность модулей векторов не больше модуля их разности по «неравенству треугольника».)

Так как вектор-функция $\boldsymbol{r}'(t)$ непрерывна, а значит, равномерно непрерывна на отрезке $a\leqslant t\leqslant b$, то $|\boldsymbol{r}'(t)-\boldsymbol{r}'(t_k)|<\varepsilon$. Поэтому третий член не превосходит

$$\int_a^b \varepsilon\,dt=(b-a)\,\varepsilon.$$

Резюмируя вышеизложенное, заключаем: когда звенья ломаной неограниченно убывают, а значит убывают разности $t_k - t_{k-1}$, длина ломаной стремится к пределу

$$s = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt.$$

Утверждение доказано.

Дадим формулы длины кривой для различных случаев задания кривой.

1. Кривая задана уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t);$$

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

2. Кривая задана уравнениями:

$$y = y(x), \quad z = z(x);$$

$$s(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

Для плоских кривых, лежащих в плоскости xy, в этих формулах надо положить $z' = 0$.

§ 2. Естественная параметризация кривой

Пусть γ — гладкая кривая, задаваемая векторным уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

Введем функцию $s(t)$ по формуле

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt.$$

Эта функция имеет простой геометрический смысл. Именно, $|s(t)|$ — это длина отрезка $[t_0, t]$ кривой. Функция $s(t)$ строго монотонна, так как

$$\frac{ds}{dt} = |\boldsymbol{r}'(t)| > 0.$$

Поэтому s можно взять в качестве параметра на кривой. Такая параметризация кривой называется *естественной*.

В случае естественной параметризации касательный вектор кривой $\boldsymbol{r}'(s)$ является единичным вектором, т. е. $|\boldsymbol{r}'(s)| = 1$.

Действительно,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\boldsymbol{r}'}{s'}.$$

Но $s' = |\boldsymbol{r}'|$. Поэтому $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = 1.$

§ 3. Кривизна кривой

Пусть P — произвольная точка регулярной кривой γ и Q — точка кривой, близкая к P. Обозначим $\Delta\theta$ угол между касательными кривой в точках P и Q, а $|\Delta s|$ — длину дуги отрезка PQ кривой (рис. 92).

Кривизной кривой γ в точке P мы будем называть предел отношения $\Delta\theta/|\Delta s|$, когда точка $Q \to P$.

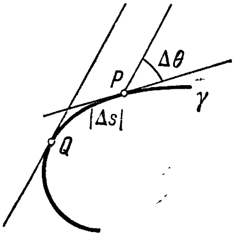


Рис. 92.

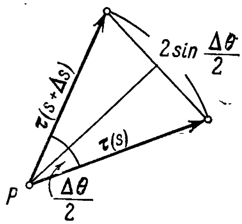


Рис. 93.

Регулярная (дважды непрерывно дифференцируемая) кривая имеет в каждой точке определенную кривизну k_1. Если

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

— естественная параметризация кривой, то

$$k_1 = |\boldsymbol{r}''(s)|.$$

Пусть точкам P и Q соответствуют значения параметра s и $s+\Delta s$. Угол $\Delta\theta$ равен углу между единичными касательными векторами $\boldsymbol{\tau}(s) = \boldsymbol{r}'(s)$ и $\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s) = \boldsymbol{r}'(s+\Delta s)$.

Так как векторы $\boldsymbol{\tau}(s)$ и $\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)$ единичные и образуют угол $\Delta\theta$, то $|\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s) - \boldsymbol{\tau}(s)| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}$ (рис. 93).

Поэтому

$$\frac{|\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s) - \boldsymbol{\tau}(s)|}{|\Delta s|} = \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

Замечая, что $\Delta\theta \to 0$ при $|\Delta s| \to 0$ по непрерывности $\boldsymbol{\tau}(s)$, и переходя к пределу, получим:

$$|\boldsymbol{r}''(s)| = k_1.$$

Что и требовалось доказать.

Пусть в данной точке кривой кривизна отлична от нуля. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{k_1}\boldsymbol{r}''(s)$. Вектор $\boldsymbol{\nu}$ единичный и расположен в соприкасающейся плоскости кривой. Кроме того, этот вектор перпендикулярен касательному вектору $\boldsymbol{\tau}$, так как $\boldsymbol{\tau}^2 = 1$ и, следовательно, $\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}k_1 = 0$. Таким образом, этот вектор направлен по главной нормали кривой. Очевидно, направление вектора $\boldsymbol{\nu}$ не изменится, если изменить начало отсчета дуг s или направление отсчета. В дальнейшем, говоря о единичном векторе главной нормали кривой, мы будем иметь в виду вектор $\boldsymbol{\nu}$.

Очевидно, вектор $\boldsymbol{\tau}\wedge\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\beta}$ направлен по бинормали кривой. Этот вектор мы будем называть единичным вектором бинормали кривой.

Найдем выражение для кривизны кривой в случае любого параметрического задания. Пусть кривая задана векторным уравнением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t).$$

Выразим вторую производную вектор-функции $\boldsymbol{r}$ по дуге s через производные по t. Имеем

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'_s s'.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{r}'^2=s'^2.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{r}'_s=\frac{\boldsymbol{r}'}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2}}.$$

Дифференцируя это равенство еще раз по t, получим:

$$\boldsymbol{r}''_{ss}s'=\frac{\boldsymbol{r}''}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2}}-\frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'')\,\boldsymbol{r}'}{(\sqrt{\boldsymbol{r}'^2})^3}.$$

Возводя это равенство в квадрат и замечая, что $s'^2=\boldsymbol{r}'^2$, будем иметь

$$k_1^2=\frac{\boldsymbol{r}''^2\boldsymbol{r}'^2-(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'')^2}{(\boldsymbol{r}'^2)^3},$$

или, что то же самое,

$$k_1^2=\frac{(\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}'')^2}{(\boldsymbol{r}'^2)^3}.$$

Отсюда для кривизны кривой, заданной уравнениями

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),$$

получаем

$$k_1^2=\frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}.$$

Если кривая плоская и расположена в плоскости xy,

$$k_1^2=\frac{(x''y'-y''x')^2}{(x'^2+y'^2)^3}.$$

Если плоская кривая задана уравнением $y=y(x)$,

$$k_1^2=\frac{y''^2}{(1+y'^2)^3}.$$

Замечание. Кривизна кривой по определению неотрицательна. Для плоских кривых во многих случаях целесообразно отнести кривизне знак, считая ее в одних случаях положительной, в других — отрицательной. При этом пользуются следующим соображением. Касательный вектор $\boldsymbol{r}'(t)$ кривой при движении вдоль кривой в направлении возрастающих t поворачивается. В зависимости от направления вращения вектора $\boldsymbol{r}'(t)$ кривизну считают положительной или отрицательной (рис. 94). Если определить этим условием знак кривизны плоской кривой, то для нее получается формула

$$k=\frac{x''y'-y''x'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} \quad \text{или} \quad k=-\frac{x''y'-y''x'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}.$$

В частности, для задания кривой уравнением $y=y(x)$

$$k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad \text{или} \quad k=-\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

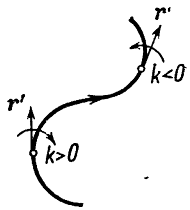


Рис. 94.

В качестве упражнения найдем все кривые, имеющие в каждой точке кривизну, равную нулю. Имеем

$$k_1=|\boldsymbol{r}''(s)|=0.$$

Отсюда $\boldsymbol{r}''(s)=0$ и, следовательно, $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы.

Таким образом, кривая, имеющая всюду кривизну, равную нулю, является либо прямой, либо отрезком прямой.

§ 4. Кручение кривой

Пусть P — произвольная точка кривой γ и Q — точка кривой, близкая к P. Обозначим $\Delta\theta$ угол между соприкасающимися плоскостями кривой в точках P и Q, а $|\Delta s|$ — длину отрезка PQ кривой. Под *абсолютным кручением* $|k_2|$ кривой γ в точке P мы будем понимать предел отношения $\Delta\theta/|\Delta s|$, когда $Q \to P$ (рис. 95).

Регулярная (трижды непрерывно дифференцируемая) кривая в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, имеет определенное абсолютное кручение $|k_2|$. *Если*

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

— естественная параметризация кривой, то

$$|k_2|=\frac{|(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')|}{k_1^2}.$$

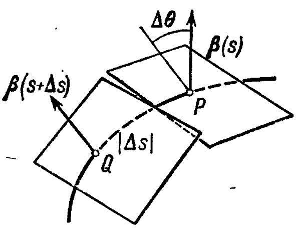


Рис. 95.

Доказательство. Если кривизна кривой γ в точке P отлична от нуля, то по непрерывности она отлична от нуля в точках, близких к P. В каждой точке, где кривизна отлична от нуля, векторы $\boldsymbol{r}'(s)$ и $\boldsymbol{r}''(s)$ ненулевые и не параллельны. Поэтому в каждой точке Q, близкой к P, существует определенная соприкасающаяся плоскость.

Пусть $\boldsymbol{\beta}(s)$ и $\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)$ — единичные векторы бинормали в точках P и Q кривой γ. Угол $\Delta\theta$ равен углу между векторами $\boldsymbol{\beta}(s)$ и $\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)$.

Так как векторы $\boldsymbol{\beta}(s)$ и $\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)$ единичные и образуют угол $\Delta\theta$, то $|\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\beta}(s)|=2\sin\frac{\Delta\theta}{2}$. Поэтому

$$\frac{|\boldsymbol{\beta}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\beta}(s)|}{|\Delta s|}=\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|}=\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $|\Delta s|\to 0$, получаем

$$|k_2|=|\boldsymbol{\beta}'|.$$

Вектор $\boldsymbol{\beta}'$ перпендикулярен $\boldsymbol{\beta}$, так как $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta}=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^2\right)'=0$. Нетрудно видеть, что он перпендикулярен и $\boldsymbol{\tau}$.

В самом деле,

$$\boldsymbol{\beta}'=(\boldsymbol{\tau}\wedge\boldsymbol{\nu})'=\boldsymbol{\tau}'\wedge\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\tau}\wedge\boldsymbol{\nu}'.$$

Но $\boldsymbol{\tau}'\parallel\boldsymbol{\nu}$. Поэтому $\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\tau}\wedge\boldsymbol{\nu}'$, откуда следует, что $\boldsymbol{\beta}'$ перпендикулярен $\boldsymbol{\tau}$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{\beta}'$ параллелен вектору $\boldsymbol{\nu}$ и, следовательно,

$$|k_2|=|\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\nu}|.$$

Подставляя сюда $\boldsymbol{\nu}=\frac{1}{k_1}\boldsymbol{r}''$ и $\boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{r}'\wedge\boldsymbol{r}''}{k_1}$, получим:

$$|k_2|=\frac{|(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')|}{k_1^2}.$$

Что и требовалось доказать.

Определим теперь *кручение* кривой.

Из параллельности векторов $\boldsymbol{\beta}'$ и $\boldsymbol{\nu}$ следует, что при движении вдоль кривой в сторону возрастающих s соприкасающаяся плоскость кривой поворачивается около касательной кривой. В связи с этим мы определим кручение кривой равенством

$$k_2=\pm|k_2|$$

и будем брать знак «+», если вращение касательной плоскости происходит в направлении от $\boldsymbol{\beta}$ к $\boldsymbol{\nu}$ (рис. 96) и «—», если вращение происходит в направлении от $\boldsymbol{\nu}$ к $\boldsymbol{\beta}$. Определив так кручение кривой, будем иметь $k_2=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\nu}$ или

$$k_2=-\frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')}{k_1^2}.$$

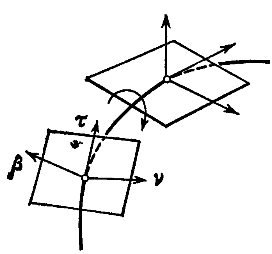


Рис. 96.

Найдем выражение для кручения кривой в случае любой регулярной параметризации $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$. Имеем

$$\boldsymbol{r}_s'=\boldsymbol{r}'t',\qquad \boldsymbol{r}_{ss}''=\boldsymbol{r}''t'^2+\boldsymbol{r}'t'',\qquad \boldsymbol{r}_{sss}'''=\boldsymbol{r}'''t'^3+\{\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}''\},$$

где $\{\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''\}$ — линейная комбинация векторов $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$. Подставляя найденные выражения для $\boldsymbol{r}_s'$, $\boldsymbol{r}_{ss}''$ и $\boldsymbol{r}_{sss}'''$ в формулу для k_2 и замечая, что $t'^2 = 1/(\boldsymbol{r}')^2$, получим

$$k_2 = -\frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{r}'')^2}.$$

Найдем все кривые, у которых в каждой точке кручение равно нулю. Имеем

$$k_2 = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\nu} = 0.$$

Так как, кроме того, $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\tau} = 0$ и $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta} = 0$, то $\boldsymbol{\beta}' = 0$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0 = \mathrm{const}$.

Векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\beta}$ перпендикулярны. Поэтому $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\beta}_0 = 0$. Отсюда $(\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{\beta}_0 = 0$; это значит, что кривая лежит в плоскости, заданной векторным уравнением $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{\beta}_0 = 0$.

Итак, *кривая, у которой кручение в каждой точке равно нулю,— плоская.*

§ 5. Формулы Френе

Три полупрямые, исходящие из точки кривой и имеющие направления векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, являются ребрами трехгранного угла. Этот трехгранный угол называется *естественным трехгранником.*

Выразим производные векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ по дуге кривой через сами векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$. Имеем

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{r}'' = k_1\boldsymbol{\nu}.$$

Для получения $\boldsymbol{\beta}'$ вспомним, что вектор $\boldsymbol{\beta}'$ параллелен $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\nu} = k_2$. Отсюда

$$\boldsymbol{\beta}' = k_2\boldsymbol{\nu}.$$

Наконец,

$$\boldsymbol{\nu}' = (\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\tau})' = \boldsymbol{\beta}' \wedge \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\tau}' = k_2\boldsymbol{\nu} \wedge \boldsymbol{\tau} + k_1\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\nu} = -(k_1\boldsymbol{\tau} + k_2\boldsymbol{\beta}).$$

Систему формул

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= \quad k_1\boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{\nu}' &= -k_1\boldsymbol{\tau} - k_2\boldsymbol{\beta}, \\ \boldsymbol{\beta}' &= \quad k_2\boldsymbol{\nu} \end{aligned}$$

называют *формулами Френе.*

Вдоль кривой кривизна и кручение кривой являются функциями длины дуги s. Уравнения

$$k_1 = \varphi(s), \qquad k_2 = \psi(s),$$

задающие кривизну и кручение кривой как функции длины дуги s, называются *натуральными уравнениями кривой.*

Оказывается, *кривая своими натуральными уравнениями, если $k_1 > 0$, определяется однозначно с точностью до положения в пространстве.*

§ 6. Эволюта и эвольвента плоской кривой

Пусть γ — регулярная (трижды дифференцируемая) кривая, заданная уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$. Отложим из произвольной точки P кривой на ее нормали отрезок, равный радиусу кривизны $\rho=\frac{1}{k_1}$ в направлении вектора $\boldsymbol{\nu}$. Конец этого отрезка называется *центром кривизны* кривой. Такое название связано с тем, что окружность с этим центром и радиусом ρ имеет с кривой в точке P соприкосновение третьего порядка, т. е. расстояние точки кривой от окружности имеет третий порядок малости по сравнению с расстоянием от точки P. Напомним, что касательная имеет с кривой соприкосновение второго порядка.

Геометрическое место центров кривизны кривой, если оно является кривой, называется *эволютой*. Покажем, что эволюта является огибающей нормалей кривой. Действительно, уравнение эволюты:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}+\frac{1}{k_1}\boldsymbol{\nu}.$$

Касательный вектор эволюты

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{r}'+\left(\frac{1}{k_1}\right)'\boldsymbol{\nu}+\frac{1}{k_1}(-k_1\boldsymbol{\tau})=\left(\frac{1}{k_1}\right)'\boldsymbol{\nu}.$$

Таким образом, он направлен по нормали данной кривой. А следовательно, эта нормаль является касательной эволюты. Это значит, что *эволюта кривой является огибающей ее нормалей.*

Заметим, что если $k_1'\neq 0$, то длина эволюты $a\leqslant s\leqslant b$ равна

$$\int_a^b|\tilde{\boldsymbol{r}}'|\,ds=\int_a^b\left|\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right|ds=\left|\frac{1}{k_1(b)}-\frac{1}{k_1(a)}\right|,$$

т. е. равна разности радиусов кривизны в концах отрезка.

Определим теперь эвольвенту кривой. Пусть кривая задана в естественной параметризации $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$. Отложим из точки кривой на ее касательной отрезок длины $|s|$ в направлении вектора $\boldsymbol{\tau}$, если $s<0$, и в противоположном направлении, если $s>0$. Кривая, которую описывает конец этого отрезка, называется *эвольвентой* кривой.

Наглядно образование эвольвенты можно представить следующим образом. Представим себе нерастяжимую нить, закрепленную одним концом на кривой и намотанную на кривую. Если эту нить, оттягивая за свободный конец, сматывать с кривой, то этот конец описывает эвольвенту кривой (рис. 97).

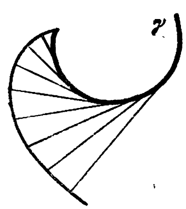


Рис. 97.

Данная кривая является эволютой для ее эвольвенты. Действительно, уравнение эвольвенты —

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}-s\boldsymbol{\tau}.$$

Касательный вектор эвольвенты

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{\tau}-sk_1\boldsymbol{\nu}=-sk_1\boldsymbol{\nu}.$$

Отсюда следует, что касательная кривой является нормалью к эвольвенте. А значит, данная кривая является эволютой для эвольвенты.

Эволюта и эвольвента имеют важные применения в технике. Например, зубья цилиндрических шестерен имеют форму эвольвент окружности.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IX

1. Найти длину отрезка $-a\leqslant x\leqslant a$ параболы $y=bx^2$.
2. Найти длину отрезка кривой

$$x=a\,\mathrm{ch}\,t,\quad y=a\,\mathrm{sh}\,t,\quad z=at$$

между точками 0 и t.

3. Найти длину астроиды

$$x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t.$$

4. Найти длину отрезка $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ циклоиды

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t).$$

5. Найти выражение длины дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $\rho=\varphi(\theta)$.

6. Найти кривизну кривой:

$$x=t-\sin t, \quad y=1-\cos t, \quad z=4\sin\frac{t}{2}.$$

7. Найти кривизну кривой, заданной уравнениями в неявном виде:

$$x+\operatorname{sh} x=\sin y+y, \quad z+e^z=x+\ln(1+x)+1,$$

в точке (0, 0, 0).

8. Найти кривизну окружности радиуса R.

9. Найти кривизну и кручение кривой:

$$x=a\operatorname{ch} t, \quad y=a\operatorname{sh} t, \quad z=at.$$

10. Найти кривизну эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в его вершинах.

11. Показать, что кривизна и кручение винтовой линии постоянны.

12. Вывести формулу для кривизны плоской кривой, заданной уравнением в полярных координатах:

$$k_1=\frac{\left|\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''\right|}{\left(1+\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

13. Доказать, что если касательные кривой образуют постоянный угол с некоторой прямой, то главные нормали перпендикулярны этой прямой.

14. Доказать, что если соприкасающиеся плоскости кривой проходят через одну точку, то кручение кривой равно нулю, и следовательно, кривая плоская.

15. Найти кручение кривой:

$$r=\int e(t)\wedge e'(t)\,dt,$$

где $e(t)$ — вектор-функция, удовлетворяющая условиям $|e(t)|=1$, $e'(t)\neq 0$.

16. Доказать, что если касательные кривой образуют постоянный угол с некоторым направлением, то отношение кривизны к кручению кривой постоянно.

17. Найти эволюту параболы

$$y^2=2px.$$

18. Показать, что эволютой трактрисы

$$x=-a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right), \quad y=a\sin t$$

является *цепная линия* $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

19. Найти эвольвенты окружности $x^2+y^2=R^2$.

20. Найти все плоские кривые с данным натуральным уравнением $k_1=k(s)$.

21. Как найти уравнения кривой, если задана одна из трех вектор-функций $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu}(s)$, $\boldsymbol{\beta}(s)$?

22. Доказать, что если кривая обладает одним из следующих четырех свойств:

а) касательные кривой образуют постоянный угол с некоторым направлением,

б) бинормали кривой образуют постоянный угол с некоторым направлением,

в) главные нормали параллельны некоторой плоскости,

г) отношение кривизны к кручению постоянно,

то она обладает остальными тремя свойствами.

23. Доказать, что если кривизна и кручение кривой постоянны, то это винтовая линия.

ГЛАВА X

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И СОПРИКАСАЮЩИЙСЯ ПАРАБОЛОИД ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Понятие поверхности

Пусть G — множество точек на плоскости. Точка X множества G называется *внутренней точкой*, если все достаточно близкие к X точки плоскости принадлежат множеству G. Это значит — существует такое положительное число ε, что все точки плоскости, расстояния которых от X меньше ε, принадлежат множеству G. Множество G называется *открытым*, если каждая его точка внутренняя. Множество G называется *областью*, если оно открытое и любые его две точки можно соединить ломаной, принадлежащей G. Например, круг без ограничивающей его окружности является областью.

Пусть G — область на плоскости. Точка X плоскости называется *граничной точкой* для области G, если найдутся сколь угодно близкие к X точки, принадлежащие G, и точки, не принадлежащие ей. Это значит, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдутся точки на расстоянии, меньшем ε, от точки X, принадлежащие G, и точки, не принадлежащие G. Граничные точки образуют *границу* области G. В приведенном примере окружность, ограничивающая круг, состоит из граничных точек. Присоединяя к области ее границу, получим замкнутую область.

Дословно так же, как для плоских множеств, определяются понятие внутренней точки множества в пространстве, понятие открытого множества, области и замкнутой области. *Окрестностью* точки называется любое открытое множество, содержащее эту точку. В частности, ε-окрестностью называется множество точек, которые отстоят от данной точки на расстоянии, меньшем ε.

Дадим теперь несколько определений, относящихся к понятию поверхности.

Элементарной поверхностью мы будем называть фигуру, полученную топологическим преобразованием плоской области. *Простой поверхностью* будем называть фигуру, каждая точка которой имеет пространственную окрестность такую, что часть фигуры, содержащаяся в этой окрестности, является элементарной поверхностью. *Общей поверхностью* будем называть фигуру, полученную локально топологическим преобразованием простой поверхности.

Ввиду таких определений изучение любой поверхности «в малом» сводится к изучению элементарной поверхности.

Пусть элементарная поверхность F получается топологическим преобразованием плоской области G. Введем в плоскости, где расположена область G, декартовы координаты u, v. Уравнения

$$x=f_1(u, v), \quad y=f_2(u, v), \quad z=f_3(u, v), \tag{*}$$

задающие преобразование области G в поверхность F, называются *уравнениями поверхности в параметрической форме.*

Числа u и v полностью характеризуют положение точки на поверхности и называются *криволинейными или гауссовыми координатами* на поверхности.

При фиксированном u (или v) уравнения (*) задают кривые, лежащие на поверхности. Они называются *координатными линиями*. Линии, вдоль которых изменяется только u ($v=\text{const}$), называются «линиями u», а линии, вдоль которых изменяется только v ($u=\text{const}$), называются «линиями v».

Задание поверхности уравнениями

$$x=f_1(u, v), \quad y=f_2(u, v), \quad z=f_3(u, v)$$

эквивалентно заданию ее одним векторным уравнением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(u, v),$$

где

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{f}(u, v)=f_1(u, v)\,\boldsymbol{e}_1+f_2(u, v)\,\boldsymbol{e}_2+f_3(u, v)\,\boldsymbol{e}_3.$$

§ 2. Регулярные поверхности

Поверхность F мы будем называть *регулярной*, если у каждой точки этой поверхности есть окрестность, допускающая регулярную параметризацию, т. е. задание уравнениями в параметрической форме

$$x=f_1(u, v), \quad y=f_2(u, v), \quad z=f_3(u, v),$$

где f_1, f_2, f_3 — регулярные (k раз непрерывно дифференцируемые функции, $k \geqslant 1$), удовлетворяющие условию: ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} f_{1u} & f_{2u} & f_{3u} \\ f_{1v} & f_{2v} & f_{3v} \end{pmatrix}$$

равен двум, т. е. по крайней мере один из детерминантов второго порядка этой матрицы отличен от нуля. В случае векторного задания поверхности уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(u, v)$ это означает, что $\boldsymbol{f}_u \wedge \boldsymbol{f}_v \neq 0$, т. е. векторы $\boldsymbol{f}_u$ и $\boldsymbol{f}_v$ отличны от нулевого и не коллинеарны. При $k=1$ поверхность называется *гладкой*.

Пусть гладкая поверхность задана уравнениями в параметрической форме:

$$x=f_1(u, v), \quad y=f_2(u, v), \quad z=f_3(u, v).$$

Пусть в точке $Q_0(u_0, v_0)$

$$\begin{vmatrix} f_{1u} & f_{2u} \\ f_{1v} & f_{2v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Докажем, что *поверхность в окрестности точки* Q_0 *допускает задание уравнением вида*

$$z = F(x, y).$$

По теореме о неявных функциях систему уравнений

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v)$$

можно разрешить относительно u, v в окрестности точки (u_0, v_0). Получим

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

Вводя вместо u, v параметры α, β согласно формулам $u = \varphi(\alpha, \beta)$, $v = \psi(\alpha, \beta)$ получим

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = f_3(\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta)).$$

Или, что то же самое,

$$z = f_3(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = F(x, y).$$

Утверждение доказано.

§ 3. Касательная плоскость поверхности

Пусть Φ — поверхность, P — точка на ней и α — плоскость, проходящая через точку P (рис. 98). Возьмем на поверхности точку Q и обозначим ее расстояния от точки P и плоскости α через d и h соответственно.

Мы будем называть плоскость α *касательной плоскостью* поверхности в точке P, если отношение $h/d \to 0$, когда $Q \to P$.

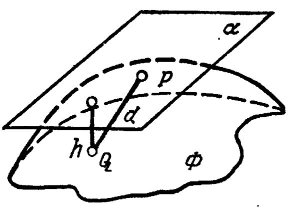


Рис. 98.

Гладкая поверхность Φ имеет в каждой точке касательную плоскость, и притом единственную.

Если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — какая-нибудь гладкая параметризация поверхности, то касательная плоскость в точке $P(u, v)$ параллельна векторам $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ и $\boldsymbol{r}_v(u, v)$.

Доказательство. Допустим, что поверхность Φ в точке $P(u, v)$ имеет касательную плоскость α. Пусть $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости α. Расстояние d точки $Q(u+\Delta u, v+\Delta v)$ от точки $P(u, v)$ равно $|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v)|$. Расстояние точки Q от плоскости α равно

$$|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v))\boldsymbol{n}|,$$

$$\frac{h}{d} = \frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v))\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v)|}.$$

Согласно определению $h/d \to 0$, когда Δu и Δv независимо стремятся к нулю. В частности,

$$\frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v)-\boldsymbol{r}(u, v))\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v)-\boldsymbol{r}(u, v)|} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta u \to 0.$$

Но

$$\frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v)-\boldsymbol{r}(u, v))\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v)-\boldsymbol{r}(u, v)|} = \frac{\left|\dfrac{\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v)-\boldsymbol{r}(u, v)}{\Delta u}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\dfrac{\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v)-\boldsymbol{r}(u, v)}{\Delta u}\right|} \to \frac{|\boldsymbol{r}_u(u, v)\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}_u(u, v)|}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{r}_u(u, v)\boldsymbol{n}=0.$$

Так как $\boldsymbol{r}_u(u, v) \neq 0$ $(\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v \neq 0)$, то равенство $\boldsymbol{r}_u(u, v)\boldsymbol{n}=0$ возможно только в том случае, если вектор $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ параллелен плоскости α.

Аналогично показывается, что и вектор $\boldsymbol{r}_v(u, v)$ тоже параллелен плоскости α, и так как векторы $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ и $\boldsymbol{r}_v(u, v)$ ненулевые и не параллельны $((\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v) \neq 0)$, то касательная плоскость, если она существует, единственная.

Докажем теперь существование касательной плоскости. Пусть плоскость α параллельна векторам $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ и $\boldsymbol{r}_v(u, v)$. Покажем, что она является касательной плоскостью поверхности в точке $P(u, v)$.

Имеем

$$\frac{h}{d} = \frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u, v))\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u, v)|} =$$

$$= \frac{|(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n})\Delta u+(\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})\Delta v+\varepsilon_1\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}|}{|\boldsymbol{r}_u\Delta u+\boldsymbol{r}_v\Delta v+\varepsilon_2\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}|} =$$

$$= \frac{|\varepsilon_1|}{\left|\boldsymbol{r}_u\dfrac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\varepsilon_2\right|},$$

где $|\varepsilon_1|$ и $|\varepsilon_2|$ стремятся к нулю, когда $\Delta u, \Delta v \to 0$.

Чтобы доказать, что $h/d \to 0$ при $\Delta u, \Delta v \to 0$, достаточно доказать, что при любых $\Delta u, \Delta v$

$$\left|\frac{\boldsymbol{r}_u\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\frac{\boldsymbol{r}_v\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right| > c > 0,$$

где c — некоторая постоянная.

Так как сумма квадратов чисел $\Delta u/\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}$ и $\Delta v/\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}$ равна единице, то по крайней мере одно из них не меньше $1/\sqrt{2}$. Пусть, например, $\Delta u/\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2} \geqslant 1/\sqrt{2}$. Обозначим через $\boldsymbol{e}$ единичный вектор, компланарный с векторами $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, перпендикулярный вектору $\boldsymbol{r}_v$. Имеем

$$\left|\frac{\boldsymbol{r}_u\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\frac{\boldsymbol{r}_v\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right| \geqslant \left|\left(\boldsymbol{r}_u\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\boldsymbol{r}_v\frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right)\boldsymbol{e}\right| =$$

$$= \left|(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{e})\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\right| \geqslant |\boldsymbol{r}_u|\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}},$$

где θ — угол между векторами $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$. Аналогично, если $\Delta v/\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2} \geqslant 1/\sqrt{2}$, то

$$\left| \frac{\boldsymbol{r}_u \Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} + \frac{\boldsymbol{r}_v \Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} \right| \geqslant |\boldsymbol{r}_v| \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, в качестве постоянной c можно взять меньшее из чисел $|\boldsymbol{r}_u|\sin\theta/\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{r}_v|\sin\theta/\sqrt{2}$. Теорема доказана.

§ 4. Уравнение касательной плоскости

Составим уравнение касательной плоскости поверхности, заданной уравнениями в параметрической форме

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Пусть $Q_0(u_0, v_0)$ — точка поверхности и $A(x, y, z)$ — произвольная точка касательной плоскости в точке Q_0. Тогда векторы $\overrightarrow{Q_0A}$, $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ компланарны. Следовательно, их смешанное произведение равно нулю. Отсюда получается уравнение касательной плоскости

$$\begin{vmatrix} x-x(u_0, v_0) & y-y(u_0, v_0) & z-z(u_0, v_0) \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Чтобы получить уравнение касательной плоскости поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, достаточно заметить, что это лишь краткая запись параметрического задания поверхности:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v).$$

Поэтому уравнение касательной плоскости в этом случае будет

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-f(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0).$$

Найдем уравнение касательной плоскости в случае неявного задания поверхности уравнением

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad (\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2 \neq 0).$$

Пусть

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

— какое-нибудь параметрическое задание этой поверхности. Имеем тождество

$$\varphi(x(u, v), \ y(u, v), \ z(u, v)) = 0.$$

Дифференцируя это тождество по u и v, получим

$$\varphi_x x_u + \varphi_y y_u + \varphi_z z_u = 0,$$
$$\varphi_x x_v + \varphi_y y_v + \varphi_z z_v = 0.$$

Отсюда видно, что вектор с координатами φ_x, φ_y, φ_z перпендикулярен векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, а значит, перпендикулярен касательной плоскости. Зная вектор, перпендикулярный плоскости, без труда получаем уравнение плоскости

$$(x-x_0)\,\varphi_x(x_0, y_0, z_0)+(y-y_0)\,\varphi_y(x_0, y_0, z_0)+(z-z_0)\,\varphi_z(x_0, y_0, z_0)=0.$$

Нормалью поверхности в точке P называется прямая, проходящая через точку P поверхности перпендикулярно касательной плоскости в этой точке. Очевидно, нормаль поверхности имеет направление вектора $\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v$. Поэтому нетрудно составить ее уравнение.

§ 5. Соприкасающийся параболоид поверхности

Пусть Φ—регулярная поверхность и P—точка на ней. Пусть U—параболоид с вершиной P и осью, совпадающей с нормалью к поверхности в точке P. Возьмем на поверхности точку Q, близкую к P. Прямая, проходящая через точку Q параллельно оси параболоида, пересекает его в некоторой точке Q'. Обозначим через h расстояние между точками Q и Q', а через d—расстояние от точки Q до P. Параболоид U называется *соприкасающимся параболоидом* в точке P поверхности, если $h/d^2 \to 0$ при $Q \to P$ (рис. 99).

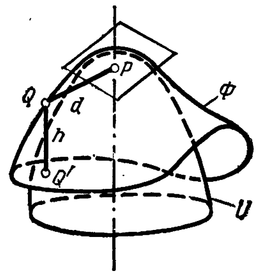


Рис. 99.

В каждой точке регулярной (дважды непрерывно дифференцируемой) поверхности существует, и притом единственный, соприкасающийся параболоид, в частности, вырождающийся в параболический цилиндр или плоскость.

Доказательство. Пусть поверхность задана уравнением в векторной форме $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ (как всегда предполагается, что $\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v\neq 0$). Введем систему координат x, y, z, приняв касательную плоскость поверхности в точке P за плоскость xy, а нормаль к ней—за ось z. При этом, так как вектор $\boldsymbol{r}_u\wedge\boldsymbol{r}_v$ направлен по оси z, то

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\neq 0.$$

Поэтому в достаточно малой окрестности точки P поверхность можно задать уравнением вида

$$z=f(x, y).$$

Так как уравнение касательной плоскости в точке P—

$$z=xf_x(0, 0)+yf_y(0, 0),$$

и этой плоскостью является плоскость xy, то $f_x(0, 0)=0$,

$f_y(0, 0)=0$. Поэтому разложение функции $f(x, y)$ в окрестности начала координат имеет вид

$$f(x, y)=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\varepsilon(x, y)(x^2+y^2),$$

где r, s, t — обозначения вторых производных функции $f(x, y)$ в начале координат ($r=f_{xx}$, $s=f_{xy}$, $t=f_{yy}$), а $\varepsilon(x, y)\to 0$ при $x, y\to 0$. Таким образом, уравнение поверхности в окрестности начала координат имеет вид

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\varepsilon(x, y)(x^2+y^2).$$

Любой параболоид с вершиной в начале координат и осью z, а также его вырождение в параболический цилиндр или плоскость, можно задать уравнением вида

$$z=ax^2+2bxy+cy^2. \qquad (*)$$

Докажем, что если соприкасающийся параболоид существует, то он единственный. Пусть параболоид (*) соприкасающийся. Имеем

$$\frac{h}{d^2}=\frac{\left|\frac{1}{2}((r-a)x^2+2(s-b)xy+(t-c)y^2)+\varepsilon(x, y)(x^2+y^2)\right|}{x^2+y^2+f^2(x, y)}.$$

Полагая $y=0$ и $x\to 0$, видим, что

$$\frac{h}{d^2}\to\left|\frac{1}{2}(r-a)\right|.$$

Отсюда $a=r$. Аналогично заключаем, что $c=t$. После этого, полагая $x=y\to 0$, заключаем, что $b=s$. Таким образом, если соприкасающийся параболоид существует, то он должен иметь уравнение

$$r=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)$$

и, следовательно, единственный.

То, что этот параболоид соприкасающийся, нетрудно видеть. Для него

$$\frac{h}{d^2}=\frac{|\varepsilon(x, y)(x^2+y^2)|}{x^2+y^2+f^2(x, y)}<|\varepsilon(x, y)|\to 0.$$

Теорема доказана полностью.

§ 6. Классификация точек поверхности

Форма регулярной поверхности в достаточно малой окрестности произвольной точки в первом приближении воспроизводится касательной плоскостью, а во втором приближении — соприкасающимся параболоидом. В зависимости от соприкасающегося параболоида точки поверхности подразделяются на *эллиптические*, *гиперболические*, *параболические* и *точки уплощения*.

Точка поверхности называется *эллиптической*, если соприкасающийся параболоид в ней является эллиптическим параболоидом. В достаточно малой окрестности такой точки поверхность напоминает эллиптический параболоид (рис. 100, *а*).

Точка поверхности называется *гиперболической*, если соприкасающийся параболоид в ней является гиперболическим (рис. 100, *б*).

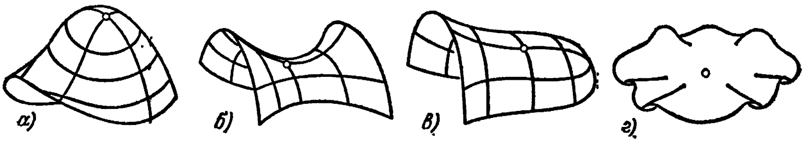


Рис. 100.

Точка поверхности называется *параболической*, если соприкасающийся параболоид вырождается в *параболический цилиндр* (рис. 100, *в*).

Точка поверхности называется *точкой уплощения*, если соприкасающийся параболоид вырождается в плоскость (касательную плоскость поверхности) (рис. 100, *г*).

Пусть P—эллиптическая точка поверхности. Построим в ней соприкасающийся параболоид и рассечем его плоскостью, параллельной касательной плоскости в точке P, на расстоянии 1/2 от нее. Сечением будет эллипс. Проекция этого эллипса на касательную плоскость называется *индикатрисой Дюпена* или *индикатрисой кривизны*.

Так как уравнение параболоида $z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)$, то уравнение индикатрисы Дюпена будет

$$rx^2+2sxy+ty^2=\pm 1,$$

где знак «$+$» или «$-$» зависит от того, где расположен параболоид: в полупространстве $z>0$ или в полупространстве $z<0$.

Направления в точке P на поверхности называются *сопряженными*, если они являются направлениями сопряженных диаметров индикатрисы Дюпена в точке P. Направления в точке P называются *главными*, если они являются направлениями осей индикатрисы Дюпена в этой точке.

Индикатриса Дюпена поверхности в гиперболической точке определяется аналогично. Она состоит из двух сопряженных гипербол, задаваемых уравнением

$$rx^2+2sxy+ty^2=\pm 1.$$

Знак «$+$» соответствует одной гиперболе, а знак «$-$» другой (сопряженной) гиперболе. В гиперболической точке поверхности кроме сопряженных и главных направлений вводится понятие *асимптотических* направлений. Это направления асимптот индикатрисы.

В параболической точке P поверхности индикатриса Дюпена состоит из двух параллельных прямых, симметрично расположенных относительно точки P. В точке уплощения индикатриса Дюпена не существует.

Название «индикатриса Дюпена» связано с именем французского геометра Дюпена, который ввел это понятие. Название «индикатриса кривизны» выясняется дальнейшим изложением.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ X

1. В плоскости xz задана окружность

$$z^2+(x-a)^2=R^2 \qquad (a>R).$$

Найти уравнение поверхности, которая получается при вращении этой окружности около оси z *(тор)*.

2. Что представляет собой поверхность, задаваемая уравнениями в параметрической форме:

$$x=a\cos u\cos v, \quad y=a\cos u\sin v, \quad z=c\sin u?$$

Найти ее уравнение в неявной форме.

3. Составить уравнение поверхности, которая получается при вращении кривой $x=\varphi(u)$, $z=\psi(u)$ около оси z *(поверхность вращения)*.

4. Прямая g движется в пространстве так, что выполняются следующие условия:

а) прямая все время пересекает ось z под прямым углом;

б) точка пересечения прямой g с осью z равномерно движется со скоростью a;

в) прямая равномерно вращается около оси z с угловой скоростью ω.

Составить уравнение поверхности, которую описывает при своем движении прямая g *(винтовая поверхность, геликоид)*.

5. Что представляет собой поверхность, образуемая главными нормалями винтовой линии?

6. *Поверхностью переноса* называется поверхность, образуемая при поступательном перемещении одной кривой вдоль другой. Доказать, что поверхность переноса может быть задана уравнением вида $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(u)+\boldsymbol{\psi}(v)$, где $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ — вектор-функции, из коих $\boldsymbol{\varphi}$ зависит только от u, а $\boldsymbol{\psi}$ — только от v.

7. Показать, что поверхность, являющаяся геометрическим местом середин отрезков, концы которых принадлежат двум данным кривым, есть поверхность переноса.

8. Составить уравнение поверхности, образованной прямыми, параллельными вектору $\boldsymbol{a}$, пересекающими кривую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$ *(цилиндрическая поверхность)*.

9. Составить уравнение поверхности, образованной прямыми, проходящими через точку (a, b, c), пересекающими кривую $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$ *(коническая поверхность)*.

10. Показать, что уравнение любой поверхности, образованной прямыми, можно записать в виде $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(u)+v\boldsymbol{\varphi}(u)$, где $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор-функции.

11. Показать, что уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) поверхности $ax^2+by^2+cz^2=1$ можно записать в виде $axx_0+byy_0+czz_0=1$.

12. Составить уравнение касательной плоскости к сфере:

$$x=a\cos u\cos v, \quad y=a\cos u\sin v, \quad z=a\sin u$$

в точке $(a, 0, 0)$.

13. Показать, что все касательные плоскости поверхности $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ проходят через начало координат.

14. Показать, что поверхности

$$x^2+y^2+z^2=\alpha x, \quad x^2+y^2+z^2=\beta y, \quad x^2+y^2+z^2=\gamma z$$

пересекаются под прямым углом.

15. Показать, что нормали поверхности $x=\varphi(u)\cos v$, $y=\varphi(u)\sin v$, $z=\psi(u)$ пересекают ось z.

16. Найти поверхность, образованную нормалями поверхности $y=x\operatorname{tg} z$ вдоль прямой $y=x$, $z=\frac{\pi}{4}$.

17. Составить уравнение соприкасающегося параболоида к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

в точке $(0, 0, c)$.

18. Исследовать характер точек (эллиптические, гиперболические, точки уплощения) на поверхностях второго порядка.

19. Доказать, что если гладкая поверхность имеет с плоскостью только одну общую точку, то плоскость является касательной плоскостью в этой точке.

20. Доказать, что если поверхность касается плоскости вдоль некоторой линии, то каждая точка этой линии является либо параболической точкой, либо точкой уплощения.

21. Пусть Φ — поверхность, P — точка на ней и α — касательная плоскость в точке P. Доказать следующее:

а) если точка P эллиптическая, то все точки поверхности Φ, достаточно близкие к P, расположены с одной стороны плоскости α;

б) если точка P гиперболическая, то найдутся сколь угодно близкие к P точки поверхности, расположенные с разных сторон плоскости α.

22. Доказать, что если все точки кривой γ на поверхности являются точками уплощения, то кривая плоская.

23. Доказать, что на замкнутой поверхности есть эллиптические точки.

24. Доказать, что если все нормали поверхности пересекают некоторую прямую, то эта поверхность есть поверхность вращения или область на поверхности вращения.

25. Доказать, что если все нормали поверхности проходят через одну точку, то эта поверхность есть сфера или область на сфере.

ГЛАВА XI
КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Линейный элемент поверхности

Пусть Φ — элементарная поверхность, которая получается при топологическом преобразовании области G плоскости uv. Пусть $u=u(t)$, $v=v(t)$ — кривая в области G. Преобразование области G в поверхность Φ переводит эту кривую в кривую γ на поверхности Φ. Если поверхность Φ задается векторным уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, то кривая γ задается уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t), v(t))$.

Длина кривой γ

$$s=\int\sqrt{\boldsymbol{r}_t'^2}\,dt=\int\sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+\boldsymbol{r}_v^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_{\gamma}\sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\,du^2+2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\,du\,dv+\boldsymbol{r}_v^2\,dv^2}. \qquad (*)$$

Здесь $\int\limits_{\gamma}$ обозначает интегрирование вдоль кривой γ.

Квадратичная форма

$$ds^2=\boldsymbol{r}_u^2du^2+2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\,du\,dv+\boldsymbol{r}_v^2\,dv^2$$

называется *первой квадратичной формой* или *линейным элементом* *поверхности*. Для коэффициентов этой формы мы будем употреблять следующие обозначения:

$$\boldsymbol{r}_u^2=E, \quad \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=F, \quad \boldsymbol{r}_v^2=G.$$

Из формул (*) для длины кривой следует, что для измерения длин кривых на поверхности достаточно знать ее первую квадратичную форму. В связи с этим говорят, что *первая квадратичная форма задает метрику поверхности*.

Пусть $u=u_1(t)$, $v=v_1(t)$ и $u=u_2(\tau)$, $v=v_2(\tau)$ — уравнения двух кривых в области G, проходящих через точку (u_0, v_0). Преобразование области G в поверхность Φ переводит эти кривые в кривые γ_1 и γ_2 на поверхности Φ. Углом между кривыми γ_1 и γ_2 в их общей точке $P(u_0, v_0)$ называется угол θ между полукасательными этих кривых.

Имеем:

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{r}_t'\boldsymbol{r}_\tau'}{\sqrt{\boldsymbol{r}_t'^2}\sqrt{\boldsymbol{r}_\tau'^2}}=\frac{(\boldsymbol{r}_u u_1'+\boldsymbol{r}_v v_1')(\boldsymbol{r}_u u_2'+\boldsymbol{r}_v v_2')}{\sqrt{(\boldsymbol{r}_u u_1'+\boldsymbol{r}_v v_1')^2}\sqrt{(\boldsymbol{r}_u u_2'+\boldsymbol{r}_v v_2')^2}}=$$

$$=\frac{Eu_1'u_2'+F(u_1'v_2'+u_2'v_1')+Gv_1'v_2'}{(Eu_1'^2+2Fu_1'v_1'+Gv_1'^2)^{1/2}(Eu_2'^2+2Fu_2'v_2'+Gv_2'^2)^{1/2}}.$$

Если условиться обозначать дифференцирование по u и v вдоль кривых γ_1 и γ_2 через d и δ, то эту формулу можно записать так:

$$\cos\theta=\frac{E\,du\,\delta u+F(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G\,dv\,\delta v}{(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)^{1/2}(E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2)^{1/2}}. \qquad (**)$$

Из формулы (**) видно, что *углы между кривыми на поверхности также определяются первой квадратичной формой*.

Выясним, при каком условии координатная сеть u, v на поверхности будет ортогональной, т. е. линии этой сети пересекаются под прямым углом. Вдоль линий u $du\neq 0$, $dv=0$, а вдоль линий v $\delta v\neq 0$, $\delta u=0$. Поэтому $\cos\theta=0$, т. е. сеть u, v *ортогональна тогда и только тогда, когда* $F\,du\,\delta v=0$, *т. е. когда* $F=0$.

Изгибанием поверхности называется преобразование, при котором сохраняются длины кривых на поверхности, или, как говорят, сохраняется метрика поверхности. Изгибание называется также *изометрическим преобразованием*. Поверхности, которые переводятся друг в друга изометрическим преобразованием, называются *изометричными*. Изометричные поверхности при соответствующей параметризации имеют одинаковую первую квадратичную форму. Поверхность «в малом», как правило, изгибаема. Поверхность «в целом» может быть неизгибаемой. Например, сфера неизгибаема. Любая регулярная (дважды дифференцируемая) изометричная сфере поверхность есть равная ей сфера.

Преобразование поверхности называется *конформным*, если оно сохраняет углы между кривыми. Конформное преобразование имеет важное значение для картографии. Географические карты представляют собой конформное изображение областей земной поверхности. Целесообразность конформного изображения на карте объясняется тем, что это изображение «в малом» подобно и для малых областей хорошо воспроизводит их форму.

§ 2. Площадь поверхности

Пусть Ф — гладкая поверхность. Разобьем ее на малые области g. В каждой такой области отметим какую-нибудь точку P и спроектируем область g на касательную плоскость в точке P. Пусть $\sigma(g)$ — площадь ее проекции. Под *площадью поверхности* Ф мы будем понимать

$$S=\lim \sum_g \sigma(g)$$

при условии, что области g разбиения поверхности неограниченно убывают по размерам.

Найдем формулу для площади поверхности, заданной векторным уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$. Для этого найдем сначала выражение для $\sigma(g)$. Введем декартовы координаты x, y, z, приняв точку P за начало координат, а касательную плоскость в этой точке за плоскость xy. Пусть в таких координатах поверхность в области g задается уравнениями

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v).$$

При достаточно малых размерах области g ее проектирование на касательную плоскость (т. е. на плоскость xy) однозначно и поэтому u, v можно рассматривать как криволинейные координаты на проекции. Как известно из анализа, площадь плоской области в криволинейных координатах находится по формуле

$$\sigma=\iint \left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| du\,dv.$$

Подинтегральное выражение можно представить в виде

$$\left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| = |(\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{n}_P|,$$

где $\boldsymbol{n}_P$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке P. После этого можно записать

$$\sum_g \sigma(g)=\iint_\Phi |(\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{n}^*|\,du\,dv,$$

где $\boldsymbol{n}^*$ — вектор-функция на поверхности, постоянная в каждой из областей g и равная единичному вектору нормали в отмеченной точке P этой области.

Переходя теперь к пределу при условии, что области g неограниченно убывают по размерам, приходим к формуле для площади поверхности

$$S=\iint_\Phi |(\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v)\boldsymbol{n}|\,du\,dv.$$

И так как векторы $\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v$ и $\boldsymbol{n}$ коллинеарны, то

$$S=\iint_\Phi |\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v|\,du\,dv.$$

Замечая, что $|\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v|^2 = \boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2$, получим

$$S = \iint\limits_{\Phi} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Мы видим, что и *площадь поверхности определяется ее первой квадратичной формой.*

В случае задания поверхности уравнением $z = z(x, y)$

$$E = 1 + z_x^2, \quad F = z_x z_y, \quad G = 1 + z_y^2,$$

поэтому

$$S = \iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy.$$

§ 3. Нормальная кривизна поверхности

Пусть на поверхности, заданной векторным уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, имеем кривую γ. Введем на кривой естественный параметр (s). Тогда вдоль кривой u и v будут функциями от s и кривая задается уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(s), v(s))$. Как мы знаем

$$\boldsymbol{r}''_{ss} = k_1 \boldsymbol{\nu},$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор главной нормали кривой, а k_1 — кривизна кривой. Умножая это равенство на единичный вектор $\boldsymbol{n}$ нормали поверхности, получим

$$\boldsymbol{r}''_{ss}\boldsymbol{n} = k_1 \cos\theta, \qquad (*)$$

где θ — угол между векторами $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{n}$.

Преобразуем левую часть этого равенства.

Имеем

$$\boldsymbol{r}''_{ss} = \boldsymbol{r}_u u'' + \boldsymbol{r}_v v'' + \boldsymbol{r}_{uu} u'^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv} u'v' + \boldsymbol{r}_{vv} v'^2.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{r}''_{ss}\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\, u'^2 + 2(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\, u'v' + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\, v'^2 = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\, du^2 + 2(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\, du\, dv + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}.$$

Квадратичная форма в числителе этого выражения называется *второй квадратичной формой поверхности.* Для коэффициентов этой формы мы будем постоянно пользоваться следующими обозначениями

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n} = L, \quad \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n} = M, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n} = N.$$

Теперь из формулы $(*)$ получаем

$$k_1 \cos\theta = \frac{L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}.$$

Отсюда видно, что $k_1 \cos\theta$ зависит только от направления кривой γ, т. е. отношения $du:dv$. Поэтому для всех кривых, имеющих общую касательную, $k_1 \cos\theta$ одно и то же. Если в качестве кривой взять сечение поверхности плоскостью, перпендикулярной касательной плоскости *(нормальное сечение)*, то $|\cos\theta| = 1$ и, следовательно,

$$k_1 |\cos\theta| = k_0,$$

где k_0 — кривизна нормального сечения поверхности. Если нормальной кривизне соответствующим образом отнести знак, то эту формулу можно писать просто:

$$k_1 \cos\theta = k_0. \qquad (**)$$

При этом

$$k_0 = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Соотношение (**) между кривизной кривой на поверхности и нормальной кривизной поверхности составляет содержание *теоремы Менье.*

Найдем выражения для коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности, заданной уравнениями в параметрической форме:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Имеем:

$$E = \boldsymbol{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$
$$F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$
$$G = \boldsymbol{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

$$L = \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_{uu}\frac{(\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v|} = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Аналогично находим

$$M = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad N = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Чтобы найти коэффициенты квадратичных форм поверхности в случае задания ее уравнением $z = z(x, y)$, достаточно заметить, что это задание эквивалентно параметрическому заданию

$$x = u, \quad y = v, \quad z = z(u, v).$$

Для коэффициентов квадратичных форм поверхности в этом случае получаются выражения:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2,$$
$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

где p, q, r, s, t — обозначения для первых и вторых производных функции $z(x, y)$: $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$.

§ 4. Индикатриса кривизны

Примем точку O поверхности за начало координат, а касательную плоскость в ней — за плоскость xy. Тогда, как мы знаем, поверхность в окрестности точки O задается уравнением

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\varepsilon(x, y)(x^2+y^2),$$

где $\varepsilon(x, y)\to 0$ при $x, y\to 0$.

Соприкасающийся параболоид в точке O поверхности —

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2).$$

Индикатриса Дюпена в точке O —

$$rx^2+2sxy+ty^2=\pm 1.$$

Легко видеть, что первая и вторая квадратичные формы поверхности и ее соприкасающегося параболоида в точке O одинаковы. Именно, первая квадратичная форма —

$$dx^2+dy^2,$$

вторая квадратичная форма —

$$r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2.$$

Отсюда следует, что *у поверхности и соприкасающегося параболоида нормальная кривизна в одном и том же направлении одинакова*. Именно,

$$k_n=\frac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{dx^2+dy^2}.$$

Обратимся теперь к индикатрисе Дюпена поверхности в точке O (рис. 101). Найдем выражение для нормальной кривизны в направлении OQ в зависимости от координат x и y точки Q на индикатрисе. Имеем $dx:dy=x:y$. Поэтому

$$k_n=\frac{rx^2+2sxy+ty^2}{x^2+y^2}.$$

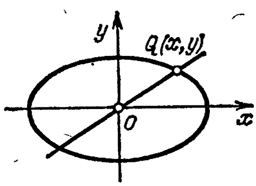


Рис. 101.

Так как точка Q лежит на индикатрисе, то числитель этой формулы равен ± 1, а знаменатель равен OQ^2. Поэтому

$$k_n=\frac{\pm 1}{OQ^2}. \qquad (*)$$

Из этой формулы видна связь индикатрисы Дюпена с нормальной кривизной поверхности, а следовательно, и происхождение ее второго названия — «индикатриса кривизны».

Из формулы (*) мы сделаем два вывода:

1) *нормальная кривизна поверхности в асимптотическом направлении равна нулю*;

2) *нормальная кривизна поверхности по главным направлениям достигает экстремальных значений.*

Возьмем теперь в качестве направления осей координат x и y главные направления на поверхности. Тогда $s=0$ и, следовательно,

$$k_n = r\left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)^2 + t\left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)^2.$$

Полагая $dy=0$, получим $k_n'=r$; полагая $dx=0$, получим $k_n''=t$, где k_n' и k_n'' — нормальные кривизны по главным направлениям. Обозначая

$$dx/\sqrt{dx^2+dy^2}=\cos\theta, \quad dy/\sqrt{dx^2+dy^2}=\sin\theta,$$

получаем формулу

$$k_n = k_n'\cos^2\theta + k_n''\sin^2\theta, \tag{**}$$

где θ — угол, образуемый данным направлением с главным направлением, отвечающим кривизне k_n'. Формула (**) называется *формулой Эйлера.*

§ 5. Сопряженные сети на поверхности

Введенное ранее понятие сопряженности направлений на поверхности связано с индикатрисой Дюпена. В связи с этим найдем уравнение соприкасающегося параболоида и индикатрисы Дюпена в косоугольной системе координат x, y, z, тесно связанной с параметризацией u, v поверхности. Именно, в качестве базисных векторов по координатным осям мы возьмем векторы $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ и $\boldsymbol{n}$. Пусть точке O поверхности соответствуют координаты $u=u_0$, $v=v_0$. Уравнение поверхности в окрестности точки O можно записать в виде

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u(u-u_0)+\boldsymbol{r}_v(v-v_0)+$$
$$+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_{uu}(u-u_0)^2+2\boldsymbol{r}_{uv}(u-u_0)(v-v_0)+\boldsymbol{r}_{vv}(v-v_0)^2)+$$
$$+\varepsilon(u, v)\,[(u-u_0)^2+(v-v_0)^2].$$

Мы утверждаем, что параболоид, задаваемый уравнением

$$z=\frac{1}{2}(Lx^2+2Mxy+Ny^2), \tag{*}$$

является соприкасающимся параболоидом в точке O. Действительно, его можно задать уравнениями в параметрической форме

$$x=u-u_0, \quad y=v-v_0,$$
$$z=\frac{1}{2}(L(u-u_0)^2+2M(u-u_0)(v-v_0)+N(v-v_0)^2).$$

Легко проверить вычислениями, что у этого параболоида и у поверхности в точке O одинаковые первая и вторая квадратичная формы, а следовательно, одинаковые нормальные кривизны. А это полностью характеризует соприкасающийся параболоид.

Из уравнения соприкасающегося параболоида (*) получаем уравнение индикатрисы кривизны

$$Lx^2+2Mxy+Ny^2=\pm 1.$$

Как мы знаем, условие сопряженности направлений $dx:dy$ и $\delta x:\delta y$ относительно этой кривой выражается равенством

$$L\,dx\,\delta x+2M(dx\,\delta y+dy\,\delta x)+N\,dy\,\delta y=0.$$

Так как в точке O $dx=du$, $dy=dv$, $\delta x=\delta u$, $\delta y=\delta v$, то условие сопряженности направлений d и δ на поверхности имеет вид

$$L\,du\,\delta u+2M\,(du\,\delta v+dv\,\delta u)+N\,dv\,\delta v=0.$$

Координатная сеть u, v на поверхности называется *сопряженной*, если направления координатных линий в каждой точке являются сопряженными направлениями. *В случае сопряженной координатной сети* $M=0$, и обратно, *если* $M=0$, *то координатная сеть сопряженная*. Действительно, в направлении линий u $dv=0$, в направлении линий v $\delta u=0$. Поэтому $2M du\,\delta v=0$, следовательно, $M=0$. Обратно, если $M=0$, то $2M du\,\delta v=0$.

Линия на поверхности называется *асимптотической*, если ее направление в каждой точке является асимптотическим. Так как в асимптотическом направлении нормальная кривизна равна нулю, то

$$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0.$$

Это и есть *уравнение асимптотических линий*.

Если координатные линии на поверхности являются асимптотическими, то $L=0$ *и* $N=0$. И обратно, *если* $L=0$ *и* $N=0$, *то координатные линии асимптотические*.

Действительно, если линия u асимптотическая, то $L\,du^2=0$, т. е. $L=0$; если линия v асимптотическая, то $N\,\delta v^2=0$, т. е. $N=0$. Обратно, если $L=0$ и $N=0$, то $L\,du^2=0$ и $N\,\delta v^2=0$, т. е. координатные линии асимптотические.

Ввиду простоты второй квадратичной формы в случае асимптотической координатной сети представляется целесообразным в общих рассмотрениях поверхности пользоваться такой координатной сетью. Следует однако иметь в виду, что асимптотическую координатную сеть можно ввести только в окрестности гиперболической точки поверхности. Что касается сопряженной координатной сети, то ее можно ввести в окрестности эллиптической или гиперболической точки, причем одно семейство координатных линий можно взять произвольно, лишь бы они не имели асимптотических направлений.

Замечание. Понятие асимптотического направления нами определено с помощью индикатрисы Дюпена и относилось только к случаю гиперболической точки. При этом оно полностью характеризовалось тем, что нормальная кривизна в этом направлении равна нулю. В связи с этим мы распространим понятие асимптотического направления на случай параболической точки и точки уплощения, считая направление асимптотическим, если нормальная кривизна в этом направлении равна нулю. При таком определении в гиперболической точке мы будем иметь по-прежнему два асимптотических направления, в параболической одно, а в точке уплощения любое направление будет асимптотическим.

§ 6. Линии кривизны поверхности

Главные направления на поверхности мы определили как направления осей индикатрисы Дюпена. Далее, мы доказали (§ 4), что главные направления характеризуются тем, что нормальная кривизна по этим направлениям имеет экстремальное значение. Следовательно, главные направления могут быть определены этим свойством. При таком определении понятие главного направления распространяется на случай точек уплощения, где индикатрисы Дюпена не существуют. Так как в точке уплощения нормальная кривизна по любому направлению равна нулю, то любое направление является главным.

В каждой точке поверхности существует, вообще говоря, два главных направления. Исключение составляют точки уплощения и специальные эллиптические точки с индикатрисой Дюпена в виде окружности (шаровые точки). В таких точках любое направление является главным.

Найдем условие, при котором направление $du:dv$ на поверхности является главным. Имеем

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Так как правая часть как функция переменных du, dv для главного направления имеет экстремальное значение, то ее производные по этим переменным равны нулю. Отсюда получаем

$$\frac{2(L\,du + M\,dv)}{\mathrm{I}} - \frac{2(E\,du + F\,dv)}{\mathrm{I}^2}\,\mathrm{II} = 0,$$

$$\frac{2(M\,du + N\,dv)}{\mathrm{I}} - \frac{2(F\,du + G\,dv)}{\mathrm{I}^2}\,\mathrm{II} = 0,$$

где I и II для краткости обозначают первую и вторую квадратичные формы.

Из этих уравнений получаем

$$\frac{L\,du + M\,dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = k_n,$$

$$\frac{M\,du + N\,dv}{F\,du + G\,dv} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = k_n.$$

Отсюда уравнение для главных направлений:

$$\frac{L\,du + M\,dv}{E\,du + F\,dv} - \frac{M\,du + N\,dv}{F\,du + G\,dv} = 0.$$

Его можно записать в более удобной для запоминания форме:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \qquad (*)$$

Линия на поверхности называется *линией кривизны*, если ее направление в каждой точке является главным направлением. Поэтому *уравнение* (*) *является дифференциальным уравнением линий кривизны.*

Если на поверхности в области, не содержащей точек уплощения и шаровых точек, координатная сеть состоит из линий кривизны, то $F=0$ и $M=0$. Действительно, в каждой точке такой области два главных направления, они ортогональны и сопряжены. Следовательно, $F=0$ и $M=0$.

В заключение докажем следующую *теорему Родрига*.

При дифференцировании по главному направлению на поверхности

$$d\boldsymbol{n} = -k_n\, d\boldsymbol{r},$$

где k_n — нормальная кривизна в этом направлении.

Доказательство. Введем координатную сеть u, v так, чтобы направление линии u в данной точке было главным и координатные линии в этой точке были ортогональны. Так как $\boldsymbol{n}^2=1$, то $\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}=0$, т. е. вектор $\boldsymbol{n}_u$ перпендикулярен $\boldsymbol{n}$, а значит, допускает разложение по векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$:

$$\boldsymbol{n}_u = \lambda \boldsymbol{r}_u + \mu \boldsymbol{r}_v.$$

Умножая это равенство скалярно на $\boldsymbol{r}_v$ и замечая, что $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=0$ (ортогональность), $\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{r}_v=-M=0$ (сопряженность), получаем $\mu=0$. Теперь, умножая это равенство на $\boldsymbol{r}_u$, получаем

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{r}_u = \lambda \boldsymbol{r}_u^2, \quad \text{т. е.} \quad -L=\lambda E.$$

Отсюда

$$-\lambda = \frac{L}{E},$$

а это нормальная кривизна поверхности в направлении u, т. е. k_n. Итак,

$$\boldsymbol{n}_u = -k_n \boldsymbol{r}_u.$$

Теорема доказана.

§ 7. Средняя и гауссова кривизна поверхности

Средней кривизной поверхности называется полусумма главных кривизн. *Полной или гауссовой кривизной* поверхности называется произведение главных кривизн.

В эллиптической точке поверхности главные кривизны одного знака, поэтому гауссова кривизна положительна. В гиперболической точке главные кривизны разных знаков, поэтому гауссова кривизна отрицательна. В параболической точке и точке уплощения гауссова кривизна равна нулю.

Найдем выражение для средней и гауссовой кривизны поверхности через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. В предыдущем параграфе мы получили два выражения для нормальной кривизны в главном направлении $du:dv$:

$$k_n = \frac{L\,du + M\,dv}{E\,du + F\,dv}, \qquad k_n = \frac{M\,du + N\,dv}{F\,du + G\,dv}.$$

Эти равенства можно переписать так:

$$L\,du + M\,dv - k_n(E\,du + F\,dv) = 0,$$
$$M\,du + N\,dv - k_n(F\,du + G\,dv) = 0.$$

Исключая из этих соотношений du и dv, получим

$$\begin{vmatrix} L-Ek_n & M-Fk_n \\ M-Fk_n & N-Gk_n \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(EG-F^2)k_n^2-(LG-2FM+NE)k_n+(LN-M^2)=0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня — k_n' и k_n'' — главные кривизны поверхности.

По свойству корней квадратного уравнения

$$\frac{k_n'+k_n''}{2}=\frac{LG-2FM+NE}{2(EG-F^2)},$$

$$k_n'k_n''=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

Таковы выражения для средней и гауссовой кривизны.

Понятие полной кривизны введено Гауссом с помощью другого определения. Оно состоит в следующем. Пусть P — произвольная точка поверхности и g — малая ее окрестность. Перенесем векторы единичных нормалей в точках области g параллельно так, чтобы они имели общее начало. Тогда их концы будут на единичной сфере и образуют некоторое множество $\bar{g}$ (сферическое изображение области g). По Гауссу полной кривизной поверхности в точке P называется предел отношения площади $\bar{g}$ к площади g, когда область g стягивается к точке P. Покажем, что такое определение полной кривизны поверхности дает для нее то же выражение, т. е. произведение главных кривизн. Для простоты доказательства ограничимся случаем эллиптической точки P.

Введем на поверхности в окрестности точки P координатную сеть u, v так, чтобы в точке P направления координатных линий были главными.

Площадь области g:

$$S(g)=\iint |\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v|\,du\,dv.$$

Площадь $\bar{g}$:

$$S(\bar{g})=\iint |\boldsymbol{n}_u \wedge \boldsymbol{n}_v|\,du\,dv.$$

Так как область интегрирования по переменным u, v в обоих формулах одна и та же, то

$$\lim_{g\to P}\frac{S(\bar{g})}{S(g)}=\frac{|\boldsymbol{n}_u \wedge \boldsymbol{n}_v|}{|\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v|}.$$

По теореме Родрига $\boldsymbol{n}_u=-k_n'\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{n}_v=-k_n''\boldsymbol{r}_v$.
Поэтому

$$\lim_{g\to P}\frac{S(\bar{g})}{S(g)}=k_n'k_n''.$$

Что и требовалось доказать.

§ 8. Пример поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны

Примером поверхности нулевой гауссовой кривизны является плоскость. У нее нормальная кривизна по любому направлению равна нулю. Поэтому и гауссова кривизна равна нулю.

Примером поверхности постоянной положительной кривизны является сфера. У нее нормальная кривизна по любому направлению равна $1/R$, где R — радиус сферы. Следовательно, гауссова кривизна равна $1/R^2$.

Построим пример поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Такую поверхность мы найдем среди поверхностей вращения.

Поверхностью вращения называется поверхность, которая получается при вращении плоской кривой около оси, лежащей в плоскости кривой. Сечения поверхности вращения плоскостями, проходящими через ее ось, называются *меридианами*, а сечения плоскостями, перпендикулярными оси — *параллелями.*

Так как поверхность вращения симметрична относительно плоскости любого меридиана, то направление по меридиану является главным направлением. Следовательно, направление по параллели является другим главным направлением.

Нормальной кривизной поверхности в направлении меридиана, очевидно, является кривизна меридиана. Нормальная кривизна в направлении параллели выражается через кривизну параллели по формуле Менье.

Примем ось поверхности за ось z и рассмотрим меридиан поверхности в плоскости xz. Пусть $x=x(z)$ — его уравнение. Нормальная кривизна поверхности в направлении меридиана

$$k_n'=\frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}}.$$

Нормальная кривизна в направлении параллели

$$k_n''=-\frac{1}{x(1+x'^2)^{1/2}},$$

где $1/x$ — кривизна параллели, а $1/(1+x'^2)^{1/2}$ — косинус угла между касательной к меридиану и осью поверхности (осью z). Отсюда гауссова кривизна поверхности

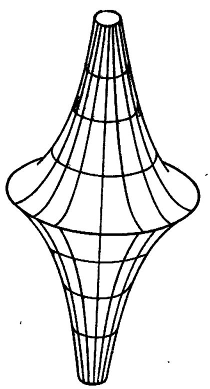


Рис. 102.

$$K=k_n'k_n''=-\frac{x''}{x(1+x'^2)^2}.$$

Умножая это уравнение на xx', получим

$$Kxx'=-\frac{x'x''}{(1+x'^2)^2}.$$

Интегрируя, получим:

$$Kx^2+c=\frac{1}{1+x'^2},$$

где c — постоянная. Для возможности дальнейшего интегрирования в элементарных функциях положим $c=1$. Тогда

$$Kx^2=-\frac{x'^2}{1+x'^2}.$$

Положим $x'=\operatorname{tg}\theta$. Имеем

$$Kx^2=-\sin^2\theta,\quad x=\frac{1}{\sqrt{-K}}\sin\theta.$$

Далее,

$$\frac{dz}{dx}=\operatorname{ctg}\theta,\quad dz=\frac{1}{\sqrt{-K}}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta=\frac{1}{\sqrt{-K}}\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)d\theta.$$

Отсюда

$$z=\frac{1}{\sqrt{-K}}\left(\cos\theta+\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)+c_1.$$

Постоянную c_1 можно принять равной нулю.

Итак, меридиан поверхности задается в параметрической форме:

$$x=\frac{1}{\sqrt{-K}}\sin\theta,\qquad z=\frac{1}{\sqrt{-K}}\left(\cos\theta+\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right).$$

Эта кривая называется *трактрисой*. А поверхность постоянной отрицательной кривизны, которая получается при ее вращении около оси z, называется *псевдосферой* (рис. 102).

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XI

1. Найти первую квадратичную форму поверхности вращения $x = \varphi(u)\cos v$, $y=\varphi(u)\sin v$, $z=\psi(u)$.

2. Показать, что поверхность вращения можно параметризовать так, что ее первая квадратичная форма будет иметь вид $du^2+G(u)\,dv^2$.

3. Найти длину кривой, заданной уравнением $u=v$, на поверхности с первой квадратичной формой $du^2+\operatorname{sh}^2 u\,dv^2$.

4. Найти угол, под которым пересекаются координатные линии $x=x_0$, $y=y_0$ на поверхности $z=axy$.

5. Показать, что на геликоиде $x=au\cos v$, $y=au\sin v$, $z=bv$ координатная сеть u, v ортогональна.

6. Найти кривые на сфере, пересекающие ее меридианы под постоянным углом (такие кривые называются *локсодромы*).

7. Найти площадь четырехугольника на геликоиде

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=v,$$

ограниченного кривыми $u=0$, $u=1$, $v=0$, $v=1$.

8. Показать, что площади областей на параболоидах $z=\frac{a}{2}(x^2+y^2)$, $z = axy$, проектирующихся на одну и ту же область плоскости xy, равны.

9. Показать, что если поверхность допускает такую параметризацию, при которой коэффициенты первой квадратичной формы не зависят от u и v, то эта поверхность локально изометрична плоскости.

10. Доказать, что существует конформное отображение поверхности вращения на плоскость, при котором меридианы поверхности переходят в прямые, проходящие через начало координат, а параллели — в круги с центром в начале координат. Рассмотреть частный случай:

$$x=\cos u\cos v,\qquad y=\cos u\sin v,\qquad z=\sin u \text{ (сфера)}.$$

11. Доказать, что существует конформное отображение сферы на плоскость при котором меридианы и параллели переходят в прямые $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$,

12. Показать, что существует изометрическое отображение геликоида $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=mv$ на катеноид $x=\alpha\cos\beta$, $y=\alpha\sin\beta$, $z = m\operatorname{arch}\frac{\alpha}{m}$, при котором прямолинейным образующим геликоида соответствуют меридианы катеноида.

13. Найти вторую квадратичную форму для винтовой поверхности $x = u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$.

14. Найти нормальную кривизну параболоида $z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$ в точке (0, 0) в направлении $dx:dy$.

15. Показать, что при любой параметризации плоскости вторая квадратичная форма тождественно равна нулю: при любой параметризации сферы вторая квадратичная форма пропорциональна первой.

16. Найти асимптотические линии на поверхности $z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

17. Определить асимптотические линии катеноида

$$x=\operatorname{ch}u\cos v,\qquad y=\operatorname{ch}u\sin v,\qquad z=u.$$

18. Показать, что на геликоиде одно семейство асимптотических состоит из прямых, а другое — из винтовых линий.

19. Доказать, что на поверхности переноса $r = U(u) + V(v)$ координатная сеть u, v является сопряженной.

20. Показать, что меридианы и параллели на поверхности вращения являются линиями кривизны.

21. Определить главные кривизны параболоида $z = axy$ в точке $(0, 0, 0)$

22. Определить линии кривизны на геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = cv.$$

23. Найти среднюю и гауссову кривизну параболоида $z = axy$ в точке $(0, 0, 0)$.

24. Доказать, что в эллиптических точках поверхности гауссова кривизна положительна, в гиперболических отрицательна, а в параболических точках и точках уплощения равна нулю.

25. Показать, что средняя кривизна у геликоида и у катеноида равна нулю.

26. Доказать, что гауссова кривизна у цилиндрической и конической поповерхности равна нулю.

27. Доказать, что гауссова кривизна поверхности, образованной касательными кривой, равна нулю.

28. Показать, что если средняя кривизна поверхности всюду равна нулю, то асимптотическая сеть ортогональна.

29. Показать, что если каждая точка поверхности является шаровой точкой, т. е. нормальная кривизна по любому направлению одинакова, то поверхность является сферой или частью сферы.

30. Поверхность Ф называется *параллельной* поверхности F, если она является геометрическим местом концов отрезков постоянной длины, отложенных на нормалях поверхности F. Концы этих отрезков считаются соответствующими точками поверхностей Ф и F. Показать, что:

а) касательные плоскости в соответствующих точках поверхностей F и Ф параллельны;

б) линиям кривизны поверхности F соответствуют линии кривизны поверхности Ф.

31. Выразить среднюю и гауссову кривизну параллельной поверхности через среднюю и гауссову кривизну данной поверхности.

32. Доказать, что сферическое отображение поверхности нулевой средней кривизны конформно.

ГЛАВА XII

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Гауссова кривизна как объект внутренней геометрии поверхностей

Под *внутренней геометрией* поверхности понимают раздел геометрии, в котором изучают свойства поверхности и фигур на ней, зависящие только от длин кривых на поверхности.

По отношению к регулярным поверхностям можно сказать, что их внутренняя геометрия изучает свойства, определяемые первой квадратичной формой. Таким образом, длины кривых на поверхности, углы между кривыми, площади областей являются объектами внутренней геометрии поверхности. Сейчас мы докажем, что *гауссова кривизна также является объектом внутренней геометрии, так как допускает выражение через коэффициенты только первой квадратичной формы поверхности.*

Имеем:

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

$$LN=\frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Перемножая определители по известным правилам, получим

$$LN=\frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} (\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_{vv}) & (\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u\mathbf{r}_{vv}) & E & F \\ (\mathbf{r}_v\mathbf{r}_{vv}) & F & G \end{vmatrix}.$$

Аналогично находим

$$M^2=\frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} (\mathbf{r}_{uv})^2 & (\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u\mathbf{r}_{uv}) & E & F \\ (\mathbf{r}_v\mathbf{r}_{uv}) & F & G \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$K=\frac{1}{EG-F^2}\left\{\begin{vmatrix} (\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_{vv})-(\mathbf{r}_{uv})^2 & (\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u\mathbf{r}_{vv}(& E & F \\ (\mathbf{r}_v\mathbf{r}_{vv}) & F & G \end{vmatrix}-\right.$$

$$\left.-\begin{vmatrix} 0 & (\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u\mathbf{r}_{uv}) & E & F \\ (\mathbf{r}_v\mathbf{r}_{uv}) & F & G \end{vmatrix}\right\}.$$

Дифференцируя выражения

$$\mathbf{r}_u^2=E,\quad \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v=F,\quad \mathbf{r}_v^2=G$$

по u и v, получим

$$\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u=\frac{1}{2}E_u,\qquad \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_v=\frac{1}{2}G_u,$$

$$\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u=\frac{1}{2}E_v,\qquad \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_v=F_u-\frac{1}{2}E_v,$$

$$\mathbf{r}_{vv}\mathbf{r}_v=\frac{1}{2}G_v,\qquad \mathbf{r}_{vv}\mathbf{r}_u=F_v-\frac{1}{2}G_u.$$

Дифференцируя теперь пятое равенство по v, а четвертое — по u и вычитая почленно, получим

$$\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_{vv}-\mathbf{r}_{uv}^2=-\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}.$$

Подставляя найденные значения в выражение для гауссовой кривизны, получим

$$K=\frac{1}{EG-F^2}\left\{\begin{vmatrix}\left(-\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}\right) & \frac{1}{2}E_u & \left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right)\\ \left(F_v-\frac{1}{2}G_u\right) & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\right\}.$$

Выражение для гауссовой кривизны только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные впервые получено Гауссом.

Заметим, что если поверхность параметризована так, что ее первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2=du^2+G\,dv^2,$$

то гауссова кривизна поверхности

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}\right)_{uu}.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться полученной выше формулой Гаусса.

Выражение гауссовой кривизны через коэффициенты только первой квадратичной формы и их производные доказывает, что первая и вторая квадратичные формы поверхности не независимы. Возникает естественный вопрос, не существует ли других зависимостей между коэффициентами этих форм. Оказывается, существуют еще две зависимости:

$$\begin{matrix}2\left(EG-F^2\right)\left(L_v-M_u\right)\\ -\left(EN-2FM+GL\right)\left(E_v-F_u\right)\end{matrix}+\begin{vmatrix}E & E_u & L\\ F & F_u & M\\ G & G_u & N\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{matrix}2\left(EG-F^2\right)\left(M_v-N_u\right)\\ -\left(EN-2FM+GL\right)\left(F_v-G_u\right)\end{matrix}+\begin{vmatrix}E & E_v & L\\ F & F_v & M\\ G & G_v & N\end{vmatrix}=0.$$

Они были получены К. М. Петерсоном и Кодацци. Других зависимостей между коэффициентами первой и второй квадратичной формы поверхности нет. Это следует из *теоремы Бонне*:

Пусть

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,\qquad L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$$

— две любые квадратичные формы, из коих первая является положительно определенной. Тогда, если для коэффициентов этих форм выполняются зависимости Гаусса—Петерсона—Кодацци, то существует, и притом единственная, с точностью до положения в пространстве поверхность, для которой эти формы являются первой и соответственно второй квадратичной формами.

§ 2. Геодезические линии на поверхности

Кривая на поверхности называется *геодезической*, если ее главная нормаль в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, совпадает с нормалью к поверхности.

Составим дифференциальное уравнение геодезических. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ — какая-нибудь параметризация геодезической. Так как векторы $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ лежат в соприкасающейся плоскости, то

$$(\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}'\boldsymbol{n})=0. \qquad (*)$$

На кривой локально всегда можно взять в качестве параметра u или v. Если на геодезической взять в качестве параметра u, то

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{r}_v v',$$
$$\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{r}_{uu}+2\boldsymbol{r}_{uv}v'+\boldsymbol{r}_{vv}v'^2+\boldsymbol{r}_v v''.$$

Подставляя эти выражения для $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ в уравнение $(*)$ и решая его относительно v'', получим

$$v''=\frac{1}{(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{r}_{uu}+2\boldsymbol{r}_{uv}v'+\boldsymbol{r}_{vv}v'^2 \quad \boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{r}_v v' \quad \boldsymbol{n}).$$

Мы видим, что дифференциальное уравнение геодезических является уравнением второго порядка. Из теоремы существования и единственности решений уравнения второго порядка следует, что *через каждую точку поверхности в любом направлении проходит, и притом только одна, геодезическая.*

Прямые на плоскости, очевидно, являются геодезическими. Так как на плоскости через любую точку и в любом направлении проходит прямая, то прямыми исчерпываются все геодезические на плоскости. Аналогично на сфере геодезическими являются большие круги и только они.

Параметризация поверхности называется *полугеодезической*, если одно семейство координатных линий состоит из геодезических, а второе ему ортогонально. Выясним, какой вид имеет линейный элемент поверхности в полугеодезической параметризации. Пусть, например, семейство линий u является геодезическим. Тогда

$$(\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n})=0. \qquad (**)$$

Разложим вектор $\boldsymbol{r}_{uu}$ по некомпланарным векторам $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ и $\boldsymbol{n}$. Имеем

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\alpha\boldsymbol{r}_u+\beta\boldsymbol{r}_v+\gamma\boldsymbol{n}. \qquad (***)$$

Подставляя это выражение $\boldsymbol{r}_{uu}$ в уравнение $(**)$, получим $\beta(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})=0$, т. е. $\beta=0$.

Умножая равенство $(***)$ скалярно на $\boldsymbol{r}_v$ и замечая, что $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=F=0$ (сеть ортогональная), получим

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v=\beta\boldsymbol{r}_v^2=0.$$

Но

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v=(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)_u-\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_u^2)_v=-\frac{1}{2}E_v=0.$$

Следовательно, E зависит только от u.

Введем новый параметр $\bar{u}$, полагая

$$d\bar{u}=\sqrt{E}\,du.$$

Тогда линейный элемент

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2$$

примет вид

$$ds^2=d\bar{u}^2+G\,dv^2.$$

Оказывается, полугеодезическую параметризацию на поверхности можно ввести всегда и притом с большим произволом. Именно, *если γ—любая кривая на поверхности, то в ее окрестности можно ввести полугеодезическую параметризацию, у которой одно семейство координатных линий—геодезические ортогональные* γ. Мы не будем приводить доказательство этой теоремы.

§ 3. Экстремальное свойство геодезических

Докажем следующее экстремальное свойство геодезических.

Геодезическая на достаточно малом отрезке является кратчайшей среди всех близких к ней кривых, соединяющих те же точки.

Доказательство. Пусть γ—геодезическая, P—точка на ней и A, B—точки на геодезической, близкие к P. Докажем, что любая кривая, соединяющая точки A и B, близкая к γ, будет иметь длину бо́льшую, чем отрезок AB геодезической γ.

Проведем через точку P геодезическую $\bar{\gamma}$, перпендикулярную γ. Введем в окрестности точки P полугеодезическую параметризацию, взяв за семейство линий u геодезические, ортогональные $\bar{\gamma}$.

Пусть $\tilde{\gamma}$—любая кривая в параметризованной окрестности, соединяющая точки A и B. Ее длина

$$s=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{du^2+G\,dv^2}>\int_{(A)}^{(B)}|du|\geqslant|u(B)-u(A)|.$$

А $|u(B)-u(A)|$—это длина отрезка AB геодезической γ. Теорема доказана.

Экстремальное свойство геодезических позволяет получить их уравнения как уравнения вариационной задачи для функционала

$$s=\int\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}.$$

Эти уравнения содержат только коэффициенты первой квадратичной формы E, F, G и их производные. А это значит, что *геодезические являются объектом внутренней геометрии поверхностей.*

§ 4. Поверхности постоянной гауссовой кривизны

Пусть Φ — поверхность постоянной гауссовой кривизны K и P — точка на этой поверхности. Проведем через точку P произвольную геодезическую $\bar{\gamma}$ и введем в окрестности точки P полугеодезическую параметризацию, приняв за семейство линий u геодезические, ортогональные $\bar{\gamma}$. При этом линейный элемент поверхности будет иметь вид

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2.$$

Возьмем в качестве параметра v дугу вдоль геодезической $\bar{\gamma}$. Тогда вдоль $\bar{\gamma}$, т. е. при $u=0$, $G\,(0,\ v) = 1$. Покажем, что на $\bar{\gamma}$ $G_u = 0$.

Так как $\bar{\gamma}$ геодезическая, то $(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}) = 0$. Разложим вектор $\boldsymbol{r}_{vv}$ по векторам $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$. Получим

$$\boldsymbol{r}_{vv} = \alpha\boldsymbol{r}_u + \beta\boldsymbol{r}_v + \gamma\boldsymbol{n}. \qquad (*)$$

Подставляя это выражение в уравнение $(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}) = 0$, получим $\alpha(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}) = 0$, т. е. $\alpha = 0$.

Умножая равенство $(*)$ на $\boldsymbol{r}_u$, получим $\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u = 0$. Но $\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u = (\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)_v - \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_v^2)_u = -\frac{1}{2}G_u$. Следовательно, вдоль $\bar{\gamma}$, т. е. при $u=0$, $G_u = 0$.

Гауссова кривизна поверхности с линейным элементом $du^2 + G\,dv^2$, как известно, выражается по формуле

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

Остюда следует, что для поверхности постоянной гауссовой кривизны K коэффициент G удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0. \qquad (**)$$

Будем различать три случая:

$$1)\ K > 0;\quad 2)\ K < 0;\quad 3)\ K = 0.$$

В первом случае общий вид $\sqrt{G}$, удовлетворяющего уравнению $(**)$, будет

$$\sqrt{G} = A\,(v)\cos\sqrt{K}u + B\,(v)\sin\sqrt{K}u.$$

Так как $G\,(0,\ v) = 1$ и $G_u\,(0,\ v) = 0$, то $A\,(v) = 1$ и $B\,(v) = 0$. Таким образом, в случае $K > 0$ существует параметризация поверхности, при которой первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\sqrt{K}u\,dv^2.$$

Аналогично, во втором случае

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2\sqrt{-K}u\,dv^2.$$

Наконец, в третьем случае

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Отсюда следует, что *поверхности постоянной одинаковой гауссовой кривизны локально изометричны.* В частности, поверхности постоянной положительной гауссовой кривизны K локально изометричны сфере радиуса $1/\sqrt{K}$, поверхности нулевой гауссовой кривизны локально изометричны плоскости, поверхности постоянной отрицательной кривизны локально изометричны псевдосфере.

§ 5. Теорема Гаусса — Бонне

Пусть γ — кривая на поверхности и P — точка на ней. *Геодезической кривизной* кривой γ в точке P называется кривизна проекции этой кривой на касательную плоскость в точке P. Для геодезической кривизны кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ получается формула:

$$\varkappa=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'|^3}(\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}'\boldsymbol{n}).$$

Из этой формулы видно, что *геодезическая имеет равную нулю геодезическую кривизну*. Оказывается, что геодезическая кривизна также является объектом внутренней геометрии поверхности.

Имеет место следующая *теорема Гаусса — Бонне. Пусть G — гомеоморфная кругу область на поверхности, ограниченная регулярной кривой γ. Тогда*

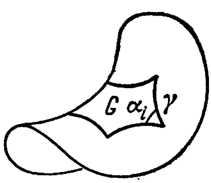


Рис. 103.

$$\int_\gamma \varkappa\, ds=2\pi-\iint_G K\, d\sigma.$$

Здесь слева интегрирование по дуге s кривой γ, а справа — по площади области G. Причем геодезическая кривизна $\varkappa$ считается положительной там, где кривая γ обращена выпуклостью наружу области G, и отрицательной там, где она обращена выпуклостью внутрь.

В случае, если кривая γ кусочно гладкая с внутренними углами в точках излома α_i (рис. 103),

$$\int_\gamma \varkappa\, ds+\sum_i(\pi-\alpha_i)=2\pi-\iint_G K\, d\sigma.$$

Здесь при интегрировании по γ точки нарушения гладкости исключаются.

В случае геодезического треугольника (стороны треугольника — геодезические)

$$\pi-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=-\iint_G K\, d\sigma.$$

В частности, для сферического треугольника

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi=\frac{\sigma}{R^2},$$

где R — радиус сферы, а σ — площадь треугольника.

§ 6. Замкнутые поверхности

Простая поверхность называется *замкнутой*, если она конечна и не имеет границы.

Пусть F — простая замкнутая поверхность. Разобьем ее на многоугольные, гомеоморфные кругу, области g_k так, чтобы любые две области этого разбиения либо не имели общих точек, либо имели общую вершину, либо общую сторону. Применим к каждой из областей g_k формулу Гаусса—Бонне. Получим

$$\int \varkappa^k\, ds + \sum_i (\pi - \alpha_i^k) = 2\pi - \iint_{g_k} K\, d\sigma.$$

Сложим все эти равенства. Тогда в правой части получим

$$2\pi f_2 - \iint_F K\, d\sigma,$$

где f_2—число областей g_k. Посмотрим, что получится в левой части равенства. Первые слагаемые при суммировании взаимно сокращаются, так как сторона многоугольника g_k является стороной другого многоугольника $g_{k'}$, а $\varkappa^k = -\varkappa^{k'}$. При суммировании углов α_i^k (по i и по k) получается сумма всех углов всех областей. Эту сумму найти просто, если сначала найти сумму углов с общей вершиной (она равна 2π). Поэтому сумма всех углов α_i^k равна $2\pi f_0$, где f_0—число вершин разбиения поверхности на многоугольные области.

В каждую сумму

$$\sum_i (\pi - \alpha_i^k)$$

слагаемые π входят столько раз, сколько вершин у многоугольной области g_k, или, что то же самое, сколько сторон у этой области. Поэтому при сложении этих сумм слагаемое π повторится столько раз, сколько сторон у разбиения поверхности F на области g_k, да еще умноженное на два, так как каждая сторона принадлежит двум областям разбиения. Итак, результат нашего сложения можно представить в следующем виде:

$$2\pi f_1 - 2\pi f_0 = 2\pi f_2 - \iint_F K\, d\sigma.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{2\pi} \iint_F K\, d\sigma = f_2 - f_1 + f_0. \qquad (*)$$

Целое число

$$\chi(F) = f_2 - f_1 + f_0 \qquad (**)$$

называется *эйлеровой характеристикой поверхности*. Из формулы (*) следует, что *эйлерова характеристика не зависит от разбиения поверхности на многоугольные области*.

Понятие эйлеровой характеристики, определяемое по формуле (**), имеет смысл для любой простой поверхности, не обязательно регулярной. Доказывается, что *и в этом общем случае* *она не зависит от способа разбиения поверхности.* Так как при топологическом преобразовании поверхности F в поверхность F' разбиение на многоугольные области поверхности F переходит в разбиение на многоугольные области поверхности F', причем сохраняются числа f_2, f_1, f_0, то *при топологическом преобразовании поверхности эйлерова характеристика не изменяется.*

Найдем эйлерову характеристику выпуклого многогранника (имеется в виду поверхность многогранника). Любой выпуклый многогранник можно получить топологическим преобразованием сферы. Для этого достаточно сферу с центром внутри многогранника спроектировать на поверхность многогранника. Отсюда следует, что эйлерова характеристика выпуклого многогранника равна 2. Поэтому, *если число вершин выпуклого многогранника обозначить α_0, число ребер α_1 и число граней α_2, то*

$$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2$$

(*теорема Эйлера*).

В связи с тем, что при топологическом преобразовании поверхности эйлерова характеристика не изменяется, естественно возникает вопрос: в какой степени эйлерова характеристика характеризует простую поверхность. Оказывается, что *простые поверхности с одной и той же эйлеровой характеристикой топологически преобразуются друг в друга.*

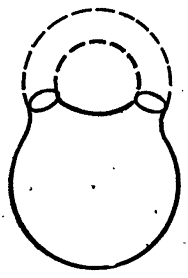


Рис. 104.

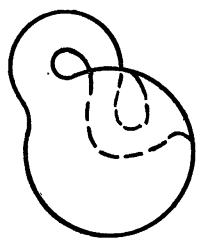


Рис. 105.

Приведем примеры различных топологических типов простых поверхностей. Представим себе сферу, выполненную из эластичного материала. Сделаем в ней два круглых отверстия. Оттянем края этих отверстий и соединим их, как показано на рис. 104. Замкнутая поверхность, которая при этом получается, называется сферой с ручкой. Аналогично получается сфера с двумя и большим числом ручек. Эйлерова характеристика сферы с p ручками равна $2-2p$. В частности, у тора эйлерова характеристика равна нулю. Оказывается любая замкнутая простая поверхность получается топологическим преобразованием сферы с ручками.

Можно присоединить к сфере ручку другим способом. Именно, оттягивая край одного отверстия сначала наружу, заведем его затем внутрь сферы и присоединим к краю другого отверстия, как это показано на рис. 105. Фигуру, которая при этом получается, нельзя считать поверхностью в смысле нашего определения, так как, оказывается, не существует простой поверхности, из которой она получалась бы локально топологическим преобразованием. Однако такие поверхности существуют в четырехмерном пространстве. Поэтому, несколько обобщив понятие поверхности, мы можем и такие фигуры считать общими поверхностями.

О поверхности, которую мы построили, говорят, что она получается присоединением к сфере ручки второго рода. Эта поверхность односторонняя. Следуя по ней, можно перейти изнутри сферы наружу и обратно. Односторонние поверхности называются также неориентируемыми.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XII

1. Показать, что если линейный элемент поверхности $ds^2=\lambda(du^2+dv^2)$, то гауссова кривизна поверхности

$$K=-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial v^2}\right).$$

2. Показать, что если линейный элемент поверхности $ds^2=du^2+$ $+2\cos\omega\, du\, dv+dv^2$, то гауссова кривизна поверхности

$$K=-\frac{\omega_{uv}}{\sin\omega}.$$

3. Доказать, что если координатная сеть состоит из линий кривизны, то формулы Петерсона — Кодацци принимают вид

$$L_v=HE_v, \qquad N_u=HG_u.$$

4. Доказать, что поверхность нулевой средней кривизны можно параметризовать так, что ее первая и вторая формы будут иметь вид

$$\mathrm{I}=\lambda(du^2+dv^2),$$
$$\mathrm{II}=du^2-dv^2.$$

5. Показать, что если геодезическая линия является одновременно асимптотической, то она прямая.

6. Показать, что если геодезическая линия является одновременно линией кривизны, то она плоская.

7. Доказать, что геодезические на цилиндрической поверхности пересекают прямолинейные образующие под постоянным углом.

8. Найти геодезические линии на поверхности с линейным элементом $ds^2=$ $=\dfrac{du^2+dv^2}{v^2}$.

9. Доказать, что цилиндрическая и коническая поверхности и поверхность, образованная касательными к пространственной кривой, локально изометричны плоскости.

10. Из вершины выпуклого многогранного угла описана сфера единичного радиуса. Найти площадь сферы внутри угла, если сумма двугранных углов равна α.

11. Доказать, что у геодезического треугольника на поверхности положительной гауссовой кривизны сумма углов больше π, а на поверхности отрицательной кривизны — меньше π.

12. Доказать, что на поверхности отрицательной гауссовой кривизны $K\leqslant$ $\leqslant -a^2$ площадь любого геодезического треугольника не больше π/a^2.

13. Найти эйлерову характеристику тора.

14. Чему равна эйлерова характеристика замкнутой поверхности, топологически эквивалентной сфере с n ручками первого рода.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

ГЛАВА XIII

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК ОБОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. «Начала» Евклида

Геометрия как эмпирическая наука в ранний период достигла особенно высокого уровня развития в Египте в связи с землемерными и ирригационными работами.

В первом тысячелетии до н. э. геометрические сведения от египтян перешли к грекам, в Греции начался новый этап в развитии геометрии. За период с VII по III век до н. э. греческие геометры не только обогатили геометрию многочисленными новыми фактами, но предприняли также серьезные шаги к строгому ее логическому обоснованию.

Многовековая работа греческих геометров за этот период была подытожена и систематизирована Евклидом (330—275 гг. до н. э.) в его знаменитом труде «Начала». Это сочинение дает первое дошедшее до нас строгое логическое построение геометрии. Изложение в нем настолько безупречно для своего времени, что в течение двух тысяч лет с момента появления «Начал» оно было единственным руководством для изучающих геометрию.

«Начала» включают тринадцать книг, из коих собственно геометрии посвящены книги I—IV и VI, где излагается планиметрия, а также XI—XIII, охватывающие стереометрию. Остальные книги «Начал» посвящены арифметике в геометрическом изложении.

Каждая книга «Начал» начинается определением понятий, которые встречаются впервые. Так, например, в первой книге даны 23 определения. В частности,

Определение 1. *Точка есть то, что не имеет частей.*

Определение 2. *Линия есть длина без ширины.*

Определение 3. *Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.*

В первой книге «Начал» за определениями следуют постулаты и аксиомы. Например:

Постулат I. *Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую.*

Постулат V. *Требуется, чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.*

Аксиома I. *Равные порознь третьему равны между собой.*

Аксиома II. *Если к равным прибавим равные, то получим равные.*

И постулаты, и аксиомы представляют собой утверждения, принимаемые без доказательства. По какому принципу одни утверждения относятся к постулатам, а другие к аксиомам, неизвестно.

Вслед за аксиомами идут теоремы и задачи на построение под общим названием «предложения», расположенные в строгой последовательности так, что доказательство (решение) каждого последующего предложения опирается на предыдущие. Вот одно из этих предложений.

Если в двух треугольниках две стороны одного равны двум сторонам другого и углы, содержащиеся между равными сторонами, равны, то и основание одного треугольника равно основанию другого, и один треугольник равен другому, и остальные углы одного треугольника равны остальным углам другого, именно, равны углы, противолежащие равным сторонам.

Хотя «Начала» Евклида и были в течение длительного времени образцом для сравнения, они далеко не достигают уровня современной строгости изложения. Данные в первой книге определения геометрических образов являются скорее описанием их, причем далеко не совершенным. Так, например, определение 3 прямой линии не отличает ее от окружности, а определение 2 произвольной линии содержит упоминание о длине и ширине, которые сами нуждаются в определении.

Не следует думать, однако, что дефектны все определения, предпосланные первой книге «Начал». Напротив, целый ряд определений, в том числе окружности, треугольника, прямого, острого и тупого угла, либо безупречны, либо содержат незначительные, легко устранимые недостатки. Если при этом учесть, что свойства геометрических образов, содержащиеся в дефектных определениях, нигде в доказательствах не используются, то эти определения могут быть опущены без ущерба для изложения.

Что касается постулатов и аксиом, то их формулировки безупречны, содержащиеся в них утверждения существенны и составляют основу следующих за ними доказательств.

Обратимся, наконец, к доказательствам. По замыслу автора «Начал» доказательства всех предложений должны в конечном счете опираться на свойства геометрических образов, определяемые постулатами и аксиомами. Однако уже беглое знакомство с доказательствами Евклида убеждает нас в том, что в них неоднократно используются такие свойства геометрических образов и отношения между ними, которые не выясняются ни постулатами, ни аксиомами. Так, например, в доказательстве упомянутого выше предложения о равенстве треугольников Евклид пользуется движением, а в ряде других доказательств ссылается на свойства взаимного расположения точек на прямой, выражаемые словами «лежать между».

Возникает естественный вопрос, нельзя ли освободить евклидовы доказательства от этого недостатка, заменив, может быть, их другими, опирающимися только на постулаты и аксиомы. Ответ на этот вопрос был получен сравнительно недавно. Оказалось, что это возможно сделать только после надлежащего пополнения системы постулатов и аксиом Евклида.

§ 2. Попытки доказательства пятого постулата

Некоторые из указанных выше недостатков «Начал» Евклида были отмечены уже древними греками, в связи с чем предпринимались попытки улучшить изложение «Начал». Главная задача, которую при этом ставили, заключалась в том, чтобы свести систему постулатов и аксиом Евклида до минимума.

Естественный путь для решения этой задачи состоит в том, чтобы некоторые из постулатов и аксиом вывести из остальных. Именно таким путем «Начала» были освобождены от четвертого постулата, в котором идет речь о равенстве всех прямых углов.

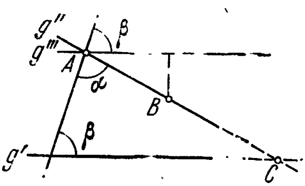


Рис. 106.

Однако все попытки освободиться таким образом от пятого постулата были безрезультатными, хотя этим вопросом занимались геометры в течение более двух тысяч лет. Типичной ошибкой большинства доказательств пятого постулата являлось сознательное или бессознательное использование какого-либо утверждения, не содержащегося явно в остальных постулатах и аксиомах и не вытекающего из них.

Вот, например, доказательство Прокла.

Дано: $\alpha+\beta<2d$ (см. рис. 106). Требуется доказать, что прямые g' и g'' пересекаются в некоторой точке C.

Проведем через точку A прямую g''', параллельную g'. Возьмем на прямой g'' точку B и опустим из нее перпендикуляр на g'''. Так как при удалении точки B от A ее расстояние от g''' неограниченно растет, *а расстояние между параллельными прямыми g' и g''' постоянно*, то на g'' найдется точка C, принадлежащая g'. В этой точке и пересекаются прямые g' и g''.

Используемое в этом доказательстве свойство параллельных прямых не содержится явно в остальных постулатах и аксиомах. Более того, оно из них не может быть выведено.

Существует бесчисленное множество других утверждений, с помощью которых можно было бы доказать пятый постулат.

Например:

1. *Все перпендикуляры к одной стороне некоторого острого угла пересекают его другую сторону.*

2. *Существуют подобные и неравные треугольники.*

3. *Существуют треугольники сколь угодно большой площади.*

4. *Существуют треугольники с суммой углов, равной двум прямым.*

5. *Через точку вне данной прямой можно провести не более одной прямой, ей параллельной.*

Хотя попытки доказательства пятого постулата и не привели к желанному результату, они сыграли, безусловно, положительную роль в развитии геометрии, так как в ряде случаев обогатили ее новыми интересными теоремами, доказательство которых не опирается на пятый постулат. Одна из таких теорем, доказанная Лежандром, гласит:

В каждом треугольнике сумма углов не больше двух прямых.

§ 3. Открытие неевклидовой геометрии

Один из обнадеживающих способов подхода к доказательству пятого постулата, которым пользовались многие геометры XVIII и первой половины XIX вв. состоял в следующем.

Пятый постулат заменяется его отрицанием или каким-либо утверждением, эквивалентным отрицанию. Опираясь на измененную таким образом систему постулатов и аксиом, доказываются всевозможные предложения, логически из нее вытекающие, подобно тому, как это делается в «Началах». Если пятый постулат действительно вытекает из остальных постулатов и аксиом, то измененная указанным образом система постулатов и аксиом противоречива. Поэтому рано или поздно мы придем к двум взаимно исключающим выводам. Этим и будет доказан пятый постулат.

Именно таким путем пытались доказать пятый постулат Саккери, Ламберт и Лежандр.

Саккери (1733 г.) рассматривает четырехугольник с двумя прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами (рис. 107).

Относительно двух других углов этого четырехугольника, которые, как легко видеть, равны, могут быть три гипотезы: оба угла прямые, тупые или острые.

Саккери доказывает, что гипотеза прямого угла эквивалентна пятому постулату, т. е. постулировав ее, можно доказать пятый постулат, и наоборот, приняв пятый постулат, доказать гипотезу прямого угла. Постулировав гипотезу тупого угла, Саккери приходит к противоречию и, наконец, постулирует гипотезу острого угла.

Здесь Саккери получает различные следствия, абсурдные с точки зрения привычных геометрических представлений. Например, *параллельные прямые имеют либо только один общий перпендикуляр, в обе стороны от которого неограниченно расходятся, либо не* *имеют ни одного, и, сближаясь асимптотически в одном направлении, неограниченно расходятся в другом.*

Саккери не делает заключения о противоречии только на том основании, что полученные им выводы не соответствуют привычным представлениям о расположении прямых, и упорно ищет логическое противоречие. Такое противоречие им в конце концов было «найдено», однако, в результате вычислительной ошибки.

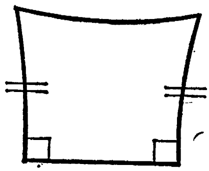


Рис. 107.

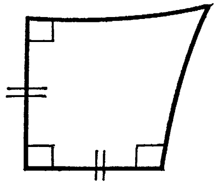


Рис. 108.

Аналогичную конструкцию рассматривал Ламберт (1766 г.). Он брал четырехугольник с тремя прямыми углами (рис. 108) и подобно Саккери рассматривал три гипотезы для угла при четвертой вершине. Ламберт доказал, что гипотеза прямого угла эквивалентна пятому постулату, гипотеза тупого угла невозможна, а постулировав гипотезу острого угла подобно Саккери, получил многочисленные следствия, обнаруживающие парадоксальные свойства в расположении прямых.

Ламберт, так же как и Саккери, не усматривает в этом противоречия. Логического же противоречия ему найти не удалось, и гипотеза острого угла им так и не была отвергнута.

Развивая систему следствий гипотезы острого угла, Ламберт обнаружил аналогию этой системы с геометрией на сфере и высказывает правильное предположение о том, что «эта гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сфере». Среди геометров XVIII в. Ламберт ближе всех стоял к правильному решению вопроса о пятом постулате.

Лежандр в своем «доказательстве» пятого постулата рассматривал три гипотезы относительно суммы углов треугольника:

1. Сумма углов треугольника равна двум прямым.
2. Сумма углов треугольника больше двух прямых.
3. Сумма углов треугольника меньше двух прямых.

Лежандр доказал, что первая гипотеза эквивалентна пятому постулату, вторая гипотеза невозможна; приняв, наконец, третью гипотезу, также приходит к противоречию, неявно воспользовавшись в доказательстве пятым постулатом через один из его эквивалентов.

Великий русский математик Н. И. Лобачевский (1792—1856 гг.), которому принадлежит честь открытия новой геометрии — геометрии Лобачевского, также начал с попытки доказательства пятого постулата.

Как указано выше (§ 2), один из эквивалентов пятого постулата состоит в утверждении, что через точку вне данной прямой проходит не более одной прямой, параллельной данной. Лобачевский заменил пятый постулат следующим:

Через точку вне прямой на плоскости проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную.

Подобно предшественникам, Лобачевский имел надежду обнаружить противоречие в системе следствий так измененной системы Евклида. Однако, развив свою систему до объема «Начал», Лобачевский не обнаружил в ней противоречий, и на этом основании сделал замечательный вывод о существовании геометрии, отличной от геометрии Евклида, в которой пятый постулат не имеет места. Это было в 1826 году.

На первый взгляд вывод Лобачевского может показаться недостаточно обоснованным. В самом деле, где гарантия того, что, развивая его систему дальше, мы, наконец, не придем к противоречию. Однако это возражение в равной степени относится и к геометрии Евклида. Так что с точки зрения логической непротиворечивости обе геометрии находятся в равном положении. Более того, как показали исследования геометров после Лобачевского, между этими геометриями существует тесная связь и логическая непротиворечивость одной находится в зависимости от логической непротиворечивости другой.

Таким образом, обе геометрии — Евклида и Лобачевского — как логические системы равноправны. Вопрос о том, какая из этих геометрий лучше отражает пространственные отношения в окружающем нас мире, может быть решен только опытом. Это понимал и сам Лобачевский, который с этой целью произвел измерения суммы углов астрономического треугольника.

Лобачевский был первым, но не единственным геометром, открывшим существование геометрии, отличной от геометрии Евклида.

К выводу о существовании новой геометрии пришел также Гаусс, о чем свидетельствуют его высказывания в письмах к современникам.

Три года спустя после выхода в свет работы Лобачевского венгерский математик Янош Бояи (1822—1860 гг.), не зная об исследованиях Лобачевского, опубликовал работу, в которой излагал ту же теорию, что и Лобачевский, но в менее развитой форме.

§ 4. Работы по основаниям геометрии во второй половине XIX века

Немногие из современников Лобачевского поняли и признали сделанное им открытие. Большинство, а среди них многие крупные математики, относились к нему скептически.

Общему признанию геометрии Лобачевского в значительной степени способствовали работы геометров после Лобачевского. Среди этих работ прежде всего надо упомянуть работу Бельтрами (1862 г.). Бельтрами доказал, что на поверхности постоянной отрицательной кривизны имеет место плоская геометрия Лобачевского, если прямые Лобачевского мыслить себе как геодезические линии, а движение понимать в смысле изометрического наложения поверхности на себя.

Этот результат был воспринят как доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Действительно, противоречию в геометрии Лобачевского соответствовало бы в указанной интерпретации противоречие в теории поверхностей евклидова пространства, т. е. противоречие в евклидовой геометрии.

Уязвимым местом доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского, основанного на интерпретации Бельтрами, было то, что, как показал Гильберт, в евклидовом пространстве не существует полной поверхности постоянной отрицательной кривизны без особенностей. И поэтому на поверхности постоянной отрицательной кривизны можно интерпретировать геометрию только части плоскости Лобачевского. Этот недостаток был устранен в появившихся позже интерпретациях Пуанкаре и Клейна.

Интерпретация Клейна плоской геометрии Лобачевского осуществляется внутри круга на евклидовой плоскости, причем под прямыми понимаются хорды этого круга, а движениями называются коллинеации, сохраняющие окружность круга. Основанное на этой интерпретации доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского безупречно. Мы воспроизводим его в гл. XV.

Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского было вместе с тем доказательством независимости пятого постулата от остальных постулатов и аксиом Евклида. Действительно, если бы пятый постулат был следствием остальных постулатов и аксиом, то геометрия Лобачевского была бы противоречива, так как содержала бы два взаимно исключающих утверждения — постулат Лобачевского и пятый постулат Евклида.

Общая тенденция к строгости в математике, которой отмечены работы второй половины девятнадцатого века, и решение проблемы, связанной с пятым постулатом, поставили перед геометрами задачу полного исследования системы аксиом геометрии. Эти исследования показали, что система аксиом Евклида далеко не совершенна. И прежде всего, она не полна. Как мы увидим позже, в ней опущены целые группы аксиом, совершенно необходимые для проведения безупречных доказательств.

В связи с этим геометры второй половины XIX в. пополнили систему аксиом Евклида недостающими аксиомами. Так, Паш (1882 г.) пополнил систему аксиом Евклида группой аксиом порядка. Одна из этих аксиом носит его имя (аксиома Паша).

Исследование аксиоматики евклидовой геометрии было завершено Гильбертом (1899 г.). Система аксиом, данная Гильбертом, состоит из пяти групп: аксиомы принадлежности, аксиомы порядка, аксиомы конгруэнтности, аксиомы непрерывности и аксиома параллельных. Аксиомы этих пяти групп относятся к объектам трех родов — точкам, прямым, плоскостям и трем отношениям между ними, выражаемым словами «принадлежит», «между», «конгруэнтен». Что такое точка, прямая и плоскость, и каков конкретный смысл указанных отношений, Гильберт не уточняет. И все, что предполагается известным о них, это то, что выражено в аксиомах. Благодаря этому, построенная на основе аксиом Гильберта геометрия допускает конкретные реализации, очень далекие от привычных представлений.

Гильберт подверг предложенную им систему аксиом глубокому и всестороннему исследованию. В частности, он доказал, что его система аксиом непротиворечива, если непротиворечива арифметика. Далее, Гильберт доказал независимость некоторых аксиом, помимо аксиомы параллельных. Наконец, Гильберт исследовал вопрос о том, как далеко можно развить геометрию, если класть в ее основу те или иные группы аксиом, на которые вся система расчленяется.

Работой Гильберта были в основном завершены многовековые исследования по обоснованию элементарной геометрии. Эта работа получила очень высокую оценку современников и была отмечена премией имени Лобачевского в 1903 г.

§ 5. Система аксиом евклидовой геометрии по Гильберту

Система аксиом евклидовой геометрии по Гильберту состоит из пяти групп: аксиомы принадлежности, аксиомы порядка, аксиомы конгруэнтности, аксиома параллельных, аксиомы непрерывности.

Аксиомы принадлежности определяют свойства взаимного расположения точек, прямых и плоскостей, выражаемые словом «принадлежит» или ему эквивалентными.

I_1. Для любых двух точек A и B существует прямая a, принадлежащая каждой из этих двух точек.

I_2. Для двух точек A и B существует не более одной прямой, принадлежащей каждой из точек A, B.

I_3. На прямой существует по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_4. Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, существует плоскость α, принадлежащая каждой из трех точек A, B, C. Для любой плоскости всегда существует принадлежащая ей точка.

I_5. Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной и той же прямой, существует не более одной плоскости, принадлежащей этим точкам.

I_6. Если две точки A, B прямой a лежат в плоскости α, то всякая точка прямой a лежит в плоскости α.

I_7. Если две плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют по крайней мере еще одну общую точку B.

I_8. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Аксиомы порядка выражают свойства взаимного расположения точек на прямой и плоскости, определяя термин «между».

II_1. Если точка B лежит между точками A и C, то A, B, C — различные точки и B лежит также между C и A.

II_2. Для любых двух точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна точка B такая, что точка C лежит между A и B.

II_3. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Отношение «лежать между» для точек на прямой позволяет обычным образом определить понятие отрезка.

II_4. Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая a проходит через одну из точек отрезка AB, то она должна пройти через одну из точек отрезка AC или через одну из точек отрезка BC. (Аксиома Паша)

Аксиомы конгруэнтности определяют понятие «конгруэнтности» или равенства для отрезков и углов.

III_1. Если A и B суть различные точки на прямой a и A' — точка на той же прямой или на другой прямой a', то всегда можно найти точку B', лежащую по данную от точки A' сторону прямой a', и притом такую, что отрезок AB конгруэнтен, иначе говоря равен, отрезку $A'B'$.

III_2. Если два отрезка конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны друг другу.

III_3. Пусть AB и BC суть два отрезка прямой a, не имеющие ни одной общей точки, и пусть, далее, $A'B'$ и $B'C'$ суть два отрезка той же прямой или другой прямой a', также не имеющие общей точки; если при этом $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, то и $AC = A'C'$.

Угол определяется как фигура, состоящая из двух различных лучей, исходящих из одной точки.

III_4. От данной полупрямой в данную полуплоскость, определяемую этой полупрямой и ее продолжением, можно отложить, и притом только один, угол, конгруэнтный данному углу.

III_5. Если у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то у них $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

IV. *Аксиома параллельных*. Пусть a — произвольная прямая, и A — точка, лежащая вне ее; в таком случае в плоскости, определяемой прямой a и точкой A, существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a.

Аксиомы непрерывности.

V_1 *(Аксиома Архимеда)*. Пусть AB и CD — два каких-нибудь отрезка; тогда на прямой AB существует конечное число точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, что отрезки $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD и точка B лежит между A и A_n.

V_2 *(Аксиома линейной полноты)*. Точки прямой образуют систему, которая при сохранении линейного порядка, первой аксиомы о конгруэнтности и аксиомы Архимеда не допускает никакого расширения, т. е. к этой системе точек нельзя прибавить еще точки так, чтобы в системе, образованной первоначальными и добавленными точками, выполнялись все указанные аксиомы.

ГЛАВА XIV
СИСТЕМА АКСИОМ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИХ БЛИЖАЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ

§ 1. Основные понятия

Дедуктивное построение евклидовой геометрии, основанное на системе аксиом Евклида—Гильберта, довольно сложно. Трудности возникают уже в самом начале, при введении понятия меры для отрезков и углов. В связи с этим мы будем пользоваться другой системой аксиом, где эти трудности снимаются.

Основными понятиями в нашем изложении будут точка, прямая и плоскость, отношение принадлежности для точек, прямых и плоскостей, выражаемое словом «принадлежать», отношение порядка для точек на прямой, выражаемое словами «лежать между», «длина» для отрезков и «градусная мера» для углов. Эти понятия не определяются и все, что о них предполагается известным, выражается аксиомами.

Система аксиом, которой мы будем пользоваться, в основном совпадает с аксиоматикой школьного курса геометрии, но несколько ослаблена. В частности, в ней аксиома откладывания отрезка данной длины на полупрямой из ее начальной точки заменена более слабой аксиомой существования отрезка данной длины, а аксиома откладывания угла опущена вообще. В школьном изложении *) введение этих аксиом вызвано чисто методическими соображениями простоты изложения в начале курса.

По соображениям удобства изложения мы сначала формулируем плоские аксиомы. А затем вводим группу пространственных аксиом С. Плоские аксиомы естественно разбиты на группы в соответствии с основными понятиями: принадлежности, порядка и меры.

§ 2. Аксиомы принадлежности

Аксиомы принадлежности определяют свойства взаимного расположения точек и прямых, выражаемые словом «принадлежать». При этом считаются равнозначными выражения: «точка принадлежит прямой», «точка лежит на прямой», «прямая проходит через точку».

Если точка принадлежит двум прямым, то мы говорим, что прямые пересекаются в этой точке, или что эта точка является точкой пересечения прямых.

Группа аксиом принадлежности включает следующие две аксиомы.

Аксиома I_1. *Каковы бы ни были две точки, существует прямая, проходящая через эти точки, и притом только одна.*

---

*) Здесь и всюду в дальнейшем, когда речь идет о школьном изложении, имеется в виду изложение в учебнике автора: А. В. Погорелов. Геометрия 6—10.— М.: Просвещение, 1982.

Аксиома I_2. *На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.*

Из аксиомы I_1 следует, что *две прямые либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке.* Действительно, если бы прямые имели хотя бы две точки пересечения, то через эти точки проходили бы две прямые. А это противоречит аксиоме I_1. Согласно этой аксиоме через две точки проходит только одна прямая. Из аксиомы I_1 следует, что прямая полностью определяется заданием двух ее точек. Это дает основание для обозначения прямой двумя точками: например, прямая AB.

Из аксиомы I_2 следует, что *какова бы ни была прямая, существует точка, не лежащая на этой прямой.* Действительно, из трех точек, существование которых утверждается аксиомой I_2, по крайней мере одна не лежит на данной прямой.

В аксиоме школьного изложения предмета, соответствующей аксиоме I_2, требуется, чтобы на каждой прямой были точки (следовательно, по крайней мере две) и были точки вне прямой. В таком виде она воспринимается учащимся как нечто само собой разумеющееся. Формулировка аксиомы в форме I_2 с двумя точками на прямой может вызвать недоумение, так как наглядное представление учащегося о прямой предполагает существование бесконечного множества точек на прямой и вне ее.

§ 3 Аксиомы порядка

Аксиомы порядка выражают свойства взаимного расположения точек на прямой и на плоскости. При этом используется отношение взаимного расположения точек на прямой, выражаемое словами *«лежать между»*.

Аксиома II_1. *Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*

Выражение «точка B лежит между точками A и C» равнозначно выражениям: «точка B разделяет точки A и C» или «точки A и C лежат по разные стороны от точки B». Если точка B разделяет точки A и C, то по аксиоме II_1 точка A не разделяет точки B и C. Вместо этого можно сказать, что точки B и C лежат по одну сторону от точки A.

С помощью понятия «между» для точек на прямой вводится понятие отрезка прямой. Именно, *отрезком AB* на прямой называется часть прямой, лежащая между точками A и B, т. е. множество точек прямой, лежащих между A и B.

Аксиома II_2. *Прямая разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на два подмножества (полуплоскости) так, что отрезок, соединяющий точки одной полуплоскости, не пересекается с прямой, а отрезок, соединяющий точки разных полуплоскостей, пересекается с прямой.*

Полупрямой или лучом AB мы будем называть часть прямой AB, которая состоит из всех тех точек прямой, которые вместе с точкой B лежат по одну сторону от точки A. Точка A называется *начальной точкой* полупрямой.

Проведем через начальную точку A полупрямой AB любую прямую a, отличную от прямой AB. Тогда *полупрямая AB состоит из тех и только тех точек прямой AB, которые лежат в одной полуплоскости с точкой B относительно прямой a.* Действительно, какую бы прямую a ни взять, любой отрезок прямой AB может пересекать прямую a только в точке A. Отсюда следует, что если X—точка полупрямой AB, то отрезок BX не пересекает прямую a, т. е. точки X и B лежат в одной полуплоскости. Если X—точка прямой AB, лежащая в одной полуплоскости с точкой B, то отрезок BX не пересекает прямую a, а значит, точки X и B лежат по одну сторону от точки A, т. е. точка X принадлежит полупрямой AB. Утверждение доказано.

Точка A, лежащая на прямой a, разбивает эту прямую на две полупрямые и является начальной точкой для каждой из них. Точки одной полупрямой не разделяются точкой A, а точки разных полупрямых разделяются этой точкой. Для доказательства этого утверждения достаточно провести через точку A прямую b, отличную от a. Тогда части прямой a, лежащие в разных полуплоскостях относительно прямой b, и будут полупрямыми, о которых идет речь. Полупрямые одной прямой с общей начальной точкой называются *дополнительными.*

Полупрямая полностью определяется указанием ее начальной точки и еще какой-нибудь точки полупрямой. Это дает основание для обозначения полупрямой двумя точками, например, полупрямая AB. При таком обозначении полупрямой первой ставится начальная точка.

Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков. Точки называются *вершинами* треугольника, а соединяющие их отрезки—*сторонами* треугольника. Из аксиомы II_2 следует, что *если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает, и притом только одну, из двух других сторон.*

Действительно, пусть ABC—треугольник и a—прямая, пересекающая его сторону AB. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a. Точка C находится в одной из них. Если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой A, то прямая a не пересекает отрезок AC, но пересекает отрезок BC. Если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой B, то прямая a не пересекает отрезок BC, но пересекает отрезок AC. В обоих случаях прямая a пересекает, и притом только одну, из сторон треугольника: AC или BC. Эта теорема в аксиоматике Гильберта принимается за аксиому и называется *аксиомой Паша.*

§ 4. Аксиомы меры для отрезков и углов

Аксиома III_1. *Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Если точка C лежит на отрезке AB, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC.*

В школьном изложении, вводя эту аксиому, мы обращаемся к наглядному представлению учащегося об измерении отрезка с помощью известных инструментов, например, линейки с делениями. Однако надо иметь в виду, что аксиома III_1 вовсе не предполагает какого-либо измерения. В ней утверждается только возможность сопоставить каждому отрезку число (его длину) так, что при этом выполняются условия, содержащиеся в аксиоме.

С другой стороны, не следует думать, что длина отрезка, существование которой утверждается аксиомой III_1, есть нечто другое, чем то, что мы получаем в результате обычного способа измерения. Однако это требует доказательства. (См. гл. XVIII, § 1.)

Аксиома III_1 *позволяет ввести координату на прямой*, т. е. сопоставить каждой точке прямой вещественное число так, что если $x(A)$ и $x(B)$—координаты точек A и B, то длина отрезка AB равна $|x(B)-x(A)|$.

Действительно, пусть O—какая-нибудь точка прямой. Сопоставим ей в качестве координаты число 0. Точка O разбивает прямую на две полупрямые. Условимся одну из них называть положительной, а другую—отрицательной. Теперь, если точка A принадлежит положительной полупрямой, то ее координата $x(A)$ есть длина отрезка OA, если точка A принадлежит отрицательной полупрямой, то ее координата есть отрицательное число, по абсолютной величине равное длине отрезка OA.

Покажем, что длина отрезка AB равна $|x(B)-x(A)|$. Если точки A и B принадлежат различным полупрямым, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков OA и OB. Поэтому $AB = |x(B)-x(A)|$. Допустим, точки A и B принадлежат одной полупрямой, например, положительной. Из трех точек O, A и B одна лежит между двумя другими. Этой точкой не может быть точка O, так как точки A и B принадлежат одной полупрямой. Следовательно, этой точкой будет либо A, либо B, например, B. Тогда длина отрезка OA равна сумме длин отрезков OB и BA. А значит, длина отрезка AB равна $x(A)-x(B)=|x(B)-x(A)|$. Аналогично рассматриваются другие случаи взаимного расположения точек O, A, B.

Углом называется фигура, которая состоит из двух различных полупрямых с общей начальной точкой. Эта точка называется *вершиной угла*, а полупрямые—*сторонами угла*. Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми одной прямой, то угол называется *развернутым*.

Мы будем говорить, что луч *c проходит между* сторонами угла (ab), если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла. В случае развер нутого угла мы считаем, что *любой луч*, исходящий из его вершины и отличный от его сторон, проходит между сторонами угла.

Легко видеть, что *если луч проходит между сторонами угла, то он пересекает любой отрезок с концами на сторонах угла* (рис. 109). Действительно, по определению луч c пересекает какой-нибудь отрезок AB с концами на сторонах угла. Пусть CD — любой другой отрезок с концами на сторонах угла. Применяя теорему Паша к треугольнику ABC и прямой, содержащей луч c, а затем к треугольнику BCD и той же прямой, последовательно заключаем, что луч c пересекает отрезок BC и отрезок CD.

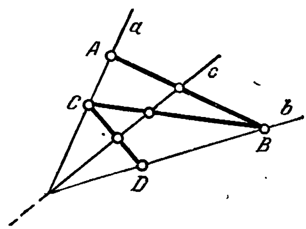


Рис. 109.

Аксиома III_2. *Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Если луч c проходит между сторонами угла (ab), то градусная мера угла (ab) равна сумме градусных мер углов (ac) и (bc).*

Отметим следующую теорему.

Если от полупрямой a отложить в одну полуплоскость относительно этой полупрямой и ее продолжения углы (ab) и (ac), то либо луч c проходит между сторонами угла (ab), либо луч b проходит между сторонами угла (ac). В любом случае $(bc) = |(ac) - (ab)|$.

Доказательство. Отметим на луче a точку A, на его дополнении — точку A_1 и на луче c — точку C. Прямая, содержащая луч b, пересекает сторону AA_1 треугольника ACA_1, а значит, по теореме Паша пересекает либо сторону AC, либо сторону A_1C. Пересечение производится лучом b, так как дополнительный луч проходит в другой полуплоскости. Если луч b пересекает отрезок AC (рис. 110,*а*), то он проходит между сторонами угла (ac). При этом $(ac) = (ab) + (bc)$. Следовательно, $(bc) = (ac) - (ab)$.

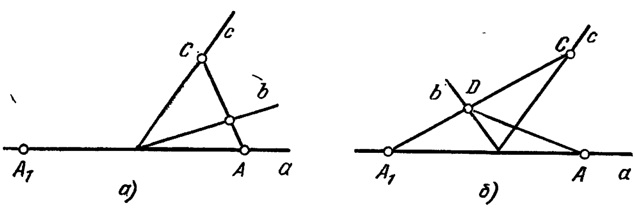


Рис. 110.

Допустим, луч b пересекает сторону A_1C в точке D (рис. 110,*б*). Тогда, применяя теорему Паша к треугольнику ADA_1 и прямой, содержащей луч c, заключаем, что луч c пересекает отрезок AD, а значит, проходит между сторонами угла (ab). При этом $(ab) = (ac) + (bc)$, и следовательно, $(bc) = |(ac) - (ab)|$. Теорема доказана полностью.

§ 5. Аксиома существования треугольника, равного данному

Два отрезка называются *равными*, если они имеют одинаковую длину. Два угла называются *равными*, если они имеют одинаковую угловую меру в градусах. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *равными*, если у них $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Кратко это выражают словами: *треугольники равны, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.* Соответствие вершин и сторон равных треугольников отражено в обозначении его вершинами. Если мы говорим, что треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$, то соответствующие вершины — A и A_1, B и B_1, C и C_1, а соответствующие стороны — AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1. Для обозначения равенства треугольников употребляется обычный знак равенства, например, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. При этом имеет значение порядок, в котором записываются вершины треугольника. Равенство $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ означает, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$... . А равенство $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ означает уже совсем другое: $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, ...

Аксиома IV. *Пусть ABC — треугольник и a — полупрямая. Тогда существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, у которого вершина A_1 совпадает с началом луча a, вершина B_1 лежит на луче a, а вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч a.*

Из аксиомы IV следует, что *на данной полупрямой из ее начальной точки можно отложить отрезок, равный данному отрезку, и притом только один.*

Действительно, пусть a — данная полупрямая и AB — данный отрезок. Возьмем точку C вне прямой AB. По аксиоме IV существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, у которого вершина A_1 есть начало луча a, а вершина B_1 — на луче. Отрезок A_1B_1 равен отрезку AB, так как $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Докажем единственность отрезка. Допустим, на полупрямой с начальной точкой O можно отложить два отрезка OX и OY, равные данному отрезку, а следовательно, равные друг другу. Из трех точек O, X и Y одна лежит между двумя другими. Этой точкой не может быть точка O, так как точки X и Y полупрямой не разделяются начальной точкой. Если этой точкой является X, то $OY = OX + XY$. Но это невозможно, так как $OX = OY$, а $XY > 0$. Аналогично доказывается, что точка Y не может быть между O и X. Мы пришли к противоречию, утверждение доказано.

Из аксиомы IV следует, что *от данной полупрямой в данную полуплоскость, определяемую этой полупрямой и ее продолжением, можно отложить угол, равный данному углу, и притом только один.*

Действительно, пусть ABC — данный угол. По аксиоме IV существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, у которого вершина A_1 совпадает с началом луча, вершина B_1 — на луче, а вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости. Угол $A_1B_1C_1$ равен углу ABC, так как $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Докажем единственность угла. Допустим, от полупрямой a можно отложить два угла (ab) и (ac), равных данному углу. Тогда, как мы знаем, $(bc) = |(ac) - (ab)| = 0$. А это противоречит тому, что градусная мера угла (bc) положительна. Утверждение единственности доказано.

§ 6. Аксиома существования отрезка данной длины

Аксиома V. *Каково бы ни было вещественное число $d > 0$, существует отрезок длины d.*

Из аксиомы V следует, что *на любой полупрямой из ее начальной точки можно отложить отрезок любой заданной длины, и притом только один.*

Действительно, по аксиоме V существует какой-нибудь отрезок AB заданной длины. А как показано в предыдущем параграфе, на данной полупрямой из ее начальной точки можно отложить, и притом только один, отрезок, равный AB.

Из аксиомы V следует, что *введением координат на прямой устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками прямой и вещественными числами.* Действительно, так как из начала координат O на положительной и отрицательной полупрямой можно отложить отрезок любой заданной длины, то отображение множества точек прямой на множество вещественных чисел, при котором точке прямой сопоставляется ее координата, взаимно однозначно.

Докажем следующую теорему.

Каково бы ни было положительное число $\theta < 180°$, от данной полупрямой a в заданную полуплоскость можно отложить, и притом только один, угол (ab) с градусной мерой θ.

Доказательство. Прежде всего заметим, что существуют углы со сколь угодно малой градусной мерой. Действительно, пусть ABC — любой не развернутый угол и α — его градусная мера. Возьмем на отрезке AC точку D. Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$. И следовательно, хотя бы один из углов ABD или CBD имеет градусную меру, не большую $\alpha/2$. Аналогично доказывается существование угла с градусной мерой, не большей $\alpha/4$, и т. д. В общем, существуют углы со сколь угодно малой градусной мерой.

Пусть теперь a_1 — луч, дополнительный к лучу a (рис. 111). Отложим от луча a_1 в заданную полуплоскость угол (a_1b_1), меньший $180° - \theta$. Тогда по свойству смежных углов угол (ab_1) больше θ.

Отметим на луче a точку A, а на луче b_1 — точку B_1. Пусть X — произвольная точка отрезка AB_1. Обозначим через $M(\theta)$ множество тех точек X отрезка AB_1, для которых угол AOX не больше θ. Пусть d — точная верхняя грань длин отрезков AX при $X \subset M(\theta)$. Обозначим через X_0 точку отрезка, для которой $AX_0 = d$ (рис. 111). Мы утверждаем, что угол AOX_0 равен θ.

Допустим, $\angle AOX_0 = \alpha < \theta$. Отложим от полупрямой OX_0 в полуплоскость, где лежит точка B_1, достаточно малый угол X_0OX', меньший угла X_0OB_1 и меньший $\theta - \alpha$. Тогда угол AOX' будет меньше θ. Но это невозможно, так как $AX' > AX_0 = d$, а точка X' принадлежит $M(\theta)$.

Допустим теперь, что $\angle AOX_0 = \alpha > \theta$. Отложим от полупрямой OX_0 в полуплоскость, где лежит точка A, достаточно малый угол X_0OX', меньший угла X_0OA и меньший $\alpha - \theta$. Тогда угол AOX' больше θ. По определению точки X_0 существуют сколь угодно близкие к ней точки X'', для которых угол AOX'' не больше θ. Точка X' лежит на отрезке $X''A$ и поэтому угол AOX' меньше θ. Мы пришли к противоречию. Итак, угол AOX_0 равен θ. Единственность этого угла была доказана ранее.

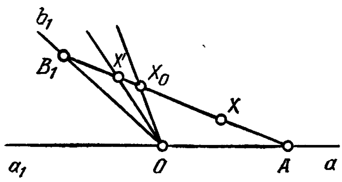


Рис. 111.

Сложность приведенного доказательства, а его вряд ли можно существенно упростить, объясняет, почему в школьном изложении утверждение этой теоремы принимается за аксиому.

В связи с доказательством теоремы об откладывании угла с данной градусной мерой от данной полупрямой, которая в школьном изложении принимается за аксиому, естественно возникает следующий вопрос. А нельзя ли в школьной аксиоматике опустить и аксиому откладывания отрезка заданной длины на полупрямой, не заменяя ее на более слабую аксиому существования отрезка заданной длины? Оказывается, это сделать нельзя. Доказательство будет дано в гл. XV.

§ 7. Аксиома параллельных

Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Аксиома VI. *Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.*

Из аксиомы VI следует, что *свойство параллельности прямых транзитивно*. Именно, если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c. Действительно, если бы прямые a и c пересекались, то через точку их пересечения проходили бы две прямые, параллельные прямой b — прямая a и прямая c. А это противоречит аксиоме VI.

Из аксиомы VI следует также, что *если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.* Действительно, пусть прямая c пересекает одну из двух параллельных прямых a и b, например b, но не пересекает другую (a). Тогда через точку пересечения прямых b и c проходят две прямые, параллельные прямой a — прямая b и прямая c. А это противоречит аксиоме VI.

§ 8. Пространственные аксиомы

Аксиома C_1. *Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.*

Аксиома C_2. *Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.*

Аксиома C_3. *Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.*

Отметим несколько следствий пространственных аксиом.

Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство. Пусть a—данная прямая и B—не лежащая на ней точка (рис. 112). Отметим на прямой a какую-нибудь точку A. Такая точка существует по аксиоме I_2. Проведем через точки A и B прямую b (аксиома I_1). Прямые a и b различны, так как точка B прямой b не лежит на прямой a. Прямые a и b имеют общую точку A. Проведем через прямые a и b плоскость α (аксиома C_3). Эта плоскость проходит через прямую a и точку B.

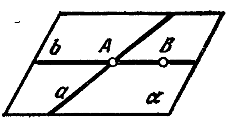


Рис. 112.

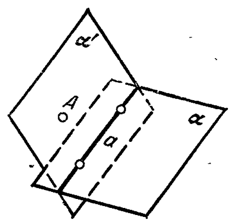


Рис. 113.

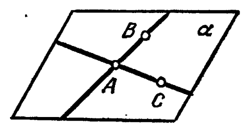


Рис. 114.

Докажем теперь, что плоскость α, проходящая через прямую a и точку B, единственна. Допустим, что существует другая, отличная от α плоскость α', проходящая через прямую a и точку B. По аксиоме C_2 плоскости α и α' пересекаются по прямой. Следовательно, любые три общие точки плоскостей α и α' лежат на прямой. Но точка B и две точки прямой a заведомо не лежат на одной прямой. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Доказательство. Пусть a—данная прямая и α—данная плоскость (рис. 113). По аксиоме I_2 существует точка A, не лежащая на прямой a. Проведем через прямую a и точку A плоскость α'. Если плоскость α' совпадает с α, то плоскость α содержит прямую a, что и утверждается теоремой. Если плоскость α' отлична от α, то эти плоскости пересекаются по прямой a', содержащей две точки прямой a. По аксиоме I_1 прямая a' совпадает с a и, следовательно, прямая a лежит в плоскости α. Теорема доказана.

Через три точки, не лежащие на прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство. Пусть A, B, C — три данные точки, не лежащие на одной прямой (рис. 114). Проведем прямые AB и AC; они различны, так как точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме C_3 через прямые AB и AC можно провести плоскость. Эта плоскость содержит точки A, B, C.

Докажем, что плоскость α, проходящая через точки A, B, C, единственна. Действительно, плоскость, проходящая через точки A, B, C, содержит прямые AB и AC. А по аксиоме C_3 такая плоскость единственна.

ГЛАВА XV
ИССЛЕДОВАНИЕ АКСИОМ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Постановка вопроса

В связи с аксиоматическим построением евклидовой геометрии естественно возникают три вопроса:

1. Не противоречива ли принятая нами система аксиом, т. е. не могут ли из нее быть выведены путем логических рассуждений два взаимно исключающих следствия?

2. Полна ли система аксиом, т. е. нельзя ли ее пополнить новыми аксиомами, которые не противоречили бы уже принятым и не вытекали из них?

3. Независимы ли принятые аксиомы, т. е. не следуют ли некоторые аксиомы из остальных?

Решение этих вопросов, которое будет дано в настоящей главе, тесно связано с построением конкретных реализаций системы аксиом. Реализация состоит в указании вещей трех родов произвольной природы, условно именуемых «точками», «прямыми» и «плоскостями», и отношений между ними, условно выражаемых словами «принадлежать», «лежать между», «иметь меру», для которых в силу их конкретного содержания выполняются аксиомы.

Дело в том, что основные понятия геометрии не определяются, и все, что нам о них известно, выражается в аксиомах. Поэтому все наши выводы относятся к вещам произвольной природы, лишь бы для них и отношений между ними, которые также могут быть далеки от наглядных представлений, выполнялись аксиомы.

Доказательство непротиворечивости системы аксиом сводится к доказательству существования хотя бы одной ее реализации. Доказательство независимости данной аксиомы сводится к указанию такой реализации, в которой выполняются все аксиомы, кроме заданной. Наконец, доказательство полноты системы аксиом сводится к доказательству изоморфизма всех реализаций, т. е. к установлению такого взаимно однозначного соответствия между точками, прямыми и плоскостями этих реализаций, при котором соответствующие элементы находятся в одинаковых отношениях.

§ 2. Декартова реализация системы аксиом евклидовой геометрии

Сейчас мы укажем одну из реализаций системы аксиом евклидовой геометрии. Она называется *декартовой*. Для простоты изложения мы будем строить реализацию системы аксиом на плоскости. Однако, как нетрудно убедиться, такое же построение возможно и для пространственной системы.

Точкой мы будем называть любую пару вещественных чисел x и y, взятых в определенном порядке (x, y), а эти числа будем называть *координатами* точки. *Прямой* будем называть совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$ax+by+c=0 \qquad (a^2+b^2\neq 0).$$

Это уравнение будем называть *уравнением прямой*. Прямые $x=0$ и $y=0$ будем называть *осями координат*, а точку $(0, 0)$—*началом координат*.

Мы будем говорить, что точка *принадлежит* прямой, если она является одной из ее точек, т. е. ее координаты удовлетворяют уравнению прямой.

Покажем, что при таком конкретном понимании основных понятий для них выполняются аксиомы принадлежности евклидовой геометрии.

Аксиомой I_1 утверждается, что через две точки можно провести прямую, и притом только одну. Эта аксиома выполняется. Действительно, пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2)—данные точки. Прямая, задаваемая уравнением

$$(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0,$$

проходит через данные точки, так как их координаты удовлетворяют этому уравнению. Докажем, что прямая единственная. Допустим, через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) проходят две прямые:

$$ax+by+c=0, \qquad a_1x+b_1y+c_1=0.$$

Так как система из этих двух уравнений имеет два решения x_1, y_1 и x_2, y_2, то уравнения зависимы, т. е. отличаются только множителем. А это значит—прямые совпадают.

Аксиомой I_2 утверждается, что на каждой прямой лежат по крайней мере две точки, и существуют три точки, не лежащие на прямой. Покажем, что эта аксиома выполняется. Действительно, пусть

$$ax+by+c=0$$

—уравнение прямой. Тогда по крайней мере один из коэффициентов a или b отличен от нуля, например, b. Возьмем произвольные числа x_1 и x_2 $(x_1\neq x_2)$ и найдем числа y_1 и y_2 по формулам

$$y_1 = -\frac{ax_1+c}{b}, \quad y_2 = -\frac{ax_2+c}{b}.$$

Точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат на нашей прямой.

Докажем существование трех точек, не лежащих на одной прямой.

Возьмем точки (0, 0), (0, 1), (1, 0). Эти три точки не лежат на одной прямой. Действительно, допустим, они лежат на некоторой прямой $ax+by+c=0$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, последовательно получаем $c=0$, $b=0$, $a=0$. Но ведь a^2+b^2 должно быть отлично от нуля. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

§ 3. Отношение «между» для точек на прямой. Проверка аксиом порядка

Определим понятие «между» для точек на прямой. Пусть $ax+by+c=0$—уравнение прямой и (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)—три точки на прямой. В случае, если $b \neq 0$, мы будем говорить, что точка (x_3, y_3) лежит между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2), если разности x_1-x_3 и x_3-x_2 одного знака, т. е. число x_3 заключено между x_1 и x_2. В случае, если $a \neq 0$, мы будем говорить, что точка (x_3, y_3) лежит между (x_1, y_1) и (x_2, y_2), если разности y_1-y_3 и y_3-y_2 одного знака. Чтобы данное определение было корректно, надо, чтобы в случае $a \neq 0$ и $b \neq 0$ оба способа определения были эквивалентны. Докажем эту эквивалентность.

Если $b \neq 0$, то

$$y_1 = -\frac{ax_1+c}{b}, \quad y_2 = -\frac{ax_2+c}{b}, \quad y_3 = -\frac{ax_3+c}{b},$$

$$y_1-y_3 = -\frac{a}{b}(x_1-x_3), \quad y_3-y_2 = -\frac{a}{b}(x_3-x_2).$$

Мы видим, что если x_1-x_3 и x_3-x_2 одного знака, то y_1-y_3 и y_3-y_2 тоже одного знака. Эквивалентность определений доказана.

Проверим теперь выполнимость аксиом порядка. Аксиомой II_1 утверждается, что из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими. Пусть $ax+by+c=0$—уравнение прямой и (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)—три точки на этой прямой. Допустим, что в уравнении $b \neq 0$. Тогда все числа x_1, x_2, x_3 различны Действительно, если $x_1=x_2$, то

$$y_1 = -\frac{ax_1+c}{b} = -\frac{ax_2+c}{b} = y_2,$$

т. е. точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают, а мы имеем в виду различные три точки. Итак, все числа x_1, x_2, x_3 различны. Расположим их в порядке возрастания. Пусть для определенности $x_1 < x_2 < x_3$. Тогда разности x_2-x_1 и x_3-x_2 одного знака, а следовательно, точка (x_2, y_2) лежит между точками (x_1, y_1) и (x_3, y_3). Разности x_3-x_2 и x_1-x_3 противоположных знаков. Поэтому точка (x_3, y_3) не лежит между (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Разности x_1-x_3 и x_2-x_1 тоже противоположных знаков. Поэтому и точка (x_1, y_1) не лежит между точками (x_2, y_2) и (x_3, y_3). Итак, из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Проверим выполнимость аксиомы II_2 о разбиении плоскости на две полуплоскости. Пусть $ax+by+c=0$ — уравнение прямой. Определим разбиение плоскости на две полуплоскости этой прямой. Для точек плоскости, не принадлежащих прямой $ax+by+c=0$, мы скажем, что точка (x, y) принадлежит первой полуплоскости, если для нее $ax+by+c>0$, и второй полуплоскости, если $ax+by+c<0$. Аксиомой II_2 утверждается, что если точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ принадлежат одной полуплоскости, то отрезок A_1A_2 не пересекается с прямой. Если точки принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой. Покажем, что этим свойством обладает наше разбиение плоскости на две полуплоскости.

Действительно, пусть $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ — уравнение прямой, соединяющей точки A_1 и A_2. Пусть для определенности $\beta\neq 0$. Тогда для всех точек (x, y) отрезка A_1A_2 $x_1<x<x_2$ или $x_2<x<x_1$. Подставим координаты x и $y=-\frac{1}{\beta}(\alpha x+\gamma)$ — точки отрезка A_1A_2 — в $ax+by+c$. Тогда получим линейную функцию от x: $f(x)=c_1x+c_2$. Если точки A_1 и A_2 принадлежат одной полуплоскости, то $f(x_1)$ и $f(x_2)$ одного знака, следовательно, $f(x)$ сохраняет знак во всем интервале (x_1, x_2). А это значит, что отрезок A_1A_2 не пересекает прямую $ax+by+c=0$. Если же точки A_1 и A_2 принадлежат разным полуплоскостям, то $f(x_1)$ и $f(x_2)$ разных знаков, и, следовательно, $f(x)$ обращается в нуль на интервале (x_1, x_2). Это значит, что отрезок A_1A_2 пересекает прямую $ax+by+c=0$. Аналогично рассматривается случай $\beta=0$ (в этом случае $\alpha\neq 0$). Итак, в декартовой реализации аксиомы порядка выполняются.

§ 4. Длина отрезка. Проверка аксиомы меры для отрезков

Расстоянием между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в декартовой реализации мы будем называть число

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Длиной отрезка будем называть расстояние между его концами. Проверим выполнимость аксиомы меры для отрезков (аксиома III_1) в декартовой реализации. Прежде всего заметим, что каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — две точки на прямой и $C(x_3, y_3)$ — точка прямой, лежащая между ними. Докажем, что длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC. Пусть $y=px+q$ — уравнение прямой. Так как точка C лежит между A и B, то либо $x_1<x_3<x_2$, либо

$x_1 > x_3 > x_2$. Пусть, например, $x_1 < x_3 < x_2$. Имеем

$$y_1 = px_1 + q, \quad y_2 = px_2 + q, \quad y_3 = px_3 + q.$$

Длина отрезка AB равна

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(px_2-px_1)^2} = \\ = (x_2-x_1)\sqrt{1+p^2}.$$

Аналогично, длина отрезка AC равна $(x_3-x_1)\sqrt{1+p^2}$, а длина отрезка BC равна $(x_2-x_3)\sqrt{1+p^2}$. Мы видим, что длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC. Таким образом, аксиома III_1 в декартовой реализации выполняется.

Для расстояний между точками в декартовой реализации имеет место *неравенство треугольника*. Именно, *расстояние между двумя точками не больше суммы их расстояний от третьей точки, причем заведомо меньше, если эти три точки не лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть a, b, c, d — любые неотрицательные числа. Имеем

$$a^2d^2 + b^2c^2 \geqslant 2abcd.$$

Причем равенство имеет место только при $ad = bc$. Прибавим к обеим частям неравенства $a^2c^2 + b^2d^2$ и извлечем корень квадратный из обеих частей. Получим

$$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geqslant ac + bd.$$

Умножим обе части равенства на 2, затем прибавим к обеим частям $a^2+b^2+c^2+d^2$ и извлечем корень квадратный, получим

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geqslant \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

Положим теперь $a = x_3 - x_1$, $b = y_3 - y_1$, $c = x_2 - x_3$, $d = y_2 - y_3$. Тогда справа будет расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2), а слева — сумма их расстояний до точки (x_3, y_3). Неравенство обращается в равенство только при $ad = bc$, т. е. при

$$(x_3-x_1)(y_2-y_3) = (x_2-x_3)(y_3-y_1).$$

А это значит, что наши точки лежат на одной прямой:

$$(x_3-x)(y_2-y_3) = (x_2-x_3)(y_3-y).$$

Координаты любой из трех точек удовлетворяют этому уравнению.

Движением в декартовой реализации мы будем называть преобразование, задаваемое формулами вида

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = -bx + ay + d,$$

где постоянные a и b удовлетворяют условию: $a^2 + b^2 = 1$. Непосредственно проверяется, что движения образуют группу. Это значит, что преобразование, обратное движению, есть движение; два движения, выполненные последовательно, дают снова движение; тождественное преобразование ($x'=x$, $y'=y$) есть движение.

Непосредственно проверяется, что *движение сохраняет расстояния между точками.*

Из неравенства треугольника следует, что движение переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки.

§ 5. Определение градусной меры для углов. Проверка аксиомы III_2

Определим *градусную меру* для углов в декартовой реализации. Прежде всего будем считать, что градусная мера развернутого угла равна 180°. Рассмотрим теперь угол с вершиной в начале координат и сторонами в полуплоскости $x>0$. Пусть

$$y=k_1x, \quad y=k_2x \qquad (x>0)$$

— уравнения сторон угла. Градусной мерой угла мы будем называть число

$$\theta=\frac{180}{\pi}\left|\int_{k_1}^{k_2}\frac{dt}{1+t^2}\right|^{*)}.$$

Определим градусную меру для угла в общем расположении. Пусть ABC — данный не развернутый угол. Пусть $ax+by+c=0$ — уравнение прямой AC. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^2+b^2=1$. Движение, задаваемое формулами

$$x'=ax+by+c,$$
$$y'=-bx+ay,$$

переводит прямую AC в ось y. Применим далее движение, задаваемое формулами $\pm x'=x+\alpha$, $y'=y+\beta$. Выбором α и β можно добиться, чтобы последовательное выполнение этих движений переводило вершину угла B в начало координат. При этом прямая AC перейдет в прямую $x=\text{const}$. Выбором знака в формуле второго движения можно добиться, чтобы прямая ACпереместилась в полуплоскость $x>0$. В итоге движением угол ABC переведен в угол с вершиной в начале координат и сторонами в полуплоскости $x>0$. Примем градусную меру этого угла за градусную меру угла ABC.

Для того, чтобы данное определение градусной меры угла ABC было корректно, надо доказать, что оно не зависит от движения, которое переводит угол ABC в угол указанного расположения. Покажем, что это действительно так. Пусть угол ABC движением переводится в угол A_1OC_1, а другим движением —

*) Здесь под π понимается $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}$.

в угол A_2OC_2. Так как движения образуют группу, то угол A_1OC_1 движением переводится в угол A_2OC_2.

Пусть $y=k_1x$, $y=k_2x$ $(x>0)$—уравнения сторон угла A_1OC_1. Пусть $x'=\alpha x+\beta y$, $y'=-\beta x+\alpha y$—движение, которое переводит угол A_1OC_1 в угол A_2OC_2. Найдем уравнения сторон угла A_2OC_2. Разрешая формулы, задающие движение относительно x и y, получим $x=\alpha x'-\beta y'$, $y=\beta x'+\alpha y'$. Подставляя эти выражения в уравнения сторон угла A_1OC_1, получим уравнения сторон угла A_2OC_2:

$$y'=k_1'x', \quad k_1'=\frac{\alpha k_1-\beta}{\beta k_1+\alpha},$$

$$y'=k_2'x', \quad k_2'=\frac{\alpha k_2-\beta}{\beta k_2+\alpha}.$$

Градусная мера угла A_1OC_1 равна

$$\frac{180}{\pi}\left|\int_{k_1}^{k_2}\frac{dt}{1+t^2}\right|.$$

Градусная мера угла A_2OC_2 равна

$$\frac{180}{\pi}\left|\int_{k_1'}^{k_2'}\frac{d\tau}{1+\tau^2}\right|.$$

Легко видеть, что эти градусные меры равны. Достаточно заметить, что замена переменного по формуле $\tau=\dfrac{\alpha t-\beta}{\beta t+\alpha}$ переводит одно выражение в другое. Итак, корректность определения градусной меры угла доказана.

Пусть теперь имеем угол (ab) и луч c, проходящий между сторонами угла. Луч c пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла. Выполним движение, при котором угол (ab) переходит в угол (a_1b_1) с вершиной в начале координат и сторонами в полуплоскости $x>0$. При этом луч c перейдет в луч c_1, проходящий между сторонами угла (a_1b_1). Поэтому проверка аксиомы III_2 сводится к случаю, когда вершина угла—в начале координат, а стороны—в полуплоскости $x>0$. Выполним эту проверку.

Пусть $y=kx$ $(x>0)$—полупрямая, проходящая между сторонами угла: $y=k_1x$, $y=k_2x$ $(x>0)$. Стороны угла пересекают прямую $x=1$ в точках $(1, k_1)$ и $(1, k_2)$. Полупрямая $y=kx$ $(x>0)$ пересекает отрезок с концами в этих точках, а следовательно, k заключено между k_1 и k_2. Имеем

$$\frac{180}{\pi}\int_{k_1}^{k}\frac{dt}{1+t^2}+\frac{180}{\pi}\int_{k}^{k_2}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{180}{\pi}\int_{k_1}^{k_2}\frac{dt}{1+t^2}.$$

И так как оба слагаемых левой части равенства одного знака, то

$$\frac{180}{\pi}\left|\int_{k_1}^{k}\frac{dt}{1+t^2}\right|+\frac{180}{\pi}\left|\int_{k}^{k_2}\frac{dt}{1+t^2}\right|=\frac{180}{\pi}\left|\int_{k_1}^{k_2}\frac{dt}{1+t^2}\right|.$$

А это значит, что градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, которые образует полупрямая $y=kx$ $(x>0)$ с его сторонами. Таким образом, аксиома III_2 в декартовой реализации выполняется.

§ 6. Выполнимость остальных аксиом в декартовой реализации

Проверим выполнимость аксиомы IV о существовании треугольника, равного данному, в заданном расположении относительно полупрямой. Пусть ABC — данный треугольник и PQ — полупрямая. Требуется доказать существование треугольника $A_1B_1C_1$, равного треугольнику ABC, у которого вершина A_1 совпадает с началом полупрямой PQ, вершина B_1 — на этой полупрямой и вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой PQ.

Пусть $ax+by+c=0$ — уравнение прямой AB. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^2+b^2=1$. Движение, задаваемое формулами

$$\pm x'=ax+by+c,$$
$$\pm y'=-bx+ay+\lambda,$$

переводит прямую AB в ось y. Выбором λ и знаков при x' и y' можно добиться того, что при этом движении точка A перейдет в начало координат, точка B — на полуось $y>0$, а полуплоскость, содержащая точку C, относительно прямой AB перейдет в полуплоскость $x>0$. Полученное при этом движение обозначим S.

Пусть теперь $a_1x+b_1y+c_1=0$ — уравнение прямой PQ. Движение, задаваемое формулами

$$\pm x'=a_1x+b_1y+c_1,$$
$$\pm y'=-b_1x+a_1y+\mu,$$

переводит прямую PQ в ось y. Выбором μ и знаков при x' и y' можно добиться того, чтобы при этом движении точка P перешла в начало координат, точка Q — на полуось $y>0$, а заданная полуплоскость относительно прямой PQ перешла в полуплоскость $x>0$. Полученное при этом движение обозначим H, а обратное ему движение — через H^{-1}.

Выполним теперь последовательно движения S и H^{-1}. При этом наш треугольник ABC перейдет в треугольник $A_1B_1C_1$ с заданным расположением относительно полупрямой PQ. Нам остается доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC.

Так как движение сохраняет расстояния, то у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответствующие стороны равны. Докажем равенство соответствующих углов.

Чтобы найти градусную меру угла $A_1B_1C_1$, мы переводим его движением в угол A_2OC_2 с вершиной в начале координат и сторонами в полуплоскости $x>0$. В качестве градусной меры угла $A_1B_1C_1$ берем градусную меру угла A_2OC_2, для которой имеется формула (§ 5). Так как угол ABC переводится движением в угол $A_1B_1C_1$, а этот угол переводится движением в угол A_2OC_2, то угол ABC переводится движением в угол A_2OC_2, а значит, имеет ту же градусную меру, что и угол $A_1B_1C_1$. Отсюда следует, что эти углы равны. Аналогично доказывается равенство других соответствующих углов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Итак, выполнимость аксиомы IV в декартовой реализации доказана.

Выполнимость аксиомы V о существовании отрезка любой заданной длины d в декартовой реализации достаточно очевидна. Действительно, отрезок с концами в точках (0, 0) и (d, 0) имеет длину $\sqrt{(d-0)^2+(0-0)^2}=d$.

Проверим выполнимость аксиомы параллельных. Именно — докажем, что в декартовой реализации через точку (x_0, y_0), лежащую вне прямой $ax+by+c=0$, можно провести не более одной прямой, ей параллельной. Допустим, существуют две такие прямые $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$, проходящие через точку (x_0, y_0) и параллельные данной прямой, т. е. не пересекающие ее. Тогда обе системы

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1=0,\\ ax+by+c=0;\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a_2x+b_2y+c_2=0,\\ ax+by+c=0\end{aligned}\right\}$$

не совместны, т. е. не имеют решений. Поэтому $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a & b \end{vmatrix}=$ $=0$. Отсюда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, и так как система

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{aligned}\right\}$$

имеет решение $(x=x_0,\ y=y_0)$, то ее уравнения зависимы, т. е. отличаются только множителем. А это значит, что прямые совпадают вопреки предположению. Итак, выполнимость аксиомы параллельных в декартовой реализации также доказана.

§ 7. Непротиворечивость и полнота системы аксиом евклидовой геометрии

Система аксиом любой теории T, в частности, евклидовой геометрии, непротиворечива, если она допускает хотя бы одну реализацию R.

Действительно, если бы в T можно было из системы аксиом вывести два взаимно исключающих следствия, то это было бы и в R. А так как справедливость каждого утверждения в R, соответствующего аксиоме T, не вызывает сомнений в силу природы вещей R и отношений между ними, то получение таких двух следствий в R невозможно. Отсюда невозможность прийти к противоречию в T.

Мы построили реализацию системы аксиом евклидовой геометрии—декартову реализацию. Построение заключалось в том, что мы указали систему объектов, условно назвав их точками и прямыми, и систему отношений между ними, для которых выполняются все утверждения, содержащиеся в аксиомах евклидовой геометрии. Вывод, что эти утверждения действительно верны, мы сделали на основании соответствующих теорем, относящихся к теории вещественных чисел. А так как эти теоремы в конечном счете выводятся из аксиом арифметики, то мы можем гарантировать построение декартовой реализации только при условии непротиворечивости системы аксиом арифметики. Таким образом, мы получаем решение вопроса о непротиворечивости системы аксиом евклидовой геометрии в следующей форме.

Система аксиом евклидовой геометрии непротиворечива, если непротиворечива система аксиом арифметики.

Перейдем к вопросу о полноте системы аксиом. Пусть мы имеем две реализации R' и R'' некоторой теории T. Эти реализации называются *изоморфными*, если между элементами этих реализаций можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношения, определяемые аксиомами.

Система аксиом T называется *полной*, если ее нельзя пополнить новыми аксиомами, не вытекающими из аксиом T и не противоречащими им. Конечно, при этом предполагается, что новые аксиомы не вводят новых отношений и что полученная таким образом новая система допускает реализацию. Вопрос о полноте системы аксиом тесно связан с вопросом об изоморфизме всех ее реализаций. Именно, *если все реализации системы аксиом T изоморфны, то эта система аксиом полная.*

Действительно, пусть система аксиом T неполная. Это значит, что существует некоторое утверждение a, которое не может быть выведено из аксиом T и не находится с ними в противоречии. При этом можно образовать две непротиворечивые системы аксиом T' и T'', присоединяя к аксиомам T аксиому a или ее отрицание $\bar{a}$.

Пусть R' и R''—реализации этих систем аксиом T' и T''. Каждая из них является вместе с тем реализацией T. Так как в T' имеет место a, а в T''—$\bar{a}$ (отрицание a), то эти реализации T не изоморфны. Утверждение доказано.

Система аксиом евклидовой геометрии полна, т. е. нельзя присоединить к ней никаких новых аксиом, относящихся к точкам, прямым и плоскостям и отношениям между ними, определяемым аксиомами так, чтобы они не вытекали из уже принятых аксиом и не противоречили им.

Для доказательства этой теоремы достаточно установить изоморфизм всех реализаций системы аксиом евклидовой геометрии. Так как две реализации, изоморфные третьей, очевидно, изоморфны друг другу, то достаточно доказать изоморфизм всех реализаций декартовой реализации. Установим такой изоморфизм.

Пусть мы имеем любую реализацию R системы аксиом евклидовой геометрии на плоскости. Введем на плоскости прямоугольные декартовы координаты, как это делается в аналитической геометрии (часть I). Известно, что каждая прямая на плоскости задается линейным уравнением $ax+by+c=0$ и каждое такое уравнение является уравнением некоторой прямой.

Как известно, взаимное расположение трех точек на прямой, выражаемое словами «лежать между», приводит к определенному соотношению между координатами точек. Именно, если точка (x, y) лежит между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то либо x заключено между x_1 и x_2, либо y заключено между y_1 и y_2, либо то и другое.

Для расстояния между точками $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ в прямоугольных декартовых координатах выводится формула

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Вводится понятие движения как преобразования, сохраняющего расстояния, и для него получаются формулы

$$\begin{aligned} x' &= ax+by+c, \\ \pm y' &= -bx+ay+c_1 \end{aligned} \qquad (a^2+b^2=1).$$

Доказывается, что при движении сохраняется градусная мера угла.

Все это хорошо известно из аналитической геометрии (часть I).

Поставим теперь в соответствие точке (x, y) декартовой реализации точку реализации R с координатами x и y. Поставим в соответствие прямой $ax+by+c=0$ декартовой реализации прямую в реализации R, задаваемую тем же уравнением. Мы утверждаем, что это взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми декартовой реализации и точками и прямыми реализации R есть изоморфизм. Действительно, если в декартовой реализации точка A лежит на прямой a, и A', a' — соответствующие точка и прямая реализации R, то A' лежит на a'. Если три точки A, B, C декартовой реализации лежат на прямой и точка B между A и C, то соответствующие точки A', B', C' в реализации R находятся в том же расположении, т. е. точка B' лежит между A' и C'. Соответствующие отрезки декартовой реализации и реализации R имеют одинаковые длины, так как выражаются одной и той же формулой через координаты концов.

Покажем, что соответствующие углы декартовой реализации и реализации R имеют одинаковую градусную меру. Прежде всего заметим, что движения в декартовой реализации и в реализации R задаются одними и теми же формулами и в обеих реализациях сохраняют градусную меру угла. Переведем движением соответствующие углы наших реализаций в углы со сторонами

$$y=x\operatorname{tg}\theta_1,\quad y=x\operatorname{tg}\theta_2,\quad x>0,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta_1,\ \theta_2<\frac{\pi}{2}.$$

Тогда в реализации R градусная мера угла равна $|\theta_2-\theta_1|\frac{180}{\pi}$. В декартовой реализации градусная мера соответствующего угла равна

$$\frac{180}{\pi}\left|\int\limits_{\operatorname{tg}\theta_1}^{\operatorname{tg}\theta_2}\frac{dt}{1+t^2}\right|=\frac{180}{\pi}|\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta_2)-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta_1)|=|\theta_2-\theta_1|\frac{180}{\pi}.$$

Мы видим, что градусная мера у соответствующих углов обеих реализаций одинакова.

Таким образом, установленное нами соответствие между точками и прямыми декартовой реализации и реализации R есть изоморфизм. Отсюда заключаем, что все реализации системы аксиом евклидовой геометрии изоморфны и, следовательно, система аксиом полна.

§ 8. Независимость аксиомы существования отрезка заданной длины

Аксиома a какой-либо теории T с аксиоматическим построением называется *независимой*, если она не может быть получена как следствие остальных аксиом этой теории. Обычный прием доказательства независимости той или иной аксиомы a заключается в том, что строят реализацию R системы аксиом T без аксиомы a, в которой аксиома a не выполняется. Если такую реализацию удается построить, то аксиома a независима.

Действительно, если бы a получалась как следствие остальных аксиом, то в R тоже было бы справедливо утверждение a, но это противоречит построению R.

Именно таким способом мы докажем независимость аксиомы существования отрезка данной длины от остальных аксиом евклидовой геометрии. Итак, докажем следующую теорему.

Аксиома существования отрезка заданной длины независима, т. е. она не может быть получена как следствие остальных аксиом евклидовой геометрии.

Доказательство. Обозначим через G совокупность вещественных чисел, содержащую все рациональные числа, а также все числа, которые получаются из рациональных применением в конечном числе операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Очевидно, сумма, разность, произведение, частное двух чисел из G, а также корень квадратный из любого неотрицательного числа, принадлежащего G, снова есть число из G. Известно, что числами из G не исчерпываются все вещественные числа. Более того, множество чисел из G не более чем счетно. А множество всех вещественных чисел несчетно.

Построим теперь декартову реализацию системы аксиом евклидовой геометрии тем же способом, что и раньше, но будем пользоваться при этом только числами из G.

Таким образом, точкой мы будем называть пару чисел (x, y) из G, прямой — совокупность точек, удовлетворяющих любому линейному уравнению $ax+by+c=0$ с коэффициентами из G. Отношение порядка для точек на прямой определим, как прежде, через координаты точек. Движением будем называть преобразование, задаваемое формулами вида

$$x'=ax+by+c, \quad \pm y'=-bx+ay+d \quad (a^2+b^2=1),$$

коэффициенты которых принадлежат G. Дословно так же, как и раньше, определяется длина отрезка и градусная мера угла.

Определив основные понятия, мы можем приступить к проверке выполнимости аксиом. При этом все доказательства, которые мы привели в связи с декартовой реализацией системы аксиом евклидовой геометрии (§§ 2—8), повторяются дословно, кроме доказательства выполнимости аксиомы существования отрезка данной длины, так как она вообще не выполняется.

Действительно, длина любого отрезка равна расстоянию между его концами и определяется по формуле

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Так как числа x_1, y_1, x_2, y_2 принадлежат G, то длина отрезка тоже принадлежит G. Аксиомой существования отрезка данной длины утверждается, что *каково бы ни было вещественное число d*, существует отрезок длины d. Так как числа из G не исчерпывают всех вещественных чисел, то найдется такое число d, которое не может быть длиной никакого отрезка. Следовательно, в построенной реализации аксиома существования отрезка данной длины не выполняется. Значит, эта аксиома не зависит от остальных аксиом евклидовой геометрии.

§ 9. Независимость аксиомы параллельных

Аксиома параллельных евклидовой геометрии независима, т. е. она не может быть выведена из остальных аксиом.

Доказательство. Согласно общему приему доказательства независимости аксиом нам достаточно построить такую реализацию системы аксиом евклидовой геометрии без аксиомы параллельных, в которой аксиома параллельных не выполняется. Сейчас мы построим такую реализацию, причем для простоты изложения ограничимся системой аксиом на плоскости.

Под точкой мы будем понимать любую точку евклидовой плоскости внутри единичного круга

$$x^2+y^2<1,$$

под прямой — любую хорду этого круга. Отношение принадлежности и порядка будем понимать так же, как и в евклидовой геометрии.

Движением мы будем называть преобразование вида

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ \pm y' &= -bx + ay \end{aligned} \quad (a^2 + b^2 = 1); \tag{*}$$

преобразование вида

$$x' = \frac{x\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta y}, \quad y' = \frac{y+\beta}{1+\beta y}, \quad |\beta| < 1, \tag{**}$$

а также любое преобразование, которое получается последовательным выполнением преобразований вида (*) и (**).

Очевидно, движения образуют группу. Преобразования (*) и (**) преобразуют круг $x^2 + y^2 < 1$ в себя. Для преобразования (*) это очевидно. Для преобразования (**) это легко проверяется, так как при $x^2 + y^2 < 1$ $x'^2 + y'^2 < 1$. Отсюда следует, что *любое движение преобразует круг* $x^2 + y^2 < 1$ *в себя.*

Непосредственно проверяется, что любое движение задается формулами вида

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}, \quad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{ax + by + c} \tag{***}$$

(знаменатели одинаковы).

Отсюда следует, что *при движении прямые переходят в прямые.* Действительно, пусть прямая h задается уравнением $Ax + By + C = 0$. Разрешая формулы (***) относительно x, y и подставляя их в уравнение $Ax + By + C = 0$, получим линейное уравнение относительно x' и y': $A'x' + B'y' + C' = 0$. А это значит, что прямая h переходит в прямую h': $A'x' + B'y' + C' = 0$.

Движение сохраняет порядок точек на прямой. Действительно, пусть для определенности $B \neq 0$ и $B' \neq 0$ в уравнениях прямых h и h'. Подставим в первую формулу (***)

$$y = -\frac{Ax + C}{B}.$$

Тогда получим

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Эта формула устанавливает связь между координатой x точки прямой h и координатой x' соответствующей точки на прямой h'

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}.$$

Мы видим, что dx'/dx сохраняет знак. Следовательно, x' является монотонной функцией от x. А это значит, что если для трех точек на прямой h $x_1 < x_2 < x_3$, то для соответствующих точек на прямой h' либо $x_1' < x_2' < x_3'$, либо $x_1' > x_2' > x_3'$, т. е. движение сохраняет порядок точек на прямой.

Так как при движении прямые переходят в прямые и сохраняется порядок точек, то *при движении отрезок переходит в отрезок, луч переходит в луч.*

Расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ определим следующим образом. Прямая AB пересекает окружность $x^2+y^2=1$ в двух точках: $C(x_3, y_3)$ и $D(x_4, y_4)$. *Назовем расстоянием между точками A и B, если $x_1 \neq x_2$, число*

$$\left|\ln\left(\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}\right)\right|$$

или аналогичное выражение с заменой x на y, если $y_1 \neq y_2$. В случае, если $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, можно пользоваться любой формулой, результат будет один и тот же. Дело в том, что при $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ в уравнении $ax+by+c=0$ прямой AB $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Поэтому $x = -\frac{by+c}{a}$. Если с помощью этого выражения ввести в формулу для расстояния y вместо x, то получим

$$\left|\ln\left(\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} : \frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}\right)\right|.$$

Движение сохраняет расстояния между точками. Действительно, пусть при движении точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ переходят в точки $A'(x_1', y_1')$ и $B'(x_2', y_2')$. Расстояние между точками A и B равно

$$d = \left|\ln\left(\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}\right)\right|.$$

Расстояние между точками A' и B' равно

$$d' = \left|\ln\left(\frac{x_3'-x_1'}{x_3'-x_2'} : \frac{x_4'-x_1'}{x_4'-x_2'}\right)\right|.$$

Связь между координатой x точки на прямой AB и координатой x' соответствующей точки на прямой $A'B'$, как мы знаем, устанавливается формулой вида

$$x' = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}.$$

Подставляя выражение x' через x в формулу для d', после простых вычислений получаем $d'=d$, т. е. при движении сохраняется расстояние между двумя точками.

Градусная мера угла определяется так же, как и в декартовой реализации (§ 5) с той лишь разницей, что здесь движение понимается в смысле данного выше определения. *Градусная мера угла сохраняется при движении.*

Теперь нам предстоит проверить выполнимость аксиом в построенной реализации. Выполнимость аксиом принадлежности и порядка достаточно очевидна. Выполнимость аксиомы меры для отрезков следует из свойства логарифма:

$$\ln ab = \ln a + \ln b.$$

Выполнимость аксиомы меры для углов проверяется дословно так же, как в декартовой реализации, только движение понимается в смысле данного здесь определения.

Проверка аксиомы существования треугольника, равного данному, выполняется так же, как в декартовой реализации.

Для проверки аксиомы существования отрезка данной длины рассмотрим отрезок с концами в точках (0, 0) и (x, 0). Его длина равна $\left|\ln\frac{1}{1-x}\right|$. Очевидно, подходящим выбором x можно получить любое число d.

Одним словом, все аксиомы евклидовой геометрии в построенной реализации выполняются, кроме аксиомы параллельных. Она не выполняется. Действительно, через данную точку круга можно провести бесчисленное множество хорд, которые не пересекают данную хорду. Построение этой реализации и доказывает независимость аксиомы параллельных от остальных аксиом евклидовой геометрии.

§ 10. Геометрия Лобачевского

Мы доказали, что аксиома параллельных не зависит от остальных аксиом евклидовой геометрии. Отсюда следует, что в системе аксиом евклидовой геометрии аксиому параллельных можно заменить ее отрицанием. Полученная при такой замене система аксиом будет также непротиворечива, так как допускает реализацию (§ 9). Геометрия, которая соответствует этой системе аксиом, называется *геометрией Лобачевского*. Таким образом, система аксиом геометрии Лобачевского состоит из аксиом евклидовой геометрии с заменой аксиомы параллельных на аксиому Лобачевского: *через точку вне данной прямой можно провести по крайней мере две прямые, не пересекающие данную.*

Оказывается, система *аксиом геометрии Лобачевского полна*, и поэтому геометрию Лобачевского можно изучать в любой ее реализации. Реализация, полученная в предыдущем параграфе, была предложена Клейном. И ее часто называют интерпретацией Клейна геометрии Лобачевского.

В геометрии Лобачевского через данную точку вне данной прямой проходит целый пучок прямых, не пересекающих данную прямую. Крайние прямые этого пучка называются *параллельными* к данной прямой в смысле Лобачевского. В интерпретации Клейна прямые, параллельные в смысле Лобачевского, изображаются хордами с общим концом.

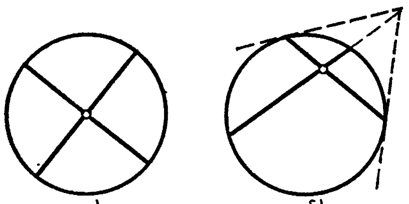
Выясним, как изображаются перпендикулярные прямые в интерпретации Клейна геометрии Лобачевского. Если прямые пересекаются в центре круга, то перпендикулярность их в смысле

Лобачевского означает обычную перпендикулярность в смысле евклидовой геометрии (рис. 115, *а*). В случае, если прямые пересекаются не в центре круга, перпендикулярность их в смысле Лобачевского означает, что касательные в концах одной хорды пересекаются на продолжении другой хорды (рис. 115, *б*). Доказательство этого утверждения мы дадим позже.

Зная, как находится расстояние между точками в интерпретации Клейна, можно найти расстояние ds между двумя бесконечно близкими точками (x, y) и $(x+dx, y+dy)$, т. е. *линейный элемент плоскости Лобачевского*. Не проводя соответствующих выкладок, приведем окончательный результат:

$$ds^2 = c\,\frac{dx^2+dy^2-(x\,dy-y\,dx)^2}{1-x^2-y^2},$$

где c — положительная постоянная.



а) *б)*

Рис. 115.

Рассматривая линейный элемент ds^2 как линейный элемент поверхности в евклидовом пространстве, выясним, что характерно для этой поверхности. В связи с этим найдем ее гауссову кривизну. По формуле Гаусса (гл. XI, § 7), дающей выражение для гауссовой кривизны через коэффициенты линейного элемента, получаем $K=-c$. Таким образом, *плоскость Лобачевского локально изометрична поверхности постоянной отрицательной кривизны*, и мы получаем еще одну интерпретацию геометрии Лобачевского. Эта интерпретация была предложена Бельтрами.

Выясним, что представляют собой прямые в интерпретации Бельтрами. Характерным свойством прямых есть то, что они являются кратчайшими. Так как отображение плоскости Лобачевского на поверхность постоянной отрицательной кривизны является изометрическим, то *прямые Лобачевского на поверхности постоянной отрицательной кривизны в интерпретации Бельтрами являются геодезическими линиями*. Расстоянием между точками в интерпретации Бельтрами является длина отрезка геодезической, соединяющей эти точки.

Что представляет собой движение в интерпретации Бельтрами? Это преобразование поверхности, сохраняющее расстояния, т. е. изометрическое преобразование.

Многие теоремы евклидовой геометрии имеют место в геометрии Лобачевского, например: теорема о сумме смежных углов, теорема о равенстве вертикальных углов, признаки равенства треугольников и др. Вместе с тем в геометрии Лобачевского есть теоремы, которых нет в евклидовой геометрии. Приведем несколько примеров.

В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше 180°.

В геометрии Лобачевского не существует треугольников сколь угодно большой площади.

В геометрии Лобачевского не существует подобных и не равных треугольников.

Докажем эти теоремы, пользуясь интерпретацией Бельтрами. По теореме Гаусса—Бонне

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=K\sigma, \qquad (*)$$

где α, β, γ—углы треугольников (радианная мера углов), σ—площадь треугольника, а K—отрицательная постоянная. Так как $K<0$, то $\alpha+\beta+\gamma<\pi$. Первая теорема доказана.

Докажем вторую теорему. Имеем

$$\sigma=\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{K}.$$

Так как α, β, $\gamma>0$, то $\sigma<\pi/|K|$, т. е. площадь любого треугольника ограничена постоянной $\pi/|K|$. Вторая теорема доказана.

Докажем третью теорему. Допустим, у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$

$$\angle A=\angle A_1, \quad \angle B=\angle B_1, \quad \angle C=\angle C_1,$$
$$A_1B_1=kAB, \quad A_1C_1=kAC, \quad B_1C_1=kBC, \quad k<1.$$

Переведем треугольник $A_1B_1C_1$ движением в такое расположение, при котором его вершина A_1 совпадает с A, вершина B_1 лежит на стороне AB, вершина C_1 лежит на стороне AC. При этом треугольник $A_1B_1C_1$ будет внутри треугольника ABC, а значит, имеет меньшую площадь. Но площадь треугольника выражается через сумму его углов по формуле $(*)$. А у наших треугольников соответствующие углы равны. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Приведем еще одну интерпретацию геометрии Лобачевского—интерпретацию Пуанкаре.

Спроектируем круг Клейна $x^2+y^2<1$ на полусферу $x^2+y^2+z^2=1$, $z>0$, прямыми, параллельными оси z. А теперь из точки $(1, 0, 0)$ спроектируем полусферу на плоскость yz. С помощью этих двух проектирований получается отображение круга $x^2+y^2<1$ на полуплоскость плоскости yz $(z>0)$. Выясним, во что перейдут при этом хорды круга, т. е. прямые Лобачевского.

Точка (x, y) круга при первом проектировании переходит в точку $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ полусферы. Найдем ее проекцию на плоскость yz при втором проектировании. Проектирующая прямая задается уравнениями

$$\frac{\bar{x}-1}{x-1}=\frac{\bar{y}}{y}=\frac{\bar{z}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Эта прямая пересекает плоскость yz в точке

$$\bar{x}=0, \quad \bar{y}=-\frac{y}{x-1}, \quad \bar{z}=-\frac{1}{x-1}\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Имеем

$$\bar{y}^2+\bar{z}^2=\frac{1-x^2}{(x-1)^2}=\frac{1+x}{1-x}.$$

Отсюда

$$x=\frac{-1+\bar{y}^2+\bar{z}^2}{1+\bar{y}^2+\bar{z}^2}, \quad y=\frac{2\bar{y}}{1+\bar{y}^2+\bar{z}^2}. \qquad (**)$$

Пусть хорда задается уравнением

$$ax+by+c=0.$$

Подставляя в это уравнение выражение для x и y, получаем уравнение кривой, в которую переходит хорда при рассматриваемом отображении

$$a(-1+\bar{y}^2+\bar{z}^2)+2b\bar{y}+c(1+\bar{y}^2+\bar{z}^2)=0,$$

или

$$(c+a)(\bar{y}^2+\bar{z}^2)+2b\bar{y}+(-a+c)=0, \qquad \bar{z}>0.$$

При $c+a\neq 0$ это уравнение полуокружности с центром на оси y. При $c+a=0$ это уравнение прямой, перпендикулярной оси y (рис. 116). Таким образом, в интерпретации Пуанкаре прямые Лобачевского изображаются полуокружностями с центром на границе полуплоскости и прямыми, перпендикулярными границе.

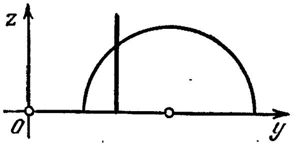


Рис. 116.

Если в линейном элементе ds^2 плоскости Лобачевского вместо переменных x и y ввести переменные $\bar{y}$ и $\bar{z}$ согласно формулам (**), то, как показывают вычисления, он приводится к виду

$$ds^2=\frac{d\bar{y}^2+d\bar{z}^2}{\bar{z}^2}.$$

Так как $d\bar{y}^2+d\bar{z}^2$—это линейный элемент плоскости yz, то отображение плоскости Лобачевского на полуплоскость Пуанкаре является конформным.

В заключение заметим, что движениям Лобачевского в интерпретации Пуанкаре соответствуют преобразования инверсии относительно центров на границе полуплоскости, сдвиги параллельно границе полуплоскости и подобия относительно центров на границе полуплоскости.

ГЛАВА XVI
ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Аксиомы принадлежности в проективной геометрии

Возникновение проективной геометрии относится к первой половине XIX века и связано с именем французского геометра Понселе (1788—1867 гг.), который определил объект изучения в проективной геометрии—свойства фигур и связанных с ними величин, инвариантные относительно любого проектирования.

Многочисленными фактами обогатили проективную геометрию Шаль (1793—1880 гг.) и Штейнер (1769—1863 гг.). Благодаря работам Штаудта (1798—1867 гг.) проективная геометрия была освобождена от чуждого ей понятия метрики и превратилась в дисциплину, изучающую только свойства взаимного расположения геометрических фигур.

Проективная геометрия строится на системе аксиом, которая состоит из трех групп: аксиомы принадлежности, аксиомы порядка и аксиома непрерывности.

В группе аксиом принадлежности речь идет о свойствах взаимного расположения точек, прямых и плоскостей, выражаемых словом «принадлежать». При этом остаются в силе соглашения об эквивалентности выражений, указанных при введении аксиом принадлежности евклидовой геометрии.

Аксиома I_1. *Каковы бы ни были точки A и B, существует прямая, проходящая через точки A и B.*

Аксиома I_2. *Каковы бы ни были две точки A и B, существует не более одной прямой, проходящей через точки A и B.*

Аксиома I_3. *На каждой прямой имеется не менее трех точек. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

Аксиома I_4. *Через каждые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит некоторая плоскость α. На каждой плоскости имеется по крайней мере одна точка.*

Аксиома I_5. *Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит не более одной плоскости.*

Аксиома I_6 *Если две точки A и B прямой a лежат на плоскости α, то каждая точка этой прямой лежит на плоскости α.*

Аксиома I_7. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют еще по крайней мере одну общую точку.*

Аксиома I_8. *Имеется не менее четырех точек, не лежащих в одной плоскости.*

Аксиома I_9. *Каждые две прямые, расположенные в одной плоскости, имеют общую точку.*

Мы видим, что система аксиом принадлежности проективной геометрии содержит в себе систему аксиом принадлежности евклидовой геометрии и отличается от нее только аксиомой I_3, где требуется существование на прямой по крайней мере трех точек, и аксиомой I_9, где утверждается, что любые две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются.

Отсюда заключаем, что все следствия аксиом принадлежности евклидовой геометрии верны также в проективной геометрии. Аксиомы I_3 и I_9 позволяют расширить совокупность этих следствий, в частности, легко доказывается, что

1) *прямая и плоскость всегда имеют общую точку;*
2) *две плоскости имеют общую прямую;*
3) *три плоскости имеют общую точку.*

§ 2. Теорема Дезарга

Важнейшим из следствий аксиом принадлежности проективной геометрии является *теорема Дезарга* о перспективном расположении трехвершинников.

Трехвершинником называется фигура, составленная из трех точек, не лежащих на одной прямой (вершин трехвершинника), и трех прямых, попарно соединяющих эти точки (сторон трехвершинника). Говорят, что трехвершинники ABC и $A'B'C'$ имеют *центр перспективы* S, если вершины A и A', B и B', C и C' лежат на прямых, проходящих через S. Трехвершинники ABC и $A'B'C'$ имеют *ось перспективы* s, если стороны AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$ пересекаются в точках, лежащих на s.

Если трехвершинники ABC и $A'B'C'$ имеют ось перспективы, то они имеют центр перспективы. Обратно, если трехвершинники *имеют центр перспективы, то они имеют ось перспективы* (рис. 117).

Доказательство. Во-первых, заметим, что если у трехвершинников совпадают две соответствующие вершины или стороны, то утверждение теоремы достаточно очевидно. Поэтому в доказательстве можно ограничиться случаем, когда соответствующие вершины и соответствующие стороны трехвершинников различны.

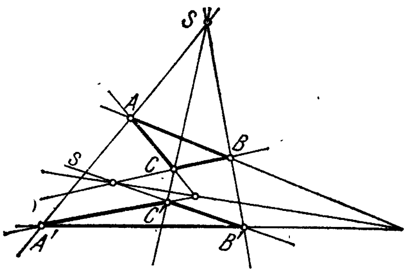


Рис. 117.

Предположим сначала, что плоскости σ и σ', в которых лежат трехвершинники, различны. Тогда эти плоскости пересекаются по прямой s, причем точками s исчерпываются все общие точки плоскостей σ и σ'.

Пусть трехвершинники имеют ось перспективы. Так как стороны AB и $A'B'$ пересекаются, но различны, то существует, и притом единственная, плоскость γ, проходящая через эти стороны. Аналогично определяются плоскости α и β, проходящие через стороны BC и $B'C'$, AC и $A'C'$ соответственно. Так как плоскости σ и σ' различны, то плоскости α, β, γ различны, причем α и β пересекаются по CC', β и γ—по AA', а γ и α—по BB'. Отсюда следует, что точка S, общая для всех плоскостей α, β, γ, является центром перспективы трехвершинников.

Пусть трехвершинники имеют центр перспективы. Так как прямые AA' и BB' пересекаются, то точки A, A', B, B' лежат в одной плоскости. Отсюда следует, что прямые AB и $A'B'$ пересекаются. А так как плоскости σ и σ' трехвершинников различны, то точка пересечения этих прямых принадлежит прямой s, по которой пересекаются плоскости σ и σ'. Аналогично показывается, что стороны AC и $A'C'$, BC и $B'C'$ тоже пересекаются на s. И следовательно, трехвершинники имеют ось перспективы s.

Пусть теперь оба трехвершинника лежат в одной плоскости σ и s—ось перспективы трехвершинников. Проведем через s плоскость σ', отличную от σ. Такая плоскость существует. В самом деле, по аксиоме I_8 существует точка P, не лежащая на плоскости σ, по аксиоме I_2 существуют две точки Q и R на s. Плоскость σ' проходит через P, Q и R. Она отлична от σ в силу аксиомы I_5.

Возьмем теперь точку O вне плоскостей σ и σ'. Такая точка существует. Действительно, существуют четыре точки K, L, M, N, не лежащие в одной плоскости. По крайней мере одна из точек не лежит в плоскости σ. Пусть это будет N. Спроектируем K, L и M из центра N на плоскость σ. Полученные при этом точки $\bar{K}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$ не лежат на одной прямой. Следовательно, в плоскости σ есть точка, не лежащая на прямой s. Точно так же доказывается существование такой точки на плоскости σ'. Прямая соединяющая эти точки, имеет еще по крайней мере одну точку O (аксиома I_3). Эта точка лежит вне плоскостей σ и σ'.

Спроектируем трехвершинник $A'B'C'$ на плоскость σ' из точки O. При этом получим трехвершинник $A''B''C''$. Прямая s для трехвершинников ABC и $A''B''C''$ является осью перспективы. Следовательно, по доказанному они имеют центр перспективы S. Пусть $\bar{S}$—проекция S из центра O на плоскость σ. Утверждаем, что $\bar{S}$ есть центр перспективы трехвершинников ABC и $A'B'C'$.

Действительно, прямые AA'', BB'', CC'' пересекаются в S. А значит, их проекции AA', BB', CC' на плоскость σ пересекаются в точке $\bar{S}$.

Пусть теперь трехвершинники расположены в одной плоскости σ и имеют центр перспективы S. Возьмем вне σ точку O. На прямой OA найдется точка $\bar{A}$, отличная от A и O. Соединим ее с S прямой g. Спроектируем на g из O точку A' и обозначим проекцию ее $\bar{A}'$. Для трехвершинников $\bar{A}BC$ и $\bar{A}'BC$ точка S—центр перспективы. По доказанному эти трехвершинники имеют ось перспективы s. Проекция этой оси s на плоскость σ является осью перспективы трехвершинников ABC и $A'B'C'$. Теорема доказана.

§ 3. Пополнение евклидова пространства несобственными элементами

Система аксиом проективной геометрии полна. Поэтому проективную геометрию можно изучать в любой из ее реализаций. Наиболее простая и наглядная реализация получается пополнением евклидова пространства *несобственными (бесконечно удаленными)* элементами — несобственными точками, прямыми и плоскостями. Эта реализация получается следующим образом.

Вводятся однородные координаты. *Однородными координатами* точки евклидова пространства называются любые четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_4 \neq 0)$, связанные с декартовыми координатами точки равенствами

$$x=\frac{x_1}{x_4}, \quad y=\frac{x_2}{x_4}, \quad z=\frac{x_3}{x_4}. \qquad (*)$$

Таким образом, однородные координаты точки определены неоднозначно. Если x_1, x_2, x_3, x_4—однородные координаты точки, то числа ρx_1, ρx_2, ρx_3, ρx_4 $(\rho \neq 0)$ будут также однородными координатами той же точки.

Плоскость в декартовых координатах задается линейным уравнением

$$ax+by+cz+d=0.$$

Подставляя в это уравнение x, y и z, выраженные через однородные координаты и замечая, что $x_4 \neq 0$, получаем уравнение плоскости в однородных координатах

$$ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0.$$

Таким образом, *в однородных координатах плоскость задается однородным линейным уравнением.*

Аналогично заключаем, что *прямая в однородных координатах задается системой двух независимых однородных линейных уравнений.*

Каждой четверке чисел x_1, x_2, x_3, x_4 при $x_4 \neq 0$ соответствует определенная точка пространства с декартовыми координатами x, y, z, которые находятся по формулам (*). Четверке чисел, у которой $x_4 = 0$, не соответствует никакая точка пространства. Условимся говорить, что такой четверке чисел, если не все они равны нулю, соответствует *несобственная или бесконечно удаленная точка.* Евклидово пространство, пополненное несобственными точками, будем называть *проективным.* Плоскостью в проективном пространстве будем называть множество точек, однородные координаты которых удовлетворяют линейному однородному уравнению, а прямой — множество точек, удовлетворяющих системе двух независимых линейных уравнений. При таком соглашении *переход от евклидова пространства к проективному сопровождается пополнением каждой евклидовой прямой одной бесконечно удаленной точкой, каждой плоскости — одной бесконечно удаленной прямой и пространства — одной бесконечно удаленной плоскостью.*

Действительно, множество бесконечно удаленных точек пространства удовлетворяет уравнению $x_4 = 0$. Это уравнение линейно, а следовательно, по определению является уравнением плоскости. Бесконечно удаленные точки плоскости удовлетворяют системе двух уравнений

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \qquad x_4 = 0.$$

По определению они задают проективную прямую. Бесконечно удаленные точки прямой задаются системой уравнений

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0,$$
$$a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0, \qquad x_4 = 0.$$

Эта система имеет единственное с точностью до множителя не тривиальное решение. Поэтому переход от евклидовой прямой к проективной сопровождается присоединением к ней одной бесконечно удаленной точки.

В случае, когда рассматривают задачи на плоскости, пользуются тремя однородными координатами x_1, x_2 и x_3. При этом бесконечно удаленными будут те точки, у которых $x_3 = 0$. На проективной плоскости прямая задается линейным однородным уравнением

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

в частности, бесконечно удаленная прямая задается уравнением $x_3 = 0$.

§ 4. Топологическое строение проективной прямой и плоскости

Найдем простые, хорошо обозримые формы, топологически эквивалентные проективной прямой и плоскости. В связи с этим определим понятие близости в проективном пространстве. Окрестностью точки $x(x_1, x_2, x_3, x_4)$ в проективном пространстве мы будем называть множество точек $y(y_1, y_2, y_3, y_4)$, для которых $|x_1-y_1|<\varepsilon$, $|x_2-y_2|<\varepsilon$, $|x_3-y_3|<\varepsilon$, $|x_4-y_4|<\varepsilon$. Будем считать, что точка y близка к x, если ε достаточно мало.

Возьмем теперь полуокружность $x^2+(y-1)^2=1$ $(y<1)$ в плоскости xy. Проектирование оси x как евклидовой прямой на полуокружность из ее центра является топологическим преобразованием прямой в полуокружность (рис. 118). Ось x как проективная прямая

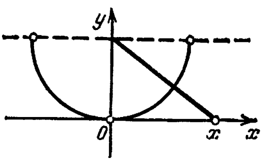


Рис. 118.

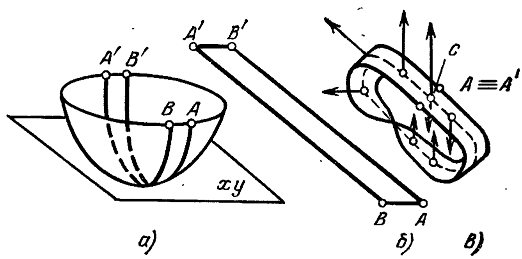


Рис. 119.

имеет бесконечно удаленную точку (1, 0, 0). Достаточно удаленные точки оси x, когда $|x|$ велико, близки к бесконечно удаленной точке, так как имеют однородные координаты 1, 0, $\frac{1}{x}$. Это дает основание отождествить концы полуокружности и сопоставить им бесконечно удаленную точку оси x. В результате получается топологическое отображение проективной прямой на замкнутую кривую—полуокружность с совмещенными концами. Таким образом, *проективная прямая топологически эквивалентна замкнутой кривой, например, окружности.*

Найдем теперь топологически эквивалентную форму проективной плоскости. Для этого возьмем полусферу $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ $(z<1)$ (рис. 119, *а*). Повторяя те же рассуждения, что и в случае проективной прямой, заключаем, что проективную плоскость xy можно топологически отобразить на полусферу, если отождествить диаметрально противоположные точки ее края. Однако в отличие от проективной прямой представить себе получаемую при этом форму довольно трудно. В связи с этим мы удалим на ней сегмент, который составлен из двух полусегментов, отсекаемых плоскостями $x=\varepsilon$ и $x=-\varepsilon$ (ε мало) (рис. 119, *а*). Так как края этих полусегментов, принадлежащие краю полусферы, отождествляются, то вместе они составляют полный сегмент.

Займемся теперь оставшейся частью полусферы, которая заключена между плоскостями $x=\pm\varepsilon$. Нетрудно представить топологическое преобразование ее в узкий прямоугольник (рис. 119, *б*).

У этого прямоугольника стороны AB и $A'B'$ должны быть совмещены, но так, чтобы точка A совместилась с A', а B—с B'. Поверхность, которая при этом получается, называется *листом Мёбиуса* (рис. 119, *в*).

Край этой поверхности составлен из сторон AB' и BA', которые являются продолжением друг друга после склеивания прямоугольника в лист Мёбиуса. Лист Мёбиуса является односторонней поверхностью. Если, задав направление нормали поверхности в точке C, непрерывно перемещаться вдоль пунктирной линии, то мы возвратимся в точку C с противоположным направлением нормали. Отмеченные свойства листа Мёбиуса лучше видеть на модели, изготовленной из узкой полоски бумаги, путем склеивания узких сторон.

Возвращаясь к вопросу о топологически эквивалентной форме проективной плоскости, приклеим вырезанный из нее сегмент (или топологически эквивалентный ему круг) к листу Мёбиуса. Тогда получим замкнутую поверхность, топологически эквивалентную проективной плоскости.

§ 5. Проективные координаты и проективные преобразования

Изучая евклидово пространство, мы ввели сначала прямоугольные декартовы координаты, а затем общие декартовы координаты. Общие декартовы координаты выражаются через прямоугольные по формулам

$$\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1,\\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2,\\
z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3,
\end{aligned}$$

причем детерминант матрицы (a_{ij}) отличен от нуля. Аналогично, в проективном пространстве, отправляясь от однородных координат x_i, введем *проективные координаты* x_i' формулами

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
x_4' &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4
\end{aligned} \tag{*}$$

с детерминантом матрицы (a_{ij}), отличным от нуля. Заметим, что проективные координаты точки так же, как и однородные, не равны нулю одновременно, так как если все x_i' равны нулю, то система (*) относительно x_i имеет только нулевое решение (детерминант системы отличен от нуля). Так как однородные координаты определены неоднозначно, то и проективные координаты определены неоднозначно. Именно, если x_i'—проективные координаты точки, то $\rho x_i'$ при $\rho \neq 0$ будут проективными координатами той же точки.

Очевидно, *в проективных координатах плоскость задается линейным уравнением, а прямая—двумя независимыми линейными* *уравнениями*. Действительно, в однородных координатах уравнение плоскости линейно. Если из формул (*) выразить x_i через x_i' и подставить эти выражения в уравнение плоскости, то мы получим линейное уравнение относительно x_i'.

Четыре плоскости, задаваемые в проективных координатах уравнениями $x_i'=0$, называются *координатными плоскостями*. Тетраэдр, грани которого лежат в этих плоскостях, называется *координатным тетраэдром*. Вершины этого тетраэдра имеют координаты: (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1). Точка с проективными координатами (1, 1, 1, 1) называется *единичной точкой*.

Покажем, что *любые четыре плоскости, не проходящие через одну точку, можно принять за координатные плоскости и любую точку, не лежащую ни в одной из этих плоскостей, — за единичную точку*. Действительно, пусть

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

— уравнения плоскостей. Введем новые координаты x_i' по формулам

$$x_i'=\lambda_i(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4) \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

В новой системе координат данные плоскости будут координатными, так как на них $x_i'=0$. Выбором множителей λ_i можно добиться, чтобы данная точка $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ в новой системе координат была единичной, т. е. чтобы $x_i'=1$.

Очевидно, переход от одной проективной системы координат к другой имеет вид (*). Действительно, если формулы (*), задающие переход от однородных координат x_i к проективным x_i', разрешить относительно x_i и полученные выражения подставить в формулы перехода от однородных координат x_i к проективным x_i'', то получим формулы перехода от проективных координат x_i' к проективным координатам x_i'', которые будут иметь вид (*).

Формулы (*) можно трактовать как формулы, задающие преобразование пространства, при котором точка $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ переходит в точку $(x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')$ в одной и той же системе проективных координат. Это преобразование называется *проективным*. Очевидно, преобразование, обратное проективному, есть проективное преобразование. Два проективных преобразования, выполненные последовательно, дают проективное преобразование. Тождественное преобразование является проективным. Короче говоря, *проективные преобразования образуют группу. Очевидно, при проективном преобразовании плоскости переходят в плоскости, прямые — в прямые.*

Подобно тому как в пространстве, на проективной плоскости вводятся три проективные координаты, которые выражаются через однородные координаты по формулам

$$\begin{aligned} x_1'&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ x_2'&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ x_3'&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad (**)$$

с детерминантом матрицы (a_{ij}), отличным от нуля. *В проективных координатах на плоскости любая прямая задается однородным линейным уравнением*

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0.$$

Вместо координатного тетраэдра на плоскости вводится понятие *координатного треугольника.*

Преобразование плоскости, задаваемое формулами (**) в одной и той же системе проективных координат, называется *проективным.* Очевидно, *при проективном преобразовании плоскости переходят в плоскости, прямые переходят в прямые.*

В дальнейшем для краткости формулы (*), задающие преобразования координат и проективные преобразования, будем записывать символически:

$$x'=Ax,$$

а уравнение плоскости $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$ в виде $ax=0$. Кроме того, условимся для координат пользоваться верхними индексами: x^1, x^2, x^3, x^4 вместо x_1, x_2, x_3, x_4.

§ 6. Ангармоническое отношение

Пусть $P_1(x_1^i)$, $P_2(x_2^i)$, $P_3(x_3^i)$, $P_4(x_4^i)$—точки, лежащие на прямой. *Ангармоническим или двойным отношенигм* этих точек, взятых в данном порядке, называется число, которое с помощью проективных координат этих точек вычисляется по формуле

$$(P_1P_2P_3P_4)=\frac{\begin{vmatrix} x_1^i & x_1^j \\ x_3^i & x_3^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^i & x_1^j \\ x_4^i & x_4^j \end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} x_2^i & x_2^j \\ x_3^i & x_3^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2^i & x_2^j \\ x_4^i & x_4^j \end{vmatrix}} \qquad (i\neq j).$$

Для того, чтобы данное определение было корректно, надо, чтобы величина ангармонического отношения не зависела от номеров i, j координат, с помощью которых оно вычисляется.

Пусть

$$ax=0, \qquad bx=0 \tag{*}$$

—уравнения прямой, на которой лежат точки P_i. Координаты этих точек являются решениями системы (*). Эта система однородная и имеет ранг 2. Поэтому любое ее решение можно представить в виде линейной комбинации двух независимых решений. Отсюда следует, что координаты точек P_3 и P_4 можно представить через координаты точек P_1 и P_2 в виде

$$x_3^i=x_1^i+\lambda x_2^i, \qquad x_4^i=x_1^i+\mu x_2^i.$$

Подставляя эти выражения в формулу для ангармонического отношения, получим

$$(P_1P_2P_3P_4)=\frac{\lambda}{\mu}.$$

Отсюда видно, что *ангармоническое отношение действительно не зависит от выбора номеров координат* i и j.

Докажем, что *ангармоническое отношение не зависит от выбора системы координат*. Действительно, пусть переход к новой системе координат осуществляется по формуле

$$x' = Ax.$$

Тогда

$$x_1' = Ax_1, \qquad x_2' = Ax_2,$$
$$x_3' = A(x_1 + \lambda x_2) = Ax_1 + \lambda Ax_2 = x_1' + \lambda x_2',$$
$$x_4' = A(x_1 + \mu x_2) = Ax_1 + \mu Ax_2 = x_1' + \mu x_2'.$$

Мы видим, что координаты точек P_3 и P_4 выражаются через координаты точек P_1 и P_2 в новой системе координат по тем же формулам, что и в старой. Следовательно, ангармоническое отношение точек в новой системе будет тем же: λ/μ. Итак, ангармоническое отношение не зависит от выбора системы координат.

Ангармоническое отношение не изменяется при проективном преобразовании. Это значит, что если при проективном преобразовании точки P_1, P_2, P_3, P_4 переходят соответственно в точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, то

$$(P_1P_2P_3P_4) = (Q_1Q_2Q_3Q_4).$$

Доказательство этого утверждения формально ничем не отличается от приведенного только что доказательства независимости ангармонического отношения от выбора системы координат.

Ангармоническое отношение не меняется при проектировании. Это значит, что если четыре точки, лежащие на прямой, проектируются из некоторой точки S на другую прямую, то у проекций этих точек то же ангармоническое отношение. Действительно, примем точку S за вершину координатного треугольника (0, 0, 1), а прямую, на которую проектируются точки, за координатную прямую $x^3 = 0$. Пусть $a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$ — уравнение прямой, на которой лежат наши точки. Проективное преобразование, задаваемое формулами

$$x^{1'} = x^1, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3,$$

сохраняет прямые, проходящие через точку S, а следовательно, переводит данные точки на прямой $a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$ в их проекции на прямой $x^3 = 0$. Так как при проективном преобразовании ангармоническое отношение не меняется, то оно таким образом не меняется и при проектировании. Утверждение доказано.

Ангармоническим отношением четырех прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через одну точку, называется ангармоническое отношение четырех точек, которые получаются в пересечении произвольной прямой с четырьмя данными. Так как при проектировании ангармоническое отношение не меняется, то определяемое таким образом ангармоническое отношение прямых не зависит от случайно взятой секущей прямой.

Аналогично определяется ангармоническое отношение четырех плоскостей, проходящих через прямую. Берем произвольную прямую, пересекающую эти плоскости, и ангармоническое отношение четырех точек пересечения принимаем за ангармоническое отношение плоскостей. Определяемое так ангармоническое отношение плоскостей не зависит от выбора секущей прямой.

В заключение дадим формулы для вычисления ангармонического отношения четырех точек через декартовы координаты этих точек. Если в формуле для ангармонического отношения координаты считать однородными, принять $i=1$, $j=4$ и перейти от однородных координат к декартовым, то

$$(P_1P_2P_3P_4)=\frac{x_1-x_3}{x_1-x_4}:\frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}.$$

Если взять $i=2$ или $i=3$, то получится аналогичная формула с заменой x на y или соответственно на z.

§ 7. Гармоническое разделение пар точек

Мы будем говорить, что точки C, D на прямой *гармонически разделяют* точки A, B, если $(ABCD)=-1$. Из этого определения немедленно следует, что *если точки C, D гармонически разделяют точки A, B, то точки A, B гармонически разделяют точки C, D.*

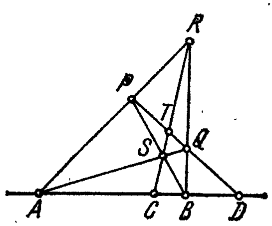


Рис. 120.

Четырехвершинником называется фигура, составленная из четырех точек плоскости, каждые три из которых не лежат на одной прямой, и шести прямых, попарно соединяющих эти точки. Точки называются *вершинами четырехвершинника*, а соединяющие их прямые—*сторонами четырехвершинника*. Стороны четырехвершинника, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими*. Точки пересечения противолежащих сторон называются *диагональными точками*. На рис. 120 четырехвершинник с вершинами P, Q, R, S. Его диагональные точки A, B и T.

Пусть A и B—диагональные точки четырехвершинника $PQRS$, C и D—точки пересечения прямой AB со сторонами, сходящимися в третьей диагональной точке (см. рис. 120). Тогда точки C и D гармонически разделяют точки A и B.

Доказательство. Примем точки A, B и R за вершины координатного треугольника, а S—за единичную точку:

$$A(1,\ 0,\ 0),\quad B(0,\ 1,\ 0),\quad R(0,\ 0,\ 1),\quad S(1,\ 1,\ 1).$$

Найдем координаты точки C. Они выражаются через координаты точек S и R. Имеем $x^1=1+\lambda\cdot 0$, $x^2=1+\lambda\cdot 0$, $x^3=1+\lambda\cdot 1$. Так как на прямой AB $x^3=0$, то точка C имеет координаты: 1, 1, 0. Аналогично находятся координаты точек P и Q: $P(1, 0, 1)$, $Q(0, 1, 1)$. Координаты точки D выражаются через координаты точек P и Q: $x^1 = 1 + \lambda \cdot 0$, $x^2 = 0 + \lambda \cdot 1$, $x^3 = 1 + \lambda \cdot 1$. Так как $x^3 = 0$, то $\lambda = -1$. Следовательно, координаты точки D: 1, -1, 0. Зная координаты точек A, B, C, D, без труда находим $(ABCD) = -1$.

Из точки R точки A, B, C, D проектируются в точки P, Q, T, D. Отсюда следует, что точки P, Q гармонически разделяют точки T, D. Из точки A точки P, Q, T, D проектируются в точки R, S, T, C. Поэтому точки R, S гармонически разделяют точки T, C.

Выясним, каково взаимное расположение точек A, B, C на евклидовой прямой, если точка D бесконечно удаленная. Примем прямую AB за ось x. Пусть точка D, оставаясь конечной, неограниченно удаляется. Имеем

$$(ABCD) = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = -1.$$

При $x_4 \to \infty$ отношение $(x_1 - x_4)/(x_2 - x_4) \to 1$. Поэтому $(x_1 - x_3)/(x_2 - x_3) \to -1$, т. е. точка C неограниченно приближается к середине отрезка AB. Когда точка D становится бесконечно удаленной, т. е. прямые AB и PQ становятся параллельными, точка C становится серединой отрезка AB.

На этом свойстве основано решение следующей задачи элементарной геометрии.

Дан отрезок AB и его середина C. Провести через произвольную точку P прямую PQ, параллельную прямой AB, с помощью одной линейки.

Решение. Проводим прямую AP. Отмечаем на ней любую точку R, отличную от A и P. Проводим прямую RC, затем прямую PB и находим точку S пересечения этих прямых. Проводим прямую AS до пересечения с прямой RB в точке Q. Прямая PQ параллельна прямой AB.

Аналогично решается следующая задача. Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Пользуясь только линейкой, разделить отрезок пополам (т. е. найти его середину).

§ 8. Кривые и поверхности второго порядка

Кривой второго порядка на проективной плоскости называется геометрическое место точек плоскости, удовлетворяющих уравнению вида

$$a_{11}x^{1^2} + 2a_{12}x^1x^2 + \ldots + a_{33}x^{3^2} = 0. \qquad (*)$$

Очевидно, это определение инвариантно относительно выбора проективной системы координат, так как переход к любой другой системе координат связан с линейным преобразованием переменных и поэтому не меняет вида уравнения.

Как известно из алгебры, квадратичная форма, стоящая в левой части уравнения (*), линейным преобразованием приводится к одной из следующих канонических форм:

$$x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}, \quad x^{1^2} + x^{2^2} - x^{3^2}, \quad x^{1^2} + x^{2^2}, \quad x^{1^2} - x^{2^2}, \quad x^{1^2}.$$

С точки зрения проективной геометрии этот алгебраический результат можно трактовать как существование системы проективных координат, в которой уравнение данной кривой второго порядка принимает одну из следующих форм:

$$x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}=0,\quad x^{1^2}+x^{2^2}-x^{3^2}=0,\quad x^{1^2}-x^{2^2}=0,\quad x^{1^2}+x^{2^2}=0,$$
$$x^{1^2}=0. \qquad (**)$$

В первом случае кривая называется *мнимой*. Ее уравнению не удовлетворяет ни одна точка плоскости, так как проективные координаты не могут одновременно равняться нулю. Во втором случае кривая называется *овальной*. В третьем случае кривая распадается на пару прямых $x^1-x^2=0$, $x^1+x^2=0$. В четвертом случае кривая распадается на пару мнимых прямых $x^1-ix^2=0$, $x^1+ix^2=0$. В последнем случае кривая распадается на пару слившихся прямых $x^1=0$.

Алгебраический результат о приведении левой части уравнения (*) к каноническому виду можно трактовать иначе, как возможность проективным преобразованием перевести данную кривую (*) в одну из кривых, задаваемых уравнениями (**) в той же системе проективных координат.

Поверхности второго порядка определяются аналогично, как геометрическое место точек пространства, удовлетворяющих уравнению вида

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x^ix^j=0$$

в проективных координатах x^i. Так же, как и для кривых второго порядка, доказывается существование проективной системы координат, в которой уравнение поверхности принимает одну из следующих канонических форм:

$$x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}+x^{4^2}=0,\qquad x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}-x^{4^2}=0,$$
$$x^{1^2}+x^{2^2}-x^{3^2}-x^{4^2}=0,\qquad x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}=0,$$
$$x^{1^2}+x^{2^2}-x^{3^2}=0,\quad x^{1^2}+x^{2^2}=0,\quad x^{1^2}-x^{2^2}=0,\quad x^{1^2}=0.$$

Этот результат можно трактовать также как возможность перевести данную поверхность проективным преобразованием в поверхность, заданную одним из указанных уравнений.

Касательной кривой второго порядка в точке $A_0(x_0^i)$ называется предельное положение секущей, проходящей через точку A_0 и близкую к ней точку кривой $\bar{A}(\bar{x}^i)$, когда $\bar{A}\to A_0$, т. е. когда $\bar{x}^i\to x_0^i$ $(i=1, 2, 3)$. Составим уравнение касательной кривой второго порядка, заданной уравнением

$$\sum a_{ij}x^ix^j=0.$$

Пусть ω — малая окрестность точки A_0. Возьмем на секущей $A_0\bar{A}$ вне этой окрестности точку $A(x^i)$. Нормируем координаты этой точки так, чтобы $\sum(x^i)^2=1$. Координаты точки $\bar{A}$ можно выразить через координаты точек A_0 и A. Именно, $\bar{x}^i=x_0^i+\lambda x^i$. Подставляя эти значения в уравнение кривой, получим

$$\lambda^2 \sum a_{ij}x^i x^j + 2\lambda \sum a_{ij}x^i x_0^j + \sum a_{ij}x_0^i x_0^j = 0.$$

Третье слагаемое левой части равенства равно нулю, так как точка A_0—на кривой. Сокращая на λ и переходя к пределу при $\bar{A} \to A_0$, т. е. при $\lambda \to 0$, получаем уравнение, которому удовлетворяет предельная прямая, т. е. касательная

$$\sum a_{ij}x^i x_0^j = 0.$$

Замечание. Окрестность ω и нормировка координат x^i понадобилась для того, чтобы из $\bar{A} \to A_0$ заключить, что $\lambda \to 0$ и $\lambda \sum a_{ij}x^i x^j \to 0$.

Касательной плоскостью к поверхности в данной точке называется геометрическое место точек касательных к плоским сечениям, проходящим через данную точку. Вывод уравнения касательной плоскости к поверхности второго порядка ничем не отличается от вывода уравнения касательной к кривой второго порядка. Получается следующее уравнение касательной плоскости:

$$\sum_{i,\,j=1}^{4} a_{ij}x^i x_0^j = 0.$$

§ 9. Теорема Штейнера

Пучком прямых на проективной плоскости называется совокупность всех прямых, проходящих через одну точку—*центр пучка*. Соответствие между прямыми двух пучков называется *проективным*, если существует проективное преобразование, которое переводит прямые одного пучка в соответствующие прямые другого пучка. Если соответствующие прямые двух пучков пересекаются на одной прямой, то такое соответствие называется *перспективным*. Очевидно, оно проективно. Имеет место следующая *теорема Штейнера*.

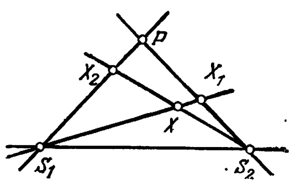


Рис. 121.

Геометрическое место точек пересечения соответствующих прямых двух проективных, но не перспективных пучков есть невырожденная кривая второго порядка. И обратно, два пучка с центрами на кривой второго порядка, у которых соответствующие прямые пересекаются на этой кривой—проективны.

Доказательство. Примем центры пучков за две вершины координатного треугольника: $S_1(1, 0, 0)$, $S_2(0, 1, 0)$, а за третью вершину примем любую точку $P(0, 0, 1)$ (рис. 121). Пусть $X(x^i)$—точка пересечения двух соответствующих прямых пучков. Найдем координаты точки $X_1(x_1^i)$ пересечения прямой S_1X с прямой S_2P. Они выражаются через координаты точек S_1 и X: $x_1^1 = x^1 + \lambda \cdot 1$, $x_1^2 = x^2 + \lambda \cdot 0$, $x_1^3 = x^3 + \lambda \cdot 0$. Аналогично находим координаты точки $X_2(x_2^i)$ пересечения прямых S_2X и S_1P; $x_2^1=x^2$, $x_2^3=x^3$.

Пусть теперь $A_i(a_i^j)$ $(i=1, 2, 3)$—точки пересечения прямых пучка с центром S_1 и прямой S_2P, а $B_i(b_i^j)$ $(i=1, 2, 3)$—точки пересечения соответствующих прямых второго пучка с прямой S_1P. Так как пучки проективны, то $(A_1A_2A_3X_1)=(B_1B_2B_3X_2)$. Это и дает уравнение геометрического места точек:

$$\frac{\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ x^2 & x^3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ x^2 & x^3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^3 \\ b_3^1 & b_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^3 \\ x^1 & x^3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} b_2^1 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2^1 & b_2^3 \\ x^1 & x^3 \end{vmatrix}}.$$

Мы видим, что для координат точки X получается однородное уравнение второй степени. Следовательно, геометрическое место точек X есть кривая второго порядка.

Докажем второе утверждение теоремы.

Пусть S_1, A_1, A_3, A_3, S_2—пять точек на невырожденной кривой второго порядка. Существует проективное преобразование, которое переводит точки S_1, A_1, A_2, A_3 в точки S_2, A_1, A_2, A_3. Это проективное преобразование устанавливает проективное соответствие между пучками с центрами S_1 и S_2. По доказанному соответствующие прямые пучков пересекаются на некоторой кривой второго порядка. Точки S_1, A_1, A_2, A_3, S_2 принадлежат этой кривой. Чтобы завершить доказательство, нам надо показать, что две невырожденные кривые второго порядка, у которых пять общих точек, совпадают.

Выполним проективное преобразование, при котором одна кривая в декартовых координатах задается уравнением $y=x^2$, а другая—уравнением общего вида $F(x, y)=0$. Подставляя $y=x^2$ во второе уравнение, получим многочлен четвертой степени $F(x, x^2)=0$. Так как кривые имеют пять общих точек, то этот многочлен обращается в нуль для пяти значений x, а значит, обращается в нуль тождественно. Следовательно, кривая $y=x^2$ целиком лежит на кривой $F(x, y)=0$. Поменяв ролями кривые, приходим к выводу, что вторая кривая лежит на первой. Таким образом, кривые совпадают. Теорема доказана полностью.

§ 10. Теорема Паскаля

Докажем следующую *теорему Паскаля*.

Пусть γ—невырожденная кривая второго порядка и A_1, A_2, ..., A_6—шесть точек на этой кривой. Тогда три точки пересечения прямых A_1A_5 и A_2A_4, A_3A_4 и A_1A_6, A_2A_6 и A_3A_5 лежат на одной прямой (рис. 122). Обычно теорему Паскаля формулируют довольно просто: противолежащие стороны шестиугольника, вписанного в кривую второго порядка, пересекаются на одной прямой. При этом под шестиугольником понимают любую шестизвенную замкнутую ломаную, а под сторонами понимают прямые, содержащие звенья ломаной.

Очевидно, теорему Паскаля достаточно доказать для какой-нибудь невырожденной кривой второго порядка, так как любые две невырожденные кривые второго порядка переводятся друг в друга проективным преобразованием, а проективное преобразование переводит прямые в прямые, в частности, точки, лежащие на прямой, в точки, лежащие на прямой.

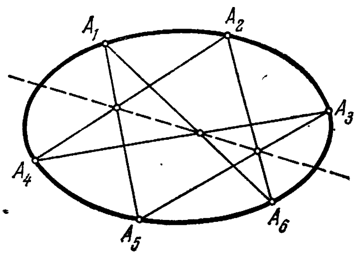


Рис. 122.

Пусть кривая γ — парабола $x = y^2$.

Обозначим через $\alpha_{ij}(x, y) = 0$ уравнение прямой A_iA_j. Составим выражение

$$P(x, y) = \alpha_{24}\alpha_{16}\alpha_{35} - \lambda\alpha_{34}\alpha_{26}\alpha_{15}. \quad (*)$$

Оно представляет собой многочлен третьей степени относительно x, y. Уравнению $P(x, y) = 0$ удовлетворяют координаты точек A_1, A_2, ..., A_6, так как для них первое и второе слагаемые выражения $P(x, y)$ обращаются в нуль.

Возьмем любую точку A на кривой γ, отличную от точек A_i и выберем значение λ так, чтобы координаты этой точки тоже удовлетворяли уравнению $P(x, y) = 0$. При таком λ семь точек кривой γ будут удовлетворять уравнению $P(x, y) = 0$.

Если в уравнение $P(x, y) = 0$ подставить y^2 вместо x, то мы получим уравнение $P(y^2, y) = 0$. Оно шестой степени, а удовлетворяется семью различными значениями y (семь точек). Как известно, такое уравнение должно быть тождеством, а следовательно, должно удовлетворяться при любом y. Это значит, что каждая точка параболы γ удовлетворяет уравнению $P(x, y) = 0$.

Рассматривая $P(x, y)$ как многочлен относительно x с коэффициентами в виде многочленов относительно y, будем делить его на $x - y^2$. Получим

$$P(x, y) = (x - y^2)\,Q(x, y) + R(y),$$

где $Q(x, y)$ — частное от деления, $R(y)$ — остаток ($Q(x, y)$ и $R(y)$ — многочлены).

Так как каждая точка параболы $x - y^2 = 0$ удовлетворяет уравнению $P(x, y) = 0$, то $R(y)$ равно нулю при любом y, т. е. $R(y) \equiv 0$.

Таким образом,

$$P(x, y) = (x - y^2)\,Q(x, y),$$

где $Q(x, y)$ — многочлен. Так как $P(x, y)$ — многочлен третьей степени, то $Q(x, y)$ — многочлен первой степени. Итак,

$$P(x, y) = (x - y^2)(ax + by + c).$$

Из выражения (*) для $P(x, y)$ видно, что точки пересечения, о которых идет речь в теореме Паскаля, удовлетворяют уравнению $P(x, y) = 0$. А так как они не лежат на кривой γ (параболе $x = y^2$), то они лежат на прямой $ax + by + c = 0$. Теорема доказана.

С помощью теоремы Паскаля доказывается *теорема Паппа*. Она состоит в следующем.

Пусть даны две прямые и на одной из них точки A_1, A_2, A_3, а на другой — A_4, A_5, A_6. Тогда три точки пересечения прямых A_1A_5 и A_2A_4, A_1A_6 и A_2A_5, A_2A_6 и A_3A_5 лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+\ldots+a_{33}=0 \qquad (**)$$

— уравнение пары наших прямых. Сколь угодно малым изменением коэффициентов уравнения (**) можно добиться, чтобы оно стало уравнением невырожденной кривой

$$a'_{11}x^2+2a'_{12}xy+\ldots+a'_{33}=0. \qquad (***)$$

Отметим на ней точки B_1, B_2, ..., B_6, ближайшие к точкам A_1, A_2, ..., A_6. По теореме Паскаля три точки пересечения прямых B_1B_5 и B_2B_4, ... лежат на одной прямой. Пусть теперь коэффициенты уравнения (***) стремятся к соответствующим коэффициентам уравнения (**). Тогда точки B_i неограниченно приближаются к точкам A_i. Отсюда и следует, что три точки пересечения прямых A_1A_5 и A_2A_4, ... лежат на одной прямой. Теорема доказана.

§ 11. Полюс и поляра

Пусть γ — невырожденная кривая второго порядка и $A_0(x_0^i)$ — точка, не лежащая на этой кривой. Проведем через точку A_0 прямую, пересекающую кривую γ в двух точках, обозначим их $A_1(x_1^i)$ и $A_2(x_2^i)$. Пусть $X(x^i)$ — точка этой прямой, которая вместе с точкой A_0 гармонически разделяет точки A_1 и A_2. Покажем, что все построенные так точки X лежат на одной прямой. Эта прямая называется *полярой точки* A_0, а точка A_0 для нее — *полюсом*. Составим уравнение поляры точки A_0.

Пусть

$$\sum a_{ij}x^ix^j=0$$

— уравнение кривой γ. Выразим координаты точек A_1 и A_2 через координаты точек X_0 и X. Имеем

$$x_1^i=x^i+\lambda x_0^i, \qquad x_2^i=x^i+\mu x_0^i.$$

Так как $(A_1A_2A_0X)=\lambda/\mu=-1$, то $\mu=-\lambda$. Так как точки A_1 и A_2 лежат на кривой γ, то

$$\sum a_{ij}(x^i+\lambda x_0^i)(x^j+\lambda x_0^j)=0,$$
$$\sum a_{ij}(x^i-\lambda x_0^i)(x^j-\lambda x_0^j)=0.$$

Вычитая эти равенства почленно, получаем уравнение, которому удовлетворяют координаты точек X:

$$\sum a_{ij}x^ix_0^j=0. \qquad (*)$$

Мы видим, что оно линейно, а следовательно, является уравнением прямой. Это и есть поляра точки A_0.

Если точка A_0 лежит на кривой, наше построение теряет смысл. В этом случае поляра определяется формально, как прямая, задаваемая уравнением (*).

Из уравнения поляры легко видеть, что *если поляра точки* (x_0^i) *проходит через точку* (x^i), *то поляра точки* (x_1^i) *проходит через точку* (x_0^i).

Действительно оляра точки (x_0^i) имеет уравнение

$$\sum a_{ij} x^i x_0^j = 0.$$

А поляра точки (x_1^i) имеет уравнение

$$\sum a_{ij} x^i x_1^j = 0.$$

Если поляра точки (x_0^i) проходит через точку (x_1^i), то это значит, что

$$\sum a_{ij} x_1^i x_0^j = 0.$$

А так как $a_{ij} = a_{ji}$, то

$$\sum a_{ij} x_0^i x_1^j = 0,$$

т. е. поляра точки (x_1^i) проходит через точку (x_0^i). Что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что *если точка перемещается по прямой, то ее поляра все время проходит через полюс этой прямой. И обратно, если прямая проходит через данную точку и поворачивается, то ее полюс перемещается по поляре этой точки.*

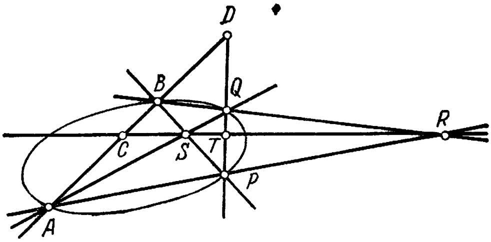


Рис. 123.

Две прямые называются *полярно сопряженными*, если каждая из них проходит через полюс другой. Сопряженные диаметры центральной кривой второго порядка являются полярно сопряженными. Полюсом для каждого из них является бесконечно удаленная точка другого диаметра. (Напомним, что середина между двумя точками на прямой гармонически сопряжена с бесконечно удаленной точкой.)

Поляра точки допускает простое геометрическое построение, которое состоит в следующем (рис. 123). Через данную точку D проводим две прямые, пересекающие кривую в двух точках. Поляра точки D проходит через диагональные точки R и S четырехвершинника $ABPQ$. Действительно, по свойству четырехвершинника точки C, D гармонически разделяют точки A, B, а точки D, T гармонически разделяют точки P, Q. Следовательно, точки C и T лежат на поляре точки D.

На свойстве полюса и поляры основано решение следующей задачи элементарной геометрии. Дана окружность и точка вне ее. Построить касательные из данной точки к окружности, пользуясь только линейкой.

Решение (рис. 124). Строим поляру a точки A. Точки пересечения ее с окружностью являются точками касания. Действительно, касательные в этих точках являются полярами точек касания, а следовательно, проходят через полюс прямой a, т. е. через точку A.

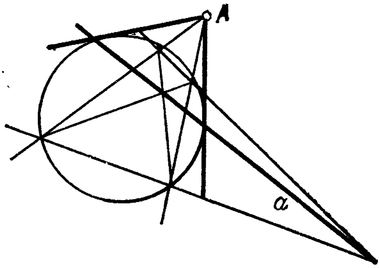


Рис. 124.

Обратимся теперь к интерпретации Клейна геометрии Лобачевского. Выясним, как изображаются в этой интерпретации перпендикулярные прямые. Если прямые пересекаются в центре круга, то перпендикулярность по Лобачевскому означает обычную перпендикулярность (по Евклиду). Перпендикулярные диаметры полярно сопряжены. Так как движения Лобачевского в интерпретации Клейна — это проективные преобразования, сохраняющие окружность круга, то перпендикулярность прямых в случае общего расположения означает их полярную сопряженность относительно окружности круга Клейна. Таким образом, для данной прямой перпендикулярными будут те прямые (хорды круга), которые проходят через полюс.

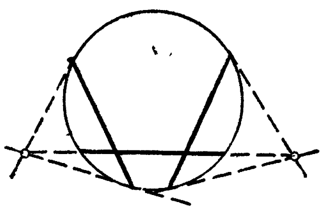


Рис. 125.

В связи с изложенным заметим, что на плоскости Лобачевского к двум не пересекающимся и не параллельным (по Лобачевскому) прямым можно провести, и притом только один, перпендикуляр. На рис. 125 показано, как строится такой перпендикуляр в интерпретации Клейна.

§ 12. Полярное преобразование. Теорема Брианшона

Пусть γ — невырожденная кривая второго порядка. Отобразим множество точек и прямых проективной плоскости на себя, сопоставляя произвольной точке ее поляру относительно кривой γ, а произвольной прямой — ее полюс. Это отображение будем называть *полярным преобразованием*. Полярное преобразование обладает важным свойством, вытекающим из свойств поляры и полюса. Именно, если точкам A и B сопоставляются прямые a и b, то прямой AB сопоставляется точка их пересечения; если прямым a и b сопоставляются точки A и B, то точке их пересечения сопоставляется прямая AB.

Применим полярное преобразование к доказательству следующей *теоремы Брианшона.*

Прямые, соединяющие противолежащие вершины шестиугольника, описанного около невырожденной кривой второго порядка, *пересекаются в одной точке* (рис. 126). При этом под шестиугольником понимается любая шестизвенная замкнутая ломаная, а сторонами называются прямые, содержащие ее звенья.

Выполним полярное преобразование относительно кривой, около которой описан шестиугольник. При этом стороны шестиугольника перейдут в точки касания их с кривой. Вершины шестиугольника перейдут в прямые, соединяющие соответствующие точки касания. В результате получится шестиугольник, вписанный в кривую. По теореме Паскаля противолежащие стороны этого шестиугольника пересекаются на прямой. Этой прямой соответствует точка, через которую проходят прямые, соединяющие противолежащие вершины описанного шестиугольника. Теорема доказана.

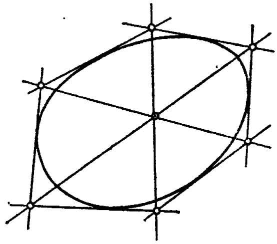


Рис. 126.

Точно так же как на плоскости, вводится понятие поляры точки относительно невырожденной поверхности второго порядка. Здесь полярой является уже плоскость.

Если поверхность задана уравнением

$$\sum_{i,\, j=1}^{4} a_{ij}x^i x^j = 0,$$

то поляра точки (x_0^i) задается уравнением

$$\sum a_{ij}x^i x_0^j = 0.$$

С помощью полюса и поляры вводится понятие *полярного преобразования* в пространстве. Это отображение множества точек, прямых и плоскостей пространства, при котором произвольной точке ставится в соответствие ее поляра, произвольной плоскости — ее полюс, а произвольной прямой — прямая пересечения поляр каких-либо двух ее точек.

§ 13. Принцип двойственности

Остановимся на одном из основных фактов проективной геометрии — *принципе двойственности.*

Если в аксиомах принадлежности на плоскости выражение «точка лежит на прямой» заменим выражением «точка инцидентна» прямой, а выражение «прямая проходит через точку» — выражением «прямая инцидентна точке», то при замене в каждой аксиоме слова «точка» словом «прямая» и слова «прямая» словом «точка» мы получим утверждения, которые имеют место в силу соответствующих аксиом.

Действительно, в новой редакции аксиома I_1 гласит: Для двух точек A и B существует прямая, им инцидентная. Соответствующее утверждение: для двух прямых существует инцидентная с ними точка. Это следует из аксиомы I_9.

Аксиома I_2: для двух различных точек A и B существует не более одной прямой, с ними инцидентной. Соответствующее утверждение: для двух различных прямых a и b существует не более одной инцидентной с ними точки. Это следует из аксиомы I_2.

Аксиома I_3: для данной прямой существуют три точки, с ней инцидентные. Существуют три точки, не инцидентные с одной прямой. Соответствующее утверждение: для данной точки A существуют три прямые, с ней инцидентные; существуют три прямые, не инцидентные с одной точкой. Действительно, в силу аксиомы I_3 существуют две точки B и C, не лежащие на одной прямой с A. На прямой BC есть три точки по той же аксиоме. Прямые, о которых идет речь, соединяют эти три точки с A. Второе утверждение также следует из аксиомы I_3. Действительно, соединим попарно тремя прямыми три точки, не лежащие на одной прямой. Они не проходят через одну точку.

При независимом построении проективной геометрии на плоскости, т. е. не выходя в пространство, как показал Гильберт, к числу аксиом принадлежности надо отнести и предложение Дезарга. Но предложение Дезарга, очевидно, двойственно само себе.

Оказывается двойственность имеет место не только в аксиомах принадлежности, но и в остальных аксиомах проективной геометрии на плоскости. Эта двойственность в системе аксиом имеет своим следствием теорему, именуемую *принципом двойственности* на плоскости.

Если верно некоторое утверждение A для точек и прямых, выраженное в терминах инцидентности и порядка, то верно также утверждение A', в котором слово «точка» заменено словом «прямая», а слово «прямая» — словом «точка».

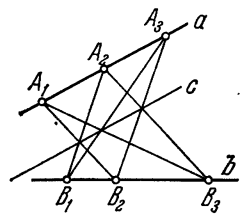


Рис. 127.

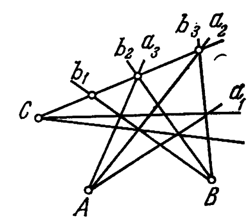


Рис. 128.

Пример. Пусть точки A_1, A_2, A_3 инцидентны прямой a, B_1, B_2, B_3 — точки, инцидентные прямой b, C_{ij} $(i \neq j)$ — точки, инцидентные прямым A_iB_j и A_jB_i. Тогда точки C_{ij} инцидентны одной прямой c (рис. 127). Это теорема Паппа.

Двойственное утверждение. Пусть прямые a_1, a_2, a_3 инцидентны точке A, b_1, b_2, b_3 — прямые, инцидентные точке B, c_{ij} $(i \neq j)$ — прямые, инцидентные точкам a_ib_j и a_jb_i ... Тогда прямые c_{ij} инцидентны одной точке C (рис. 128).

В проективном пространстве также имеет место принцип двойственности. Им утверждается, что из справедливости всякого утверждения A для точек, прямых и плоскостей следует утверждение A', в котором слово «точка» заменено словом «плоскость», а слово «плоскость» — словом «точка».

Двойственность в проективной геометрии естественно имеет аналитическое выражение, которое мы сейчас проиллюстрируем.

Будем называть коэффициенты уравнения прямой тангенциальными координатами прямой. Очевидно, они определены лишь с точностью до произвольного отличного от нуля множителя, как и координаты точки.

Уравнение

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

при фиксированных u_1, u_2, u_3, как известно, является уравнением прямой (с координатами u_1, u_2, u_3), а при фиксированных x_1, x_2, x_3 оно есть уравнение пучка прямых (с центром (x_1, x_2, x_3)).

Как известно, каковы бы ни были две точки на прямой (y_i) и (z_i), координаты любой точки прямой можно представить в виде $x_i=\lambda y_i+\mu z_i$. Точно так же, каковы бы ни были две прямые пучка (v_i) и (w_i), координаты любой прямой пучка представляются в виде $u_i=\lambda v_i+\mu w_i$.

Наконец, можно показать, что ангармоническое отношение четырех прямых пучка определяется по той же формуле, только координаты точек заменяются координатами прямых.

В пространстве аналогично вводятся тангенциальные координаты плоскостей и устанавливаются аналогичные факты.

Кривой второго класса называется фигура, составленная из всех прямых, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$b_{11}u_1^2+2b_{12}u_1u_2+\ldots+b_{33}u_3^2=0.$$

Кривая второго класса образована либо касательными кривой второго порядка, либо она состоит из двух пучков прямых, может быть, совпадающих.

§ 14. Различные геометрии в проективной схеме

Ф. Клейн в работе, известной под названием «О так называемой неевклидовой геометрии», установил замечательную связь между евклидовой геометрией, геометрией Лобачевского и геометрией Римана в узком смысле. Сейчас мы рассмотрим эту связь.

В гл. XV была рассмотрена реализация геометрии Лобачевского в круге $x^2+y^2<1$ на евклидовой плоскости. Очевидно, эту реализацию можно считать выполненной на проективной плоскости в области, ограниченной кривой второго порядка

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2<0.$$

Спрашивается, нельзя ли подобную реализацию на проективной плоскости получить для евклидовой геометрии?

Легко видеть, что такую реализацию указать нетрудно. И рассматриваемая нами в гл. XV декартова реализация является таковой. Действительно, назовем точками евклидовой плоскости точки проективной плоскости, у которых

$x_3 \neq 0$, а движениями — проективные преобразования вида

$$x_1' = x_1 \cos\theta - \varepsilon x_2 \sin\theta + a_1 x_3,$$
$$x_2' = x_1 \sin\theta + \varepsilon x_2 \cos\theta + a_2 x_3, \qquad (*)$$
$$x_3' = x_3 \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Если прямую $x_3 = 0$ назвать бесконечно удаленной и перейти к декартовым координатам, то эти преобразования будут иметь вид

$$x' = x\cos\theta - \varepsilon y \sin\theta + a_1,$$
$$y' = x\sin\theta + \varepsilon y \cos\theta + a_2.$$

В точности такими формулами задаются движения в декартовой реализации евклидовой геометрии.

Проективные преобразования (*) можно характеризовать и геометрическим способом. Они сохраняют вырожденную кривую второго класса $u_1^2 + u_2^2 = 0$. В самом деле, эта кривая состоит из двух пучков прямых $u_1 + iu_2 = 0$, $u_1 - iu_2 = 0$ с центрами в точках $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$.

Легко видеть, что преобразование (*) либо оставляет эти точки неподвижными ($\varepsilon = 1$), либо переставляет их ($\varepsilon = -1$) и поэтому сохраняет кривую второго класса $u_1^2 + u_2^2 = 0$. Следует, однако, заметить, что проективные преобразования, определяемые указанным геометрическим свойством, включают не только преобразования (*). Они имеют более общую форму

$$x_1' = \rho(x_1 \cos\theta - \varepsilon x_2 \sin\theta) + a_1 x_3,$$
$$x_2' = \rho(x_1 \sin\theta + \varepsilon x_2 \cos\theta) + a_2 x_3,$$
$$x_3' = x_3$$

и содержат не только движения, но и преобразования подобия.

Система аксиом геометрии Римана в узком смысле состоит из аксиом принадлежности, аксиом порядка, аксиомы непрерывности проективной геометрии и аксиом конгруэнтности евклидовой геометрии.

Эта система аксиом допускает реализацию, подобную рассмотренным. Именно, все аксиомы на плоскости будут выполняться, если под точкой мы будем понимать точку проективной плоскости, под прямой — проективную прямую, отношение принадлежности и порядка будем употреблять в смысле проективной геометрии и, наконец, под движениями будем понимать такие проективные преобразования, которые сохраняют мнимую невырожденную кривую второго порядка $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

Аналогичная реализация имеет место для пространственной системы аксиом.

Кривые второго класса $u_1 + u_2^2 \pm u_3^2 = 0$ образованы касательными кривых второго порядка $x_1^2 + x_2^2 \pm x_3^2 = 0$. Поэтому всякое проективное преобразование, сохраняющее кривую второго порядка $x_1^2 + x_2^2 \pm x_3^2 = 0$, сохраняет также кривую второго класса $u_1^2 + u_2^2 \pm u_3^2 = 0$. Отсюда следует, что проективные преобразования, сохраняющее кривую второго класса $u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = 0$, будут соответствовать движениям в геометрии Римана, если $\varepsilon = +1$, движениям в геометрии Лобачевского, если $\varepsilon = -1$ и, наконец, евклидовым движениям и преобразованиям подобия, если $\varepsilon = 0$.

Кривая второго порядка или второго класса, инвариантная относительно проективных преобразований, соответствующих той или иной геометрии, называется *абсолютом*.

При рассмотрении интерпретации Клейна геометрии Лобачевского было отмечено, что расстояние между двумя точками A и B плоскости Лобачевского в этой интерпретации равно логарифму ангармонического отношения четырех точек — двух данных и двух точек пересечения прямой AB с абсолютом. Аналогичный результат имеет место и в геометрии Римана. И во всех трех геометриях угол между прямыми a и b измеряется логарифмом ангармонического отношения четырех прямых, из коих две — a и b, а две другие принадлежат пучку ab и абсолюту, как кривой второго класса.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XVI

1. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB \| A_1B_1$, $BC \| B_1C_1$, $AC \| A_1C_1$. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

2. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$, $AB \| A_1B_1$, $AC \| A_1C_1$. Доказать, что $BC \| B_1C_1$.

3. Найти однородные координаты бесконечно удаленной точки прямой $\frac{x-a}{k}=\frac{y-b}{l}=\frac{z-c}{m}$.

4. Точки (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, x_3, x_4) лежат на одной прямой. Найти x_3, x_4.

5. На прямой даны три произвольные точки. Доказать, что существует проективное преобразование, которое переводит их в точки $(-1, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$.

6. Известно, что ангармоническое отношение $(ABCD)=\xi$. Найти ангармоническое отношение тех же точек, взятых в любом другом порядке, например $(CBAD)$.

7. Найти ангармоническое отношение четырех прямых: $y=x \operatorname{tg} \alpha$, $y=x \operatorname{tg} \beta$, $y=x \operatorname{tg} \gamma$, $y=x \operatorname{tg} \delta$.

8. Найти эйлерову характеристику проективной плоскости.

9. Обосновать следующий способ построения эллипса (рис. 129). Отрезки AC и CD делятся на равное число частей и соответствующие точки деления, считая от A и C, соединяются с B и A. При этом точка пересечения лежит на дуге AE эллипса с полуосями OA и OE.

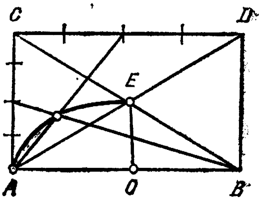


Рис. 129.

10. Известно, как построить поляру точки относительно данной кривой второго порядка. А как найти полюс, если поляра задана?

11. Как упростится общее уравнение невырожденной кривой второго порядка, если прямая $x_3=0$ является полярой точки $(0, 0, 1)$.

12. Как упростится уравнение невырожденной кривой второго порядка, если вершины координатного треугольника являются полюсами противолежащих его сторон.

13. Сформулировать предложение, двойственное теореме Штейнера.

14. Показать, что при полярном преобразовании относительно сферы правильный многогранник с центром в центре сферы переходит в правильный многогранник, именно: тетраэдр в тетраэдр, куб в октаэдр, октаэдр в куб, додекаэдр в икосаэдр, икосаэдр в додекаэдр.

15. На плоскости Лобачевского из точки P вне прямой a проведен перпендикуляр PQ к прямой a и параллельная b (в смысле Лобачевского). Найти зависимость угла между PQ и b (*угол параллельности*) от расстояния точки P до прямой a.

16. Доказать, что в геометрии Лобачевского параллельные прямые неограниченно сближаются в направлении параллельности и неограниченно удаляются в противоположном направлении.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ГЛАВА XVII
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

§ 1. Постановка задачи на построение

В задачах на построение речь идет о построении геометрической фигуры с помощью данных чертежных инструментов. В школьном курсе геометрии обычно рассматриваются задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

Предполагается, что с помощью линейки, как инструмента геометрических построений, можно провести произвольную прямую; произвольную прямую, проходящую через данную точку; прямую, проходящую через две данные точки. Никаких других операций линейкой выполнять нельзя. В частности, нельзя откладывать линейкой отрезки, даже если на ней имеются деления. Нельзя пользоваться обоими краями линейки и т. п.

С помощью циркуля, как инструмента геометрических построений, можно описать из данного центра окружность данного радиуса. В частности, циркулем можно отложить данный отрезок на данной прямой из данной точки.

Решение задачи на построение обычно включает следующие этапы: 1) поиск решения; 2) выполнение построения; 3) доказательство правильности решения; 4) исследование решения.

Поиск решения начинается с предположения о том, что задача решена, т. е. фигура построена. Затем изучают построенную фигуру и ее связи с данными задачи, пока не станет ясна последовательность построений, ведущая к решению. Выполнение фактического построения обычно не является обязательным. Обязательным является доказательство правильности решения, т. е. доказательство того, что, выполняя указанные в решении построения, мы действительно получаем фигуру с требуемыми свойствами. Исследование состоит в решении вопроса о том, всегда ли задача имеет решение, т. е. имеет ли задача решение при любых конкретных данных, и сколько решений имеет задача.

Наиболее трудным в задачах на построение является поиск решения. Определенного рецепта здесь указать нельзя, но существует несколько приемов, которые помогают в этом поиске.

Приведем пример задачи на построение и ее решение.

Задача. *Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.*

Поиск решения. Допустим, задача решена и построен треугольник ABC, у которого $AB=c$, $\angle ABC=\theta$, $AC+BC=l$ (рис. 130). Глядя на рисунок, мы замечаем, что если отрезок CA отложить на продолжении отрезка BC, то получится точка D, положение которой известно, так как $AC+BC=l$, а неизвестная

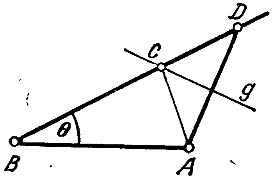


Рис. 130.

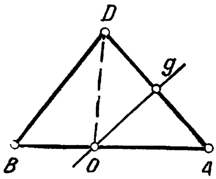


Рис. 131.

вершина C треугольника находится на одинаковом расстоянии от точек A и D. Отсюда намечается следующее построение треугольника. Берем отрезок AB, равный c, откладываем от полупрямой BA угол, равный θ, и на его стороне откладываем отрезок BD, равный l. После этого строим серединный перпендикуляр g к отрезку AD. Пересечение его с отрезком BD дает вершину C треугольника.

Доказательство. Так как g—серединный перпендикуляр, то $AC=CD$, и следовательно, $AC+BC=CD+BC=l$. Таким образом, у треугольника ABC $AB=c$, $\angle ABC=\theta$, $BC+AC=l$, т. е. построенный треугольник действительно удовлетворяет условиям задачи.

Исследование. Прежде всего замечаем, что задача не имеет решения, если $l\leqslant c$, так как у треугольника сумма двух сторон больше третьей. Пусть $l>c$. Покажем, что в этом случае задача имеет, и притом только одно, решение. Действительно, прямая g пересекает сторону AD треугольника ABD, следовательно, пересекает одну из двух других сторон AB или BD. (Она не проходит через точку B, так как $AB\neq BD$.) Если бы она пересекала сторону AB (рис. 131), то было бы $AB=AO+OB=BO+OD>BD$. Но $AB<BD$, $c<l$. Следовательно, прямая g пересекает отрезок BD, и задача имеет решение. Очевидно, решение будет одно, так как прямая может пересекать отрезок только в одной точке.

§ 2. Метод геометрических мест

Сущность метода геометрических мест, используемого при решении задач на построение, состоит в следующем. Допустим, в ходе поиска решения задачи мы пришли к выводу, что задача будет решена, если будет построена некоторая точка X, удовлетворяющая двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура F_2. Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, т. е. является их точкой пересечения.

Для того чтобы точка X могла быть найдена как пересечение фигур F_1 и F_2, надо, чтобы эти фигуры допускали построение с помощью наших чертежных инструментов—циркуля и линейки. А для этого они должны состоять из прямых и окружностей. В связи с этим для нас представляют интерес геометрические места точек, являющиеся прямыми и окружностями. Приведем некоторые, наиболее употребительные из них.

1. Геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки, есть окружность с центром в этой точке.

2. Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой, состоит из двух прямых, параллельных данной, отстоящих от нее на данном расстоянии.

3. Геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная отрезку с концами в данных точках, проходящая через его середину (серединный перпендикуляр).

4. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, состоит из биссектрис углов, которые получаются при пересечении этих прямых.

5. Геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под данным углом θ и которые лежат по одну сторону прямой AB, есть дуга окружности с концами в точках A и B.

6. Геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных точек находятся в данном отношении $m:n$ $(m/n \neq 1)$, есть окружность (окружность Аполлония) (см. гл. I, § 4).

7. Геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных прямых находятся в данном отношении λ, состоит из двух прямых. (Если уравнения данных прямых взять в нормальной форме

$$ax+by+c=0, \qquad a_1x+b_1y+c_1=0,$$

то прямые геометрического места точек задаются уравнениями

$$(ax+by+c)+\lambda(a_1x+b_1y+c_1)=0,$$
$$(ax+by+c)-\lambda(a_1x+b_1y+c_1)=0.)$$

8. Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна, есть прямая, перпендикулярная прямой, соединяющей данные точки (см. § 1 гл. III).

9. Геометрическое место точек, из которых касательные, проведенные к двум данным окружностям, равны, есть прямая, если окружности не пересекаются, или часть прямой, проходящей через точки пересечения окружностей вне отрезка с концами в точках пересечения.

Приведем пример задачи, решаемой методом геометрических мест.

Задача. *На прямой даны четыре точки A, B, C, D. Построить такую точку X, чтобы $\angle AXB=\angle BXC=\angle CXD$.*

Решение. Допустим, задача решена (рис. 132). Тогда у треугольника AXC отрезок XB—биссектриса. А известно, что биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные соответствующим сторонам. Следовательно,

$$AX:CX = AB:BC.$$

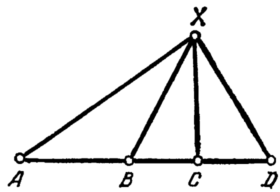


Рис. 132.

Это значит, что точка X принадлежит геометрическому месту точек, отношение расстояний которых от точек A и C равно $AB:BC$. Это геометрическое место точек есть окружность. Аналогично заключаем, что точка X принадлежит геометрическому месту точек, отношение расстояний которых от точек B и D равно $BC:CD$. Это тоже окружность. Искомая точка является точкой пересечения этих окружностей.

§ 3. Метод подобия

Метод подобия в решении задач на построение состоит в следующем. Некоторые задачи при отбрасывании в них одного из условий становятся неопределенными, допускают бесчисленное множество решений. Но эти решения дают фигуры, подобные искомой. В этом случае, построив одну из таких фигур, преобразованием подобия получают искомую. Приведем два примера, иллюстрирующих применение этого метода.

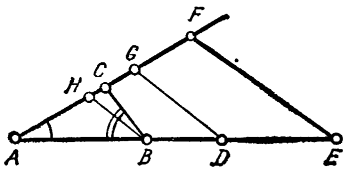


Рис. 133.

Задача. *Построить треугольник по двум углам и периметру.*

Решение. Отбросим условие, чтобы треугольник имел заданный периметр. При этом задача сводится к построению треугольника с двумя заданными углами. Она не составляет труда. Берем произвольный отрезок AB и от полупрямых AB и BA откладываем заданные углы. Получаем треугольник ABC с заданными углами (рис. 133). Этот треугольник подобен искомому. Чтобы получить искомый треугольник, надо построенный треугольник подвергнуть преобразованию подобия с соответствующим коэффициентом подобия.

Отложим на продолжении стороны AB отрезки BD и DE, равные сторонам BC и AC, а на полупрямой AC—отрезок AF, равный периметру искомого треугольника. Проведем через точки B и D прямые, параллельные EF. Отрезки AH, HG и GF являются сторонами искомого треугольника. Они относятся к сторонам построенного треугольника, как периметр искомого треугольника к периметру построенного.

Задача. *Построить окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через данную точку.*

Р е ш е н и е. Отбросим требование, чтобы окружность проходила через данную точку. Легко построить некоторую вспомогательную окружность, касающуюся сторон угла. Для этого отложим на сторонах угла равные отрезки и проведем через их концы прямые, перпендикулярные сторонам угла. Точка пересечения этих прямых и будет центром такой окружности. Для того чтобы получить искомую окружность, надо построенную окружность подвергнуть преобразованию гомотетии относительно вершины угла с коэффициентом гомотетии AS/BS. Центр искомой окружности лежит на пересечении прямой SO и прямой AO', параллельной OB. Здесь A — точка, через которую должна проходить окружность, S — вершина угла, B — одна из точек пересечения луча SA и вспомогательной окружности, O — центр вспомогательной, а O' — центр искомой окружностей.

§ 4. Метод симметрии

Может случиться, что фигура, которую требуется построить, имеет точки, симметричные относительно некоторой прямой или точки. В таком случае целесообразно выполнить преобразование симметрии относительно этой прямой или соответственно точки. Приведем два примера.

З а д а ч а. *Построить отрезок AB с заданной серединой O и концами на двух данных прямых a и b.*

Р е ш е н и е. Допустим, задача решена. Тогда концы отрезка будут симметричны относительно точки O. Если одну из прямых, например a, подвергнуть преобразованию симметрии относительно точки O, то получится прямая a', проходящая через второй конец отрезка — точку B. Таким образом, конец B отрезка получается при пересечении прямой b с прямой a', симметричной a относительно точки O. После этого достаточно провести прямую BO до пересечения с прямой a. Получим второй конец отрезка — точку A.

З а д а ч а. *Даны три прямые a, b, c. Построить отрезок AB, перпендикулярный прямой c, с серединой на этой прямой и концами на прямых a и b.*

Р е ш е н и е. Допустим, задача решена. Тогда концы искомого отрезка симметричны относительно прямой c. Поэтому, если подвергнуть преобразованию симметрии прямую a относительно прямой c, то она перейдет в прямую a', проходящую через точку B. Таким образом, точка B получается в пересечении прямой b с прямой a'. Построив точку B, проводим через нее прямую, перпендикулярную прямой c. И таким образом находим требуемый отрезок.

Заметим, что в этой задаче, как и в предыдущей, вместо одной из прямых a или b может быть задана любая фигура, а вместо другой прямой может быть задана любая фигура, допускающая построение с помощью циркуля и линейки, т. е. любая фигура, состоящая из прямых и окружностей.

§ 5. Метод параллельного переноса

Метод параллельного переноса состоит в том, что отдельные части искомой фигуры переносятся параллельно с целью получения новой фигуры, допускающей известное построение. Приведем два примера.

Задача. *Построить трапецию по основаниям и диагоналям.*

Решение. Допустим, задача решена и трапеция $ABCD$ построена (рис. 134). Перенесем диагональ BD параллельно так, чтобы ее вершина B совпала с вершиной C. Теперь у треугольника ACD_1 известны все стороны: две из них равны диагоналям

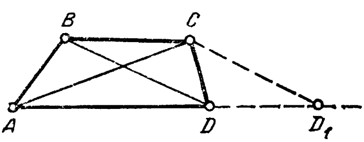


Рис. 134.

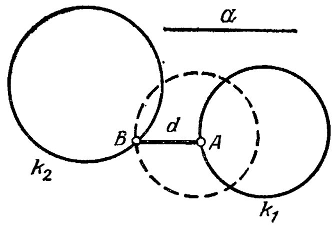


Рис. 135.

трапеции, а третья — сумме оснований. Отсюда получается следующее решение. По данным задачи строим сначала треугольник ACD_1. Затем строим точку D (AD — известное основание трапеции). Теперь проводим через точку C прямую, параллельную AD, а через точку D — прямую, параллельную CD_1. Они пересекаются в точке B. Трапеция $ABCD$ имеет заданные основания и диагонали.

Задача. *Даны две окружности k_1, k_2 и прямая a. Построить отрезок $AB=d$ с концами на данных окружностях, параллельный прямой a.*

Решение. Допустим, задача решена и отрезок AB построен (рис. 135). Если одну из окружностей, например k_1, перенести параллельно прямой a на расстояние, равное длине отрезка d, то она перейдет в окружность, проходящую через второй конец отрезка (B). Таким образом, точка B получается в пересечении окружности k_2 с окружностью, которая получается при переносе окружности k_1. Получив конец B отрезка, находим сам отрезок, проводя через точку B прямую, параллельную данной прямой a.

§ 6. Метод поворота

Метод поворота в решении задач на построение состоит в том, что отдельные элементы фигуры поворачиваются с целью получения новой фигуры, построение которой известно. Приведем два примера, иллюстрирующих применение этого метода.

Задача. *Даны окружности k_1 и k_2 и точка A. Построить равнобедренный треугольник с вершиной A, углом при этой вершине θ и вершинами основания на данных окружностях.*

Решение. Допустим, задача решена и треугольник ABC построен (рис. 136). При повороте стороны AC треугольника около вершины A на угол θ вершина B совмещается с вершиной C. Отсюда решение задачи: поворачиваем окружность k_1 около точки

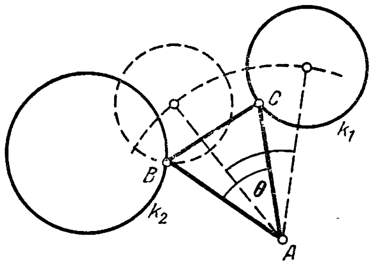


Рис. 136.

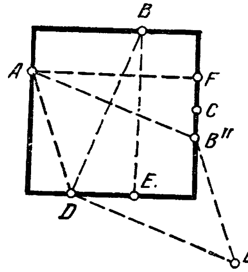


Рис. 137.

A на угол θ. Полученная при этом окружность пересекает окружность k_2 в вершине B искомого треугольника. Чтобы получить вершину C, проводим окружность с центром A и радиусом AB до пересечения с окружностью k_1.

Задача. *Построить квадрат, стороны которого проходят через четыре заданные точки* A, B, C, D.

Решение. Допустим, квадрат построен (рис. 137). Повернем отрезок DB около точки D на угол $90°$. А теперь перенесем его параллельно, чтобы точка D совместилась с A. При этом точка B' попадет в точку B'' на стороне квадрата, которая проходит через точку C (или на продолжение этой стороны). Это следует из равенства прямоугольных треугольников BED и AFB''.

Построив точку B'', проводим прямую CB'', на которой лежит сторона квадрата. Далее проводим через точку A прямую, параллельную CB'', и через точки B и D прямые, перпендикулярные этой прямой. Искомый квадрат построен.

§ 7. Метод инверсии

Преобразование инверсии было введено в § 8 гл. III. Там же было доказано, что при инверсии окружность переходит в окружность (или прямую, если данная окружность проходит через центр инверсии). Прямая переходит в окружность, если она не проходит через центр инверсии, и переходит в себя, если она проходит через центр инверсии.

Преобразование инверсии можно представить наглядно геометрически следующим образом. Пусть O центр инверсии. Опишем окружность с центром O и радиусом, равным радиусу инверсии (рис. 138). Тогда при инверсии точка A вне круга инверсии переходит в точку A' пересечения прямой OA с хордой окружности, соединяющей концы касательных, проведенных из точки A. Доказательство просто: по свойству прямоугольного треугольника OAB $OA \cdot OA' = OB^2 = r^2$. Преобразование инверсии переводит точку A' в A. Ясно, как построить точку A, если задана точка A'.

Кроме отмеченных свойств преобразования прямых и окружностей инверсия обладает еще одним замечательным свойством.

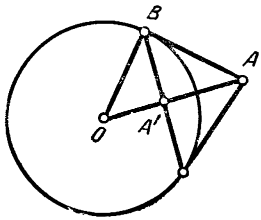


Рис. 138.

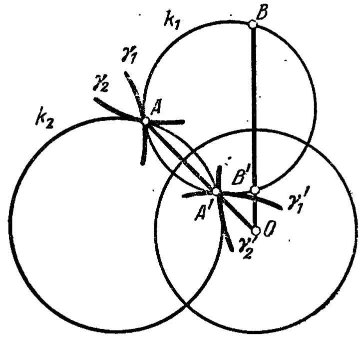


Рис. 139.

Именно, *при инверсии сохраняются углы между кривыми.* Это значит, что две кривые, пересекающиеся под некоторым углом, при инверсии переходят в кривые, которые пересекаются под тем же углом. Докажем это.

Прежде всего заметим, что при инверсии сохраняется касание кривых. Это значит, что если две кривые касаются в некоторой точке, т. е. имеют общую касательную, то они при инверсии переходят в кривые, касающиеся в соответствующей точке.

Пусть теперь кривые γ_1 и γ_2 пересекаются в некоторой точке A (рис. 139). Проведем прямые, касательные к кривым в этой точке. Преобразование инверсии переводит точку A в некоторую точку A'. Проведем две окружности k_1 и k_2, касающиеся построенных прямых в точке A и проходящие через точку A'. (Если одна из кривых γ_1, γ_2 касается прямой OA, то вместо окружности будет прямая OA.) Окружности k_1 и k_2 пересекаются в точках A и A' под одним и тем же углом.

Преобразование инверсии переводит каждую из окружностей k_1 и k_2 в себя. Действительно, по свойству секущих к окружности k_1, проведенных из точки O, $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = r^2$. Преобразование инверсии переводит кривые γ_1 и γ_2 в кривые γ_1' и γ_2', касающиеся окружностей k_1 и k_2 в точке A'. И так как окружности пересекаются в точках A и A' под одним и тем же углом, то кривые γ_1' и γ_2' пересекаются в точке A' под тем же углом, что и кривые γ_1, γ_2 в точке A. Утверждение доказано.

Покажем на примере применение инверсии к решению задач на построение.

Задача. *Даны две пересекающиеся окружности и точка A. Построить окружность, проходящую через точку A и касающуюся двух данных окружностей.*

Решение. Допустим, окружность построена (рис. 140). Выполним преобразование инверсии относительно точки пересечения двух данных окружностей. При этом точка A перейдет в некоторую точку A', данные окружности перейдут в прямые, а искомая окружность перейдет в окружность, касающуюся этих прямых, проходящую через точку A'. Мы знаем, как построить эту окружность (§ 3). Построив ее, выполним обратное преобразование. При этом построенная окружность перейдет в искомую.

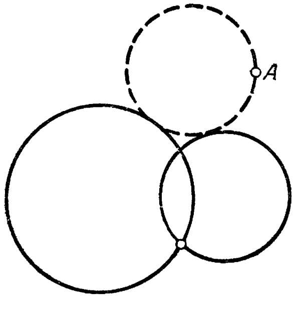


Рис. 140.

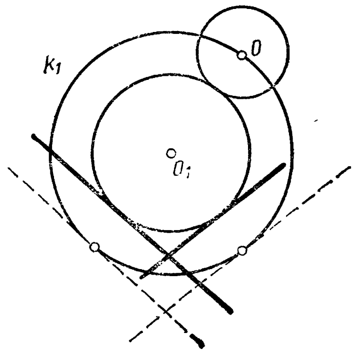


Рис. 141.

Задача. *Даны три окружности, из коих две пересекаются Построить окружность, которая касалась бы всех трех окружностей.*

Решение. Как и в предыдущей задаче, выполним преобразование инверсии относительно точки пересечения двух данных окружностей. Тогда две окружности из трех данных перейдут в прямые. И задача сводится к построению окружности, которая касается двух прямых и окружности (рис. 141). Окружность k_1, концентричная к искомой и радиусом O_1O, проходит через точку O и касается двух прямых, параллельных данным прямым и отстоящих от них на расстояние радиуса данной окружности. Таким образом, задача сведена снова к построению окружности, проходящей через данную точку O и касающуюся двух данных прямых. Решая эту задачу, находим центр O_1 окружности, а затем и саму окружность. Выполнив обратное преобразование инверсии, находим окружность, которая требуется условиями задачи.

Заметим, что преобразование инверсии и переход к концентрическим окружностям, которым мы только что воспользовались, позволяют решить общую задачу о построении окружности, касающейся трех данных окружностей (*задача Аполлония*).

§ 8. О разрешимости задач на построение

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки часто бывают очень трудными, например *задача Мальфатти* о построении трех окружностей, касающихся сторон треугольника и друг друга. Но бывают задачи, вообще не разрешимые с помощью циркуля и линейки. Такова, например, *задача об удвоении куба*: найти ребро куба, который имеет объем в два раза больший, чем объем данного куба.

Ответ на вопрос о том, разрешима данная задача или нет с помощью циркуля и линейки, дает следующая теорема.

Задача на построение, аналитическое решение которой приводит к уравнению, неразрешимому в квадратных радикалах, не разрешима с помощью циркуля и линейки. И наоборот, если аналитическое решение задачи приводит к ответу, содержащему только рациональные операции и извлечение квадратного корня, то задача разрешима с помощью циркуля и линейки.

Действительно, допустим задача разрешима. Примем плоскость построения за плоскость xy. Тогда, проводя прямые и окружности и проводя параллельно вычисления, связанные с определением точек пересечения, мы приходим к выражениям, содержащим только рациональные операции и извлечение корня. Это и доказывает первую часть теоремы.

Обратно, если аналитическое решение задачи приводит к ответу, содержащему только рациональные операции и извлечение корня, то ответ может быть найден построением с помощью циркуля и линейки. Для доказательства достаточно вспомнить, что циркулем и линейкой могут быть построены выражения $a+b$, $a-b$, $\frac{ab}{c}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, где a, b, c — данные отрезки.

Приведем два примера.

Задача. *Построить сторону правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R.*

Решение. Сторона правильного десятиугольника является основанием равнобедренного треугольника с боковыми сторонами R и углом при вершине 36° (рис. 142). Биссектриса этого тре-

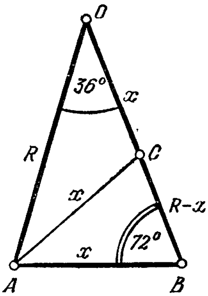


Рис. 142.

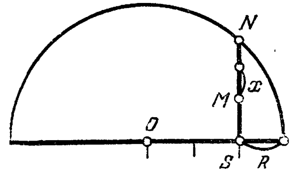


Рис. 143.

угольника, проведенная из вершины при основании, разбивает его на два равнобедренных треугольника AOC и ABC. Поэтому $AB=AC=OC$. По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{BC}{AB}=\frac{OC}{OA}.$$

Отсюда, обозначая AB через x, получаем уравнение

$$\frac{R-x}{x}=\frac{x}{R}, \qquad x^2+Rx-R^2=0.$$

Положительный корень этого уравнения

$$x=\frac{-R+\sqrt{5R^2}}{2}=\frac{\sqrt{5R\cdot R}-R}{2}.$$

Отрезок длины x легко строится. Берем полуокружность с диаметром, равным $6R$, и проводим перпендикуляр SN к диаметру (рис. 143). Откладываем отрезок $SM=R$. Половина отрезка MN имеет искомую длину x.

Задача об удвоении куба приводит к уравнению $x^3-2=0$, где x—сторона куба, у которого объем в два раза больше единичного куба. Доказано, что корни этого уравнения не выражаются в квадратных радикалах. Поэтому задача об удвоении куба не разрешима с помощью циркуля и линейки.

Примером другой задачи, не разрешимой с помощью циркуля и линейки, является *задача о трисекции угла*: разделить произвольно заданный угол на три равные части. Аналитически эта задача также приводит к уравнению третьей степени, которое в общем случае не имеет решения в квадратных радикалах.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XVII *)

1. Построить окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.

2. Найти точку, из которой два данных отрезка были бы видны под данными углами.

3. Вписать в данную окружность прямоугольный треугольник, катеты которого проходили бы через две данные точки.

4. Даны три окружности одинакового радиуса. Построить окружность, касающуюся внешним образом трех данных.

5. Построить точку, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120°.

6. Построить окружность, которая пересекает под прямым углом три данные окружности.

7. Построить точку, из которой данные три окружности видны под одинаковыми углами.

8. Дана прямая AC и точка B вне ее. Построить на прямой AC такую точку X, чтобы $AX+XB$ было равно данному отрезку l.

9. Даны две концентрические окружности и точка P. Требуется провести через точку P прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между окружностями, был виден из их центра под данным углом α.

10. Даны две пары параллельных прямых и точка P. Провести через точку P прямую так, чтобы обе пары параллельных прямых отсекали на ней равные отрезки.

11. Даны две окружности и точка. Провести через эту точку прямую, на которой окружности отсекают хорды заданной длины.

12. Вписать в данный четырехугольник параллелограмм с заданным направлением сторон.

---

*) Упражнения к этой главе заимствованы из книги: Адлер А. Теория геометрических построений.—М.: Учпедгиз, 1940.

13. Построить квадрат по сумме его стороны и диагонали.

14. В данный треугольник вписать квадрат.

15. В окружности даны два радиуса. Построить хорду окружности, которая данными радиусами делится на три равные части.

16. В данный четырехугольник вписать ромб, стороны которого параллельны диагоналям четырехугольника.

17. Построить окружность, касающуюся данной прямой, проходящую через данные две точки.

18. Построить треугольник по заданным его высотам.

19. Построить треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла.

20. Построить треугольник по медиане и высоте, проведенным из одной вершины, и радиусу описанного круга.

21. Построить треугольник по стороне, сумме двух других сторон и высоте, опущенной на одну из этих сторон.

22. Построить треугольник по стороне, противолежащему ей углу и сумме двух других сторон.

23. Через точку пересечения двух окружностей провести прямую так, чтобы сумма отсекаемых на ней хорд была наибольшей (когда хорды не налегают друг на друга).

24. Построить треугольник по периметру, радиусу описанного круга и одному из углов.

25. Построить треугольник по трем медианам.

26. Построить параллелограмм по диагоналям и углу между ними.

27. Дан треугольник. Описать около него равносторонний треугольник наибольшей площади.

28. Построить четырехугольник, зная его стороны и отрезок, соединяющий середины диагоналей.

29. Даны треугольник ABC и прямая g, проходящая через вершину C. Найти на прямой g точку X, из которой стороны AC и BC треугольника видны под равными углами.

30. Даны треугольник ABC и точка D на прямой AB. Найти на прямой AC точку X, из которой отрезки AD и DB видны под одним и тем же углом.

31. Даны прямая g и точки A и B, лежащие по разные стороны этой прямой. Найти на прямой g точку X такую, чтобы сумма $AX+XB$ была наименьшей.

32. Вписать в квадрат равносторонний треугольник с заданной одной из его вершин.

33. Построить окружность, которая касается данной окружности и проходит через две данные точки.

ГЛАВА XVIII

ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН, ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ

§ 1. Измерение отрезков

По аксиоме меры для отрезков каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Если точка C на прямой AB лежит между точками A и B, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC. Таким образом, аксиомой требуется, чтобы каждому отрезку было сопоставлено некоторое число, причем выполняется отмеченное свойство аддитивности. Никаких измерений отрезка аксиомой не предполагается. Естественно возникает вопрос, какое отношение имеет результат практического измерения, которым мы обычно пользуемся, к длине отрезка, существование которой утверждается аксиомой.

Вспомним, как практически производится измерение. Пусть AB — данный отрезок. Мы берем эталон длины (например, метр), совмещаем *движением* один из его концов с концом отрезка, например A, и отмечаем точку A_1, куда попадает другой конец эталона. Затем аналогично отмечаем точки A_2, A_3.... Если одна из построенных так точек A_n совпадает с B, то мы говорим, что отрезок имеет длину n (метров). Таков практический результат измерения. Совпадает ли этот результат измерения с числом, которое отнесено отрезку аксиомой меры? Да, совпадает.

Действительно, по аксиоме меры длина отрезка AA_2 равна сумме длин отрезков AA_1 и A_1A_2. Так как движение сохраняет длину отрезка, то $A_1A_2 = AA_1 = 1$. И поэтому длина отрезка $AA_2 = 2$, что соответствует результату практического измерения, если $B \equiv A_2$. Аналогично доказывается, что практический результат измерения в случае, когда $B \equiv A_n$, совпадает с длиной отрезка AB, которая предписывается ему аксиомой меры.

Может случиться, что точка B не совпадает ни с одной точкой A_n. Тогда найдутся такие соседние точки A_{n-1} и A_n, что B принадлежит отрезку $A_{n-1}A_n$. В практическом измерении мы при этом говорим, что длина отрезка AB заключена между $n-1$ и n (метров). Если говорить о длине, определяемой аксиомой меры, то результат будет тот же. Действительно, по аксиоме меры длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AA_{n-1} и $A_{n-1}B$. Следовательно, больше $n-1$. Аналогично заключаем, что она меньше n.

Для более точного измерения длины отрезка на практике мы делим эталон длины на 10 (или другое число) равных частей и производим известным способом измерение. Анализ, который мы приводить не будем, показывает, что результат практического измерения совпадает с тем, который следует из аксиомы меры.

В связи с практическим измерением длины отрезка с помощью откладывания эталона длины возникает естественный вопрос. Откуда следует существование такой точки A_n, что точка B принадлежит отрезку AA_n? Ответить на этот вопрос нетрудно. Отрезок AA_n имеет длину n. А при достаточно большом n длина отрезка AB меньше n (речь идет о длине отрезка, определяемой аксиомой меры). Отсюда следует, что точка B принадлежит отрезку AA_n. Таким образом, принадлежность точки B отрезку AA_n при достаточно большом n, а следовательно, возможность практического измерения отрезков, следует из свойств вещественных чисел: каково бы ни было число $d > 0$, существует натуральное число n такое, что $d \leqslant n$.

Мы обратили внимание на это обстоятельство потому, что при другом аксиоматическом построении геометрии, например по Гильберту, где понятие длины отрезка является производным и получается в процессе измерения, существование точки A_n вводится как аксиома (*аксиома Архимеда*).

Отметим еще одно обстоятельство в связи с практическим измерением длины отрезка. Если процесс измерения не заканчивается на конечном числе шагов, то мы получаем две последовательности точек P_n и Q_n, обладающих следующими свойствами: 1) точка B лежит между P_n и Q_n; 2) длины отрезков AP_n образуют неубывающую последовательность, а длины отрезков AQ_n — невозрастающую; 3) длина отрезка P_nQ_n равна $1/10^n$. По свойству вещественных чисел обе последовательности имеют один и тот же предел. И так как длина отрезка AB больше длины AP_n и меньше длины AQ_n, то этот общий предел есть длина отрезка AB. Таким образом, практический способ измерения во всех случаях дает длину отрезка, которая предписывается аксиомой меры.

§ 2. Длина окружности

Школьное изложение вопроса о длине окружности начинается с наглядного представления. Мы говорим: представим себе нить в форме окружности; разрежем ее и растянем за концы; длина полученного отрезка и есть длина окружности. Далее мы говорим: из наглядных соображений ясно, что длина окружности сколь угодно мало отличается от периметра вписанного в нее выпуклого многоугольника с достаточно малыми сторонами. А затем, опираясь на это предположение, уже совершенно строго доказываем, что отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для любых двух окружностей.

Недостатком этого изложения является то, что мы не даем определения понятия длины окружности, и затем вводим предположение, которое после определения понятия длины требует доказательства. Этот недостаток школьного изложения вызван чисто методическими соображениями. Понятие длины окружности предполагает знакомство с понятием предела или понятием точной верхней грани последовательности. Эти понятия сложны для учащегося на этом уровне (8 класс). А соответствующие доказательства вообще недоступны.

Строгое изложение вопроса о длине окружности состоит в следующем. Прежде всего мы определяем понятие длины окружности. Именно, *длиной окружности* мы будем называть точную верхнюю грань периметров выпуклых многоугольников, вписанных в окружность, т. е. наименьшее число, большее периметра любого такого многоугольника. Для того чтобы это определение было корректно, т. е. чтобы окружность имела длину, надо, чтобы периметры вписанных в окружность многоугольников были ограничены в совокупности. Эта ограниченность вытекает из следующей теоремы.

Если выпуклый многоугольник P_1 содержится внутри выпуклого многоугольника P_2, то периметр P_1 не больше периметра P_2. Если многоугольник P_1 не совпадает с P_2, то его периметр меньше периметра P_2.

Доказательство. Проведем прямую a, содержащую какую-нибудь сторону многоугольника P_1 (рис. 144). Многоугольник P_1 расположен по одну сторону этой прямой. Многоугольник P_2 расположен либо по ту же сторону прямой a, либо есть точки многоугольника P_2, лежащие по разные стороны этой прямой. Во втором случае прямая a разбивает многоугольник P_2 на два многоугольника. Пусть Q_2—тот из них, который лежит в одной полуплоскости с P_1 относительно прямой a. Многоугольник Q_2 содержит внутри многоугольник P_1 и имеет периметр меньший, чем периметр многоугольника P_2. Действительно, переход от многоугольника P_2 к Q_2 связан с заменой ломаной отрезком AB, соединяющим ее концы.

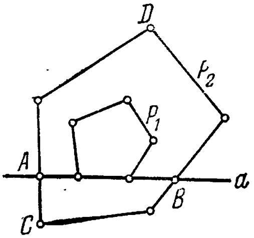


Рис. 144.

Проделав такое построение с каждой стороной многоугольника P_1, мы получим в конце концов из многоугольника P_2 многоугольник P_1. Отсюда следует, что если многоугольник P_1 не совпадает с P_2, то он имеет периметр, меньший периметра P_2. Теорема доказана.

Докажем теперь предположение, сделанное в школьном учебнике. Именно, докажем, что *длина окружности сколь угодно мало отличается от периметра вписанного в нее выпуклого многоугольника с достаточно малыми сторонами.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в данную окружность можно вписать выпуклый многоугольник, периметр которого отличается от длины окружности не более чем на ε. Действительно, допустим, что утверждение неверно. Тогда периметр любого вписанного многоугольника не больше $l-\varepsilon$ (l—длина окружности). Следовательно, число l не будет наименьшим числом, большим периметра любого вписанного многоугольника. Число $l-\frac{\varepsilon}{2}$ меньше l и тоже больше периметра любого вписанного многоугольника. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Пусть теперь P—многоугольник, вписанный в окружность, с периметром, отличающимся от длины окружности не более чем на $\varepsilon > 0$. Пусть P'— многоугольник, вписанный в окружность, со сторонами, меньшими δ. Пополним многоугольник P' вершинами многоугольника P. Полученный при этом многоугольник P'' имеет периметр, не меньший чем P'. С другой стороны, он не больше, чем l. Если мы выбросим у многоугольника P'' звенья, сходящиеся в вершинах многоугольника P, то его периметр уменьшится, но не более, чем на $2n\delta$, где n—число вершин многоугольника P. Отсюда следует, что многоугольник P' имеет периметр, не меньший $l-\varepsilon-2n\delta$. Так как после выбора ε n фиксировано, то $l-\varepsilon-2n\delta$ при достаточно малых ε и δ сколь угодно мало отличается от l, что и требовалось доказать.

В связи с данным определением длины окружности возникает вопрос, в каком отношении находится это определение длины окружности с определением длины кривой как предела длин ломаных, вписанных в кривую, которым мы пользовались в гл. IX. Оказывается, данное определение приводит к тому же результату. Действительно, по доказанному периметры вписанных в окружность выпуклых многоугольников сколь угодно мало отличаются от длины окружности, если стороны многоугольника достаточно малы. А это значит, что длина окружности есть предел периметров вписанных выпуклых многоугольников при неограниченном убывании длин сторон.

§ 3. Площади фигур

Школьное изложение вопроса о площади начинается рассуждением о посеве на двух участках земли: одного в форме квадрата, а другого произвольной формы. Это рассуждение резюмируется выводом о существовании площади и ее свойствах: аддитивности и равенстве для равных фигур. Далее, исходя из существования площади и опираясь на ее свойства, строго выводятся формулы для площадей простых фигур: прямоугольника, параллелограмма, треугольника и др.

Строгое изложение вопроса о площади следовало бы начать с доказательства следующей теоремы.

На множестве простых фигур (допускающих разбиение на конечное число не перекрывающихся треугольников, т. е. не имеющих общих внутренних точек) может быть определена функция S, именуемая площадью, обладающая следующими свойствами:

1) *для фигур, имеющих внутренние точки,* $S>0$;

2) *если фигура G составлена из фигур G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек, то* $S(G)=S(G_1)+S(G_2)$;

3) *равные фигуры имеют равные площади*;

4) *для квадрата со стороной* 1 $S=1$.

Функция S, удовлетворяющая условиям 1)—4), *единственная.*

Доказательство. Определим площадь S следующим образом. Для треугольника положим $S=\frac{1}{2}ah$, где a—сторона треугольника, а h—высота, опущенная на эту сторону. Для любой фигуры G величина S определяется как сумма площадей треугольников любого ее разбиения. Для того чтобы данное определение площади было корректно, надо, чтобы плошадь треугольника не зависела от того, какая взята его сторона и опущенная на нее высота, и чтобы площадь фигуры, определяемая через сложение площадей составляющих ее треугольников, не зависела от разбиения на треугольники.

Прежде всего докажем, что площадь треугольника не зависит от того, какую брать сторону и соответствующую ей высоту при вычислении площади. Пусть ABC—данный треугольник (рис. 145). Проведем его высоты CC_1 и BB_1. Прямоугольные треугольники AC_1C и AB_1B подобны, так как у них угол A общий. Отсюда

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CC_1}{BB_1}, \quad AC\cdot BB_1=AB\cdot CC_1.$$

Следовательно, при вычислении площади треугольника ABC получается один и тот же результат, берем ли мы сторону AC и высоту BB_1 или сторону AB и высоту CC_1.

Докажем теперь, что при разбиении треугольника на более мелкие треугольники его площадь равна сумме площадей треугольников этого разбиения независимо от способа разбиения.

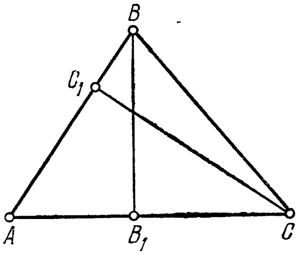


Рис. 145.

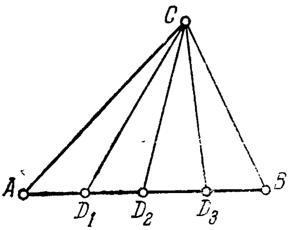


Рис. 146.

Сначала рассмотрим разбиение, показанное на рис. 146. Здесь треугольник ABC разбит на треугольники CAD_1, CD_1D_2, CD_2D_3, ... Все треугольники имеют общую высоту h, проведенную из их общей вершины C. Она же является высотой треугольника ABC.

Сумма площадей треугольников разбиения будет

$$\frac{AD_1 \cdot h}{2} + \frac{D_1D_2 \cdot h}{2} + \frac{D_2D_3 \cdot h}{2} + \ldots = \frac{(AD_1 + D_1D_2 + D_2D_3 + \ldots) \cdot h}{2}.$$

Так как $AD_1 + D_1D_2 + D_2D_3 + \ldots = AB$, то сумма площадей треугольников нашего разбиения равна $\frac{AB \cdot h}{2}$, т. е. площади треугольника ABC.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение треугольника ABC на мелкие треугольники. Допустим, что любые два треугольника,

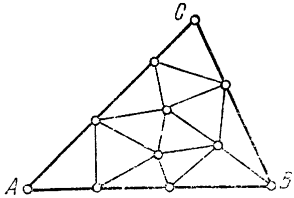


Рис. 147.

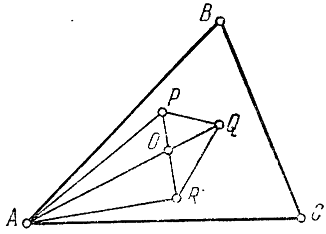


Рис. 148.

этого разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо общую сторону. Такое разбиение показано, например, на рис. 147.

На рис. 148 показан один треугольник разбиения PQR. Площадь треугольника PQR можно представить в виде алгебраической суммы площадей трех треугольников APQ, AQR, ARP.

Эти треугольники получаются из треугольника PQR заменой одной из вершин на вершину A. Знак, с которым надо брать площади треугольников в этой сумме, определяется по следующему правилу. Если вершина, которая заменяется на вершину A, лежит по одну сторону с вершиной A относительно прямой, соединяющей две другие вершины, то площадь треугольника берется со знаком «+», если по разные стороны, то со знаком «—». Если при замене вершиной A три точки оказываются на одной прямой, то слагаемое опускается, т. е. площадь считается равной нулю.

Рассмотрим, например, расположение треугольника PQR, показанное на рис. 148. По доказанному

$$
\begin{aligned}
S(PQR) &= S(PQO)+S(QRO),\\
S(APQ) &= S(APO)+S(PQO),\\
S(ARQ) &= S(ARO)+S(QRO),\\
S(APR) &= S(APO)+S(ARO).
\end{aligned}
$$

Отсюда видим, что

$$S(PQR)=S(APQ)+S(ARQ)-S(ARP).$$

Мы проверили правильность нашего утверждения относительно представления площади треугольника PQR в виде алгебраической суммы площадей треугольников APQ, AQR и ARP на конкретном примере расположения треугольника PQR. Можно было бы рассмотреть другие случаи расположения и убедиться в правильности нашего утверждения.

Представив площадь каждого треугольника разбиения в виде алгебраической суммы площадей треугольников с вершиной A, сложим площади всех треугольников разбиения. Мы получим сумму площадей треугольников AXY, где XY — сторона треугольника разбиения. Если отрезок XY лежит внутри треугольника ABC, то площадь треугольника AXY входит в нашу сумму дважды, потому что XY является стороной двух треугольников разбиения. Так как эти треугольники расположены по разные стороны от прямой XY, то один раз площадь треугольника AXY входит со знаком «+», а второй раз со знаком «—». Таким образом, эти слагаемые взаимно уничтожаются.

Если отрезок XY лежит на стороне BC треугольника ABC, то площадь треугольника AXY входит в нашу сумму только один раз, причем со знаком «+». Если же сторона XY лежит на AB или AC, то площадь AXY просто равна нулю. В итоге сумма площадей треугольников нашего разбиения равна сумме площадей треугольников AXY со сторонами XY на стороне BC треугольника ABC. Но было доказано ранее, что эта сумма равна площади треугольника ABC. Итак, площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников любого разбиения.

Пусть теперь простая фигура F разбита в одном случае на треугольники Δ_1', Δ_2', Δ_3', ..., во втором случае — на треугольники Δ_1'', Δ_2'', Δ_3'', ... Докажем, что суммы площадей треугольников первого и второго разбиения одинаковы.

Треугольники первого и второго разбиения, взятые вместе, производят разбиение фигуры F на выпуклые многоугольники: треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники. Каждый такой многоугольник представляет собой общую часть одного треугольника первого разбиения и одного треугольника второго разбиения. На рис. 149 показан один такой пятиугольник. Мы разобьем эти многоугольники на треугольники Δ_1''', Δ_2''', Δ_3''', ..., причем сделаем это так, чтобы два треугольника этого разбиения либо не имели общих точек, либо имели общую вершину, либо имели общую сторону.

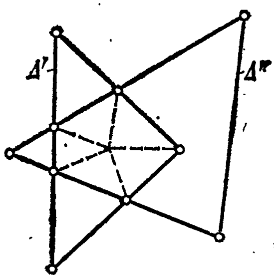


Рис. 149.

По доказанному каждый треугольник Δ_k' первого разбиения фигуры F равен сумме площадей треугольников Δ_k''' которые в него входят. Точно так же каждый треугольник Δ_k'' второго разбиения представляется в виде суммы треугольников Δ_k'''. Поэтому суммы площадей треугольников и первого и второго разбиения фигуры F равны сумме площадей треугольников Δ_k'''. Таким образом, суммы площадей треугольников первого и второго разбиения равны, т. е. площадь фигуры F не зависит от способа разбиения ее на треугольники.

Докажем теперь, что определяемая таким способом площадь действительно обладает свойствами 1—4, указанными в теореме. Первое свойство очевидно. Докажем второе свойство. Пусть фигура G разбита на две фигуры G_1, и G_2, не имеющие общих внутренних точек. Пусть фигура G_1 разбита на треугольники Δ_k', а фигура G_2 — на треугольники Δ_k''. При этом получается разбиение фигуры G на треугольники Δ_k' и Δ_k''. Площадь фигуры G_1 равна сумме площадей треугольников Δ_k', а площадь фигуры G_2 равна сумме площадей треугольников Δ_k''. Площадь фигуры G равна сумме площадей треугольников Δ_k' и треугольников Δ_k''. Следовательно, она равна сумме площадей фигур G_1 и G_2. Второе свойство площади доказано.

Третье свойство площади следует из равенства площадей равных треугольников (у них соответствующие стороны равны и опущенные на них высоты тоже равны).

Докажем четвертое свойство. Квадрат со стороной 1 разбивается его диагональю на два прямоугольных треугольника с катетами, равными 1. Площадь каждого треугольника равна $1 \cdot 1/2$. Поэтому площадь квадрата равна 1.

Докажем, наконец, что площадь свойствами 1—4 определяется однозначно. По существу, это доказано в школьном учебнике. Там, исходя из этих свойств, сначала доказано, что площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab, а затем доказано, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту. Однозначность в определении площади треугольника влечет за собой однозначность в определении площади любой простой фигуры. Теорема доказана полностью.

Определим понятие площади для любой фигуры. Мы будем говорить, что фигура G имеет определенную площадь, если для любого $\varepsilon > 0$ существует простая фигура G_1, содержащая G, и простая фигура G_2, содержащаяся в G, площади которых отличаются не более, чем на ε. Для фигур, имеющих площадь в смысле данного определения, величина площади $S(G)$ может быть определена как нижняя грань площадей простых фигур, содержащих G, или верхняя грань площадей простых фигур, содержащихся в G. Определяемая так величина площади для фигур, имеющих площадь, обладает свойствами 1—4. Мы не будем приводить доказательство этой теоремы.

Простой достаточный признак существования площади фигуры состоит в том, что ее граница должна иметь нулевую площадь, в частности, если граница фигуры состоит из спрямляемых кривых.

В школьном курсе геометрии обычно рассматриваются фигуры, ограниченные отрезками прямых и окружностями. Все они имеют площадь в смысле данного определения.

§ 4. Объемы тел

Школьное изложение вопроса об объеме тел также начинается: с наглядного доказательства существования объема и его свойств аддитивности и равенства для равных тел. Строгое изложение вопроса предполагает доказательство следующей теоремы.

На множестве простых тел (допускающих разбиение на конечное число не перекрывающихся треугольных пирамид) может быть определена функция V, именуемая объемом, обладающая следующими свойствами:

1) *для тел, имеющих внутренние точки,* $V > 0$;

2) *если тело T составлено из тел T_1 и T_2, не имеющих общих внутренних точек, то*

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2);$$

3) *равные тела имеют равные объемы;*

4) *для куба с ребром* 1 $V = 1$.

Функция V, удовлетворяющая условиям 1—4, единственная.

Доказательство этой теоремы принципиально не отличается от доказательства соответствующей теоремы для площадей простых фигур. Именно, объем простого тела определяется как сумма объемов составляющих его треугольных пирамид, а объем пирамиды определяется по формуле $V = \frac{1}{3} Sh$, где S—площадь основания пирамиды, а h—опущенная на него высота. Доказывается корректность такого определения, т. е. независимость объема трегольной пирамиды от выбора ее основания и независимость объема простого тела от разбиения его на треугольные пирамиды.

Когда корректность определения объема доказана, проверяются свойства 1—4. Наконец, доказывается единственность объема, обладающего свойствами 1—4.

Понятие объёма определяется для любых тел следующим образом. Мы говорим, что тело T имеет определенный объем, если для любого $\varepsilon > 0$ существует простое тело T_1, содержащее T, и тело T_2, содержащееся в T, объемы которых отличаются не более чем на ε. Для тел, имеющих объем в смысле данного определения, величина объема $V(T)$ определяется либо как нижняя грань объемов простых тел, содержащих T, либо как верхняя грань объемов простых тел, содержащихся в T. Определяемая так величина объема для тел, имеющих объем, обладает свойствами 1—4.

Простой достаточный признак существования объема тела состоит в том, что его граница должна иметь объем, равный нулю. В школьном курсе геометрии рассматриваются тела, ограниченные кусками плоскостей, цилиндрических, конических и сферических поверхностей. Легко видеть, что каждая из этих поверхностей может быть заключена в простое тело сколь угодно малого объема. Поэтому тела, ограниченные такими поверхностями, имеют определенный объем. В школьном изложении обычно существование объема в смысле данного определения содержится в выводе формулы для объема.

§ 5. Площадь поверхности

В школьном учебнике дано следующее определение понятия площади поверхности. Пусть F—поверхность и F_δ—множество точек пространства, которые удалены от поверхности не более чем на δ. *Площадью поверхности* F называется предел отношения $V(F_\delta)/2\delta$ при $\delta \to 0$. Это определение отличается наглядностью, особенно после примера сравнения количества краски, необходимой для окрашивания поверхности и плоского листа в форме квадрата. Оно имеет еще и то преимущество, что делает очень простым вывод формул для площадей поверхностей, изучаемых в школе: шаровой поверхности, шарового сегмента, пояса, цилиндра и конуса.

Однако возникает вопрос: в каком отношении находится данное определение с определением площади поверхности в высшей школе, в частности с определением, которое дано в гл. XI. Сейчас мы покажем, что оба определения приводят к одной и той же формуле для площади поверхности.

Введем в окрестности поверхности F криволинейные координаты u, v, w следующим образом. На нормали поверхности в точке (u, v) отложим отрезок длины $|w|$ и в качестве координат конца этого отрезка примем числа u, v, w (w по одну сторону поверхности положительно, по другую—отрицательно). Декартовы координаты точки (x, y, z) будут определенными функциями u, v, w. Для того чтобы переход от координат x, y,

z к u, v, w был возможен, надо, чтобы якобиан J был отличен от нуля:

$$J=\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} \neq 0.$$

Покажем, что это условие выполняется в достаточно малой окрестности поверхности, т. е. при достаточно малых w. Будем предполагать поверхность регулярной, по крайней мере, дважды дифференцируемой.

Если вектор точки поверхности обозначить через $\boldsymbol{r}(u, v)$, а вектор единичной нормали через $\boldsymbol{n}(u, v)$, то

$$J=((\boldsymbol{r}+w\boldsymbol{n})_u (\boldsymbol{r}+w\boldsymbol{n})_v (\boldsymbol{r}+w\boldsymbol{n})_w).$$

При $w=0$ $J=(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})=|\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v| \neq 0$. Следовательно, $J \neq 0$ и в некоторой окрестности поверхности, т. е. при достаточно малых $|w|$.

Пусть теперь кривая γ, ограничивающая поверхность, спрямляема и имеет длину l. Разделим ее на l/δ равных частей (не ограничивая общности, считаем l/δ целым). Построим для каждой точки деления куб с центром в этой точке и ребром 4δ. Общий объем этих кубов не больше $\frac{l}{\delta}(4\delta)^3$. Обозначим через F_δ' ту часть тела F_δ, которая заполнена нормалями длины δ к поверхности F. Объем этого тела отличается от объема тела F_δ не более, чем на суммарный объем кубов $\frac{l}{\delta}(4\delta)^3$. Поэтому при некотором θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ имеем равенство

$$V(F_\delta)=V(F_\delta')+\theta\frac{l}{\delta}(4\delta)^3,$$

$$\frac{1}{2\delta}V(F_\delta)=\frac{1}{2\delta}V(F_\delta')+\theta 32 l\delta.$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим

$$S(F)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}V(F_\delta)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}V(F_\delta').$$

Вычислим предел, стоящий в правой части равенства:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}V(F_\delta')=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\iiint\limits_{F,\,|w|\leqslant\delta} J\,du\,dv\,dw=$$

$$=\iint\limits_F\left[\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta}(\boldsymbol{r}_u+w\boldsymbol{n}_u \quad \boldsymbol{r}_v+w\boldsymbol{n}_v \quad \boldsymbol{n})\,dw\right]du\,dv=\iint\limits_F(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})\,du\,dv.$$

Таким образом,

$$S(F)=\iint\limits_F(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})\,du\,dv=\iint\limits_F|\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v|\,du\,dv,$$

т. е. получается та же формула для площади поверхности, которая была получена в гл. XI при другом определении понятия площади.

ГЛАВА XIX
ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКЦИОННОГО ЧЕРЧЕНИЯ

§ 1. Изображение точки на эпюре

Пространственная фигура изображается на плоскости путем проектирования ее параллельными прямыми. Обычно проекция фигуры на одну плоскость не дает полного представления о фигуре. Поэтому пользуются двумя или даже тремя проекциями на две или соответственно на три плоскости. Мы рассмотрим изображение фигуры с помощью ортогонального проектирования на две плоскости.

Пусть H и V — две плоскости, пересекающиеся под прямым углом по прямой x (рис. 150). Для удобства будем считать плоскость H *горизонтальной*, а плоскость V — *вертикальной*. Фигура ортогонально проектируется на плоскости H и V. Проекция фигуры на горизонтальную плоскость называется *горизонтальной проекцией*, а проекция на вертикальную плоскость называется *вертикальной проекцией*. Сами плоскости H и V называются *плоскостями проекций*, а прямая x, по которой они пересекаются, называется *осью проекций*. Выполнив проектирование фигуры на плоскости H и V, повернем горизонтальную плоскость H на угол 90° около оси x до совмещения с вертикальной плоскостью V. При этом обе проекции окажутся в одной плоскости. Полученный так чертеж с изображением обеих проекций фигуры называется *эпюром*. Рассмотрим расположение на эпюре горизонтальной и вертикальной проекций произвольной точки. Имеет место следующее свойство.

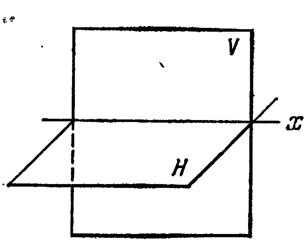


Рис. 150.

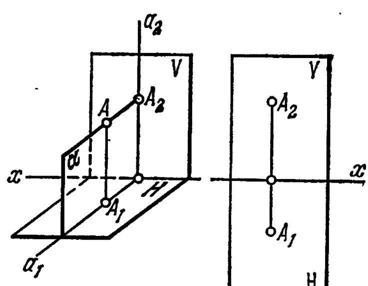


Рис. 151.

Вертикальная и горизонтальная проекции точки на эпюре изображаются точками, лежащими на прямой, перпендикулярной оси проекций.

Доказательство. Проведем через данную точку A плоскость α, перпендикулярную оси проекций x. Она пересечет плоскости H и V по прямым a_1 и a_2 (рис. 151). Горизонтальная проекция A_1 точки A лежит на прямой a_1, так как перпендикуляр из точки A на плоскость H лежит в плоскости α. Аналогично, вертикальная проекция A_2 точки A лежит на прямой a_2. Прямые a_1 и a_2 перпендикулярны прямой x. Так как вращение, как всякое движение, сохраняет углы, то прямые a_1 и a_2 при совмещении вращением плоскости H с V совмещаются. Таким образом, на эпюре проекции точки A изображаются точками прямой a_2.

§ 2. Задачи на прямую

Задача. *Дана прямая a своими проекциями на эпюре и горизонтальная проекция точки A, лежащей на прямой a. Найти вертикальную проекцию точки A.*

Решение. Пусть a_1 и a_2—горизонтальная и вертикальная проекции прямой a, A_1—горизонтальная проекция точки A (рис. 152). Вертикальная проекция точки A лежит

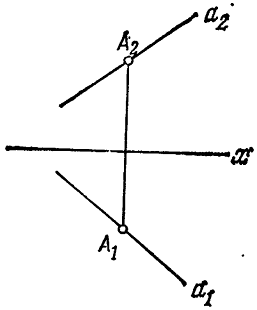


Рис. 152.

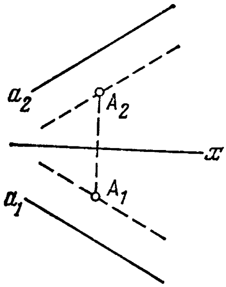


Рис. 153.

на прямой, перпендикулярной оси проекций, проходящей через точку A_1, и на вертикальной проекции a_2 прямой a, следовательно, является точкой пересечения этих прямых.

Задача. *Дана прямая a и не лежащая на ней точка A своими проекциями на эпюре. Построить проекции прямой, проходящей через точку A, параллельно прямой a.*

Решение. Так как параллельные прямые имеют параллельные проекции, то проекции искомой прямой получим, проводя через проекции точки A прямые, параллельные соответствующим проекциям прямой a (рис. 153).

§ 3. Определение длины отрезка

Задача. *Найти длину отрезка AB по его проекциям на эпюре.*

Решение. Если отрезок AB параллелен одной из плоскостей проекций, например, вертикальной плоскости, то его длина равна длине проекции на эту плоскость. О параллельности отрезка AB вертикальной плоскости мы узнаем по его горизонтальной проекции, которая должна быть параллельна оси проекций.

Допустим, отрезок AB не параллелен ни одной из плоскостей проекций. Будем поворачивать отрезок AB около прямой, проектирующей его конец A на горизонтальную плоскость. При этом проекции конца B отрезка будут изменяться. Именно, горизонтальная проекция точки B движется по окружности с центром в точке A_1, а вертикальная проекция движется по прямой b_2, параллельной оси проекций, проходящей через точку B_2 (рис. 154).

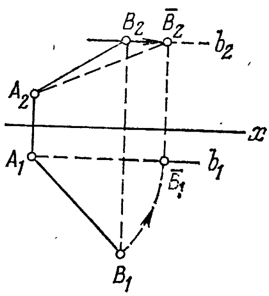


Рис. 154.

Когда отрезок станет параллелен вертикальной плоскости, проекция B_1 попадет на прямую, параллельную оси проекций, проходящую через точку A_1. Точку B_1 в этом положении обозначим через $\overline{B}_1$. Отрезок $A_1\overline{B}_1$ есть горизонтальная проекция отрезка, равного AB, параллельного вертикальной плоскости. Нетрудно найти его вертикальную проекцию $A_2\overline{B}_2$. Вертикальная проекция конца B повернутого отрезка получается в пересечении прямой, проходящей через точку $\overline{B}_1$, перпендикулярно оси проекций и прямой b_2. Как указано выше, отрезок AB равен $A_2\overline{B}_2$.

§ 4. Задачи на прямую и плоскость

Пусть H и V — плоскости проекций и α — произвольная плоскость, пересекающая плоскости H и V по прямым h и v соответственно (рис. 155). Прямые h и v называются *следами плоскости* α на плоскостях проекций. Именно, h называется *горизонтальным следом*, а v — *вертикальным следом*.

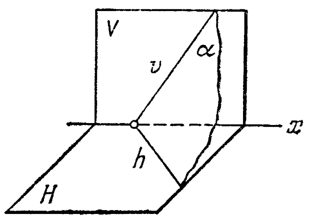


Рис. 155.

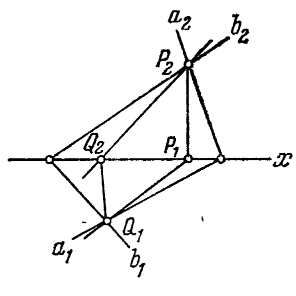


Рис. 156.

Следы плоскости пересекаются на оси проекций или параллельны оси, если сама плоскость параллельна этой оси. Если плоскость параллельна одной из плоскостей проекций, то она имеет один след: вертикальный, если плоскость параллельна горизонтальной плоскости, и горизонтальный, если она параллельна вертикальной плоскости. На эпюре плоскости изображаются своими следами.

З а д а ч а. *Найти прямую пересечения двух плоскостей, заданных своими следами на эпюре, т. е. найти проекции прямой.*

Р е ш е н и е. Пусть α и β—данные плоскости, a_1 и a_2—следы плоскости α, а b_1 и b_2—следы плоскости β (рис. 156). Прямая c, по которой пересекаются плоскости α и β, пересекает вертикальную плоскость в некоторой точке P. Ее вертикальная проекция P_2 является точкой пересечения вертикальных следов плоскостей, т. е. прямых a_2 и b_2, а горизонтальная проекция P_1 лежит на оси проекций.

Аналогично, прямая c пересекает горизонтальную плоскость в некоторой точке Q. Ее горизонтальная проекция Q_1 есть точка пересечения горизонтальных следов a_1 и b_1, а вертикальная проекция лежит на оси проекций. Искомые проекции прямой c получим, соединяя точки Q_2 и P_2 (вертикальная проекция) и точки P_1 и Q_1 (горизонтальная проекция).

З а д а ч а. *Задана прямая своими проекциями на эпюре. Найти следы плоскости, проходящей через эту прямую перпендикулярно данной плоскости проекций, например, H.*

Р е ш е н и е. Так как плоскость перпендикулярна плоскости H, то ее горизонтальный след совпадает с горизонтальной проекцией данной прямой, а вертикальный след перпендикулярен оси проекций. Для получения вертикального следа надо провести прямую, перпендикулярную оси проекций, через точку пересечения горизонтальной проекции прямой с осью (рис. 157).

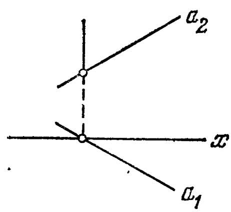


Рис. 157.

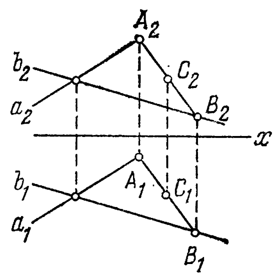


Рис. 158.

З а д а ч а. *Задана прямая своими проекциями и плоскость своими следами. Найти точку пересечения прямой с плоскостью, т. е. проекции этой точки.*

Р е ш е н и е. Проведем через данную прямую плоскость, перпендикулярную H. Найдем прямую h, по которой эта плоскость пересекается с данной. Аналогично построим прямую v пересечения данной плоскости и плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно вертикальной плоскости. Проекции искомой точки суть точки пересечения соответствующих проекций прямых h и v.

Задача. *Даны две пересекающиеся прямые своими проекциями и горизонтальная проекция некоторой точки. Найти вертикальную проекцию этой точки, если известно, что она лежит в плоскости заданных прямых.*

Решение. Проведем через горизонтальную проекцию C_1 данной точки произвольную прямую, пересекающую горизонтальные проекции a_1 и b_1 данных прямых (рис. 158). Точки пересечения обозначим A_1 и B_1. Проведем через точки A_1 и B_1 прямые, перпендикулярные оси проекций. Точки пересечения этих прямых с вертикальными проекциями данных прямых обозначим A_2 и B_2 соответственно. Отрезки A_1B_1 и A_2B_2 являются горизонтальной и вертикальной проекциями отрезка с концами на данных прямых. Отсюда следует, что вертикальная проекция C_2 искомой точки получается в пересечении прямой, проходящей через точку C_1 перпендикулярно оси проекций, с отрезком A_2B_2.

§ 5. Изображение призмы и пирамиды

При решении задач по стереометрии часто приходится изображать пространственные фигуры при параллельном проектировании их на плоскость. Общие соображения, которыми при этом пользуются, известны из школьного курса геометрии. Напомним их.

1. Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа прямолинейными отрезками.

2. Параллельные отрезки фигуры изображаются параллельными отрезками.

3. Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании. В частности, середина отрезка изображается серединой его проекции.

Соблюдение этих правил параллельного проектирования обязательно. Отступление от них сразу бросается в глаза. Рассмотрим изображение при параллельном проектировании наиболее употребляемых тел — призм и пирамид.

У призмы боковые ребра параллельны и равны, следовательно, изображаются параллельными отрезками равной длины. В случае прямой призмы боковые ребра изображаются обычно вертикальными отрезками. Так как боковые грани призмы—параллелограммы, а параллельность сохраняется при параллельном проектировании, то на плоскости чертежа боковые грани призмы изображаются параллелограммами. Таким образом, чтобы изобразить прямую призму с данным многоугольником в основании, надо провести из его вершин параллельные прямые, отложить на них равные отрезки и соединить их концы в той же последовательности, как и на заданном основании (рис. 159).

Чтобы изобразить наклонную призму, поступаем так же с той лишь разницей, что боковые ребра проводим параллельно друг другу, но наклонно (рис. 160). В любом случае надо следить за тем, чтобы проекции ребер не налегали друг на друга. В протвенном случае изображение будет невыразительным. Для большей выразительности изображения проекций ребер, не видимых со стороны наблюдателя, можно наносить пунктирными линиями.

В случае треугольной призмы основание призмы на проекции изображается произвольным треугольником. В случае параллелепипеда основание на плоскости чертежа должно быть, естественно, параллелограммом. В общем случае при изображении основания призмы надо пользоваться приведенными правилами. В частности, параллельные стороны основания должны изображаться параллельными отрезками, а в случае центрально симметричного основания его проекция должна быть также центрально симметричной.

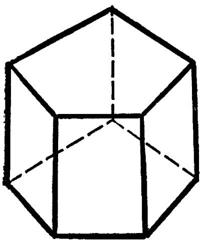


Рис. 159.

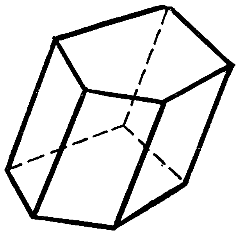


Рис. 160.

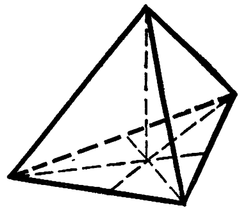


Рис. 161.

При изображении основания пирамиды надо иметь в виду те же соображения, что и при изображении основания призмы. В случае правильной пирамиды ее высота изображается вертикальным отрезком, а основание высоты является центром окружности, описанной около основания. Если пирамида треугольная, то центр ее основания изображается точкой пересечения медиан рис. 161).

§ 6. Изображение цилиндра, конуса и шара

При изображении цилиндра и конуса основные трудности возникают при изображении оснований. Основание, как проекция окружности, изображается на проекции эллипсом. Для построения эллипса с данной большой осью можно поступить следующим образом. На большой оси как на диаметре строим окружность (рис. 162). После этого вертикальные полухорды окружности пропорционально уменьшаются, например в два раза, и полученные точки соединяются плавной кривой. Если число точек взять достаточно большим, изображение эллипса будет достаточно точным. Обычно при решении задач ограничиваются четырьмя точками—концами полуосей. Проведение эллипса через эти точки упрощается тем, что в них известны направления касательных к эллипсу.

Для построения цилиндра с полученным основанием проводим несколько образующих через точки основания, откладываем на них равные отрезки и концы отрезков соединяем плавной кривой.

Крайние образующие на проекции цилиндра касаются его оснований.

Для того чтобы вписать правильный многоугольник в основание цилиндра, сначала вписывают его в окружность, из которой получается эллипс (рис. 163), а затем проводят вертикальные прямые через его вершины до пересечения с эллипсом. Полученные точки являются изображением вершин искомого многоугольника. Построив многоугольник, вписанный в основание

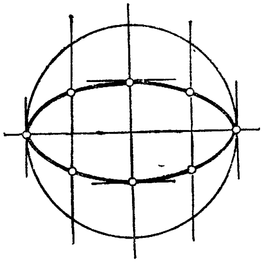


Рис. 162.

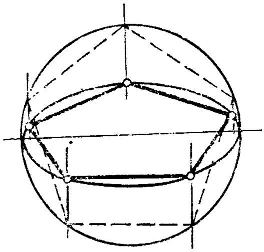


Рис. 163.

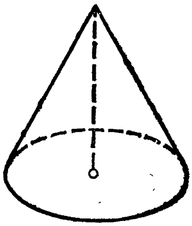


Рис. 164.

цилиндра, без труда строим призму, вписанную в цилиндр с этим основанием.

При построении призмы, описанной около цилиндра, надо иметь в виду, что стороны оснований призмы касаются оснований цилиндра, а соответствующие точки касания на верхнем и нижнем основании являются концами образующей.

При построении изображения конуса сначала строим его основание так же, как и у цилиндра. Из центра эллипса проводим высоту конуса в виде вертикального отрезка. Затем из вершины конуса проводим крайние образующие так, чтобы они касались основания (рис. 164).

В случае шара параллельное проектирование считается ортогональным плоскости чертежа. Поэтому шар изображается кругом.

§ 7. Построение сечений

При решении стереометрических задач часто возникает необходимость в построении сечений тела на его изображении. Приведем некоторые соображения, которыми можно пользоваться при построении таких сечений. Прежде всего заметим, что сечение призмы плоскостью, параллельной ее боковым ребрам, есть параллелограмм, стороны которого, лежащие в боковых гранях, параллельны боковым ребрам. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, есть прямоугольник, который изображается параллелограммом с двумя противолежащими сторонами — образующими цилиндра. Сечение пирамиды (конуса) плоскостью, проходящей через вершину, есть треугольник, у которого одной вершиной является вершина пирамиды (конуса), а две другие лежат на контуре основания.

Сечение призмы и цилиндра плоскостью, параллельной основаниям, равно основанию и получается из него параллельным переносом. Сечение пирамиды и конуса плоскостью, параллельной основанию, гомотетично основанию относительно вершины. Эти соображения позволяют без труда строить сечения указанными плоскостями.

Сложнее построить сечение тела плоскостью общего положения. Рассмотрим основной случай такого построения, когда задана прямая g, по которой секущая плоскость пересекает плоскость основания призмы. Например, сечение проходит через сторону основания призмы (рис. 165). Допустим, задана точка A на ребре призмы, через которую проходит секущая плоскость.

Проведем плоскость грани, в которой лежит точка A. Она пересечет плоскость основания призмы по прямой. Пусть B — точка пересечения этой прямой с прямой g. Прямая AB лежит в секущей плоскости и плоскости грани. Поэтому отрезок AC этой прямой, лежащий на грани призмы, является стороной искомого сечения.

Построив точку C находим точку D в следующей грани. В данном случае это верхнее основание призмы. Отрезок CD на верхнем основании должен быть параллелен прямой g. Продолжая это построение, мы найдем все вершины многоугольника в сечении, и, таким образом, построим сечение. Иногда, чтобы придать выразительность чертежу, сечение заштриховывают.

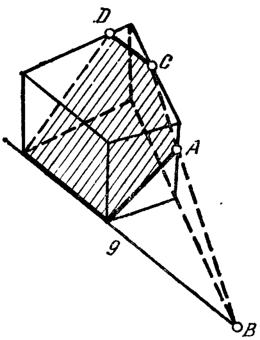


Рис. 165.

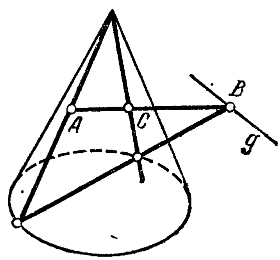


Рис. 166.

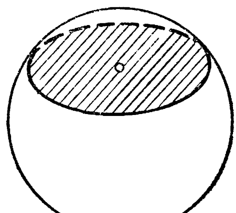


Рис. 167.

Сечение пирамиды плоскостью общего положения строится аналогично. Сначала ищут пересечение секущей плоскости с плоскостью основания. А дальше поступают так же, как и в случае призмы.

Рассмотрим сечение конуса плоскостью общего положения, пересекающей плоскость основания конуса по заданной прямой g. Допустим, задана какая-нибудь точка A на боковой поверхности конуса, через которую проходит секущая плоскость (рис. 166). Проведем какую-нибудь плоскость через вершину конуса и точку A. Она пересечет боковую поверхность конуса по двум образующим. Пусть B — пересечение следа этой плоскости на плоскости основания конуса с прямой g. Тогда пересечение прямой AB с образующей конуса дает точку C сечения. Таким образом можно построить любое количество точек сечения. Соединив их плавной кривой, получим сечение конуса нашей плоскостью.

Сечение цилиндра плоскостью строится аналогично.

Сечение шара плоскостью — круг. Его параллельная проекция есть эллипс (рис. 167).

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XIX

1. Обосновать следующий способ построения параллельной проекции правильного шестиугольника. Проекции трех вершин, взятых через одну, берем произвольно. Строим точку O пересечения медиан треугольника с этими вершинами. Затем строим проекции остальных трех вершин симметрично построенным относительно точки O.

2. Дана параллельная проекция окружности (эллипс) и проекция одного из ее диаметров. Как построить проекцию перпендикулярного диаметра?

3. Дана параллельная проекция окружности. Построить проекцию квадрата, вписанного в окружность, если одна из вершин задана.

4. Дана проекция окружности. Как построить проекцию описанного около нее квадрата?

5. Дана параллельная проекция окружности. Построить проекцию правильного треугольника, вписанного в эту окружность, если проекция одной из вершин задана.

6. Дана проекция окружности. Как построить проекцию правильного описанного около нее треугольника?

7. Дана проекция призмы. Построить сечение призмы, проходящее через боковое ребро и точку в одной из граней, если проекция этой точки задана.

8. Дана параллельная проекция призмы. Построить сечение призмы, проходящее через сторону основания и точку одной из граней. Проекция точки задана.

9. Дана параллельная проекция призмы. Построить сечение, проходящее через две точки на сторонах одного из оснований и заданную точку на одном из боковых ребер.

10. Дана параллельная проекция призмы. Построить сечение, параллельное основаниям, проходящее через данную точку в боковой грани.

11. Дана параллельная проекция правильной треугольной пирамиды. Построить сечение, проходящее через боковое ребро и высоту пирамиды.

12. Дана параллельная проекция треугольной пирамиды. Построить сечение, проходящее через сторону основания и делящее высоту пирамиды в данном отношении.

13. Дана параллельная проекция пирамиды. Как построить сечение, проходящее через вершину пирамиды и две точки на основании пирамиды, проекции которых заданы?

14. Дана параллельная проекция пирамиды. Как построить сечение, параллельное основанию, проходящее через заданную точку боковой грани, проекция которой задана?

15. Дана параллельная проекция пирамиды. Как построить сечение, проходящее через три точки на боковых ребрах?

16. Дана параллельная проекция цилиндра. Как построить проекцию правильной четырехугольной призмы, вписанной в цилиндр (описанной около цилиндра)?

17. Дана параллельная проекция цилиндра. Как построить проекцию правильной треугольной (шестиугольной) призмы, вписанной в цилиндр? Тот же вопрос для призмы, описанной около цилиндра.

18. Дана параллельная проекция конуса. Как построить проекцию правильной треугольной (шестиугольной) пирамиды, вписанной в конус? Тот же вопрос для описанной пирамиды.

19. Дана параллельная проекция конуса. Как построить правильную четырехугольную пирамиду, вписанную в конус (описанную около конуса)?

20. Дана параллельная проекция цилиндра (конуса). Как построить сечение, параллельное основанию, проходящее через заданную точку высоты?

ГЛАВА XX
МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ И МНОГОГРАННИКИ

§ 1. Теорема косинусов для трехгранного угла

Теорема. *Пусть α, β, γ—плоские углы трехгранного угла и C—двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ. Тогд*

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

Доказательство. Пусть S—вершина трехгранного угла, a, b, c—его ребра, α, β, γ—плоские углы, образованные ребрами b и c, c и a, a и b соответственно, C—двугранный угол при ребре c, т. е. двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ (рис. 168).

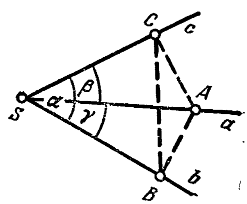


Рис. 168.

Предположим сначала, что углы α и β острые. Отложим на ребре c угла из его вершины отрезок SC единичной длины и проведем из конца C этого отрезка перпендикуляры до пересечения с ребрами угла a и b в точках A и B. Применим теорему косинусов к треугольникам ABC и ABS. Имеем:

$$AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C=AB^2,$$
$$SA^2+SB^2-2SA\cdot SB\cdot\cos\gamma=AB^2.$$

Или

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos C=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}-2\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}\cdot\cos\gamma.\ (*)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha=1,\qquad \frac{1}{\cos^2\beta}-\operatorname{tg}^2\beta=1,$$

из (*) получаем

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

Если угол α тупой, а β острый, надо брать пересечение перпендикуляра к ребру c с продолжением ребра a. При этом соотношение (*), из которого выражается $\cos\gamma$, не нарушится, так как α заменяется на $180°-\alpha$, C—на $180°-C$, γ—на $180°-\gamma$. Аналогично, равенство (*) сохранится, если и угол β тупой. Теорема доказана.

§ 2. Трехгранный угол, полярный данному трехгранному углу

Пусть a, b, c—ребра трехгранного угла с вершиной S. Плоскость угла (bc) разбивает пространство на два полупространства. В одном из них расположена полупрямая a. Проведем из точки S полупрямую a' перпендикулярно плоскости угла (bc), направленную в полупространство, дополнительное к тому, в котором лежит полупрямая a. Аналогично построим полупрямые b' и c', перпендикулярные плоскостям углов (ac) и (ab) соответственно. Трехгранный угол, ребрами которого являются полупрямые a', b', c', называется *полярным* по отношению к исходному углу (abc) (рис. 169). Легко видеть, что *грани полярного угла перпендикулярны ребрам исходного*. Свойство полярности трехгранных углов взаимно, т. е. если трехгранный угол $(a'b'c')$ полярен трехгранному углу (abc), то трехгранный угол (abc) полярен трехгранному углу $(a'b'c')$. Из свойства углов с перпендикулярными сторонами заключаем, что плоские углы полярного угла дополняют соответствующие двугранные исходного трехгранного угла до 180°. Именно, плоский угол $(b'c')$ дополняет до 180° двугранный угол при ребре a и т. д. Аналогично, двугранные углы полярного трехгранного угла дополняют соответствующие плоские углы исходного до 180°. В частности, двугранный угол при ребре a' дополняет до 180° плоский угол (bc).

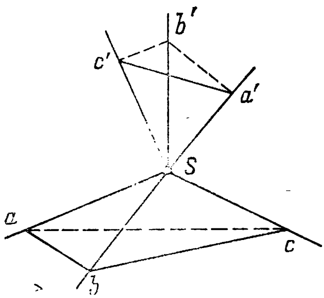


Рис. 169.

Теорема. *Пусть A, B, C—двугранные углы трехгранного угла. Пусть γ—плоский угол, противолежащий двугранному углу C. Тогда*

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos \gamma.$$

Эта теорема является простым следствием теоремы косинусов для трехгранного угла, полярного данному.

§ 3. Теорема синусов для трехгранного угла

Теорема. *Пусть α, β, γ—плоские углы трехгранного угла, а A, B, C—противолежащие им двугранные углы. Тогда*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

Доказательство. Отложим на ребре c трехгранного угла отрезок SC единичной длины (рис. 170). Опустим из точки C перпендикуляр на плоскость угла (ab). Пусть $\bar{C}$—основание этого перпендикуляра. Проведем из точки C плоскости, перпендикулярные ребрам a и b, и обозначим через A и B точки пересечения этих плоскостей с ребрами a и b или их продолжениями.

Вычислим длину перпендикуляра $C\bar{C}$. Из прямоугольного треугольника SCB с прямым углом B получим

$$CB = 1 \cdot \sin\alpha.$$

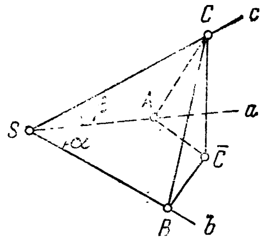


Рис. 170.

Теперь из прямоугольного треугольника $CB\bar{C}$ с прямым углом $\bar{C}$ находим длину перпендикуляра $C\bar{C}$. Именно,

$$C\bar{C} = CB\sin B = \sin\alpha\sin B.$$

Длину перпендикуляра $C\bar{C}$ можно найти иначе, используя при этом прямоугольные треугольники ACS и $CA\bar{C}$. При этом получается, что

$$C\bar{C} = \sin\beta\sin A.$$

Сравнивая выражения для отрезка $C\bar{C}$, находим

$$\sin\alpha\sin B = \sin\beta\sin A.$$

Отсюда

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B}.$$

Аналогично получается соотношение

$$\frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

Теорема доказана.

§ 4. Соотношение между плоскими углами многогранного угла

Теорема. *У выпуклого трехгранного угла каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.*

Доказательство. Пусть α, β, γ — плоские углы трехгранного угла. Покажем, что $\gamma < \alpha + \beta$. Если $\alpha + \beta \geqslant 180°$, то утверждение очевидно, так как $\gamma < 180°$. Пусть $\alpha + \beta \leqslant 180°$. Применяя теорему косинусов к трехгранному углу, получим

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

Так как $\cos C > -1$, а $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ положительны, то имеет место неравенство

$$\cos\gamma > \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Правая часть этого неравенства — не что иное, как $\cos(\alpha+\beta)$. Таким образом, $\cos\gamma > \cos(\alpha+\beta)$. Как известно, при возрастании угла от 0° до 180° косинус угла убывает. Отсюда следует, что $\gamma < \alpha + \beta$. Теорема доказана.

Теорема. *У выпуклого многогранного угла сумма плоских углов меньше* 360°.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ребра выпуклого многогранного угла с вершиной S. Отметим на сторонах угла a_1 и a_2 точки A_1 и A_2. Возьмем теперь точку A_3 на стороне a_3, достаточно близкую к вершине S, и проведем через точки A_1, A_2, A_3 плоскость α (рис. 171). При достаточной близости точки A_3 к S плоскость α пересекает все ребра $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — точки пересечения плоскости α с ребрами угла S. Из выпуклости многогранного угла S следует выпуклость многоугольника P с вершинами $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ (рис. 172).

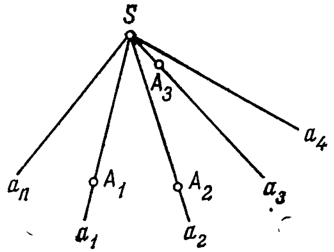


Рис. 171.

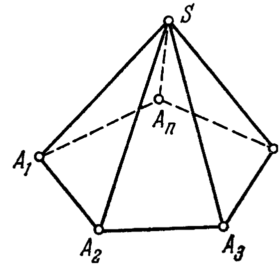


Рис. 172.

Рассмотрим многогранный угол S и трехгранные углы с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Сумма всех их плоских углов составлена из суммы углов многоугольника P, т. е. $180°n - 360°$ и суммы углов треугольников A_1A_2S, A_2A_3S, $\ldots$, A_nA_1S, т. е. $180°n$. Итак, сумма всех плоских углов равна $2 \cdot 180°n - 360°$.

У каждого трехгранного угла A_k угол, принадлежащий многоугольнику P, меньше суммы двух других углов. Поэтому найденная выше сумма всех плоских углов больше $(180°n - 360°)\,2 + \theta$, где θ — сумма плоских углов при вершине S, т. е.

$$(180°n - 360°)\,2 + \theta < 2 \cdot 180°n - 360°.$$

Отсюда $\theta < 360°$. Теорема доказана.

§ 5. Площадь сферического многоугольника

Пусть V — выпуклый многогранный угол. Возьмем единичную сферу с центром в вершине угла. Фигура P, которая получается в пересечении этой сферы с многогранным углом, называется выпуклым *сферическим многоугольником*. Точки пересечения ребер угла со сферой называются *вершинами* многоугольника, а дуги больших кругов, которые получаются в пересечении граней угла со сферой, называются *сторонами* многоугольника. Углы многоугольника α_k равны двугранным углам многогранного угла V.

Площадь сферического многоугольника P можно найти с помощью теоремы Гаусса—Бонне. Имеем

$$\sum_k (\pi-\alpha_k)=2\pi-\iint_P K\,dS.$$

Так как $K=1$, то

$$S(P)=\sum \alpha_k-\pi(n-2),$$

где n—число сторон многоугольника P. В частности, для сферического треугольника

$$S=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi.$$

Дадим элементарный вывод формулы для площади сферического многоугольника. Начнем с треугольника. Итак, пусть V—трехгранный угол. Плоскости его граней разбивают сферу на восемь треугольников, симметрично расположенных относительно центра сферы (рис. 173). Пусть Δ—сферический треугольник, который получается в пересечении угла V со сферой и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$—его углы. Фигура, составленная из треугольников Δ и Δ_1, это часть сферы, которая содержится внутри двугранного угла, равного α_1. Поэтому ее площадь

$$S(\Delta)+S(\Delta_1)=\left(\frac{\alpha_1}{2\pi}\right)4\pi=2\alpha_1.$$

Аналогично получаем

$$S(\Delta)+S(\Delta_2)=2\alpha_2,$$
$$S(\Delta)+S(\Delta_3)=2\alpha_3.$$

Сумма площадей треугольников Δ_1', Δ_2, Δ_3 и Δ равна площади полусферы (2π). Треугольник Δ_1' симметричен треугольнику Δ_1, поэтому имеет с ним одинаковую площадь. Следовательно,

$$S(\Delta)+S(\Delta_1)+S(\Delta_2)+S(\Delta_3)=2\pi.$$

Складывая почленно первые три равенства и вычитая четвертое, получим

$$2S(\Delta)=2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3-2\pi.$$

Отсюда

$$S(\Delta)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi.$$

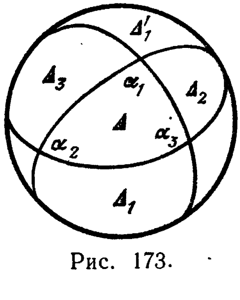


Рис. 173.

Что и требовалось доказать.

Пусть теперь V—многогранный угол. Проведем через одно из его ребер и каждое из остальных ребер плоскости. Они пересекают сферу по большим кругам, которые разбивают сферический многоугольник P на треугольники подобно тому, как плоский многоугольник разбивается диагоналями, исходящими из одной вершины. Если для каждого из этих треугольников записать полученную формулу для площади и сложить их почленно, то получим в одной стороне площадь многоугольника $S(P)$, а в другой — сумму углов многоугольника и $-\pi(n-2)$. Итак,

$$S(P)=\sum\alpha_k-\pi(n-2).$$

Что и требовалось доказать.

§ 6. Выпуклые многогранники. Понятие выпуклого тела

Согласно школьному определению, многогранник — это тело, ограниченное конечным числом плоскостей. Это надо понимать так, что вся граница многогранника, т. е. его поверхность, лежит в этих плоскостях. Многогранник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону каждой из ограничивающих его плоскостей, т. е. в одном из полупространств, определяемых этой плоскостью. Наглядное представление о том, как устроен выпуклый многогранник, дает следующая теорема.

Выпуклый многогранник есть пересечение конечного числа полупространств, имеющих общую внутреннюю точку. И обратно, пересечение конечного числа полупространств, если оно ограничено и имеет внутреннюю точку, есть выпуклый многогранник.

Доказательство. Пусть P — тело, ограниченное конечным числом плоскостей α_k, т. е. выпуклый многогранник. Пусть A — внутренняя точка многогранника. Каждая из плоскостей α_k разбивает пространство на два полупространства. Пусть E_k то из них, которому принадлежит точка A. (E_k — замкнутое полупространство, т. е. $\alpha_k\subset E_k$.) Утверждаем, что пересечение P' полупространств E_k есть многогранник P. Действительно, пусть $X\in P$. Точка X принадлежит каждому E_k, поэтому принадлежит их пересечению. Следовательно, $P\subset P'$.

Пусть теперь $X\in P'$. Покажем, что $X\in P$. Так как A — внутренняя точка многогранника P, то точки отрезка AX, близкие к A, тоже принадлежат P. Если X не принадлежит P, то отрезок AX пересекает поверхность многогранника P в некоторой точке Y. Точка Y принадлежит одной из плоскостей α_k. Следовательно, точки A и X лежат по разные стороны плоскости α_k. А это противоречит определению P'. Первое утверждение теоремы доказано.

Доказательство второго утверждения совсем просто. Пересечение конечного числа полупространств, если оно ограничено и имеет внутренние точки, есть тело, ограниченное конечным числом плоскостей, а следовательно, оно есть выпуклый многогранник. Теорема доказана полностью.

Выпуклым телом называется ограниченное замкнутое множество с внутренними точками, которое вместе с любыми двумя его точками содержит соединяющий их отрезок. Очевидно, выпуклый многогранник является выпуклым телом. Примером выпуклого тела, не являющегося выпуклым многогранником, может служить шар. Вообще, любое тело, ограниченное замкнутой регулярной поверхностью с неотрицательной гауссовой кривизной, является выпуклым телом. Доказывается, что любое выпуклое тело можно представить в виде пересечения полупространств. В общем случае множество этих полупространств бесконечно.

Аналогично на плоскости определяется понятие *выпуклой области* как множества точек, которое вместе с любыми двумя его точками содержит соединяющий их отрезок. Любая выпуклая область на плоскости есть пересечение полуплоскостей. Для выпуклого многоугольника число этих полуплоскостей конечно.

§ 7. Теорема Эйлера для выпуклых многогранников

Теорема Эйлера, о которой идет речь, была доказана в § 6 гл. XII с помощью теоремы Гаусса—Бонне. Именно, было доказано, что *для любого выпуклого многогранника*

$$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2,$$

где α_0—число вершин, α_1—число ребер, а α_2—число граней многогранника. Сейчас мы дадим простое элементарное доказательство этой теоремы.

Пусть P—выпуклый многогранник и F—его грань. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку в этой грани и сместим ее немного наружу многогранника. Спроектируем многогранник на плоскость грани F из этой точки. При этом грань F перейдет в себя, а оставшаяся часть многогранника спроектируется внутрь этой грани. Проекции F_k граней многогранника P разбивают грань F на выпуклые многоугольники (рис. 174).

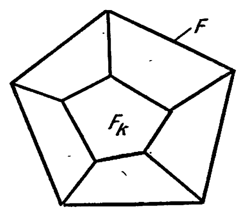


Рис. 174.

Сумма углов многоугольника F_k

$$\sigma_k=\pi n_k-2\pi, \qquad (*)$$

где n_k—число сторон многоугольника F_k. Найдем сумму всех углов многоугольников F_k, включая и F. Для этого сложим почленно все равенства (*). При этом второе слагаемое правой части равенства (*) повторится α_2 раз (число многоугольников F_k, включая и F). Сумма первых слагаемых будет $2\pi\alpha_1$. Множитель 2 появляется из-за того, что каждая сторона принадлежит двум многоугольникам. Итак,

$$\sigma=2\pi\alpha_1-2\pi\alpha_2.$$

Найдем теперь сумму углов σ другим способом, складывая сначала углы многоугольников при общей вершине. При этом, если вершина находится внутри F, то сумма углов при этой вершине равна 2π. Если же вершина является вершиной F, то сумма углов при этой вершине равна удвоенному углу многоугольника F. Поэтому σ можно представить в виде

$$\sigma=2\pi\alpha_0-\sum 2(\pi-\beta_k),$$

где β_k — углы многоугольника F, а суммирование распространяется на вершины многоугольника F. Величина $\pi-\beta_k$ — это внешний угол многоугольника F. А так как сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 2π, то

$$\sigma = 2\pi\alpha_0 - 4\pi.$$

Сравнивая полученные выражения для σ, получаем формулу Эйлера

$$\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_0 = 2.$$

Теорема доказана.

§ 8. Теорема Коши

Выпуклые многогранники, одинаково составленные из равных граней, равны (под выпуклым многогранником понимается не тело, а его поверхность).

Доказательство. Допустим, теорема не верна и существует два не равных выпуклых многогранника P_1 и P_2, одинаково составленные из равных граней. При этом, очевидно, у многогранника P_1 будут ребра с двугранными при них углами, отличными от соответствующих углов многогранника P_2. Отнесем каждому такому ребру знак «+» или «—» в зависимости от того, больше или меньше двугранный угол при нем соответствующего угла многогранника P_2. Очевидно, если из некоторой вершины выходит отмеченное ребро, то из этой вершины обязательно выходит еще по крайней мере одно отмеченное ребро. Поэтому у отмеченных ребер нет свободных вершин, и они разбивают многогранник P_1 на области g. Если эти области гомеоморфны кругу, то эйлерова характеристика

$$\chi = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2,$$

где α_0 — число отмеченных вершин (т. е. вершин, из которых исходят отмеченные ребра), α_1 — число отмеченных ребер, а α_2 — число областей g.

Если среди областей g есть не гомеоморфные кругу, то $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 > 2$, так как наше разбиение можно дополнить новыми сторонами, не меняя числа областей и вершин (рис. 175). Введение таких сторон только уменьшает число $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$, а когда все области будут гомеоморфны кругу, то $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi = 2$. Итак, для нашего разбиения многогранника на области

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \geqslant 2.$$

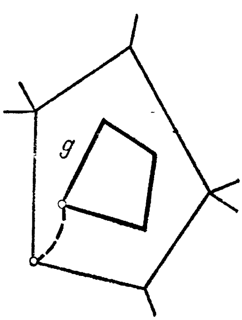


Рис. 175.

Граница каждой области g представляет собой ломаную, звенья которой отмечены знаками «+» и «—». Условимся считать угол при вершине области g отмеченным, если его стороны отмечены разными знаками («+» и «—»). Оценим общее число отмеченных углов областей g. У области с n сторонами число отмеченных углов не более n, если n четно, и не более $n-1$, если n нечетно. Поэтому общее число отмеченных углов

$$\omega \leqslant 2a_3 + 4a_4 + 4a_5 + 6a_6 + \ldots,$$

где $a_3, a_4, a_5, \ldots$ — число областей с тремя, четырьмя, пятью и т. д. сторонами.

Так как каждое отмеченное ребро принадлежит двум областям, то

$$\sum n a_n = 2\alpha_1,$$

$$4\alpha_1 - 4\alpha_2 = \sum (4n-4)\, a_n = 2a_3 + 4a_4 + 6a_5 + 8a_6 + \ldots$$

Отсюда видно, что

$$\omega \leqslant 4\alpha_1 - 4\alpha_2.$$

Оценим теперь число ω снизу. Для этого покажем, что число отмеченных углов с данной вершиной не меньше 4. Если число отмеченных углов при данной вершине меньше 4, то либо отмеченным ребрам отнесен один знак, либо ребра, отмеченные разными знаками, не перемежаются, т. е. при обходе вершины угла сначала встречаются ребра, отмеченные одним знаком, а затем другим (рис. 176, неотмеченные ребра обозначены пунктиром). Покажем, что оба эти случая исключаются. Пусть a и b — крайние ребра, отмеченные знаком «$+$». Из наглядных соображений ясно, что при переходе от данного

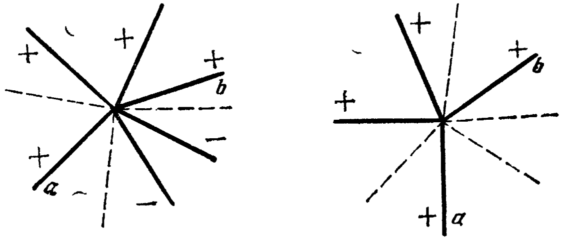


Рис. 176.

многогранного угла многогранника P_1 к соответствующему углу многогранника P_2 угол (ab) должен уменьшаться, если рассматривать ту часть многогранного угла, которой принадлежат положительные ребра (отмеченные знаком «$+$»), и наоборот, должен увеличиваться, если рассматривать ту часть, которой принадлежат отрицательные ребра; если же на рассматриваемой части отмеченных ребер нет, то угол (ab) не изменяется. В любом случае при наличии отмеченных ребер у многогранного угла получается противоречие. Остается наглядным соображениям дать строгое доказательство.

Итак, пусть выпуклый многогранный угол $V = (a_1a_2 \ldots a_n)$ переходит в выпуклый многогранный угол V' с увеличением двугранных углов при ребрах $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, без изменения плоских углов $(a_1a_2), (a_2a_3), \ldots, (a_{n-1}a_n)$. Покажем, что плоский угол (a_1a_n) при этом увеличивается. Доказательство будем вести по индукции. Для трехгранных углов утверждение следует из теоремы косинусов.

Рассмотрим выпуклые углы $V_{xy} = (xa_2 \ldots a_{n-1}y)$, которые получаются из угла V при увеличении двугранных углов при ребрах a_2 и a_{n-1}, но не большем, чем при переходе от V к V'. Выберем из них угол V_{xy}, у которого плоский угол (xy) имеет наибольшее значение. Покажем, что у этого угла по

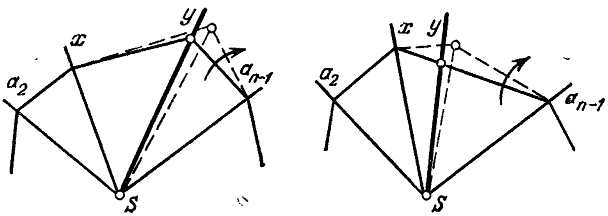


Рис. 177.

крайней мере при одном из ребер a_2 или a_{n-1} двугранный угол такой же, как и у V'. Действительно, если оба угла меньше, то угол V_{xy} можно слегка деформировать, увеличивая при этом плоский угол (xy) (рис. 177). А это противоречит выбору угла V_{xy}.

При переходе от угла V_{xy} к V' плоский угол (xy) увеличивается по предположению индукции, так как у них два соответствующих двугранных угла равны, что позволяет свести вопрос к случаю $(n-1)$-гранных углов. В итоге переходя сначала от угла V к V_{xy}, а затем от V_{xy} к V', заключаем, что при переходе от угла V к V' плоский угол $(a_1 a_n)$ увеличивается. Что и требовалось доказать.

Завершим теперь доказательство теоремы Коши. Так как при каждой отмеченной вершине число отмеченных углов не меньше 4, то

$$\omega \geqslant 4\alpha_0.$$

Сравнивая это неравенство с полученным ранее $\omega \leqslant 4\alpha_1 - 4\alpha_2$, будем иметь: $4\alpha_0 \leqslant 4\alpha_1 - 4\alpha_2$, т. е. $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 0$. А это противоречит соотношению, полученному ранее: $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \geqslant 2$. Теорема доказана.

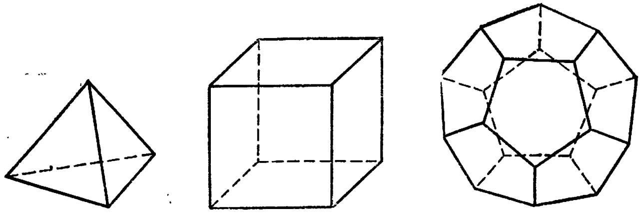
Выпуклый многогранник можно разрезать на конечное число выпуклых многоугольников. Возникает естественный вопрос: если дано конечное число выпуклых многоугольников, можно ли из них склеить выпуклый многогранник, подвергая многоугольники только изгибанию? Оказывается, это всегда возможно, если склеиваемые стороны многоугольников имеют одинаковые длины, а сумма углов многоугольников, вершины которых совмещаются при склеивании, не больше 2π (теорема А. Д. Александрова). В доказательстве этой теоремы существенно используется теорема Коши.

§ 9. Правильные многогранники

Согласно школьному определению, выпуклый многогранник называется правильным, если его грани — правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон, и в каждой вершине сходится одно и то же число ребер.

Грани правильного многогранника могут быть либо равносторонними треугольниками, либо квадратами, либо правильными пятиугольниками. Действительно, начиная с правильного шестиугольника, внутренние углы не меньше 120°, а так как в каждой вершине многогранника сходится не меньше трех ребер, то в этом случае у многогранного угла при вершине правильного многогранника сумма плоских углов была бы не меньше $3 \cdot 120° = 360°$. Последнее невозможно, так как мы знаем, что сумма плоских углов любого выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Если грани правильного многограника являются правильными треугольниками, то число ребер при вершине многогранника должно быть не больше пяти. Действительно, при большем



Тетраэдр *Куб* *Додекаэдр*

Рис. 178.

их числе сумма плоских углов при вершине многогранника будет не меньше 360°, что невозможно. Таким образом, у правильного многогранника с треугольными гранями число ребер, сходящихся в вершине, может быть только три, четыре и пять. У правильного многоугольника с квадратными и пятиугольными гранями число ребер, сходящихся в вершине, может быть только три.

Найдем все правильные выпуклые многогранники.

Начнем с многогранников, у которых в каждой вершине сходятся по три ребра. Из теоремы косинусов для трехгранного угла следует, что у такого многогранника двугранные углы равны и однозначно выражаются через плоские. Поэтому, отправляясь от какой-нибудь вершины и последовательно достраивая грани, мы приходим к трем правильным многогранникам — *тетраэдру*, *кубу* и *додекаэдру* (рис. 178).

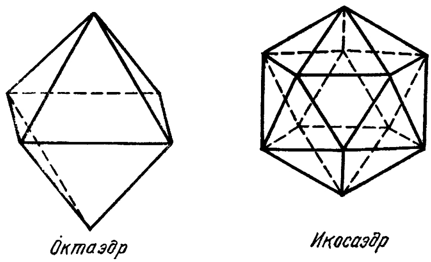


Рис. 179.

Если в вершине правильного многогранника сходятся более чем три ребра, а в этом случае грани — треугольники, дело обстоит сложнее. Тем не менее, нетрудно построить два таких многогранника. У одного из них вершинами являются центры граней куба (он называется *октаэдром*), а у другого вершинами являются центры граней додекаэдра (он называется *икосаэдром*). У октаэдра в каждой вершине сходятся по четыре ребра, а у икосаэдра — пять ребер (рис. 179).

Возникает вопрос, а не может ли быть других правильных многогранников с треугольными гранями, у которых в каждой вершине сходится по четыре ребра, как у октаэдра, или по пять ребер, как у икосаэдра. Оказывается, других таких правильных многогранников нет. Это следует из теоремы Коши, согласно которой выпуклые многогранники, одинаково составленные из равных граней, равны.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XX

1. Найти двугранные углы при основании правильной n-угольной пирамиды, если плоские углы боковых граней при основании равны α.

2. Найти углы боковых граней правильной n-угольной пирамиды, если двугранные углы при основании равны β.

3. Найти двугранные углы при основании правильной n-угольной пирамиды, если боковые ребра образуют с плоскостью основания углы γ.

4. Найти двугранные углы при боковых ребрах правильной n-угольной пирамиды, если двугранные углы при основании равны β.

5. Найти двугранные углы при основании правильной n-угольной пирамиды, если двугранные углы при боковых ребрах равны δ.

6. Найти двугранные углы при боковых ребрах правильной n-угольной пирамиды, если плоские углы при вершине равны φ.

7. Найти угол между ребром трехгранного угла и плоскостью противолежащей грани, если заданы плоские (двугранные) углы трехгранного угла.

8. У наклонного параллелепипеда известны двугранные углы при одной вершине. Как найти двугранные углы при любой другой вершине?

9. У наклонной треугольной призмы заданы углы основания и углы, образуемые боковым ребром со сторонами основания в их общей вершине. Как найти углы, образуемые другими боковыми ребрами со сторонами основания?

10. Найти двугранные углы у правильных выпуклых многогранников: тетраэдра, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра.

11. Найти радиусы шаров, описанных и вписанных в правильные выпуклые многогранники (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр).

12. Сколько существует различных способов совместить движением правильный многогранник (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) с самим собой?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

ГЛАВА I

1. 2. **2.** (2, 0). **3.** (0, 3). **4.** Прямая, параллельная оси y и отстоящая от нее на 3 единицы. **5.** Концы отрезка AB лежат в разных полуплоскостях относительно оси y, но в одной полуплоскости относительно оси x. **6.** Положительную. **7.** 4 (3). **8.** 2. **9.** -2. **10.** Прямая, содержащая биссектрисы первого и третьего квадрантов. **11.** Прямая, содержащая биссектрисы второго и четвертого квадрантов. **12.** а) На прямых, параллельных оси y, отстоящих на расстоянии a от нее; б) на биссектрисах координатных углов. **13.** а) В полосе между прямыми, параллельными оси y, отстоящими на расстоянии a от нее; б) внутри прямоугольника с центром в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям. **14.** $(x, -y)$; $(-x, y)$; $(-x, -y)$. **15.** Координатами точки, симметричной точке $A(x, y)$ относительно биссектрисы первого (второго) координатного угла, будут y и x (соответственно $-y$, $-x$). **16.** Если за ось x принять ось y, а за ось y принять ось x, то точка $A(x, y)$ будет иметь абсциссу y, а ординату x. **17.** $AB=5$, $AC=10$, $BC=5$. **18.** Сравните расстояния между точками. Точка B лежит между A и C. **19.** (4, 0). **20.** (3, 3) и (15, 15). **21.** Третья вершина C треугольника находится на расстоянии, равном AB, от точек A и B: $C\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$ или $C\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)$.

22. Воспользоваться тем, что у квадрата стороны равны, а диагонали в $\sqrt{2}$ раз больше стороны. Ответ: а) $C(1, \sqrt{2})$, $D(\sqrt{2}, 1)$; б) $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$. **23.** Воспользоваться теоремой Пифагора. Если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ — вершины треугольника с прямым углом C, то $(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$. **24.** Если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ — вершины треугольника, то $(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2 > (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2$. Это следует из того, что в треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона. **25.** Надо найти центр O окружности, описанной около треугольника ABC, и сравнить радиус этой окружности с расстоянием от центра до точки D. **26.** Координатная запись «неравенства треугольника». Неравенство выражает, что расстояние между двумя точками (a, b) и (a_1, b_1) не больше суммы их расстояний до третьей точки (a_2, b_2). **27.** Воспользоваться тем, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Ответ: $D(2, -1)$, $O(2, 1)$. **28.** (0, -2). См. предыдущую задачу. **29.** (3, 3). **30.** Доказать, что четырехугольник — параллелограмм (упр. 27). Сравнить длины сторон и диагоналей. **31.** Воспользоваться тем, что медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершин. Ответ: $(x_1+x_2+x_3)/3$. **32.** Середины сторон треугольника и любая из его вершин, взятые вместе, являются вершинами параллелограмма. Ответ: $A(x_1-x_2+x_3,\ y_1-y_2+y_3)$, $B(x_3-x_1+x_2,\ y_3-y_1+y_2)$, $C(x_2-x_3+x_1,\ y_2-y_3+y_1)$. **33.** Вершины исходного треугольника делят в отношении $\lambda:(1-\lambda)$ отрезки, соединяющие точку (x_0, y_0) с вершинами данного треугольника. Ответ: $((1-\lambda)x_0+\lambda x_1, (1-\lambda)y_0+\lambda y_1)$, $((1-\lambda)x_0+\lambda x_2, (1-\lambda)y_0+\lambda y_2)$, $((1-\lambda)x_0+\lambda x_3, (1-\lambda)y_0+\lambda y_3)$. **34.** Воспользоваться геометрическими соображениями, приведенными в связи с исследованием вопроса о делении отрезка в данном отношении. **35.** Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — концы одного отрезка, а (x_3, y_3) и (x_4, y_4) — концы другого. Если отрезки пересекаются, то точка пересечения делит первый отрезок в отношении $\lambda:(1-\lambda)$, а второй — в отношении $\mu:(1-\mu)$. Получаются два представления для координат точки пересечения $(1-\lambda)x_1+\lambda x_2=(1-\mu)x_3+\mu x_4$, $(1-\lambda)y_1+\lambda y_2=(1-\mu)y_3+$ $+\mu y_4$. Отрезки пересекаются, если решения этой системы относительно λ и μ удовлетворяют условиям $0<\lambda$, $\mu<1$. **36.** Воспользоваться методом математической индукции. **37.** $x_1=4$, $x_2=-2$. **38.** а) При $a=0$ центр окружности лежит на оси ординат; б) при $b=0$ центр окружности лежит на оси абсцисс; в) при $c=0$ окружность проходит через начало координат; г) при $a=0$, $b=0$ центр окружности находится в начале координат; д) при $a=0$, $c=0$ окружность касается оси абсцисс в начале координат; е) при $b=0$, $c=0$ окружность касается оси ординат в начале координат. **39.** Обратить внимание на то, что $(x-a)^2+(x-b)^2$ — квадрат расстояния точки (x, y) от центра круга и воспользоваться теоремой Пифагора в применении к прямоугольному треугольнику, у которого один катет является отрезком касательной, а другой — радиусом круга. **40.** Воспользоваться тем, что степень для внешних точек равна квадрату касательной, а для внутренних точек — взятому со знаком минус квадрату полухорды, проходящей через данную точку перпендикулярно диаметру, соединяющему эту точку с центром окружности. **41.** Пусть (x, y) — точка геометрического места. Ее расстояния от F_1 и F_2 соответственно равны $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Уравнение геометрического места точек: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$. Для того, чтобы привести это уравнение к виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, перенесем первый радикал в правую часть равенства и возведем обе части равенства в квадрат. Получим $(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+$ $+(x-c)^2+y^2$. Оставим радикал в правой части равенства и перенесем остальные члены в левую часть. Тогда после очевидных упрощений получим $cx-a^2=$ $=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Возводя обе части равенства в квадрат, после простых преобразований получим $a^4-a^2c^2=a^2y^2+(a^2-c^2)x^2$, откуда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$, $a^2-c^2=b^2$. **42.** Задача решается аналогично предыдущей. Исходное уравнение $\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$. **43.** Уравнение геометрического места: $\sqrt{(y-p)^2+x^2}=y$. После возведения в квадрат и упрощений уравнение принимает вид $-2py+p^2+x^2=0$. **44.** Уравнение кривой в неявной форме: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Отсюда видно, что a и b — координаты центра, а R — радиус. **45.** Уравнения кривой: $x=\frac{\lambda a}{\lambda+\mu}\cos t$, $y=\frac{\mu a}{\lambda+\mu}\sin t$. При $\lambda=\mu$ кривая — окружность. **46.** Уравнения кривой: $x=a\cos t+h\sin t$, $y=b\sin t+h\cos t$, где a, b, h и параметр t имеют значения, указанные на рис. 13. Чтобы получить эти уравнения, представьте абсциссу x и ординату y точки кривой в виде алгебраической суммы длин проекций звеньев ломаной $OABC$. **47.** Уравнения кривой $x=R\left(\frac{s}{R}-\sin\frac{s}{R}\right)$, $y=R\left(1-\cos\frac{s}{R}\right)$ (циклоида). Задача решается подобно предыдущей. Здесь ломаная — $OTSA$. **48.** Решая уравнения ax^2+bxy+ $+cy^2+dx+ey=0$, $t=\frac{y}{x}$ относительно x и y, получаем уравнения кривой в параметрической форме. **49.** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. **50.** $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. **51.** Система уравнений $x^2+y^2+2ax+1=0$, $x=0$ не имеет решений. **52.** Данная окружность и ось y касаются, так как система $x^2+y^2+2ax=0$, $x=0$ имеет только одно решение: $x=0$, $y=0$. **53.** Точки пересечения окружности с осью x получаются решением системы уравнений $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, $y=0$. Окружность не пересекает ось x, если корни уравнения $x^2+2ax+c=0$ мнимые. Окружность пересекает ось x в двух точках, если корни этого уравнения вещественны и различны. Окружность касается оси, если корни совпадают. **54.** Окружности пересекаются в двух точках, если $R_1+R_2>d$, где R_1 и R_2 — радиусы окружностей, а d — расстояние между их центрами. R_1, R_2 и d можно выразить через коэффициенты уравнений окружностей. Можно найти эти условия и решая систему, составленную из уравнений данных окружностей.

55. Точки пересечения окружностей $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 56. Точка пересечения кривых (1, 0). 57. Если точка (x, y) удовлетворяет уравнениям кривых, то точки $(-x, y)$ и $(x, -y)$, симметричные ей относительно осей координат, тоже удовлетворяют этим уравнениям. Поэтому точки пересечения расположены симметрично относительно осей координат.

ГЛАВА II

1. $(1, -1)$; $(2, -1)$; $(1, 1)$. **2.** $a=b=2$. **3.** Не существует. **4.** При параллельном переносе, переводящем точку A в C, точка B переходит в точку B' прямой CD, причем $BB' \parallel AC$. Поэтому точки B и B' лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, а значит, точка B' принадлежит полупрямой CD, следовательно, луч CB' совпадает с CD. **5.** См. указание к упр. 4. **6.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ — одинаково направленные векторы, вектор $\overrightarrow{BA}$ противоположно направлен с каждым из них. **7.** Применить неравенство треугольника к точкам A, B, C. **8.** См. упр. 7. **9.** Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют равные соответствующие координаты. **10.** ± 12. **11.** 25. **12.** При повороте всех векторов на угол $2\pi/n$ сумма повернется на тот же угол. Но система векторов переходит при этом повороте в себя. Значит, их сумма равна нулю. **13.** Сначала воспользоваться формулой для координат точки A_0 пересечения медиан и доказать, что $\overrightarrow{A_0A}+\overrightarrow{A_0B}+\overrightarrow{A_0C}=0$. Затем воспользоваться представлением для векторов: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{A_0A}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_0}+\overrightarrow{B_0B}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{A_0C}$. **14.** Если векторы имеют началом точку $O\,(0, 0)$, то их сумма равна нулю. Дальше воспользоваться представлением вектора $\boldsymbol{r}_{mn}=\overset{0}{\boldsymbol{r}}_{mn}+\boldsymbol{r}_0$, где $\boldsymbol{r}_0$ — вектор с началом в точке (x_0, y_0) и концом в точке O, а вектор $\overset{0}{\boldsymbol{r}}_{mn}$ — вектор с началом в точке O и концом в точке $(m\delta, n\delta)$. Ответ: $\sum\limits_{m,n} \boldsymbol{r}_{mn} = -(2M+1)(2N+1)\,\boldsymbol{r}$. **15.** См. указание к упр. 14.

16. $\boldsymbol{b}=0{,}5\boldsymbol{a}$. Поэтому векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одинаково направлены. $\boldsymbol{d}=-0{,}5\boldsymbol{c}$. Поэтому векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ противоположно направлены. **17.** $\boldsymbol{b}\,(6, 8)$. **18.** $\boldsymbol{b}\,(-6, -8)$. **19.** 10. **20.** $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$. **21.** Коллинеарные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$.

22. Одинаково направленные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$, противоположно направленные векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$; $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$, $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{d}|$. **23.** $n=2$. **24.** $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{d}|=1$, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{d}$ коллинеарны. **25.** $\boldsymbol{e}\,(0{,}6;\ 0{,}8)$. **26.** Сравнить соответствующие координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. Они равны. **27.** $(2, -3)$. **28.** $\lambda=-5$, $\mu=4$. **29.** $\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$, $\cos\theta\leqslant 1$. **30.** $90°$. **31.** $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$. Ответ: $\sqrt{3}$. **32.** $30°$. **33.** $\cos A=0{,}6$; $\cos B=0$; $\cos C=0{,}8$. **34.** $\angle A=30°$, $\angle B=60°$, $\angle C=90°$. **35.** Если $m=n=0$, то векторы равны нулю. Если $m^2+n^2\neq 0$, то векторы перпендикулярны, так как $\boldsymbol{ab}=0$. **36.** $m=-\frac{8}{3}$.

37. $\lambda=-1$. **38.** $\lambda=-\frac{1}{2}$. **39.** Найдите скалярное произведение векторов.

40. См. указание к упр. 39. **41.** Так как $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$, то $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. **42.** Сначала убедиться, что четырехугольник — параллелограмм, а затем сравнить его диагонали. **43.** Доказать, что четырехугольник — параллелограмм, а затем сравнить сторону с диагональю. **44.** Воспользоваться тем, что $\lambda^2\boldsymbol{a}^2+2\lambda\mu\boldsymbol{ab}+\mu^2\boldsymbol{b}^2=(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})^2$.

ГЛАВА III

1. $x+y-2=0$. **2.** $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $(-3, 0)$. **3.** $(1, -2)$. **4.** $x+2y-1=0$. **5.** $a=b=\frac{11}{3}$. **6.** $c=-3$. **7.** Воспользоваться тем, что прямая касается окружности тогда и только тогда, когда она имеет с ней только одну общую точку. Ответ: $c=\pm\sqrt{2}$. **8.** Точка пересечения первых двух прямых удовлетворяет третьему уравнению. **9.** Уравнения прямых не совместны. Умножая первое на 2, получим $2x+4y=6$, а из второго уравнения $2x+4y=$ $=3$. Не существует x и y, удовлетворяющих обоим уравнениям. **10.** $y=3$. **11.** $3x-2y=0$. **12.** Воспользоваться тем, что прямая проходит через середину отрезка с концами (x_1, y_1), (x_2, y_2). Ответ: $x(y_1+y_2-2y_0)-$ $-y(x_1+x_2-2x_0)=x_0(y_1+y_2)-y_0(x_1+x_2)$. **13.** Уравнение $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ линейно относительно x и y, а значит, это уравнение прямой. Ему удовлетворяют координаты всех трех точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). **14.** Уравнение допускает эквивалентную запись $(ax+by-c)(ax+by+c)=0$. Отсюда видно, что данному уравнению удовлетворяют точки прямых $ax+by+c=0$, $ax+by-c=0$ и только они. **15.** Пусть $A(b, d)$ — любая точка прямой и $e(a, c)$ — вектор на прямой; тогда для любой точки $P(x, y)$ на прямой $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+te$. Отсюда $x=b+at$, $y=d+ct$, $-\infty<t<\infty$. **16.** Зададим прямую уравнением в параметрической форме $x=at+b$, $y=ct+d$. Уравнение $\omega(at+b, ct+d)=0$ удовлетворяется более, чем при n различных значениях t. А так как оно имеет степень n, то оно есть тождество, т. е. удовлетворяется при всех t, т. е. прямая лежит на кривой γ. **17.** Если уравнения окружностей $x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1=0$, $x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2=0$, то уравнение геометрического места точек равных степеней будет $(x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1)-(x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c_2)=0$. Это уравнение линейно, поэтому является уравнением прямой. Точки пересечения окружностей ему удовлетворяют, так как обе скобки обращаются в нуль. **18.** $-\frac{c}{a}>0$ $\left(\frac{c}{a}>0\right)$. **19.** $\frac{c}{a}>0$ и $\frac{c}{b}>0$. **20.** Если точка (x, y) удовлетворяет первому уравнению, то точка, ей симметричная относительно оси x, т. е. точка $(x, -y)$, удовлетворяет второму уравнению. Поэтому прямые симметрично расположены относительно оси x. **21.** Если точка (x, y) удовлетворяет первому уравнению, то точка, симметричная относительно начала координат, $(-x, -y)$, удовлетворяет второму уравнению. Поэтому прямые расположены симметрично относительно начала координат. **22.** Прямая пучка параллельна оси x, если $a+\lambda a_1=0$ (оси y, если $b+\lambda b_1=0$). Прямая пучка проходит через начало координат, если $c+\lambda c_1=0$. **23.** Катеты этого треугольника являются отрезками, которые прямая отсекает от осей координат. Прямая отсекает равнобедренный треугольник, если $|a|=|b|$. **25.** $y=\pm\sqrt{a^2-b^2}-b$, $x=$ $=\pm\sqrt{a^2-b^2}-a$. **26.** Векторы $\overrightarrow{(a, b)}$ и $\overrightarrow{(b, -a)}$ перпендикулярны прямым и перпендикулярны друг другу, так как их скалярное произведение равно нулю. **27.** $0°$. **28.** $\pm\sqrt{3}x+y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=0$. **29.** $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\pi-$ $-2\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$. **30.** $\frac{a}{b}=-\frac{a_1}{b_1}$. **31.** Вектор $\overrightarrow{(a, c)}$ параллелен прямой. **32.** $\cos\theta=\frac{|a_1c_1+a_2c_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$. **33.** Вершинами четырехугольника являются точки $\left(\pm\frac{c}{a}, \pm\frac{c}{b}\right)$. **34.** Прямые задаются уравнениями $ax\pm ay=b$, $cx\pm cy=d$. Эти прямые либо параллельны, либо перпендикулярны. **35.** Векторы $\overrightarrow{(\alpha_1, \beta_1)}$

и $\overrightarrow{(\alpha_2, \beta_2)}$ параллельны прямым. Условие параллельности прямых $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}$. Условие перпендикулярности прямых $\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2=0$. **36.** Вектор $\overrightarrow{(a, b)}$ перпендикулярен первой прямой, а вектор $\overrightarrow{(\alpha, \gamma)}$ параллелен второй прямой. Поэтому условие параллельности прямых $a\alpha+b\gamma=0$; условие перпендикулярности прямых $\frac{\alpha}{a}=\frac{\gamma}{b}$. **37.** Воспользоваться условиями параллельности и перпендикулярности прямых, полученными в § 3. **38.** Воспользоваться тем, что при подстановке координат двух точек в левую часть уравнения прямой получаются выражения одного знака, если точки лежат по одну сторону прямой, и разных знаков, если точки лежат по разные стороны прямой. **39.** Привести уравнение одной из прямых к нормальной форме и подставить в него координаты любой точки другой прямой. **40.** См. упр. 39. **41.** Воспользоваться уравнением пучка прямых. **42.** Составить уравнение серединного перпендикуляра к отрезку с концами (x_1, y_1), (x_2, y_2) и сравнить его с уравнением $ax+by+c=0$. **43.** $x'y'=\frac{a^2}{2}$.

ГЛАВА IV

2. Пусть $A(\rho_1, \theta_1)$ и $B(\rho_2, \theta_2)$ — данные точки. По теореме косинусов в применении к треугольнику OAB $AB^2=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)$. **3.** ρ_0 — расстояние от полюса до прямой, α — угол, который образует прямая $\rho\cos(\alpha-\theta)=\rho_0$ с полярной осью. **4.** $\rho=R(1-\cos\theta)$, где R — радиус окружности. **5.** $\rho=a\sqrt{2\cos 2\theta}$. **6.** Повторить вывод, данный для сечения конуса плоскостью. Эксцентриситет эллипса равен $\sin\alpha$. **7.** Уравнение можно записать в эквивалентной форме $\rho=\frac{c}{1+\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. После поворота полярной оси на угол α получим $\rho=\frac{c}{1+\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta}$. Кривая будет эллипсом, если $\sqrt{a^2+b^2}<1$, гиперболой, если $\sqrt{a^2+b^2}>1$, параболой, если $\sqrt{a^2+b^2}=1$. **8.** По данным задачи найти постоянные a, b, c в уравнении $\rho=\frac{c}{1+a\cos\theta+b\sin\theta}$ (см. упр. 7). **9.** Воспользоваться уравнением конического сечения в полярных координатах. **10.** Преобразование инверсии в полярных координатах относительно полюса имеет вид $\rho'=\frac{1}{\rho}$, $\theta'=\theta$. **11.** Отыскание точек пересечения прямой с коническим сечением приводит к решению квадратного уравнения. А оно имеет не более двух корней. **12.** Если фокус конического сечения в начале координат, то уравнение конического сечения имеет вид $x^2+y^2=\lambda(ax+by+c)^2$ ($ax+by+c=0$ — уравнение директрисы.) Отсюда следует, что $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\lambda}(ax+by+c)=\alpha x+\beta y+\gamma$. **13.** См. § 7 гл. IV. **14.** См. § 7 гл. IV. **15.** Обратить внимание на то, что у рассматриваемого геометрического места точек либо сумма, либо разность расстояний от центров окружностей постоянна. **16.** Составить уравнение геометрического места точек пересечения. **17.** Составить уравнение кривой, которая получается в результате указанного построения. **18.** Уравнение асимптот в нормальной форме $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$, $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$. У точек гиперболы с абсциссой x $y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{b^2}-1}$. Расстояние этой точки от асимптот будет $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$ и $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\left(\frac{x}{a}-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$, или $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}\left(\dfrac{x}{a}-\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}\right)}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}\left(\dfrac{x}{a}+\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}\right)}$. Мы видим, что второе выражение неограниченно убывает, когда $|x|\to\infty$. **19.** Уравнение гиперболы можно записать в виде $\left[\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)\right]\times$ $\times\left[\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)\right]=\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^{-1}$. Сомножители в квадратных скобках представляют собой расстояния точек (x, y) гиперболы от асимптот. Мы видим, что их произведение постоянно и равно $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^{-1}$. **20.** Составить уравнение проекции окружности, приняв плоскость, проходящую через центр окружности, за плоскость проекции, а пересечение плоскости xy с плоскостью, в которой лежит окружность, за ось x. Уравнение проекции окружности будет $\dfrac{x^2}{R^2}+\dfrac{y^2}{R^2\cos^2\theta}=1$, где θ — угол между плоскостью круга и плоскостью xy. **21.** Взять параболу в каноническом расположении относительно системы координат. **22.** Прямые, параллельные асимптотам гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=$ $=1$, задаются уравнениями $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=c$. **23.** Воспользоваться результатом упр. 19. **24.** $\left(\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2k^2+b^2}},\ -\dfrac{a^2k}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}\right)$ и $\left(-\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2k^2+b^2}},\ \dfrac{a^2k}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}\right)$. **25.** Абсциссы точек пересечения касательных с асимптотами $\left(\dfrac{a}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}},\right.$ $\left.\dfrac{b}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}}\right)$, $\left(\dfrac{a}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}},\ -\dfrac{b}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}}\right)$ (x_0, y_0 — координаты точки касания) удовлетворяют условию $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}}+\dfrac{a}{\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}}\right)=x_0$. Для ординат справедливо аналогичное равенство. Отсюда и следует утверждение задачи. **26.** Если x_1, x_2 — абсциссы точек пересечения касательной с асимптотами, а α — угол, образуемый асимптотами с осью x, то $S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\dfrac{x_2}{\cos\alpha}\right)\cdot\sin 2\alpha=$ $=\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$. **27.** Уравнение искомого геометрического места: $x^2+y^2=b^2+a^2$. **28.** См. упр. 27. **29.** Найти координаты построенных фокусов и убедиться, что $c=\sqrt{a^2-b^2}$. **30.** См. § 7 гл. IV. **31.** $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$. **32.** Директрисы эллипса и гиперболы: $x=\pm\dfrac{a}{e}$, где a — большая (действительная) полуось, e — эксцентриситет. **33.** Найти координаты фокусов. **34.** Изучая поведение левой части уравнения $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2+\lambda}=1$ при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ при фиксированных x и y, показать, что корни уравнения относительно λ удовлетворяют неравенствам $-b^2>\lambda_1>-a^2>\lambda_2$. При $\lambda=\lambda_1$ получается гипербола. При $\lambda=\lambda_2$ получается эллипс. **35.** Касательные к коническим сечениям: $\dfrac{xx_0}{a^2+\lambda_1}+$

$+\frac{yy_0}{b^2+\lambda_1}=1$, $\frac{xx_0}{a^2+\lambda_2}+\frac{yy_0}{b^2+\lambda_2}=1$. Условие их ортогональности: $\frac{x_0^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+$ $+\frac{y_0^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}=0$. Это условие действительно выполняется. Имеем: $\frac{x_0^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y_0^2}{b^2+\lambda_1}=1$, $\frac{x_0^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y_0^2}{b^2+\lambda_2}=1$. Вычитая эти равенства почленно и сокращая на $(\lambda_2-\lambda_1)$, получим $\frac{x_0^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{y_0^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}=0$. Что и требовалось доказать. **36.** $\frac{x_0}{y_0}\cdot\frac{b^2}{a^2}$. **37.** Сопряженным диаметрам эллипса соответствуют значения t_1 и t_2 параметра t, которые отличаются на $\pi/2$. У гиперболы разность квадратов сопряженных диаметров постоянна. **38.** Воспользоваться тем, что касательные в точках пересечения диаметра с коническим сечением параллельны сопряженному диаметру. **39.** См. упр. 38. **40.** Воспользоваться тем, что параллелограмм с вершинами в концах сопряженных диаметров является проекцией квадрата, вписанного в окружность (см. упр. 38).
41. Воспользоваться тем, что эллипс является проекцией окружности. **42.** Воспользоваться тем, что эллипс является проекцией окружности и свойствами параллельного проектирования. **43.** Привести уравнения кривых к каноническому виду: а) эллипс; б) гипербола; в) парабола; г) пара различных прямых; д) пара совпадающих прямых. **44.** Уравнение можно записать в эквивалентной форме $(ax+by+c+a_1x+b_1y+c_1)(ax+by+c-a_1x-b_1y-c_1)=0$. **45.** Кривая располагается внутри параллелограмма, определяемого пересечением двух полос $|ax+by+c|\leqslant\sqrt{k}$, $|\alpha x+\beta y+\gamma|\leqslant\sqrt{k}$. **46.** Принять за новые оси координат биссектрисы углов, образованных прямыми $ax+by+c=0$, $\alpha x+\beta y+\gamma=0$. **47.** Задача сводится к предыдущей разложением левой части уравнения на два линейных сомножителя. **48.** См. указание к упр. 49. **49.** Кривая второго порядка $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=0$ допускает параметрическое задание $x=$ $=-\frac{d+et}{a+bt+ct^2}$, $y=-\frac{dt+et^2}{a+bt+ct^2}$. Отсюда следует, что две различные кривые второго порядка могут иметь только четыре общие точки.

ГЛАВА V

1. а) В плоскости xy лежит точка D; б) на оси z—точка C; в) в плоскости yz—точка B. **2.** $A_{xy}(1, 2, 0)$, $A_{xz}(1, 0, 3)$, $A_{yz}(0, 2, 3)$, $A_x(1, 0, 0)$, $A_y(0, 2, 0)$, $A_z(0, 0, 3)$. **3.** а) Расстояние до плоскости xy равно 3, до плоскости xz — 2, до плоскости yz — 1; б) расстояние до оси x равно $\sqrt{13}$, до оси y— $\sqrt{10}$, до оси z— $\sqrt{5}$; в) расстояние до начала координат равно $\sqrt{14}$. **4.** $D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$. **5.** (2, 2, 2) и (—2, —2, —2). **6.** (0, 0, 0). **7.** $x+2y+$ $+3z=7$. **8.** Убедиться, что диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. **9.** Доказать сначала, что данные четыре точки являются вершинами параллелограмма. **10.** $B(0, -1, 3)$. **11.** $D(6, 2, -2)$, $E(3, 2, 1)$. **12.** Точками, симметричными точке (1, 2, 3) относительно плоскостей xy, yz, xz соответственно, являются (1, 2, —3), (—1, 2, 3), (1, —2, 3). **13.** (—1, —2, —3), (0, 1, —2), (—1, 0, 3). **14.** $a=1$, $b=1$, $c=-2$. **15.** (—1, —2, 1). **16.** Равные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$. **17.** $D(-2, 3, 0)$. **18.** $D(2, 1, -2)$. **19.** $n=\frac{4}{3}$, $m=\frac{9}{2}$. **20.** $\overrightarrow{AB}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$. **21.** $n=\frac{1}{3}$. **22.** $c=1$. **23.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2+|a|\cdot|b|}$. **24.** а) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\varphi=90°$. **25.** $\cos\varphi=\frac{2}{3\sqrt{7}}$. **26.** $\cos C=\frac{2}{\sqrt{15}}$. **27.** Векторы $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны. **28.** Векторы $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})$ равны по абсолютной величине и одинаково направлены.

29. Представить вектор $\boldsymbol{a}$ в виде суммы векторов, параллельного и перпендикулярного $\boldsymbol{c}$. Затем воспользоваться результатами упр. 27 и 28. 30. Воспользоваться результатами трех предыдущих упражнений. 31. Если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — векторы с началом в вершине пирамиды и концами в вершинах ее основания, то $S=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\wedge(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})]$. Ответ:

$$S=\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left[(1-\sqrt{2})\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right]}\times$$
$$\times\sqrt{\left[\sin\frac{\alpha}{2}+(1-\sqrt{2})\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right]\cdot\left[\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+(1-\sqrt{2})\sin\frac{\gamma}{2}\right]}.$$

32. Воспользоваться тождеством $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{cb})$. 33. Взять в качестве векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторы с началом в центре сферы и концами в вершинах сферического треугольника. 34. Воспользоваться формулой упр. 30. 35. Воспользоваться тождеством $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d})\wedge(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=0$. 36. Вектор $\boldsymbol{r}$ допускает представление $\boldsymbol{r}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3\boldsymbol{e}_3$. Определить λ_1, λ_2, λ_3, умножая это равенство скалярно на векторы $\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1$. 37. Представить решение в виде $\boldsymbol{r}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}$. Умножая это равенство скалярно на $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a}$, найти λ_1, λ_2, λ_3. 38. Векторы $\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1$ не компланарны. Поэтому $\boldsymbol{r}=\lambda_1(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2)+\lambda_2(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3)+\lambda_3(\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1)$. Умножая это равенство скалярно на $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, находим λ_1, λ_2, λ_3. 39. Представить решение в виде $\boldsymbol{x}=\lambda_1(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})+\lambda_2(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a})+\lambda_3(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})$. Умножая это равенство скалярно на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, найти λ_1, λ_2, λ_3. 40. Любые три компланарных вектора линейно зависимы, т. е. существуют не равные нулю одновременно числа λ_1, λ_2, λ_3 такие, что $\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=0$. Умножая это равенство скалярно на $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, получим

$$\begin{aligned}\lambda_1(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)+\lambda_3(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3)&=0,\\ \lambda_1(\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_2)+\lambda_3(\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)&=0,\\ \lambda_1(\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_2)+\lambda_3(\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_3)&=0.\end{aligned}$$

Эта система уравнений относительно λ_1, λ_2, λ_3 имеет нетривиальное решение (не все λ равны нулю). Поэтому детерминант системы равен нулю. 41. См. указание к упр. 40. 42. См. упр. 41. 43. См. упр. 36. 44. См. упр. 38. 46. Воспользоваться тождеством упр. 34. 47. Воспользоваться тождеством упр. 45. 48. $d^2=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2+2(y_1-x_1)\cos\alpha+2(y_2-x_2)\times\cos\beta+2(y_3-x_3)\cos\gamma$. 49. $a/2$, $b/2$, $c/2$. 50. Если (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) — вершины тетраэдра, то точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных ребер, имеет координаты $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$, $\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$, $\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}$. 51. Для каждого отрезка, соединяющего вершину тетраэдра с центром тяжести противоположной грани, найти координаты точки, делящей этот отрезок в отношении 3:1, считая от вершины. 52. Точка с координатами x, y, z — это центр тяжести масс λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, расположенных в вершинах тетраэдра. 53. Уравнение $\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}=0$ линейно относительно x, y, z. Поэтому оно есть уравнение плоскости. В этой плоскости лежат точки A_i, так как их координаты удовлетворяют этому уравнению. 54. Уравнение допускает эквивалентную запись $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(\sqrt{a^2+b^2+c^2-d})^2$. 55. Уравнение $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=0$ есть уравнение сферы. Эта сфера проходит через окружность, по которой пересекаются данные сферы, так как для точек этой окружности $f_1=0$, $f_2=0$. Выбором λ_1 и λ_2 можно добиться, чтобы эта сфера проходила через данную точку. 56. Если уравнению $\varphi(x, y)=0$ удовлетворяют координаты точки $A(x, y, z)$, то ему удовлетворяют координаты любой точки прямой, проходящей через точку A, параллельной оси z. 57. Пусть $A(x, y, z)$ — произвольная точка конуса. Тогда $\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{e}_z=|\overrightarrow{OA}|\cos\alpha$. Отсюда уравнение конуса $z^2=(x^2+y^2+z^2)\cos^2\alpha$. 58. Кривые зададим параметрически

$$\gamma_1:\ \begin{array}{l} x=u, \\ y=0, \\ z=au^2; \end{array} \qquad \gamma_2:\ \begin{array}{l} x=0, \\ y=v, \\ z=bv^2. \end{array}$$

Координаты точек поверхности

$$x=\frac{u+0}{2}=\frac{u}{2},$$

$$y=\frac{0+v}{2}=\frac{v}{2},$$

$$z=\frac{au^2+bv^2}{2}.$$

Подставляя в третье уравнение u и v из первых двух, получим уравнение поверхности в неявной форме $z=2ax^2+2by^2$. **59.** Перейдем к параметрическому заданию кривых:

$$\gamma_1:\ \begin{array}{l} x=t, \\ y=a, \\ z=f(t); \end{array} \qquad \gamma_2:\ \begin{array}{l} x=t, \\ y=b, \\ z=\varphi(t). \end{array}$$

Прямая, о которой идет речь в задаче, соединяет точки $(t,\ a,\ f(t))$ и $(t,\ b,\ \varphi(t))$. Координаты точек этой прямой можно представить в виде

$$\begin{array}{l} x=\lambda t+(1-\lambda)t, \\ y=\lambda a+(1-\lambda)b, \\ z=\lambda f(t)+(1-\lambda)\varphi(t). \end{array}$$

Это уравнение искомой поверхности в параметрической форме (параметры t и λ). Выражая λ и t из первых двух уравнений и подставляя в третье, находим уравнение поверхности в неявной форме $z=\frac{y-b}{a-b}f(x)+\frac{a-y}{a-b}\varphi(x)$. **60.** Принять за параметры расстояние от точки поверхности до оси z и угол поворота. Тогда $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=f(r)$. **61.** Уравнение $f(x)-\varphi(y)=0$ есть уравнение цилиндрической поверхности (см. упр. 56). Его можно записать в виде $(f(x)-z)-(\varphi(y)-z)=0$. Отсюда видно, что ему удовлетворяют точки кривой, заданной уравнениями $z=f(x)$, $z=\varphi(x)$.

62. $$\begin{array}{l} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_1, \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_2, \\ z'=z. \end{array}$$

63. Уравнение сферы можно записать так: $(xe_x+ye_y+ze_z)^2=R^2$. Сравнивая его с данным уравнением, находим

$$a_{11}=e_x^2,\quad a_{22}=e_y^2,\quad a_{33}=e_z^2,$$

$$a_{12}=e_xe_y,\quad a_{23}=e_ye_z,\quad a_{31}=e_ze_x,$$

$$\cos\alpha=\frac{e_ye_z}{\sqrt{e_y^2e_z^2}}=\frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}a_{33}}},\quad \cos\beta=\frac{a_{31}}{\sqrt{a_{33}a_{11}}},\quad \cos\gamma=\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}.$$

64. Воспользоваться результатами упр. 43 и 44.

ГЛАВА VI

1. $\left|\frac{d}{a}\right|$, $\left|\frac{d}{b}\right|$, $\left|\frac{d}{c}\right|$. **2.** Обратить внимание на то, что оба уравнения не содержат z. Поэтому, если точка $(x,\ y,\ z)$ удовлетворяет этим уравнениям, то им удовлетворяет каждая точка прямой, проходящей через эту точку параллельно оси z. **3.** Система уравнений $ax+by+cz+d=0$, $ax+by+cz+d_1=0$ не совместна. При почленном вычитании уравнений получается $d-d_1=0$, что противоречит условию. **4.** См. упр. 3. Выбором d' можно добиться, чтобы плоскость $ax+by+cz+d'=0$ проходила через данную точку. 5. Векторы $\overrightarrow{(a, b, c)}$ и $\overrightarrow{(k, l, m)}$ должны быть коллинеарны. Оба они перпендикулярны плоскости $ax+by+cz+d=0$. **6.** $kx+ly+mz=0$. 7. $(2, 1, -2)$. **8.** Система уравнений $x+y+z=1$, $2x+y+3z+1=0$, $x+2z+1=0$ не совместна. Складывая почленно первое и третье уравнения и вычитая второе, получаем $1=0$. **9.** При $c=0$. **10.** Любой вектор $\overrightarrow{(k, l, m)}$, для которого $2k+3l+m=0$, параллелен плоскости, например, вектор $\overrightarrow{(1, -1, 1)}$. **11.** Взять векторное произведение векторов $\overrightarrow{(2, 3, 1)}$ и $\overrightarrow{(1, 1, 1)}$. **12.** Воспользоваться тем, что искомая плоскость есть геометрическое место точек, равноудаленных от данных точек. **13.** Уравнение допускает эквивалентную запись $(ax+by+cz+d+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)(ax+by+$ $+cz+d-\alpha x-\beta y-\gamma z-\delta)=0$. Отсюда видно, что уравнение задает две плоскости $ax+by+cz+d \pm (\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0$. **14.** Вычитая уравнения почленно, получим уравнение плоскости $a_1x+b_1y+c_1z+d_1-(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$. Этому уравнению удовлетворяют точки кривой, заданной уравнениями

$$f(x, y, z)+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$f(x, y, z)+a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$$

Следовательно, кривая плоская. **15.** $ax+by+cz+d-(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)=0$. См. указание к упр. 14. **16.** Преобразование инверсии относительно начала координат задается уравнениями

$$x=\frac{R^2x'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad y=\frac{R^2y'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad z=\frac{R^2z'}{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

18. Уравнение $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ линейно относительно x и y. Ему удовлетворяют координаты данных точек (x_i, y_i, z_i). **19.** Плоскость пересекает положительную полуось x, если $\frac{d}{a}<0$. **20.** Объем тетраэдра $V=\frac{1}{6}\left|\frac{d^3}{abc}\right|$.
21. Множество точек пространства, удовлетворяющих условию $|x|+|y|+$ $+|z|<a$, есть пересечение (общая часть) полупространств, задаваемых неравенствами $\pm x \pm y \pm z < a$. Это октаэдр с вершинами в точках $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm a, 0)$, $(0, 0, \pm a)$. **22.** Плоскость, симметричная плоскости σ относительно плоскости xy, задается уравнением $ax+by-cz+d=0$. **23.** Плоскость, параллельная оси z, не содержит в своем уравнении z. Следовательно, параметр λ определяется условием $c+\gamma\lambda=0$. **24.** Параметры λ и μ определяются из условий $a_1+\lambda a_2+\mu a_3=0$, $b_1+\lambda b_2+\mu b_3=0$. **25.** Расстояние между плоскостями $\delta=$ $=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **26.** $\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **27.** Если плоскости заданы уравнениями в нормальной форме $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, то геометрическое место точек задается уравнениями $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 \pm \lambda(a_2x+b_2y+$ $+c_2z+d_2)=0$, следовательно, состоит из двух плоскостей. **28.** См. упр. 25. **29.** Перейти к нормальной форме уравнения плоскостей. **30.** См. упр. 38 гл. III. **31.** Если уравнения плоскостей приведены к нормальной форме, то

$$\pm x'=a_1x+b_1y+c_1z+d_1,$$
$$\pm y'=a_2x+b_2y+c_2z+d_2,$$
$$\pm z'=a_3x+b_3y+c_3z+d_3.$$

32. Вектор $\overrightarrow{(a, b, c)}$ перпендикулярен плоскости. Угол α, образуемый плоскостью с осью x, определяется из условия $\sin\alpha=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.
33. Угол, образуемый данной плоскостью с плоскостью xy, определяется из

условия $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$. **34.** См. упр. 33. **35.** Плоскость пересекает оси x и y под равными углами, если $|a|=|b|$. **36.** Параметры λ и μ должны удовлетворять условию $(\lambda a_1+\mu a_2)a+(\lambda b_1+\mu b_2)b+(\lambda c_1+\mu c_2)c=0$. **37.** Для любого вектора $n(a, b, c)$ в пучке плоскостей можно найти плоскость с нормалью $\boldsymbol{n}$. Для этого надо взять параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, удовлетворяющие условиям $\frac{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3}{a}=\frac{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3}{b}=\frac{\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2+\lambda_3 c_3}{c}$. **38.** Прямая пересекает ось x (соответственно y, z), если $\frac{y_0}{l}=\frac{z_0}{m}$ $\left(\text{соответственно, } \frac{x_0}{k}=\frac{z_0}{m},\ \frac{x_0}{k}=\frac{y_0}{l}\right)$. Прямая параллельна плоскости xy (соответственно yz, zx), если $m=0$ (соответственно, $k=0$, $l=0$). **39.** Составить уравнение геометрического места точек, взяв уранения плоскостей в нормальной форме. **40.** Геометрическое место точек, равноудаленных от двух вершин треугольника, есть плоскость. Искомое геометрическое место точек есть пересечение двух плоскостей, следовательно, прямая. **41.** Прямая, задаваемая пересечением плоскостей $y=\lambda$, $z=a\lambda x$, лежит на поверхности, так как точки этой прямой удовлетворяют уравнению поверхности. Прямая, задаваемая уравнениями $x=\mu$, $z=a\mu y$, также лежит на поверхности. **42.** Равенство нулю определителя есть условие совместности системы уравнений

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,$$
$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0.$$

А эта система совместна, так как прямые пересекаются. **43.** Вектор параллельной прямой имеет координаты $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. **44.** См. указание к упр. 43. **45.** Уравнение конической поверхности

$$\frac{|(x-x_0)a+(y-y_0)b+(z-z_0)c|^2}{a^2+b^2+c^2}=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]\sin^2\alpha.$$

46. $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$. **47.** Пусть $A(x, y, z)$ — точка конической поверхности, отличная от вершины. Находим координаты точки пересечения образующей, проходящей через точку A, с плоскостью $ax+by+cz+d=0$. Подставляя эти координаты в уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=2Rz$, получаем уравнение искомой конической поверхности. Пересечение конической поверхности с плоскостью xy есть окружность. **48.** См. упр. 47. **49.** Если прямые заданы уравнениями $\frac{x-x'}{k'}=\frac{y-y'}{l'}=\frac{z-z'}{m'}$, $\frac{x-x''}{k''}=\frac{y-y''}{l''}=\frac{z-z''}{m''}$, то равноудаленная от них плоскость проходит через точку с координатами $\frac{x'+x''}{2}, \frac{y'+y''}{2}, \frac{z'+z''}{2}$ параллельно векторам $\overrightarrow{(k', l', m')}$, $\overrightarrow{(k'', l'', m'')}$. **50.** Плоскость, задаваемая уравнением

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1}=\frac{a_2x+b_2y+e_2z+d_2}{a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2},$$

проходит через данную прямую и точку (x_0, y_0, z_0), не лежащую на прямой.
51. Вектор $\overrightarrow{(x'-x_0, y'-y_0, z'-z_0)}\wedge\overrightarrow{(k, l, m)}$ перпендикулярен искомой плоскости. **52.** Любую прямую, пересекающую две данные прямые, можно представить как пересечение двух плоскостей, одна из которых проходит через первую прямую, а другая — через вторую прямую. **53.** Поверхность, задаваемая

уравнением вида $\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$, образована прямыми, проходящими через начало координат, так как вместе с точкой (x, y, z) уравнению удовлетворяет любая точка $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Поверхность пересекает плоскость $z=1$ по кривой $\varphi(x, y)=0$.

ГЛАВА VIII

1. Поверхность $z=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a$ представляет собой эллиптический параболоид (гиперболический параболоид, параболический цилиндр). **2.** Левая часть уравнения разлагается в произведение двух линейных сомножителей. **3.** Уравнению, которое при этом получается, удовлетворяют координаты точек кривой, по которой пересекается плоскость с поверхностью. **4.** См. упр. 3. **5.** Составить уравнение конической поверхности, приняв данную точку за начало координат, а плоскость, в которой лежит кривая, за плоскость $z=\text{const}$ (см. упр. 57 гл. V). **6.** Поверхность второго порядка $x^2+y^2=$ $=\left(\frac{z-b}{a}\right)^2+\left(\frac{z-d}{c}\right)^2$. **7.** Фокусы находятся на оси z на расстоянии $\sqrt{c^2-a^2}$ от начала координат. **8.** Пересечение эллипсоида с плоскостями является в то же время пересечением этих плоскостей со сферой $x^2+y^2+z^2+\mu=0$. **9.** Исключить параметры u, v и перейти к уравнению поверхности в неявной форме. **10.** Эллипсоид. Для доказательства воспользоваться ограниченностью поверхности. **11.** См. упр. 8. **12.** См. указание к упр. 34 гл. IV. **13.** Рассмотреть проекцию линии пересечения на плоскость xy. **14.** Первое семейство: $x=\lambda$, $z=a\lambda y$. Второе семейство: $y=\mu$, $z=a\mu x$. **16.** Воспользоваться тем, что векторы $\overrightarrow{(\lambda, \mu, \nu)}$ и $\overrightarrow{(x, y, z)}$ образуют угол α. **17.** Если $\bar{A}$ — проекция точки $A(x, y, z)$ на прямую $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}$, то $(O\bar{A})^2+R^2=(OA)^2$. Выразить $|O\bar{A}|$ через скалярное произведение векторов $\overrightarrow{(\lambda, \mu, \nu)}$ и $\overrightarrow{(x, y, z)}$. **18.** См. упр. 16. **19.** Диаметры параболы параллельны прямой $ax+by+c=0$. Ось параболы есть прямая $ax+by+c+\frac{a\alpha+b\beta}{2(a^2+b^2)}=0$.

ГЛАВА VIII

1. $x=a\cos\omega t$, $y=a\sin\omega t$, $z=ct$. **2.** $x=vt-a\sin\frac{vt}{a}$, $y=a-a\cos\frac{vt}{a}$. **3.** $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$. **4.** Если пучок проектирующих прямых параллелен плоскости yz, то уравнения проекции будут $x=a\cos\omega t$, $y=ct\operatorname{tg}\theta+a\sin\omega t$. Проекция будет иметь особые точки, если $\operatorname{tg}\theta=\pm\frac{a\omega}{c}$. Особые точки — точки возврата первого рода. **5.** Особые точки суть точки возврата первого рода. **6.** Особые точки: $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$. Особые точки — точки возврата первого рода. **7.** Особая точка $(a, 0)$ — точка возврата первого рода. **8.** Уравнение касательной $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. Уравнение соприкасающейся плоскости $y-z=0$. Уравнение нормальной плоскости $y+z=0$. Уравнение главной нормали $y=z=0$. Уравнение бинормали $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$. **9.** $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$. **10.** $x=0$. **11.** $y=$ $=x^2-3x+3$. **12.** Найти длину отрезка касательной. **13.** Винтовая линия. Составить ее уравнение, взяв уравнение данной винтовой линии из упр. 1. **14.** Под прямым углом (касательные к кривым в их общей точке (x, y) перпендикулярны). **15.** См. указание к упр. 34 гл. IV. **16.** Уравнение касательной в произвольной точке t кривой $\frac{x-x(t)}{x'(t)}=\frac{y-y(t)}{y'(t)}=\frac{z-z(t)}{z'(t)}$. Не ограничивая общности, можно считать, что касательные проходят через начало коор-

динат. Тогда $\frac{x(t)}{x'(t)}=\frac{y(t)}{y'(t)}=\frac{z(t)}{z'(t)}$. Отсюда $y'x-x'y=0$, а значит, $\left(\frac{y}{x}\right)'=0$, т. е. $\frac{y}{x}=c_1=\text{const}$. Аналогично получаем $\frac{z}{x}=c_2=\text{const}$. Таким образом, наша кривая лежит на пересечении двух плоскостей. А это значит, что она является прямой или частью прямой. **17.** Найти угол θ между касательной и осью z. Найти уравнение главной нормали в произвольной точке и убедиться, что это уравнение прямой, пересекающей ось z. **18.** Пусть $\boldsymbol{n}(a, b, c)$ — вектор, перпендикулярный плоскости. Касательный вектор кривой перпендикулярен $\boldsymbol{n}$. Отсюда $ax'(t)+by'(t)+cz'(t)=0$. А это значит, что $ax(t)+by(t)+cz(t)=$ $=d=\text{const}$, т. е. кривая лежит в плоскости $ax+by+cz=d$. **19.** Точка кривой $(x(t), y(t), z(t))$ удовлетворяет двум системам уравнений тождественно по t:

$$\left.\begin{aligned} a_1(t)x(t)+b_1(t)y(t)+c_1(t)z(t)+d_1(t)=0,\\ a_2(t)x(t)+b_2(t)y(t)+c_2(t)z(t)+d_2(t)=0;\end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1(t)x'(t)+b_1(t)y'(t)+c_1(t)z'(t)=0,\\ a_2(t)x'(t)+b_2(t)y'(t)+c_2(t)z'(t)=0.\end{aligned}\right\}\qquad (**)$$

Первые два уравнения выражают, что точка кривой принадлежит касательной, а два другие выражают то, что касательный вектор параллелен плоскостям, в пересечении которых получается касательная. Дифференцируя первые два уравнения по t, с помощью двух последних получим

$$\left.\begin{aligned} a_1'(t)x(t)+b_1'(t)y(t)+c_1'(t)z(t)+d_1'(t)=0,\\ a_2'(t)x(t)+b_2'(t)y(t)+c_2'(t)z(t)+d_2'(t)=0.\end{aligned}\right\}\qquad (***)$$

Таким образом, для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ мы имеем четыре уравнения $(*)$ и $(***)$, из которых они находятся. Для разрешимости этих уравнений во всяком случае необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_1(t) & b_1(t) & c_1(t) & d_1(t)\\ a_2(t) & b_2(t) & c_2(t) & d_2(t)\\ a_1'(t) & b_1'(t) & c_1'(t) & d_1'(t)\\ a_2'(t) & b_2'(t) & c_2'(t) & d_2'(t)\end{vmatrix}=0.$$

20. Пусть в рассматриваемой точке (x, y, z) $\begin{vmatrix}\varphi_y & \psi_y\\ \varphi_z & \psi_z\end{vmatrix}\neq 0$. Тогда в окрестности этой точки кривая задается уравнениями $y=y(x)$, $z=z(x)$. Дифференцируя тождества $\varphi(x, y(x), z(x))=0$, $\psi(x, y(x), z(x))=0$, последовательно находим $y'(x)$ и $z'(x)$, $y''(x)$, $z''(x)$. После этого без труда составляем уравнение соприкасающейся плоскости. **21.** Применить соображения, которые приведены в указании к упр. 19. **22.** Семейство прямых, отсекающих треугольник с площадью $\frac{a^2}{2}$, можно задать уравнением $\frac{x}{\lambda}+\lambda y=a$ (λ — параметр). Огибающая семейства — ветвь гиперболы $xy=\frac{a^2}{4}$ внутри угла Oxy. **23.** Составить уравнение траектории материальной точки, выбрасываемой со скоростью v_0 под углом α к горизонту (уравнение в неявной форме). После этого найти огибающую траекторий. Ответ: $y=-\frac{gx^2}{2v_0}+\frac{v_0^2}{2g}$ (g — ускорение силы тяжести).

ГЛАВА IX

1. $s=\frac{2ab\sqrt{1+4a^2b^2}+\ln\left(2ab+\sqrt{1+4a^2b^2}\right)}{2b}$. **2.** $s=a\sqrt{2}\,\text{sh}\,t$. **3.** $s=ba$. **4.** $s=8a$. **5.** $s=\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$. **6.** $k_1=\frac{1}{4}\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}$. **7.** Кривую в окрестности рассматриваемой точки можно задать уравнениями вида $y=y(x)$,

$z=z(x)$. Найти производные y', y'', z' и z'' при $x=0$. После этого нетрудно найти кривизну. Ответ: $k_1=\frac{\sqrt{6}}{9}$. **8.** Воспользоваться уравнением окружности в параметрической форме $x=R\cos t$, $y=R\sin t$. Ответ: $k_1=\frac{1}{R}$. **9.** $k_1=$ $=\frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$, $k_2=\frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$. **10.** В окрестности вершины $(0,\ b)$ эллипс задается уравнением $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Для кривизны в этой вершине получаем $k_1=\frac{b}{a^2}$. Такая же кривизна в вершине $(0,\ -b)$. На оси x кривизна $k_1=\frac{a}{b^2}$. **11.** Найти кривизну и кручение винтовой линии и убедиться, что они не зависят от параметра. **12.** Применить общую формулу для кривизны кривой, заданной уравнениями $x=\rho(\theta)\cos\theta$, $y=\rho(\theta)\sin\theta$. **13.** Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор на прямой, а $\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор кривой. Имеем $\boldsymbol{a\tau}=\mathrm{const}$. Дифференцируя это равенство по дуге кривой и замечая, что $\boldsymbol{\tau}'=k\boldsymbol{\nu}$, получим $\boldsymbol{a\nu}=0$, т. е. главная нормаль перпендикулярна прямой. **14.** Уравнение соприкасающейся плоскости можно записать в виде $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(s))\boldsymbol{\beta}=0$, где $\boldsymbol{\beta}$ — единичный вектор бинормали кривой. Не ограничивая общности, можно считать, что соприкасающиеся плоскости проходят через начало координат. Тогда $\boldsymbol{r}(s)\,\boldsymbol{\beta}(s)\equiv 0$. Дифференцируя это тождество по s, получим $\boldsymbol{\tau\beta}+\boldsymbol{r}(k_2\boldsymbol{\tau})=k_2\boldsymbol{r\tau}\equiv 0$. Если касательная кривой не проходит через начало координат, то $\boldsymbol{r\tau}\neq 0$. Поэтому $k_2=0$, и кривая плоская. (Если касательная проходит через начало координат при любом s, то кривая будет прямой или частью прямой.) **15.** $k_2=1$. **16.** По условию задачи $\boldsymbol{a\tau}=\mathrm{const}$, где $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор, а $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной кривой. Дифференцируя это тождество по дуге s, получим $\boldsymbol{a}k_1\boldsymbol{\nu}=0$. При $k_1\neq 0$ $\boldsymbol{a\nu}=0$. Дифференцируя еще раз по s, получим $-\boldsymbol{a}k_1\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{a}k_2\boldsymbol{\beta}=0$. Так как вектор $\boldsymbol{\tau}$ образует постоянный угол с вектором $\boldsymbol{a}$, а вектор $\boldsymbol{\nu}$ перпендикулярен $\boldsymbol{a}$, то вектор $\boldsymbol{\beta}$ тоже образует постоянный угол с вектором $\boldsymbol{a}$. Следовательно, $\boldsymbol{a\beta}=\mathrm{const}$. Поэтому из равенства $k_1(\boldsymbol{a\tau})+$ $+k_2(\boldsymbol{a\beta})=0$ следует, что $\frac{k_1}{k_2}$ постоянно. **17.** Полукубическая парабола: $27py^2=8(x-p)^3$. **19.** $x=R(\cos\theta+(\theta-c)\sin\theta)$, $y=R(\sin\theta-(\theta-c)\cos\theta)$. **20.** $x=\int\sin\alpha(s)\,ds$, $y=\int\cos\alpha(s)\,ds$, где $\alpha(s)=\int k(s)\,ds$. **21.** Допустим, задана функция $\boldsymbol{\tau}(s)$. Имеем $\boldsymbol{\tau}(s)=\boldsymbol{r}'(s)$. Отсюда $\boldsymbol{r}(s)=\int\boldsymbol{\tau}(s)\,ds$. Если задана функция $\boldsymbol{\beta}(s)$ или $\boldsymbol{\nu}(s)$, то сначала находим $\boldsymbol{\tau}(s)$. Имеем $\boldsymbol{\beta}'=k_2\boldsymbol{\tau}$. Отсюда $\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{\beta}'}{|\boldsymbol{\beta}|}$. Теперь $\boldsymbol{r}(s)=\int\frac{\boldsymbol{\beta}'(s)}{|\boldsymbol{\beta}(s)|}ds$. Пусть задана функция $\boldsymbol{\nu}(s)$. Имеем $\boldsymbol{\nu}'=-k_1\boldsymbol{\tau}-$ $-k_2\boldsymbol{\beta}$. Умножая векторно на $\boldsymbol{\nu}$, получим $\boldsymbol{\nu}'\wedge\boldsymbol{\nu}=-k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{\tau}$. Из двух уравнений находим $\boldsymbol{\tau}(s)$ и выражаем через него $\boldsymbol{r}(s)$. **22.** Доказательство основано на использовании формул Френе. Например, если выполняется первое условие, то $\boldsymbol{a\tau}=\mathrm{const}$, где $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор. Отсюда следует, что $\boldsymbol{a\nu}=0$ (упр. 13), а значит, главные нормали параллельны плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{a}$. Далее заключаем, что $\boldsymbol{\beta a}=\mathrm{const}$ и $\frac{k_1}{k_2}=\mathrm{const}$ (см. ответ к упр. 16). **23.** У винтовой линии кривизна и кручение постоянны и могут иметь любые значения при подходящем выборе параметров кривой. Так как кривая однозначно определяется заданием кривизны и кручения, то всякая кривая с постоянной кривизной и кручением есть винтовая линия.

ГЛАВА IX

1. $z^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2=R^2$. **2.** Сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$. **3.** $x=\varphi(u)\cos v$, $y=\varphi(u)\sin v$, $z=\psi(u)$. **4.** $x=v\cos\omega u$, $y=v\sin\omega u$, $z=au$. **5.** При движении по винтовой линии ее главная нормаль равномерно вращается около оси винтовой линии и пересекает ее под прямым углом. Поэтому поверхность, образуемая главными нормалями винтовой линии, есть геликоид (см. упр. 4). **6.** При $u=\text{const}$ кривая $\boldsymbol{r}=\varphi(u)+\psi(v)$ получается из кривой $\boldsymbol{r}=\psi(v)$ параллельным переносом на вектор $\varphi(u)$. **7.** Если кривые заданы уравнениями $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(u)$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(v)$, то поверхность, являющаяся геометрическим местом середин отрезков с концами на данных кривых, задается уравнением $\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_1(u)+\boldsymbol{r}_2(v)}{2}$. **8.** Уравнение поверхности $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{a}$ (параметры u и v). **9.** Уравнение поверхности $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{p}-(\boldsymbol{r}(u)-\boldsymbol{p})v$, где $\boldsymbol{p}$ — вектор $\overrightarrow{(a,\ b,\ c)}$. **10.** Уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(u)$ задается кривая на поверхности, пересекающая прямые, $\varphi(u)$ — вектор прямой. Вектор любой точки поверхности можно записать в виде $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(u)+v\varphi(u)$. **11.** См. вывод уравнения касательных к эллипсу и гиперболе в § 6 гл. IV. **12.** $x=a$. **13.** Составить уравнение касательной плоскости в произвольной точке поверхности и убедиться, что ему удовлетворяет точка $(0,\ 0,\ 0)$. **16.** Гиперболический параболоид. **17.** Уравнение эллипсоида в окрестности точки $(0,\ 0,\ c)$ можно представить в виде $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

Уравнение соприкасающегося параболоида $z=c+c\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right)$.

18. У эллипсоида точки эллиптические, у гиперболоидов — гиперболические, у эллиптического параболоида — эллиптические, у гиперболического параболоида — гиперболические, у цилиндров и конуса — параболические. **19.** Пусть рассматриваемая плоскость имеет нормалью вектор $\boldsymbol{a}$, а рассматриваемой точкой является начало координат. Так как поверхность имеет с плоскостью только одну общую точку, то она лежит по одну сторону этой плоскости. Поэтому либо $\boldsymbol{ar}(u,\ v)\geqslant 0$, либо $\boldsymbol{ar}(u,\ v)\leqslant 0$, причем равенство достигается только в одной точке. Отсюда следует, что в этой точке $\boldsymbol{ar}_u=0$ и $\boldsymbol{ar}_v=0$, т. е. плоскость является касательной к поверхности. **20.** Принять какую-нибудь точку линии за начало координат, а касательную плоскость к поверхности в этой точке за плоскость xy. Представить уравнение поверхности в виде $z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\varepsilon(x,\ y)(x^2+y^2)$.

В случае эллиптической и гиперболической точки $rt-s^2\neq 0$. Вывести отсюда, что при достаточно малом x^2+y^2 $z_x^2+z_y^2>0$, если $x^2+y^2\neq 0$. Это значит, что в точках поверхности, близких к началу координат, касательная плоскость не может быть плоскостью xy. А это противоречит условию задачи. **21.** Принять касательную плоскость в точке P за плоскость xy и представить уравнение поверхности в виде $z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\varepsilon(x,\ y)(x^2+y^2)$. Обратить внимание на то, что в эллиптической точке P форма $rx^2+2sxy+ty^2$ знакопостоянная, а в гиперболической — знакопеременная. **22.** Представив уравнение поверхности в виде $z=z(x,\ y)$, заметим, что в точках уплощения $d^2z\equiv 0$. Поэтому вдоль γ $d^2z\equiv 0$. Отсюда следует, что вдоль γ $z=ax+by+c$, где $a,\ b,\ c$ — постоянные, т. е. кривая γ плоская. **23.** Если взять сферу, содержащую внутри поверхность и уменьшать ее радиус, то она в какой-то момент коснется поверхности. Точка касания является эллиптической точкой. **24.** Ввести на поверхности в качестве координатных линий пересечения ее с плоскостями, проходящими через данную прямую, и плоскостями, перпендикулярными прямой. **25.** Если рассматриваемую точку принять за начало координат, то вектор точки поверхности $\boldsymbol{r}(u,\ v)$ будет нормалью поверхности. Поэтому $\boldsymbol{rr}_u=0$, $\boldsymbol{rr}_v=0$, т. е. $\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r}=0$, а значит, $\boldsymbol{r}^2=\text{const}$ (сфера).

ГЛАВА XI

1. $(\varphi'^2+\psi'^2)\,du^2+\varphi^2\,dv^2$. **2.** Воспользоваться результато упр. 1. Ввести вместо u новый параметр u_1, полагая $du_1=\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,du$. **3.** $s=|\operatorname{sh}u_2-\operatorname{sh}u_1|$. **4.** $\cos\theta=\frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{1+a^2x_0^2}\sqrt{1+a^2y_0^2}}$. **5.** Найти первую квадратичную форму и убедиться, что $F=0$. **6.** Пусть $x=R\cos u\cos v$, $y=R\cos u\sin v$, $z=R\sin u$ — параметрическое уравнение сферы (линии $v=\text{const}$ — меридианы). Линейный элемент сферы $ds^2=R^2(du^2+\cos^2 u\,dv^2)$. Пусть локсодрома $u=u(v)$ пересекает меридианы под углом θ. Находим $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u\cdot u'^2}}$. Отсюда $\cos u'=\operatorname{tg}\theta$, $\sin u=v\operatorname{tg}\theta+\text{const}$ — уравнение локсодром. **7.** $s=\dfrac{b^2}{a}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

8. Касательные плоскости параболоидов образуют с плоскостью xy в соответствующих точках (имеющих одну и ту же проекцию) равные углы. **9.** Квадратичная форма $E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ с постоянными коэффициентами преобразуется к виду $du_1^2+du_2^2$. Отсюда следует, что поверхность локально изометрична плоскости. **10.** Линейный элемент плоскости в полярных координатах ρ, θ имеет вид $d\rho^2+\rho^2 d\theta^2$ (показать). Привести линейный элемент поверхности вращения $du^2+G(u)\,dv^2$ к виду $f(u_1)(du_1^2+u_1^2\,dv^2)$ введением вместо u параметра $u=\varphi(u_1)$. **11.** Преобразовать линейный элемент сферы $du^2+\cos^2 u\,dv^2$ к виду $\lambda(u_1)(du_1^2+dv^2)$. **12.** Показать, что при соответствующем выборе параметров линейные элементы поверхностей совпадают. **13.** $\dfrac{-2\,du\,dv}{\sqrt{1+u^2}}$. **14.** $k_n=$ $=\dfrac{a\,dx^2+b\,dy^2}{dx^2+dy^2}$. **15.** Нормальная кривизна поверхности $k_n=\dfrac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}$. У плоскости $k_n=0$. Полагая $dv=0$, из формулы для k_n получаем $E=0$; полагая $du=0$, получаем $G=0$; полагая теперь $du=dv\neq 0$, получаем $F=0$. У сферы k_n не зависит от отношения $du:dv$. Полагая $du=0$, получаем $k_n=\dfrac{L}{E}$; полагая $dv=0$, получаем $k_n=\dfrac{N}{G}$. Положим $du=dv$. Тогда $k_n=\dfrac{L+2M+N}{E+2F+G}=$ $=\dfrac{L}{E}=\dfrac{N}{G}$. Отсюда $\dfrac{L}{E}=\dfrac{M}{F}=\dfrac{N}{G}$, т. е. вторая квадратичная форма пропорциональна первой. **16.** $x=c_1 y$, $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=c_2$ (c_1, c_2 — постоянные). **17.** $x=\operatorname{ch} u\cos v$, $y=\operatorname{ch} u\sin v$, $z=u$. **18.** Найти асимптотические линии на геликоиде. **19.** $M=$ $=(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})=0$, так как $\boldsymbol{r}_{uv}=0$. **20.** Взять меридианы и параллели за координатные линии; показать, что $F=0$ и $M=0$. **21.** a и $-a$. **22.** $\ln(u+\sqrt{u^2+c^2})-v=$ $=\text{const}$, $\ln(u+\sqrt{u^2+c^2})+v=\text{const}$. **23.** Средняя кривизна равна нулю, гауссова кривизна равна $-a^2$. **24.** Принять касательную плоскость поверхности за плоскость xy. **25.** Вычислить среднюю кривизну геликоида и катеноида. **26.** Вычислить гауссову кривизну цилиндрической поверхности (воспользоваться результатом упр. 8 гл. X). **27.** Уравнение поверхности, образованной касательными кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$, будет $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{r}'(u)$. Найти гауссову кривизну поверхности. **28.** Если асимптотическую сеть принять за координатную, то вторая квадратичная форма будет $2M\,du\,dv$. При этом средняя кривизна $H=$ $=\dfrac{MF}{(EG-F^2)^{3/2}}$. Если $H=0$, то $F=0$, т. е. координатная сеть ортогональная.

29. По теореме Родрига $\boldsymbol{n}_u=\lambda\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{n}_v=\lambda\boldsymbol{r}_v$. Дифференцируя первое равенство по v, второе по u и вычитая почленно, получим $\lambda_v\boldsymbol{r}_u-\lambda_u\boldsymbol{r}_v=0$. Отсюда $\lambda_u=0$, $\lambda_v=0$, а значит, $\lambda=\text{const}$. Интегрируя $d\boldsymbol{n}=\lambda\,d\boldsymbol{r}$, получим $\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{r}+\boldsymbol{c}$, $(\lambda\boldsymbol{r}+\boldsymbol{c})^2=$ $=1$. А это сфера. **30.** Векторное уравнение поверхности Φ взять в виде $\boldsymbol{r}=$ $=\boldsymbol{r}(u, v)+\lambda\boldsymbol{n}(u, v)$, где $\boldsymbol{r}(u, v)$ — вектор точки поверхности F, а $\boldsymbol{n}(u, v)$ — единичный вектор нормали в этой точке. Пользуясь теоремой Родрига, доказать параллельность касательных плоскостей поверхностей F и Φ в соответствующих точках и соответствие главных направлений в этих точках. **31.** Доказать, что по соответствующим главным направлениям поверхностей F и Φ их нормальные кривизны связаны соотношением $\dfrac{1}{k_n(\lambda)}=\dfrac{1}{k_n}+\lambda$. После этого выразить среднюю и гауссову кривизну поверхности Φ через среднюю и гауссову кривизну поверхности F. **32.** Если принять за координатные линии линии кривизны поверхности, то по теореме Родрига $n_u=-k_1r_u$, $n_v=-k_2r_v$. Так как $k_1+k_2=0$, то $n_u^2=k_1^2r_u^2$, $n_v^2=k_1^2r_v^2$. Так как, кроме того, $r_ur_v=0$ и $n_un_v=0$, то $dn^2=k_1^2\,dr^2$. А это и означает, что сферическое отображение поверхности конформно.

ГЛАВА XII

1. Воспользоваться формулой Гаусса для выражения гауссовой кривизны через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. **4.** Принять линии кривизны поверхности за координатные линии. Пользуясь тем, что L зависит только от u, а N — только от v (см. упр. 3), привести вторую квадратичную форму поверхности к виду du^2-dv^2. При этом первая квадратичная форма принимает вид $\lambda(du^2+dv^2)$, так как средняя кривизна равна нулю. **5.** У асимптотической соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности, а у геодезической — перпендикулярна касательной плоскости. Отсюда следует, что кривизна кривой равна нулю, а значит, она есть прямая. **6.** Примем в качестве параметра на кривой ее дугу. Так как она есть линия кривизны, то $r'=\lambda n'$. Так как она геодезическая, то $r''=\mu n$. Отсюда $r'''=\mu' n+\mu n'$, $(r'''r''r')=(\mu' n+\mu n'\,\mu n\,\lambda n')=0$. Следовательно, кручение кривой равно нулю, а значит, кривая плоская. **7.** Цилиндрическая поверхность локально изометрична плоскости. Прямолинейным образующим на плоскости соответствуют параллельные прямые. А прямая пересекает семейство параллельных прямых под одним и тем же углом. **8.** Данный линейный элемент является линейным элементом плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре. Поэтому геодезическими являются кривые $u=\text{const}$ и $(u-c_1)^2+v^2=c^2$. **9.** Доказать, что все эти поверхности имеют нулевую гауссову кривизну. **10—12.** Воспользоваться теоремой Гаусса — Бонне. **13.** Из определения гауссовой кривизны по Гауссу следует, что если в области G гауссова кривизна сохраняет знак, то $\omega(G)=\left|\iint K\,ds\right|$, где $\omega(G)$ — площадь сферического изображения области G. Принимая это во внимание, доказать, что эйлерова характеристика тора равна нулю. **14.** Взять тело в виде цилиндра. Сделать в нем n круглых отверстий, параллельных оси. Сгладить поверхность полученного тела. После этого применить к поверхности теорему Гаусса — Бонне, пользуясь соображениями, приведенными в указании к упр. 13. Ответ: $2(1-n)$.

ГЛАВА XVI

1. Пополнить евклидово пространство несобственными элементами и применить теорему Дезарга. **2.** Пополнить евклидово пространство несобственными элементами и воспользоваться теоремой Дезарга. **3.** Однородные координаты бесконечно удаленной точки прямой: k, l, m, 0. **4.** Координаты третьей точки линейно выражаются через координаты первых двух: $\lambda a_1+\mu b_1=c_1$, $\lambda a_2+\mu b_2=c_2$, $\lambda a_3+\mu b_3=x_3$, $\lambda a_4+\mu b_4=x_4$. Из первых двух уравнений находим λ и μ, а затем находим x_3 и x_4. **5.** Воспользоваться двумя проектированиями. **6.** Перевести точки A, B, C, D проективным преобразованием в точки $A_1(-1, 0, 0, 1)$, $B_1(0, 0, 0, 1)$, $C_1(1, 0, 0, 1)$, $D_1(\xi, 0, 0, 1)$. **7.** Взять ангармоническое отношение четырех точек, в которых данные прямые пересекают прямую $x=1$. $\dfrac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}:\dfrac{\sin(\alpha-\delta)}{\sin(\beta-\delta)}$. **8.** $\chi=1$. **9.** Воспользоваться теоремой Штейнера. **10.** Надо взять на поляре две точки, построить поляры этих точек; пересечение их и будет искомым полюсом. **11.** $a_{13}=0$; $a_{23}=0$. **12.** $a_{ij}=0$ при $i\neq j$. **13.** Если между точками двух данных прямых установлено проективное соответствие, которое не сводится к простому проектированию одной прямой на другую, то прямые, соединяющие точки данных прямых, касаются кривой второго порядка. **14.** При полярном преобразовании вершины переходят в плоскости граней, а плоскости граней — в вершины. Поэтому куб переходит в октаэдр, а додекаэдр — в икосаэдр. **15.** Воспользоваться интерпретацией Клейна геометрии Лобачевского. Взять точку P в центре круга, тогда угол параллельности будет просто евклидовым углом. Найти расстояние PQ в смысле Лобачевского, выразив его через

угол параллельности. Воспользоваться формулой для расстояния между точками. **16.** Воспользоваться формулой для расстояния в интерпретации Клейна геометрии Лобачевского, а также условием перпендикулярности прямых.

ГЛАВА XVII

1. Воспользоваться геометрическим местом точек 1. **2.** Воспользоваться геометрическим местом точек 5. **3.** Воспользоваться геометрическим местом точек 5. **4.** Окружность, проходящая через центры данных окружностей, концентрична искомой. **5.** См. упр. 2. **6.** Разность квадратов расстояний центра искомой окружности от центров двух данных окружностей равна разности квадратов их радиусов. Воспользоваться геометрическим местом точек 8. **7.** Отношение расстояний искомой точки от центров двух данных окружностей равно отношению их радиусов. Воспользоваться геометрическим местом точек 6. **8.** Отложить на полупрямой AC отрезок $AD=l$. Искомая точка X равноудалена от B и D. Воспользоваться геометрическим местом точек 3. **9.** Сначала построить какой-нибудь отрезок с концами на окружностях, видный из их центра под углом α. Для этого взять любой угол, равный α, с вершиной в центре круга. **10.** Искомая прямая параллельна диагонали параллелограмма, который получается в пересечении данных прямых. **11.** Если в данных окружностях взять хорды данной длины и построить концентрические окружности, касающиеся этих хорд, то искомая прямая будет общей касательной для построенных окружностей. **12.** При условии, что три вершины параллелограмма лежат на сторонах четырехугольника, а стороны имеют заданные направления, найти геометрическое место точек четвертой его вершины (прямая). **13.** Воспользоваться методом подобия. **14.** Применить метод подобия, построив сначала любой квадрат, у которого две вершины — на одной стороне треугольника, а третья — на другой. **15.** Применить метод подобия, построив сначала какой-нибудь отрезок, параллельный хорде, соединяющей концы радиусов, который делится радиусами на три равные части. **16.** Применить метод подобия, построив сначала какой-нибудь ромб, стороны которого параллельны диагоналям четырехугольника и две соседние вершины лежат на соседних сторонах четырехугольника. **17.** Воспользоваться теоремой об отрезках секущей и касательной к окружности, проведенных из общей точки. **18.** Применить метод подобия: высóты обратно пропорциональны сторонам. **19.** Построить сначала прямоугольный треугольник, у которого данная биссектриса — гипотенуза, а высота — катет. **20.** Сначала построить прямоугольный треугольник, у которого данная медиана и высота являются гипотенузой и катетом соответственно. После этого найти центр описанной окружности. **21.** Построить сначала прямоугольный треугольник, у которого данная сторона — гипотенуза, а данная высота — катет. **22.** Пусть ABC — искомый треугольник с заданным углом α при вершине C, стороной AB и суммой сторон AC и BC. Отложим на полупрямой AC отрезок $AD=AC+BC$. Треугольник ADB легко строится, у него $\angle D=\frac{\alpha}{2}$. **23.** Обратить внимание на то, что углы треугольника, у которого двумя вершинами являются концы хорд, а третьей — вторая точка пересечения окружностей, не зависят от прямой. Прямую надо провести перпендикулярно общей хорде окружностей. **24.** Если вписать в круг данного радиуса данный угол, то получим сторону искомого треугольника, противолежащую заданному углу. После этого задача сводится к упр. 22. **25.** Применить метод параллельного переноса. Перенося медианы параллельно, образовать из них треугольник. **26.** Если $ABCD$ — искомый параллелограмм и E — точка пересечения его диагоналей, то у треугольника ABE известны две стороны AE и BE и угол между ними. **27.** Геометрическим местом вершин искомого треугольника являются окружности. Задача сводится к упр. 23. **28.** Применить метод параллельного переноса. **29.** Применить симметрию относительно прямой g. **30.** Сначала найти точку D' на прямой AC, симметричную точке D относительно прямой BX. **31.** Построить точку B', симметричную точке B относительно прямой g. Точка X получается в пересечении прямых AB' и g. **32.** Повернуть квадрат около заданной вершины треугольника на 90°. **33.** Применить инверсию, при которой данная окружность перейдет в прямую. После этого задача сводится к упр. 17.

ГЛАВА XIX

1. Точка пересечения медиан является проекцией центра окружности, описанной около шестиугольника. **2.** Проекцией будет сопряженный диаметр эллипса. **3.** Строим проекции диагоналей квадрата (упр. 2). **4.** Строим сначала проекцию квадрата, вписанного в окружность. **5.** Пусть A — заданная вершина, а O — проекция центра окружности, A' — точка, симметричная A относительно O. Сторона треугольника, противолежащая вершине A, проходит через середину отрезка OA' и параллельна диаметру эллипса, сопряженному диаметру AA'. **6.** Строим проекцию правильного вписанного треугольника и проводим через его вершины прямые, параллельные противолежащим сторонам.

ГЛАВА XX

1. $\arccos \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}$. **2.** Угол при вершине $\pi - 2\alpha$, угол при основании $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\cos\beta \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}$. **3.** $\operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\dfrac{\pi}{n}}$. **4.** $\pi - \arccos\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta \cos\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

5. $\arcsin \sqrt{\dfrac{1+\cos\delta}{1-\cos\dfrac{2\pi}{n}}}$. **6.** $\pi - \arccos\left(\dfrac{1-\cos\dfrac{2\pi}{n}}{\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}\right)^2} + \cos\dfrac{2\pi}{n}\right)$. **7.** Если α, β, γ — плоские углы трехгранного угла, то угол между плоскостью угла γ и противолежащим ребром равен $\arccos \dfrac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\gamma}$.

Если известны двугранные углы A, B, C данного трехгранного угла, то угол между ребром с двугранным углом C и противолежащей гранью равен $\arccos \dfrac{\sqrt{\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A\cos B\cos C}}{\sin C}$. **8.** Применить параллельный перенос, переводящий вершину с известными углами в любую другую вершину, в которой надо найти двугранные углы. **9.** Пусть ABC — треугольник в основании призмы и AD — боковое ребро. Искомые углы при вершинах B и C находятся с помощью скалярных произведений $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$. Воспользоваться разложением: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. **10.** Косинусы двугранных углов равны: у тетраэдра 1/3, у октаэдра —1/3, у додекаэдра $-\cos\dfrac{2\pi}{5}\Big/2\sin^2\dfrac{\pi}{5}$, у икосаэдра $-\left(1+4\cos\dfrac{2\pi}{5}\right)\Big/3$. **11.** Если a — ребро правильного многогранника, 2γ — двугранный угол при его ребрах и n — число сторон грани, то радиус вписанного шара равен $\dfrac{a\operatorname{tg}\gamma}{2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}$, а радиус описанного шара — $\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}\sqrt{1+\cos^2\dfrac{\pi}{n}\operatorname{tg}^2\gamma}$.

12. Тетраэдр совмещается с самим собой 24-я различными движениями, куб и октаэдр — 48-ю, додекаэдр и икосаэдр — 120-ю.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

АЛЕКСЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ПОГОРЕЛОВ

ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *Т. А. Панькова*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректоры *Е. В. Сидоркина, В. П. Сорокина*

ИБ № 12350

Сдано в набор 22.10.82. Подписано к печати 10.03.83. Формат 60×90[1]/[16]. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 18. Уч-изд. л. 19,7. Тираж 34 000 экз. Заказ № 949/185 Цена 80 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Набрано в ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии
имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
Отпечатано в Под. филиале ПО «Периодика», г. Подольск, ул. Кирова, 25

80 коп.