

**СОВРЕМЕННЫЕ  
ПРОБЛЕМЫ  
МАТЕМАТИКИ**

---

**М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ**

***П*ОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ  
РЕШЕНИЯ  
ОПЕРАТОРНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**



---

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

*Серия выпускается под общим руководством  
редакционной коллегии журнала  
«Успехи математических наук»*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1962

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ  
РЕШЕНИЯ  
ОПЕРАТОРНЫХ  
УРАВНЕНИЙ

ГЛАВЫ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1962

## АННОТАЦИЯ

Книга посвящена систематическому изложению важной главы нелинейного функционального анализа. В книге развиваются методы исследования уравнений, содержащих существенные нелинейности и, в частности, уравнений, которые могут иметь много решений. Методы, развитые в книге, уже нашли разнообразные приложения в задачах теории волн, в задачах о формах потери устойчивости упругих систем, в задачах геометрии в целом, в теории периодических решений уравнений нелинейной механики, в теории нелинейных краевых задач и др.

Книга рассчитана на студентов старших курсов, аспирантов и научных работников в различных областях математики, механики, связанных с необходимостью решать и исследовать нелинейные задачи.

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	11
<b>Глава 1. Пространства с конусом</b>	
§ 1. Основные определения . . . . .	13
1. Конусы (13). 2. Конус $K(F)$ (14). 3. Полуупорядоченность (15). 4. Вспомогательные леммы (16).	
§ 2. Нормальные конусы . . . . .	17
1. Определения (17). 2. Признак нормальности конуса (18). 3. Монотонные и полумонотонные нормы (20).	
§ 3. Пространство $E_{H_0}$ . . . . .	21
1. Примеры (21). 2. Полнота пространства $E_{H_0}$ (22). 3. Конус $K_{H_0}$ (23). 4. Конус $\tilde{K}_{H_0}$ (24).	
§ 4. Линейные положительные функционалы . . . . .	26
1. Положительные функционалы (26). 2. Равномерно положительные функционалы (28). 3. Конусы, допускающие оштукатуривание (29). 4. Пример конуса, допускающего оштукатуривание (32).	
§ 5. Правильные конусы . . . . .	33
1. Определения (33). 2. Связь между правильностью и нормальностью конуса (34). 3. Вполне правильные конусы (35). 4. Сопряженный конус (37). 5. Дополнительные замечания (38).	
§ 6. Признаки правильности конуса . . . . .	39
1. Строго растущие функционалы (39). 2. Основные признаки (39). 3. Примеры правильных, но не вполне правильных конусов (40). 4. О конусах, допускающих оштукатуривание (46).	
§ 7. Минимэдральные конусы . . . . .	48
1. Определение (48). 2. Существование точной верхней грани у счетного множества элементов (49). 3. Сильно минимэдральные конусы (50). 4. Дополнительные замечания (52).	
§ 8. Пространства с двумя конусами . . . . .	53
1. Ограниченность множества $K < \theta, x >$ (53). 2. $K$ -нормальность конуса $K_0$ (54). 3. $K$ -воспроизводящие конусы (56). 4. $K$ -правильные и вполне $K$ -правильные конусы (56). 5. Слабо правильные конусы (58).	

## Глава 2. Линейные положительные операторы

§ 1. Линейные  $u_0$ -положительные операторы . . . . . 59

1. Определения (59). 2. Примеры (60). 3. Положительность ограниченного снизу и сверху оператора (62). 4. Непрерывность положительного оператора (64). 5. Равномерно положительные операторы (65).

## § 2. Существование собственного вектора . . . . . 67

1. Положительные собственные векторы (67). 2. Принцип Шаудера неподвижной точки (68). 3. Существование положительного собственного вектора у линейного вполне непрерывного оператора (68). 4. Существование собственного вектора у равномерно положительного оператора (70). 5. Слабая топология и принцип Тихонова — Шаудера (72). 6. Линейные операторы в слабо полных пространствах (72). 7. Примеры (74). 8. Еще один признак существования собственного вектора (75). 9. Существование собственного вектора в узком конусе (77).

## § 3. Простота позитивного собственного значения . . . . . 77

1. Оператор  $u_0$ -положительный с собственным вектором (77). 2. Простота собственного значения (78). 3. Единственность положительного собственного вектора (80). 4. Расположение инвариантных подпространств положительного оператора (80). 5. Об интегральных операторах (82).

## § 4. Сравнение с другими собственными значениями . . . . . 83

1. Основная теорема (83). 2. Собственные значения ограниченных сверху операторов (86). 3. Положительные собственные векторы ограниченных снизу операторов (88).

## § 5. Неоднородные линейные уравнения . . . . . 89

1. Постановка задач (89). 2. Леммы об эквивалентной норме (90). 3. Доказательство теоремы 2.16 (92). 4. Несовместные неравенства (94). 5. Сравнение собственных значений двух операторов (97).

## Глава 3. Дифференцируемость по конусу

## § 1. Производные по конусу . . . . . 99

1. Производные Гато и Фреше (99). 2. Определения производных по конусу (101). 3. Производные по несплюсненным конусам (102). 4. Производные по конусу вполне непрерывных операторов (105). 5. Положительные и монотонные операторы (107).

## § 2. Производная на бесконечности . . . . . 108

1. Определения (108). 2. Существование сильной асимптотической производной (110). 3. Сильно асимптотически линейные по конусу операторы (113).

## § 3. Неравенства для элементов с малыми нормами . . . . . 114

1. Постановка задачи (114). 2. Элементы, «идущие вперед» (115). 3. Использование высших производных (117). 4. Использование минорант (118). 5. Элементы, «идущие назад» (119). 6. Отсутствие «идущих вперед» элементов (120). 7. Операторы, производные которых  $K$ -расщепляемы (123). 8. Отсутствие «идущих назад» элементов (124).

## § 4. Неравенства для элементов с большими нормами . . . . . 125

1. Существование элементов, «идущих вперед» и «идущих назад» (125). 2. Отсутствие элементов, «идущих вперед» или «идущих назад» (125).

## Глава 4. Существование положительных решений

## § 1. Уравнения с монотонными операторами . . . . . 128

1. Операторы, оставляющие инвариантным конусный отрезок (128). 2. Возможность существования нескольких неподвижных точек (130). 3. Отыскание инвариантного конусного отрезка (130). 4. Специальный класс монотонных операторов (131). 5. Использование второго конуса (133). 6. Замечание о сходимости последовательных приближений (133). 7. Уравнения в пространствах с вполне правильными конусами (135).

## § 2. Уравнения с немонотонными операторами . . . . . 137

1. Существование неотрицательных решений (137). 2. Переопределение оператора (138). 3. Положительные решения (142). 4. Неподвижная точка в сжатом конусе (145). 5. Использование минорант и мажорант (147).

## § 3. Вспомогательные утверждения . . . . . 148

1. Отображение на цилиндры (148). 2. Лемма о неподвижной точке (150). 3. Случай конечномерного пространства (153). 4. Шаудеровский оператор проектирования на конечномерное подпространство (154). 5. Лемма о неподвижной точке вполне непрерывного оператора (155).

## § 4. Неподвижные точки операторов, растягивающих конус . . 157

1. Растяжение конуса (157). 2. Использование мажорант и минорант (159). 3. Использование производных (160). 4. Существование многих решений (163).

## Глава 5. Непрерывные ветви положительных решений

## § 1. Положительные решения уравнений с параметром . . . . 165

1. Описание изучаемых уравнений (165). 2. Существование решений (166). 3. Непрерывная ветвь решений (168). 4. Существование собственных векторов (171). 5. Непрерывные ветви собственных векторов (172). 6. Собственные векторы слабо непрерывных операторов (173).

## § 2. Некоторые топологические теоремы . . . . . 174

1. Степень отображения (174). 2. Вращение векторного поля (175). 3. Доказательство теоремы 5.4 для конечномерного случая (177). 4. Завершение доказательства теоремы 5.4 (178). 5. Доказательство теоремы 5.5 в конечномерном случае (181). 6. Завершение доказательства теоремы 5.5 (183). 7. Вращение вполне непрерывного векторного поля (186).

## § 3. Операторы с монотонными минорантами . . . . . 186

1. Собственные векторы однородных операторов (186). 2. Непрерывная ветвь собственных векторов у оператора с монотонной однородной минорантой (189). 3. Основная теорема (190). 4. Принцип топологического продолжения (191). 5. Бифуркационные значения параметра (193). 6. Оценки собственных значений (195).



## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Глава 6. Уравнения с вогнутыми операторами

§ 1 Единственность положительного решения и сходимость последовательных приближений . . . . .	197
1. Вогнутые операторы (197). 2. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям (198). 3. Теорема единственности (199). 4. Квадрат вогнутого оператора (201). 5. Признаки вогнутости оператора в свойствах производных (203). 6. Основная теорема о сходимости последовательных приближений (204). 7. Сходимость последовательных приближений для $\mu_0$ -вогнутых операторов (206).	
§ 2. Существование континуума собственных векторов . . . . .	209
1. Вполне непрерывные вогнутые операторы (209). 2. Общий случай вогнутого оператора (210). 3. Верхняя граница позитивного спектра вогнутого оператора (215). 4. Нижняя граница позитивного спектра (217). 5. Операторы, вогнутые на части конуса (217).	
§ 3. Уравнения с выпуклыми операторами . . . . .	218
1. Выпуклые операторы (218). 2. Принцип единственности (220).	
§ 4. Приложения к задаче о точках бифуркации . . . . .	220
1. Постановка задачи (220). 2. Основной результат (222). 3. Кривая позитивных точек (225). 4. Существование ненулевых решений (230). 6. Лемма о положительности оператора (231). 7. Лемма о монотонности оператора (233). 8. Доказательство единственности в специальном случае вогнутого оператора (234). 9. Доказательство единственности в специальном случае выпуклого оператора (237). 10. Доказательство единственности в общем случае (239). 11. Непрерывная зависимость от параметра (241).	

### Глава 7. Приложения

§ 1. Существование положительных решений у интегральных уравнений . . . . .	245
1. Линейные интегральные операторы (245). 2. Условия полной непрерывности нелинейного интегрального оператора (248). 3. Дифференцируемость оператора Урысона (250). 4. Производные по конусу (252). 5. Асимптотические производные (257). 6. Положительность интегрального оператора (259). 7. Неотрицательные решения (261). 8. Положительные решения (262). 9. Собственные функции (264). 10. Уравнение с вогнутыми нелинейностями (265). 11. Уравнения с выпуклыми нелинейностями (268). 12. Замечания (272).	
§ 2. Первая краевая задача для эллиптических уравнений второго порядка с нелинейностями . . . . .	273
1. Эллиптический оператор (273). 2. Интегральное неравенство для функции Грина (275). 3. Неоднородное линейное уравнение (276). 4. Существование неотрицательного решения (277). 5. Существование неотрицательного и не равного тождественно нулю решения (280). 6. Единственность положительного решения (283). 7. О квазилинейных уравнениях (285).	
§ 3. Существование положительных периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .	286
1. Принцип Пуанкаре (287). 2. Существование неотрицательного периодического решения (288). 3. Постановка задачи о существовании положительного периодического решения (290). 4. О линейных систе-	

мах обыкновенных дифференциальных уравнений (291). 5. Производная оператора  $A$  (294). 6. Существование положительного периодического решения (296). 7. Линеаризация на бесконечности (299). 8. Существование положительных периодических решений у линейных на бесконечности систем (301). 9. Замечание о теоремах единственности (301).

#### § 4. Двухточечная краевая задача . . . . . 302

1. Функция Грина оператора  $\ddot{x}$  (302). 2. Собственные значения и осциллирование решений (304). 3. Двухточечная краевая задача для скалярного уравнения (306). 4. Неотрицательные решения двухточечной задачи (307). 5. Еще одно условие разрешимости двухточечной задачи (310). 6. Использование конуса выпуклых функций (311).

#### § 5. Периодические решения систем второго порядка . . . . . 313

1. Нечетные решения (313). 2. Автономные системы (314). 3. Континуум периодических решений у систем без трения (316). 4. Нечетные решения у систем с трением (318). 5. Положительные периодические решения систем общего вида (324).

#### § 6. Задача Дирихле для уравнения Монжа — Ампера . . . . . 325

1. Нормальные отображения (325). 2. Вспомогательные функции (327). 3. Обращение оператора Монжа — Ампера (328). 4. Полная непрерывность операторов  $A_\alpha$  (328). 5. Дальнейшие свойства операторов  $A_\alpha$  (331). 6. Существование решения (333). 7. Второе решение (335). 8. Единственность ненулевого решения (337). 9. Уравнения с сильными нелинейностями (339). 10. Условия существования многих решений (341). 11. Замечания (343).

#### Краткое содержание 1 — 7 глав . . . . . 344

#### Литературные указания . . . . . 376

#### Цитированная литература . . . . . 389



## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге развиваются методы исследования ряда вопросов, связанных с положительными решениями различных задач. Эти вопросы возникают во многих разделах математики. В связи с этим общие результаты, полученные в терминах функционального анализа, иллюстрируются приложениями к нескольким задачам: к первой краевой задаче для квазилинейных эллиптических уравнений, к нелинейным интегральным уравнениям, к нелинейным колебаниям, к задаче о точках бифуркации, к теории уравнений Монжа — Ампера и др. Приложения основаны на специальных построениях и используют свойства функций Грина различных дифференциальных операторов. Приведенными в книге примерами приложения, конечно, не исчерпываются; в настоящее время, например, изложенные методы получили приложения в задачах теории волн, в теории упругости и др.

В книге изложены методы доказательства существования положительных решений. Указаны специальные признаки единственности положительного решения. Изучена зависимость решений от параметров. Рассмотрен вопрос о сходимости последовательных приближений к положительным решениям. Все эти вопросы потребовали выделения новых классов операторов. Изучение этих классов операторов в свою очередь привело к установлению новых фактов геометрии конусов в банаховых пространствах.

Для чтения книги нужны знания основ функционального анализа в объеме обычного университетского курса (например, первые главы курса Л. А. Люстерника и В. И. Соболева [1] или книги Г. Е. Шилова [1]); все понятия, связанные с полуупорядоченными пространствами, в книге подробно описываются. В ряде мест применяются элементарные понятия комбинаторной топологии.

Наиболее важные разделы книги были изложены в цикле докладов на семинаре по функциональному анализу в Воронежском государственном университете. Мне приятно отметить, что в книге использованы отдельные соображения (а иногда и важные результаты) моих товарищей и учеников И. А. Бахтина, Л. А. Ладыженского, А. Ю. Левина, А. И. Перова, Я. Б. Рutiцкого, П. Е. Соболевского, В. Я. Стеценко (см. Литературные указания в конце книги). Большую помощь в оформлении ряда глав книги мне оказал В. Я. Стеценко. Последний параграф седьмой главы написан совместно с И. Я. Бакельманом.

Своим интересом к теории положительных решений я обязан М. Г. Крейну; ряд его идей использован в книге.

Воронеж, 1960 г., октябрь

*М. А. Красносельский*

## ГЛАВА I

### ПРОСТРАНСТВА С КОНУСОМ

В этой главе вводится понятие конуса в банаховом пространстве. При помощи конуса в пространстве определяется отношение полуупорядоченности.

Различные свойства полуупорядоченности определяются геометрическими характеристиками конусов. В связи с этим в главе выделяется ряд классов конусов; указываются признаки принадлежности конуса тому или иному классу и т. д.

#### § 1. Основные определения

**1. Конусы.** Пусть  $E$ , как обычно, — вещественное банахово пространство.

Множество  $K \subset E$  называется *конусом*, если выполнены следующие условия:

а) множество  $K$  замкнуто,  
б) из  $u, v \in K$  вытекает, что  $\alpha u + \beta v \in K$  при всех  $\alpha, \beta \geq 0$ .

в) из каждой пары векторов (точек)  $x, y$  —  $x$  по крайней мере один не принадлежит  $K$ , если  $x \neq \theta$ , где  $\theta$  — нуль пространства  $E$ .

Из свойства б, в частности, вытекает, что конус  $K$  является выпуклым множеством.

Конус называется *телесным*, если он содержит внутренние точки. Конус называется *воспроизводящим*, если каждый элемент  $x \in E$  можно представить в виде

$$x = u - v \quad (u, v \in K). \quad (1.1)$$

В представлении (1.1) элементы  $u$  и  $v$  определяются неоднозначно. Каждый телесный конус — воспроизводящий; действительно, если  $v_0$  — внутренний элемент конуса, то

элемент  $u = v_0 + \rho x$  при достаточно малом  $\rho > 0$  будет принадлежать конусу, а это значит, что элемент  $x$  представим в виде

$$x = \frac{u}{\rho} - \frac{v_0}{\rho},$$

то есть в виде (1.1).

Простейшими примерами конусов являются совокупности  $K_+$  неотрицательных функций в пространствах  $C$  (пространство функций непрерывных на ограниченном замкнутом множестве) и  $L_p$  (пространство функций, суммируемых с  $p$ -й степенью на ограниченном множестве). Нетрудно видеть, что конус неотрицательных функций в пространстве  $C$  телесен — функция  $u_0(t) \equiv 1$  является внутренней точкой этого конуса. В случае пространств  $L_p$  конус неотрицательных функций не будет телесным, но будет воспроизводящим, так как каждую функцию  $x(t) \in L_p$  можно представить в виде

$$x(t) = x_+(t) - x_-(t),$$

где

$$x_+(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } x(t) \geq 0, \\ 0, & \text{если } x(t) < 0, \end{cases}$$

и

$$x_-(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x(t) \geq 0, \\ -x(t), & \text{если } x(t) < 0, \end{cases}$$

причем  $x_+(t)$ ,  $x_-(t)$  неотрицательны и принадлежат  $L_p$ .

Рассмотрим теперь пространство  $C$  непрерывных функций на отрезке  $[a, b]$  и выделим в нем совокупность  $K_1$  неотрицательных неубывающих функций.  $K_1$  будет конусом; этот конус не является воспроизводящим, так как в виде разности двух неубывающих функций могут быть представлены лишь функции ограниченной вариации.

**2. Конус  $K(F)$ .** Укажем один общий метод построения конусов в банаховых пространствах.

Пусть  $F$  — ограниченное, замкнутое и выпуклое множество, не содержащее нуля  $\theta$  пространства  $E$ . Обозначим через  $K(F)$  совокупность всех элементов  $x \in E$ , допускающих представление  $x = tz$ , где  $t \geq 0$  и  $z \in F$ . Покажем, что  $K(F)$  является конусом.

Пусть  $u_n \in K(F)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и  $\|u_n - v\| \rightarrow 0$ ,  $v \neq \theta$ . Каждый элемент  $u_n$  представим в виде  $u_n = t_n z_n$ , где  $z_n \in F$ . Очевидно, существуют такие положительные постоянные  $m$

и  $M$ , что  $m \leq \|z_n\| \leq M$ . Поэтому числа  $t_n$  ограничены снизу и сверху положительными постоянными. Выберем из последовательности  $t_n$  сходящуюся подпоследовательность  $t_{n_i}$ , предел которой  $t_0$  будет положительным числом. Очевидно,

$$\|z_{n_i} - \frac{v}{t_0}\| \leq \frac{1}{t_0} |t_0 - t_{n_i}| \|z_{n_i}\| + \frac{1}{t_0} \|u_{n_i} - v\|,$$

откуда вытекает, что  $\frac{1}{t_0} v \in F$ . Следовательно,  $v \in K(F)$ . Мы показали, что  $K(F)$  является замкнутым множеством.

Пусть  $u, v \in K(F)$ , т. е.  $u = t_1 z_1$ ,  $v = t_2 z_2$ , где  $t_1, t_2 \geq 0$ , а  $z_1, z_2 \in F$ . Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные положительные числа. Очевидно,

$$\alpha u + \beta v = (\alpha t_1 + \beta t_2) \left[ \frac{\alpha t_1}{\alpha t_1 + \beta t_2} z_1 + \frac{\beta t_2}{\alpha t_1 + \beta t_2} z_2 \right].$$

Элемент, выписанный в квадратных скобках, принадлежит  $F$ . Поэтому выполнено условие б).

Нам осталось проверить условие в. Допустим, что это условие не выполнено. Тогда найдется такой элемент  $z_0 \in F$ , что  $-t_0 z_0 \in K(F)$  при некотором  $t_0 > 0$ . Это значит, что

$$-t_0 z_0 = t_1 z_1,$$

где  $t_1 > 0$ ,  $z_1 \in F$ . Из последнего равенства вытекает, что

$$\theta = \frac{t_0}{t_0 + t_1} z_0 + \frac{t_1}{t_0 + t_1} z_1 \in F.$$

Мы пришли к противоречию.

**3. Полуупорядоченность.** Пространство  $E$  называется *полуупорядоченным*, если для некоторых пар элементов  $x, y \in E$  определено соотношение  $x \leq y$  и если знак  $\leq$  обладает обычными свойствами знака  $\leq$ . Речь идет о следующих свойствах:

1) из  $x \leq y$  вытекает, что  $tx \leq ty$  при  $t \geq 0$  и  $tx \geq ty$  при  $t < 0$ ;

2) из  $x \leq y$  и  $y \leq x$  вытекает, что  $x = y$ ;

3)  $x_1 \leq y_1$  и  $x_2 \leq y_2$  вытекает, что  $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$ ;

4) из  $x \leq y$  и  $y \leq z$  вытекает, что  $x \leq z$ .

Полуупорядоченность в банаховом пространстве  $E$  с нормой  $K$  вводится следующим образом: пишут  $x \leq y$ , если  $y - x \in K$ . Свойства 1, 3 и 4 вытекают из условия б; свойство 2 — из условия в (предоставляем читателю показать это).



Из условия  $a$  вытекает еще одно важное свойство полупорядоченности, определенной при помощи конуса:

5) в неравенствах можно переходить к пределу: если  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ,  $\|y_n - y\| \rightarrow 0$  и  $x_n \leq y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), то  $x \leq y$ .

Если  $K$  — это конус неотрицательных функций в пространстве  $S$  или  $L_p$  (или другом пространстве функций), то соотношение полупорядоченности приобретает простой смысл:  $x(t) \leq y(t)$ , если  $x(t) \leq y(t)$  при всех (или почти всех — в случае пространства  $L_p$ ) значениях  $t$ .

**4. Вспомогательные леммы.** Пусть  $x_0$  и  $v_0$  — произвольные фиксированные элементы пространства  $E$ , полупорядоченного при помощи конуса  $K$ . Рассмотрим совокупность  $\Pi$  элементов  $x$  вида

$$x = x_0 + tv_0 \quad (-\infty < t < \infty). \quad (1.2)$$

Если  $v_0 \neq \theta$ , то все элементы (1.2) не могут принадлежать конусу  $K$ , так как в противном случае элементы  $\frac{x_0}{|t|} + v_0 \operatorname{sign} t$  принадлежали бы  $K$  при сколь угодно больших  $|t|$  и в силу замкнутости  $K$  элементы  $v_0$  и  $-v_0$  принадлежали бы  $K$ .

Доказанное утверждение имеет простой геометрический смысл: никакая прямая (1.2) не лежит полностью в конусе. Из выпуклости конуса вытекает, что множество тех значений  $t$ , при которых элемент (1.2) принадлежит конусу (если такие  $t$  существуют), либо образует конечный сегмент  $[t_0, t_1]$ , либо один из полубесконечных промежутков  $(-\infty, t_0]$  или  $[t_0, \infty)$ . Нетрудно видеть, что случай промежутка  $[t_0, \infty)$  может быть лишь тогда, когда  $v_0 \in K$ , а случай промежутка  $(-\infty, t_0]$  — когда  $-v_0 \in K$ . Приведенные рассуждения приводят нас к следующим леммам:

**Лемма 1.1.** Пусть  $u_0 \in K$ ,  $x \in E$ . Тогда из  $x \leq tu_0$  вытекает, что  $x \leq \gamma u_0$  при всех  $\gamma > t$ .

**Лемма 1.2.** Пусть  $u_0 \in K$ . Пусть для элемента  $x \in E$  можно указать такое  $t_1$ , что  $x \leq t_1 u_0$ . Тогда существует наименьшее  $t$ , при котором  $x \leq tu_0$ .

**Лемма 1.3.** Пусть  $u_0 \in K$ . Пусть для элемента  $x \in E$  можно указать такое  $t_1$ , что  $x \geq -t_1 u_0$ . Тогда существует такое наименьшее  $t$ , при котором  $x \geq -tu_0$ .

## § 2. Нормальные конусы

**1. Определения.** Конус  $K$  называется *нормальным*, если существует такое  $\delta > 0$ , что  $\|e_1 + e_2\| \geq \delta$  при  $e_1, e_2 \in K$  и  $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ . Конусы неотрицательных функций в рассмотренных выше примерах нормальны \*).

При изучении нормальных конусов будет использовано важное понятие  $u_0$ -нормы, которое, впрочем, будет применено далее и в других задачах.

Пусть  $u_0$  — некоторый фиксированный ненулевой элемент из конуса  $K$ . Элемент  $x \in E$  будем называть  $u_0$ -измеримым, если найдутся такие неотрицательные числа  $t_1$  и  $t_2$ , что

$$-t_1 u_0 \leq x \leq t_2 u_0. \quad (1.3)$$

Нижнюю грань чисел  $t_1$  обозначим через  $\alpha(x)$ , чисел  $t_2$  — через  $\beta(x)$ . В силу лемм 1.2 и 1.3

$$-\alpha(x) u_0 \leq x \leq \beta(x) u_0, \quad (1.4)$$

причем при всех  $t_1 > \alpha(x)$ ,  $t_2 > \beta(x)$  будут выполнены неравенства (1.3).

Совокупность всех  $u_0$ -измеримых элементов  $x \in E$  обозначим через  $E_{u_0}$ . Очевидно,  $E_{u_0}$  является линейным множеством; его можно превратить в нормированное пространство, если положить

$$\|x\|_{u_0} = \max \{ \alpha(x), \beta(x) \}. \quad (1.5)$$

Проверка аксиом нормы не представляет труда, и мы предоставляем ее читателю. Норму (1.5) в дальнейшем будем называть  $u_0$ -нормой.

Пусть элемент  $x^*$  удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_0 u_0 \leq x^* \leq \beta_0 u_0 \quad (\alpha_0, \beta_0 > 0).$$

Тогда каждый  $u_0$ -измеримый элемент  $x \in E$  будет  $x^*$ -измеримым и, наоборот, каждый  $x^*$ -измеримый элемент будет  $u_0$ -измерим. Таким образом, в рассматриваемом случае  $E_{u_0}$  и  $E_{x^*}$  состоят из одних и тех же элементов. Нетрудно видеть, что  $u_0$ -норма и  $x^*$ -норма при этом эквивалентны.

---

\*) Конус неотрицательных функций в пространстве  $C_1$  непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций  $x(t)$  с нормой

$$\|x(t)\|_{C_1} = \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)|$$

свойством нормальности не обладает.

## 2. Признак нормальности конуса.

Теорема 1.1. Для нормальности конуса  $K$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\|x\|_E \leq M \|x\|_y \|y\|_E \quad (x \in E_y, \quad y \in K, \quad y \neq 0), \quad (1.6)$$

где постоянная  $M$  не зависит ни от  $x$ , ни от  $y$ .

Доказательство. Пусть конус  $K$  нормален. Предположим, что нельзя найти такую постоянную  $M$ , при которой выполнено условие (1.6). Тогда можно указать такие последовательности  $x_n \in E_{y_n}$ ,  $y_n \in K$ , что

$$\|x_n\|_E \geq n \|x_n\|_{y_n} \|y_n\|_E \quad (n = 1, 2, \dots),$$

откуда вытекает, что

$$-\frac{y_n}{n \|y_n\|_E} \leq \frac{x_n}{\|x_n\|_E} \leq \frac{y_n}{n \|y_n\|_E}.$$

Следовательно, элементы

$$g_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_E} + \frac{y_n}{n \|y_n\|_E}, \quad h_n = -\frac{x_n}{\|x_n\|_E} + \frac{y_n}{n \|y_n\|_E}$$

принадлежат  $K$ . Из нормальности конуса вытекает, что

$$\left\| \frac{g_n}{\|g_n\|_E} + \frac{h_n}{\|h_n\|_E} \right\|_E \geq \delta \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где  $\delta$  — некоторое положительное число. Но непосредственный подсчет показывает, что

$$\frac{g_n}{\|g_n\|_E} + \frac{h_n}{\|h_n\|_E} = \frac{2y_n}{n \|y_n\|_E \|g_n\|_E} + \frac{\|g_n\|_E - \|h_n\|_E}{\|g_n\|_E \|h_n\|_E} h_n,$$

и так как

$$1 - \frac{1}{n} \leq \|g_n\|_E, \quad \|h_n\|_E \leq 1 + \frac{1}{n}, \quad \left| \|g_n\|_E - \|h_n\|_E \right| \leq \frac{2}{n},$$

то

$$\left\| \frac{g_n}{\|g_n\|_E} + \frac{h_n}{\|h_n\|_E} \right\|_E \leq \frac{4}{n-1},$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{g_n}{\|g_n\|_E} + \frac{h_n}{\|h_n\|_E} \right\|_E = 0.$$

Мы пришли к противоречию.

□

В обратную сторону теорема доказывается совсем просто. Пусть выполнено условие (1.6) и пусть  $x, y \in K$ ,  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Тогда

$$\|x\|_E \leq M \|x\|_{x+y} \|x + y\|_E. \quad (1.7)$$

Но  $0 \leq x \leq x + y$ , то есть  $\|x\|_{x+y} \leq 1$ . Поэтому

$$\|x\|_E \leq M \|x + y\|_E. \quad (1.8)$$

откуда следует, что

$$\|x + y\|_E \geq \frac{1}{M}.$$

Теорема доказана.

Неравенство (1.6), в частности, означает, что первоначальная норма в пространстве  $E$  всегда подчинена каждой  $u_0$ -норме, если только конус  $K$  нормален.

Если конус  $K$  не обладает свойством нормальности, то можно указать такой элемент  $u_0 \in K$ , что  $\|x\|_E$  не подчинена  $u_0$ -норме. Действительно, если  $K$  не обладает свойством нормальности, то можно построить такие последовательности

$$x_n, y_n \in K, \quad \|x_n\| = \|y_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

что

$$\|x_n + y_n\| \leq \frac{1}{n^3} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

положив тогда

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n(x_n + y_n),$$

получим очевидные неравенства

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{n} u_0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

из которых вытекает, что

$$\|x_n\|_{u_0} \leq \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \|x_n\|_E.$$

Построенный пример не противоречит тому, что при специальном выборе элемента  $u_0$  обычная норма будет подчинена  $u_0$ -норме, несмотря на то, что конус  $K$  не обладает свойством нормальности.

Изложенные в этом пункте соображения имеют простую геометрическую природу. Пусть  $T$  — центрально-симметричное

выпуклое множество в линейном пространстве  $E$ , причем  $T$  не содержит полностью ни одной прямой  $tx$  ( $-\infty < t < \infty$ ). Через  $E(T)$  обозначим совокупность таких элементов  $x \in E$ , что  $\frac{x}{\lambda} \in T$  при некотором  $\lambda > 0$ . Через  $\|x\|_T$  обозначим infimum таких  $\lambda > 0$ , при которых  $\frac{x}{\lambda} \in T$ . Можно проверить, что  $\|x\|_T$  удовлетворяет всем аксиомам нормы. Поэтому  $E(T)$  можно рассматривать как нормированное пространство.

Допустим, что рассматриваются два центрально-симметричных выпуклых множества  $T_1$  и  $T_2$ , причем  $T_1 \subset T_2$ . Из приведенного выше определения вытекает тогда, что  $E(T_1) \subset E(T_2)$ , причем

$$\|x\|_{T_2} \leq \|x\|_{T_1} \quad (x \in E(T_1)).$$

Если  $T_2 = kT_1$  (в том смысле, что  $T_2$  состоит из элементов вида  $kx$ , где  $x \in T_1$ ), то, очевидно,

$$E(T_2) = E(T_1)$$

и

$$\|x\|_{T_1} = k\|x\|_{T_2} = k\|x\|_{kT_1}.$$

Пусть теперь  $F_1$  и  $F_2$  — произвольные выпуклые центрально-симметричные множества. Из проведенных выше рассуждений вытекает, что включение  $F_1 \subset F_2$  влечет подчиненность нормы  $\|x\|_{F_2}$  норме  $\|x\|_{F_1}$ . Справедливо и обратное утверждение.

**3. Монотонные и полумонотонные нормы.** Норму в пространстве  $E$  с конусом  $K$  будем называть *полумонотонной*, если для любых элементов  $x, y \in K$  из  $x \leq y$  вытекает, что  $\|x\| \leq N\|y\|$ , где  $N$  — некоторое постоянное число.

Норму будем называть *монотонной*, если из  $0 \leq x \leq y$  вытекает неравенство  $\|x\| \leq \|y\|$ . Нетрудно видеть, что норма в пространствах  $C$  и  $L_p$  по отношению к полуупорядоченности, порожденной конусом неотрицательных функций, монотонна.

**Теорема 1.2.** *Полумонотонность нормы является необходимым и достаточным условием нормальности конуса.*

**Доказательство.** Пусть конус  $K$  нормален. Тогда для любых  $x, y \in K$ ,  $x \leq y$ , в силу теоремы 1.1

$$\|x\|_E \leq M \|x\|_y \cdot \|y\|_E \leq M \|y\|_E,$$

так как  $\|x\|_y \leq 1$ .

Пусть, наоборот, норма полумонотонна. Тогда  $\|x\| \leq N \|x + y\|$  при  $x, y \in K$  и, следовательно,  $\|x + y\| \geq \frac{1}{N}$  при  $x, y \in K$ ,  $\|x\| = \|y\| = 1$ .

Теорема доказана.

Как уже отмечалось, конусы неотрицательных функций в пространствах  $C$  и  $L_p$  нормальны, что можно проверить непосредственно. Нормальность этих конусов вытекает и из теоремы 1.2.

Выше (§ 1, п. 2) были введены в рассмотрение конусы  $K(F)$ . Эти конусы также нормальны (мы ниже получим этот факт как очевидное следствие теорем о правильных конусах).

Заметим еще, что теоремы 1.1 и 1.2 сохраняют силу, если рассматривать конусы в нормированных пространствах, не обладающих свойством полноты.

### § 3. Пространство $E_{u_0}$

**1. Примеры.** В п. 1 предыдущего параграфа были введены в рассмотрение  $u_0$ -нормы и пространство  $E_{u_0}$ . Приведем примеры.

Пусть  $E$  — это пространство  $L_p$  функций, суммируемых с  $p$ -й степенью ( $1 \leq p < \infty$ ) на ограниченном множестве  $\Omega$ ,  $K$  — конус неотрицательных функций. Выберем в качестве  $u_0$  функцию, тождественно равную 1. Тогда  $u_0$ -измеримыми будут все ограниченные по модулю функции, то есть  $E_{u_0}$  совпадает с  $L_\infty$ :

$$\|x\|_{u_0} = \|x(t)\|_{L_\infty} = \text{vrai max}_{t \in \Omega} |x(t)|. \quad (1.9)$$

Так как в рассматриваемом примере конус  $K$  нормален, то в силу теоремы 1.1

$$\|x\|_E \leq M \|x\|_{x_0};$$

впрочем, последнее неравенство вытекает и из (1.9):

$$\|x(t)\|_{L_p} \leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \|x(t)\|_{L_\infty}.$$

Пусть снова  $E = L_p$  и  $K$  — конус неотрицательных функций. Пусть  $u_0 = u_0(t) = |u_0(t)| \in L_{p_1}$ , где  $p_1 \geq p$ . Очевидно,  $u_0$ -измеримыми будут такие функции  $x(t)$ , для которых

$$|x(t)| \leq a u_0(t), \quad (1.10)$$

причем  $u_0$ -нормой будет наименьшее  $a$ , при котором выполнено неравенство (1.10). Для функций  $x(t)$ , удовлетворяющих неравенству (1.10), выполняется также очевидное неравенство

$$\|x(t)\|_{L_{p_1}} = \left\{ \int_{\Omega} |x(t)|^{p_1} dt \right\}^{\frac{1}{p_1}} \leq a \|u_0(t)\|_{L_{p_1}},$$

откуда следует, что

$$\|x(t)\|_{L_{p_1}} \leq \|u_0(t)\|_{L_{p_1}} \|x(t)\|_{u_0} \quad (x(t) \in E_{u_0}).$$

Таким образом, из сходимости по  $u_0$ -норме вытекает в рассматриваемом случае сходимость в  $L_{p_1}$  и тем более в самом  $L_p$ ; последнее заключение можно было бы получить и на основании теоремы 1.1.

В качестве последнего примера рассмотрим пространство  $C$  непрерывных на ограниченном замкнутом множестве  $\Omega$  функций с конусом  $K$  неотрицательных функций. Если  $u_0(t) \equiv 1$ , то  $u_0$ -норма будет обычной нормой пространства  $C$ . Если, например,  $\Omega = [0, 1]$  и  $u_0(t) = t(1-t)$ , то  $u_0$ -измеримыми будут такие функции  $x(t)$ , для которых

$$|x(t)| \leq at(1-t),$$

причем наименьшее  $a$  является  $u_0$ -нормой функции  $x(t)$ ; последовательность функций  $x_n(t)$  будет, очевидно, сходиться по  $u_0$ -норме, если функции  $\frac{x_n(t)}{t(1-t)}$  сходятся в  $L_\infty$ . Из сходимости по  $u_0$ -норме вытекает в силу теоремы 1.1 сходимость в пространстве  $C$ ; этот факт легко получить и непосредственно, так как

$$\|x(t)\|_C \leq \|x(t)\|_{u_0} \max_{[0, 1]} t(1-t) = \frac{1}{4} \|x(t)\|_{u_0}. \quad (1.11)$$

## 2. Полнота пространства $E_{u_0}$ .

**Теорема 1.3.** Пусть конус  $K$  нормален. Тогда пространство  $E_{u_0}$  полно по  $u_0$ -норме.

**Доказательство.** Пусть последовательность  $x_n \in E_{u_0}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) фундаментальна по  $u_0$ -норме.

В силу (1.6) эта последовательность будет фундаментальна и по обычной норме пространства  $E$  и, следовательно, найдется такой элемент  $x^*$ , что  $\|x_n - x^*\|_E \rightarrow 0$ . Фундаментальность последовательности  $x_n$  по  $u_0$ -норме означает, что при каждом  $n$

$$-\varepsilon_n u_0 \leq x_{n+m} - x_n \leq \varepsilon_n u_0 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получаем соотношения

$$-\varepsilon_n u_0 \leq x^* - x_n \leq \varepsilon_n u_0.$$

Следовательно,  $x^* \in E_{u_0}$  и  $\|x^* - x_n\|_{u_0} \leq \varepsilon_n$ .

Теорема доказана.

Допустим, что конус  $K$  телесен и  $u_0$  является внутренним элементом конуса. Обозначим тогда через  $\rho$  радиус шара с центром в  $u_0$ , лежащего полностью в  $K$ . Очевидно, для любого  $x \in E$  будет выполняться неравенство

$$-u_0 \leq \rho \frac{x}{\|x\|_E} \leq u_0.$$

откуда следует, что

$$-\frac{\|x\|_E}{\rho} u_0 \leq x \leq \frac{\|x\|_E}{\rho} u_0$$

$$\text{и } \|x\|_{u_0} \leq \frac{1}{\rho} \|x\|_E.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае  $u_0$ -норма подчинена обычной норме.

Нетрудно видеть, что справедливо и обратное утверждение: если  $E_{u_0} = E$  и  $u_0$ -норма подчинена обычной норме, то конус  $K$  телесен и  $u_0$  — внутренний элемент  $K$ .

**3. Конус  $K_{u_0}$ .** Введем обозначение  $K_{u_0} = K \cap E_{u_0}$ . Очевидно,  $K_{u_0}$  удовлетворяет условиям б и в определения конуса.

**Лемма 1.4.** Пусть  $x^* \in E_{u_0}$  и  $x^* \notin K$ . Тогда  $x^*$  не является предельным элементом для  $K_{u_0}$  по  $u_0$ -норме.

**Доказательство.** В предположении противного найдется такая последовательность  $x_n \in K$ , что  $-\frac{u_0}{n} \leq x_n - x^* \leq \frac{u_0}{n}$ . Тогда  $x^* + \frac{u_0}{n} \in K$  и  $x^* \in K$  в силу замкну-



тости  $K$ . Мы пришли к противоречию и этим лемма доказана.

Эта лемма означает, что  $K_{u_0}$  является замкнутым по  $u_0$ -норме множеством в  $E_{u_0}$ . Отсюда и из теоремы 1.3 вытекает, что  $K_{u_0}$  является конусом в банаховом пространстве  $E_{u_0}$ , если  $K$  является нормальным конусом в  $E$ .

Лемма 1.5.  *$u_0$ -норма монотонна на  $E_{u_0}$ .*

Доказательство. Пусть  $0 \leq x \leq y$ . Тогда

$$\theta \leq x \leq \|y\|_{u_0} u_0.$$

откуда следует, что  $\|x\|_{u_0} \leq \|y\|_{u_0}$ . Лемма доказана.

Подчеркнем, что в условиях леммы на конус  $K$  никакие ограничения не накладывались.

Из доказанных лемм вытекает, что  $K_{u_0}$  является нормальным конусом в пространстве  $E_{u_0}$ , если  $K$  нормален. При этом  $K_{u_0}$  является телесным конусом. Более общее утверждение приводится в следующем пункте.

4. **Конус  $\bar{K}_{u_0}$ .** Если конус  $K$  не обладает свойством нормальности, то  $E_{u_0}$  может не обладать свойством полноты по  $u_0$ -норме. Обозначим в этом случае через  $\bar{K}_{u_0}$  замыкание  $K_{u_0}$  в пространстве  $\bar{E}_{u_0}$ , полученном из  $E_{u_0}$  пополнением по  $u_0$ -норме \*). В силу леммы 1.4

$$\bar{K}_{u_0} \cap E_{u_0} = K_{u_0}.$$

Лемма 1.6.  *$\bar{K}_{u_0}$  является конусом.*

Доказательство. Условие б (см. стр. 13) определения конуса вытекает из справедливости этого же свойства для  $K_{u_0}$  при помощи предельного перехода.

Покажем, что выполнено свойство в. В предположении противного существуют такие последовательности  $x_n, y_n \in K_{u_0}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), что

$$\|x_n - x^*\|_{u_0} \rightarrow 0, \quad \|y_n + x^*\|_{u_0} \rightarrow 0,$$

---

\*) Если  $E = C_1$  (см. сноску на стр. 17) и  $u_0(t) \equiv 1$ , то  $E_{u_0}$  не обладает свойством полноты по  $u_0$ -норме, совпадающей с нормой в пространстве  $C$ . Пополнение до  $\bar{E}_{u_0}$  можно произвести, присоединяя к  $E_{u_0}$  все непрерывные функции.

где  $x^* \in \bar{E}_{u_0}$ ,  $\|x^*\|_{u_0} > 0$ . Отсюда

$$\|x_n + y_n\|_{u_0} \rightarrow 0.$$

и в силу леммы 1.5

$$\|x_n\|_{u_0} \rightarrow 0, \quad \|y_n\|_{u_0} \rightarrow 0.$$

Но тогда  $x^* = 0$ , и мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Определим в пространстве  $\bar{E}_{u_0}$  полуупорядоченность при помощи конуса  $\bar{K}_{u_0}$ . Напомним, что  $\bar{E}_{u_0} = E_{u_0}$  и  $\bar{K}_{u_0} = K_{u_0}$ , если конус  $K$  нормален.

В силу леммы 1.4 полуупорядоченность, определенная на  $E_{u_0}$  при помощи конуса  $\bar{K}_{u_0}$ , совпадает с той полуупорядоченностью, которая была введена при помощи конуса  $K$ .

**Теорема 1.4.** *Конус  $\bar{K}_{u_0}$  нормален и телесен в пространстве  $E_{u_0}$ ;  $u_0$ -норма монотонна по отношению к полуупорядоченности, определенной конусом  $\bar{K}_{u_0}$ .*

**Доказательство.** Если  $\|x - u_0\|_{u_0} \leq 1$  и  $x \in E$ , то  $-u_0 \leq x - u_0 \leq u_0$ , откуда  $x \geq 0$ , то есть  $x \in K_{u_0}$ . Предельным переходом приходим к выводу, что шар единичного радиуса по  $u_0$ -норме с центром в точке  $u_0$  полностью лежит в  $\bar{K}_{u_0}$ . Телесность конуса  $\bar{K}_{u_0}$  доказана.

Докажем теперь, что  $u_0$ -норма монотонна. Отсюда в силу теоремы 1.2 будет вытекать нормальность конуса  $\bar{K}_{u_0}$ .

Пусть  $x \leq y$ , где  $x$  и  $y$  — произвольные элементы из  $\bar{K}_{u_0}$ .

Элементы  $x + \frac{u_0}{n}$  и  $y + \frac{u_0}{n}$  будут внутренними точками конуса  $\bar{K}_{u_0}$ . Поэтому при каждом фиксированном  $n$  можно построить такие элементы  $x_n$  и  $y_n$  из  $K_{u_0}$ , что

$$\left\|x + \frac{u_0}{n} - x_n\right\|_{u_0} < \frac{1}{n}, \quad \left\|y + \frac{u_0}{n} - y_n\right\|_{u_0} < \frac{1}{n}. \quad (1.12)$$

Из последних неравенств, очевидно, вытекает, что

$$-\left(x + \frac{u_0}{n} - x_n\right) \leq \frac{u_0}{n}, \quad y + \frac{u_0}{n} - y_n \leq \frac{u_0}{n}, \quad (1.13)$$

причем в последних соотношениях полуупорядоченность определена конусом  $\bar{K}_{u_0}$ . Из (1.13) и из  $x \leq y$  вытекает, что

$$\begin{aligned} x_n &= x - \left( x + \frac{u_0}{n} - x_n \right) + \frac{u_0}{n} \leq x + \frac{2u_0}{n} \leq \\ &\leq y + \frac{2u_0}{n} = y_n + \left( y + \frac{u_0}{n} - y_n \right) + \frac{u_0}{n} \leq y_n + \frac{2u_0}{n}, \end{aligned}$$

причем  $x_n$  и  $y_n + \frac{2u_0}{n}$  являются элементами  $K_{u_0}$ , в силу чего  $y_n + \frac{2u_0}{n} - x_n \in K_{u_0}$ .

Отсюда следует неравенство

$$0 \leq x_n \leq \left( \|y_n\|_{u_0} + \frac{2}{n} \right) u_0.$$

то есть

$$\|x_n\|_{u_0} \leq \|y_n\|_{u_0} + \frac{2}{n}.$$

Но тогда в силу (1.12)

$$\begin{aligned} \|x\|_{u_0} &\leq \|x_n\|_{u_0} + \left\| x + \frac{u_0}{n} - x_n \right\|_{u_0} + \frac{1}{n} \leq \\ &\leq \|y_n\|_{u_0} + \frac{4}{n} \leq \|y\|_{u_0} + \frac{6}{n}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Переходя к пределу в (1.14) при  $n \rightarrow \infty$ , получим неравенство

$$\|x\|_{u_0} \leq \|y\|_{u_0}.$$

Теорема доказана.

## § 4. Линейные положительные функционалы

**1. Положительные функционалы.** Функционал  $f(x)$ , определенный на конусе  $K$  (или на его части), называется *положительным*, если  $f(x) \geq 0$  при  $x \in K$ . Функционал  $f(x)$  называется *монотонным*, если  $f(x_1) \leq f(x_2)$  при  $x_1 \leq x_2$  ( $x_1, x_2 \in K$ ).

Простейшим примером монотонного функционала в случае пространств с монотонной нормой является норма элемента. В силу теоремы 1.4 монотонным функционалом на  $K_{u_0}$  является  $u_0$ -норма.

Наиболее важным классом положительных функционалов являются линейные положительные функционалы, то есть такие определенные на всем пространстве  $E$  функционалы  $f(x)$ , что

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

и

$$f(x) \geq 0 \quad (x \in K).$$

Каждый линейный положительный функционал очевидным образом монотонен.

Напомним некоторые общие теоремы о линейных функционалах в банаховых пространствах.

Пусть  $f(x)$  — линейный непрерывный функционал, определенный на  $E$ . Через  $G\{f=c\}$  обозначим гиперплоскость, состоящую из таких  $x \in E$ , что  $f(x)=c$ . Гиперплоскость  $G\{f=c\}$  разбивает все пространство на два замкнутых полупространства  $E\{f \geq c\}$  и  $E\{f \leq c\}$ , на которых функционал  $f(x)$  принимает соответственно значения, не меньшие чем  $c$  и не большие чем  $c$ . Гиперплоскость  $G\{f=c\}$  принадлежит при этом обоим полупространствам. Имеет место формула

$$|f(x) - c| = \|f\| \rho(x, G\{f=c\}), \quad (1.15)$$

которая аналогична обычной формуле аналитической геометрии, по которой определяется расстояние от точки до плоскости. Пусть  $T_1$  и  $T_2$  — два выпуклых множества. Предположим, что  $T_1$  телесно, то есть имеет внутренние точки, причем все внутренние точки множества  $T_1$  не принадлежат  $T_2$ . Оказывается, что в этом случае можно построить такую гиперплоскость  $G$ , что выпуклые множества  $T_1$  и  $T_2$  будут лежать в разных замкнутых полупространствах, на которые делит пространство  $E$  гиперплоскость  $G$ . Аналитически последнее утверждение можно формулировать так: существует такой линейный непрерывный функционал  $f(x)$ , что  $f(x) \geq c$  при  $x \in T_1$  и  $f(x) \leq c$  при  $x \in T_2$ . В силу (1.15) значения функционала  $f(x)$  будут отличны от  $c$ , если  $x$  является внутренней точкой  $T_1$ .

Пусть  $K$  — конус в  $E$ . Если  $x_0 \notin K$ , то в силу замкнутости  $K$  найдется такой шар  $\|x - x_0\| < \rho$ , который не имеет общих точек с  $K$ . В силу сформулированного выше утверждения найдется такой линейный непрерывный функционал  $f(x)$ , что  $f(x) \geq c$  при  $x \in K$ , где  $c$  — некоторая

постоянная. Но тогда  $f(nx) \geq c$  при любом  $n$ , то есть

$$f(x) \geq \frac{c}{n},$$

откуда вытекает, что

$$f(x) \geq 0.$$

Таким образом, *существуют линейные положительные функционалы.*

Оказывается, что имеет место более сильное утверждение: для каждого  $x_0 \in K$  ( $x \neq \theta$ ) можно указать такой положительный линейный непрерывный функционал  $f(x)$ , что  $f(x_0) > 0$ .

Если пространство  $E$  сепарабельно, то можно построить такой линейный непрерывный функционал  $f(x)$ , что  $f(x_0) > 0$  для всех  $x \in K$ ,  $x \neq \theta$ .

Отметим еще один факт. Если конус  $K$  телесен, то из положительности аддитивного однородного функционала вытекает его непрерывность \*).

**2. Равномерно положительные функционалы.** Положительный линейный функционал  $f(x)$  назовем *равномерно положительным*, если существует такое положительное  $a$ , что

$$f(x) \geq a \|x\| \quad (x \in K). \quad (1.16)$$

В пространстве  $L$  суммируемых на некотором множестве  $\Omega$  функций с конусом  $K$  неотрицательных функций равномерно положительным будет функционал

$$f(x) = \int_{\Omega} x(t) dt,$$

так как  $f(x) = \|x\|$  при  $x \in K$ .

В пространствах  $L_p$ , где  $p > 1$ , нет равномерно положительных (на конусе  $K$  неотрицательных функций) линейных функционалов. Предположим противное — предположим, что для некоторого функционала  $f(x)$  выполнено условие (1.16). Разобьем множество  $\Omega$  на  $n$  частей  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  одина-

---

\*) Доказательства утверждений, приведенных в этом пункте, читатель может найти в статье М. Г. Крейна и М. А. Рутмана [1]. Последнее утверждение пункта допускает обобщение: из положительности аддитивного однородного функционала вытекает его непрерывность, если конус воспроизводящий (см. сноску на стр. 65).

ковой меры и определим функцию  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  равенством

$$x_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } t \in \Omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ 0, & \text{если } t \notin \Omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Очевидно,

$$\|x_i(t)\|_{L_p} = (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда в силу (1.16)

$$f(x_i) \geq a (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$f(x^*) = f\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \sum_{i=1}^n x_i\right) \geq a n^{1-\frac{1}{p}} (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}}.$$

где  $x^*(t) \equiv 1$ . Последнее неравенство противоречит конечности  $f(x^*)$ . В пространстве  $C$  непрерывных функций также нет равномерно положительных линейных функционалов по отношению к конусу неотрицательных функций). Нетрудно дать прямое доказательство этого утверждения. Далее оно будет получено как простое следствие общих теорем.

**3. Конусы, допускающие оштукатуривание.** Будем говорить, что конус  $K$  допускает оштукатуривание  $K_1$ , если можно указать такой конус  $K_1$ , что каждый ненулевой элемент  $x_0 \in K$  является внутренней точкой конуса  $K_1$  и, более того, лежит в конусе  $K_1$  вместе с шаровой окрестностью радиуса  $b\|x_0\|$ , где  $b$  не зависит от элемента  $x_0$ . Конус  $K_1$  мы иногда будем именовать оштукатуренным конусом  $K$ .

**Теорема 1.5.** Для того чтобы на конусе  $K$  можно было определить равномерно положительный линейный функционал, необходимо и достаточно, чтобы конус  $K$  допускал оштукатуривание.

**Доказательство.** В одну сторону утверждение почти очевидно. Действительно, если  $K$  допускает оштукатуривание  $K_1$ , то каждый положительный на  $K_1$  функционал  $f(x)$  будет равномерно положительным на  $K$ , ибо в силу (1.15)

$$f(x_0) \geq b\|x_0\| \|f\| \quad (x_0 \in K).$$

В обратную сторону теорема доказывается несколько сложнее.

Пусть  $f(x)$  — равномерно положительный на  $K$  линейный функционал и пусть

$$f(x) \geq a \|x\| \quad (x \in K). \quad (1.17)$$

Обозначим через  $N$  множество точек  $x$ , в которых  $f(x) = 1$ . Множество  $M = K \cap N$  будет выпуклым и в силу (1.17) ограниченным. Пусть  $x^*$  — некоторый фиксированный элемент из  $M$ . Через  $F$  обозначим совокупность таких  $x \in N$ , что  $\|x - x^*\| \leq 2\rho$ , где  $\rho$  — настолько большое фиксированное положительное число, что из

$$\|x - x_1\| \leq \rho \quad (x_1 \in M, \quad x \in N)$$

вытекает принадлежность  $x$  множеству  $F$ . Далее построим конус  $K_1 = K(F)$  (см. стр. 14) элементов  $u$ , допускающих представление  $u = tx$ , где  $t \geq 0$  и  $x \in F$ . Покажем, что  $K_1$  является оштукатуриванием конуса  $K$ .

Пусть действительно  $x_0 \in K$  и

$$\|h\| \leq \frac{\rho a^2}{2\|f\| + \rho a \|f\|} \|x_0\|. \quad (1.18)$$

Покажем, что  $x_0 + h \in K_1$ . Для этого достаточно показать, что

$$\left\| \frac{x_0 + h}{f(x_0 + h)} - \frac{x_0}{f(x_0)} \right\| \leq \rho, \quad (1.19)$$

так как элементы  $\frac{x_0 + h}{f(x_0 + h)}$  и  $\frac{x_0}{f(x_0)}$  очевидным образом принадлежат  $N$ , причем второй из них принадлежит  $M$ . Неравенство (1.19) эквивалентно неравенству

$$\|f(x_0)h - f(h)x_0\| \leq \rho f(x_0)[f(x_0) + f(h)],$$

которое вытекает из (1.17) и (1.18), так как

$$\|f(x_0)h - f(h)x_0\| \leq 2\|f\|\|x_0\|\|h\| \leq \frac{2\rho a^2\|x_0\|^2}{2 + \rho a}$$

и

$$\begin{aligned} \rho f(x_0)[f(x_0) + f(h)] &\geq \rho a\|x_0\|(a\|x_0\| - \|f\|\|h\|) \geq \\ &\geq \rho a\|x_0\|^2 \left( a - \frac{\rho a^2}{2 + \rho a} \right) = \frac{2\rho a^2\|x_0\|^2}{2 + \rho a}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Будем говорить, что конус  $K$  локально компактен, если компактно каждое ограниченное множество  $F \subset K$ . Очевидно, каждый локально компактный конус лежит в некото-

ром сепарабельном подпространстве  $E_1 \subset E$ . Поэтому может быть определен положительный линейный функционал  $f(x)$ , удовлетворяющий условию

$$f(x) > 0 \quad (x \in K, \quad x \neq \theta).$$

Этот функционал равномерно положителен, так как  $f(x) \geq a \|x\|$ , где

$$a = \min_{x \in K, \|x\|=1} f(x) > 0.$$

Из теоремы 1.5 вытекает тогда, что *каждый локально компактный конус допускает оштукатуривание*.

Отметим еще одно свойство конусов, допускающих оштукатуривание.

Напомним, что последовательность  $x_n \in E$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) называется *слабо сходящейся в себе*, если для любого линейного функционала  $f(x) \in E^*$  числовая последовательность  $f(x_n)$  сходится. Последовательность  $x_n$  *слабо сходится* к элементу  $x^*$ , если  $f(x_n) \rightarrow f(x^*)$  при всех  $f \in E^*$ .

**Лемма 1:7.** Пусть конус  $K$  допускает оштукатуривание. Пусть последовательность нормированных элементов  $x_n$ ,  $\|x_n\| = 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), принадлежащих конусу  $K$ , слабо сходится к некоторому элементу  $x^*$ . Тогда

$$x^* \neq \theta.$$

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  — равномерно положительный на  $K$  линейный функционал. Тогда

$$f(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq a \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = a,$$

откуда следует, что  $\|x^*\| \geq \frac{a}{\|f\|}$ . Лемма доказана.

Для нормальных конусов утверждение леммы неверно. Пусть, например,  $K$  — это конус неотрицательных функций в пространстве  $L_p = L_p(\Omega)$  ( $1 < p < \infty$ ). Рассмотрим такую последовательность множеств  $\Omega_n \subset \Omega$ , что

$$\text{mes } \Omega_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и положим

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } t \in \Omega_n, \\ 0, & \text{если } t \notin \Omega_n. \end{cases}$$



Очевидно,  $\|x_n(t)\| = 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). В то же время последовательность  $x_n(t)$  слабо сходится к нулю, так как для любой функции  $v(t) \in L_q$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) в силу неравенства Гёльдера

$$|(x_n, v)| = \left| \int_a x_n(t) v(t) dt \right| = \left| \int_{a_n} n^{\frac{1}{p}} v(t) dt \right| \leq \\ \leq \left\{ \int_{a_n} |v(t)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}$$

и из абсолютной непрерывности интеграла

$$\int_a |v(t)|^q dt$$

вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, v) = 0.$$

**4. Пример конуса, допускающего оштукатуривание.** Пусть  $F$  — ограниченное замкнутое и выпуклое множество, не содержащее нуля пространства  $E$ . Покажем, что конус  $K(F)$  допускает оштукатуривание. Для доказательства построим гиперплоскость  $f(x) = c$ , разделяющую выпуклое множество  $F$  и непересекающийся с  $F$  шар  $\|x\| \leq \rho$ , где  $\rho$  — некоторое фиксированное число. Без ограничения общности можно считать, что  $c > 0$ . Из определения конуса  $K(F)$  вытекает, что для каждого ненулевого  $x \in K(F)$  можно найти такое положительное  $t$ , что  $\frac{tx}{\|x\|} \in F$ , при этом из ограниченности  $F$  вытекает, что числа  $t$  равномерно ограничены некоторым положительным числом  $\gamma$ . Тогда из неравенства  $f\left(\frac{tx}{\|x\|}\right) > c$  вытекает, что

$$f(x) \geq \frac{c}{\gamma} \|x\| \quad (x \in K(F)).$$

Итак, функционал  $f(x)$  равномерно положителен. В силу теоремы 1.5 конус  $K(F)$  допускает оштукатуривание.

Один частный класс конусов  $K(F)$  используется далее в гл. 6 (§ 4).

Пусть в  $E$  выделено подпространство  $E_0$ , дефект которого равен 1. Это значит, что существует такой элемент  $h_0 \in E$  ( $\|h_0\| = 1$ ), что каждый элемент  $x \in E$  допускает единственное представление вида

$$x = x' + \xi(x) h_0 \quad (x' \in E_0),$$

где  $\xi(x)$  — линейный функционал. Обозначим через  $P$  линейный оператор проектирования на  $E_0$ , определенный равенством

$$Px = x' = x - \xi(x) h_0 \quad (x \in E).$$

Через  $K(h_0, \rho)$  обозначим совокупность элементов  $x \in E$ , для которых выполняются неравенства

$$\xi(x) \geq 0, \quad \|Px\| \leq \rho \xi(x). \quad (1.20)$$

Нетрудно видеть, что  $K(h_0, \rho)$  является конусом  $K(\bar{F})$ , где  $\bar{F}$  — совокупность таких  $x \in E$ , что  $\xi(x) = 1$  и  $\|Px\| \leq \rho$ . Поэтому каждый конус  $K(h_0, \rho)$  ( $0 < \rho < \infty$ ) допускает оштукатурирование.

Интересные примеры конусов, допускающих оштукатурирование, дают совокупности выпуклых неотрицательных функций.

Пусть, например,  $\Omega$  — ограниченная выпуклая область в двумерной плоскости. Через  $K$  обозначим совокупность выпуклых на  $\bar{\Omega}$  функций, обращающихся на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  в нуль; эта совокупность является конусом. Конус  $K$  допускает оштукатурирование, так как значение функции в некоторой фиксированной внутренней точке области  $\Omega$  является равномерно положительным на  $K$  линейным функционалом.

## § 5. Правильные конусы

**1. Определения.** В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о том, какие дополнительные условия гарантируют существование предела у монотонной последовательности  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) элементов пространства  $E$ , полуупорядоченного при помощи конуса  $K$ . Мы ограничимся случаем, когда последовательность  $x_n$  не убывает:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \quad (1.21)$$

Последовательность (1.21) назовем *ограниченной*, если

существует такой элемент  $u$ , что

$$x_n \leq u \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.22)$$

Следует сразу подчеркнуть, что из ограниченности последовательности (1.21) не вытекает ее сходимости. Так, например, последовательность функций

$$x_n(t) = 1 - t^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.23)$$

удовлетворяет условию (1.21), если ее рассматривать в пространстве  $C$  непрерывных на  $[0, 1]$  функций, полуупорядоченном при помощи конуса неотрицательных функций. Эта последовательность очевидным образом ограничена. В то же время последовательность (1.23) в  $C$  не имеет предела.

Однако существуют такие пространства, в которых из (1.21) и (1.22) вытекает сходимость по норме. Если, например,  $E$  — это пространство  $L_p$ , полуупорядоченное при помощи конуса неотрицательных функций, то для каждой неубывающей ограниченной последовательности функций  $x_n(t)$  (ограниченной в смысле (1.22)) функция

$$x^*(t) = \sup_n x_n(t) \quad (t \in \Omega) \quad (1.24)$$

также будет принадлежать  $L_p(\Omega)$ . Последовательность  $x_n(t)$  по мере сходится к  $x^*(t)$  и в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|_{L_p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega} |x_n(t) - x^*(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} = 0,$$

то есть последовательность  $x_n(t)$  имеет предел в  $L_p$ .

Приведенные примеры дают повод выделить класс пространств, в которых каждая ограниченная монотонная последовательность имеет предел. Такие пространства будем называть в дальнейшем *правильно полуупорядоченным*. Конус, который порождает правильную полуупорядоченность, будем называть *правильным*.

## 2. Связь между правильностью и нормальностью конуса.

**Теорема 1.6.** *Каждый правильный конус нормален.*

**Доказательство.** Допустим, что конус  $K$  не обладает свойством нормальности. Тогда можно указать такие после-

довательности  $x_n \in K$ ,  $y_n \in K$ , что

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \quad \|x_n + y_n\| < \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.25)$$

Ряд

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n) + \dots$$

в силу (1.25) сходится; его сумму обозначим через  $u$ . Определим последовательность  $z_n$  при помощи формулы

$$z_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Очевидно,

$$\|z_{n+1} - z_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Последовательность  $z_n$  монотонна и ограничена, так как

$$z_n \leq (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n) \leq u.$$

Однако эта последовательность в силу (1.25) не сходится по норме пространства  $E$ . Таким образом, конус  $K$  не обладает свойством правильности.

Теорема доказана.

Обратное теореме 1.6 утверждение неверно. Нормальный конус может не обладать свойством правильности (конус неотрицательных функций в пространстве  $C$ ).

**3. Вполне правильные конусы.** Последовательность  $x_n$  называется *ограниченной по норме*, если

$$\|x_n\| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где  $M$  — некоторое число. Конус  $K$  назовем *вполне правильным*, если каждая монотонная ограниченная по норме последовательность сходится (по норме) к некоторому предельу. Это определение оправдывается следующей теоремой:

**Теорема 1.7.** *Каждый вполне правильный конус является правильным конусом.*

**Доказательство.** Покажем вначале, что каждый вполне правильный конус нормален. Предположим противное. Тогда найдутся такие последовательности  $e_n, g_n \in K$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), что

$$\|e_n\| = \|g_n\| = 1, \quad \|e_n + g_n\| < \frac{1}{2^n}.$$

Последовательность

$$h_k = \begin{cases} e_1 + g_1 + e_2 + g_2 + \dots + e_n + g_n, & \text{если } k = 2n, \\ e_1 + g_1 + e_2 + g_2 + \dots + e_n + g_n + e_{n+1}, & \text{если } k = 2n + 1, \end{cases}$$

очевидным образом монотонна, то есть

$$h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_n \leq \dots,$$

и ограничена по норме: при  $k = 2n$

$$\begin{aligned} \|h_k\| &\leq \|e_1 + g_1\| + \|e_2 + g_2\| + \dots + \|e_n + g_n\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} < 1 \end{aligned}$$

и при  $k = 2n + 1$

$$\|h_k\| \leq \|e_1 + g_1\| + \dots + \|e_n + g_n\| + \|e_{n+1}\| < 2.$$

В то же время последовательность  $h_k$  не сходится по норме, ибо  $\|h_{k+1} - h_k\| = 1$ . Таким образом, конус  $K$  не обладает свойством полной правильности — мы пришли к противоречию.

Пусть теперь монотонная последовательность

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$$

ограничена в смысле полуупорядоченности:

$$x_n \leq y \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Последовательность  $x_n - x_1$  также будет неубывающей и ограниченной элементом  $y - x_1$ . В силу теоремы 1.1 последовательность норм элементов  $x_n - x_1$  будет ограниченной, так как уже доказана нормальность конуса  $K$ . Из полной правильности конуса вытекает, что последовательность  $x_n - x_1$  сходится по норме. Отсюда следует, что и последовательность  $x_n$  сходится по норме.

Теорема доказана.

В следующем параграфе будет показано, что в некоторых пространствах конус неотрицательных функций правилен, но не обладает свойством полной правильности. В настоящем и следующем пунктах будут приведены достаточные условия, при выполнении которых из правильности конуса вытекает его полная правильность.

**Теорема 1.8.** *Если правильный конус  $K$  телесен, то он вполне правилен.*

**Доказательство.** Очевидно, достаточно показать, что каждая ограниченная по норме последовательность ограничена в смысле полуупорядоченности.

Пусть  $u_0$  — внутренний элемент конуса  $K$ , входящий в  $K$  вместе с шаром радиуса  $\rho$ . Из того, что  $u_0 - \rho \frac{x}{\|x\|} \in K$  при всех  $x \in E$  ( $x \neq \theta$ ), вытекает неравенство

$$x \leq \frac{\|x\|}{\rho} u_0.$$

Теорема доказана.

**4. Сопряженный конус.** Линейное нормированное пространство  $E^*$  всех линейных непрерывных на  $E$  функционалов называется *сопряженным к  $E$  пространством*.

Положительные на конусе  $K$  линейные функционалы образуют также конус, если  $K$  воспроизводящий \*). Конус положительных функционалов называют сопряженным конусом и обозначают через  $K^*$ .

Имеет место следующая теорема М. Г. Крейна: *конус  $K$  нормален тогда и только тогда, когда конус  $K^*$  воспроизводящий*.

Пространство  $E$  называется *слабо полным*, если каждая слабо сходящаяся в себе последовательность имеет слабый предел. Пространства  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) слабо полны.

**Теорема 1.9.** *Пусть пространство  $E$  слабо полно. Тогда каждый правильный конус  $K$  вполне правилен.*

**Доказательство.** Как и при доказательстве предыдущей теоремы, достаточно показать, что неубывающая ограниченная по норме последовательность ограничена и в смысле полуупорядоченности.

Пусть

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$$

и

$$\|x_n\| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда для каждого положительного линейного функционала  $f(x)$  последовательность  $f(x_n)$  сходится. Из сформулиро-

---

\*) Достаточно, чтобы замыкание линейной оболочки конуса  $K$  совпадало с  $E$ . Это предположение обеспечивает свойство  $\beta$  в определении конуса. Свойства  $\alpha$  и  $\beta$  очевидны.

ванной выше теоремы М. Г. Крейна вытекает, что любой функционал  $l(x)$  из  $E^*$  представим в виде разности

$$l(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

двух положительных функционалов. Поэтому для любого линейного функционала  $l(x)$  последовательность чисел  $l(x_n)$  сходится. Из слабой полноты пространства  $E$  вытекает, что последовательность  $x_n$  слабо сходится к некоторому элементу  $x^* \in E$ .

Пусть  $f(x)$  — снова положительный функционал. Очевидно,

$$f(x_n) \leq f(x^*) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поэтому

$$x_n \leq x^* \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Теорема доказана.

**5. Дополнительные замечания.** Если конус  $K$  не обладает свойством правильности, то для сходимости монотонной последовательности недостаточно ее ограниченности; в этом случае приходится применять дополнительные ограничения.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться, например, тем фактом, что *компактные монотонные последовательности имеют предел*. Для доказательства этого утверждения нужно, во-первых, заметить, что пределы всех сходящихся подпоследовательностей монотонной последовательности совпадают и, во-вторых, компактная последовательность сходится, если пределы всех ее подпоследовательностей одинаковы.

В заключение отметим, что правильный в пространстве  $E$  конус  $K$  может потерять свое свойство быть правильным при переходе к пространству  $E_{u_0}$ . Иначе говоря, ограниченная монотонная последовательность  $u_0$ -измеримых элементов может не сходиться по  $u_0$ -норме. Приведем пример подобной ситуации. Пусть  $E$  — это пространство  $L_p(\Omega)$ ,  $\Omega = [0, 1]$ , с конусом  $K$  неотрицательных функций, и пусть  $u_0(t) \equiv 1$ . Конус  $K$ , как уже отмечалось, обладает свойством правильности. Последовательность функций (1.23) принадлежит  $E_{u_0} = L_\infty$ , монотонна и ограничена, но по  $u_0$ -норме не сходится.

## § 6. Признаки правильности конуса

**1. Строго растущие функционалы.** Положительный (не обязательно линейный) функционал  $f(x)$  будем называть *строго растущим*, если для любых  $x_n \in K$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) из

$$\|x_n\| \geq \varepsilon_0 > 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \infty. \quad (1.26)$$

Простейшими примерами строго растущих функционалов могут служить линейные равномерно положительные функционалы (если они существуют), то есть такие линейные функционалы  $f(x)$ , что

$$f(x) \geq a \|x\| \quad (x \in K).$$

В пространстве  $L_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) строго растущим функционалом является  $p$ -я степень нормы элемента

$$f(x) = \int_a^b |x(t)|^p dt.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться неравенством

$$(\alpha + \beta)^p \geq \alpha^p + \beta^p \quad (\alpha, \beta \geq 0)^*), \quad (1.27)$$

в силу которого для любых неотрицательных функций  $x(t)$ ,  $y(t) \in L_p$

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y).$$

Напомним, что функционал  $f(x)$  называется *монотонным*, если из  $x \leq y$  вытекает, что  $f(x) \leq f(y)$ .

### 2. Основные признаки.

**Теорема 1.10.** Пусть на конусе  $K$  определен строго растущий и ограниченный на каждом шаре функционал  $f(x)$ . Тогда конус  $K$  вполне правилен.

**Доказательство.** В предположении противного найдется такая не сходящаяся по норме последовательность  $x_n \in K$ , что

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \quad (1.28)$$

---

\*) Для доказательства (1.27) достаточно проинтегрировать очевидное неравенство  $p(1+t)^{p-1} \geq pt^{p-1}$  ( $t \geq 0$ ) в пределах от 0 до  $\beta/\alpha$ .



и

$$\|x_n\| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.29)$$

Мы будем считать, что  $\|x_1\| \geq \epsilon_0$ ,  $\|x_{n+1} - x_n\| \geq \epsilon_0 > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), так как в противном случае можно перейти к подпоследовательности, обладающей этим свойством.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f \left[ x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \right] = \infty,$$

а это противоречит ограниченности  $f(x)$  на шаре  $\|x\| \leq M$ .

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, в частности, что конусы неотрицательных функций в пространствах  $L_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) вполне правильны.

**Теорема 1.11.** Пусть на конусе  $K$  определен монотонный строго растущий функционал. Тогда конус  $K$  правилен.

**Доказательство.** В предположении противного найдется такая последовательность  $x_n \in K$ , что выполнены неравенства (1.28) и неравенства

$$x_n \leq z \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.30)$$

Как и при доказательстве теоремы 1.10, приходим к равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty,$$

которое противоречит неравенствам

$$f(x_n) \leq f(z) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Теорема доказана.

**3. Примеры правильных, но не вполне правильных конусов \*).** Пусть  $M(u)$  — некоторая  $N$ -функция, то есть выпуклая функция, представимая в виде

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt,$$

---

\*) Подробное изложение тех фактов теории пространств Орлича, которые используются в настоящем пункте, см. в книге М. А. Красносельского и Я. Б. Рунцкого [1].

где положительная при  $t > 0$  функция  $p(t)$  непрерывна справа и монотонна, причем

$$\lim_{t \rightarrow +0} p(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \infty.$$

Через  $N(v)$  обозначают сопряженную  $M(u)$ -функцию, определенную равенством

$$N(v) = \int_0^{|v|} q(s) ds,$$

где

$$q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t.$$

Примерами  $N$ -функций могут служить функции

$$\frac{1}{p} |u|^p \quad (1 < p < \infty), \quad |u|^p (|\ln |u|| + 1) \quad (1 < p < \infty), \\ e^{|u|} - |u| - 1, \quad e^{u^2} - 1.$$

Важную роль в теории выпуклых функций играет так называемое  $\Delta_2$ -условие Юнга; говорят, что  $M(u)$  удовлетворяет этому условию, если существуют такие  $k$  и  $a$ , что при всех  $u \geq 0$

$$M(2u) \leq kM(u) + a.$$

Из приведенных выше примеров две первые  $N$ -функции удовлетворяют  $\Delta_2$ -условию, две последние не удовлетворяют.

Через  $L_M^* = L_M^*(\Omega)$  обозначают совокупность всех функций  $x(t)$ , измеримых на  $\Omega$ , для которых

$$\int_{\Omega} x(t) y(t) dt < \infty$$

при любой такой  $y(t)$ , что

$$\rho(y; N) = \int_{\Omega} N[y(t)] dt < \infty.$$

Множество  $L_M^*$  обращается в полное банахово пространство, если положить

$$\|x(t)\| = \sup_{\rho(y; N) \leq 1} \int_{\Omega} x(t) y(t) dt.$$

Пространство  $L_M^*$  называют *пространством Орлича*.

Пространство  $L_M^*$  вместе с каждой функцией  $x(t)$  содержит функцию  $|x(t)|$ . Отсюда вытекает, что совокупность неотрицательных функций образует воспроизводящий конус в  $L_M^*$ . Этот конус нормален, так как из  $0 \leq x(t) \leq y(t)$  (то есть из выполнения почти при всех  $t \in \Omega$  неравенства  $0 \leq x(t) \leq y(t)$ ) вытекает, что

$$\|x(t)\| \leq \|y(t)\|.$$

**01.** Если  $M(u)$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то конус  $K$  неотрицательных функций в  $L_M^*$  вполне правилен.

Доказательство. Если  $M(u)$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то  $L_M^*$  состоит из тех функций  $x(t)$ , для которых

$$F(x) = \int_{\Omega} M[x(t)] dt < \infty.$$

Покажем, что функционал  $F(x)$  строго возрастает на  $K$  и ограничен на каждом шаре; тогда утверждение **01** будет следовать из доказанных выше общих теорем.

Для каждой  $N$ -функции при  $u_1, u_2 \geq 0$  выполняется неравенство

$$M(u_1 + u_2) \geq M(u_1) + M(u_2).$$

Поэтому для любых неотрицательных функций  $h_1(t), \dots, h_n(t)$  выполнено неравенство

$$\begin{aligned} F(h_1 + \dots + h_n) &= \int_{\Omega} M[h_1(t) + \dots + h_n(t)] dt \geq \\ &\geq \int_{\Omega} M[h_1(t)] dt + \dots + \int_{\Omega} M[h_n(t)] dt = \\ &= F(h_1) + \dots + F(h_n). \end{aligned}$$

В случае, когда выполнено  $\Delta_2$ -условие, из соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(h_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} M[h_n(t)] dt = 0$$

вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n(t)\| = 0,$$

Поэтому каждому  $\varepsilon_0 > 0$  можно сопоставить такое  $\delta_0 > 0$ , что из  $\|h(t)\| \geq \varepsilon_0$  вытекает неравенство

$$F(h) = \int_{\Omega} M[h(t)] dt \geq \delta_0.$$

Допустим, что  $h_n(t) \in K$  и  $\|h_n(t)\| \geq \varepsilon_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Тогда

$$F(h_1 + \dots + h_n) \geq F(h_1) + \dots + F(h_n) \geq n\delta_0.$$

Таким образом,  $F(x)$  является строго возрастающим функционалом.

Нам осталось показать, что функционал  $F(x)$  ограничен на каждом шаре  $\|x(t)\| \leq R$ . Пусть  $R < 2^m$ . Из  $\Delta_2$ -условия вытекает тогда, что

$$\begin{aligned} M(u) &\leq kM\left(\frac{u}{2}\right) + a \leq k^2M\left(\frac{u}{4}\right) + a(1+k) \leq \dots \leq \\ &\leq k^mM\left(\frac{u}{2^m}\right) + a(1+k+\dots+k^{m-1}) \leq k_1M\left(\frac{u}{R}\right) + a_1, \end{aligned}$$

где  $k_1 = k^m$ ,  $a_1 = a(1+k+\dots+k^{m-1})$ . Следовательно,

$$F(x) = \int_{\Omega} M[x(t)] dt \leq k_1 \int_{\Omega} M\left[\frac{x(t)}{R}\right] dt + a_1 \text{mes } \Omega.$$

Если  $\|x(t)\| \leq 1$ , то имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} M[u(t)] dt \leq \|u(t)\| \leq 1.$$

Таким образом, мы получаем оценку

$$F(x) \leq k_1 \left\| \frac{x(t)}{R} \right\| + a_1 \text{mes } \Omega \leq k_1 + a_1 \text{mes } \Omega \quad (\|x(t)\| \leq R).$$

Утверждение **01** доказано.

Если, в частности,  $M(u) = \frac{|u|^p}{p}$  ( $1 < p < \infty$ ), то  $L_M^* = L_p$ ; поэтому из утверждения **01** вытекает полная правильность конуса неотрицательных функций в  $L_p$  — этот факт ранее был установлен тем же методом.

**02.** Если  $M(u)$  не удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то конус неотрицательных функций в  $L_M^*$  не обладает даже свойством правильности.

Доказательство. Пусть  $M(u)$  не удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию. Тогда множество ограниченных на  $\Omega$  функций нигде не плотно в  $L_M^*$ . Через  $E_M$  обозначим замыкание в  $L_M^*$ -множества ограниченных функций.

Обозначим через  $z(t)$  некоторую неотрицательную функцию из  $L_M^*$ , не принадлежащую  $E_M^*$ . Построим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} z(t), & \text{если } 0 \leq z(t) \leq n \\ n, & \text{если } n \leq z(t). \end{cases}$$

Эта последовательность очевидным образом монотонна и ограничена функцией  $z(t)$ :

$$x_1(t) \leq x_2(t) \leq \dots \leq x_n(t) \leq \dots \leq z(t).$$

В то же время последовательность  $x_n(t)$  не сходится по норме.

Действительно, если бы последовательность  $x_n(t)$  сходилась к некоторой функции  $x^*(t)$ , то она сходилась бы к  $x^*(t)$  и по мере, то есть последовательность  $x_n(t)$  сходилась бы по мере к  $z(t)$ . В то же время

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n(t) - z(t)\| = \inf_{y(t) \in E_M} \|z(t) - y(t)\| > 0.$$

Итак, конус  $K$  не обладает свойством правильности.

Утверждение **02** доказано.

**03.** Если  $M(u)$  не удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то конус  $K$  неотрицательных функций в пространстве  $E_M$  правилен, но не вполне правилен.

Доказательство. Тот факт, что конус  $K$  в пространстве  $E_M$  не вполне правилен, по существу был установлен при доказательстве предыдущего утверждения. Рассмотренная там последовательность функций  $x_n(t)$  монотонна и ограничена по мере, так как

$$\|x_n(t)\| \leq \|z(t)\| \quad (n = 1, 2, \dots);$$

в то же время эта последовательность не сходится по мере.

Осталось доказать правильность конуса  $K$ .

Функция  $x(t) \in L_M^*$  имеет по определению абсолютно непрерывную норму, если каждому  $\varepsilon > 0$  соответствует такое  $\delta > 0$ , что для каждого множества  $\Omega_1 \subset \Omega$  из  $\text{mes } \Omega_1 < \delta$  вытекает неравенство

$$\|x(t) \chi(t; \Omega)\| < \varepsilon,$$

где через  $\chi(t; \Omega_1)$  обозначена характеристическая функция множества  $\Omega_1$ . Последовательность функций  $x_n(t)$  имеет, по определению, равномерно абсолютно непрерывные нормы, если каждому  $\varepsilon > 0$  соответствует такое  $\delta > 0$ , что для каждого  $\Omega_1 \subset \Omega$  из  $\text{mes } \Omega_1 < \delta$  вытекает одновременно для всех  $n$  неравенство

$$\|x_n(t) \chi(t; \Omega_1)\| < \varepsilon.$$

Чтобы последовательность функций  $x_n(t)$  сходилась в  $E_M$  по норме, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась по мере и имела равномерно абсолютно непрерывные нормы.

Рассмотрим в  $E_M$  последовательность функций  $x_n(t)$ , монотонную и ограниченную в смысле полупорядоченности некоторой функцией  $z(t) \in E_M$ :

$$x_1(t) \leq x_2(t) \leq \dots \leq x_n(t) \leq \dots \leq z(t).$$

Без ограничения общности можно считать все функции  $x_n(t)$  неотрицательными.

Из принадлежности функции  $z(t)$  пространству  $E_M$  вытекает, что она имеет абсолютно непрерывную норму. Из очевидного неравенства

$$\|x_n(t) \chi(t; \Omega_1)\| \leq \|z(t) \chi(t; \Omega_1)\| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

вытекает, что функции  $x_n(t)$  имеют равномерно абсолютно непрерывные нормы. Из монотонности последовательности  $x_n(t)$  вытекает, что она сходится по мере к некоторой функции  $x^*(t) \leq z(t)$ . Следовательно,  $x^*(t) \in E_M$  и  $x_n(t)$  сходится к  $x^*(t)$  по норме.

Утверждение **03** полностью доказано.

Последнее утверждение представляет для нас основной интерес. Оно означает, что не каждый правильный конус вполне правилен.

Простым примером правильного, но не вполне правильного конуса является совокупность  $K$  всех последовательностей  $x = \{\xi_1, \dots, \xi_n, \dots\}$  с неотрицательными координатами в пространстве  $(s)$  сходящихся к нулю последовательностей с нормой

$$\|x\| = \max_i |\xi_i|.$$

Этот конус не вполне правилен, так как в пространстве  $(s)$  не сходится сильно монотонная и ограниченная по норме последовательность

$$x^{(k)} = \{\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)}, \dots\},$$

где  $\xi_i^{(k)} = 1$  при  $i \leq k$  и  $\xi_i^{(k)} = 0$  при  $i > k$ . Правильность конуса  $K$  очевидна.

**4. О конусах, допускающих оштукатуривание.** В силу теоремы 1.10 конус  $K$  вполне правилен, если на нем можно определить равномерно положительный линейный функционал. Поэтому из теоремы 1.5 вытекает

*Теорема 1.12. Если конус  $K$  допускает оштукатуривание, то он вполне правилен.*

В частности, конусы  $K(F)$  вполне правильны.

Конус неотрицательных функций в пространстве  $S$  не обладает свойством правильности; поэтому на нем не может быть определен равномерно положительный линейный функционал.

*Лемма 1.8. Если конус  $K$  телесен, то конус  $K^*$  допускает оштукатуривание.*

**Доказательство.** Пусть  $u_0$  — внутренний элемент конуса  $K$ . В силу (1.15) для каждого  $f \in K^*$  будет выполнено неравенство

$$f(u_0) \geq \rho \|f\|, \quad (1.31)$$

где  $\rho$  — радиус шара с центром в  $u_0$ , целиком принадлежащего  $K$ . Неравенство (1.31) означает, что линейный функционал  $F(f)$ , определенный на  $K^*$  равенством

$$F(f) = f(u_0),$$

равномерно положителен. Остается применить теорему 1.5.

Лемма доказана.

Из этой леммы и теоремы 1.12 вытекает, что конус  $K^*$  вполне правилен, если  $K$  телесен.

Введем понятие конуса  $K_{u_0, \rho}$ . Пусть  $u_0$  — фиксированный элемент из  $K$ ;  $\rho \geq 1$ . Обозначим через  $K_{u_0, \rho}$  совокупность таких элементов  $x \in K$ , что при некотором  $a \geq 0$

$$au_0 \leq x \leq \rho au_0. \quad (1.32)$$

Покажем, что  $K_{u_0, \rho}$  является конусом. Пусть  $x_1, x_2 \in K_{u_0, \rho}$ ; тогда

$$a_1 u_0 \leq x_1 \leq \rho a_1 u_0 \quad a_2 u_0 \leq x_2 \leq \rho a_2 u_0$$

и при любых неотрицательных  $\alpha$  и  $\beta$

$$(\alpha a_1 + \beta a_2) u_0 \leq \alpha x_1 + \beta x_2 \leq \rho (\alpha a_1 + \beta a_2) u_0,$$

то есть  $\alpha x_1 + \beta x_2 \in K_{u_0, \rho}$ . Если  $x \in K_{u_0, \rho}$  и  $x \neq \theta$ , то  $x \in K_{u_0, \rho}$ , так как  $K_{u_0, \rho}$  является частью конуса  $K$ . Остается доказать замкнутость  $K_{u_0, \rho}$ ; она вытекает из того, что в соотношениях

$$a_n u_0 \leq x_n \leq \rho a_n u_0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

можно по некоторой подпоследовательности индексов перейти к пределу, если последовательность  $x_n$  сильно сходится.

**Теорема 1.13.** *Если конус  $K$  нормален, то конус  $K_{u_0, \rho}$  допускает оштукатуривание.*

**Доказательство.** Определим на конусе  $K$  линейный положительный функционал  $f(x)$ , удовлетворяющий условию

$$f(u_0) = 1.$$

Покажем, что этот функционал равномерно положителен на конусе  $K_{u_0, \rho}$ . Этим утверждение теоремы будет доказано.

Так как конус  $K$  нормален, то норма полумонотонна:  $\|x\| \leq L\|y\|$ , если  $x \leq y$  и  $x, y \in K$ .

Из неравенства

$$au_0 \leq x \leq \rho au_0 \quad (1.33)$$

вытекает, что

$$a\|u_0\| \leq L\|x\| \leq \rho L^2 a\|u_0\|,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho L\|u_0\|} \|x\| \leq a \leq \frac{L}{\|u_0\|} \|x\|. \quad (1.34)$$

Применяя к (1.33) функционал  $f(x)$ , получим

$$a \leq f(x) \leq \rho a \quad (x \in K_{u_0, \rho})$$



и в силу (1.34)

$$f(x) \geq \frac{1}{\rho L \|u_0\|} \|x\| \quad (x \in K_{u_0, \rho}).$$

Последнее неравенство означает, что функционал  $f(x)$  равномерно положителен.

Теорема доказана.

Если теперь воспользоваться теоремой 1.12, то мы приходим к следующему заключению: если  $K$  нормален, то конус  $K_{u_0, \rho}$  вполне правилен.

Приведем примеры конусов  $K_{u_0, \rho}$ .

Если в пространстве  $C$  непрерывных на  $\Omega$ -функций рассмотреть совокупность положительных функций  $x(t)$ , удовлетворяющих условию

$$\max_{t \in \Omega} x(t) \leq \rho \min_{t \in \Omega} x(t), \quad (1.35)$$

то она образует конус  $K_{u_0, \rho}$ , где  $K$  — конус всех неотрицательных функций, а  $u_0(t) \equiv 1$ . Аналогично в пространствах  $L_p$  конус  $K_{u_0, \rho}$ , где  $u_0(t) \equiv 1$ , образует совокупности функций  $x(t)$ , для которых

$$\text{vrai max}_{t \in \Omega} x(t) \leq \rho \text{vrai min}_{t \in \Omega} x(t). \quad (1.36)$$

Конусы  $K_{u_0, 0}$  тесно связаны с конусом  $K_{u_0}$ , введенным при рассмотрении  $u_0$ -нормы (§ 2). Очевидно,

$$K_{u_0} = \bigcup_{\rho > 1} K_{u_0, \rho}.$$

## § 7. Миниэдральные конусы

**1. Определение.** Элемент  $z$  называют точной верхней границей (*supremum*, ом) для пары элементов  $x$  и  $y$ , если  $x \leq z$ ,  $y \leq z$  и если из неравенств  $x \leq z_1$ ,  $y \leq z_1$  вытекает, что  $z \leq z_1$ . Аналогично определяется понятие *infimum* двух элементов.

Если каждая пара элементов имеет *supremum*, то конус  $K$  называется *миниэдральным*.

Нетрудно видеть, что миниэдральность конуса равносильна тому, что для любых  $x, y \in E$  может быть указан такой элемент  $z$ , что  $K_x \cap K_y = K_z$ ; здесь через  $K_u$  обозна-

чается совокупность элементов вида  $u + x$  ( $x \in K$ ). При этом  $z = \sup \{x, y\}$ , то есть

$$K_x \cap K_y = K_{\sup \{x, y\}}. \quad (1.37)$$

Конусы неотрицательных функций в пространствах  $C$  и  $L_p$  миниэдральны.

Если конус  $K$  миниэдрален, то существует точная верхняя граница у каждого конечного набора элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то есть существует такой элемент  $z$ , что

$$x_i \leq z \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

причем из неравенств

$$x_i \leq z_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

вытекает соотношение  $z \leq z_1$ . Точная верхняя граница может быть определена равенством

$$\sup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \sup \{x_1, \sup \{x_2, \dots, x_n\}\}.$$

Отметим также аналогичную (1.37) формулу

$$K_{x_1} \cap K_{x_2} \cap \dots \cap K_{x_n} = K_{\sup \{x_1, \dots, x_n\}}. \quad (1.38)$$

При некоторых предположениях миниэдральный конус можно рассматривать как конус неотрицательных функций в пространстве непрерывных на некотором бикомпакте функций. На точной формулировке и тем более на доказательстве этой фундаментальной теоремы М. Г. Крейна и С. Г. Крейна [1] мы не останавливаемся. Отметим лишь, что из нее вытекает следующий результат отрицательного характера: телесный миниэдральный конус в бесконечномерном пространстве не может быть правильным.

## 2. Существование точной верхней грани у счетного множества элементов.

*Теорема 1.14. Пусть конус  $K$  правилен и миниэдрален. Тогда каждая ограниченная последовательность  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) имеет точную верхнюю грань.*

*Доказательство.* Пусть

$$x_n \leq z \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.39)$$

Тогда, очевидно,

$$y_n = \sup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq z \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.40)$$

Так как последовательность  $y_n$  монотонно возрастает и ограничена, то она сходится по норме к некоторому пределу  $z_0$ .

Переходя к пределу в неравенстве  $y_n \leq y_{n+k}$  при  $k \rightarrow \infty$ , получим  $y_n \leq z_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), откуда следует, что

$$x_n \leq z_0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Допустим, что выполнены соотношения (1.39). Тогда выполнены соотношения (1.40), переходя в которых к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим неравенство  $z_0 \leq z$ . Значит,  $z_0$  является точной верхней гранью для последовательности  $x_n$ . Теорема доказана.

Утверждение теоремы 1.14 можно истолковать и геометрически: если последовательность  $x_n$  ограничена, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_{x_n} = K_{\sup \{x_1, x_2, \dots\}}. \quad (1.41)$$

Предположение теоремы 1.14 о правильности конуса существенно. Например, конус неотрицательных функций в пространстве  $C$  миниздрален, но не обладает свойством правильности; в  $C$  существуют ограниченные последовательности, не имеющие *supremum*'а (например, последовательность (1.23)).

Пусть выполнены условия теоремы 1.14. Тогда для каждой неубывающей ограниченной последовательности  $x_n$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0, \quad (1.42)$$

где

$$x^* = \sup \{x_1, x_2, \dots\}. \quad (1.43)$$

Для доказательства достаточно заметить, что  $x_n$  сходится по норме к некоторому элементу  $z_0$ . Тогда, с одной стороны, из  $x_n \leq z_0$  следует, что  $x^* \leq z_0$ , а, с другой стороны, из  $x_n \leq x^*$  следует, что  $z_0 \leq x^*$ .

**3. Сильно миниздральные конусы.** Нелинейный функционал  $f(x)$ , определенный на конусе  $K$ , назовем строго монотонным, если из  $x \leq y$  ( $x \neq y$ ) вытекает, что  $f(x) < f(y)$ .

Примерами строго монотонных функционалов могут служить равномерно положительные линейные функционалы. Как мы уже отмечали, для каждого конуса в сепарабельном

пространстве может быть построен строго монотонный линейный непрерывный функционал.

**Теорема 1.15.** Пусть конус  $K$  правилен и миниедрален. Пусть на  $K$  определен некоторый строго монотонный функционал  $f(x)$  (из  $x \leq y$  и  $x \neq y$  следует, что  $f(x) < f(y)$ ), обладающий тем свойством, что для каждой неубывающей ограниченной последовательности  $x_n$  из  $\|x_n - x^*\| \rightarrow 0$  вытекает, что  $f(x_n) \rightarrow f(x^*)$ .

Тогда каждое ограниченное множество имеет точную верхнюю грань.

**Доказательство.** Пусть  $M$  — некоторое ограниченное множество:  $x \leq z_0$  при всех  $x \in M$ . Без ограничения общности можно считать, что множество  $M$  содержит точку  $0$  (в противном случае мы бы рассмотрели множество элементов вида  $x - x_0$ , где  $x$  пробегает все  $M$ , а  $x_0$  — фиксированный элемент из  $M$ ; supremum нового множества после добавления к нему  $x_0$  даст  $\sup M$ ).

Рассмотрим все элементы  $y$  вида

$$y = \sup \{0, x_1, \dots, x_k\}, \quad (1.44)$$

где  $x_1, \dots, x_k$  — произвольные элементы из  $M$ . Очевидно, все элементы (1.44) удовлетворяют неравенству  $y \leq z_0$ . Поэтому  $f(y) \leq f(z_0)$ .

Выберем последовательность  $y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) элементов вида (1.44) так, чтобы имело место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \sup f(y), \quad (1.45)$$

где supremum берется по всем элементам вида (1.44). При этом будем считать, что  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq \dots$ .

Последовательность  $y_n$  ограничена, поэтому она сходится по норме к некоторому элементу  $y^*$ . Докажем, что  $y^* = \sup M$ .

Если  $z$  — одна из верхних границ множества  $M$ , то, в частности,  $y_n \leq z$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). После предельного перехода мы приходим к соотношению  $y^* \leq z$ . Остается показать, что  $y^*$  есть верхняя граница для множества  $M$ .

Пусть  $x_0 \in M$ . Введем обозначение  $y_0 = \sup \{y^*, x_0\}$ .

Нужно доказать, что  $y_0 = y^*$ . В предположении противного,  $f(y_0) > f(y^*)$ . Это значит, что найдется такой

элемент  $y_n$ , что

$$f(\sup \{y_n, x_0\}) > f(y^*)^*.$$

но это противоречит (1.45), так как  $\sup \{y_n, x_0\}$  есть элемент вида (1.44).

Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем называть конус  $K$  *сильно миниэдральным*, если каждое ограниченное множество  $M$  имеет точную верхнюю грань  $\sup M$ .

Из теоремы 1.15 вытекает, что правильный миниэдральный конус в сепарабельных пространствах сильно миниэдрален. В частности, сильно миниэдрален конус неотрицательных функций в пространствах  $L_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

Доказанные выше утверждения о существовании точной верхней границы очевидным образом справедливы в случае, когда рассматривается точная нижняя граница (*infimum*).

**4. Дополнительные замечания.** В связи с изучением миниэдральных конусов возникает вопрос о связи между понятиями миниэдральности и нормальности конуса. Как нам известно, миниэдральные конусы неотрицательных функций в пространствах  $C$  и  $L_p$  нормальны. Оказывается, что существуют миниэдральные конусы, не обладающие свойством нормальности.

Например, рассмотрим в пространстве  $l_2$  числовых последовательностей

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \quad (1.46)$$

с нормой

$$\|x\| = \{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 + \dots\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.47)$$

множество  $K$  элементов, у которых первая координата  $x_1$  неотрицательна, а остальные удовлетворяют неравенствам

$$-\infty < x_i \leq x_1 \quad (i = 2, 3, \dots). \quad (1.48)$$

---

\*) Мы здесь пользуемся очевидным равенством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_n, y_n\} = \sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right\},$$

справедливым в условиях теоремы 1.15 для любых ограниченных убывающих последовательностей  $x_n, y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Можно проверить, что  $K$  является миниэдральным конусом, который не обладает свойством нормальности (соответствующие выкладки предоставляем читателю).

Отметим еще, что сильно миниэдральный нормальный конус может не быть правильным. Примером может служить конус последовательностей

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\} \quad (1.49)$$

с неотрицательными компонентами  $\xi_i$  в пространстве  $m$  всех ограниченных последовательностей (1.49) с нормой

$$\|x\|_m = \sup_i |\xi_i|.$$

## § 8. Пространства с двумя конусами

**1. Ограниченность множеств  $K(\theta, x)$ .** В ряде случаев удобно в одном пространстве  $E$  рассматривать два конуса  $K$  и  $K_0$ , один из которых является частью другого.

С подобной ситуацией мы уже сталкивались. Например,  $K_{u_0} \subset K$ ; конусы  $K_{u_0, p}$  являются частью конуса  $K_{u_0}$ ; если  $F_1 \subset F_2$ , то  $K(F_1) \subset K(F_2)$ .

В настоящем параграфе предполагается, что  $K_0 \subset K$ . Полуупорядоченность вводится при помощи «широкого» конуса  $K$ . Если одновременно приходится рассматривать полуупорядоченность, порожденную «узким» конусом  $K_0$ , то будем ее обозначать знаком  $\leq_0$ .

Нетрудно видеть, что из нормальности конуса  $K$  вытекает нормальность конуса  $K_0$ ; из правильности или полной правильности конуса  $K$  вытекает правильность или соответственно полная правильность конуса  $K_0$ . Наоборот, если конус  $K_0$  телесный или воспроизводящий, то соответствующим свойством обладает и конус  $K$ .

Через  $K_0\langle x_0, y_0 \rangle$  обозначим совокупность таких элементов  $x \in K_0$ , что  $x_0 \leq x \leq y_0$ . Если конус  $K$  нормален, то множество  $K_0\langle x_0, y_0 \rangle$  ограничено по норме при любых  $x_0, y_0 \in E$ .

Если конус  $K_0$  нормален, а  $K$  не обладает свойством нормальности, то множества  $K_0\langle x_0, y_0 \rangle$  могут быть не ограничены. Примером в пространстве  $l_2$  последовательностей (1.46) могут служить конусы  $K$  и  $K_0$ , первый из которых выделен условиями  $x_1 \geq 0$  и (1.48), а второй — условиями  $x_1 \geq 0$  и

$$0 \leq x_i \leq x_1 \quad (i = 2, 3, \dots); \quad (1.50)$$

конус  $K_0$  очевидным образом нормален, но множество  $K_0 \langle \theta, x_0 \rangle$ , где  $x_0 = \{2, 0, 0, \dots\}$ , ограничено по норме, так как элементы  $\{1, 0, 0, \dots\}$ ,  $\{1, 1, 0, \dots\}$ ,  $\{1, 1, 1, \dots\}$ , ... принадлежат  $K_0 \langle \theta, x_0 \rangle$ , а их нормы (1.47) не ограничены.

**Теорема 1.16.** *Для ограниченности при любых  $x_0, y_0 \in K_0$  ( $x_0 \leq y_0$ ) множеств  $K_0 \langle x_0, y_0 \rangle$  необходимо и достаточно, чтобы норма была полумонотонна на  $K_0$ , то есть чтобы из  $x \leq y$  ( $x, y \in K$ ) следовало*

$$\|x\| \leq L\|y\|. \quad (1.51)$$

**Доказательство.** Достаточность очевидна. Необходимость докажем от противного. Пусть существуют такие последовательности  $x_n, y_n \in K_0$ , что  $x_n \leq y_n$ ,  $\|x_n\| \geq n^3 \|y_n\|$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Ряд

$$\psi = \frac{y_1}{\|y_1\|} + \frac{y_2}{4\|y_2\|} + \dots + \frac{y_n}{n^2\|y_n\|} + \dots$$

сходится по норме. Очевидно,  $\psi \in K_0$  и  $\theta \leq \frac{x_n}{n^2\|y_n\|} \leq \psi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), причем  $\left\| \frac{x_n}{n^2\|y_n\|} \right\| \geq n$ . Значит, множество  $K_0 \langle \theta, \psi \rangle$  не ограничено. Теорема доказана.

Если  $y - x \in K_0$ , то тем более  $y - x \in K$ . Поэтому из ограниченности всех множеств  $K_0 \langle x_0, y_0 \rangle$  (достаточно ограниченности всех множеств  $K_0 \langle \theta, y_0 \rangle$ ) вытекает, что норма на  $K_0$  полумонотонна по отношению к полупорядоченности  $\leq$ . В силу теоремы 1.2 конус  $K_0$  нормален. Итак, нормальность конуса  $K_0$  является необходимым условием ограниченности всех множеств  $K_0 \langle x_0, y_0 \rangle$ .

**2.  $K$ -нормальность конуса  $K_0$ .** Конус  $K_0$  назовем  $K$ -нормальным, если из  $f_1^0 \in K_0$ ,  $f_2 \in K$ ,  $f_1^0 + f_2 \in K_0$  следует, что

$$\|f_1^0 + f_2\| \geq \delta \max \{\|f_1^0\|, \|f_2\|\} \quad (\delta > 0). \quad (1.52)$$

**Теорема 1.17.** *Для  $K$ -нормальности конуса  $K_0$  необходимо и достаточно, чтобы норма на  $K_0$  была полумонотонна.*

**Доказательство.** Пусть существуют такие последовательности  $f_n^0 \in K_0$  и  $f_n \in K$ , что  $f_n^0 + f_n \in K_0$  и

$$\|f_n^0 + f_n\| \leq \frac{1}{n^3} \max \{\|f_n^0\|, \|f_n\|\} = \frac{1}{n^3} a_n. \quad (1.53)$$

Так как одно из чисел  $\left\| \frac{f_n^0}{a_n} \right\|$ ,  $\left\| \frac{f_n}{a_n} \right\|$  равно 1, то

$$1 - \frac{1}{n^3} \leq \left\| \frac{f_n^0}{a_n} \right\|, \quad \left\| \frac{f_n}{a_n} \right\| \leq 1 + \frac{1}{n^3} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.54)$$

Поэтому справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} \|f_n^0\| \leq \|f_n\| \leq 2 \|f_n^0\| \quad (n = 2, 3, \dots),$$

откуда следует, что

$$\|f_n^0 + f_n\| \leq \frac{2}{n^3} \|f_n^0\| \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Последние неравенства означают, что ряд

$$f^* = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{nf_n^0}{\|f_n^0\|} + \frac{nf_n}{\|f_n^0\|} \right) \quad (1.55)$$

сильно сходится. Очевидно,  $f^* \in K_0$  и  $0 \leq \frac{nf_n^0}{\|f_n^0\|} \leq f^*$ . По-

этому норма на  $K_0$  не обладает свойством полумонотонности. Значит, из полумонотонности нормы вытекает  $K$ -нормальность конуса.

Пусть конус  $K_0$  обладает свойством  $K$ -нормальности. Пусть  $x, y \in K_0$  и  $x \leq y$ . Если  $f_1^0 = \frac{1}{2}(y + x)$  и  $f_2 = \frac{1}{2}(y - x)$ , то  $f_1^0 \in K_0$ ,  $f_2 \in K$  и  $f_1^0 + f_2 \in K_0$ . Поэтому

$$\|y\| = \|f_1^0 + f_2\| \geq \delta \max \{\|f_1^0\|, \|f_2\|\}.$$

С другой стороны,

$$\|x\| = \|f_1^0 - f_2\| \leq \|f_1^0\| + \|f_2\| \leq 2 \max \{\|f_1^0\|, \|f_2\|\}.$$

Поэтому  $\|x\| \leq \frac{2}{\delta} \|y\|$ .

Теорема доказана.

Нетрудно показать, что каждый локально компактный конус  $K_0$  будет  $K$ -нормален, каков бы ни был широкий конус  $K$ . Нетривиальным примером  $K$ -нормального конуса  $K_0$  в пространстве  $C_1[0, 1]$  непрерывно дифференцируемых функций с нормой

$$\|x(t)\|_{C_1} = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|$$



может служить конус  $K_0$  всех неотрицательных выпуклых функций, обращающихся в нуль на концах сегмента  $[0, 1]$  при конусе  $K$  всех неотрицательных функций.

**3.  $K$ -воспроизводящие конусы.** Конус  $K_0$  будем называть  $K$ -воспроизводящим, если для любого  $x \in E$  можно указать такой элемент  $u \in K_0$ , что  $x \leq u$ . Иными словами, конус  $K_0$  называется  $K$ -воспроизводящим, если каждый элемент  $x \in E$  допускает представление  $x = u - v$ , где  $u \in K_0$  и  $v \in K$ .

Непосредственно из определения вытекает, что воспроизводящий конус  $K_0$  будет  $K$ -воспроизводящим, каков бы ни был конус  $K$ , содержащий  $K_0$ . Однако  $K$ -воспроизводящий конус может не быть воспроизводящим. Примером может служить конус  $K_0$  неотрицательных неубывающих функций в пространстве  $C$  непрерывных на  $[0, 1]$  функций при конусе  $K$  всех неотрицательных функций.

**4.  $K$ -правильные и вполне  $K$ -правильные конусы.** Конус  $K_0$  будем называть  $K$ -правильным, если каждая неубывающая и ограниченная элементом из  $K_0$  (по полуупорядоченности  $\leq$ ) последовательность  $x_n \in K_0$  сходится по норме к некоторому элементу  $x^* \in K_0$ .

Конус  $K_0$  назовем *вполне  $K$ -правильным*, если каждая ограниченная по норме неубывающая последовательность элементов из  $K_0$  сходится по норме.

Отметим вначале очевидные факты. Если  $K$  правилен или вполне правилен, то конус  $K_0 \subset K$  будет  $K$ -правильным или соответственно вполне  $K$ -правильным. Из  $K$ -правильности или полной  $K$ -правильности конуса  $K_0$  вытекает в свою очередь правильность или соответственно полная правильность конуса  $K_0$ .

**Теорема 1.18.** *Каждый  $K$ -правильный и каждый вполне  $K$ -правильный конус  $K_0$  является  $K$ -нормальным (и тем более нормальным) конусом.*

**Доказательство.** Допустим, что конус  $K_0$  не обладает свойством  $K$ -нормальности. В силу теоремы 1.17 найдутся такие последовательности  $x_n, u_n \in K_0$ , что  $x_n \leq u_n$  и  $\|x_n\| > n^2 \|u_n\|$ . Ряд

$$v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\|x_n\|}$$

сильно сходится. Элементы

$$y_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\|x_k\|}$$

очевидным образом удовлетворяют соотношениям  $y_n \in K_0$  и

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq v_0.$$

При этом последовательность  $y_n$  не сходится по норме, так как  $\|y_{n+1} - y_n\| = 1$ . Мы показали, что  $K$ -правильные конусы  $K$ -нормальны.

Допустим снова, что конус  $K_0$  не обладает свойством  $K$ -нормальности. Тогда найдутся такие последовательности  $f_n^0 \in K_0$  и  $f_n \in K$ , что  $f_n^0 + f_n \in K_0$  и

$$\|f_n^0 + f_n\| < \frac{1}{n^2} \max \{\|f_n^0\|, \|f_n\|\} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из последних неравенств вытекает, что

$$\|f_n^0 + f_n\| < \frac{2}{n^2} \|f_n^0\| \quad (n = 2, 3, \dots)$$

(см. доказательство теоремы 1.17). Элементы

$$z_1 = \frac{f_2^0}{\|f_2^0\|}, \quad z_2 = \frac{f_2^0 + f_2}{\|f_2^0\|}, \quad z_3 = z_2 + \frac{f_3^0}{\|f_3^0\|},$$

$$z_4 = z_2 + \frac{f_3^0 + f_3}{\|f_3^0\|}, \dots$$

не убывают и нормы их равномерно ограничены:

$$\|z_n\| \leq 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При этом последовательность  $z_n$  не сходится по норме, так как  $\|z_{2k+1} - z_{2k}\| = 1$ . Мы показали, что из полной  $K$ -правильности конуса вытекает его  $K$ -нормальность.

Теорема доказана.

**Теорема 1.19.** *Каждый вполне  $K$ -правильный конус  $K$ -правилен.*

**Доказательство.** Пусть последовательность  $x_n$  не убывает и ограничена некоторым элементом из  $K_0$ . Если конус  $K_0$

вполне  $K$ -правилен, то в силу теоремы 1.18 он  $K$ -нормален и в силу теоремы 1.17 последовательность  $x_n$  ограничена по норме. Следовательно, последовательность  $x_n$  сходится по норме.

Теорема доказана.

Не каждый  $K$ -правильный конус  $K_0$  вполне  $K$ -правилен. Для случая  $K = K_0$  примеры были приведены в предыдущих параграфах. Можно привести примеры и для случая, когда  $K \neq K_0$ .

В. Я. Стеценко указал ряд признаков, при выполнении которых из  $K$ -правильности вытекает полная  $K$ -правильность. Для этого достаточно, чтобы конус  $K_0$  был телесен (доказательство аналогично доказательству теоремы 1.8); достаточно, чтобы пространство  $E$  было регулярно; достаточно, чтобы конус  $K$  был нормален, а пространство  $E$  слабо полно (доказательство аналогично доказательству теоремы 1.9). На других признаках мы не останавливаемся.

**Б. Слабо правильные конусы.** Дальнейшие обобщения понятий правильного конуса связаны со слабой сходимостью.

Рассмотрим пространство  $E$  с одним конусом  $K$ . Назовем конус  $K$  *слабо правильным*, если из

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \quad (x_n \in K) \quad (1.56)$$

и

$$x_n \leq u \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.57)$$

следует слабая сходимость последовательности  $x_n$ . Конус  $K$  назовем *слабо вполне правильным*, если он нормален и если из (1.56) и

$$\|x_n\| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.58)$$

следует слабая сходимость последовательности  $x_n$ .

Теория слабо правильных конусов разработана В. Я. Стеценко [4]. В частности, он показал, что каждый слабо вполне правильный конус слабо правилен (доказательство аналогично доказательству теоремы 1.7). Правильный и слабо вполне правильный конус вполне правилен. Оказалось также, что каждый слабо правильный конус нормален.

Понятия, связанные со слабой правильностью конуса, естественным образом обобщаются на случай пространств с двумя конусами.

## ГЛАВА 2

### ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этой главе изучаются линейные операторы, оставляющие инвариантным некоторый конус в банаховом пространстве. Выделяются классы операторов, имеющие в конусе собственные векторы. При широких предположениях такие собственные векторы оказываются единственными (с точностью до нормы), а соответствующие собственные значения больше абсолютных величин остальных собственных значений.

#### § 1. Линейные $u_0$ -положительные операторы

**1. Определения.** Пусть  $E$  — банахово пространство с конусом  $K$ . Линейный оператор  $A$  называется *положительным*, если он преобразует конус  $K$  в себя: из  $x \geq \theta$  вытекает, что  $Ax \geq \theta$ .

Нетрудно видеть, что положительный линейный оператор  $A$  обладает свойством *монотонности*: для любых элементов  $x, y \in E$  из  $x \leq y$  вытекает, что  $Ax \leq Ay$ . Действительно,  $x \leq y$  означает, что  $y - x \geq \theta$ , но тогда  $Ay - Ax \geq \theta$ .

Обозначим через  $u_0$  некоторый фиксированный ненулевой элемент из  $K$ . Линейный положительный оператор  $A$  назовем  *$u_0$ -ограниченным снизу*, если для каждого ненулевого  $x \in K$  можно указать такое натуральное  $n$  и такое положительное число  $\alpha$ , что

$$\alpha u_0 \leq A^n x.$$

Аналогично оператор  $A$  назовем  *$u_0$ -ограниченным сверху*, если для каждого ненулевого  $x \in K$  найдутся такие  $m$  и  $\beta$ , что

$$A^m x \leq \beta u_0.$$

Если, наконец, для каждого  $x \in K$  ( $x \neq \theta$ ) при некотором  $n$

$$\alpha u_0 \leq A^n x \leq \beta u_0,$$

то оператор  $A$  назовем  $u_0$ -положительным.

Если конус  $K$  телесен и для каждого ненулевого  $x$  из  $K$  найдется такое  $n$ , что  $A^n x$  является внутренним элементом конуса, то оператор  $A$  называется *сильно положительным*. Сильно положительные операторы являются простейшим примером  $u_0$ -положительных операторов, где  $u_0$  — произвольный внутренний элемент конуса  $K$ . Действительно, если  $A^n x$  — внутренний элемент конуса, то при достаточно малом  $\alpha > 0$  элемент  $A^n x - \alpha u_0$  также будет элементом конуса, т. е.  $\alpha u_0 \leq A^n x$ ; аналогично, если  $u_0$  — внутренний элемент конуса, то при достаточно больших  $\beta$  элемент  $u_0 - \frac{1}{\beta} A^n x$  также принадлежит конусу, то есть  $A^n x \leq \beta u_0$ .

Проведенные рассуждения показывают также, что каждый положительный оператор  $u_0$ -ограничен сверху, если конус  $K$  телесен, а  $u_0$  — внутренний элемент этого конуса.

**2. Примеры.** В случае конечномерных пространств с конусом, составленным из векторов с неотрицательными компонентами, линейные положительные операторы определяются матрицами с неотрицательными элементами.

Для нас основной интерес представляют линейные интегральные операторы

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds, \quad (2.1)$$

действующие в различных пространствах  $E$  функций, определенных на множестве  $\Omega$ , которое всюду в дальнейшем мы предполагаем ограниченным и замкнутым подмножеством конечномерного пространства. Предполагается, что ядро удовлетворяет условиям, при которых оператор (2.1) действует и непрерывен в соответствующем пространстве.

Если в качестве конуса рассматривается множество всех неотрицательных функций из соответствующего пространства  $(C, L_p$  и т. д.), то оператор (2.1) будет очевидным образом положителен, если ядро  $k(t, s)$  неотрицательно:

$$k(t, s) \geq 0 \quad (t, s \in \Omega).$$

Если оператор (2.1) действует в пространстве  $C$  и если некоторая итерация

$$k_N(t, s) = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} k(t, \sigma_1) k(\sigma_1, \sigma_2) \dots k(\sigma_{N-1}, s) d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_{N-1} \quad (2.2)$$

положительна, то оператор (2.1) будет сильно положительным в  $C$ , так как функция  $A^N x(t)$  будет положительной функцией, какова бы ни была неотрицательная, но не равная тождественно нулю функция  $x(t)$ .

Допустим, что оператор (2.1) действует в  $L_p$ . Если при этом ядро  $k(t, s)$  удовлетворяет неравенству

$$k(t, s) \geq m > 0 \quad (t, s \in \Omega), \quad (2.3)$$

то оператор (2.1) будет  $u_0$ -ограниченным снизу, если в качестве  $u_0$  выбрать функцию  $u_0(t) \equiv 1$ . Это вытекает из очевидного неравенства

$$Ax(t) \geq m \int_{\Omega} x(s) ds = m \int_{\Omega} x(s) ds u_0(t).$$

Оператор (2.1) при условии (2.3) не обязательно обладает свойством  $u_0$ -ограниченности сверху; например, если  $k(t, s) \equiv k_0(t)$ , где  $k_0(t) \geq m$  и  $k_0(t)$  не ограничена, то функции  $A^n x(t)$  не будут  $u_0$ -ограниченными сверху, а следовательно,  $A$  не будет  $u_0$ -положительным, если  $u_0(t) \equiv 1$ .

При изучении интегральных операторов (2.1) с неотрицательными ядрами в ряде случаев можно указать инвариантные конусы, отличные от конуса всех неотрицательных функций. Пусть, например, ядро  $k(t, s)$  неотрицательно и удовлетворяет условию

$$u_0(t) \leq k(t, s) \leq \rho u_0(t) \quad (t, s \in \Omega), \quad (2.4)$$

где  $\rho \geq 1$ , а функция  $u_0(t)$  принадлежит пространству  $E$  ( $C$ ,  $L_p$  и т. д.), в котором действует оператор (2.1). Очевидно, для каждой неотрицательной функции  $x(t)$

$$\int_{\Omega} x(s) ds u_0(t) \leq Ax(t) \leq \rho \int_{\Omega} x(s) ds u_0(t).$$

Следовательно, оператор (2.1) при условии (2.4) оставляет инвариантным конус  $K_{u_0, \rho}$ , где  $K$  — конус всех неотрицательных функций. Более того, мы показали, что оператор (2.1) при условии (2.4) преобразует весь конус  $K$  в свою правильную часть — конус  $K_{u_0, \rho}$ .

**Теорема 2.1.** Пусть линейный оператор  $A$  преобразует конус  $K$  в конус  $K_{u_0, \rho}$ , где  $u_0$  — некоторый ненулевой элемент из  $K$ , и пусть из  $Ax = \theta$  ( $x \in K$ ) следует, что  $x = \theta$ . Тогда оператор  $A$  будет  $u_0$ -положителен на каждом конусе  $K_{u_0, \rho+\varepsilon}$ .

**Доказательство.** Знаком  $\leq$  будем обозначать полуупорядоченность, определенную конусом  $K$ , а знаком  $\overset{(\varepsilon)}{\leq}$  — полуупорядоченность, порожденную конусом  $K_{u_0, \rho+\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  — фиксированное неотрицательное число.

Пусть  $x \in K_{u_0, \rho+\varepsilon}$ ,  $x \neq \theta$ . Тогда  $Ax \in K_{u_0, \rho}$ , то есть найдется такое  $a > 0$ , что

$$au_0 \leq Ax \leq \rho u_0. \quad (2.5)$$

Положим

$$a_0 = \frac{\rho-1}{\rho-1+\varepsilon} a, \quad \alpha = a - a_0 = \frac{\varepsilon a}{\rho-1+\varepsilon}, \quad \beta = \rho a + a_0.$$

Тогда из (2.5) вытекают неравенства

$$a_0 u_0 \leq Ax - \alpha u_0 \leq (\rho + \varepsilon) a_0 u_0$$

и

$$a_0 u_0 \leq \beta u_0 - Ax \leq (\rho + \varepsilon) a_0 u_0.$$

Полученные неравенства означают, что

$$\alpha u_0 \overset{(\varepsilon)}{\leq} Ax \overset{(\varepsilon)}{\leq} \beta u_0.$$

Теорема доказана.

Подчеркнем, что теорема 2.1 относится не только к операторам вида (2.1).

**3. Положительность ограниченного снизу и сверху оператора.** Непосредственно из определений не вытекает, что  $u_0$ -ограниченный сверху и снизу оператор  $A$  является  $u_0$ -положительным оператором, так как для каждого ненулевого  $x \in K$  неравенства  $\alpha u_0 \leq A^n x$  и  $A^m x \leq \beta u_0$  могут выполняться при различных  $n$  и  $m$ . Однако имеет место

**Теорема 2.2.** Если оператор  $A$   $u_0$ -ограничен сверху и снизу, то он  $u_0$ -положителен.

**Доказательство.** Во-первых, заметим, что при некотором натуральном  $k$  выполняются неравенства

$$\alpha_0 u_0 \leq A^k u_0 \leq \beta_0 u_0. \quad (2.6)$$

В качестве  $k$  достаточно, например, выбрать произведение  $k = st$ , где  $\alpha_1 u_0 \leq A^s u_0$  и  $A^t u_0 \leq \beta_1 u_0$ , тогда будут выполнены неравенства (2.6) при  $\alpha_0 = \alpha_1^t$  и  $\beta_0 = \beta_1^s$ .

Пусть  $x$  — фиксированный ненулевой элемент из  $K$ . Обозначим через  $m$  и  $n$  такие натуральные числа, что

$$\alpha u_0 \leq A^n x, \quad A^m x \leq \beta u_0 \quad (\alpha, \beta > 0). \quad (2.7)$$

Без ограничения общности можно считать, что  $n > m$ . Из (2.7) тогда вытекает, что

$$A^{n-m} u_0 \geq A^{n-m} \left( \frac{1}{\beta} A^m x \right) = \frac{1}{\beta} A^n x \geq \frac{\alpha}{\beta} u_0. \quad (2.8)$$

Предположим вначале, что числа  $n - m$  и  $k$  взаимно простые. Тогда либо найдутся положительные натуральные числа  $p$  и  $q$  такие, что

$$p(n - m) - qk = 1, \quad (2.9)$$

либо такие, что

$$-p(n - m) + qk = 1. \quad (2.10)$$

В первом случае в силу (2.6) и (2.8)

$$\begin{aligned} Au_0 &= A^{p(n-m)-qk} u_0 \geq A^{p(n-m)-qk} \left( \frac{1}{\beta_0^q} A^{qk} u_0 \right) = \\ &= \frac{1}{\beta_0^q} A^{p(n-m)} u_0 \geq \frac{1}{\beta_0^q} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^p u_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Пусть  $m + rk > n$ . Тогда в силу (2.6) и (2.7)

$$A^{m+rk} x \leq \beta A^{rk} u_0 \leq \beta \beta_0^r u_0$$

и в силу (2.11)

$$A^{m+rk} x \geq \alpha A^{m+rk-n} u_0 \geq \alpha \left[ \frac{1}{\beta_0^q} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^p \right]^{m+rk-n} u_0.$$

Таким образом, в случае (2.9) элемент  $A^{m+rk} x$  будет удовлетворять неравенством  $\alpha' u_0 \leq A^{m+rk} x \leq \beta' u_0$  ( $\alpha', \beta' > 0$ ).



Рассмотрим случай (2.10). Снова в силу (2.6) и (2.8)

$$\begin{aligned} Au_0 &= A^{qk-p(n-m)}u_0 \leq A^{qk-p(n-m)}\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p A^{p(n-m)}u_0\right] = \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p A^{qk}u_0 \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p \beta_0^q u_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$A^n x \leq \beta A^{n-m}u_0 \leq \beta \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p \beta_0^q\right]^{n-m} u_0$$

и из (2.7) вытекает, что

$$\alpha u_0 \leq A^n x \leq \beta' u_0.$$

Допустим теперь, что числа  $n-m$  и  $k$  не обладают свойством взаимной простоты. Пусть

$$k = k_0 d, \quad n = l + n_0 d, \quad m = l + m_0 d,$$

где  $d$  — наибольший общий делитель чисел  $k$  и  $n-m$ ; очевидно,  $m_0 < n_0$ . Введем обозначения  $A^d = B$ ,  $A^l x = y$ . Тогда неравенства (2.6) и (2.7) можно будет переписать в виде

$$\alpha_0 u_0 \leq B^{k_0} u_0 \leq \beta_0 u_0$$

и

$$\alpha u_0 \leq B^{n_0} y, \quad B^{m_0} y \leq \beta u_0.$$

Так как теперь числа  $n_0 - m_0$  и  $k_0$  взаимно просты, то по уже доказанному найдется такое  $s$ , что

$$\alpha' u_0 \leq B^s y \leq \beta' u_0 \quad (\alpha', \beta' > 0).$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\alpha' u_0 \leq A^{sd+l} x \leq \beta' u_0.$$

Теорема доказана.

**4. Непрерывность положительного оператора.** Проведенные выше рассуждения носили чисто алгебраический характер и не были связаны с непрерывностью оператора. Укажем некоторые общие положения о непрерывности положительных операторов.

**Теорема 2.3.** Пусть  $E_1$  и  $E_2$  — два банаховых пространства с конусами соответственно  $K_1$  и  $K_2$ , первый из которых телесен, а второй нормален. Пусть действующий из  $E_1$  в  $E_2$  аддитивный однородный оператор  $A$  положителен в том смысле, что  $AK_1 \subset K_2$ .

Тогда оператор  $A$  непрерывен.

Доказательство. Пусть  $u_0$  — внутренний элемент конуса  $K_1$ . Тогда множество  $\langle \theta, u_0 \rangle$  всех элементов  $x \in K_1$ , удовлетворяющих неравенствам  $\theta \leq x \leq u_0$ , будет содержать некоторый шар. Поэтому достаточно доказать ограниченность по норме пространства  $E_2$  множества  $A\langle \theta, u_0 \rangle$ .

Если  $\theta \leq x \leq u_0$ , то  $\theta \leq Ax \leq Au_0$ . В силу теоремы 1.2 норма в  $E_2$  полумонотонна и из последних неравенств вытекает, что

$$\|Ax\|_{E_2} \leq N \|Au_0\|_{E_2} \quad (x \in \langle \theta, u_0 \rangle).$$

Теорема доказана \*).

Доказательство сохраняет силу, если пространства  $E_1$  и  $E_2$  неполны. В этом случае оператор  $A$  по непрерывности можно продолжить на пополненные пространства.

Так как в силу теоремы 1.4 конус  $\bar{K}_{u_0}$  телесен и нормален, то аддитивный и однородный оператор, преобразующий  $K_{u_0}$  в себя, непрерывен по  $u_0$ -норме.

**Б. Равномерно положительные операторы.** Линейный оператор, оставляющий инвариантным конус  $K$ , назовем *равномерно положительным*, если

$$\|Ax\| \geq b \|x\| \quad (x \in K).$$

Примером равномерно положительного оператора может служить единичный оператор  $I$ :

$$Ix \equiv x \quad (x \in E).$$

**Теорема 2.4.** Если на конусе  $K$  определен равномерно положительный линейный вполне непрерывный оператор  $A$ , то  $K$  допускает оштукатуривание.

Доказательство. Введем обозначение  $K_0 = \overline{AK}$ . Очевидно,  $K_0$  является конусом. Этот конус  $K_0$  локально компактен (см. стр. 30), так как пересечение его с единичным шаром лежит в замыкании компактного множества значений оператора  $A$  на пересечении конуса  $K$  с шаром радиуса  $\frac{1}{b}$ . Как было показано выше, из локальной

---

\*) Теорема остается справедливой, если предположение о телесности конуса  $K_1$  заменить менее ограничительным предположением о том, что конус  $K_1$  воспроизводящий (см. И. А. Бахтин, М. А. Красносельский, В. Я. Стеценко [1]).

компактности конуса  $K_0$  вытекает, что  $K_0$  допускает оштукатуривание.

Обозначим через  $f_0(x)$  линейный равномерно положительный на  $K_0$  функционал:

$$f_0(x) \geq a_0 \|x\| \quad (x \in K_0).$$

Положим  $f(x) = f_0(Ax)$ . Линейный функционал  $f(x)$  равномерно положителен на  $K$ :

$$f(x) = f_0(Ax) \geq a_0 \|Ax\| \geq a_0 b \|x\| \quad (x \in K).$$

Из теоремы 1.5 вытекает, что  $K$  допускает оштукатуривание. Теорема доказана.

Эту теорему естественно дополнить замечанием, что на каждом допускающем оштукатуривание конусе  $K$  можно определить равномерно положительный линейный вполне непрерывный оператор  $A$ . Достаточно, например, положить  $Ax = f(x)u_0$ , где  $u_0$  — некоторый ненулевой элемент из  $K$ , а  $f(x)$  — равномерно положительный линейный функционал.

Примером равномерно положительного линейного оператора может служить оператор

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds, \quad (2.1)$$

ядро которого удовлетворяет условию (2.4)

$$u_0(t) \leq k(t, s) \leq \rho u_0(t) \quad (t, s \in \Omega).$$

Если этот оператор действует, например, в пространстве  $C$  непрерывных на  $\Omega$  функций и если  $u_0(t) \in C$ , то оператор (2.1) преобразует в себя конус  $K_{u_0, \rho}$  непрерывных функций  $x(t)$ , удовлетворяющих при некотором  $a = a[x(t)]$  условию

$$au_0(t) \leq x(t) \leq \rho au_0(t) \quad (t \in \Omega),$$

и на этом конусе выполнено неравенство

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds \geq u_0(t) \int_{\Omega} x(s) ds \geq \\ &\geq au_0(t) \int_{\Omega} u_0(s) ds \geq \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} u_0(s) ds x(t) \quad (t \in \Omega). \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает, что оператор  $A$  равномерно положителен. Напомним, что (в силу теоремы 2.1) конус  $K_{u_0, p}$  допускает оштукатуривание.

Допустим, что линейный (уже не обязательно вполне непрерывный) оператор  $A$  удовлетворяет близкому к равномерной положительности условию

$$Ax \geq m \|x\| u_0, \quad (2.12)$$

где  $u_0$  — некоторый фиксированный ненулевой элемент из  $K$ . Определим положительный функционал  $f_0(x)$  так, что  $f_0(u_0) = 1$ , и положим  $f(x) = f_0(Ax)$ . Из (2.12) тогда будет вытекать, что  $f(x)$  является равномерно положительным функционалом.

Таким образом, из существования линейного оператора  $A$ , удовлетворяющего условию (2.12), вытекает, что конус  $K$  допускает оштукатуривание.

Оштукатуриваемый конус нормален; поэтому (2.12) является более жестким ограничением, чем равномерная положительность оператора.

## § 2. Существование собственного вектора

**1. Положительные собственные векторы.** Ненулевой элемент  $x \in E$  называется *собственным вектором* линейного оператора  $A$ , если

$$Ax = \lambda x,$$

где  $\lambda$  — некоторое вещественное число, которое называют *собственным значением* оператора  $A$ .

Допустим, что линейный оператор  $A$  действует в пространстве  $E$  с конусом  $K$  и оставляет этот конус инвариантным. Иначе говоря,  $A$  — положительный оператор. Нас будет интересовать вопрос о существовании у оператора  $A$  собственных векторов, принадлежащих  $K$ . Эти собственные векторы мы будем называть *положительными*.

Собственные значения  $\lambda$ , соответствующие положительным собственным векторам положительного линейного оператора  $A$ , будем называть *позитивными* собственными значениями. Очевидно, позитивные собственные значения неотрицательны. Подчеркнем, что собственные значения оператора  $A$ , которым соответствуют собственные векторы, не лежащие

в  $K$ , мы не называем позитивными, даже если они положительны.

**2. Принцип Шаудера неподвижной точки.** Оператор  $B$  (линейный или нелинейный), действующий в пространстве  $E$ , называется *вполне непрерывным*, если он непрерывен и если он каждое ограниченное множество преобразует в компактное. Естественным образом понятие полной непрерывности распространяется на операторы, заданные на некотором множестве  $T \subset E$ .

При доказательстве существования решений у уравнений

$$x = Bx$$

с вполне непрерывным оператором  $B$  во многих случаях удобно пользоваться известным принципом Шаудера\*): *если вполне непрерывный оператор  $B$  преобразует ограниченное выпуклое и замкнутое множество  $T$  в себя, то на  $T$  оператор  $B$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку  $x^*$ . Неподвижная точка  $x^*$  оператора  $B$  — это решение уравнения  $x = Bx$ .*

**3. Существование положительного собственного вектора у линейного вполне непрерывного оператора.**

**Теорема 2.5.** Пусть линейный положительный оператор  $A$  вполне непрерывен. Пусть для некоторого ненулевого элемента  $u$  такого, что  $u \in K$ ,  $u = v - w$  ( $v, w \in K$ ), выполняется соотношение

$$A^p u \geq \alpha u \quad (\alpha > 0), \quad (2.13)$$

где  $p$  — некоторое натуральное число.

Тогда оператор  $A$  имеет в  $K$  по крайней мере один собственный вектор  $x_0$ :

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0, \quad (2.14)$$

причем позитивное собственное число  $\lambda_0$  удовлетворяет неравенству

$$\lambda_0 \geq \sqrt[p]{\alpha}. \quad (2.15)$$

**Доказательство.** Будем доказывать существование у оператора  $A$  единичного собственного вектора  $x_0$  ( $\|x_0\| = 1$ ) в конусе  $K$ .

---

\*) См. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1].

Обозначим через  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) операторы, определенные равенством

$$A_n x = \frac{A\left(x + \frac{v}{n}\right)}{\left\|A\left(x + \frac{v}{n}\right)\right\|}, \quad (2.16)$$

и рассмотрим их на пересечении  $T$  конуса  $K$  с единичным шаром  $\|x\| \leq 1$ . Каждый из операторов  $A_n$  преобразует  $T$  в себя и вполне непрерывен вместе с оператором  $A$  (достаточно заметить, что  $A\left(x + \frac{v}{n}\right) \geq \frac{1}{n} Av \neq 0$ , в силу чего  $\left\|A\left(x + \frac{v}{n}\right)\right\| > 0$  при  $x \in T$ ). В силу принципа Шаудера каждый оператор  $A_n$  имеет неподвижную точку  $x_n \in T$ . Из (2.16) следует, что  $\|x_n\| = 1$ . Равенства  $A_n x_n = x_n$  перепишем в виде

$$A\left(x_n + \frac{v}{n}\right) = \lambda_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.17)$$

Из (2.17) вытекают соотношения

$$x_n \geq \frac{1}{\lambda_n} A x_n, \quad x_n \geq \frac{1}{n \lambda_n} A v \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.18)$$

Отсюда и из условия (2.13) вытекает, что

$$\begin{aligned} x_n &\geq \frac{1}{\lambda_n^{p-1}} A^{p-1} x_n = \frac{1}{\lambda_n^p} A^p \left(x_n + \frac{v}{n}\right) \geq \frac{1}{n \lambda_n^p} A^p v \geq \\ &\geq \frac{1}{n \lambda_n^p} A^p u \geq \frac{\alpha}{n \lambda_n^p} u \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Поэтому существует такое максимальное  $\beta_n > 0$ , что  $x_n \geq \beta_n u$ . Из (2.18) и (2.13) далее следуют соотношения

$$x_n \geq \frac{1}{\lambda_n^p} A^p \left(x_n + \frac{v}{n}\right) \geq \frac{1}{\lambda_n^p} \left(\beta_n + \frac{1}{n}\right) A^p u \geq \frac{\alpha}{\lambda_n^p} \left(\beta_n + \frac{1}{n}\right) u. \quad (2.19)$$

Из максимальнойности чисел  $\beta_n$  вытекают неравенства

$$\frac{\alpha}{\lambda_n^p} \left(\beta_n + \frac{1}{n}\right) \leq \beta_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

которые можно переписать в виде

$$\lambda_n^p \geq \alpha + \frac{\alpha}{n^2 n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.20)$$

Так как оператор  $A$  вполне непрерывен, то можно выбрать подпоследовательность номеров  $n_l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) так, чтобы последовательность  $A\left(x_{n_l} + \frac{v}{n_l}\right)$  сильно сходилась к некоторому элементу  $y^*$ . В силу (2.20) при выборе последовательности  $n_l$  можно одновременно обеспечить сходимость чисел  $\lambda_{n_l}$  к некоторому числу  $\lambda_0$ , удовлетворяющему неравенству (2.15). Тогда элементы  $x_{n_l}$  будут сходиться по норме к элементу  $x_0 = \frac{y^*}{\lambda_0}$ .

Для получения равенства (2.14) достаточно перейти к пределу в равенствах

$$A\left(x_{n_l} + \frac{v}{n_l}\right) = \lambda_{n_l} x_{n_l} \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема содержит два существенных ограничения: условие (2.13) и предположение о полной непрерывности оператора  $A$ . В последующих пунктах будут рассмотрены случаи, когда эти ограничения, относящиеся к оператору  $A$ , можно заменить предположениями о некоторых свойствах пространства  $E$  и конуса  $K$ .

**4. Существование собственного вектора у равномерно положительного оператора.** Напомним, что линейный положительный оператор  $A$  называется равномерно положительным, если

$$\|Ax\| \geq b\|x\| \quad (x \in K),$$

где  $b > 0$ .

**Теорема 2.6.** Пусть вполне непрерывный линейный оператор  $A$  равномерно положителен.

Тогда  $A$  имеет по крайней мере один положительный собственный вектор.

**Доказательство.** Введем в рассмотрение оператор

$$Bx = \frac{Ax + (1 - \|x\|)u_0}{\|Ax + (1 - \|x\|)u_0\|} \quad (x \in K, \quad \|x\| \leq 1),$$

где  $u_0$  — некоторый фиксированный ненулевой элемент из  $K$ .

Оператор  $B$  вполне непрерывен на пересечении  $T$  конуса  $K$  с единичным шаром  $\|x\| \leq 1$ . Непрерывность его вытекает из того факта, что элементы

$$Ax + (1 - \|x\|)u_0 \quad (x \in T)$$

отличны от нуля  $\theta$ . Компактность множества  $BT$  вытекает из полной непрерывности и равномерной положительности оператора  $A$ . Действительно, из любой последовательности элементов множества  $T$  можно так выбрать подпоследовательность  $x_n (n = 1, 2, \dots)$ , чтобы элементы  $Ax_n$  сходились к некоторому элементу  $y^*$ , а числа  $\|x_n\|$  — к некоторому неотрицательному числу  $\alpha$ . Числа

$$\beta_n = \|Ax_n + (1 - \|x_n\|)u_0\|$$

будут при этом сходиться к некоторому пределу  $\beta$ , причем  $\beta > 0$ . Последнее неравенство вытекает из равномерной положительности оператора  $A$ , если  $\alpha = 1$ , так как

$$\begin{aligned} \|Ax_n + (1 - \|x_n\|)u_0\| &\geq \|Ax_n\| - (1 - \|x_n\|)\|u_0\| \geq \\ &\geq b\|x_n\| - (1 - \|x_n\|)\|u_0\|. \end{aligned}$$

Если же  $\alpha < 1$ , то элементы  $Ax_n + (1 - \|x_n\|)u_0$  сходятся к ненулевому элементу  $y^* + (1 - \alpha)u_0$ , в силу чего  $\beta = \|y^* + (1 - \alpha)u_0\| > 0$ . Таким образом, из любой последовательности элементов множества  $T$  можно выбрать подпоследовательность  $x_n$  так, чтобы элементы  $Bx_n$  сходились сильно к некоторому пределу. Следовательно,  $BT$  компактно.

Вполне непрерывный оператор  $B$  преобразует множество  $T$  в себя. В силу принципа Шаудера оператор  $B$  имеет неподвижную точку  $x^*$ , причем

$$\|x^*\| = \|Bx^*\| = 1.$$

Но тогда

$$Ax^* = \|Ax^*\|x^*.$$

Теорема доказана.

В условиях теоремы 2.6 в явной форме не указаны ограничения на конус  $K$ , который оператор  $A$  оставляет инвариантным. Однако равномерная ограниченность вполне непрерывного оператора  $A$  означает в силу теоремы 2.4, что конус  $K$  допускает оштукатуривание. Так как конусы неотрицательных функций в пространстве  $C$  непрерывных функций и в пространствах  $L_p (1 < p < \infty)$  оштукатуривания



не допускают, то в приложениях, как правило, удобнее теорема 2.5, несмотря на условие (2.13).

**5. Слабая топология и принцип Тихонова—Шаудера.** Оператор  $A$  назовем *слабо непрерывным*, если он каждую слабо сходящуюся последовательность элементов преобразует в последовательность, которая также сходится слабо.

Как известно, каждый линейный непрерывный оператор  $A$  слабо непрерывен. Действительно, пусть последовательность  $x_n$  слабо сходится в себе. Тогда для любого линейного функционала  $f(x)$  последовательность  $f(Ax_n)$  сходится, так как  $f(Ax_n) = A^*f(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), где  $A^*$  — линейный оператор, сопряженный  $A$ .

Напомним, что множество  $T \subseteq E$  называется слабо компактным, если из каждой последовательности  $x_n \in T$  можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Единичный шар в пространствах  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) слабо компактен. Если единичный шар в пространстве слабо компактен, то слабо компактным будет каждое ограниченное замкнутое выпуклое множество.

Ниже будет использован принцип Тихонова [1] существования неподвижной точки: *если слабо непрерывный оператор  $B$  преобразует слабо компактное и слабо полное множество  $T$  в себя, то на  $T$  оператор  $B$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку.*

#### 6. Линейные операторы в слабо полных пространствах.

**Теорема 2.7.** *Пусть пространство  $E$  слабо полно и единичный шар в  $E$  слабо компактен. Пусть конус  $K$  допускает оштукатуривание.*

*Тогда каждый линейный оператор  $A$ , оставляющий инвариантным конус  $K$ , имеет по крайней мере один собственный вектор.*

**Доказательство.** Так как  $K$  допускает оштукатуривание, то в силу теоремы 1.5 существует равномерно положительный на  $K$  линейный функционал, то есть такой функционал  $f_0(x)$ , что

$$f_0(x) \geq a \|x\| \quad (x \in K). \quad (2.21)$$

Обозначим через  $T$  множество таких элементов  $x$ , принадлежащих  $K$ , что  $f_0(x) = 1$ . Множество  $T$  является пересечением конуса  $K$  и гиперплоскости  $f_0(x) = 1$ . Поэтому  $T$

выпукло и замкнуто. Из (2.21) вытекает, что

$$\|x\| \leq \frac{1}{a} \quad (x \in T).$$

Таким образом,  $T$  компактно в слабой топологии.

Пусть

$$Bx = \frac{x + Ax}{f_0(x + Ax)} \quad (x \in T). \quad (2.22)$$

Оператор  $B$  преобразует  $T$  в себя.

Из слабой непрерывности оператора  $A$  очевидным образом вытекает слабая непрерывность оператора (2.22). Следовательно, непрерывный в слабой топологии оператор  $B$  преобразует компактное в слабой топологии выпуклое множество  $T$  в себя. Из принципа Тихонова вытекает, что оператор  $B$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку  $x_0 \in T$ . Значит,

$$Ax_0 = [f_0(x_0 + Ax_0) - 1] x_0 = f_0(Ax_0) x_0.$$

Теорема доказана.

В этой теореме к положительному оператору  $A$  не предъявлены дополнительные требования. Однако требования, предъявленные к пространству и конусу, весьма ограничительны, ибо, как правило, либо конусы неотрицательных функций в обычных функциональных пространствах не допускают оштукатуривания, либо единичный шар в этих пространствах не обладает слабой компактностью. Заметим, что все условия теоремы 2.7 выполнены, если пространство  $E$  конечномерно.

Пример, рассматриваемый в следующем пункте, показывает, что оба условия теоремы 2.7 существенны.

**Теорема 2.8.** Пусть пространство  $E$  слабо полно и единичный шар в пространстве  $E$  слабо компактен. Пусть конус  $K$  нормален.

Пусть линейный оператор  $A$  удовлетворяет условию

$$a(x)u_0 \leq Ax \leq \rho a(x)u_0 \quad (x \in K), \quad (2.23)$$

где  $a(x) \geq 0$ ,  $\rho \geq 1$ .

Тогда  $A$  имеет по крайней мере один положительный собственный вектор.

**Доказательство.** Из (2.23) вытекает, что оператор  $A$  оставляет инвариантным конус  $K_{u_0, \rho}$ , который в силу

теоремы 1.13 допускает оштукатуривание. Поэтому существование положительного собственного вектора вытекает из теоремы 2.7.

Теорема доказана.

**7. Примеры.** Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_0^t x(s) ds \quad (2.24)$$

в различных пространствах  $E$  функций на  $[0, 1]$ . Оператор (2.24) преобразует в себя конус неотрицательных функций, но собственных векторов оператор  $A$  не имеет ни в пространстве  $L$ , в котором конус допускает оштукатуривание, ни шар не обладает свойством слабой компактности, ни в пространствах  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ), в которых шар слабо компактен, но конус положительных функций не допускает оштукатуривания. Таким образом, оба условия теоремы 2.7 существенны.

Оператор (2.24) вполне непрерывен и в пространствах  $L_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ), и в пространстве  $C$  непрерывных функций. Отсутствие положительных собственных функций означает, что в теореме 2.5 нельзя отказаться от условия (2.13).

Укажем примеры интегральных операторов

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds, \quad (2.1)$$

удовлетворяющих условиям доказанных в этом параграфе теорем.

Если ядро  $k(t, s)$  удовлетворяет условию (2.4), а оператор (2.1) действует и непрерывен (но не обязательно вполне непрерывен!) в одном из пространств  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ), то выполнены условия теоремы 2.8 — оператор  $A$  имеет по крайней мере одну неотрицательную собственную функцию.

Пусть ядро  $k(t, s)$  удовлетворяет условию

$$k_N(t, s) \geq u(t) \quad (t, s \in \Omega), \quad (2.25)$$

где  $k_N(t, s)$  — итерированное ядро (см. (2.2)), а  $u(t)$  — неотрицательная функция из пространства, в котором вполне непрерывен оператор (2.1). Тогда выполнены условия тео-

ремы 2.5, так как из (2.25) вытекает неравенство

$$A^N x(t) = \int_{\Omega} k_N(t, s) x(s) ds \geq \int_{\Omega} x(s) ds u(t) \quad (t \in \Omega),$$

которое можно рассматривать как условие (2.13). Итак, из (2.25) вытекает существование по крайней мере одной неотрицательной функции  $u$  оператора (2.1).

**8. Еще один признак существования собственного вектора.** Напомним определение комплексных собственных значений линейных операторов  $A$ , рассматриваемых в вещественном пространстве  $E$ .

Обозначим через  $\tilde{E}$  совокупность упорядоченных пар  $\{x, y\}$ , где  $x, y \in E$ . Пару  $\{x, y\}$  будем обозначать через  $z = x + iy$ . Сумму и разность двух пар определим равенством

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Если  $\lambda = \sigma + i\tau$ , то произведение  $\lambda z$  определим равенством

$$(\sigma + i\tau)(x + iy) = (\sigma x - \tau y) + i(\tau x + \sigma y).$$

Нетрудно видеть, что при таком введении алгебраических операций  $\tilde{E}$  обращается в линейную систему над полем комплексных чисел.

Пространство  $\tilde{E}$  обращается в нормированное пространство, если положить

$$\|x + iy\| = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|x \sin \theta + y \cos \theta\|.$$

Пространство  $\tilde{E}$  полно, если полно пространство  $E$ .

Оператор  $A$  распространяется с вещественного пространства  $E$  на комплексное расширение  $\tilde{E}$  при помощи равенства

$$A(x + iy) = Ax + iAy \quad (x, y \in E).$$

Число  $\lambda$  (которое может уже быть комплексным) называется *собственным значением* оператора  $A$ , если найдется такой ненулевой элемент  $z_0 \in \tilde{E}$ , что  $Az_0 = \lambda z_0$ . В дальнейшем, говоря о собственных значениях оператора, мы будем предполагать, что речь идет и о вещественных и о комплексных собственных значениях.

Допустим, что вполне непрерывный оператор  $A$  имеет собственный вектор  $u$ , отвечающий собственному значению  $\mu$ ,

являющемуся корнем  $p$ -й степени из положительного числа  $\alpha_0$ . Тогда

$$A^p u = \alpha_0 u,$$

и элемент  $u$  можно считать вещественным, то есть считать, что  $u \in E$ . Без ограничения общности можно предполагать, что  $-u \in K$ . Если элемент  $u$  можно представить в виде

$$u = v - w \quad (v, w \in K),$$

то из теоремы 2.5 будет вытекать, что оператор  $A$  имеет по крайней мере один собственный вектор, принадлежащий конусу  $K$ .

Оказывается, что этот факт допускает существенное обобщение.

*Теорема 2.9. Пусть линейный вполне непрерывный оператор  $A$  оставляет инвариантным конус  $K$ . Пусть оператор  $A$  имеет ненулевое вещественное или комплексное собственное значение, которому отвечает собственный вектор в замыкании линейной оболочки конуса  $K$ .*

*Тогда оператор  $A$  имеет по крайней мере один положительный собственный вектор.*

На полном доказательстве этой теоремы мы не останавливаемся (см. М. Г. Крейн и М. А. Рутман [1]). Завершим лишь доказательство для случая, когда  $K$  — воспроизводящий конус.

Нам осталось рассмотреть случай, когда  $A$  имеет комплексное собственное значение  $\mu$ , не являющееся корнем целой степени из положительного числа.

Рассмотрим операторы  $A + \varepsilon_n A^2$ ; эти операторы имеют собственное значение  $\mu + \varepsilon_n \mu^2$ . Выберем последовательность  $\varepsilon_n$  так, чтобы она стремилась к нулю и чтобы числа  $\mu + \varepsilon_n \mu^2$  были корнями целой степени из некоторых положительных чисел. По уже доказанному каждый из операторов  $A + \varepsilon_n A^2$  имеет нормированный положительный собственный вектор  $h_n \in K$ :

$$(A + \varepsilon_n A^2) h_n = \mu_n h_n,$$

причем из (2.15) вытекает, что

$$\mu_n \geq |\mu + \varepsilon_n \mu^2|.$$

Без ограничения общности можно считать, что числа  $\mu_n$  сходятся к некоторому числу  $\mu_0 \geq |\mu|$ , а элементы  $Ah_n$  — к некоторому элементу  $g_0$ . Переходя к пределу в равенствах

$$h_n = \frac{1}{\mu_n} (Ah_n + \varepsilon_n A^2 h_n) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

убеждаемся в сходимости последовательности  $h_n$  к некоторому элементу  $h_0 \in K$  и в справедливости равенства  $Ah_0 = \mu_0 h_0$ . Этим доказательство завершено.

Из приведенного доказательства вытекает, что одно из позитивных собственных значений вполне непрерывного положительного линейного оператора  $A$  не меньше модулей остальных собственных значений.

**9. Существование собственного вектора в узком конусе.** Выше были рассмотрены случаи, когда оператор  $A$  оставляет инвариантными одновременно два конуса  $K_0$  и  $K$ , причем  $K_0 \subset K$ . Как правило, в таких случаях желательно доказать существование собственного вектора в «узком» конусе  $K_0$ .

Если конус  $K$  допускает оштукатуривание, то конус  $K_0$  также допускает оштукатуривание. Поэтому в условиях теоремы 2.7 можно утверждать, что  $A$  имеет собственный вектор в  $K_0$ , если только  $AK_0 \subset K_0$ .

Оказывается, что и в условиях теоремы 2.6 оператор  $A$  имеет по крайней мере один собственный вектор в «узком» конусе  $K_0$ , если  $AK_0 \subset K_0$  и  $v \in K_0$ . Для того чтобы в этом убедиться, достаточно операторы (2.16) рассматривать на пересечении  $T_0$  конуса  $K_0$  с единичным шаром  $\|x\| \leq 1$ ; тогда элементы  $x_n$  будут принадлежать  $K_0$ .

### § 3. Простота позитивного собственного значения

**1. Оператор  $u_0$ -положительный с собственным вектором.**

**Лемма 2.1.** Пусть  $\varphi_0$  — положительный собственный вектор  $u_0$ -положительного оператора  $A$ .

Тогда  $A$  является  $\varphi_0$ -положительным оператором.

**Доказательство.** Из определения  $u_0$ -положительности оператора вытекает, что при некоторых  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  выполняются неравенства

$$\alpha_0 u_0 \leq \varphi_0 \leq \beta_0 u_0.$$

Тогда из неравенств

$$\alpha u_0 \leq A^n x \leq \beta u_0$$

следует, что

$$\frac{\alpha}{\beta_0} \varphi_0 \leq A^n x \leq \frac{\beta}{\alpha_0} \varphi_0.$$

Лемма доказана.

**2. Простота собственного значения.** Напомним, что собственное значение  $\lambda_0$  линейного оператора  $A$  называется простым, если все решения уравнений

$$(A - \lambda_0 I)^n x = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.26)$$

являются одновременно решениями уравнения

$$Ax = \lambda_0 x, \quad (2.27)$$

причем множество решений уравнения (2.27) одномерно.

**Теорема 2.10.** Пусть  $\varphi_0 \in K$  и  $\varphi_0$  — собственный вектор  $\alpha_0$ -положительного линейного оператора  $A$ :

$$A\varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0.$$

Пусть  $K$  является воспроизводящим конусом.

Тогда  $\lambda_0$  является простым собственным значением оператора  $A$ .

**Доказательство.** Покажем вначале, что множество решений уравнения (2.27) одномерно. В предположении противного оператор  $A$  имеет отличный от  $\varphi_0$  (и неколлинеарный  $\varphi_0$ ) ненулевой собственный вектор  $\psi_0$ , соответствующий тому же собственному значению  $\lambda_0$ :

$$A\psi_0 = \lambda_0 \psi_0.$$

Без ограничения общности можно считать, что  $-\psi_0 \notin K$ . Тогда в силу леммы 1.3 найдется такое наибольшее  $t_0$ , что  $\varphi_0 - t_0 \psi_0 \in K$ , а  $\varphi_0 - t \psi_0 \notin K$  при  $t > t_0$ . Это число  $t_0$  положительно. Действительно, так как конус  $K$  воспроизводящий, то  $\psi_0 = \psi'_0 - \psi''_0$ , где  $\psi'_0, \psi''_0 \in K$ . Отсюда  $\psi_0 \leq \psi'_0$ . Оператор  $A$  в силу леммы 2.1  $\varphi_0$ -положителен. Поэтому при некотором  $p$  выполняется неравенство  $A^p \psi'_0 \leq \beta \varphi_0$  ( $\beta > 0$ ), откуда  $A^p \psi_0 \leq \beta \varphi_0$ , то есть  $\varphi_0 - \frac{\lambda_0^p}{\beta} \psi_0 \in K$ .

Так как оператор  $A$   $\varphi_0$ -положителен, то при некотором  $n$  будет выполнено неравенство

$$A^n (\varphi_0 - t_0 \psi_0) \geq \alpha \varphi_0 \geq \alpha t_0 \psi_0,$$

где  $\alpha > 0$ . Из последнего неравенства вытекает, что

$$\varphi_0 - t_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{\lambda_0^n} \right) \varphi_0 \in K,$$

а это противоречит максимальнойности  $t_0$ .

Итак, собственному значению  $\lambda_0$  соответствует единственный (с точностью до нормы) собственный вектор  $\varphi_0$  оператора  $A$ .

Допустим, что одно из уравнений (2.26) имеет ненулевое решение  $\chi^*$ , не являющееся решением уравнения (2.27). Пусть  $(A - \lambda_0 I)^{n_0} \chi^* = 0$  и  $(A - \lambda_0 I)^{n_0-1} \chi^* \neq 0$ . Элемент  $(A - \lambda_0 I)^{n_0-1} \chi^*$ , очевидно, будет решением уравнения (2.27). По уже доказанному

$$(A - \lambda_0 I)^{n_0-1} \chi^* = k \varphi_0,$$

где  $k \neq 0$ . Введем обозначение

$$-\frac{1}{k} (A - \lambda_0 I)^{n_0-2} \chi^* = \chi_0.$$

Тогда

$$A \chi_0 = \lambda_0 \chi_0 - \varphi_0. \quad (2.28)$$

Из (2.28) вытекает, что  $\chi_0 \notin K$ , так как в противном случае элементы  $A^n \chi_0 = \lambda_0^n \chi_0 - n \lambda_0^{n-1} \varphi_0$  будут положительны, то есть элементы  $\frac{\lambda_0}{n} \chi_0 - \varphi_0$  будут принадлежать  $K$  вместе со своим пределом  $-\varphi_0$ , что противоречит определению конуса. Так как конус  $K$  воспроизводящий, то  $\chi_0 = \chi'_0 - \chi''_0$ , где  $\chi'_0 \in K$  и  $\chi''_0 \in K$ , причем  $\chi''_0 \neq 0$ , так как  $\chi_0 \notin K$ . Из  $\varphi_0$ -положительности оператора  $A$  вытекает, что  $A^p \chi''_0 \leq \beta \varphi_0$  ( $\beta > 0$ ) при некотором  $p$ . Тогда

$$\lambda_0^p \chi_0 - p \lambda_0^{p-1} \varphi_0 = A^p \chi_0 = A^p \chi'_0 - A^p \chi''_0 \geq -A^p \chi''_0 \geq -\beta \varphi_0.$$

откуда

$$\chi_0 \geq \frac{p \lambda_0^{p-1} - \beta}{\lambda_0^p} \varphi_0, \quad (2.29)$$

причем

$$p \lambda_0^{p-1} - \beta < 0,$$

так как  $\chi_0 \notin K$ ,



Обозначим через  $t_0$  такое число, что  $\varphi_0 + t_0 \chi_0 \in K$ , а  $\varphi_0 + t \chi_0 \notin K$  при  $t > t_0$ . В силу (2.29) число  $t_0$  положительно. Оператор  $A$  положителен, поэтому  $A(\varphi_0 + t_0 \chi_0) \in K$ , то есть  $(1 - \frac{t_0}{\lambda_0})\varphi_0 + t_0 \chi_0 \in K$ , а это противоречит максимальности  $t_0$ .

Итак, уравнения (2.26) не могут иметь решений, отличных от решений уравнения (2.27).

Теорема доказана.

### 3. Единственность положительного собственного вектора.

**Теорема 2.11.** Пусть выполнены условия теоремы 2.10. Тогда у оператора  $A$  в конусе  $K$  есть единственный (с точностью до нормы) собственный вектор.

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть

$$A\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1, \quad A\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2 \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in K, \quad \|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| = 1).$$

В силу теоремы 2.10 можно без ограничения общности считать, что  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Рассмотрим элементы  $\varphi(t)$  вида

$$\varphi(t) = \varphi_2 - t\varphi_1 \quad (0 \leq t < \infty).$$

Обозначим через  $t_0$  такое значение  $t$ , что  $\varphi(t_0) \in K$ ,  $\varphi(t) \notin K$  при  $t > t_0$ . Число  $t_0$  положительно, так как в силу леммы 2.1 элемент  $\varphi(t)$  принадлежит  $K$  при достаточно малых положительных  $t$ .

Из положительности оператора  $A$  вытекает, что

$$A(\varphi_2 - t_0 \varphi_1) = \lambda_2 \left( \varphi_2 - t_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \varphi_1 \right) \in K.$$

Отсюда и из максимальности  $t_0$  вытекает неравенство  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ . Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

**4. Расположение инвариантных подпространств положительного оператора.** Подпространство  $E_1 \subset E$  называется *инвариантным подпространством* линейного оператора  $A$ , если  $AE_1 \subset E_1$ .

Простейшим примером инвариантного подпространства оператора  $A$  может служить пополненная нулем  $\theta$  совокупность всех собственных векторов, отвечающих одному фиксированному собственному значению.

Нетрудно видеть, что прямая сумма нескольких инвариантных подпространств будет инвариантным подпространством. Инвариантным подпространством будет также замыкание прямой суммы любого бесконечного числа инвариантных подпространств.

Одним из основных фактов теории линейных вполне непрерывных операторов является возможность выделения их инвариантных подпространств. В частности, если  $\varphi_0$  — собственный вектор линейного вполне непрерывного оператора  $A$ , отвечающий простому собственному значению, то существует инвариантное для оператора  $A$  подпространство  $E_1$  такое, что каждый элемент  $x \in E$  единственным образом представим в виде

$$x = f(x) \varphi_0 + x_1, \quad (2.30)$$

где  $x_1 \in E_1$ , а  $f(x)$  — линейный функционал. Очевидно,  $f(\varphi_0) = 1$  и  $f(x) = 0$  при  $x \in E_1$ .

Усилением теоремы 2.11 является

*Теорема 2.12. Пусть выполнены условия теоремы 2.10. Пусть  $\Pi$  — инвариантное подпространство оператора  $A$ , которому не принадлежит положительный собственный вектор  $\varphi_0$ .*

*Пусть выполнено одно из следующих трех условий:*

2.12 (а). *Подпространство  $\Pi$  конечномерно.*

2.12 (б). *Оператор  $A$  вполне непрерывен.*

2.12 (в). *Пространство  $E$  слабо полно, единичный шар в пространстве  $E$  слабо компактен, конус  $K$  допускает оштукатуривание.*

*Тогда пересечение подпространства  $\Pi$  с конусом  $K$  состоит из одной точки 0.*

**Доказательство.** Предположим противное и обозначим через  $K_\Pi$  пересечение  $K \cap \Pi$ . Так как  $K$  и  $\Pi$  инвариантны для оператора  $A$ , то  $A$  преобразует  $K_\Pi$  в себя. Множество  $K_\Pi$  является конусом.

Мы покажем, что каждое из условий 2.12 (а, б, в) достаточно для существования в  $K_\Pi$  собственного вектора оператора  $A$ . Этим доказательство будет завершено, так как существование отличного от  $\varphi_0$  положительного собственного вектора противоречит теореме 2.11.

Если выполнено условие 2.12 (а) или 2.12 (б), то существование собственного вектора в  $K_\Pi$  вытекает из теор-

ремы 2.7. Заметим, что условие 2.12 (в) можно было ослабить, предположив, что слабо полно подпространство  $\Pi$ , что слабо компактен единичный шар в  $\Pi$  и что допускает оштукатуривание конус  $K_\Pi$ .

Пусть выполнено условие 2.12 (б). Покажем, что оператор  $A$ , если его рассматривать на  $\Pi$ , удовлетворяет условиям теоремы 2.5.

Пусть  $\psi_0$  — ненулевой элемент из  $K_\Pi$ . В силу леммы 2.1 найдутся такие натуральное  $p$  и положительное  $\beta$ , что

$$A^p \psi_0 \leq \beta \varphi_0. \quad (2.31)$$

Введем обозначение  $\psi_1 = A^p \psi_0$ . В силу той же леммы 2.1 найдутся натуральное  $p_1$  и такое положительное  $\alpha_1$ , что

$$\alpha_1 \varphi_0 \leq A^{p_1} \psi_1. \quad (2.32)$$

Из (2.31) и (2.32) вытекает, что

$$A^{p_1} \psi_1 \geq \frac{\alpha_1}{\beta} A^p \psi_0 = \frac{\alpha_1}{\beta} \psi_1.$$

Последнее соотношение является условием (2.13) теоремы 2.5.

Теорема доказана.

**5. Об интегральных операторах.** Доказанные в этом параграфе теоремы непосредственно применяются к изучению интегральных операторов

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds. \quad (2.1)$$

Достаточные условия  $u_0$ -положительности можно записать в виде

$$u_0(t) \leq k_N(t, s) \leq \mu u_0(t) \quad (t, s \in \Omega), \quad (2.33)$$

где  $k_N(t, s)$  — итерированное ядро.

Сделаем еще одно замечание. Если при доказательстве существования положительного собственного вектора целесообразно было искать наиболее «узкий» конус, которому этот собственный вектор принадлежит, то при применении утверждений типа теоремы 2.12 естественно искать наиболее «широкий» конус  $K$ , для которого эти утверждения остаются справедливыми.

## § 4. Сравнение с другими собственными значениями

**1. Основная теорема.** Выше уже отмечалось (см. стр. 77), что одно из позитивных собственных значений линейного положительного вполне непрерывного оператора  $A$  является верхней границей для абсолютных величин остальных собственных значений. Этот факт для важных классов линейных операторов допускает усиление (даже для некоторых операторов, не обладающих свойством полной непрерывности).

**Теорема 2.13.** Пусть выполнены условия теоремы 2.10. Тогда позитивное собственное значение оператора  $A$  (то есть собственное значение, отвечающее положительному собственному вектору  $\varphi_0 \in K$ ) больше абсолютных величин остальных собственных значений.

**Доказательство.** Во-первых, заметим, что все положительные собственные значения оператора  $A$  меньше  $\lambda_0$ . Пусть действительно  $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$ , где  $\lambda_1 > 0$ . В силу теоремы 2.10  $\lambda_1 \neq \lambda_0$ , а в силу теоремы 2.11  $\varphi_1 \notin K$ . Поэтому при достаточно больших  $t$  элементы  $\varphi_0 + t\varphi_1$  не принадлежат  $K$ . В то же время  $\varphi_0 + t\varphi_1 \in K$  при достаточно малых положительных  $t$  (так как  $-\varphi_1 = \varphi'_1 - \varphi''_1$ , где  $\varphi'_1, \varphi''_1 \in K$  и  $\varphi'_1 \neq \varphi''_1$ , причем при некотором натуральном  $p$  выполнено неравенство  $A^p\varphi'_1 \leq \beta\varphi_0$ ,  $\beta_0 > 0$ , откуда следует, что

$$-\varphi_1 = \frac{1}{\lambda_1^p} A^p(-\varphi_1) \leq \frac{1}{\lambda_1^p} A^p\varphi'_1 \leq \frac{\beta}{\lambda_1^p} \varphi_0.$$

и, наконец,  $\varphi_0 + \frac{\lambda_1^p}{\beta} \varphi_1 \in K$ ). Таким образом, существует такое наибольшее положительное число  $t_0$ , что  $\varphi_0 + t_0\varphi_1 \in K$ , а  $\varphi_0 + t\varphi_1 \notin K$  при  $t > t_0$ . Тогда  $A(\varphi_0 + t_0\varphi_1) \in K$ , откуда

$$\lambda_0 \left( \varphi_0 + t_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \varphi_1 \right) \in K \quad (2.34)$$

и (в силу максимальности  $t_0$ )  $\lambda_1 \leq \lambda_0$ . Значит,  $\lambda_1 < \lambda_0$ .

Допустим, что у оператора  $A$  есть отрицательное собственное значение  $\lambda_1$ . Тогда у оператора  $A^2$  будут положительные собственные значения  $\lambda_0^2$  и  $\lambda_1^2$ . Оператор  $A^2$

очевидным образом\*) удовлетворяет условиям теоремы 2.10. По уже доказанному будет выполняться неравенство  $\lambda_1^2 < \lambda_0^2$ , то есть  $|\lambda_1| < \lambda_0$ .

Нам осталось рассмотреть случай невещественного собственного значения  $\lambda_1 = \sigma + i\tau$ . Равенство

$$A(x + iy) = (\sigma + i\tau)(x + iy)$$

эквивалентно системе двух равенств

$$\begin{aligned} Ax &= \sigma x - \tau y, \\ Ay &= \tau x + \sigma y. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Таким образом, нам нужно показать, что из равенства (2.35), где  $\|x\| + \|y\| > 0$ , вытекает неравенство

$$|\lambda_1| = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} < \lambda_0.$$

Заметим, что из равенств (2.35) и невещественности  $\lambda_1$  вытекает, что  $x$  и  $y$  линейно независимы и, в частности, отличны от нуля.

Обозначим через  $\Pi$  двумерную плоскость в пространстве  $E$ , состоящую из элементов вида  $\xi x + \eta y$ . Из (2.35) вытекает, с одной стороны, что  $\varphi_0 \in \Pi$  и, с другой, что  $\Pi$  является инвариантным двумерным подпространством оператора. В силу теоремы 2.12 пересечение  $\Pi \cap K$  состоит из одной точки  $\theta$ . Значит, векторы  $\xi x + \eta y$  при  $|\xi| + |\eta| > 0$  не принадлежат  $K$ .

Так как конус  $K$  воспроизводящий, то  $x = x' - x''$ , где  $x', x'' \in K$ , причем  $x'' \neq \theta$ , ибо мы доказали, что  $x \notin K$ . Из  $\varphi_0$ -положительности оператора  $A$  вытекает, что  $A^p x'' \leq \beta \varphi_0$  ( $\beta > 0$ ) при некотором  $p$ . Тогда

$$A^p x = A^p x' - A^p x'' \geq -A^p x'' \geq -\beta \varphi_0.$$

---

\*) Если  $\varphi_0$  — собственный вектор оператора  $A$  и если  $A \varphi_0$  ограничен сверху, то  $\varphi_0$ -ограниченными сверху будут все операторы  $A^q$ , так как из  $A^m x \leq \beta \varphi_0$  вытекает неравенство

$$A^{mq} x = (A^q)^m x \leq \beta A^{m(q-1)} \varphi_0 = \beta \lambda_0^{m(q-1)} \varphi_0.$$

Аналогично из  $\varphi_0$ -ограниченности снизу или  $\varphi_0$ -положительности оператора  $A$  вытекает соответственно  $\varphi_0$ -ограниченность снизу или  $\varphi_0$ -положительность операторов  $A^q$ .

то есть

$$\varphi_0 + \frac{1}{\beta} A^p x \in K.$$

Из равенств (2.35) вытекает, что элемент  $\psi = \varphi_0 + \frac{1}{\beta} A^p x$  может быть записан в виде

$$\psi = \xi x + \eta y + \varphi_0 \quad (|\xi| + |\eta| > 0). \quad (2.36)$$

Обозначим через  $T$  совокупность всех элементов вида (2.36), лежащих в  $K$ . Мы показали, что такие элементы существуют.

Каждому  $\psi \in T$  поставим в соответствие число  $\xi^2 + \eta^2$ . Получившийся функционал будет ограничен. Из замкнутости конуса вытекает, что он будет принимать в некоторых точках свое наибольшее значение  $M$ . Пусть  $\psi_0 = \xi_0 x + \eta_0 y + \varphi_0$  — одна из таких точек.

Из  $\varphi_0$ -положительности оператора  $A$  следует, что

$$A^p \psi_0 \geq \alpha \varphi_0 \quad (\alpha > 0) \quad (2.37)$$

при некотором  $p$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\frac{\alpha}{\lambda_0^p} < 1$ . Неравенство (2.37) можно переписать в виде

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_0^p}\right) \lambda_0^p \varphi_0 + (\xi_1 x + \eta_1 y) \geq \theta, \quad (2.38)$$

где

$$\xi_1 x + \eta_1 y = A^p (\xi_0 x + \eta_0 y).$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = (\sigma^2 + \tau^2)^p (\xi_0^2 + \eta_0^2) = M |\lambda_1|^{2p}.$$

Очевидно,

$$\psi_1 = \varphi_0 + \frac{\xi_1}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_0^p}\right) \lambda_0^p} x + \frac{\eta_1}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_0^p}\right) \lambda_0^p} y$$

есть элемент вида (2.36). Поэтому

$$\left(\frac{\xi_1}{\lambda_0^p - \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\lambda_0^p - \alpha}\right)^2 = \frac{M |\lambda_1|^{2p}}{(\lambda_0^p - \alpha)^2} \leq M,$$

откуда следует, что  $|\lambda_1| < \lambda_0$ .

Теорема доказана.

**2. Собственные значения ограниченных сверху операторов.** Доказанные выше для  $u_0$ -положительных операторов теоремы теряют силу, если перейти к произвольным положительным операторам. Примером может служить единичный оператор. Однако некоторые из доказанных теорем в ослабленной форме могут быть перенесены на более широкие классы операторов.

Мы ограничимся в этом пункте одной теоремой для  $u_0$ -ограниченных сверху операторов  $A$  ( $u_0 \in K$ ,  $u_0 \neq \theta$ ), то есть для таких положительных операторов, что для каждого ненулевого  $x \in K$  найдутся такие  $m$  и  $\beta > 0$ , что  $A^m x \leq \beta u_0$ . Напомним, что каждый положительный линейный оператор  $u_0$ -ограничен сверху, если конус  $K$  телесен и  $u_0$  — внутренний элемент  $K$ .

**Теорема 2.14.** Пусть  $h_0$  — положительный собственный вектор  $h_0$ -ограниченного сверху линейного оператора  $A$ :

$$Ah_0 = \lambda_0 h_0.$$

Пусть конус  $K$  воспроизводящий.

Тогда остальные собственные значения оператора  $A$  по модулю не больше  $\lambda_0$ .

**Доказательство.** Пусть  $Ag = \lambda g$  ( $g \in K$ ). Рассмотрим вначале случай, когда  $\lambda > 0$ .

Так как конус  $K$  воспроизводящий, то  $g = g' - g''$ , где  $g', g'' \in K$ . Пусть  $A^m g' \leq \beta h_0$ , тогда

$$A^m g = A^m g' - A^m g'' \leq A^m g' \leq \beta h_0.$$

Поэтому

$$g = \frac{1}{\lambda^m} A^m g \leq \frac{\beta}{\lambda^m} h_0.$$

Обозначим через  $t_0$  такое положительное число, что  $h_0 - t_0 g \in K$  и  $h_0 - t g \in K$  при  $t > t_0$ . Тогда из соотношения

$$A(h_0 - t_0 g) = \lambda_0 \left( h_0 - \frac{\lambda t_0}{\lambda_0} \right) \in K$$

вытекает, что  $\lambda \leq \lambda_0$ .

Пусть теперь  $Ag = \lambda g$  ( $g \in K$ ) и  $\lambda < 0$ . Рассмотрим тогда оператор  $B = A^2$ . Оператор  $B$  также будет  $h_0$ -ограниченным сверху\*), при этом  $\lambda^2$  будет положительным соб-

\*) См. сноску на стр. 84.

ственным значением оператора  $B$ . По уже доказанному  $\lambda^2 \leq \lambda_0^2$ . Таким образом,  $|\lambda| \leq \lambda_0$ .

Осталось рассмотреть случай комплексных собственных значений. Здесь мы воспользуемся соображениями, примененными во второй половине доказательства теоремы 2.13.

Равенство  $A(x + iy) = \lambda(x + iy)$ , где  $\lambda = \sigma + i\tau$  эквивалентно системе двух равенств

$$\begin{aligned} Ax &= \sigma x - \tau y, \\ Ay &= \tau x + \sigma y. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Поэтому нам нужно показать, что из этих равенств вытекает неравенство  $\sigma^2 + \tau^2 \leq \lambda_0^2$ .

Как и при доказательстве теоремы 2.13, рассмотрим множество элементов вида

$$\psi = \xi x + \eta y + h_0 \quad (|\xi| + |\eta| > 0),$$

которое имеет непустое пересечение  $T$  с конусом  $K$ .

$T$  будет компактным множеством, не содержащим точку  $\theta$ . Доказательство всех этих утверждений в условиях теоремы 2.14 почти полностью повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 2.13 \*).

\*) Так как нельзя сослаться на теорему 2.12, то требует изменений доказательство того, что плоскость  $\Pi$ , в которой оператор  $A$  задан равенствами (2.35) с ненулевым  $\tau$ , не имеет общих с конусом  $K$  ненулевых элементов. Указанный факт справедлив для любых положительных линейных операторов  $A$ .

Чтобы в этом убедиться, будем рассматривать плоскость  $\Pi$  как евклидову, считая числа  $\{\xi, \eta\}$  прямоугольными координатами точки  $\xi x + \eta y \in \Pi$ . Из формул (2.35) вытекает тогда, что оператор

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} A$$

определяет в плоскости  $\Pi$  поворот на некоторый ненулевой и отличный от  $\pi$  угол. Пусть ненулевой вектор  $\varphi_0 = \{\xi_0, \eta_0\}$  принадлежит  $\Pi$  и  $K$ ; тогда все векторы  $A_1^n \varphi_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) принадлежат  $\Pi$  и  $K$  вместе со своей выпуклой оболочкой, которая очевидным образом содержит нулевой элемент  $\theta$  вместе с некоторой окрестностью в  $\Pi$ . Отсюда вытекает, что некоторый ненулевой элемент  $x$  принадлежит конусу  $K$  вместе с элементом  $-\theta$ . Мы пришли к противоречию.



Обозначим через  $\psi_0 = \xi_0 x + \eta_0 y + h_0$  такой элемент из  $T$ , что для всех остальных элементов  $\xi x + \eta y + h_0 \in T$  выполняется неравенство

$$\xi^2 + \eta^2 \leq \xi_0^2 + \eta_0^2.$$

Очевидно,  $\frac{1}{\lambda_0} A\psi_0 \in T$ , то есть

$$\frac{\sigma\xi_0 + \tau\eta_0}{\lambda_0} x + \frac{\sigma\eta_0 - \tau\xi_0}{\lambda_0} y + h_0 \in T.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\sigma\xi_0 + \tau\eta_0}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma\eta_0 - \tau\xi_0}{\lambda_0}\right)^2 \leq \xi_0^2 + \eta_0^2,$$

то есть

$$\sigma^2 + \tau^2 \leq \lambda_0^2.$$

Теорема доказана.

**3. Положительные собственные векторы ограниченных снизу операторов.** В этом пункте будем предполагать, что  $A$  является  $u_0$ -ограниченным снизу оператором, где  $u_0$  — положительный вектор оператора  $A$ :

$$Au_0 = \lambda_0 u_0.$$

В этом случае оператор  $A$  может иметь позитивные собственные значения, большие чем  $\lambda_0$ . В качестве примера можно в двумерном пространстве векторов  $\{\xi, \eta\}$  с конусом  $K$  из элементов, для которых  $\xi, \eta \geq 0$ , рассмотреть оператор

$$A\{\xi, \eta\} = \{2\xi, \xi + \eta\};$$

этот оператор  $u_0$ -ограничен снизу, где  $u_0 = \{0, 1\}$ , причем  $Au_0 = u_0$ ; в то же время оператор  $A$  имеет в конусе  $K$  собственный вектор  $\varphi_0 = \{1, 1\}$ , причем  $A\varphi_0 = 2\varphi_0$ .

Однако некоторые свойства  $u_0$ -положительных операторов сохраняются при переходе к  $u_0$ -ограниченным снизу операторам. Отметим одно из них:

**Теорема 2.15.** Пусть

$$Ah_0 = \lambda_0 h_0 \quad (h_0 \in K, \quad \|h_0\| = 1),$$

и  $A$  является  $h_0$ -ограниченным снизу оператором.

Тогда каждому отличному от  $\lambda_0$  нормированному положительному собственному вектору  $\varphi_0$  оператора  $A$  (если такие собственные векторы существуют) соответствует собственное значение, строго большее чем  $\lambda_0$ .

**Доказательство.** Пусть  $A\varphi_0 = \lambda\varphi_0$ ,  $\varphi_0 \in K$  и  $\|\varphi_0\| = 1$ . Из  $h_0$ -ограниченности снизу оператора  $A$  вытекает, что

$$A^p\varphi_0 \geq \alpha h_0,$$

где  $p$  — некоторое натуральное число и  $\alpha > 0$ . Тогда  $\varphi_0 \geq \gamma_0 h_0$ , где  $\gamma_0 = \frac{\alpha}{\lambda^p}$ .

Из последнего неравенства вытекает, что  $A\varphi_0 \geq \gamma_0 Ah_0$ , то есть  $\lambda\varphi_0 \geq \gamma_0\lambda_0 h_0$ . Применяя к этому неравенству оператор  $A$ , получим  $\lambda^2\varphi_0 \geq \gamma_0\lambda_0^2 h_0$  и аналогично

$$\varphi_0 \geq \gamma_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^n h_0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом,  $\lambda_0 \leq \lambda$ .

Допустим, что  $\lambda = \lambda_0$ . Обозначим через  $t_0$  такое число, что  $\varphi_0 \geq t_0 h_0$  и  $\varphi_0 - t h \in K$  при  $t > t_0$ . По уже доказанному  $t_0 > 0$ . Из  $h_0$ -ограниченности снизу оператора  $A$  вытекает, что  $A^q(\varphi_0 - t_0 h_0) \geq \alpha_0 h_0$ , где  $\alpha_0 > 0$ , если  $\varphi_0 \neq t_0 h_0$ . Тогда

$$\lambda_0^q (\varphi_0 - t_0 h_0) \geq \alpha_0 h_0,$$

то есть

$$\varphi_0 - \left(t_0 + \frac{\alpha_0}{\lambda_0^q}\right) h_0 \in K,$$

что противоречит максимальнойности  $t_0$ .

Теорема доказана.

## § 5. Неоднородные линейные уравнения

**1. Постановка задачи.** Перейдем к изучению неоднородного уравнения

$$\lambda\varphi = A\varphi + f, \quad (2.39)$$

где  $A$  — линейный положительный оператор.

Допустим, что  $\lambda_0$  — точная верхняя граница абсолютных величин собственных значений оператора  $A$ . Уравнение (2.39) имеет тогда при любом  $f$  единственное решение, если  $\lambda > \lambda_0$ . Если же  $\lambda = \lambda_0$  или  $\lambda < \lambda_0$ , то вопрос о разрешимости уравнения (2.39) становится более сложным: это уравнение разрешимо при всех  $f \in E$ , если  $\lambda$  не принадлежит спектру оператора, и лишь при некоторых  $f$  в противном случае.

Более простой и более полный ответ на вопрос о разрешимости неоднородного уравнения (2.39) может быть получен, если рассматривать элементы  $f$  лишь из конуса  $K$  и если искать решения в конусе  $K$ .

**Теорема 2.16.** *Если  $f \in K$  и  $\lambda > \lambda_0$ , то уравнение (2.39) имеет единственное решение в конусе  $K$ .*

*Если  $\lambda \leq \lambda_0$  и*

$$A^n f \geq \epsilon u_0 \quad (\epsilon > 0), \quad (2.40)$$

где  $u_0$  — такой ненулевой элемент из  $K$ , что

$$A^p u_0 \geq \lambda_0^p u_0, \quad (2.41)$$

то уравнение (2.39) не имеет в  $K$  решений.

**2. Леммы об эквивалентной норме.** Пусть  $A$  — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве  $E$ . Обозначим через  $\rho_0$  наименьший радиус круга  $|\lambda| \leq \rho$  в комплексной плоскости ( $\lambda$ ), в котором лежит спектр оператора  $A$ .

Очевидно,  $\|A\| \geq \rho_0$ , причем  $\|A\| = \rho_0$  лишь в исключительных случаях. Например, интегральный оператор Вольтерра

$$Ax(t) = \int_0^t k(t, s) x(s) ds$$

с непрерывным ядром не имеет ненулевых собственных значений ( $\rho_0 = 0$ ), однако норма его отлична от нуля независимо от того, в каком пространстве функций ( $C$  или  $L_p$ ) он рассматривается.

В теории линейных операторов доказывается важное равенство \*)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \rho_0. \quad (2.42)$$

Пользуясь этим равенством, можно в пространстве  $E$  построить норму  $\|x\|_0$ , эквивалентную первоначально заданной, в которой оператор  $A$  имеет норму

$$\|A\|_0 = \sup_{\|x\|_0 \leq 1} \|Ax\|_0.$$

---

\*) См., например, И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шиллов [1].

не превышающую  $\rho_0 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — произвольное (заданное до построения новой нормы) положительное число.

Напомним, что норма  $\|x\|_0$  называется *эквивалентной* нормой  $\|x\|$ , если

$$m\|x\| \leq \|x\|_0 \leq M\|x\| \quad (x \in E),$$

где  $m, M$  — фиксированные положительные числа. Нетрудно видеть, что непрерывность (или полная непрерывность) оператора, действующего в пространстве  $E$ , не зависит от того, какая из эквивалентных норм используется.

Пусть задано  $\varepsilon_0 > 0$ . В силу (2.42) можно указать такое  $n_0$ , что

$$\|A^{n_0}x\| \leq (\rho_0 + \varepsilon_0)^{n_0} \|x\| \quad (x \in E). \quad (2.43)$$

Положим

$$\|x\|_0 = \|x\| + \frac{\|Ax\|}{\rho_0 + \varepsilon_0} + \frac{\|A^2x\|}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^2} + \dots + \frac{\|A^{n_0-1}x\|}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{n_0-1}} \quad (x \in E). \quad (2.44)$$

Аксиомы нормы для  $\|x\|_0$  проверяются без труда; эквивалентность нормы (2.44) первоначальной норме следует из неравенств

$$\|x\| \leq \|x\|_0 \leq \left[ 1 + \frac{\|A\|}{\rho_0 + \varepsilon_0} + \dots + \frac{\|A\|^{n_0-1}}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{n_0-1}} \right] \|x\| \quad (x \in E). \quad (2.45)$$

**Лемма 2.2.** Пусть в пространстве  $E$  рассматривается норма (2.44). Тогда

$$\|A\|_0 \leq \rho_0 + \varepsilon_0. \quad (2.46)$$

**Доказательство.** Из (2.44) вытекает, что

$$\|Ax\|_0 = (\rho_0 + \varepsilon_0)\|x\|_0 + \frac{\|A^{n_0}x\|}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{n_0-1}} - (\rho_0 + \varepsilon_0)\|x\|,$$

откуда в силу (2.43)

$$\|Ax\|_0 \leq (\rho_0 + \varepsilon_0)\|x\|_0 \quad (x \in E).$$

Лемма доказана.

При переходе к эквивалентным нормам некоторые свойства первоначальной нормы могут быть утеряны. Пусть, например, первоначальная норма монотонна по отношению

к полуупорядоченности, порожденной конусом  $K$ : из  $x \leq y$  ( $x, y \in K$ ) вытекает, что  $\|x\| \leq \|y\|$ . Эквивалентная норма  $\|x\|_0$  может уже не быть монотонной. Однако имеет место

**Лемма 2.3.** Пусть  $\|x\|$  монотонна и пусть линейный оператор  $A$  оставляет  $K$  инвариантным.

Тогда норма (2.44) также монотонна.

**Доказательство.** Операторы  $A, A^2, \dots, A^{n_0-1}$  монотонны. Поэтому из  $x \leq y$  вытекает, что  $A^i x \leq A^i y$  ( $i = 1, \dots, n_0 - 1$ ) и в силу монотонности первоначальной нормы  $\|A^i x\| \leq \|A^i y\|$  ( $i = 1, \dots, n_0 - 1$ ).

Но тогда при  $\theta \leq x \leq y$

$$\begin{aligned} \|x\|_0 &= \|x\| + \frac{\|Ax\|}{\rho_0 + \varepsilon_0} + \dots + \frac{\|A^{n_0-1}x\|}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{n_0-1}} \leq \\ &\leq \|y\| + \frac{\|Ay\|}{\rho_0 + \varepsilon_0} + \dots + \frac{\|A^{n_0-1}y\|}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{n_0-1}} = \|y\|_0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**3. Доказательство теоремы 2.16.** Пусть  $f \in K$  и  $\lambda > \lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — радиус круга, в котором расположен спектр оператора  $A$ . Выберем такое число  $q < 1$ , что

$$\lambda_0 < q\lambda < \lambda.$$

В силу леммы 2.2 в  $E$  можно ввести такую норму  $\|x\|_0$ , что

$$\|A\|_0 = \sup_{\|x\|_0 \leq 1} \|Ax\|_0 < q\lambda. \quad (2.47)$$

Рассмотрим ряд

$$R_\lambda f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k f}{\lambda^{k+1}}. \quad (2.48)$$

Этот ряд сходится по новой норме, так как

$$\left\| \frac{A^k f}{\lambda^{k+1}} \right\| \leq \frac{\|A^k\|_0}{\lambda^{k+1}} \|f\|_0 \leq q^k \frac{\|f\|_0}{\lambda} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

а следовательно, и по обычной норме. Сумма  $R_\lambda f$  ряда (2.48) является решением уравнения (2.39), так как

$$AR_\lambda f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} f}{\lambda^{k+1}} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k f}{\lambda^{k+1}} = \lambda R_\lambda f - f.$$

Если  $f \in K$ , то все члены ряда (2.48) принадлежат  $K$ , а вместе с ними принадлежит  $K$  и элемент  $R_\lambda f$ .

Единственность решения уравнения (2.39) при условии  $\lambda > \lambda_0$  очевидна. Таким образом, первая часть утверждений теоремы 2.16 доказана.

Перейдем к случаю, когда  $\lambda \leq \lambda_0$  и когда выполнены неравенства (2.40) и (2.41).

При  $\lambda \leq 0$  утверждение теоремы очевидно. В случае, когда  $0 < \lambda \leq \lambda_0$ , теорему будем доказывать от противного.

Пусть

$$A\varphi^* + f = \lambda\varphi^*,$$

где  $\varphi^* \in K$  и  $\lambda \leq \lambda_0$ . Отсюда вытекает равенство

$$A^k\varphi^* + A^{k-1}f + \lambda A^{k-2}f + \dots + \lambda^{k-1}f = \lambda^k\varphi^*, \quad (2.49)$$

где  $k$  — произвольное натуральное число.

Из (2.49) (при  $k = n + 1$ ) и (2.40) следует, что

$$\varphi^* \geq \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n f \geq \frac{\epsilon}{\lambda^{n+1}} u_0.$$

Поэтому существует такое положительное число  $t_0$ , что  $\varphi^* - t_0 u_0 \in K$  и  $\varphi^* - t u_0 \notin K$  при  $t > t_0$ .

Из равенства (2.49), в котором  $k = p(n + 1)$ , вычтем неравенство

$$t_0 A^{p(n+1)} u_0 \geq t_0 \lambda^{p(n+1)} u_0,$$

которое следует из (2.41). После вычитания получим соотношение

$$\begin{aligned} A^{p(n+1)} (\varphi^* - t_0 u_0) + A^{p(n+1)-1} f + \lambda A^{p(n+1)-2} f + \dots \\ \dots + \lambda^{p(n+1)-1} f \leq \lambda^{p(n+1)} (\varphi^* - t_0 u_0). \end{aligned}$$

Отсюда, так как  $n \leq p(n + 1) - 1$ , вытекает неравенство

$$\lambda^{(p-1)(n+1)} A^n f \leq \lambda^{p(n+1)} (\varphi^* - t_0 u_0),$$

из которого в силу (2.40)

$$\varphi^* - t_0 u_0 \geq \frac{\epsilon}{\lambda^{n+1}} u_0.$$

Последнее неравенство противоречит максимальнойности  $t_0$ .

Теорема полностью доказана.

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что уравнение (2.39) с  $u_0$ -положительным оператором  $A$  не имеет в конусе  $K$  решений при  $f \in K$  ( $f \neq \theta$ ) и при  $\lambda \leq \lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — положительное собственное значение.

Вторую часть утверждения теоремы 2.16 (как и ряд других предложений из предыдущих параграфов) можно рассматривать как предложения о несовместности некоторых соотношений полуупорядоченности. Соответствующие теоремы излагаются в следующем пункте.

**4. Несовместные неравенства.** В дальнейшем будем писать

$$x \leq y,$$

если  $y - x \in K$ .

**Теорема 2.17.** Пусть оператор  $A$   $u_0$ -ограничен снизу, причем

$$Au_0 \geq \lambda_0 u_0. \quad (2.50)$$

Тогда для любого ненулевого  $x \in K$  при  $\lambda < \lambda_0$

$$Ax \leq \lambda x, \quad (2.51)$$

а из  $Ax \leq \lambda_0 x$  ( $x \in K$ ) следует, что

$$x = k u_0 \quad \text{и} \quad Au_0 = \lambda_0 u_0.$$

**Доказательство.** Вначале покажем справедливость соотношения (2.51).

Пусть  $Ax \leq \lambda x$ . Из  $u_0$ -ограниченности снизу оператора  $A$  вытекает, что

$$A^\rho x \geq \alpha u_0 \quad (\alpha > 0) \quad (2.52)$$

при некотором  $\rho$ . Положим  $A^\rho x = x_0$ ; тогда  $x_0 \geq \alpha u_0$  и

$$Ax_0 \leq \lambda x_0. \quad (2.53)$$

В силу (2.50) и (2.53)

$$\lambda x_0 \geq Ax_0 \geq \alpha Au_0 \geq \alpha \lambda_0 u_0.$$

Повторяя  $n$  раз это рассуждение, получим неравенство

$$\lambda^n x_0 \geq \alpha \lambda_0^n u_0,$$

то есть

$$x_0 \geq \alpha \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^n u_0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поэтому

$$\lambda_0 \leq \lambda.$$

Соотношение (2.51) доказано.

Пусть теперь  $Ax \leq \lambda_0 x$ . Снова найдем такое натуральное  $p$ , что выполнено (2.52), причем дополнительно потребуем, чтобы это  $p$  было минимальным.

Предположим вначале, что  $x_0 = A^p x \neq k u_0$ . Тогда можно будет указать такое  $t_0 > 0$ , что  $x_0 \geq t_0 u_0$  и  $x \geq t u_0$  при  $t > t_0$ . Но в силу  $u_0$ -ограниченности снизу оператора  $A$  при некоторых натуральном  $q$  и положительном  $\alpha_1$

$$A^q(x_0 - t_0 u_0) \geq \alpha_1 u_0,$$

откуда в силу (2.50)

$$\lambda_0^q x_0 \geq A^q x_0 = A^q(x_0 - t_0 u_0) + t_0 A^q u_0 \geq (\alpha_1 + \lambda_0^q t_0) u_0,$$

что противоречит максимальнойности  $t_0$ .

Таким образом,  $A^p x = k_0 u_0$ . Если  $p = 0$ , то доказательство завершено. Если  $p > 0$ , то введем обозначение

$$y = \lambda_0 A^{p-1} x - k_0 u_0.$$

Из минимальности  $p$  вытекает, что  $y \neq \theta$ . Очевидно,

$$y = A^{p-1}(\lambda_0 x - Ax) \geq \theta$$

и, следовательно,  $Ay \geq \theta$ . С другой стороны,

$$Ay = k_0(\lambda_0 u_0 - A u_0) \leq \theta.$$

Значит,  $Ay = \theta$ , а это равенство противоречит  $u_0$ -ограниченности снизу оператора  $A$ .

Теорема доказана.

**Теорема 2.18.** Пусть оператор  $A$   $u_0$ -ограничен сверху, причем

$$A u_0 \leq \lambda_0 u_0. \quad (2.54)$$

Тогда для любого ненулевого  $x \in K$  при  $\lambda > \lambda_0$

$$Ax \geq \lambda x. \quad (2.55)$$

Доказательство дословно повторяет первую часть доказательства предыдущей теоремы.



Отметим, что в условиях теоремы 2.18 могут существовать отличные от  $u_0$  элементы  $x_0$ , для которых  $Ax_0 \geq \lambda_0 x_0$ . Примером может служить оператор

$$A\{\xi, \eta\} = \{\lambda_0 \xi, \lambda_0 \xi\}$$

в двумерном пространстве пар  $\{\xi, \eta\}$  с конусом  $K$  пар с неотрицательными координатами; этот оператор  $u_0$ -ограничен сверху, где  $u_0 = \{1, 1\}$ , и  $Au_0 = \lambda_0 u_0$ , но для всех  $x = \{\xi, \eta\}$ , где  $0 \leq \eta \leq \xi$ , выполняется неравенство

$$Ax = \{\lambda_0 \xi, \lambda_0 \xi\} \geq \{\lambda_0 \xi, \lambda_0 \eta\} = \lambda_0 x.$$

**Теорема 2.19.** Пусть оператор  $A$   $u_0$ -положителен, причем

$$Au_0 = \lambda_0 u_0. \quad (2.56)$$

Тогда для любого ненулевого  $x \in K$  ( $x \neq ku_0$ ) элементы  $\lambda_0 x$  и  $Ax$  несравнимы:

$$\lambda_0 x \leq Ax, \quad \lambda_0 x \geq Ax.$$

**Доказательство.** Соотношение  $\lambda_0 x \geq Ax$  вытекает из теоремы 2.17. Соотношение  $\lambda_0 x \leq Ax$  доказывается аналогично.

Предположим противное: пусть  $\lambda_0 x \leq Ax$ . Выберем минимальное  $p$  так, что  $A^p x \leq \beta u_0$ . Пусть  $A^p x \leq t_0 u_0$  и  $A^p x \geq t_0 u_0$  при  $t < t_0$ ; число  $t_0$  положительно, так как

$$t_0 u_0 \geq A^p x \geq \lambda_0^p x.$$

Допустим, что  $A^p x \neq k u_0$ . Тогда  $t_0 u_0 - A^p x \neq \theta$ , и найдется такое натуральное  $q$ , что

$$A^q(t_0 u_0 - A^p x) \geq \alpha u_0,$$

где  $\alpha > 0$ . Но тогда

$$(t_0 \lambda_0^q - \alpha) u_0 \geq A^{p+q} x \geq \lambda_0^q A^p x,$$

то есть

$$A^p x \leq \left(t_0 - \frac{\alpha}{\lambda_0^q}\right) u_0,$$

что противоречит минимальности  $t_0$ .

Таким образом,  $A^p x = k_0 u_0$ . Положим

$$y = \lambda_0 A^{p-1} x - k_0 u_0.$$

Из (2.56) вытекает, что

$$Ay = \lambda_0 A^p x - k_0 A u_0 = k_0 (\lambda_0 u_0 - A u_0) = \theta,$$

а это противоречит  $u_0$ -ограниченности снизу оператора  $A$ . Теорема доказана.

Утверждение этой теоремы в других терминах было получено выше для вполне непрерывных  $u_0$ -положительных линейных операторов. Действительно, элементы вида  $Ax - \lambda_0 x$  ( $x \in E$ ) образуют инвариантное подпространство вполне непрерывного оператора, не содержащее собственного вектора  $u_0$ , если  $\lambda_0$  — простое собственное значение, соответствующее собственному вектору  $u_0$ . Поэтому из теоремы 2.10 и теоремы 2.12 вытекает утверждение теоремы 2.19 для  $u_0$ -положительных вполне непрерывных операторов.

Одно из приложений теорем этого пункта указывается ниже.

### 5. Сравнение собственных значений двух операторов.

Будем рассматривать различные операторы, оставляющие инвариантным один и тот же конус  $K$ .

Будем говорить, что оператор  $A_2$  больше оператора  $A_1$ , и писать  $A_1 \leq A_2$ , если

$$A_1 x \leq A_2 x \quad (x \in K). \quad (2.57)$$

Описанная полуупорядоченность в пространстве линейных непрерывных операторов — это обычная полуупорядоченность, порожденная конусом неотрицательных операторов (неотрицательные операторы образуют конус в пространстве операторов, если первоначальный конус  $K$  в пространстве  $E$  обладает тем свойством, что его линейная оболочка плотна в пространстве  $E$ ). Знак  $\leq$  для соотношения полуупорядоченности мы применяем как для пространства  $E$ , так и для пространства операторов.

В качестве примера рассмотрим действующие в некотором функциональном пространстве  $E$  интегральные операторы

$$A_1 x(t) = \int_a^b k_1(t, s) x(s) ds$$

и

$$A_2 x(t) = \int_a^b k_2(t, s) x(s) ds.$$

Если

$$0 \leq k_1(t, s) \leq k_2(t, s) \quad (t, s \in \Omega),$$

то оба оператора оставляют инвариантным конус неотрицательных функций, причем  $A_1 \leq A_2$ .

Допустим вначале, что положительные линейные операторы  $A_1$  и  $A_2$ , удовлетворяющие условию (2.57), вполне непрерывны. Допустим, далее, что

$$A_1 u_1 = \lambda_1 u_1 \quad (u_1 \in K, \quad u_1 \neq \theta, \quad \lambda_1 > 0).$$

Тогда

$$A_2 u_1 \geq \lambda_1 u_1,$$

и в силу теоремы 2.5 оператор  $A_2$  имеет положительный собственный вектор  $u_2$ :  $A_2 u_2 = \lambda_2 u_2$ , причем  $\lambda_2 \geq \lambda_1$ .

Из теорем предыдущего пункта можно получить сравнительные оценки для собственных значений операторов  $A_1$  и  $A_2$ , удовлетворяющих условию (2.57), без предположения об их полной непрерывности.

Допустим, что оператор  $A_1$   $u_0$ -ограничен снизу, причем выполнено условие (2.50)

$$A_1 u_0 \geq \lambda_0 u_0.$$

Пусть  $\lambda_2$  — положительное собственное значение оператора  $A_2$ :

$$A_2 \varphi = \lambda_2 \varphi.$$

Тогда из  $A_1 \leq A_2$  вытекает, что

$$A_1 \varphi \leq \lambda_2 \varphi$$

и в силу теоремы 2.17  $\lambda_0 \leq \lambda_2$ . Более того, в силу той же теоремы  $\lambda_0 < \lambda_2$ , если  $\varphi \neq k u_0$ .

Аналогично, пусть оператор  $A_2$   $u_0$ -ограничен сверху, причем выполнено условие (2.54)

$$A_2 u_0 \leq \lambda_0 u_0.$$

Пусть  $A_1 \psi = \lambda_1 \psi$  ( $\psi \in K$ ). Тогда из  $A_1 \leq A_2$  вытекает, что

$$A_2 \psi \leq \lambda_1 \psi$$

и в силу теоремы 2.18  $\lambda_1 \leq \lambda_0$ .

В сформулированных утверждениях в качестве  $u_0$  удобно выбирать положительный собственный вектор соответствующего оператора.

## ГЛАВА 3

### ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПО КОНУСУ

При изучении нелинейных операторов, оставляющих инвариантным некоторый конус, удобно пользоваться специальным понятием производных. Дифференцируемость по конусу является менее ограничительным предположением, чем дифференцируемость по Гато, а сильная дифференцируемость по конусу — менее ограничительным условием, чем дифференцируемость по Фреше.

В терминах производной удобно формулировать признаки положительности нелинейного оператора, его монотонности и т. д. По производным легко определить, есть ли в конусе элементы, удовлетворяющие специальным соотношениям полупорядоченности.

#### § 1. Производные по конусу

**1. Производные Гато и Фреше.** Напомним некоторые определения.

Функция  $x(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) со значениями в банаховом пространстве  $E$  называется *дифференцируемой в точке  $t_0$* , если существует такой элемент  $x'(t_0) \in E$ , что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0). \quad (3.1)$$

Производная  $x'(t)$  называется *сильной*, если рассматривается сильный предел (3.1) (предел по норме), и *слабой*, если рассматривается слабый предел. Свойства производной  $x'(t)$  в основном аналогичны свойствам производных обычных скалярных функций; мы этими свойствами будем пользоваться без специальных оговорок.

Нелинейный оператор  $A$  называется *дифференцируемым* в точке  $x_0$  по направлению  $h$ , если абстрактная функция

$$y(t) = A(x_0 + th) \quad (3.2)$$

дифференцируема по  $t$  в точке  $t=0$ . В соответствии с тем, сильно или слабо дифференцируема функция (3.2), будем говорить о *сильной* или *слабой дифференцируемости* оператора  $A$  в точке  $x_0$  по направлению  $h$ .

Допустим, что оператор  $A$  дифференцируем в точке  $x_0$  по всем направлениям  $h \in E$ . Это значит, что функции (3.2) дифференцируемы по  $t$  в точке  $t=0$  при всех  $h \in E$ . Во многих случаях производная функции (3.2) имеет вид

$$y'(0) = A'(x_0)h, \quad (3.3)$$

где  $A'(x_0)$  — линейный оператор. Оператор  $A'(x_0)$  называют *слабой* или *сильной производной Гато* оператора  $A$  в точке  $x_0$  в зависимости от того, слабые или сильные производные функций (3.2) рассматриваются.

Если приращение  $A(x_0 + h) - Ax_0$  можно представить в виде

$$A(x_0 + h) - Ax_0 = A'(x_0)h + \omega(x_0, h) \quad (h \in E), \quad (3.4)$$

где  $A'(x_0)$  — линейный оператор и

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\omega(x_0, h)}{\|h\|} = 0, \quad (3.5)$$

то оператор  $A'(x_0)$  называется *производной Фреше* (*сильной* или *слабой* в зависимости от того, сильный или слабый предел подразумевается в равенстве (3.5)). Ясно, что дифференцируемый по Фреше оператор дифференцируем по Гато, причем производные Фреше и Гато совпадают.

Оператор  $A$  называется *дифференцируемым* (по Гато или Фреше, сильно или слабо) на множестве  $G \subset E$ , если он дифференцируем в каждой точке  $x \in G$ . Если оператор  $A$  дифференцируем на  $G \subset E$ , то производную  $A'(x)$  можно рассматривать как определенный на  $G$  оператор со значениями в пространстве линейных непрерывных на  $E$  операторов.

При рассмотрении конкретных операторов проще всего доказывать существование слабой производной Гато. Больше всего следствий можно сделать из существования сильной

производной Фреше. Полезно помнить, что из существования на некотором открытом множестве непрерывной по норме линейных операторов слабой производной Гато  $A(x)$  вытекает, что эта слабая производная Гато является одновременно сильной производной Фреше.

Естественным образом (как сильный или слабый предел интегральных сумм) определяется *интеграл Римана* (сильный или слабый) от функций со значениями в банаховом пространстве  $E$ . В дальнейшем часто используется оценка

$$\left\| \int_a^b x(t) dt \right\| \leqslant \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \|x(t)\| (b-a) \quad (3.6)$$

и равенство

$$\int_a^b y'(t) dt = y(b) - y(a), \quad (3.7)$$

справедливое, например, для непрерывных функций  $y(t)$  с кусочно непрерывной производной  $y'(t)$ . В частности, из (3.7) вытекает, что

$$A(x+h) - Ax = \int_0^1 A'(x+th) h dt, \quad (3.8)$$

если  $A'(x+th)h$  непрерывна.

**2. Определения производных по конусу.** Будем говорить, что оператор  $A$  в точке  $x_0$  дифференцируем по направлениям конуса  $K \subset E$ , если функция  $y(t) = A(x_0 + th)$  дифференцируема по  $t$  в точке  $t=0$  при всех  $h \in K$ . Если производная  $y'(0)$  при  $h \in K$  допускает представление (3.3), то линейный оператор  $A'(x_0)$  является *производной по конусу  $K$*  (слабой или сильной) оператора  $A$  в точке  $x_0$ ; оператор  $A$  при этом будем называть *дифференцируемым по конусу* (сильно или слабо).

Если

$$A(x_0 + h) - Ax_0 = A'(x_0)h + \omega(x_0, h) \quad (h \in K), \quad (3.9)$$

где  $A'(x_0)$  — линейный оператор, и

$$\lim_{h \in K, \|h\| \rightarrow 0} \frac{\omega(x_0, h)}{\|h\|} = \theta, \quad (3.10)$$

то  $A'(x_0)$  будем называть производной Фреше по конусу  $K$

(*сильной* или *слабой*). Если существует производная Фреше по конусу, то существует и производная по конусу, причем эти производные совпадают.

Оператор  $A$  будем называть непрерывно дифференцируемым на множестве  $G \subseteq E$ , если его соответствующая производная  $A'(x)$  по норме операторов непрерывно зависит от  $x$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\|x-x^*\| \rightarrow 0} \|A'(x) - A'(x^*)\| &= \\ &= \lim_{\|x-x^*\| \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\|h\| \leq 1} \|A'(x)h - A'(x^*)h\| \right\} = 0. \end{aligned}$$

Естественным образом определяется понятие равномерной непрерывной дифференцируемости.

**3. Производные по несплюсненным конусам.** Возникает естественный вопрос о том, при каких предположениях из существования производных по конусу вытекает существование производной Фреше. Доказываемое ниже утверждение аналогично известной теореме из дифференциального исчисления о том, что непрерывность частных производных влечет существование полного дифференциала у функций многих переменных.

Будем говорить, что конус  $K$  *несплюснен*, если найдется такое  $n$ , что для каждого  $x \in E$  найдется такой элемент  $u = u(x) \in K$ , что

$$x \leq u(x) \quad (3.11)$$

и

$$\|u(x)\| \leq n\|x\| \quad (x \in E). \quad (3.12)$$

Нетрудно видеть, что конусы неотрицательных функций в пространствах  $C$  и  $L_p$  несплюснены. Оказывается, что *класс несплюсненных конусов совпадает с классом воспроизводящих конусов* \*). В доказательстве нуждается лишь тот факт, что каждый воспроизводящий конус несплюснен.

---

\*) Из несплюсненности воспроизводящего конуса вытекает, что положительный на воспроизводящем конусе аддитивный функционал  $f$  непрерывен. В предположении противного (и в силу несплюсненности конуса!) можно указать такую последовательность  $x_n \in K$ , что

$$0 < \|x_n\| < \frac{1}{n^3} \quad \text{и} \quad f(x_n) \rightarrow \infty.$$

Введем в рассмотрение элемент

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n + \dots$$

Если  $K$  — воспроизводящий конус, то  $E$  является объединением множеств  $E_n$ , состоящих из элементов  $x$ , для которых может быть указан такой элемент  $u(x)$ , что выполнены соотношения (3.11) и (3.12). Так как  $E$  имеет вторую категорию, то некоторое множество  $E_{n_1}$  всюду плотно в некотором шаровом кольце  $T\{r \leq \|x - x_0\| \leq R\}$ . Пусть  $x_0 \leq y_0 \in K$  и  $\|y_0\| \leq n_2 \|x_0\|$ . Тогда для каждого элемента  $x - x_0 (x \in E_{n_1} \cap T)$  найдется элемент  $u(x) + y_0 \in K$ , такой, что  $x - x_0 \leq u(x) + y_0$  и

$$\begin{aligned} \|u(x) + y_0\| &\leq n_1 \|x\| + n_2 \|x_0\| \leq \\ &\leq (n_1 + n_2) \|x_0\| + n_1 \|x - x_0\| \leq n_3 \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Это значит, что множество  $E_{n_3}$  всюду плотно в шаровом слое  $r \leq \|x\| \leq R$ . Но каждое из множеств  $E_n$  содержит вместе с каждой точкой  $x$  весь луч  $tx$  ( $t \geq 0$ ). Поэтому  $E_{n_3}$  плотно во всем  $E$ . Покажем, что  $E_{2n_3} = E$ . По элементу  $x \in E$  построим такие элементы  $x_1$  и  $y_1$ , что

$$\begin{aligned} x_1 \in E_{n_3}, \quad y_1 \in K, \quad \|x_1\| = \|x\|, \quad \|x - x_1\| \leq \frac{1}{2} \|x\|, \\ x_1 \leq y_1, \quad \|y_1\| \leq n_3 \|x_1\|. \end{aligned}$$

Аналогично по элементу  $x - x_1$  построим такие  $x_2$  и  $y_2$ , что

$$\begin{aligned} x_2 \in E_{n_3}, \quad y_2 \in K, \quad \|x_2\| = \|x - x_1\| \leq \frac{1}{2} \|x\|, \\ \|x - x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{4} \|x\|, \quad x_2 \leq y_2, \quad \|y_2\| \leq n_3 \|x_2\|. \end{aligned}$$

Далее построим последовательность таких  $x_k$  и  $y_k$ , что

$$\begin{aligned} x_k \in E_{n_3}, \quad y_k \in K, \\ \|x_k\| = \|x - x_1 - \dots - x_{k-1}\| \leq 2^{-k+1} \|x\|, \\ \|x - x_1 - \dots - x_k\| \leq 2^{-k} \|x\|, \quad x_k \leq y_k, \\ \|y_k\| \leq n_3 \|x_k\| \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Очевидно,  $\theta \leq nx_n \leq z$  и  $f(nx_n) \leq f(z)$ , откуда

$$f(x_n) \leq \frac{1}{n} f(z) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Мы пришли к противоречию.

Это же рассуждение приводит к указанию на стр. 65 обобщению теоремы 2.3: если конус  $K_1$  воспроизводящий, а конус  $K_2$  нормальный, то для непрерывности аддитивного оператора  $A$  достаточно, чтобы выполнялось условие  $AK_1 \subset K_2$ .



Очевидно, последовательности

$$z_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad u_k = y_1 + y_2 + \dots + y_k \\ (k = 1, 2, \dots)$$

сходятся: первая — к элементу  $x$ , вторая — к некоторому элементу  $u(x) \in K$ . При этом

$$x \leq u(x), \quad \|u(x)\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \|y_i\| \leq 2n_3 \|x\|.$$

Итак,  $E_{2n_3} = E$ . Наше утверждение доказано \*).

Примером сплюснутых конусов могут служить локально компактные конусы в бесконечномерных пространствах (см. стр. 30). Доказательство проведем от противного.

Пусть конус  $K$  локально компактен и несплюснут. Рассмотрим тогда произвольную ограниченную по норме последовательность  $x_n \in E$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). По предположению, найдется последовательность элементов  $u(x_n) \in K$ , удовлетворяющая условиям

$$x_n \leq u(x_n), \quad \|u(x_n)\| \leq M \|x_n\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из локальной компактности конуса  $K$  вытекает, что из последовательности  $u(x_n)$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность  $u(x_{n_i})$ . Элементы  $u(x_{n_i}) - x_{n_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) также принадлежат  $K$  и ограничены по норме; поэтому можно выбрать такую новую подпоследовательность индексов  $n_j$ , что последовательность  $u(x_{n_j}) - x_{n_j}$  сходится. Значит, сходится и последовательность  $x_{n_j}$ . Мы показали, что из каждой ограниченной по норме последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность — это противоречит бесконечности  $E$ .

**Теорема 3.1.** Пусть слабая производная  $A'(x)$  по несплюснутому конусу  $K$  непрерывна по норме операторов в окрестности  $U$  точки  $x_0$ .

Тогда  $A'(x)$  является сильной производной Фреше оператора  $A$  в точках  $x \in U$ .

---

\*) Аналогичными рассуждениями В. Я. Стеценко показал, что каждый  $K$ -воспроизводящий конус  $K_0$  (см. гл. 1, § 8) несплюснут в том смысле, что каждый элемент  $x \in E$  можно представить в виде  $x = u - v$  ( $u \in K_0$ ,  $v \in K$ ), где  $\|u\| \leq M \|x\|$  (см. И. А. Бахтин, М. А. Красносельский, В. Я. Стеценко [1]).

Доказательство. Введем обозначение

$$\omega(x, h) = A(x + h) - Ax - A'(x)h,$$

где  $x, x + h, x + h + u(-h) \in U$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} \omega(x, h) = A(x + h) - A[x + h + u(-h)] + \\ + A[x + h + u(-h)] - Ax - A'(x)h, \end{aligned}$$

и в силу (3.8), так как  $u(-h) \in K$  и  $h + u(-h) \in K$ ,

$$\begin{aligned} \omega(x, h) = - \int_0^1 A'[x + h + tu(-h)] u(-h) dt + \\ + \int_0^1 A'[x + th + tu(-h)] [h + u(-h)] dt - \\ - \int_0^1 A'(x) h dt = \\ = \int_0^1 \{A'(x) - A'[x + h + tu(-h)]\} u(-h) + \\ + \int_0^1 \{A'[x + th + tu(-h)] - A'(x)\} u(-h) + \\ + \int_0^1 \{A'[x + th + tu(-h)] - A'(x)\} h dt. \end{aligned}$$

Нормы разностей в квадратных скобках во всех трех последних интегралах стремятся к нулю при  $\|h\| \rightarrow 0$  (в силу (3.12)). Поэтому (снова используем (3.12))

$$\|\omega(x, h)\| = o(\|h\|).$$

Теорема доказана.

**4. Производные по конусу вполне непрерывных операторов.** Если вполне непрерывный оператор  $A$  дифференцируем по Фреше (сильно), то его производная  $A'(x)$  является линейным вполне непрерывным оператором (см. М. А. Красносельский [5]). Это утверждение переносится на операторы, дифференцируемые по конусу.

**Лемма 3.1.** Пусть вполне непрерывный оператор  $A$  в точке  $x_0$  имеет сильную производную Фреше  $A'(x_0)$  по конусу  $K$ .

Тогда производная  $A'(x_0)$  преобразует каждое ограниченное множество  $T \subset K$  в компактное множество.

**Доказательство.** Так как оператор  $A'(x_0)$  линейен, то достаточно рассмотреть случай, когда  $T$  является пересечением единичного шара с  $K$ .

Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдется такая последовательность элементов  $h_n \in K$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), что

$$\|h_n\| = 1; \quad \|A'(x_0)h_i - A'(x_0)h_j\| \geq \varepsilon_0, \quad (i \neq j),$$

где  $\varepsilon_0$  — некоторое положительное число.

Выберем такое  $\delta > 0$ , что

$$\|A(x_0 + h) - Ax_0 - A'(x_0)h\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \|h\|$$

при  $h \in K$  и  $\|h\| \leq \delta$ . Тогда при  $i \neq j$ ;

$$\begin{aligned} \|A(x_0 + \delta h_i) - A(x_0 + \delta h_j)\| &\geq \delta \|A'(x_0)h_i - A'(x_0)h_j\| - \\ &- \|A(x_0 + \delta h_i) - Ax_0 - \delta A'(x_0)h_i\| - \\ &- \|A(x_0 + \delta h_j) - Ax_0 - \delta A'(x_0)h_j\| \geq \frac{\varepsilon_0 \delta}{3}. \end{aligned}$$

Полученное неравенство означает, что множество  $AT$  некомпактно. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

При дополнительных предположениях о структуре конуса можно показать, что в условиях леммы 3.1 оператор  $A'(x_0)$  вполне непрерывен.

**Теорема 3.2.** Сильная производная Фреше по несплюсченному конусу  $K$  от вполне непрерывного оператора является вполне непрерывным оператором.

**Доказательство.** В силу (3.11) и (3.12) каждый элемент  $x \in E$  можно представить в виде

$$x = u - v \quad (u, v \in K),$$

где

$$\|u\| = \|u(x)\| \leq M\|x\|, \quad \|v\| \leq \|x\| + \|u\| \leq (1 + M)\|x\|.$$

Это значит, что каждый элемент  $A'(x_0)x$  ( $\|x\| \leq 1$ ) можно представить в виде

$$A'(x_0)x = A'(x_0)u - A'(x_0)v \\ (u, v \in K, \quad \|u\| \leq M, \quad \|v\| \leq 1 + M).$$

В силу леммы 3.1 элементы  $A'(x_0)u$  и  $A'(x_0)v$  принадлежат компактным множествам, поэтому разности их также образуют компактное множество.

Теорема доказана.

**5. Положительные и монотонные операторы.** Нелинейный оператор  $A$  называется монотонным на множестве  $T \subset E$ , если из  $x \leq y$  ( $x, y \in T$ ) следует, что  $Ax \leq Ay$ .

Простой признак монотонности дает

**Лемма 3.2.** Пусть множество  $T$  выпукло. Пусть оператор  $A$  в каждой точке множества  $T$  дифференцируем по направлениям конуса  $K$ , причем значения всех производных функций  $A[x + t(y - x)]$  ( $x, y \in T, x \leq y$ ) принадлежат  $K$ .

Тогда оператор  $A$  монотонен на  $T$ .

**Доказательство.** В предположении противного найдутся такие элементы  $x, y \in T$ , что  $x \leq y$ , но  $Ax \not\leq Ay$ . Построим тогда линейный положительный на  $K$  функционал  $f(x)$  такой, что

$$f(Ax) > f(Ay).$$

Из этого неравенства вытекает, что при некотором  $t_0 \in [0, 1]$  будет отрицательна производная функции

$$\alpha(t) = f[A(x + t(y - x))] \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Отсюда в свою очередь вытекает, что  $y'(t_0) \notin K$ , где

$$y(t) = A[x + t(y - x)] \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 3.2 в определенном смысле обратима: если дифференцируемый по направлениям конуса оператор  $A$  монотонен, то все производные функций  $A[x + t(y - x)]$  ( $x, y \in T, x \leq y$ ) положительны, то есть принадлежат конусу. Доказательство очевидно.

Оператор  $A$  на множестве  $T$  положителен, если  $AT \subset K$ . Очевидно, монотонный на  $T$  оператор будет положительным, если  $A\theta \in K$ .

Отметим, что из положительности на конусе  $K$  оператора  $A$  и из  $A\theta = 0$  вытекает, что  $[A(th)]'_{t=0} \in K$  при  $h \in K$  (если соответствующие производные существуют).

В заключение отметим, что для дифференцируемых по конусу операторов принадлежность всех производных функций  $A(x+th)$  ( $h \in K$ ) конусу равносильна тому, что оператор  $A'(x)$  оставляет конус  $K$  инвариантным.

## § 2. Производная на бесконечности

**1. Определения.** Будем говорить, что функция  $y(t)$  со значениями в  $E$  дифференцируема на бесконечности, если отношение  $\frac{1}{t}y(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  сходится к некоторому элементу  $y'(\infty) \in E$ . Как обычно, можно говорить о *сильной* или *слабой дифференцируемости на бесконечности* в зависимости от того, сильно или слабо сходится  $\frac{1}{t}y(t)$  к  $y'(\infty)$ .

Рассмотрим оператор  $A$ , действующий в пространстве  $E$  и определенный на элементах с достаточно большой нормой. Будем говорить, что оператор  $A$  дифференцируем на бесконечности по направлению  $h \in E$  (сильно или слабо), если функция

$$y(t) = A(th) \quad (3.13)$$

дифференцируема на бесконечности. Ясно, что из дифференцируемости по направлению  $h$  вытекает дифференцируемость по всем направлениям  $kh$  ( $k > 0$ ), причем

$$[A(tkh)]'_{t=\infty} = k[A(th)]'_{t=\infty}.$$

Допустим, что оператор  $A$  дифференцируем по всем направлениям  $h \in E$  ( $h \neq \theta$ ), причем производные  $y'(\infty)$  функций (3.13) представимы в виде

$$y'(\infty) = A'(\infty)h \quad (h \in E), \quad (3.14)$$

где  $A'(\infty)$  — некоторый линейный непрерывный оператор. Тогда оператор  $A$  будем называть *дифференцируемым на бесконечности* (сильно или слабо). Оператор  $A'(\infty)$  будем называть *производной* (сильной или слабой) *на бесконечности* оператора  $A$ .

Предположим, что оператор  $A$  дифференцируем на бесконечности по направлениям  $h \in K$  ( $h \neq 0$ ) и производные функций (3.13) допускают представление (3.14) при  $h \in K$ . В этом случае будем говорить, что  $A$  *дифференцируем на бесконечности по конусу* (сильно или слабо).  $A'(\infty)$  при этом будем называть *производной на бесконечности по конусу*.

Ясно, что дифференцируемость на бесконечности по конусу является существенно меньшим ограничением, чем обычная дифференцируемость. Простейшим примером в двумерном пространстве точек  $\{\xi, \eta\}$  с конусом  $K$  элементов с неотрицательными координатами может служить оператор

$$A\{\xi, \eta\} = \{e^{-(\xi+\eta)}, 0\}, \quad (3.15)$$

который недифференцируем на бесконечности, но имеет равную нулю производную на бесконечности по конусу  $K$ .

Оператор  $A'(\infty)$  будем называть *сильной асимптотической производной* оператора  $A$ , а оператор  $A$  будем называть *сильно асимптотически линейным*, если

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\|x\| \geq R} \frac{\|Ax - A'(\infty)x\|}{\|x\|} = 0. \quad (3.16)$$

Иногда бывает полезным следующее простое замечание: *если оператор  $A$  сильно асимптотически линейен, то сильно асимптотически линейны и все операторы  $C$  вида*

$$Cx = A(x_0 + x)$$

где  $x_0$  — фиксированный элемент, причем  $A'(\infty)$  является сильной асимптотической производной всех операторов  $C$ . Доказательство вытекает из очевидных неравенств:

$$\begin{aligned} & \sup_{\|x\| \geq R} \frac{\|A(x_0 + x) - A'(\infty)x\|}{\|x\|} \leq \\ & \leq \sup_{\|x\| \geq R - \|x_0\|} \frac{\|A(x_0 + x) - A'(\infty)(x_0 + x)\| + \|A'(\infty)x_0\|}{\|x_0 + x\|} \leq \\ & \leq \sup_{\|x\| \geq R - 2\|x_0\|} \frac{\|Ax - A'(\infty)x\|}{\|x\|} + \|A'(\infty)\| \frac{\|x_0\|}{R - 2\|x_0\|}. \quad (3.17) \end{aligned}$$

Оператор  $A'(\infty)$  назовем *сильной асимптотической производной по конусу  $K$* , а оператор  $A$  — *сильно асимп-*

топически линейным по конусу  $K$ , если

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\|x\| \geq R, x \in K} \frac{\|Ax - A'(\infty)x\|}{\|x\|} = 0. \quad (3.18)$$

Доказанное выше замечание об операторах  $C_x = A(x_0 + x)$  сохраняет силу для производных по конусу, если  $x_0 \in K$ , — неравенства (3.17) остаются справедливыми для элементов  $x \in K$ .

Если в условиях (3.16) и (3.18) заменить отношения  $\frac{\|Ax - A'(\infty)x\|}{\|x\|}$  отношениями  $\frac{l[Ax - A'(\infty)x]}{\|x\|}$ , где  $l(x)$  — любой линейный непрерывный функционал, то мы, естественным образом, получим определения *слабой асимптотической линейности* и *слабой асимптотической линейности по конусу*.

Отметим в заключение, что все приведенные выше определения, связанные с дифференцируемостью на бесконечности, без изменений переносятся на операторы  $A$ , действующие из одного банахова пространства в другое.

**2. Существование сильной асимптотической производной.**

**Теорема 3.3.** Пусть оператор  $A$  имеет слабую производную Гато  $A'(x)$  в каждой точке  $x$  с достаточно большой нормой. Пусть

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|A'(x) - B\| = 0, \quad (3.19)$$

где  $B$  — некоторый линейный оператор.

Тогда  $B$  является сильной асимптотической производной оператора  $A$ .

**Доказательство.** В силу (3.19) можно указать такое  $R_0 > 0$ , что

$$\|A'(x)\| \leq M \quad (\|x\| \geq R_0). \quad (3.20)$$

Покажем вначале, что при любом  $R \geq R_0$

$$\sup_{\|x\|=R} \|Ax\| = a(R) < \infty. \quad (3.21)$$

Пусть  $\|x_0\| = R$ . Тогда можно указать такое  $n_0$ , что для каждого  $x$ , норма которого равна  $R$ , либо отрезок  $[2x, n_0x_0]$ , либо отрезок  $[2x, -n_0x_0]$  полностью состоит из точек, норма которых больше  $R$ . Действительно, в предположении

противного можно было бы указать такую последовательность элементов  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и такие последовательности чисел  $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1]$ , что

$$\left. \begin{aligned} \|x_n\| &= R, \\ \|2\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) n x_0\| &\leq R, \\ \|2\beta_n x_n - (1 - \beta_n) n x_0\| &\leq R \\ (n &= 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|(1 - \beta_n)[2\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) n x_0] + \\ + (1 - \alpha_n)[2\beta_n x_n - (1 - \beta_n) n x_0]\| \leq (2 - \alpha_n - \beta_n) R, \end{aligned}$$

то есть

$$2\alpha_n + 2\beta_n - 4\alpha_n\beta_n \leq 2 - \alpha_n - \beta_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Последнее неравенство не может выполняться\*), так как в силу (3.22)  $\alpha_n \rightarrow 1$  и  $\beta_n \rightarrow 1$ , причем  $\alpha_n < 1$  и  $\beta_n < 1$ .

Пусть, для определенности, отрезок  $[2x, n_0 x_0]$  состоит из точек, норма которых больше  $R$ . Тогда во всех точках этого отрезка оператор  $A$  имеет производную, удовлетворяющую неравенствам (3.20). Следовательно,

$$\|A(2x) - A(n_0 x_0)\| \leq M \|2x - n_0 x_0\|.$$

Аналогично

$$\|Ax - A(2x)\| \leq M \|x\|.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq \|Ax - A(2x)\| + \|A(2x) - A(a_0 x_0)\| + \|A(n_0 x_0)\| \leq \\ &\leq M(3 + n_0)R + \|A(n_0 x_0)\|. \end{aligned}$$

Если из точек, норма которых больше  $R$ , состоит отрезок  $[2x, -n_0 x_0]$ , то выполняется неравенство

$$\|Ax\| \leq M(3 + n_0)R + \|A(-n_0 x_0)\|.$$

Неравенство (3.21) доказано.

---

\*) Рассмотрим функцию  $\varphi(\alpha, \beta) = 3\alpha + 3\beta - 4\alpha\beta - 2$ . Очевидно,  $\varphi(1, 1) = 0$  и  $\varphi'_\alpha(1, 1) = \varphi'_\beta(1, 1) = -1$ . Поэтому при значениях  $\alpha, \beta$ , близких к 1, но меньших чем 1, выполнено неравенство  $\varphi(\alpha, \beta) > 0$ , то есть

$$2\alpha + 2\beta - 4\alpha\beta > 2 - \alpha - \beta,$$



Чтобы доказать равенство (3.16), достаточно показать, что для каждого линейного функционала  $f(x)$  справедливо равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\|x\| \geq R} \frac{f(Ax - Bx)}{\|f\| \|x\|} = 0.$$

Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Выберем такое  $R_1 \geq R_0$ , что

$$\|A'(x) - B\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\|x\| \geq R_1).$$

Рассмотрим скалярную функцию

$$\psi(t) = f[A(tx) - tBx] \quad \left(-\frac{R_1}{\|x\|} \leq t \leq 1\right).$$

Очевидно,

$$\psi'(t) = f\{[A'(tx) - B]x\},$$

откуда следует, что

$$|\psi'(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|f\| \|x\|$$

и в силу теоремы Лагранжа

$$\begin{aligned} \left| f\left[Ax - A\left(\frac{R_1}{\|x\|}x\right) - B\left(x - \frac{R_1}{\|x\|}x\right)\right] \right| &= \\ &= \left| \psi(1) - \psi\left(\frac{R_1}{\|x\|}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|f\| \|x\|. \end{aligned}$$

Далее выберем число  $R_2 \geq R_1$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{a(R_1) + R_1 \|B\|}{R_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при  $\|x\| \geq R_2$

$$\begin{aligned} \frac{|f(Ax - Bx)|}{\|f\| \|x\|} &\leq \frac{\left| f\left[Ax - A\left(\frac{R_1}{\|x\|}x\right) - B\left(x - \frac{R_1}{\|x\|}x\right)\right] \right|}{\|f\| \|x\|} + \\ &+ \frac{\left| f\left[A\left(\frac{R_1}{\|x\|}x\right)\right] \right| + \frac{R_1}{\|x\|} |f(Bx)|}{\|f\| \|x\|} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a(R_1) + R_1 \|B\|}{\|x\|} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Доказательство упростилось бы, если дополнительно потребовать, чтобы оператор  $A$  был определен на всем  $E$  и чтобы при каждом  $R$  было выполнено (3.21).

### 3. Сильно асимптотически линейные по конусу операторы.

Теорема 3.4. Пусть оператор  $A$  определен на конусе  $K$  и удовлетворяет при каждом  $R$  условию

$$\sup_{x \in K, \|x\| \leq R} \|Ax\| < \infty. \quad (3.23)$$

Пусть  $A$  в каждой точке  $x \in K$  с достаточно большой нормой имеет слабую производную Гато  $A'(x)$  по конусу, причем

$$\lim_{x \in K, \|x\| \rightarrow \infty} \|A'(x) - B\| = 0, \quad (3.24)$$

где  $B$  — некоторый линейный оператор.

Тогда  $B$  является сильной асимптотической производной по конусу  $K$  оператора  $A$ .

Для доказательства достаточно повторить последнюю часть доказательства теоремы 3.3, предварительно заметив, что условие (3.23) заменяет (3.21).

Допустим теперь, что оператор  $A$  вполне непрерывен. Его сильная асимптотическая производная (если она существует) будет вполне непрерывным линейным оператором (см. М. А. Красносельский [5]). Это утверждение переносится на производные по конусу: *сильная асимптотическая производная по конусу  $K$  вполне непрерывного оператора является линейным оператором, который преобразует каждое ограниченное множество  $T \subset K$  в компактное множество.* Доказывается это утверждение так же, как лемма 3.1.

Из последнего утверждения вытекает (аналогично тому, как из леммы 3.1 следовала теорема 3.2), что *сильная асимптотическая производная по несплюсненному конусу вполне непрерывного оператора является вполне непрерывным оператором.*

Выше (§ 1 и 5) отмечалось, что производные по конусу монотонных операторов являются положительными операторами. Аналогичным утверждением является

Лемма 3.3. *Производная  $A'(\infty)$  по конусу положительного оператора  $A$  является линейным положительным оператором.*

**Доказательство.** Допустим, что  $A'(\infty)$  — слабая производная по конусу. Предположим, что  $A'(\infty)h_0 \notin K$ , где  $h_0$  — некоторый элемент из  $K$ .

Построим такой линейный положительный функционал  $f(x)$ , что

$$\alpha_0 = f[A'(\infty)h_0] < 0.$$

Тогда функция

$$\chi(t) = f[A(th_0)]$$

при больших значениях  $t$  будет принимать отрицательные значения, так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ f \left[ \frac{A(th_0) - tA'(\infty)h_0}{t} \right] + \alpha_0 \right\} = -\infty. \quad (3.25)$$

Это значит, что  $A(th_0) \notin K$  при больших  $t$ , то есть оператор  $A$  не обладает свойством положительности.

Лемма доказана.

### § 3. Неравенства для элементов с малыми нормами

**1. Постановка задачи.** Пусть  $A$  — некоторый нелинейный оператор и пусть  $A\theta = \theta$ .

В дальнейшем существенную роль играют такие элементы  $x_0 \in K$ , что  $Ax_0 \leq x_0$  или  $Ax_0 \geq x_0$ . Если искать элементы  $x_0$ , удовлетворяющие указанным неравенствам, с малыми нормами, то естественно воспользоваться производной  $A'(\theta)$  оператора  $A$  в точке  $\theta$ . Можно ожидать, например, что те элементы  $x_0$  с малыми нормами, для которых  $A'(\theta)x_0 = \lambda_0 x_0$ , где  $\lambda_0 > 1$ , обладают тем свойством, что  $Ax_0 \geq x_0$ . Наоборот, если  $A'(\theta)x_0 = \lambda_0 x_0$  и  $\lambda_0 < 1$ , то можно ожидать выполнения неравенства  $Ax_0 \leq x_0$ . Оказывается, что в ряде случаев указанные предположения верны; эти случаи описываются в последующих пунктах.

В других задачах бывает важно знать, что для всех ненулевых элементов  $x \in K$  с достаточно малыми нормами выполнены соотношения  $x \leq Ax$  или  $x \geq Ax$ . Для линейных операторов вопрос о таких соотношениях рассмотрен в гл. 2 (§ 5, п. 4). Естественно в случае нелинейных операторов вопрос об интересующих нас соотношениях также свести к рассмотрению оператора  $A'(\theta)$ . Ниже будут указаны случаи, когда это удается сделать.

**2. Элементы, «идущие вперед».** Будем говорить, что элемент  $x_0$  при применении оператора  $A$  «идет вперед», если

$$Ax_0 \geq x_0. \quad (3.26)$$

Через  $K(r)$  будем обозначать совокупность таких элементов  $x \in K$ , что  $\|x\| \leq r$ .

*Лемма 3.4.* Пусть  $K$  — телесный конус. Пусть определенный на  $K(r)$  оператор  $A (A\theta = \theta)$  имеет в точке  $\theta$  производную  $A'(\theta)$  по конусу. Пусть линейный оператор  $A'(\theta)$  имеет собственный вектор  $h_0$ , являющийся внутренним элементом конуса  $K$ , причем

$$A'(\theta)h_0 = \lambda_0 h_0, \quad (3.27)$$

где  $\lambda_0 > 1$ .

Тогда найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что неравенство (3.26) выполнено для всех элементов  $x_0 = \varepsilon h_0$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

*Доказательство.* В предположении противного можно указать такую последовательность  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , что

$$A(\varepsilon_n h_0) \geq \varepsilon_n h_0,$$

то есть

$$\frac{A(\varepsilon_n h_0)}{\varepsilon_n} - \lambda_0 h_0 + (\lambda_0 - 1)h_0 \in K \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.28)$$

Из дифференцируемости оператора  $A$  по направлению  $h_0$  и из (3.27) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{A(\varepsilon_n h_0)}{\varepsilon_n} - \lambda_0 h_0 \right\| = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{\|A(\varepsilon_n h_0) - \varepsilon_n A'(\theta)h_0\|}{\varepsilon_n} = 0.$$

Но тогда в силу (3.28) элемент  $(\lambda_0 - 1)h_0$  является предельным для последовательности элементов, лежащих вне конуса. Значит, элемент  $(\lambda_0 - 1)h_0$ , а вместе с ним и элемент  $h_0$  не является внутренним элементом  $K$ . Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Если конус  $K$  не обладает свойством телесности, то утверждение леммы 3.4 в общем случае неверно (даже если оператор  $A$  положителен). Рассмотрим, например, в пространстве  $L_p$  (где  $p$  — некоторое фиксированное число из  $[1, \infty)$ )

функций  $x(t)$  на отрезке  $[0, 1]$  оператор

$$Ax(t) = 2t^{\|x\|^2} \int_0^1 x(s) ds.$$

Положительность этого оператора очевидна. Оператор  $A$  в точке  $\theta$  имеет производную

$$A'(\theta)x(t) = 2 \int_0^1 x(s) ds,$$

так как  $A\theta = \theta$  и при  $x(t) \in K$

$$\begin{aligned} \|Ax - A'(\theta)x\| &= 2 \int_0^1 x(s) ds \left\{ \int_0^1 (1 - t^{\|x\|^2})^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq 2 \int_0^1 x(s) ds \left\{ \int_0^1 (1 - t^{\|x\|^2}) dt \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= 2 \int_0^1 x(s) ds \left( \frac{\|x\|^2}{1 + \|x\|^2} \right)^{\frac{1}{p}} = o(\|x\|). \end{aligned}$$

Оператор  $A'(\theta)$  имеет собственную функцию  $h_0(t) \equiv 1$ , которой отвечает собственное значение  $\lambda_0 = 2$ . В то же время при любом сколь угодно малом положительном  $\varepsilon$  неравенство  $A(\varepsilon h_0) \geq \varepsilon h_0$  не выполняется, ибо  $A(\varepsilon h_0) = 2\varepsilon t^{\varepsilon^2}$  и при малых  $t$  эта функция принимает значения, меньшие чем  $\varepsilon$ .

Этот пример и теорема 3.4 показывают, что при отыскании элемента  $x_0$ , удовлетворяющего условию (3.26), удобно пользоваться такими нормами (если это возможно), в которых конус  $K$  телесен. В частности, целесообразно применять различные  $u_0$ -нормы.

Приведем одно из утверждений, получающихся при этом, причем включим в него для удобства дальнейших ссылок лемму 3.4:

**Теорема 3.5.** Пусть определенный на некотором  $K(r)$  оператор  $A(A\theta = \theta)$  имеет сильную производную  $A'(\theta)$  по конусу. Пусть

$$A'(\theta)h_0 = \lambda_0 h_0, \quad (3.27)$$

где  $h_0 \in K$  ( $h_0 \neq \theta$ ) и  $\lambda_0 > 1$ . Пусть, наконец, выполнено одно из двух условий:

3.5 (а) конус  $K$  телесен,  $h_0$  — внутренний элемент  $K$ ;

3.5 (б) оператор  $A$  дифференцируем по направлению  $h_0$  по  $h_0$ -норме:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|A(\epsilon h_0) - \epsilon A'(\theta) h_0\|_{h_0}}{\epsilon} = 0. \quad (3.29)$$

Тогда найдется такое  $\epsilon_0 > 0$ , что все элементы  $x_0 = \epsilon h_0$  удовлетворяют неравенству

$$Ax_0 \geq x_0. \quad (3.26)$$

если  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ .

Доказательство. Случай 3.5 (а) соответствует лемме 3.4. При условии 3.5 (б) доказательство проводится аналогично со следующими очевидными изменениями: из (3.28) нужно сделать вывод, что  $(\lambda_0 - 1)h_0$  не является внутренним элементом конуса  $\bar{K}_{h_0}$  в пространстве  $\bar{E}_{h_0}$ , что противоречит лемме 1.4 и теореме 1.4.

Теорема доказана.

Дифференцируемость оператора  $A$  в условиях теоремы 3.5 можно было бы заменить менее ограничительным предположением о том, что оператор  $A$  дифференцируем лишь по направлению  $h_0$  и производная по этому направлению равна  $\lambda_0 h_0$ , где  $\lambda_0 > 1$ . Такое предположение неудобно, так как оно не дает рецепта ни для отыскания элемента  $h_0$ , ни для доказательства существования такого элемента.

**3. Использование высших производных.** Если в условии (3.27)  $\lambda_0 < 1$ , то, как будет показано ниже, даже положительный оператор  $A$ , вообще говоря, не имеет в конусе элементов, с малой нормой «идущих вперед» при применении оператора  $A$ . Сомнительным остается случай  $\lambda_0 = 1$ . В этом случае по производной  $A'(\theta)$  судить о наличии «идущих вперед» элементов не удастся.

В этом пункте мы будем предполагать, что оператор  $A$  допускает представление

$$Ax = A'(\theta)x + Cx + Dx, \quad (3.30)$$

где  $A'(\theta)$  — сильная производная по конусу  $K$ ,  $C$  — однородный оператор порядка  $k$  ( $k > 1$ ):

$$C(\epsilon x) = \epsilon^k Cx \quad (x \in K), \quad (3.31)$$

а  $D$  — оператор высшего порядка малости:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|D(\varepsilon x)\|}{\varepsilon^k} = 0 \quad (x \in K). \quad (3.32)$$

**Теорема 3.6.** Пусть оператор  $A$  допускает представление (3.30), причем

$$A'(\theta)h_0 = h_0 \quad (3.33)$$

и  $Ch_0 \in K$ . Пусть выполнено одно из двух условий:

3.6 (а) конус  $K$  телесен,  $Ch_0$  — внутренний элемент  $K$ ;

3.6 (б) оператор  $A$  удовлетворяет условиям

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|D(\varepsilon h_0)\|_{h_0}}{\varepsilon^k} = 0, \quad (3.34)$$

$$\alpha h_0 \leq Ch_0 \leq \beta h_0, \quad (3.35)$$

где  $\alpha, \beta > 0$ .

Тогда найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что все элементы  $x_0 = \varepsilon h_0$  удовлетворяют неравенству (3.26), если  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим случай 3.6 (б), который включает в себя случай 3.6 (а).

В предположении противного найдется такая последовательность  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , что

$$A(\varepsilon_n h_0) \not\geq \varepsilon_n h_0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то есть

$$Ch_0 + \frac{D(\varepsilon_n h_0)}{\varepsilon_n^k} \notin K \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда в силу (3.34) вытекает, что  $Ch_0$  не является внутренним элементом конуса  $\overline{K}_{h_0}$  в пространстве  $\overline{E}_{h_0}$ . С другой стороны, условие (3.35) означает, что  $Ch_0$  является внутренним элементом конуса  $\overline{K}_{h_0}$ . Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

**4. Использование минорант.** Укажем еще один простой прием для отыскания элементов  $x_0$ , «идущих вперед» при применении оператора  $A$ .

Оператор  $A^-$  назовем *минорантой оператора  $A$*  на множестве  $T$ , если

$$A^-x \leq Ax \quad (x \in T). \quad (3.36)$$

Допустим, что для миноранты  $A^-$  оператора  $A$  удалось найти такой элемент  $x_0$ , что  $A^-x_0 \gg x_0$ . Тогда, очевидно,

$$Ax_0 \gg x_0.$$

Таким образом, для отыскания «идущего вперед» элемента  $x_0$  можно пользоваться различными минорантами. В ряде случаев в качестве такой миноранты можно рассматривать производную  $A'(\theta)$  или оператор  $(1 - \delta)A'(\theta)$  ( $\delta$  — достаточно малое число), даже если не выполнены все условия теоремы 3.5 или теоремы 3.6.

**5. Элементы, «идущие назад».** Будем говорить, что элемент  $x_0$  при применении оператора  $A$  «идет назад», если

$$Ax_0 \leq x_0. \quad (3.37)$$

Нетрудно доказать аналогичные теоремам 3.5 и 3.6 признаки существования в  $K$  «идущих назад» малых ненулевых элементов. Сформулируем эти признаки в виде одной теоремы.

**Теорема 3.7.** Пусть определенный на некотором  $K(r)$  оператор  $A$  ( $A\theta = \theta$ ) имеет сильную производную  $A'(\theta)$  по конусу  $K$ , причем  $Ah_0 = \lambda_0 h_0$ , где  $h_0 \in K$ ,  $h_0 \neq \theta$ .

Тогда для существования такого  $\epsilon_0 > 0$ , что все элементы  $x_0 = \epsilon h_0$  ( $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ) «идут назад» при применении оператора  $A$ , достаточно выполнения одного из трех условий:

3.7 (а)  $0 \leq \lambda_0 < 1$ , конус  $K$  телесен,  $h_0$  — внутренний элемент  $K$ ;

3.7 (б)  $0 \leq \lambda_0 < 1$ , оператор  $A$  дифференцируем по направлению  $h_0$  по  $h_0$ -норме (выполнено условие (3.29));

3.7. (в)  $\lambda_0 = 1$ , оператор  $A$  допускает представление (3.30), где  $D$  удовлетворяет условиям (3.34), и

$$\alpha h_0 \leq -Ch_0 \leq \beta h_0, \quad (3.38)$$

где  $\alpha, \beta > 0$ .

На доказательстве мы не останавливаемся.

Сделаем еще одно замечание.

Оператор  $A^+$  назовем *мажорантой* оператора  $A$  на множестве  $T$ , если

$$A^+x \geq Ax \quad (x \in T). \quad (3.39)$$



Нетрудно видеть, что «идущие назад» при применении мажоранты  $A^+$  элементы  $x_0$  и при применении оператора  $A$  будут удовлетворять условию (3.36).

**6. Отсутствие «идущих вперед» элементов.** Будем говорить, что оператор  $A$  *равномерно  $h_0$ -ограничен сверху*, если для каждого достаточно малого  $\epsilon > 0$  можно указать такое  $r = r(\epsilon) > 0$ , что

$$Ax \leq \epsilon h_0 \quad (x \in K, \quad \|x\| \leq r). \quad (3.40)$$

Если конус  $K$  телесен, а  $h_0$  — внутренний элемент конуса, то равномерно  $h_0$ -ограниченными сверху будут все непрерывные в точке  $\theta$  операторы  $A$ , удовлетворяющие условию  $A\theta = \theta$ .

Точку  $\theta$  назовем *притягивающей* для оператора  $A$ , если  $A\theta = \theta$  и если найдется такое  $r_0 > 0$ , что

$$Ax \geq x \quad (x \in K(r_0), \quad x \neq \theta). \quad (3.41)$$

Приведем некоторые признаки, которые позволяют судить о том, что точка  $\theta$  является притягивающей.

Через  $\langle x_0, y_0 \rangle$  будем обозначать множество таких  $x \in E$ , что

$$x_0 \leq x \leq y_0.$$

**Теорема 3.8.** Пусть  $A'(\theta)$  является сильной производной Фреше по конусу оператора  $A$ , который равномерно  $h_0$ -ограничен сверху, монотонен и удовлетворяет условию 3.7 (а) или 3.7 (б) теоремы 3.7, причем при условии 3.7 (б) предполагается, что  $\lambda_0$  — наибольшее собственное значение оператора  $A'(\theta)$ .

Тогда для того, чтобы точка  $\theta$  была притягивающей, достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

3.8 (а) оператор  $A$  вполне непрерывен. Конус  $K$  нормален;

3.8 (б) пространство  $E$  слабо полно, единичный шар в пространстве  $E$  слабо компактен, оператор  $A$  слабо непрерывен. Конус  $K$  допускает оштукатуривание.

**Доказательство.** Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдется такая последовательность  $x_n \in K$ , что

$$Ax_n \geq x_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.42)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0.$$

Из последнего равенства и из равномерной  $h_0$ -ограниченности оператора  $A$  вытекает, что

$$Ax_n \leq \epsilon_n h_0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.43)$$

где  $\epsilon_n \rightarrow 0$ . В силу теоремы 3.7 можно считать, что

$$A(\epsilon_n h_0) \leq \epsilon_n h_0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.44)$$

Рассмотрим множество  $\langle x_n, \epsilon_n h_0 \rangle$ . Оно ограничено в силу нормальности конуса  $K$ . Из монотонности оператора  $A$  и неравенств (3.42) и (3.44) вытекает, что оператор  $A$  преобразует  $\langle x_n, \epsilon_n h_0 \rangle$  в себя: если

$$x_n \leq x \leq \epsilon_n h_0,$$

то

$$x_n \leq Ax_n \leq Ax \leq A(\epsilon_n h_0) \leq \epsilon_n h_0.$$

Если выполнено условие 3.8 (а), то в силу принципа Шаудера, а если выполнено условие 3.8 (б) — то в силу принципа Тихонова оператор  $A$  имеет на каждом множестве  $\langle x_n, \epsilon_n h_0 \rangle$  по крайней мере одну неподвижную точку  $y_n$ :

$$Ay_n = y_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При этом  $\|y_n\|_{h_0} \leq \epsilon_n \rightarrow 0$ , а так как конус  $K$  нормален, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0. \quad (3.45)$$

Допустим, что выполнено условие 3.8 (а). В силу леммы 3.1 оператор  $A'(\theta)$  преобразует последовательность

$$\frac{y_n}{\|y_n\|} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.46)$$

в компактную. Без ограничения общности можно считать, что последовательность

$$A'(\theta) \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.47)$$

сходится сильно к некоторому элементу  $y^*$  (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности). Тогда и последовательность (3.46) также сходится сильно к  $y^*$ , ибо

в силу сильной дифференцируемости по конусу оператора  $A$  в точке  $\theta$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{y_n}{\|y_n\|} - y^* \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|Ay_n - A'(\theta)y_n\|}{\|y_n\|} + \\ + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| A'(\theta) \frac{y_n}{\|y_n\|} - y^* \right\| = 0.$$

Таким образом,

$$A'(\theta)y^* = y^*. \quad (3.48)$$

Пусть выполнено условие 3.8 (б). Тогда без ограничения общности можно считать, что последовательность (3.46) слабо сходится к некоторому элементу  $y^*$ , который отличен от  $\theta$  в силу леммы 1.7. Последовательность (3.47) будет слабо сходиться к элементу  $A'(\theta)y^*$ , так как каждый линейный оператор слабо непрерывен. Далее, из равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| A'(\theta) \frac{y_n}{\|y_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A'(\theta)y_n - Ay_n\|}{\|y_n\|} = 0$$

вытекает, что  $y^*$  удовлетворяет равенству (3.48).

Итак, из предположения, что утверждение теоремы неверно, вытекает, что оператор  $A'(\theta)$  имеет позитивное собственное значение, равное 1.

Дальнейшие рассуждения будем проводить отдельно для каждого из условий теоремы 3.7.

Пусть выполнено условие 3.7 (а). Тогда конус  $K$  телесен и поэтому оператор  $A'(\theta)$  является линейным  $h_0$ -ограниченным сверху оператором. Из теоремы 2.14 тогда вытекает, что все собственные значения  $A'(\theta)$  не превышают  $\lambda_0$ , а это противоречит (3.48). Полученное противоречие доказывает теорему 3.8.

Пусть выполнено условие 3.7 (б), тогда  $\lambda_0$  — наибольшее собственное значение оператора  $A'(\theta)$ , и мы пришли к тому же противоречию.

Теорема доказана.

Условия (3.7) (а) и 3.7 (б) в доказательстве теоремы были использованы для того, чтобы иметь возможность воспользоваться неравенствами (3.44). Поэтому условия 3.7 (а) и 3.7 (б) можно заменить предположением, что  $A(\varepsilon h_0) \leq \varepsilon h_0$  при достаточно малых  $\varepsilon > 0$ , и предположением, что 1 не является собственным значением оператора  $A'(\theta)$ .

Для немонотонных операторов  $A$  выяснение того, будет ли точка  $\theta$  притягивающей, более сложно. Здесь удобно пользоваться мажорантами: если для мажоранты  $A^+$  точка  $\theta$  притягивающая, то тем более она притягивающая для  $A$ . Мажорантами удобно пользоваться и при изучении некоторых монотонных операторов.

Один простой признак того, что  $\theta$  — притягивающая точка, можно дать для случая конусов, допускающих оштукатуривание.

**7. Операторы, производные которых  $K$ -расщепляемы.** Будем говорить, что линейный оператор  $K$ -расщепляем, если этот оператор  $B$  имеет в конусе  $K$  собственный вектор  $h_0$  и имеет инвариантное подпространство  $E_1 \subset E$ , пересекающееся с  $K$  лишь в точке  $\theta$ , причем подпространство  $E_1$  имеет дефект, равный 1. Это значит, что каждый элемент  $x \in E$  однозначно представим в виде

$$x = f(x) h_0 + x_1 \quad (x_1 \in E_1). \quad (3.49)$$

где  $f(x)$  — линейный функционал, удовлетворяющий условиям  $f(h_0) = 1$ ,  $f(x_1) = 0$  при всех  $x_1 \in E_1$ . Тогда

$$Bx = \lambda_0 f(x) h_0 + Bx_1. \quad (3.50)$$

Примером  $K$ -расщепляемого оператора может служить в силу теоремы 2.12 каждый  $u_0$ -положительный линейный вполне непрерывный оператор.

**Теорема 3.9.** Пусть оператор  $A$  ( $A\theta = \theta$ ) имеет в точке  $\theta$  сильную производную Фреше по конусу, равную  $K$ -расщепляемому оператору (3.50). Пусть функционал  $f(x)$ , фигурирующий в представлении (3.49), равномерно положителен:

$$f(x) \geq a \|x\| \quad (x \in K).$$

Пусть  $\lambda_0 < 1$ .

Тогда точка  $\theta$  будет притягивающей для оператора  $A$ .

**Доказательство.** В предположении противного найдется такая последовательность  $x_n \in K$ , что

$$Ax_n \geq x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0.$$

Последние неравенства перепишем в виде

$$\frac{Ax_n - Bx_n}{\|x_n\|} \geq \frac{x_n - Bx_n}{\|x_n\|} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и вычислим значения функционала  $f(x)$  от левой и правой части:

$$f\left(\frac{Ax_n - Bx_n}{\|x_n\|}\right) \geq \frac{(1 - \lambda_0)f(x_n)}{\|x_n\|} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Левая часть последнего неравенства стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , а правая ограничена снизу положительным числом. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

**8. Отсутствие «идущих назад» элементов.** Точку  $\theta$  назовем *отталкивающей* для оператора  $A$ , если  $A\theta = \theta$  и если найдется такое  $r_0 > 0$ , что

$$Ax \leq x \quad (x \in K(r_0), \quad x \neq \theta). \quad (3.51)$$

Сформулируем аналогичные теоремам 3.7 и 3.8 утверждения об условиях, при которых  $\theta$  отталкивающая для оператора  $A$ .

Оператор  $A$  ( $A\theta = \theta$ ) назовем  *$h_0$ -ограниченным снизу*, если для каждого ненулевого  $x \in K(r)$  можно найти такое  $\delta > 0$ , что  $Ax \geq \delta h_0$ ; здесь  $\delta = \delta(x)$ .

**Теорема 3.10.** Пусть  $A'(\theta)$  является сильной производной Фреше по конусу  $K$  оператора  $A$ . Пусть  $A$  монотонен,  $h_0$ -ограничен снизу и удовлетворяет условиям теоремы 3.7, причем предполагается, что 1 не является позитивным собственным значением оператора  $A'(\theta)$ .

Пусть выполнено одно из условий 3.8 (а) или 3.8 (б) теоремы 3.8.

Тогда  $\theta$  будет отталкивающей точкой для  $A$ .

Заметим, что из предположения  $Ah_0 = \lambda_0 h_0$ ,  $\lambda_0 > 1$ , вытекает, что 1 не является позитивным собственным значением оператора  $A'(\theta)$ , если этот линейный оператор  $h_0$ -ограничен снизу (достаточно применить теорему 2.15).

**Теорема 3.11.** Если в условиях теоремы 3.9 неравенство  $\lambda_0 < 1$  заменить неравенством  $\lambda_0 > 1$ , то точка  $\theta$  будет отталкивающей для оператора  $A$ .

## § 4. Неравенства для элементов с большими нормами

1. **Существование элементов, «идущих вперед» и «идущих назад».** В предыдущем параграфе было показано, что существование или отсутствие у оператора  $A$  «идущих вперед» или «идущих назад» элементов с малыми нормами определяется в основном свойствами производной  $A'(\theta)$ . Аналогично для исследования значений операторов  $A$  на элементах с большими нормами удобно пользоваться производной на бесконечности. Соответствующие утверждения вытекают из тех же рассуждений, которые применялись в § 3; поэтому мы эти рассуждения повторять не будем.

**Теорема 3.12.** Пусть положительный на  $K$  оператор  $A$  имеет сильную производную  $A'(\infty)$  на бесконечности по конусу  $K$ , причем

$$A'(\infty)g_0 = \lambda_\infty g_0.$$

Пусть выполнено одно из двух условий:

3.12 (а) конус  $K$  телесен,  $g_0$  — внутренний элемент  $K$ ;

$$3.12 (б) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|A(tg_0) - tA'(\infty)g_0\|_{g_0}}{t} = 0.$$

Тогда найдется такое  $t_0 = t_0(\lambda_\infty)$ , что при  $\lambda_\infty > 1$  при всех  $t \geq t_0$  будут выполняться неравенства

$$A(tg_0) \geq tg_0,$$

а при  $\lambda_\infty < 1$  при всех  $t \geq t_0$  — неравенства

$$A(tg_0) \leq tg_0.$$

При применении этой теоремы, как и дальнейших теорем параграфа, часто удобно пользоваться минорантами или мажорантами изучаемого оператора.

2. **Отсутствие элементов, «идущих вперед» или «идущих назад».** Приведем две теоремы. Будем называть оператор  $A$   $g_0$ -ограниченным сверху на множестве  $T$ , если для каждого  $x \in T$  найдется такое  $t > 0$ , что  $Ax \leq tg_0$ . Если  $g_0$  — внутренний элемент конуса, то, очевидно, каждый оператор  $g_0$ -ограничен сверху.

Оператор  $A$  назовем  $g_0$ -ограниченным снизу на бесконечности, если каждому  $R > 0$  соответствует такое  $t = t(R)$ , что из  $x \in K$  и  $\|x\| \geq R$  вытекает соотношение

$Ax \geq t(R)g_0$ , причем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} t(R) = \infty.$$

Обозначим через  $K (> R)$  множество таких элементов  $x \in K$ , что  $\|x\| > R$ .

**Теорема 3.13.** Пусть положительный и монотонный на некотором  $K (> R)$  оператор  $A$  имеет сильную асимптотическую производную  $A'(\infty)$  по конусу  $K$ , причем

$$A'(\infty)g_0 = \lambda_\infty g_0 \quad (\lambda_\infty \geq 0; \quad g_0 \in K, \quad g_0 \neq \theta),$$

и пусть оператор  $A'(\infty)$  не имеет в конусе  $K$  собственных векторов, которым отвечает собственное значение, равное 1.

Пусть выполнено одно из условий 3.12 (а), 3.12 (б) и одно из следующих условий:

3.13 (а) оператор  $A$  вполне непрерывен, конус  $K$  нормален;

3.13 (б) пространство  $E$  слабо полно, единичный шар в  $E$  слабо компактен, оператор  $A$  слабо непрерывен, конус  $K$  допускает оштукатуривание.

Тогда справедливы два следующих утверждения:

1. Если  $A$   $g_0$ -ограничен сверху, то из  $\lambda_\infty < 1$  вытекает существование такого  $R = R(\lambda_\infty)$ , что

$$Ax \geq x \quad (x \in K, \quad \|x\| \geq R).$$

2. Если  $A$  равномерно  $g_0$ -ограничен снизу на бесконечности, то из  $\lambda_\infty > 1$  вытекает существование такого  $R = R(\lambda_\infty)$ , что

$$Ax \leq x \quad (x \in K, \quad \|x\| \geq R).$$

Доказательство этой и предыдущей теорем отличается от доказательств соответствующих утверждений предыдущего параграфа лишь тем, что вместо сходящихся к нулю последовательностей приходится рассматривать последовательности элементов, нормы которых неограниченно возрастают.

Предположение о выполнении одного из условий 3.12 (а) или 3.12 (б) можно заменить предположением, что

$$A(\varepsilon g_0) \leq \varepsilon g_0$$

при достаточно больших  $\varepsilon > 0$ , если  $\lambda_\infty < 1$ , и что

$$A(\varepsilon g_0) \geq \varepsilon g_0$$

при достаточно больших  $\varepsilon$ , если  $\lambda_\infty > 1$ .

Предположим теперь, что оператор  $A'(\infty)$  является  $K$ -расщепляемым оператором. Это значит (см. стр. 123), что каждый элемент  $x \in E$  однозначным образом представим в виде

$$x = f(x) h_0 + x_1 \quad (x_1 \in E_1), \quad (3.52)$$

где  $f(x)$  — линейный функционал, удовлетворяющий условиям  $f(h_0) = 1$  и  $f(x_1) = 0$  при всех  $x_1$  из инвариантного для  $A'(\infty)$  подпространства  $E_1 \subset E$ , имеющего с  $K$  лишь нулевую общую точку;  $h_0$  является собственным вектором оператора  $A'(\infty)$  и  $h_0 \in K$ ; оператор  $A'(\infty)$  определяется равенством

$$A'(\infty)x = \lambda_\infty f(x) h_0 + A'(\infty)x_1. \quad (3.53)$$

Теоремам 3.9 и 3.11 аналогично следующее утверждение:

**Теорема 3.14.** Пусть определенный на некотором  $K(>R)$  оператор  $A$  имеет сильную асимптотическую производную по конусу  $K$ , являющуюся  $K$ -расщепляемым оператором (3.53). Пусть функционал  $f(x)$ , фигурирующий в представлении (3.52), равномерно положителен.

Тогда существует такое  $R = R(\lambda_\infty)$ , что при  $\lambda_\infty < 1$

$$Ax \geq x \quad (x \in K, \|x\| \geq R),$$

а при  $\lambda_\infty > 1$

$$Ax \leq x \quad (x \in K, \|x\| \geq R).$$


---



## ГЛАВА 4

### СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

В этой главе изучаются условия, при которых уравнению

$$x = Ax$$

с положительным нелинейным оператором  $A$  имеет по крайней мере одно ненулевое решение  $x^*$  в конусе  $K$ . В большинстве рассматриваемых ниже случаев предполагается, что  $A\theta = 0$ ; таким образом, речь идет о втором (отличном от  $\theta$ ) решении в конусе  $K$ .

В случае уравнения в одномерном пространстве речь идет о существовании таких положительных чисел  $t^*$ , что  $t^* = f(t^*)$ , где  $f(t)$  — непрерывная и неотрицательная при  $t \in [0, \infty)$  функция. Здесь для существования положительного решения достаточно, чтобы либо нашлись такие малые значения  $t$ , что  $f(t) > t$ , и такие большие значения  $t$ , что  $f(t) < t$ , либо нашлись малые  $t$  такие, что  $f(t) < t$ , и такие большие  $t$ , что  $f(t) > t$ . Оказывается, что эта элементарная идея переносится на положительные нелинейные операторы, действующие в банаховых пространствах с конусом.

#### § 1. Уравнения с монотонными операторами

**1. Операторы, оставляющие инвариантным конусный отрезок.** В дальнейшем множество  $\langle x_0, u_0 \rangle$  элементов  $x$ , удовлетворяющих неравенствам

$$x_0 \leq x \leq u_0,$$

будем называть *конусным отрезком*.

**Теорема 4.1.** Пусть монотонный на отрезке  $\langle x_0, u_0 \rangle$  оператор  $A$  преобразует  $\langle x_0, u_0 \rangle$  в себя, то есть

$$Ax_0 \geq x_0 \tag{4.1}$$

и

$$Au_0 \leq u_0. \quad (4.2)$$

Тогда для существования на  $\langle x_0, u_0 \rangle$  по крайней мере одной неподвижной точки  $x^*$  у оператора  $A$  достаточно, чтобы выполнялся одно из следующих четырех условий:

4.1 (а) конус  $K$  сильно миниздрален;

4.1 (б) конус  $K$  правилен, оператор  $A$  непрерывен;

4.1 (в) конус  $K$  нормален, оператор  $A$  вполне непрерывен;

4.1 (г) конус  $K$  нормален, пространство  $E$  слабо полно, единичный шар в  $E$  слабо компактен, оператор  $A$  слабо непрерывен.

Доказательство. Пусть выполнено условие 4.1 (а). Обозначим через  $\mathcal{M}$  множество таких точек  $x \in \langle x_0, u_0 \rangle$ , что  $Ax \geq x$ ; это множество непусто, так как  $x_0 \in \mathcal{M}$ . Из монотонности оператора  $A$  вытекает, что

$$A(Ax) \geq Ax \quad (x \in \mathcal{M}),$$

то есть  $A$  преобразует  $\mathcal{M}$  в себя:  $A\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ . Пусть

$$x^* = \sup \mathcal{M}.$$

Очевидно,  $x_0 \leq x^* \leq u_0$ , то есть  $x^* \in \langle x_0, u_0 \rangle$ . Из монотонности  $A$  вытекает, что

$$Ax^* \geq Ax \geq x \quad (x \in \mathcal{M}).$$

Это значит, что элемент  $Ax^*$  является верхней границей для  $\mathcal{M}$ . Поэтому

$$Ax^* \geq x^*.$$

Но тогда  $x^* \in \mathcal{M}$ , в силу чего  $Ax^* \in \mathcal{M}$  и

$$Ax^* \leq x^*.$$

Итак,  $Ax^* = x^*$ .

Пусть выполнено условие 4.1 (б). В этом случае образуем последовательность

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.3)$$

Из условия (4.1) и из монотонности оператора  $A$  вытекает, что последовательность (4.3) монотонна и ограничена:

$$\begin{aligned} x_0 &\leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots, \\ x_n &\leq u_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Так как конус  $K$  правилен, то последовательность (4.3) сходится по норме к некоторому элементу  $x^* \in \langle x_0, u_0 \rangle$ . Переходя в (4.3) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем равенство  $Ax^* = x^*$ .

Если выполнено условие 4.1 (в) или 4.1 (з), то утверждение теоремы вытекает соответственно из принципа Шаудера или принципа Тихонова неподвижной точки.

Теорема доказана.

Заметим, что при выполнении условия 4.1 (в) или условия 4.1 (з) неподвижная точка  $x^*$  оператора  $A$  также может быть получена как предел последовательности (4.3) (при условии 4.1 (в) сходимости вытекает из ее компактности, а при условии 4.1 (з) последовательность (4.3) сходится к  $x^*$  слабо).

**2. Возможность существования нескольких неподвижных точек.** Условия теоремы 4.1 не гарантируют единственности неподвижной точки у оператора  $A$  на конусном отрезке  $\langle x_0, u_0 \rangle$ . Приведем соответствующий пример.

Пусть  $E$  — одномерное пространство вещественных чисел,  $K$  — множество неотрицательных чисел. Пусть

$$Ax = x + \frac{\sin x}{2} \quad (x \geq 0).$$

Этот оператор (эта функция) монотонен, так как производная положительна. Положим

$$x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad u_0 = \frac{7\pi}{2}.$$

Тогда неравенства (4.1) и (4.2) будут выполнены. В то же время оператор  $A$  на  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$  имеет три неподвижные точки:  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$ .

**3. Отыскание инвариантного конусного отрезка.** Пусть оператор  $A$  определен на всем конусе  $K$  и монотонен на нем. Тогда для построения конусного отрезка  $\langle x_0, u_0 \rangle$ , инвариантного для оператора  $A$ , достаточно положить  $x = \theta$  и найти элемент  $u_0$ , удовлетворяющий неравенству (4.2). Для отыскания элемента  $u_0$  можно воспользоваться теоремой 3.11.

На этом пути можно получить, например, следующее утверждение:

*Пусть конус  $K$  телесен, а положительный на  $K$  оператор  $A$  (непрерывный, если  $K$  правилен и вполне непре-*

рывный, если  $K$  нормален) имеет сильную производную  $A'(\infty)$  по конусу с собственным вектором  $g_0$ , являющимся внутренним элементом  $K$ . Тогда для существования у оператора  $A$  в конусе  $K$  неподвижной точки достаточно, чтобы соответствующее собственному вектору  $g_0$  собственное значение было меньше 1.

Если  $A\theta = \theta$ , то для доказательства существования ненулевых неподвижных точек у оператора  $A$  в конусе  $K$  также можно воспользоваться теоремой 4.1. Здесь можно пытаться при помощи методов, изложенных в § 3 предыдущей главы, найти элемент  $x_0$  с малой нормой, удовлетворяющий условию  $Ax_0 \geq x_0$ , а затем при помощи методов из § 4 искать элемент  $u_0$ , удовлетворяющий условию  $Au_0 \leq u_0$ . Если окажется, что  $x_0 \leq u_0$ , то при соответствующих предположениях о свойствах оператора и конуса существование неподвижной точки будет доказано.

Таким образом, можно предложить следующую схему для доказательства существования ненулевой неподвижной точки у монотонного на  $K$  оператора  $A$  ( $A\theta = \theta$ ). Нужно найти операторы  $A'(\theta)$  и  $A'(\infty)$  и их собственные векторы  $h_0$  и  $g_0$ :

$$A'(\theta)h_0 = \lambda_0 h_0, \quad A'(\infty)g_0 = \lambda_\infty g_0.$$

Если окажется, что

$$\lambda_\infty < 1 < \lambda_0$$

и при некотором  $t_0$

$$h_0 \leq t_0 g_0,$$

то следует пытаться в качестве инвариантного для  $A$  отрезка  $\langle x_0, u_0 \rangle$  рассматривать конусные отрезки  $\langle \varepsilon_1 h_0, \frac{1}{\varepsilon_2} g_0 \rangle$  при достаточно малых  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Если инвариантный конусный отрезок найден, то следует пытаться применить теорему 4.1.

При отыскании инвариантных отрезков  $\langle x_0, u_0 \rangle$  следует применять также миноранты и мажоранты оператора  $A$ .

#### 4. Специальный класс монотонных операторов.

Теорема 4.2. Пусть монотонный и непрерывный на конусном отрезке  $\langle x_0, u_0 \rangle$  оператор  $A$  удовлетворяет условию

$$A(x+y) \geq Ax + \alpha(\|y\|)v_0 \quad (x, x+y \in \langle x_0, u_0 \rangle, y \in K), \quad (4.4)$$

где  $\alpha(r)$  — неубывающая положительная при  $r > 0$  непрерывная функция, а  $v_0$  — фиксированный ненулевой элемент из  $K$ .

Пусть  $A$  преобразует  $\langle x_0, u_0 \rangle$  в себя.

Тогда на  $\langle x_0, u_0 \rangle$  существует по крайней мере одна неподвижная точка оператора  $A$ .

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность (4.3). Если эта последовательность сходится к некоторому элементу  $x^*$ , то предельным переходом в (4.3) получим равенство  $Ax^* = x^*$ , и теорема будет доказана.

Предположим, что последовательность (4.3) не сходится по норме. Тогда из нее можно выделить такую подпоследовательность

$$x_{n_3} \leq x_{n_1} \leq \dots \leq x_{n_i} \leq \dots \leq u_0,$$

что

$$\|x_{n_{i+1}} - x_{n_i}\| \geq r_0 > 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Пусть  $\alpha(r_0) = \varepsilon_0$ . Тогда в силу (4.4)

$$x_{n_{i+1}} = Ax_{n_i} \geq Ax_{n_{i-1}} + \varepsilon_0 v_0 = x_{n_{i-1}+1} + \varepsilon_0 v_0,$$

откуда

$$x_{n_{i+1}} \geq x_{n_i+1} \geq x_{n_{i-1}+1} + \varepsilon_0 v_0 \geq x_{n_{i-1}} + \varepsilon_0 v_0.$$

Из последних неравенств вытекает, что

$$x_{n_2} \geq x_{n_0} + \varepsilon_0 v_0, \quad x_{n_1} \geq x_{n_0} + 2\varepsilon_0 v_0, \dots,$$

то есть

$$u_0 \geq x_{n_{2i}} \geq x_{n_0} + i\varepsilon_0 v_0 \geq i\varepsilon_0 v_0 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Но тогда элемент  $-v_0$  является пределом последовательности элементов

$$\frac{u_0}{i\varepsilon_0} - v_0 \in K \quad (i = 1, 2, \dots),$$

то есть  $-v_0 \in K$ . Значит,  $v_0 = \theta$ . Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Эта теорема могла бы быть получена и как следствие теоремы 4.1 (для этого нужно выделить минимальное подпространство  $E_1$ , содержащее  $\langle x_0, u_0 \rangle$ , и исследовать

свойства конуса  $K_1 = K \cap E_1$ ). Мы предпочли прямое доказательство.

**5. Использование второго конуса.** Пусть в пространстве  $E$  заданы два конуса  $K_0$  и  $K$ , причем  $K_0 \subset K$  (см. гл. 1, § 8). В пространстве  $E$  будем рассматривать только упорядоченность, порожденную бóльшим конусом  $K$ .

Через  $K_0(x_0, u_0)$  обозначим пересечение конусного отрезка  $\langle x_0, u_0 \rangle$  с конусом  $K_0$ , то есть совокупность таких элементов  $x \in K_0$ , что  $x_0 \leq x \leq u_0$ . Доказанные выше в настоящем параграфе утверждения без труда переносятся на уравнения с операторами, оставляющими инвариантными множества  $K_0(x_0, u_0)$ . Приведем один пример.

**Теорема 4.3.** Пусть монотонный на  $K_0(x_0, u_0)$  оператор  $A$  преобразует  $K_0(x_0, u_0)$  в себя.

Тогда для существования на  $K_0(x_0, u_0)$  по крайней мере одной неподвижной точки у оператора  $A$  достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

4.3(а) конус  $K_0$  является  $K$ -правильным, оператор  $A$  непрерывен;

4.3(б) множество  $K_0(x_0, u_0)$  ограничено\*, оператор  $A$  вполне непрерывен;

4.3(в) множество  $K_0(x_0, u_0)$  ограничено, пространство  $E$  слабо полно, единичный шар в  $E$  слабо компактен, оператор  $A$  слабо непрерывен.

Доказательство этой теоремы не требует никаких новых соображений. Без изменений обобщается и теорема 4.2.

Для отыскания элементов  $x_0, u_0 \in K_0$ , удовлетворяющих условиям  $x_0 \leq Ax_0$ ,  $Au_0 \leq u_0$ , удобно пользоваться аналогами теорем 3.5 и 3.11. В этих теоремах, очевидно, достаточно рассматривать производные по «меньшему» конусу  $K_0$ , при этом в условиях 3.5(а) и 3.11(а) достаточно предполагать, что телесен «бóльший» конус  $K$  и что  $h_0$  (соответственно  $g_0$ ) — внутренний элемент  $K$ .

**6. Замечание о сходимости последовательных приближений.**

**Лемма 4.1** (о двух милиционерах). Пусть

$$x_n \leq u_n \leq u_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.5)$$

---

\*) См. теорему 1.16.

и пусть последовательности  $x_n$  и  $u_n$  сходятся по норме к одному и тому же элементу  $x^*$ . Пусть конус  $K$  нормален.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x^*\| = 0.$$

Доказательство почти очевидно: из (4.5) вытекает, что

$$\theta \leq y_n - x_n \leq u_n - x_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и так как конус  $K$  нормален, то в силу теоремы 1.2

$$\|y_n - x_n\| \leq L \|u_n - x_n\| \quad (n = 1, 2, \dots),$$

откуда

$$\|y_n - x^*\| \leq (L + 1) \|x_n - x^*\| + L \|u_n - x^*\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Лемма доказана.

**Теорема 4.4.** Пусть оператор  $A$  монотонен на  $\langle x_0, u_0 \rangle$  и преобразует  $\langle x_0, u_0 \rangle$  в себя. Пусть выполнено либо одно из условий 4.1 (б), 4.1 (в) теоремы 4.1, либо условие (4.4) теоремы 4.2.

Пусть оператор  $A$  имеет на  $\langle x_0, u_0 \rangle$  единственную неподвижную точку  $x^*$ .

Тогда последовательные приближения

$$y_n = Ay_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.6)$$

сходятся по норме к  $x^*$ , каково бы ни было  $y_0 \in \langle x_0, u_0 \rangle$ .

**Доказательство.** Образует последовательности

$$x_n = Ax_{n-1}, \quad u_n = Au_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.7)$$

Эти последовательности и последовательность (4.6), очевидно, удовлетворяют неравенствам (4.5).

Каждая из последовательностей (4.7) монотонна и ограничена. При условии 4.1 (б) обе последовательности сходятся, так как конус  $K$  правилен. При условии 4.1 (в) обе последовательности сходятся, так как они монотонны и компактны. Сходимость последовательности  $x_n$  в условиях теоремы 4.2 была доказана; сходимость последовательности  $u_n$  устанавливается аналогично: в предположении противного можно построить такую подпоследовательность

$$u_{n_1} \geq u_{n_2} \geq u_{n_3} \geq \dots \geq u_{n_i} \geq \dots \geq x_0,$$

что

$$\|u_{n_i} - u_{n_{i+1}}\| \geq r_0 > 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots);$$

тогда

$$u_{n_0} \geq Au_{n_0} \geq Au_{n_1} + \alpha(r_0)v_0 = u_{n_1+1} + \alpha(r_0)v_0 \geq u_{n_2} + \alpha(r_0)v_0$$

и аналогично

$$u_{n_{2i}} \geq u_{n_{2(i+1)}} + \alpha(r_0)v_0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots);$$

поэтому

$$\begin{aligned} u_0 &\geq u_{n_0} \geq u_{n_2} + \alpha(r_0)v_0 \geq u_{n_4} + 2\alpha(r_0)v_0 \geq \dots \\ &\dots \geq u_{n_{2i}} + i\alpha(r_0)v_0 \geq i\alpha(r_0)v_0 \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

и так как  $i$  можно выбрать сколь угодно большим, то  $-v_0 \in K$ , что противоречит предположению.

Итак, обе последовательности (4.7) сходятся. Пределы этих последовательностей являются неподвижными точками оператора  $A$ . Из единственности неподвижной точки вытекает, что пределы последовательностей (4.7) совпадают. Остается применить лемму 4.1 о двух милиционерах.

Теорема доказана.

**7. Уравнения в пространствах с вполне правильными конусами.** В предыдущих пунктах решение уравнения  $x = Ax$  с монотонным оператором  $A$  в ряде случаев конструировалось как предел монотонной последовательности

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.8)$$

При этом последовательность (4.8) оказывалась ограниченной в смысле полуупорядоченности. Если конус  $K$  вполне правилен, то для сходимости последовательности (4.8) достаточно ограниченности по норме, если эта последовательность монотонна. Это соображение приводит к ряду теорем о существовании положительных решений у уравнения  $x = Ax$ . Приведем одну из них.

**Теорема 4.5.** Пусть положительный и монотонный на конусе непрерывный оператор  $A$  имеет сильную асимптотическую производную  $A'(\infty)$  по конусу. Пусть спектр линейного оператора  $A'(\infty)$  лежит в круге радиуса  $\rho_0$ , причем  $\rho_0 < 1$ .

Пусть конус  $K$  вполне правилен.



Тогда оператор  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну неподвижную точку.

Доказательство. В силу леммы 2.2 в  $E$  можно определить такую норму  $\|x\|_0$ , что

$$m\|x\| \leq \|x\|_0 \leq M\|x\| \quad (x \in E),$$

где  $m, M > 0$ , и

$$\|A'(\infty)\|_0 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A'(\infty)x\|_0 = 1 - \eta,$$

где  $\eta > 0$ .

Выберем такое  $R > 0$ , что при  $\|x\| \geq R$  ( $x \in K$ )

$$\frac{\|Ax - A'(\infty)x\|}{\|x\|} < \frac{m}{M}\eta.$$

Тогда при  $\|x\| \geq R$  ( $x \in K$ )

$$\begin{aligned} \|Ax\|_0 &\leq \|Ax - A'(\infty)x\|_0 + \|A'(\infty)x\|_0 \leq \\ &\leq M\|Ax - A'(\infty)x\| + (1 - \eta)\|x\|_0, \end{aligned}$$

то есть

$$\|Ax\|_0 < m\eta\|x\| + (1 - \eta)\|x\|_0 \leq \|x\|_0 \quad (\|x\| \geq R, x \in K).$$

Положим  $x_0 = \theta$  и  $x_n = Ax_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Построенная последовательность монотонна и в силу последнего неравенства ограничена по норме. Из полной правильности конуса  $K$  вытекает, что последовательность  $x_n$  сходится по норме. Ее предел является неподвижной точкой оператора  $A$ .

Теорема доказана.

Эта же схема рассуждений применима для доказательства существования ненулевых положительных решений, если  $A\theta = \theta$ .

**Теорема 4.6.** Пусть выполнены условия теоремы 4.5. Пусть существует такой ненулевой элемент  $x_0 \in K$ , что  $Ax_0 \geq x_0$ .

Тогда оператор  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Если оператор  $A$  вполне непрерывен, то утверждения теорем 4.5 и 4.6 сохраняют силу, если предположение о полной правильности конуса  $K$  отбросить. Для вполне непрерывного линейного оператора  $A'(\infty)$  предположение о том, что спектр лежит в круге радиуса  $\rho_0 < 1$ , равносильно, вообще говоря (см. гл. 2), предположению о том, что  $A'(\infty)$  не имеет позитивных собственных значений  $\lambda_0$ , больших или равных 1.

## § 2. Уравнения с немонотонными операторами

**1. Существование неотрицательных решений.** Для доказательства существования неподвижных точек у немонотонных положительных операторов  $A$  удобно применять различные общие принципы неподвижной точки и, в частности, принципы Шаудера и Тихонова. При этом у рассматриваемого оператора приходится предполагать полную непрерывность или (если пространство  $E$  слабо полно и единичный шар слабо компактен) слабую непрерывность. Доказательство существования неподвижной точки сводится к отысканию такого выпуклого множества  $T \subset E$ , которое оператор  $A$  оставляет инвариантным. В качестве множества  $T$  могут фигурировать конусные отрезки  $\langle x_0, u_0 \rangle$ , пересечения  $K_0 \langle x_0, u_0 \rangle$  конусного отрезка  $\langle x_0, u_0 \rangle$  с некоторым конусом  $K_0 \subset K$ , пересечения  $K(r)$  конуса  $K$  с шаром  $\|x\| \leq r$  и т. д. Приведем несколько утверждений, получаемых на этом пути.

**Теорема 4.7.** Пусть положительный на конусе  $K$  оператор  $A$  имеет сильную асимптотическую производную  $A'(\infty)$  по конусу, причем спектр линейного оператора  $A'(\infty)$  лежит в круге  $|\lambda| \leq \rho_0$ , где  $\rho_0 < 1$ .

Тогда для существования в конусе  $K$  по крайней мере одной неподвижной точки у оператора  $A$  достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

4.7 (а) оператор  $A$  вполне непрерывен.

4.7 (б) пространство  $E$  слабо полно, единичный шар слабо компактен; оператор  $A$  слабо непрерывен.

**Доказательство.** В силу леммы 2.2 в  $E$  может быть введена такая эквивалентная первоначально заданной норма  $\|x\|_0$ , что

$$\|A'(\infty)\|_0 = 1 - \eta,$$

где  $\eta > 0$ . При доказательстве теоремы 4.5 было установлено, что в новой норме оператор  $A$  удовлетворяет неравенствам (4.8)

$$\|Ax\|_0 < \|x\|_0 \quad (x \in K, \quad \|x\|_0 \geq R),$$

где  $R$  — некоторое положительное число. Это значит, что оператор  $A$  преобразует в себя пересечение  $T$  конуса  $K$

с шаром  $\|x\|_0 \leq R_0$ , где

$$R_0 = \max \left\{ R, \sup_{x \in K, \|x\|_0 \leq R} \|Ax\|_0 \right\}.$$

Множество  $T$  ограничено, выпукло и замкнуто. Существование у оператора  $A$  неподвижной точки  $x^* \in T$  вытекает из принципа Шаудера при условии 4.7 (а) и из принципа Тихонова при условии 4.7 (б).

Теорема доказана.

**Теорема 4.8.** Пусть положительный оператор  $A$  имеет на конусе  $K$  мажоранту  $A^+$ :

$$A^+x \geq Ax \quad (x \in K), \quad (4.9)$$

причем мажоранта  $A^+$  имеет сильную асимптотическую производную  $A^+(\infty)$  по конусу со спектром, лежащим в круге  $|\lambda| \leq \rho_0$ , где  $\rho_0 < 1$ .

Пусть конус  $K$  нормален и, более того, норма монотонна.

Пусть выполнено одно из условий 4.7 (а) или 4.7 (б) предыдущей теоремы.

Тогда оператор  $A$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку  $x^* \in K$ .

**Доказательство.** Как при доказательстве теоремы 4.7, вводим такую норму  $\|x\|_0$ , что при некотором  $R$

$$\|A^+x\|_0 \leq \|x\|_0 \quad (x \in K, \|x\|_0 \geq R).$$

В силу леммы 2.3 новую норму можно ввести так, что она сохраняет свойство монотонности: из  $\theta \leq x \leq y$  следует неравенство  $\|x\|_0 \leq \|y\|_0$ . Поэтому из (4.9) вытекает, что

$$\|Ax\|_0 \leq \|A^+x\|_0 \leq \|x\|_0 \quad (x \in K, \|x\|_0 \geq R).$$

Дальнейшие рассуждения — как при доказательстве теоремы 4.7.

Теорема доказана.

Если в условиях теоремы 4.8 оператор  $A$  оставляет инвариантным конус  $K_0 \subset K$ , то достаточно, чтобы мажоранта  $A^+$  была определена лишь на конусе  $K_0$ .

**2. Переопределение оператора.** При доказательстве существования неподвижных точек часто бывает удобным следующее простое соображение. Изучаемый оператор  $A$  на

части своей области определения переопределяется так, чтобы для переопределенного оператора существование неподвижной точки было очевидным. Затем доказывается, что неподвижная точка не может находиться там, где значения оператора  $A$  переопределялись. Эта простая схема чрезвычайно плодотворна (в дальнейшем она неоднократно будет применяться): основные трудности в ее реализации — правильное переопределение оператора  $A$ .

Приведем пример утверждения, близкого к теореме 4.8, но не требующего монотонности нормы. Ограничимся случаем вполне непрерывного оператора.

**Теорема 4.9.** Пусть для положительного вполне непрерывного оператора  $A$  существует такое  $R$ , что при всех  $\varepsilon > 0$

$$Ax \geq (1 + \varepsilon)x \quad (x \in K, \|x\| = R). \quad (4.10)$$

Тогда оператор  $A$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку  $x^* \in K$ .

Доказательство. Определим оператор  $\tilde{A}$  равенством

$$\tilde{A}x = \begin{cases} Ax & , \text{ если } x \in K, \|x\| \leq R, \\ A\left(\frac{R}{\|x\|}x\right), & \text{ если } x \in K, \|x\| \geq R. \end{cases}$$

Оператор  $\tilde{A}$  вполне непрерывен и преобразует конус  $K$  в свою компактную часть. В силу принципа Шаудера найдется такой элемент  $x^* \in K$ , что  $\tilde{A}x^* = x^*$ .

Допустим, что  $\|x^*\| > R$ , и положим

$$y^* = \frac{R}{\|x^*\|} x^*.$$

Тогда

$$Ay^* = \tilde{A}y^* = \frac{\|x^*\|}{R} y^*,$$

что противоречит (4.10).

Итак,  $\|x^*\| \leq R$ . Поэтому  $Ax^* = \tilde{A}x^* = x^*$ .

Теорема доказана.

Заметим, что для проверки условия (4.10) удобно рассматривать различные мажоранты оператора  $A$ . Нетрудно видеть, что условие (4.10) выполнено, если для какой-либо

мажоранты  $A^+$  справедливы соотношения

$$A^+x \geq (1 + \epsilon)x \quad (x \in K, \quad \|x\| = R)$$

или если выполнено более жесткое ограничение

$$A^+x \geq x \quad (x \in K, \quad \|x\| = R). \quad (4.11)$$

Вопрос о том, когда выполнено условие (4.11), изучался в гл. 3 (§ 4, п. 2). Воспользуемся полученными там результатами и сформулируем одно из следствий теоремы 4.9 в виде отдельной теоремы, удобной для приложений.

**Теорема 4.9'.** Пусть вполне непрерывный положительный оператор  $A$  имеет на  $K$  мажоранту  $A^+$ , которая является монотонным вполне непрерывным оператором. Пусть существует сильная асимптотическая производная  $A^{+'}(\infty)$  по конусу, имеющая положительный собственный вектор  $g_0$ :

$$A^{+'}(\infty)g_0 = \lambda_\infty g_0,$$

причем  $\lambda_\infty < 1$  и 1 не является позитивным собственным значением оператора  $A^{+'}(\infty)$ .

Пусть оператор  $A^{+'}g_0$  ограничен сверху. Пусть конус  $K$  нормален.

Тогда оператор  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну неподвижную точку.

Приведем еще одно утверждение о существовании положительного решения  $x^* \in K$ ; в доказательстве существенно используется переопределение оператора  $A$ .

**Теорема 4.10.** Допустим, что положительный оператор  $A$  вполне непрерывен и имеет сильную асимптотическую производную  $A^{+'}(\infty)$  по конусу. Пусть линейный оператор  $A^{+'}(\infty)$  не имеет позитивных собственных значений, превосходящих или равных 1. Тогда  $A$  имеет на  $K$  неподвижную точку.

Доказательство. Для доказательства построим последовательность операторов

$$A_n x = \begin{cases} Ax, & \text{если } \|x\| \leq n, \\ \left(2 - \frac{\|x\|}{n}\right) A\left(\frac{n}{\|x\|}x\right), & \text{если } n \leq \|x\| \leq 2n, \\ 0, & \text{если } \|x\| \geq 2n. \end{cases} \quad (4.12)$$

Каждый из операторов  $A_n$  очевидным образом вполне непрерывен и преобразует весь конус  $K$  в свою компактную часть. Из принципа Шаудера вытекает, что каждый оператор  $A_n$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку  $x_n$ . Очевидно,

$$\|x_n\| < 2n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поэтому доказательство будет завершено, если будет доказано, что при больших  $n$  не выполняются неравенства  $\|x_n\| > n$ .

Предположим противное. Пусть имеют место равенства

$$\left(2 - \frac{\|x_n\|}{n}\right) A\left(\frac{n}{\|x_n\|} x_n\right) = x_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

которые мы перепишем в виде

$$\alpha_n \frac{A y_n - A'(\infty) y_n}{\|y_n\|} + \alpha_n A'(\infty) \frac{y_n}{\|y_n\|} = \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где

$$y_n = \frac{n}{\|x_n\|} x_n, \quad \alpha_n = 2 \frac{n}{\|x_n\|} - 1 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и пусть

$$n < \|x_n\| < 2n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Без ограничения общности можно считать, что числа  $\alpha_n$  сходятся к некоторому пределу  $\alpha_0$ , причем из неравенств  $0 < \alpha_n < 1$  вытекает, что  $0 \leq \alpha_0 \leq 1$ . Одновременно будем считать, что элементы

$$A'(\infty) \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходятся по норме к некоторому элементу  $v_0$ . Тогда элементы  $\frac{y_n}{\|y_n\|}$  будут сходиться к элементу  $\alpha_0 v_0 = u_0$ . Следовательно,  $\alpha_0 \neq 0$ , и имеет место равенство

$$u_0 = \alpha_0 A'(\infty) u_0,$$

которое противоречит предположению о том, что оператор  $A'(\infty)$  не имеет позитивных собственных значений, больших чем 1 или равных 1. Этим доказательство завершается.

В последнем утверждении предположение о полной непрерывности оператора  $A$  можно заменить предположением

о слабой непрерывности, если пространство  $E$  слабо полно, если единичный шар слабо компактен и если конус  $K$  допускает оштукатуривание. Доказательство при этом почти не меняется. Нужно лишь операторы  $A_n$  определить на конусе  $K$  вместо формул (4.12) равенствами

$$A_n x = \begin{cases} Ax, & \text{если } l(x) \leq n, \\ \left[2 - \frac{l(x)}{n}\right] A\left[\frac{n}{l(x)} x\right], & \text{если } n \leq l(x) \leq 2n, \\ \theta, & \text{если } l(x) \geq 2n, \end{cases}$$

а затем вместо принципа Шаудера применить принцип Тихонова.

Отметим, что последние утверждения содержат как частный случай теорему 4.7.

**3. Положительные решения.** Допустим, что  $A\theta = \theta$ , и поставим вопрос о существовании в конусе вторых (отличных от  $\theta$ ) неподвижных точек у положительного оператора  $A$ .

**Теорема 4.11.** Пусть положительный оператор  $A$  ( $A\theta = \theta$ ) имеет сильную производную Фреше  $A'(\theta)$  и сильную асимптотическую производную  $A'(\infty)$  по конусу. Пусть спектр оператора  $A'(\infty)$  лежит в круге  $|\lambda| \leq \rho$ , где  $\rho < 1$ . Пусть оператор  $A'(\theta)$  имеет в  $K$  собственный вектор  $h_0$ ,

$$A'(\theta) h_0 = \lambda_0 h_0,$$

причем  $\lambda_0 > 1$  и  $A'(\theta)$  не имеет в  $K$  собственных векторов, которым отвечает собственное значение, равное 1.

Тогда для существования у оператора  $A$  в конусе  $K$  по крайней мере одной ненулевой неподвижной точки достаточно выполнения одного из следующих условий:

4.11 (а) оператор  $A$  вполне непрерывен,

4.11 (б) оператор  $A$  слабо непрерывен: пространство  $E$  слабо полно, единичный шар в  $E$  слабо компактен, конус  $K$  допускает оштукатуривание.

**Доказательство.** Пусть вначале выполнено условие 4.11 (а). Определим тогда операторы  $A_r$  равенством

$$A_r x = \begin{cases} Ax, & \text{если } x \in K, \|x\| \geq r, \\ Ax + (r - \|x\|) h_0, & \text{если } x \in K, \|x\| \leq r. \end{cases}$$

Очевидна полная непрерывность всех операторов  $A_r$ . Все они удовлетворяют условиям теоремы 4.7 и имеют в силу этого неподвижные точки в конусе  $K$ . Мы покажем, что нормы этих неподвижных точек больше  $r$ , если  $r$  достаточно мало. Тогда неподвижные точки оператора  $A_r$  будут ненулевыми неподвижными точками оператора  $A$  и теорема будет доказана.

Предположим, что каждый оператор  $A_r$  имеет неподвижную точку, норма которой не превышает  $r$ . Тогда можно построить такую последовательность  $x_n \in K$ , что

$$0 < \|x_n\| \leq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.13)$$

и

$$Ax_n + \left(\frac{1}{n} - \|x_n\|\right)h_0 = x_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.14)$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность

$$A'(0) \frac{x_n}{\|x_n\|} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходится по норме к некоторому элементу  $z \in K$ .

Перепишем равенство (4.14) в виде

$$\left(\frac{1}{n\|x_n\|} - 1\right)h_0 = \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{Ax_n - A'(0)x_n}{\|x_n\|} - A'(0) \frac{x_n}{\|x_n\|} \quad (4.15)$$

Из этого равенства следует, что

$$\|h_0\| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n\|x_n\|} - 1\right) \leq 1 + \|z\|.$$

Поэтому без ограничения общности можно считать, что последовательность  $\frac{1}{n\|x_n\|} - 1$  сходится к некоторому числу  $\alpha$ , которое в силу (4.13) неотрицательно. Из равенств (4.15) вытекает тогда, что последовательность  $\frac{x_n}{\|x_n\|}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) сходится по норме к некоторому вектору  $u_0 \in K$ , причем  $\|u_0\| = 1$ . Переходя к пределу в (4.15), получаем равенство

$$u_0 = A'(0)u_0 + \alpha h_0. \quad (4.16)$$

Число  $\alpha$  положительно, так как  $A'(0)$  не имеет в  $K$  собственных векторов, которым отвечает собственное значение,



равное единице. Следовательно, найдется такое  $t_0 > 0$ , что  $u_0 \geq t_0 h_0$  и из  $u \geq t h_0$  вытекает неравенство  $t \leq t_0$ . В то же время из (4.16) вытекает неравенство

$$u_0 \geq A'(\theta)(t_0 h_0) + \alpha h_0 = (\lambda_0 t_0 + \alpha) h_0,$$

то есть  $u_0 \geq t h_0$ , где  $t = \lambda_0 t_0 + \alpha > t_0$ . Мы пришли к противоречию.

При условии 4.11 (а) теорема доказана.

Пусть выполнено условие 4.11 (б). Обозначим через  $l(x)$  равномерно положительный на  $K$  линейный функционал. Положим

$$A_r x = \begin{cases} Ax, & \text{если } x \in K, \quad l(x) \geq r, \\ Ax + [r - l(x)] h_0, & \text{если } x \in K, \quad l(x) \leq r. \end{cases}$$

Операторы  $A_r$  очевидным образом слабо непрерывны и в силу теоремы 4.7 имеют на  $K$  неподвижные точки. Как и при выполнении условия 4.11 (а), нужно лишь показать, что при достаточно малых  $r$  нормы этих неподвижных точек больше  $r$ .

В предположении противного существует такая последовательность  $x_n$ , что

$$0 < l(x_n) \leq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и

$$Ax_n + \left[ \frac{1}{n} - l(x_n) \right] h_0 = x_0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то есть

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{nl(x_n)} - 1 \right] h_0 &= \\ &= \frac{x_n}{l(x_n)} - \frac{Ax_n - A'(\theta)x_n}{\|x_n\|} \cdot \frac{\|x_n\|}{l(x_n)} - A'(\theta) \frac{x_n}{l(x_n)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность  $\frac{x_n}{l(x_n)}$  слабо сходится к некоторому элементу  $u_0 \in K$ , при этом  $l(u_0) = 1$ . Тогда последовательность  $A'(\theta) \frac{x_n}{l(x_n)}$  сходится слабо к элементу  $A'(\theta) u_0$ . В силу (4.17) числа  $\frac{1}{nl(x_n)} - 1$  сходятся к числу

$$\alpha = \frac{l(u_0) - l[A'(\theta) u_0]}{l(h_0)}$$

(чтобы в этом убедиться, достаточно к равенству (4.17) применить функционал  $l(x)$ ). Поэтому из (4.17) вытекает равенство (4.16), которое, как мы уже знаем, приводит к противоречию.

Теорема доказана.

**4. Неподвижная точка в сжатом конусе.** Будем говорить, что оператор  $A (A0 = 0)$  является *сжатием конуса*, если найдутся такие  $r, R > 0$ , что

$$Ax \leq x \quad (x \in K, \quad \|x\| \leq r, \quad x \neq 0), \quad (4.18)$$

и при всех  $\epsilon > 0$

$$Ax \geq (1 + \epsilon)x \quad (x \in K, \quad \|x\| \geq R). \quad (4.19)$$

**Теорема 4.12.** Пусть положительный вполне непрерывный оператор  $A$  является сжатием конуса.

Тогда оператор  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что

$$0 < r < 1 < R < \infty.$$

Выберем такой элемент  $h_0 \in K$ , что

$$\|h_0\| > \frac{1}{1-r} \left( r^2 + r \sup_{y \in K, \|y\|=r} \|Ay\| \right). \quad (4.20)$$

Определим на  $K$  оператор  $\tilde{A}$  равенством

$$\tilde{A}x = \begin{cases} \frac{\|x\|}{r} A\left(\frac{r}{\|x\|} x\right) + (1-r)h_0, & \text{если } \|x\| \leq r^2, \\ \frac{\|x\|}{r} A\left(\frac{r}{\|x\|} x\right) + \frac{\|x\|}{r} \cdot \frac{r - \|x\|}{\|x\|} h_0, & \text{если } r^2 \leq \|x\| \leq r, \\ Ax, & \text{если } r \leq \|x\| \leq R, \\ A\left(\frac{R}{\|x\|} x\right), & \text{если } \|x\| \geq R. \end{cases} \quad (4.21)$$

Нетрудно видеть, что оператор  $\tilde{A}$  вполне непрерывен и преобразует конус  $K$  в свою компактную часть. В силу принципа Шаудера оператор  $\tilde{A}$  имеет на  $K$  неподвижную

точку  $x^*$ . Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$r \leq \|x^*\| \leq \kappa.$$

Допустим, что  $\|x^*\| \leq r^2$ . Тогда

$$x^* = \frac{\|x^*\|}{r} A\left(\frac{r}{\|x^*\|} x^*\right) + (1-r) h_0,$$

откуда

$$\|h_0\| \leq \frac{1}{1-r} \left( r^2 + r \left\| A\left(\frac{r}{\|x^*\|} x^*\right) \right\| \right),$$

что противоречит (4.20).

Допустим, что  $r^2 < \|x^*\| < r$ . Тогда

$$\frac{r}{\|x^*\|} x^* = A\left(\frac{r}{\|x^*\|} x^*\right) + \frac{r - \|x^*\|}{\|x^*\|} h_0,$$

откуда

$$\frac{r}{\|x^*\|} x^* \geq A\left(\frac{r}{\|x^*\|} x^*\right),$$

что противоречит (4.18).

Допустим, наконец, что  $\|x^*\| > R$ . Тогда

$$x^* = A\left(\frac{R}{\|x^*\|} x^*\right),$$

то есть

$$A\left(\frac{R}{\|x^*\|} x^*\right) = (1 + \varepsilon) \cdot \frac{R}{\|x^*\|} x^*,$$

где

$$\varepsilon = \frac{\|x^*\|}{R} - 1.$$

Мы снова пришли к противоречию.

Теорема доказана.

**Теорема 4.13.** Пусть пространство  $E$  слабо полно и единичный шар в  $E$  слабо компактен. Пусть конус  $K$  допускает оштукатуривание.

Пусть положительный слабо непрерывный оператор  $A$  является сжатием конуса.

Тогда оператор  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы с тем изменением, что оператор  $\tilde{A}$

можно определить формулой

$$Ax = \begin{cases} \frac{l(x)}{r_0} A\left[\frac{r_0}{l(x)} x\right] + (1 - r_0) h_0, & \text{если } l(x) \leq r_0^2, \\ \frac{l(x)}{r_0} A\left[\frac{r_0}{l(x)} x\right] + \frac{l(x)}{r_0} \frac{r_0 - l(x)}{l(x)} h_0, & \text{если } r_0^2 \leq l(x) \leq r_0, \\ Ax, & \text{если } r_0 \leq l(x) \leq R_0, \\ A\left[\frac{R_0}{l(x)} x\right], & \text{если } l(x) \geq R_0, \end{cases} \quad (4.22)$$

где  $l(x)$  — равномерно положительный линейный функционал, а  $r_0$  и  $R_0$  — соответственно достаточно малое и достаточно большое положительные числа. Вместо принципа Шаудера нужно воспользоваться принципом Тихонова.

Из доказательств видно, что в теоремах 4.12 и 4.13 условие (4.18) можно заменить предположением о существовании такого ненулевого  $h_0 \in K$ , что при  $\alpha > 0$  и  $x \in K$  ( $0 < \|x\| \leq r$ ) выполняется неравенство

$$x \neq Ax + \alpha h_0.$$

Условие (4.19) можно заменить предположением, что

$$Ax \neq (1 + \varepsilon)x \quad (x \in K, \quad \|x\| \geq R, \quad \varepsilon > 0).$$

Эти предположения менее ограничительны, но неудобны, так как проверка их не допускает использования минорант и мажорант.

**5. Использование минорант и мажорант.** Применение последних двух теорем требует проверки условий (4.18) и (4.19). Здесь можно применить теоремы из гл. 3 (§ 3 и 4).

Удобно пользоваться минорантами  $A^-$  и мажорантами  $A^+$ : если для миноранты  $A^-$  выполнено условие (4.18)

$$A^-x \leq x \quad (x \in K, \quad 0 < \|x\| \leq r), \quad (4.23)$$

то оно тем более выполнено для оператора  $A$ : аналогично из

$$A^+x \geq x \quad (x \in K, \quad \|x\| \geq R) \quad (4.24)$$

вытекает (4.19). Миноранту (4.23) нужно строить лишь на элементах малой нормы, мажоранту — на элементах с большой нормой.

В качестве минорант и мажорант можно использовать линейные операторы. Тогда для проверки условий (4.23) и (4.24) можно применить теоремы 2.17 и 2.18.

Еще одно замечание. В приведенных выше теоремах доказательства основывались на переопределении оператора  $A$  на элементах  $x \in K$  с малой и большой нормой. Утверждения этих теорем сохраняют силу, если ограничение на поведение оператора в окрестности точки  $\theta$ , взятое из одной теоремы, объединить с ограничением из другой теоремы на значения оператора на элементах с большой нормой. Это замечание относится и к утверждениям, доказываемым в § 4.

### § 3. Вспомогательные утверждения

**1. Отображение на цилиндры.** Предположим, что конус  $K$  допускает оштукатуривание. Обозначим через  $l(x)$  равномерно положительный на  $K$  линейный функционал, то есть такой функционал, что

$$l(x) \geq m \|x\| \quad (x \in K).$$

Через  $L$  обозначим множество таких  $x \in E$ , что  $l(x) = 0$ .

Пусть  $z_0$  — такой элемент из  $K$ , что

$$l(z_0) = 1;$$

каждый элемент  $x \in E$  допускает тогда единственное представление в виде

$$x = l(x) z_0 + x_1 \quad (x_1 \in L). \quad (4.25)$$

Определим оператор  $P$  равенством

$$Px = x_1.$$

Тогда представление (4.26) можно записать в виде

$$x = l(x) z_0 + Px \quad (x \in E). \quad (4.26)$$

Через  $K_{\alpha\beta}$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) обозначим совокупность таких элементов  $x \in K$ , что

$$\alpha \leq l(x) \leq \beta. \quad (4.27)$$

Через  $S$  обозначим совокупность таких элементов  $x_1 \in L$ , что  $x_1 + z_0 \in K$  (иначе говоря, для построения  $S$  нужно рассмотреть пересечение конуса  $K$  с гиперплоскостью  $l(x) = 1$

и сдвинуть получившееся множество на элемент  $-z_0$ . Через  $T$  обозначим совокупность таких элементов  $x \in E$ , что  $Px \in S$ , то есть совокупность элементов  $x \in E$  вида

$$x = x_1 + tz_0 \quad (x_1 \in S, \quad -\infty < t < \infty) \quad (4.28)$$

(иначе говоря,  $T$  — это бесконечный цилиндр с основанием  $S$  и образующей, направленной по вектору  $z_0$ ). Наконец, через  $T_{a,b}$  обозначим часть цилиндра  $T$ , состоящую из таких элементов, у которых в представлении (4.28)  $t$  удовлетворяет неравенствам  $a \leq t \leq b$ .

Введем в рассмотрение оператор  $B$  равенством

$$Bx = \frac{1}{l(x)} Px + \frac{2l(x) - (\alpha_0 + \beta_0)}{\beta_0 - \alpha_0} z_0, \quad (4.29)$$

где  $\alpha_0, \beta_0$  — фиксированные положительные числа, причем  $\alpha_0 < \beta_0$ . Оператор  $B$  определен на всех элементах  $x \in L$ .

*Лемма 4.2. Оператор  $B$  осуществляет взаимно однозначное, взаимно непрерывное и взаимно слабо непрерывное отображение каждого множества  $K_{\alpha,\beta}$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) на соответствующее множество  $T_{a,b}$ , где*

$$a = \frac{2\alpha - (\alpha_0 + \beta_0)}{\beta_0 - \alpha_0}, \quad b = \frac{2\beta - (\alpha_0 + \beta_0)}{\beta_0 - \alpha_0}. \quad (4.30)$$

*Доказательство.* Для того чтобы элемент  $u$  принадлежал  $T$ , необходимо и достаточно, чтобы элемент  $Pu + z_0$  принадлежал  $K$ . В силу (4.29)

$$PBx + z_0 = \frac{Px}{l(x)} + z_0 = \frac{1}{l(x)} [Px + l(x)z_0] = \frac{x}{l(x)}.$$

Поэтому  $Bx \in T$  при  $x \in K$  ( $x \neq \theta$ ).

Тот факт, что  $BK_{\alpha,\beta} \subset T_{a,b}$ , очевиден.

Непрерывность и слабая непрерывность оператора  $B$  также становятся очевидными, если формулу (4.29) заменить эквивалентной

$$\begin{aligned} Bx &= \frac{x}{l(x)} - z_0 + \frac{2l(x) - (\alpha_0 + \beta_0)}{\beta_0 - \alpha_0} z_0 = \\ &= \frac{x}{l(x)} + \frac{2l(x) - 2\beta_0}{\beta_0 - \alpha_0} z_0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Из формулы (4.29) вытекает, что оператор  $B$  преобразует различные ненулевые элементы конуса  $K$  снова в различные элементы. Поэтому оператор  $B$  имеет обратный  $B^{-1}$ .

Для этого обратного оператора можно указать явную формулу

$$B^{-1}y = \frac{(\beta_0 - \alpha_0) l(y) + \alpha_0 + \beta_0}{2} (Py + z_0). \quad (4.32)$$

Оператор  $B^{-1}$  будем рассматривать на таких элементах  $y \in T$ , что

$$l(y) > -\frac{\alpha_0 + \beta_0}{\beta_0 - \alpha_0}.$$

В частности, последнему условию удовлетворяют все элементы  $Bx$ , где  $x \in K$  ( $x \neq \theta$ ). Непосредственный подсчет показывает, что

$$B^{-1}Bx \equiv x \quad (x \in E, \quad l(x) > 0).$$

Из равенства (4.32) вытекает, что  $B^{-1}T_{a,b} \subset K_{\alpha,\beta}$ , так как

$$l(B^{-1}y) = \frac{(\beta_0 - \alpha_0) l(y) + \alpha_0 + \beta_0}{2},$$

и неравенства

$$\alpha \leq l(B^{-1}y) \leq \beta \quad (y \in T_{a,b})$$

совпадают с неравенством (4.27). Таким образом,

$$BK_{\alpha,\beta} = T_{a,b}.$$

Непрерывность и слабая непрерывность оператора  $B^{-1}$  на  $T_{a,b}$  очевидны.

Лемма доказана.

Отметим, что в силу леммы 4.2 оператор  $B$  преобразует множество  $K_{\alpha_0, \beta_0}$  взаимно однозначно, непрерывно и слабо непрерывно на  $T_{1,1}$ .

**2. Лемма о неподвижной точке.** Перейдем к изучению положительных операторов  $A$ . В дальнейшем предполагается, что выполнено одно из двух условий: либо оператор  $A$  вполне непрерывен, либо оператор  $A$  слабо непрерывен, а пространство  $E$  слабо полно и единичный шар в этом пространстве слабо компактен. Напомним, что конус  $K$  допускает, по предположению, оштукатуривание.

Будем предполагать, что оператор  $A$  определен на некотором множестве  $K_{\alpha_0, \beta_0}$  ( $0 < \alpha_0 < \beta_0$ ).

**Лемма 4.3.** Пусть положительный оператор  $A$  удовлетворяет условиям

$$Ax = v_0 \quad (x \in K, \quad l(x) = \alpha_0) \quad (4.33)$$

и

$$Ax = u_0 \quad (x \in K, \quad l(x) = \beta_0). \quad (4.34)$$

где  $v_0$  и  $u_0$  — такие фиксированные элементы из  $K$ , что

$$0 \leq l(v_0) < \alpha_0 < \beta_0 < l(u_0) < \infty. \quad (4.35)$$

Тогда на  $K_{\alpha_0, \beta_0}$  оператор  $A$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

Доказательство. Из условий леммы вытекает, что

$$\sup_{x \in K_{\alpha_0, \beta_0}} l(Ax) < \infty. \quad (4.36)$$

Мы будем проводить доказательство в дополнительных предположениях, что  $l(v_0) > 0$  и

$$\inf_{x \in K_{\alpha_0, \beta_0}} l(Ax) > 0. \quad (4.37)$$

Это не ограничит общности результата, так как в противном случае дополнительным условиям и всем условиям доказываемой леммы будут удовлетворять операторы

$$A_n x = Ax + \frac{u_0}{n} \quad (x \in K_{\alpha_0, \beta_0}),$$

если только  $n$  достаточно велико. Если в дополнительных предположениях утверждение леммы будет доказано, то каждый из операторов  $A_n$  будет иметь неподвижную точку  $x_n \in K_{\alpha_0, \beta_0}$ . Значит,

$$Ax_n + \frac{u_0}{n} = x_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность  $Ax_n$ , а вместе с ней и последовательность  $x_n$  сходится к некоторому элементу  $x^* \in K_{\alpha_0, \beta_0}$  (сильно, если  $A$  вполне непрерывен, и слабо, если  $A$  слабо непрерывен). Элемент  $x^*$  будет неподвижной точкой оператора  $A$ .

Итак, можно дополнительно предполагать, что  $l(v_0) > 0$ , то есть  $v_0 \neq \theta$ , и что выполнено условие (4.37).

В силу (4.36) и (4.37) найдутся такие положительные числа  $\alpha$  и  $\beta$ , что

$$\alpha \leq l(Ax) \leq \beta \quad (x \in K_{\alpha_0, \beta_0}).$$

При этом  $\alpha < \alpha_0$  и  $\beta_0 < \beta$ .



Определим на  $T_{-1,1}$  оператор  $D$  равенством

$$Du = BAB^{-1}u - 2l(BAB^{-1}u - u)z_0, \quad (4.38)$$

где  $B$  и  $B^{-1}$  — операторы (4.29) и (4.32). В силу леммы 4.2 оператор  $D$  определен и обладает свойством полной или слабой непрерывности, если оператор  $A$  соответственно вполне или слабо непрерывен.

Если  $Ax^* = x^*$ , то элемент  $y^* = Bx^*$  будет неподвижной точкой оператора  $D$ , так как

$$Dy^* = BAx^* - 2l(BAx^* - Bx^*)z_0 = Bx^* = y^*.$$

Наоборот, если  $Dy^* = y^*$ , то элемент  $x^* = B^{-1}y^*$  удовлетворяет равенству

$$BAx^* - 2l(BAx^* - Bx^*)z_0 = Bx^*,$$

то есть равенству

$$BAx^* - Bx^* = 2l(BAx^* - Bx^*)z_0.$$

Из этого равенства следует, что

$$l(BAx^* - Bx^*) = 0,$$

так как  $l(z_0) = 1$ . Поэтому  $BAx^* = Bx^*$  и  $Ax^* = x^*$ .

Таким образом, вопрос о существовании (и даже о числе) неподвижных точек у оператора  $A$  на  $K_{\alpha_0, \beta_0}$  полностью эквивалентен вопросу о существовании неподвижных точек у оператора  $D$  на  $T_{-1, +1}$ .

Перечислим некоторые свойства оператора  $D$ .

Пусть  $l(y) = -1$ . Тогда  $l(B^{-1}y) = \alpha_0$  и в силу (4.33)  $AB^{-1}y = v_0$ . Значит,

$$Du = Bv_0 - 2l(Bv_0 - u)z_0 = Bv_0 - [2 + 2l(Bv_0)]z_0 = h_0 \\ (y \in T_{-1,1}, \quad l(y) = -1).$$

При этом в силу (4.29)

$$l(h_0) = -2 - 2l(Bv_0) = -1 + \frac{2[\alpha_0 - l(v_0)]}{\beta_0 - \alpha_0}$$

и в силу (4.35)

$$l(h_0) > -1.$$

Аналогично

$$Du = Bu_0 - [2 + 2l(Bu_0)]z_0 = g_0 \quad (y \in T_{-1,1}, \quad l(y) = 1).$$

причем

$$l(g_0) < 1.$$

Доопределим оператор  $D$  на все  $T_{a,b}$ , где числа  $a$  и  $b$  определены равенствами (4.30), положив

$$Dy = \begin{cases} h_0, & \text{если } y \in T_{a,b}, \quad a \leq l(y) \leq -1, \\ g_0, & \text{если } y \in T_{a,b}, \quad 1 \leq l(y) \leq b. \end{cases}$$

Продолженный оператор  $D$  будет вместе с оператором  $D$  вполне непрерывен или слабо непрерывен.

Продолженный оператор  $D$  преобразует  $T_{a,b}$  в себя. В силу принципа Шаудера или принципа Тихонова продолженный оператор  $D$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку. В силу неравенств  $l(h_0) > -1$  и  $l(g_0) < 1$  эта неподвижная точка не может лежать вне  $T_{-1,1}$ .

Итак, оператор  $D$  на  $T_{-1,1}$  имеет неподвижную точку.

Лемма доказана.

**3. Случай конечномерного пространства.** Леммой 4.3 мы будем ниже пользоваться, в частности, при изучении операторов, действующих в конечномерных пространствах. В конечномерных пространствах слабая и полная непрерывности оператора совпадают с обычной непрерывностью. Напомним также, что все конусы в конечномерном пространстве допускают оштукатуривание, так как каждый строго положительный функционал  $l(x)$  ( $l(x) > 0$  при  $x \in K$  и  $x \neq 0$ ) на конечномерном конусе равномерно положителен.

Обозначим через  $F_{r,R}$  множество таких элементов  $x \in K$ , что  $r \leq \|x\| \leq R$ .

Приведем одно видоизменение леммы 4.3.

**Лемма 4.4.** Пусть  $K$  — конус в конечномерном пространстве  $E$ . Пусть положительный непрерывный на  $F_{r,R}$  оператор  $A$  удовлетворяет условиям

$$Ax = v_0 \quad (x \in K, \quad \|x\| = r) \quad (4.39)$$

и

$$Ax = u_0 \quad (x \in K, \quad \|x\| = R), \quad (4.40)$$

где

$$\|v_0\| < r < R < \|u_0\|. \quad (4.41)$$

Тогда оператор  $A$  имеет на  $F_{r,R}$  по крайней мере одну неподвижную точку.

Доказательство. Пусть  $l(x)$  — равномерно положительный на  $K$  линейный функционал. Положим

$$A_1 y = \frac{\left\| A \left[ \frac{l(y)}{\|y\|} y \right] \right\|}{l \left\{ A \left[ \frac{l(y)}{\|y\|} y \right] \right\}} A \left[ \frac{l(y)}{\|y\|} y \right];$$

этот оператор определен на  $K_{r,R}$  и удовлетворяет условиям леммы 4.3. Поэтому найдется такая точка  $y^* \in K_{r,R}$ , что

$$\frac{\left\| A \left[ \frac{l(y^*)}{\|y^*\|} y^* \right] \right\|}{l \left\{ A \left[ \frac{l(y^*)}{\|y^*\|} y^* \right] \right\}} A \left[ \frac{l(y^*)}{\|y^*\|} y^* \right] = y^*.$$

Введем обозначение

$$\frac{l(y^*)}{\|y^*\|} y^* = x^*.$$

Очевидно,  $x^* \in F_{r,R}$ . Из равенства

$$y^* = \frac{\|Ax^*\|}{l(Ax^*)} Ax^*$$

вытекает, что

$$x^* = \frac{l \left[ \frac{\|Ax^*\|}{l(Ax^*)} Ax^* \right]}{\left\| \frac{\|Ax^*\|}{l(Ax^*)} Ax^* \right\|} \cdot \frac{\|Ax^*\|}{l(Ax^*)} Ax^* = Ax^*.$$

Итак,  $x^*$  является неподвижной точкой оператора  $A$ .

Лемма доказана.

**4. Шаудеровский оператор проектирования на конечномерное подпространство.** Пусть  $F$  — компактное множество в банаховом пространстве  $E$ . Пусть  $\alpha$  — заданное положительное число. Обозначим через  $y_1, y_2, \dots, y_n$  конечную  $\frac{\alpha}{2}$ -сеть множества  $F$ ; это значит, что для любого  $y \in F$  найдется по крайней мере один такой элемент  $y_{i_0}$ , что

$$\|y - y_{i_0}\| < \frac{\alpha}{2}.$$

Определим на  $F$  оператор  $P$  равенством

$$Py = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(y) y_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i(y)}, \quad (4.42)$$

где

$$\mu_i(y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} - \|y - y_i\|, & \text{если } \|y - y_i\| \leq \frac{\alpha}{2}, \\ 0, & \text{если } \|y - y_i\| \geq \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Непрерывность оператора  $P$  очевидна. Оператор  $P$  преобразует каждый элемент  $y \in F$  в элемент выпуклой оболочки тех точек  $\frac{\alpha}{2}$ -сети  $y_1, y_2, \dots, y_n$  множества  $F$ , до которых расстояния от  $y$  меньше  $\frac{\alpha}{2}$ . Поэтому

$$\|Py - y\| < \frac{\alpha}{2} \quad (y \in F). \quad (4.43)$$

Нетрудно видеть, что оператор  $P$  проектирует  $F$  на конечномерное подпространство — линейную оболочку точек  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

**Б. Лемма о неподвижной точке вполне непрерывного оператора.**

*Лемма 4.5. Пусть вполне непрерывный оператор  $A$  положителен на множестве таких элементов  $x \in K$ , что  $r \leq \|x\| \leq R$ . Пусть*

$$Ax = \begin{cases} v_0, & \text{если } x \in K, \quad \|x\| = r, \\ u_0, & \text{если } x \in K, \quad \|x\| = R, \end{cases}$$

где  $\|v_0\| < r < R < \|u_0\|$ .

*Тогда оператор  $A$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку.*

*Доказательство.* Допустим, что оператор  $A$  не имеет неподвижных точек. Тогда

$$\inf_{x \in K, r \leq \|x\| \leq R} \|x - Ax\| > 0.$$

Если бы последнее неравенство не имело места, то нашлась бы такая последовательность  $x_n \in K$ ,  $r \leq \|x_n\| \leq R$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Ax_n\| = 0.$$

Так как  $A$  вполне непрерывен, то без ограничения общности можно считать, что последовательность  $Ax_n$  сходится по норме. Элементы

$$x_n = (x_n - Ax_n) + Ax_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходятся к тому же пределу  $x^*$ . Тогда  $x^* = Ax^*$ , что противоречит предположению.

Итак, найдется такое  $\alpha > 0$ , что

$$\|x - Ax\| > \alpha \quad (x \in K, \quad r \leq \|x\| \leq R).$$

При этом без ограничения общности можно считать, что

$$\alpha < r - \|v_0\|, \quad \alpha < \|u_0\| - R.$$

Рассмотрим оператор (4.42), построенный по некоторой  $\frac{\alpha}{2}$ -сети множества  $F$  элементов  $Ax$ , где  $x \in K$  и  $r \leq \|x\| \leq R$ . Через  $E_n$  обозначим конечномерное подпространство, на которое оператор  $P$  проектирует  $F$ ; пусть  $K_n = K \cap E_n$  ( $K_n$  является невырожденным конусом, так как все точки  $\frac{\alpha}{2}$ -сети множества  $F$  принадлежат как подпространству  $E_n$ , так и конусу  $K$ ).

Оператор  $A_1 = PA$ , рассматриваемый на  $K_n$  (точнее, на таких элементах  $x \in K_n$ , что  $r \leq \|x\| \leq R$ ), удовлетворяет условиям леммы 4.4 и имеет поэтому неподвижную точку  $x^*$

$$PAx^* = x^*.$$

С другой стороны, в силу (4.43)

$$\|PAx^* - x^*\| \geq \|Ax^* - x^*\| - \|Ax^* - PAx^*\| > \frac{\alpha}{2}.$$

Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

#### § 4. Неподвижные точки операторов, растягивающих конус

**1. Растяжение конуса.** Положительный оператор  $A$  ( $A\theta = \theta$ ) назовем *растяжением* конуса  $K$ , если найдутся такие  $r, R > 0$ , что при всех  $\epsilon > 0$

$$Ax \geq (1 + \epsilon)x \quad (x \in K, \quad \|x\| \leq r, \quad x \neq \theta) \quad (4.44)$$

$$Ax \leq x \quad (x \in K, \quad \|x\| \geq R). \quad (4.45)$$

**Теорема 4.14.** Пусть положительный вполне непрерывный оператор  $A$  является растяжением конуса.

Тогда оператор  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

**Доказательство.** Будем считать, что  $R > 1$ . Положим

$$\tilde{A}x = \begin{cases} \frac{2\|x\| - r}{r} A\left(\frac{r}{\|x\|} x\right), & \text{если } \frac{r}{2} \leq \|x\| \leq r, \\ Ax, & \text{если } r \leq \|x\| \leq R, \\ \frac{\|x\|}{R} A\left(\frac{R}{\|x\|} x\right) + (\|x\| - R)h_0, & \text{если } R \leq \|x\| \leq R^2, \\ \frac{\|x\|}{R} \cdot \frac{R^3 - \|x\|^2}{R^3 - R^2} A\left(\frac{R}{\|x\|} x\right) + (R^2 - R)h_0, & \text{если } R^2 \leq \|x\| \leq R^3, \end{cases} \quad (4.46)$$

где  $h_0$  — некоторый фиксированный ненулевой элемент из  $K$ , удовлетворяющий неравенству

$$\|h_0\| > \frac{1}{R^2 - R} \left[ R^3 + R^2 \sup_{y \in K, \|y\| \leq R} \|Ay\| \right].$$

Оператор  $\tilde{A}$  очевидным образом вполне непрерывен и удовлетворяет условиям леммы 4.5. Пусть  $x^*$  — неподвижная точка оператора  $\tilde{A}$ . Доказательство теоремы будет завершено, если мы покажем, что

$$r \leq \|x^*\| \leq R.$$

Очевидно,  $\|x^*\| > \frac{r}{2}$ . Допустим, что  $\|x^*\| < r$ . Тогда

$$x^* = \frac{2\|x^*\| - r}{r} A\left(\frac{r}{\|x^*\|} x^*\right).$$

Это значит, что элемент

$$y^* = \frac{r}{\|x^*\|} x^*$$

удовлетворяет равенству

$$Ay^* = \left(1 + \frac{r - \|x^*\|}{2\|x^*\| - r}\right) y^*,$$

которое противоречит (4.44).

Допустим, что  $R < \|x^*\| \leq R^2$ . Тогда

$$x^* = \frac{\|x^*\|}{R} A\left(\frac{R}{\|x^*\|} x^*\right) + (\|x^*\| - R) h_0,$$

откуда вытекает неравенство

$$A\left(\frac{R}{\|x^*\|} x^*\right) \leq \frac{R}{\|x^*\|} x^*,$$

которое противоречит условию (4.45).

Допустим, наконец, что  $R^2 < \|x^*\| \leq R^3$ . Тогда

$$x^* = \frac{\|x^*\|}{R} \frac{R^3 - \|x^*\|}{R^3 - R^2} A\left(\frac{R}{\|x^*\|} x^*\right) + (R^2 - R) h_0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \|h_0\| &\leq \frac{1}{R^2 - R} \left[ \|x^*\| + \frac{\|x^*\|}{R} \frac{R^3 - \|x^*\|}{R^3 - R^2} \left\| A\left(\frac{R}{\|x^*\|} x^*\right) \right\| \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{R^2 - R} \left[ R^3 + R^2 \left\| A\left(\frac{R}{\|x^*\|} x^*\right) \right\| \right], \end{aligned}$$

что противоречит (4.47).

Итак,  $r \leq \|x^*\| \leq R$ . Поэтому  $Ax^* = \tilde{A}x^* = x^*$ .

Теорема доказана.

**Теорема 4.15.** Пусть пространство  $E$  слабо полно, единичный шар слабо компактен, конус  $K$  допускает оштукатуривание. Пусть слабо непрерывный оператор  $A$  является растяжением конуса.

Тогда оператор  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну неподвижную точку.

Доказательство этой теоремы предоставляем читателю. Отметим только, что вместо оператора (4.46) следует рассмотреть оператор

$$Ax = \begin{cases} \frac{2l(x)-r}{r} A\left[\frac{r}{l(x)} x\right], & \text{если } \frac{r}{2} \leq l(x) \leq r, \\ Ax, & \text{если } r \leq l(x) \leq R, \\ \frac{l(x)}{R} A\left[\frac{R}{l(x)} x\right] + [l(x)-R] h_0, & \text{если } R \leq l(x) \leq R^2, \\ \frac{l(x)}{R} \frac{R^3-l(x)}{R^3-R^2} A\left[\frac{R}{l(x)} x\right] + (R^2-R) h_0, & \text{если } R^2 \leq l(x) \leq R^3, \end{cases} \quad (4.47)$$

где  $l(x)$  — некоторый линейный равномерно положительный функционал такой, что при всех  $\varepsilon > 0$

$$Ax \geq (1+\varepsilon)x \quad (x \in K, \quad l(x) \leq r) \quad (4.48)$$

и

$$Ax \leq x \quad (x \in K, \quad l(x) \geq R). \quad (4.49)$$

**2. Использование мажорант и минорант.** Проверка условий (4.44) и (4.45) или (4.48) и (4.49) часто упрощается, если использовать мажоранты  $A^+$  и миноранты  $A^-$  оператора  $A$ . Нетрудно видеть, что для выполнения условия (4.44) или, аналогично, условия (4.48) достаточно выполнения соотношений

$$A^+x \geq (1+\varepsilon)x \quad (x \in K, \quad \|x\| \leq r). \quad (4.50)$$

Для выполнения условия (4.45) (аналогично (4.49)) достаточно, чтобы какая-либо миноранта удовлетворяла соотношениям

$$A^-x \leq x \quad (x \in K, \quad \|x\| \geq r). \quad (4.51)$$

В качестве мажорант и минорант могут выбираться более простые операторы (например, линейные), после чего проверка условий (4.50) и (4.51) становится несложной.



Отметим, что условия (4.44) и (4.45) можно заменить, как это видно из доказательств, менее ограничительными и просто формулируемыми: вместо (4.44) можно предположить, что  $Ax \neq (1 + \varepsilon)x$ , а вместо (4.45), — что для некоторого  $h_0 \in K$  при  $\alpha > 0$  и  $x \in K$  ( $\|x\| \leq r$ ) выполняются неравенства  $x \neq Ax + \alpha h_0$ . Однако переход к новым условиям неудобен, так как при применении мажорант и минорант удобнее проверять более грубые соотношения (4.44) и (4.45). Все сказанное относится и к условиям (4.50) и (4.51).

**3. Использование производных.** Условия типа (4.44) и (4.45), как нам уже известно, просто проверяются для линейных операторов (см. гл. 2, § 5, п. 4) и для операторов, близких к линейным (см. гл. 3, § 3 и 4). Укажем теорему, в которой условия существования положительных решений формулируются в терминах свойств операторов  $A'(\theta)$  и  $A'(\infty)$ .

Будем предполагать, что рассматриваемый положительный оператор  $A$  имеет сильную производную Фреше  $A'(\theta)$  по конусу и сильную асимптотическую производную  $A'(\infty)$  по конусу. Оператор  $A$  будем предполагать либо вполне непрерывным, либо слабо непрерывным, причем в последнем случае, как обычно, будем считать пространство  $E$  слабо полным и слабо компактным, а конус  $K$  — оштукатуриваемым.

**Теорема 4.16.** Пусть оператор  $A'(\theta)$  не имеет позитивных собственных значений, превосходящих или равных 1. Пусть оператор  $A'(\infty)$  имеет собственный вектор  $g_0 \in K$ :

$$A'(\infty)g_0 = \lambda_\infty g_0, \quad (4.52)$$

где  $\lambda_\infty > 1$  и  $A'(\infty)$  не имеет позитивных собственных значений, равных 1.

Тогда оператор  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну неподвижную ненулевую точку.

**Доказательство.** Рассуждения проводятся аналогично как для случая вполне непрерывного, так и для случая слабо непрерывного оператора  $A$ .

Ограничимся рассмотрением слабо непрерывного оператора.

Рассмотрим такую последовательность операторов  $A_n$ :

$$A_n x = \begin{cases} [2nl(x) - 1] A\left[\frac{1}{nl(x)} x\right], & \text{если } \frac{1}{2n} \leq l(x) \leq \frac{1}{n}, \\ Ax, & \text{если } \frac{1}{n} \leq l(x) \leq n, \\ \frac{l(x)}{n} A\left[\frac{n}{l(x)} x\right] + [l(x) - n]^2 g_0, & \text{если } n \leq l(x) \leq n^2, \\ \frac{l(x)}{n} \frac{n^3 - l(x)}{n^3 - n^2} A\left[\frac{n}{l(x)} x\right] - (n^2 - n)^2 g_0, & \text{если } n^2 \leq l(x) \leq n^3, \end{cases} \quad (4.53)$$

где  $l(x)$  — линейный равномерно положительный функционал:  $l(x) \geq a\|x\|$  при  $x \in K$ . В силу леммы 4.3 каждый из этих операторов имеет неподвижную точку  $x_n$ . Для завершения доказательства достаточно показать, что при больших  $n$  выполняются неравенства

$$\frac{1}{n} \leq l(x_n) \leq n.$$

Мы покажем, что невыполнение этих неравенств приводит к противоречию.

Проводимые ниже рассуждения аналогичны доказательству теоремы 4.11.

Предположим, что для некоторой последовательности индексов  $n_l$  выполняются неравенства

$$\frac{1}{2n_l} \leq l(x_{n_l}) \leq \frac{1}{n_l} \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Тогда

$$x_{n_l} = [2n_l l(x_{n_l}) - 1] A\left[\frac{x_{n_l}}{n_l l(x_{n_l})}\right],$$

то есть

$$y_l = \alpha_l A y_l \quad (l = 1, 2, \dots), \quad (4.54)$$

где

$$y_l = \frac{x_{n_l}}{n_l l(x_{n_l})}, \quad 0 < \alpha_l = \frac{2n_l l(x_{n_l}) - 1}{n_l l(x_{n_l})} \leq 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что числа  $\alpha_l$  сходятся к некоторому пределу  $\alpha_0 \in [0, 1]$ , а элементы  $\frac{y_l}{l(y_l)}$  сходятся слабо к некоторому элементу  $v_0$ , который отличен от  $\theta$ , так как  $l(v_0) = 1$ . Тогда и элементы  $A'(\theta) \frac{y_l}{l(y_l)}$  сходятся слабо к  $A'(\theta) v_0$ . Перепишем равенства (4.54) в виде

$$\frac{y_l}{l(y_l)} = \alpha_l \frac{Ay_l - A'(\theta) y_l}{l(y_l)} + (\alpha_l - \alpha_0) A'(\theta) \frac{y_l}{l(y_l)} + \alpha_0 A'(\theta) \frac{y_l}{l(y_l)}$$

и перейдем к слабому пределу при  $l \rightarrow \infty$ . В правой части первые два слагаемых стремятся к нулю по норме. Таким образом,

$$v_0 = \alpha_0 A'(\theta) v_0.$$

Последнее равенство противоречит предположению, что  $A'(\theta)$  не имеет позитивных собственных значений, превосходящих или равных 1.

Предположим, что для некоторой последовательности индексов  $n_l$  выполняются неравенства

$$n_l \leq l(x_{n_l}) \leq n_l^2 \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Тогда

$$\frac{n_l x_{n_l}}{l(x_{n_l})} = A \left[ \frac{n_l x_{n_l}}{l(x_{n_l})} \right] + \frac{[l(x_{n_l}) - n_l]^2}{l(x_{n_l})} n_l g_0,$$

то есть

$$y_l = Ay_l + \beta_l l(y_l) g_0 \quad (l = 1, 2, \dots), \quad (4.55)$$

где

$$y_l = \frac{n_l x_{n_l}}{l(x_{n_l})}, \quad 0 < \beta_l = \frac{l(y_l) - l(Ay_l)}{l(y_l) l(g_0)} \leq \frac{1}{l(g_0)}.$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность  $\frac{y_l}{l(y_l)}$  слабо сходится к некоторому элементу  $u_0$ , который отличен от нуля; последовательность  $A'(\infty) \frac{y_l}{l(y_l)}$  при этом слабо сходится к  $A'(\infty) u_0$ . Последовательность  $\beta_l$  также будем считать сходящейся к некоторому числу  $\beta_0$ . Равенства (4.55) перепишем в виде

$$\frac{y_l}{l(y_l)} = \frac{Ay_l - A'(\infty) y_l}{l(y_l)} + A'(\infty) \frac{y_l}{l(y_l)} + \beta_l g_0$$

и перейдем к слабому пределу при  $i \rightarrow \infty$ . Предельное равенство имеет вид

$$u_0 = A'(\infty) u_0 + \beta_0 g_0. \quad (4.56)$$

Здесь  $\beta_0$  положительно, так как в противном случае 1 является собственным позитивным значением оператора  $A'(\infty)$ .

Пусть  $u_0 \geq t_0 g_0$  и  $u \geq t g_0$  при  $t > t_0$ . В силу (4.56)

$$u_0 \geq A'(\infty)(t_0 g_0) + \beta_0 g_0 \geq (\lambda_\infty t_0 + \beta_0) g_0,$$

что противоречит максимальности  $t_0$ .

Предположим, наконец, что для некоторой последовательности индексов  $n_i$  выполняются неравенства

$$n_i^2 < l(x_{n_i}) \leq n_i^3 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Тогда

$$\frac{n_i x_{n_i}}{l(x_{n_i})} = \frac{n_i^3 - l(x_{n_i})}{n_i^3 - n_i^2} A \left[ \frac{n_i}{l(x_{n_i})} x_{n_i} \right] + \frac{n_i(n_i^2 - n_i)^2}{l(x_{n_i})} g_0 \quad (4.57)$$

или

$$y_i = \gamma_i A y_i + \delta_i l(y_i) g_0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

где

$$y_i = \frac{n_i x_{n_i}}{l(x_{n_i})}, \quad 0 \leq \gamma_i = \frac{n_i^3 - l(x_{n_i})}{n_i^3 - n_i^2} < 1,$$

и

$$\delta_i = \frac{(n_i^2 - n_i)^2}{l(x_{n_i})} \geq \frac{(n_i^2 - n_i)^2}{\|l\| \|x_{n_i}\|} \geq \frac{(n_i^2 - n_i)^2}{\|l\| n_i^3}. \quad (4.58)$$

Из (4.57) вытекает, что

$$\begin{aligned} \delta_i &\leq \frac{1}{\|g_0\|} \left\{ \frac{\|y_i\|}{l(y_i)} + \gamma_i \frac{\|A y_i - A'(\infty) y_i\|}{l(y_i)} + \gamma_i \left\| A'(\infty) \frac{y_i}{l(y_i)} \right\| \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{\|g_0\|} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{\|A y_i - A'(\infty) y_i\|}{a \|y_i\|} + \frac{1}{a} \|A'(\infty)\| \right\}, \end{aligned}$$

то есть

$$\sup_{i=1, 2, \dots} \delta_i < \infty,$$

что противоречит (4.58).

Теорема доказана.

**4. Существование многих решений.** В приведенных выше теоремах об операторах, являющихся сжатиями или растяжениями конуса, ограничения накладывались на характер

значений  $Ax$  на элементах  $x \in K$  с достаточно малой и достаточно большой нормой. Из доказательств видно, что эти ограничения можно было бы накладывать на значения операторов на элементах с фиксированной нормой.

Пусть, например, положительный вполне непрерывный оператор  $A$  удовлетворяет условиям

$$Ax \leq x \quad (x \in K, \quad \|x\| = R) \quad (4.59)$$

и

$$Ax \geq (1 + \varepsilon)x \quad (x \in K, \quad \|x\| = R^*, \quad \varepsilon > 0). \quad (4.60)$$

Тогда при  $R < R^*$  из теоремы об операторах, сжимающих конус, будет вытекать существование такой неподвижной точки  $x^*$  у оператора  $A$ , что

$$R < \|x^*\| < R^*.$$

При  $R^* < R$  это же утверждение будет вытекать из теоремы об операторах, растягивающих конус.

Нетрудно видеть, что соотношения (4.59) и (4.60) не могут быть одновременно выполнены при  $R = R^*$ .

Если есть две перемежающиеся последовательности  $R_n$ ,  $R_n^* \rightarrow \infty$ , обладающие тем свойством, что

$$Ax \leq x \quad (x \in K, \quad \|x\| = R_n, \quad n = 1, 2, \dots)$$

и

$$Ax \geq (1 + \varepsilon)x \quad (x \in K, \quad \|x\| = R_n^*, \quad \varepsilon > 0, \quad n = 1, 2, \dots),$$

то оператор  $A$  будет иметь счетное число различных неподвижных точек.

Мы не останавливаемся на формулировке соответствующих утверждений для слабо непрерывных операторов, так как они очевидны.

## ГЛАВА 5

### НЕПРЕРЫВНЫЕ ВЕТВИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

В этой главе рассматривается вопрос о положительных решениях уравнений с операторами, зависящими от параметра. Простейшие теоремы существования вытекают из результатов предыдущей главы.

Изучаются геометрические характеристики совокупности всех решений, соответствующих различным значениям параметра.

В некоторых случаях не удастся указать те значения параметра, при которых изучаемое уравнение имеет положительное решение; для этих случаев указываются признаки существования решений при некоторых, заранее неизвестных, значениях параметра. Соответствующие теоремы основаны на топологических соображениях; доказательства вынесены в отдельный параграф, на который не опираются построения следующих глав.

#### § 1. Положительные решения уравнений с параметром

**1. Описание изучаемых уравнений.** Пусть в пространстве  $E$  с конусом  $K$  определен зависящий от параметра  $\mu$  нелинейный оператор  $A(x; \mu)$ . Предполагается, что  $\mu$  — это числовой параметр (многие утверждения сохраняют силу и для нечисловых параметров). При каждом фиксированном  $\mu$  оператор  $A(x; \mu)$  определен и положителен на всем  $K$ .

Рассмотрим уравнение

$$x = A(x; \mu). \quad (5.1)$$

Его положительные решения будем обозначать через  $x(\mu)$ .

Допустим, что  $x(\mu)$  не только существует при значениях  $\mu$  из некоторого промежутка, но и единственно.

Естественно ожидать, что в случае достаточно гладких операторов  $A(x; \mu)$  вектор-функция  $x(\mu)$  непрерывна. Такая непрерывная зависимость действительно имеет место. Если единственности нет, то совокупность  $\mathfrak{M}$  всех решений уже не является непрерывной кривой в пространстве  $E$ ; однако многие свойства непрерывной кривой сохраняются.

Во всей главе мы в основном ограничиваемся рассмотрением уравнений с вполне непрерывными операторами. При этом оператор  $A(x; \mu)$ , зависящий от параметра  $\mu$ , называется *вполне непрерывным*, если он непрерывен по совокупности переменных и если множество его значений компактно, когда  $x$  пробегает любое ограниченное множество, а  $\mu$  — произвольный конечный промежуток.

**2. Существование решений.** Предположим, что вполне непрерывный при каждом  $\mu \in \mathfrak{M}$  положительный оператор  $A$  имеет сильную асимптотическую производную  $A'(\infty; \mu)$ . Допустим, что операторы  $A'(\infty; \mu)$  ( $\mu \in \mathfrak{M}$ ) не имеют положительных собственных значений, которые превосходят или равны 1. Тогда из теорем предыдущей главы вытекает, что уравнение (5.1) имеет в конусе  $K$  по крайней мере одно решение при всех  $\mu \in \mathfrak{M}$ .

Исследование усложняется, если  $A(0; \mu) = 0$  и речь идет о ненулевых решениях.

Предположим дополнительно, что оператор  $A(x; \mu)$  имеет сильные производные Фреше  $A'(0; \mu)$  и асимптотическую производную  $A'(\infty; \mu)$  специального вида

$$A'(\theta; \mu) = \mu A'(\theta), \quad A'(\infty; \mu) = \mu A'(\infty). \quad (5.2)$$

**Теорема 5.1.** Пусть  $A(0; \mu) \equiv 0$ . Пусть каждый из операторов  $A'(0)$  и  $A'(\infty)$  имеет в конусе  $K$  единственный собственный вектор

$$A'(\theta) h_0 = \lambda_0 h_0, \quad A'(\infty) g_0 = \lambda_\infty g_0. \quad (5.3)$$

Тогда уравнение (5.1) при

$$\mu \in \left( \frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_\infty} \right) \quad (5.4)$$

имеет в  $K$  по крайней мере одно ненулевое решение.

Доказательство заключается в непосредственной проверке условий теорем предыдущей главы.

Заметим, что теорема 5.1 сохраняет силу, если один из операторов (5.2) не имеет позитивных собственных значений. В этом случае одну из границ интервала (5.4) нужно считать равной  $+\infty$ .

Предположение о дифференцируемости оператора  $A(x; \mu)$  можно заменить предположением о существовании соответствующих мажорант и минорант. Из теорем 4.12 и 4.14 и из теорем о несовместных неравенствах для линейных операторов (гл. 2, § 5, п. 4) вытекает, например, следующее утверждение:

**Теорема 5.2.** Пусть  $A(0; \mu) \equiv 0$ . Пусть положительный вполне непрерывный оператор  $A(x; \mu)$  при достаточно малых  $x$  имеет на  $K$  линейную миноранту, а при достаточно больших  $x$  — линейную мажоранту, то есть пусть выполнены следующие условия:

$$A(x; \mu) \geq \mu A_-(0) x \quad (x \in K, \|x\| \leq r(\mu)) \quad (5.5)$$

и

$$A(x; \mu) \leq \mu A_+(\infty) x \quad (x \in K, \|x\| \geq R(\mu)), \quad (5.6)$$

где  $A_-(0)$  и  $A_+(\infty)$  — линейные положительные операторы. Пусть существуют такие ненулевые элементы  $u_0, v_0 \in K$ , что оператор  $A_-(0)$   $u_0$ -ограничен снизу и

$$A_-(0) u_0 \geq \lambda_0 u_0, \quad (5.7)$$

а оператор  $A_+(\infty)$   $v_0$ -ограничен сверху и

$$A_+(\infty) v_0 \leq \lambda_\infty v_0. \quad (5.8)$$

Тогда при  $\lambda_0 > \lambda_\infty$  и

$$\mu \in \left( \frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_\infty} \right) \quad (5.4)$$

уравнение (5.1) имеет в  $K$  по крайней мере одно ненулевое решение.

**Теорема 5.3.** Пусть  $A(0; \mu) \equiv 0$ . Пусть вполне непрерывный оператор  $A(x; \mu)$  удовлетворяет условиям

$$A(x; \mu) \leq \mu A_+(\theta) x \quad (x \in K, \|x\| \leq r(\mu)) \quad (5.9)$$

и

$$A(x; \mu) \geq \mu A_-(\infty) x \quad (x \in K, \|x\| \geq R(\mu)), \quad (5.10)$$

где  $A_+(\theta)$  и  $A_-(\infty)$  — линейные операторы, первый из которых  $u_0$ -ограничен сверху, а второй  $v_0$ -ограничен



снизу, причем

$$A_+(\theta) u_0 \leq \lambda_0 u_0 \quad (5.11)$$

и

$$A_-(\infty) v_0 \geq \lambda_\infty v_0. \quad (5.12)$$

Тогда при  $\lambda_0 < \lambda_\infty$  и

$$\mu \in \left( \frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_\infty} \right) \quad (5.4)$$

уравнение (5.1) имеет в  $K$  по крайней мере одно ненулевое решение.

Принадлежность  $\mu$  интервалу (5.4) является, конечно, лишь достаточным условием существования положительного решения  $u$  уравнения (5.1). Отметим, что величина промежутка (5.4) зависит от того, какие построены линейные миноранты и мажоранты и от того, насколько удачно выбраны элементы  $u_0$  и  $v_0$ .

**3. Непрерывная ветвь решений.** Сделаем вначале простые замечания.

Пусть оператор  $A(x; \mu)$  вполне непрерывен. Допустим, что  $x(\mu_n)$  — ограниченная последовательность решений уравнения (5.1), соответствующая сходящейся последовательности значений параметра  $\mu_n$ ,  $\mu_n \rightarrow \mu_0$ . Без ограничения общности можно считать (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности), что последовательность  $A[x(\mu_n); \mu_n]$  сходится по норме к некоторому элементу  $x_0$ . Из равенств

$$x(\mu_n) = A[x(\mu_n); \mu_n] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

вытекает, что  $x(\mu_n)$  сходится к  $x_0$  и

$$x_0 = A(x_0, \mu_0).$$

Таким образом, уравнение (5.1) разрешимо и при  $\mu = \mu_0$ .

Множество всех решений уравнения (5.1), соответствующих каждому фиксированному значению  $\mu \in \mathcal{M}$ , замкнуто. Предоставляем показать это читателю.

Допустим, что уравнение (5.1) при каждом  $\mu \in \mathcal{M}$  имеет единственное решение в некотором шаре. Тогда это решение  $x(\mu)$  является непрерывной функцией от  $\mu$ , то есть образует непрерывную кривую  $\mathcal{N}$  в пространстве  $E$ . Значение  $\mu$  можно рассматривать как функционал, определенный

на точках  $x \in \mathfrak{N}$ ; этот функционал непрерывен. Оба утверждения вытекают из проведенных выше рассуждений.

Допустим теперь, что о единственности решений уравнения (5.1) ничего не известно.

Будем говорить, что множество  $\mathfrak{M} \subset E$  образует *непрерывную ветвь, связывающую ограниченное замкнутое множество  $F \subset E$  с множеством  $F_1 \subset E$* , если непусто пересечение множества  $\mathfrak{M}$  с границей  $\Gamma$  любой ограниченной области  $\mathfrak{G}$ , содержащей  $F$  и не имеющей общих точек с  $F_1$ .

Обозначим через  $X_\mu$  множество всех решений  $x(\mu) \in K$  уравнения (5.1) при данном фиксированном значении  $\mu$ . Каждое  $X_\mu$  замкнуто, если оператор  $A(x; \mu)$  непрерывен по  $x$ . Если  $A(x; \mu)$  вполне непрерывен, то каждое множество  $X_\mu$  локально компактно.

**Лемма 5.1.** Пусть выполнены условия одной из теорем 5.1, 5.2 или 5.3 и

$$\mu \in \left( \frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_\infty} \right). \quad (5.4)$$

Тогда

$$a(\mu) \leq \|x(\mu)\| \leq b(\mu) \quad (x(\mu) \in X_\mu), \quad (5.13)$$

где  $a(\mu), b(\mu) > 0$ .

**Доказательство.** Допустим, что выполнены условия теоремы 5.1, и предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдется такая последовательность  $x_n \in X_{\mu_n}$ , что либо  $\|x_n\| \rightarrow 0$ , либо  $\|x_n\| \rightarrow \infty$ . Пусть  $\|x_n\| \rightarrow 0$ . Тогда равенства

$$x_n = A(x_n; \mu_n)$$

перепишем в виде

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} = \frac{A(x_n; \mu_n) - \mu_n A'(\theta) x_n}{\|x_n\|} + \mu_n A'(\theta) \frac{x_n}{\|x_n\|}. \quad (5.14)$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность  $\mu_n A'(\theta) \frac{x_n}{\|x_n\|}$  сходится по норме к некоторому элементу  $u_0$ . Из равенств (5.14) вытекает, что последовательность  $\frac{x_n}{\|x_n\|}$  также сходится к  $u_0$ , причем  $\|u_0\| = 1$  и

$$u_0 = \mu_n A'(\theta) u_0.$$

Значит,  $u_0 = h_0$  и  $\mu = \frac{1}{\lambda_0}$ , что противоречит (5.4). Если

предположить, что  $\|x_n\| \rightarrow \infty$ , то рассуждения аналогичны (нужно лишь в формулах (5.14) заменить  $A'(\theta)$  через  $A'(\infty)$ ).

Если выполнены условия теоремы 5.2 или теоремы 5.3, то лемма вытекает из теорем 2.17 и 2.18.

Пусть, например, выполнены условия теоремы 5.2. Предположим, что  $x_0 \in X_\mu$  и  $\|x_0\| < r(\mu)$ . Тогда из (5.5) вытекает, что

$$\mu A_-(\theta) x_0 \leq A(x_0; \mu) = x_0,$$

и в силу теоремы 2.17

$$\frac{1}{\mu} > \lambda_0,$$

что противоречит (5.4).

Лемма доказана.

**Теорема 5.4.** Пусть вполне непрерывный оператор  $A(x; \mu)$  удовлетворяет условиям теоремы 5.1 и

$$[\mu_1, \mu_2] \subset \left( \frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_\infty} \right), \quad (5.15)$$

причем

$$\lim_{x \in K, \|x\| \rightarrow 0} \sup_{\mu \in [\mu_1, \mu_2]} \frac{\|A(x; \mu) - \mu A'(\theta) x\|}{\|x\|} = 0$$

и

$$\lim_{x \in K, \|x\| \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in [\mu_1, \mu_2]} \frac{\|A(x; \mu) - \mu A'(\infty) x\|}{\|x\|} = 0.$$

Тогда множество  $\mathfrak{N}$  всех решений уравнения (5.1), соответствующих значениям  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ , образует непрерывную ветвь, связывающую множества  $X_{\mu_1}$  и  $X_{\mu_2}$ .

Доказательство этой теоремы будет дано в следующем параграфе.

Пусть выполнены условия теоремы 5.4 и пусть

$$\mu_0 \in (\mu_1, \mu_2). \quad (5.16)$$

Обозначим через  $\mathfrak{N}_1$  множество решений уравнения (5.1), соответствующих значениям  $\mu \in [\mu_1, \mu_0)$ , а через  $\mathfrak{N}_2$  — множество решений, соответствующих значениям  $\mu \in (\mu_0, \mu_2]$ . Из теоремы 5.4 вытекает еще одна важная характеристика множества  $\mathfrak{N}$  — пересечение замыканий множества  $\mathfrak{N}_1$  и  $\mathfrak{N}_2$

непусто:

$$\overline{\mathcal{N}}_1 \cap \overline{\mathcal{N}}_2 \neq \emptyset. \quad (5.17)$$

Доказательство этого факта проще всего провести от противного. Допустим, что  $\overline{\mathcal{N}}_1 \cap \overline{\mathcal{N}}_2 = \emptyset$ ; тогда компактные множества  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N} \setminus \overline{\mathcal{N}}_1$  не имеют общих точек и их можно разделить непересекающимися ограниченными окрестностями  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$ :

$$\overline{\mathcal{N}}_1 \subset \mathcal{G}_1, \quad \mathcal{N} \setminus \overline{\mathcal{N}}_1 \subset \mathcal{G}_2, \quad \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \emptyset.$$

Но тогда пусто пересечение границы  $\Gamma$  области  $\mathcal{G}_1$  с множеством  $\mathcal{N}$ , что противоречит теореме 5.4.

**4. Существование собственных векторов.** Наиболее часто приходится встречаться с уравнениями (5.1) вида

$$x = \mu Ax, \quad (5.18)$$

которое нам удобно записывать в виде

$$Ax = \lambda x. \quad (5.19)$$

Ненулевое решение уравнения (5.18) или, что то же, уравнения (5.19) принято называть *собственным вектором* оператора  $A$ . Соответствующее значение параметра  $\lambda$  называют *собственным значением*, совокупность собственных значений называют *спектром* оператора  $A$ . Все указанные термины аналогичны соответствующим понятиям теории линейных операторов.

Как известно, собственные векторы играют важную (во многих задачах решающую) роль в теории линейных операторов. В теории нелинейных операторов роль собственных векторов более скромная — это всего лишь ненулевые решения. В теории нелинейных операторов нет, естественно, принципа суперпозиции; собственный вектор, умноженный на некоторое число, уже не является, как правило, собственным вектором.

**Теорема 5.5.** Пусть  $\Gamma$  — граница открытого ограниченного множества  $\mathcal{G} \subset E$ , внутренней точкой которого является  $\theta$ . Пусть на  $\Gamma \cap K$  определен положительный вполне непрерывный оператор  $A$ , причем

$$\inf_{x \in \Gamma \cap K} \|Ax\| > 0. \quad (5.20)$$

Тогда оператор  $A$  имеет на  $\Gamma \cap K$  по крайней мере один собственный вектор  $x_0$ :

$$Ax_0 = \lambda x_0,$$

которому соответствует положительное собственное значение  $\lambda$ .

Полное доказательство этой теоремы вынесено в следующий параграф. Здесь мы рассмотрим лишь простейший случай, когда  $\Gamma$  — это сфера  $\|x\| = r$ . В этом случае определим на пересечении  $T$  конуса  $K$  с шаром  $\|x\| \leq r$  оператор  $\tilde{A}$  равенством

$$\tilde{A}x = \frac{r \left[ \|x\| A \left( \frac{r}{\|x\|} x \right) - (r - \|x\|) u \right]}{\left\| \|x\| A \left( \frac{r}{\|x\|} x \right) - (r - \|x\|) u \right\|} \quad (x \in T),$$

где  $u$  — некоторый фиксированный ненулевой элемент из  $K$ . Оператор  $\tilde{A}$  очевидным образом вполне непрерывен и преобразует  $T$  в себя. В силу принципа Шаудера найдется точка  $x^* \in T$  такая, что  $\tilde{A}x^* = x^*$ . Так как норма всех значений оператора  $\tilde{A}$  равна  $r$ , то  $\|x^*\| = r$ . Поэтому из  $\tilde{A}x^* = x^*$  вытекает, что

$$Ax^* = \frac{\|Ax^*\|}{r} x^*,$$

то есть  $x^*$  является собственным вектором оператора  $A$ .

Условие (1.20) существенно: если оно не выполнено, то даже линейный положительный вполне непрерывный оператор может не иметь собственных векторов в конусе (см. гл. 2).

**5. Непрерывные ветви собственных векторов.** Будем говорить, что положительные собственные векторы оператора  $A$  образуют *непрерывную ветвь длины  $r$* , если совокупность  $\mathfrak{N}$  всех собственных векторов, лежащих в конусе, имеет непустое пересечение с границей  $\Gamma$  каждого открытого множества, содержащего  $\emptyset$  и содержащегося вместе со своим замыканием в шаре  $\|x\| < r$ .

Из теоремы 5.5 вытекает, что *положительные собственные векторы положительного оператора  $A$  образуют непрерывную ветвь некоторой длины  $r$ , если  $A$  вполне непрерывен и удовлетворяет условию  $A\emptyset \neq \emptyset$* . Для доказательства достаточно выбрать  $r$  так, что из  $\|x\| < r$  ( $x \in K$ )

вытекает неравенство

$$\|Ax - A\theta\| < \|A\theta\| - \varepsilon_0,$$

где  $\varepsilon_0$  — некоторое фиксированное положительное число. Тогда для границы  $\Gamma$  любой области, лежащей в шаре радиуса  $r$ , будет выполнено условие (1.20):

$$\|Ax\| \geq \|A\theta\| - \|Ax - A\theta\| > \varepsilon_0 \quad (x \in \Gamma \cap K).$$

Если у оператора  $A$  есть собственные векторы, принадлежащие конусу, на границе  $\Gamma$  любой ограниченной области, содержащей  $\theta$ , то будем говорить, что эти собственные векторы образуют *непрерывную ветвь длины  $\infty$* . В § 3 будут приведены примеры операторов, для которых из теоремы 5.5 вытекает существование таких непрерывных ветвей собственных векторов.

Наконец, будем говорить, что множество  $\mathfrak{M}$  собственных векторов образует *непрерывную ветвь в шаровом слое  $r \leq \|x\| \leq R$* , если непусто пересечение  $\mathfrak{M}$  с границей  $\Gamma$  любой области  $\mathfrak{G}$ , содержащей шар  $\|x\| \leq r$  и содержащейся в шаре  $\|x\| \leq R$ .

**6. Собственные векторы слабо непрерывных операторов.** Теорема 5.5 в полной форме на слабо непрерывные операторы не обобщается, но на множествах  $\Gamma \cap K$  простой природы (слабо замкнутых) существование собственных векторов устанавливается при естественных предположениях без труда, причем условие (5.20) оказывается лишним.

Пусть, как обычно,  $E$  слабо полно, единичный шар в  $E$  слабо компактен, конус  $K$  допускает оштукатуривание. Обозначим через  $l(x)$  линейный равномерно положительный на  $K$  функционал. Пусть положительный оператор  $A$  слабо непрерывен. Тогда оператор  $A$  имеет по крайней мере один *собственный вектор на пересечении  $T_a$  конуса  $K$  с каждой гиперплоскостью  $l(x) = a$  ( $a > 0$ )*. Для доказательства достаточно рассмотреть на  $T_a$  оператор  $\tilde{A}$ :

$$\tilde{A}x = \frac{a(x + Ax)}{a + l(Ax)} \quad (x \in T_a).$$

Этот оператор слабо непрерывен и преобразует  $T_a$  в себя. Его неподвижная точка, существующая в силу принципа Тихонова, будет собственным вектором оператора  $A$ .

## § 2. Некоторые топологические теоремы

**1. Степень отображения.** Построения настоящего параграфа основаны на топологических понятиях. Недостаток места вынуждает нас ограничиться весьма конспективным изложением. Для понимания этого параграфа нужно знать лишь основные факты комбинаторной топологии: симплекс, симплицальное разбиение полиэдра, симплицальное отображение, ориентация и т. д.

Для детального ознакомления с основными понятиями комбинаторной топологии читатель может обратиться к книгам П. С. Александрова [1] и Л. С. Понтрягина [1]. Теория вполне непрерывных векторных полей изложена в книге М. А. Красносельского [5].

Пусть  $E$  — конечномерное пространство, в котором выбрана некоторая ориентация. Допустим, что граница  $\Gamma$  некоторой ограниченной области  $\mathfrak{G}$  допускает триангуляцию.

Пусть  $F(x)$  — симплицальное отображение полиэдра  $\Gamma$  на единичную сферу  $S(\|x\|=1)$ . Это значит, что  $\Gamma$  и  $S$  триангулированы и непрерывное отображение  $F$  переводит аффинно каждый симплекс разбиения  $\Gamma$  в некоторый симплекс разбиения сферы  $S$ .

Выберем в разбиении сферы  $S$  некоторый фиксированный симплекс  $\Sigma$ . Обозначим через  $t$  количество тех симплексов разбиения  $\Gamma$ , которые преобразованием  $F$  переводятся в симплекс  $\Sigma$  с сохранением ориентации. Аналогично через  $s$  обозначим количество тех симплексов, которые переходят в  $\Sigma$  с изменением ориентации на противоположную. Число

$$\gamma = t - s$$

называется степенью *симплицального отображения*  $F$  границы  $\Gamma$  области  $\mathfrak{G}$  на сферу  $S$ . Это число, как оказывается, не зависит от выбора симплекса  $\Sigma$  в разбиении сферы  $S$ .

Пусть теперь  $F(x)$  — произвольное непрерывное отображение  $\Gamma$  на  $S$ . Оказывается, что по любому  $\varepsilon > 0$  можно построить симплицальные отображения  $F_\varepsilon(x)$  полиэдра  $\Gamma$  на  $S$  такие, что

$$\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| < \varepsilon \quad (x \in \Gamma).$$

При этом степени всех симплицальных отображений  $F_\varepsilon(x)$  при достаточно малых  $\varepsilon$  одинаковы. Общую степень  $\gamma$  всех отображений  $F_\varepsilon$  называют *степенью отображения*  $F$  границы  $\Gamma$  области  $\mathfrak{G}$  на сферу  $S$ .

Два непрерывных отображения  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  границы  $\Gamma$  на сферу  $S$  называют *гомотопными*, если существует такая непрерывная функция  $X(x; t)$  ( $x \in \Gamma$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ) со значениями на  $S$ , что

$$X(x; 0) \equiv \Phi(x), \quad X(x; 1) \equiv \Psi(x) \quad (x \in \Gamma).$$

Основное свойство степени отображения выражается тем фактом, что *гомотопные отображения имеют одинаковую степень*.

Имеет место и обратное утверждение (теорема Хопфа): *если граница  $\Gamma$  сильно связна, то из равенства степеней отображения вытекает их гомотопность*. Эта теорема далее не используется.

**2. Вращение векторного поля.** Предположим, что на  $\Gamma$  задано векторное поле  $F(x)$ . Это значит, что каждой точке  $x$  поставлен в соответствие вектор  $F(x)$  из этого же пространства. Допустим, что поле  $F(x)$  не имеет на  $\Gamma$  нулевых векторов. Тогда *вращением векторного поля  $F(x)$  называется степень  $\gamma$  отображения*

$$F_1(x) = \frac{F(x)}{\|F(x)\|} \quad (x \in \Gamma)$$

границы  $\Gamma$  области  $\mathfrak{G}$  на единичную сферу  $S$ .

Два векторных поля  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  называются *гомотопными*, если существует такая вектор-функция  $X(x; t)$  ( $x \in \Gamma$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ), что

$$X(x; 0) \equiv \Phi(x), \quad X(x; 1) \equiv \Psi(x) \quad (x \in \Gamma),$$

которая не принимает нулевых значений. *Вращения гомотопных векторных полей одинаковы*.

Рассмотрим векторное поле  $F(x)$ , заданное на замкнутой области  $\mathfrak{G} + \Gamma$ . Если  $F(x_0) = \theta$ , то  $x_0$  будем называть *неподвижной точкой поля  $F(x)$*  (этот термин становится ясным, если считать, что  $F(x)$  является полем сдвигов). Неподвижную точку  $x_0$  назовем *изолированной*, если в некоторой ее окрестности нет других неподвижных точек. Если  $x_0$  — изолированная неподвижная точка, то вращение поля  $F(x)$  на всех сферах  $\|x - x_0\| = \rho$  достаточно малого радиуса  $\rho$  будет одинаково. Это общее вращение  $\gamma(x_0)$  назовем *индексом неподвижной точки  $x_0$* .

Допустим, что поле  $F(x)$  не имеет нулевых векторов на  $\Gamma$ , а в области  $\mathfrak{G}$  имеет конечное число изолированных



неподвижных точек  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Имеет место фундаментальное равенство

$$\gamma(\Gamma) = \gamma(x_1) + \gamma(x_2) + \dots + \gamma(x_k), \quad (5.21)$$

где  $\gamma(\Gamma)$  есть вращение векторного поля  $F(x)$  на  $\Gamma$ , а  $\gamma(x_i)$  — индексы неподвижных точек  $x_i$ .

До сих пор мы предполагали, что граница  $\Gamma$  области  $\mathfrak{G}$  обладает некоторыми специальными свойствами. Откажемся от этого предположения. Пусть на  $\Gamma$  определено непрерывное поле  $F(x)$  без нулевых векторов. Это поле можно продолжить с сохранением непрерывности на область  $\mathfrak{G}$  таким образом, что у продолженного поля будет лишь конечное число неподвижных точек. Формулу (5.21) примем тогда за определение вращения  $\gamma(\Gamma)$  поля  $F$  на  $\Gamma$ . Оказывается, что определенное таким образом вращение не зависит от выбора продолжения поля  $F$  на  $\mathfrak{G}$ .

Вращение векторного поля на произвольной границе  $\Gamma$  обладает такими же свойствами, которые были указаны выше для случая границ специального вида. В частности, гомотопные поля имеют одинаковое вращение.

Из формулы (5.21) вытекает, что  $\gamma(\Gamma) = 0$ , если поле  $F$  может быть продолжено на  $\mathfrak{G}$  без нулевых векторов. Если область  $\mathfrak{G}$  связана, то имеет место и обратное утверждение: поле  $F(x)$  с нулевым вращением может быть продолжено на  $\mathfrak{G}$  без нулевых векторов.

Отметим в заключение еще одну формулу, обобщающую равенство (5.21).

Пусть  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_k$  — взаимно непересекающиеся области, лежащие в  $\mathfrak{G}$ ; их границы обозначим соответственно через  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ . Допустим, что на  $\mathfrak{G} + \Gamma$  задано непрерывное векторное поле  $F(x)$ , все неподвижные точки которого лежат в областях  $\mathfrak{G}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Тогда поле  $F(x)$  не будет иметь нулевых векторов ни на  $\Gamma$ , ни на границах  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ . Поэтому будут определены вращения  $\gamma(\Gamma)$  и  $\gamma(\Gamma_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Имеет место равенство

$$\gamma(\Gamma) = \gamma(\Gamma_1) + \gamma(\Gamma_2) + \dots + \gamma(\Gamma_k). \quad (5.22)$$

Отметим, что вращение единичного поля  $F(x) \equiv x$  равно единице, если  $0 \in \mathfrak{G}$ . Вращение поля равно нулю, если можно указать такой вектор  $u_0$ , что направления всех векторов  $F(x)$  отличны от направления  $u_0$ .

**3. Доказательство теоремы 5.4 для конечномерного случая.** В этом пункте мы рассмотрим положительные операторы, удовлетворяющие более жестким ограничениям, чем те, которые были наложены в теореме 5.4. Ниже будет показано, как из этого частного случая получить общий результат.

Пусть  $A(x; \mu)$  — положительный непрерывный по совокупности переменных оператор, определенный на конусе  $K$  в конечномерном пространстве  $E$ . Будем считать, что  $E$  является линейной оболочкой конуса  $K$ . Параметр  $\mu$  принимает значения из  $[m, M]$ .

*Лемма 5.2. Пусть выполнены условия*

$$A(x; \mu) = u_0 \quad (x \in K, \quad \|x\| = r, \quad \mu \in [m, M]) \quad (5.23)$$

*и*

$$A(x; \mu) = v_0 \quad (x \in K, \quad \|x\| = R, \quad \mu \in [m, M]), \quad (5.24)$$

*где либо*

$$\|u_0\| < r < R < \|v_0\|, \quad (5.25)$$

*либо*

$$r < \|u_0\|, \quad \|v_0\| < R. \quad (5.26)$$

*Тогда множество  $\mathcal{N}$  всех решений  $x(\mu)$  уравнения*

$$x = A(x; \mu) \quad (5.27)$$

*при  $\mu \in [m, M]$ , лежащих в  $K$  и удовлетворяющих неравенствам*

$$r < \|x(\mu)\| < R, \quad (5.28)$$

*образует непрерывную ветвь, связывающую множество  $X_m$  решений уравнения  $x = A(x; m)$  с множеством  $X_M$  решений уравнения  $x = A(x; M)$ .*

**Доказательство.** Обозначим через  $K_0$  такой конус, что каждая ненулевая точка конуса  $K$  является внутренней точкой конуса  $K_0$ . Конус  $K_0$  можно построить, так как  $K$  допускает оштукатуривание.

Пусть  $z_0$  — нормированный ( $\|z_0\| = 1$ ) внутренний элемент конуса  $K$ . Определим на  $K_0$  оператор  $A_0$  равенством

$$A_0(x; \mu) = \begin{cases} A(x; \mu), & \text{если } x \in K, \\ A\left[\|x\| \frac{(1-t_0)z_0 + t_0x}{\|(1-t_0)z_0 + t_0x\|}, \mu\right], & \text{если } x \notin K, \end{cases} \quad (5.29)$$

где  $t_0$  — максимальное значение  $t$ , при котором  $(1-t)z_0 + t_0x \in K$ . Непрерывность оператора  $A_0$  по совокупности

переменных очевидна. Оператор  $A_0(x; \mu)$  при всех значениях параметра  $\mu$  не имеет неподвижных точек, лежащих вне  $K$ .

Обозначим через  $\mathfrak{G}$  область, состоящую из внутренних точек конуса  $K_0$ , удовлетворяющих неравенствам  $r < \|x\| < R$ . На границе  $\Gamma$  этой области векторные поля

$$F(x; \mu) = x - A(x; \mu) \quad (5.30)$$

не имеют неподвижных точек при  $\mu \in [m, M]$ . Следовательно, поля  $F(x; \mu)$  гомотопны и имеют одинаковое вращение  $\gamma$  на  $\Gamma$ . Из элементарных соображений (см. М. А. Красносельский [5]) следует, что это вращение  $\gamma$  равно 1, если выполнено условие (5.26), и  $\gamma = -1$ , если выполнено условие (5.25).

Допустим, что множество  $\mathfrak{N}$  не образует непрерывной ветви, связывающей  $X_m$  с  $X_M$ . Тогда можно указать ограниченную область  $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}$ , которая содержит  $X_m$  и не имеет общих точек с  $X_M$ , такую, что на ее границе  $\Gamma_1$  уравнения  $x = A(x, \mu)$  не имеют решений при  $\mu \in [m, M]$ .

Векторные поля (5.30), рассматриваемые на  $\Gamma_1$  при различных  $\mu$ , гомотопны друг другу. Вращения этих полей равны нулю, так как поле  $F(x; M)$  не имеет на  $\mathfrak{G}_1 + \Gamma_1$  нулевых векторов. Из равенства (5.22) вытекает тогда, что вращение поля  $F(x; m)$  на  $\Gamma$  также равно нулю. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

**4. Завершение доказательства теоремы 5.4.** Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Это значит, в частности, что оператор  $A(x; \mu)$  ( $A(\theta; \mu) \equiv \theta$ ) имеет сильную производную Фреше и сильную асимптотическую по конусу вида (5.2):

$$A'(\theta; \mu) = \mu A'(\theta), \quad A'(\infty; \mu) = \mu A'(\infty), \quad (5.2)$$

причем каждый из операторов  $A'(\theta)$  и  $A'(\infty)$  в конусе  $K$  имеет единственный (с точностью до нормы) собственный вектор

$$A'(\theta) h_0 = \lambda_0 h_0, \quad A'(\infty) g_0 = \lambda_\infty g_0. \quad (5.3)$$

Пусть

$$[\mu_1, \mu_2] \subset \left( \frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_\infty} \right). \quad (5.15)$$

Покажем, что множество  $\mathfrak{N}$  всех решений уравнения

$$x = A(x; \mu), \quad (5.1)$$

соответствующих значениям  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ , образует непрерывную ветвь, связывающую множества  $X_{\mu_1}$  и  $X_{\mu_2}$  решений, соответственно уравнений

$$x = A(x; \mu_1)$$

и

$$x = A(x; \mu_2).$$

Для определенности будем считать, что  $\lambda_0 > \lambda_\infty$ .

Доказательство будет вестись от противного. Первый этап доказательства состоит из построения оператора  $\tilde{A}(x; \mu)$ , обладающего, с одной стороны, тем свойством, что решения уравнения

$$x = \tilde{A}(x; \mu) \quad (5.31)$$

при  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$  совпадают с решениями уравнения (5.1) и, с другой, что на элементах  $x \in K$  с большой и малой нормой значения оператора  $\tilde{A}(x; \mu)$  равны двум фиксированным элементам. Далее, по оператору  $\tilde{A}(x; \mu)$  будет построен некоторый оператор  $P\tilde{A}(x; \mu)$ , действующий в конечномерном пространстве и удовлетворяющий условиям леммы 5.2; оператор  $P\tilde{A}(x; \mu)$  будет построен так, что решения уравнения

$$x = P\tilde{A}(x; \mu)$$

не образуют непрерывной ветви. Полученное противоречие завершит доказательство теоремы 5.4.

Оператор  $\tilde{A}(x; \mu)$  определим равенством, аналогичным

$$\tilde{A}(x; \mu) = \begin{cases} \left(\frac{2\|x\|}{r} - 1\right) A\left(\frac{r}{\|x\|} x; \mu\right), & \text{если } \frac{r}{2} \leq \|x\| \leq r, \\ A(x; \mu), & \text{если } r \leq \|x\| \leq \frac{1}{r}, \\ r\|x\| A\left(\frac{x}{r\|x\|}; \mu\right) + \left(\|x\| - \frac{1}{r}\right)^2 g_0, & \text{если } \frac{1}{r} \leq \|x\| \leq \frac{1}{r^2}, \\ r\|x\| \frac{1-r^3\|x\|}{1-r} A\left(\frac{x}{r\|x\|}; \mu\right) + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\right)^2 g_0, & \text{если } \frac{1}{r^2} \leq \|x\| \leq \frac{1}{r^3}. \end{cases}$$

При достаточно малом  $r$  оператор  $\tilde{A}(x; \mu)$  при всех  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$  имеет в конусе  $K$  лишь неподвижные точки, совпадающие с неподвижными точками оператора  $A(x; \mu)$ . Доказательство этого факта предоставляем читателю.

Множество  $\mathcal{N}$  всех решений уравнения (5.31) при  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$  компактно и ограничено:

$$r \leq \|x\| \leq \frac{1}{r} \quad (x \in \mathcal{N}).$$

Допустим, что это множество не образует непрерывной ветви, соединяющей множества  $X_{\mu_1}$  и  $X_{\mu_2}$ . Тогда найдется ограниченная область  $\mathcal{G}$  с границей  $\Gamma$  такая, что  $\mathcal{N} \cap \Gamma = \emptyset$ ,  $X_{\mu_1} \subset \mathcal{G}$  и  $X_{\mu_2} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ . Из компактности  $\mathcal{N}$  вытекает, что

$$\inf_{x \in \mathcal{N}, y \in \Gamma} \|x - y\| = \delta_0 > 0.$$

Обозначим через  $T_0$  множество таких  $x \in K$ , что

$$\rho(x, \Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} \|x - y\| \leq \frac{\delta_0}{2}.$$

На множестве  $T_0$  уравнение (5.31) при  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$  не имеет решений. Поэтому найдется такое  $\alpha > 0$ , что

$$\|x - \tilde{A}(x; \mu)\| > \alpha \quad (x \in T_0, \mu \in [\mu_1, \mu_2]). \quad (5.32)$$

Действительно, если бы нашлась такая последовательность  $x_n \in T_0$ , что  $\|x_n - \tilde{A}(x_n; \mu_n)\| \rightarrow 0$ , где  $\mu_n \in [\mu_1, \mu_2]$ , то без ограничения общности можно было бы считать, что  $\mu_n$  сходятся к некоторому числу  $\mu^*$ , а элементы  $\tilde{A}(x_n; \mu_n)$  — к некоторому элементу  $x^*$ ; тогда элементы  $x_n$  также сходились бы к  $x^*$  и имело бы место равенство  $x^* = \tilde{A}(x^*; \mu^*)$ .

Обозначим через  $T_1$  множество тех элементов из  $K$ , которые не принадлежат  $\mathcal{G}$  и нормы которых удовлетворяют неравенствам  $\frac{r}{2} \leq \|x\| \leq \frac{1}{r^3}$ ; пусть  $T_2 = K \cap (\mathcal{G} + \Gamma)$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\alpha$  выбрано настолько малым, чтобы выполнялись неравенства

$$\|x - \tilde{A}(x; \mu_1)\| > \alpha \quad (x \in T_1) \quad (5.33)$$

и

$$\|x - \tilde{A}(x; \mu_2)\| > \alpha \quad (x \in T_2). \quad (5.34)$$

Выберем в множестве всех значений оператора  $\tilde{A}(x; \mu)$  ( $x \in K$ ,  $\frac{r}{2} \leq \|x\| \leq \frac{1}{r^2}$ ;  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ ) конечную  $\frac{\alpha}{2}$ -сеть, содержащую элементы  $\theta$  и  $v_0 = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\right)^2 g_0$ , и построим по этой  $\frac{\alpha}{2}$ -сети шаудеровский оператор проектирования  $P$  (см. формулу (4.42)). Тогда оператор  $P\tilde{A}(x; \mu)$  будет удовлетворять условиям леммы 5.2.

В силу (5.33) все решения уравнения

$$x = P\tilde{A}(x; \mu_1)$$

лежат в области  $\mathfrak{G}$ . В силу (5.34) ни одно решение уравнения

$$x = P\tilde{A}(x; \mu_2)$$

не лежит в  $\mathfrak{G} + \Gamma$ . В силу (5.32) на  $\Gamma$  нет решений уравнения  $x = P\tilde{A}(x; \mu)$  при  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ . Итак, решения уравнения  $x = P\tilde{A}(x; \mu)$  не образуют непрерывной ветви, что противоречит лемме 5.2.

Теорема 5.4 доказана.

Можно установить аналоги теоремы 5.4 для случаев, когда выполнены условия теоремы 5.2 или теоремы 5.3.

**5. Доказательство теоремы 5.5 в конечномерном случае.** Пусть  $\Gamma$  — граница открытого ограниченного множества  $\mathfrak{G}$ , внутренней точкой которого является нуль  $\theta$  конечномерного пространства  $E$ . Пусть  $K$  — конус в  $E$ ; без ограничения общности можно считать, что  $K$  телесен. Пусть на  $\Gamma \cap K$  задан положительный непрерывный оператор  $A$ . Покажем, что на  $\Gamma \cap K$  есть по крайней мере один собственный вектор оператора  $A$ .

Доказательство будем вести от противного.

Если у  $A$  нет на  $\Gamma \cap K$  собственных векторов, то, в частности,  $A$  не принимает на  $\Gamma \cap K$  нулевых значений и поэтому

$$\min_{x \in \Gamma \cap K} \|Ax\| = \beta > 0.$$

Обозначим через  $T$  замкнутую выпуклую оболочку множества  $A(\Gamma \cap K)$ . Множество  $T$ , очевидно, не содержит точки  $\theta$ .

Пусть множество  $T$   $k$ -мерно. Проведем через  $T$   $k$ -мерную гиперплоскость  $E_1$  (не проходящую, возможно, через точку  $\theta$ ) и введем в этой гиперплоскости систему координат  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ . Тогда задание оператора  $A$  на  $\Gamma \cap K$  эквивалентно заданию на  $\Gamma \cap K$  непрерывных функций  $\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_k(x)$  — величин компонент векторов  $Ax$  в рассматриваемой системе координат. По теореме Урысона каждую функцию  $\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_k(x)$  можно продолжить с сохранением непрерывности на замкнутую область  $\mathfrak{G} + \Gamma$ . Продолжение функций  $\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_k(x)$  эквивалентно построению непрерывного продолжения  $A_1$  оператора  $A$  на все  $\mathfrak{G} + \Gamma$  с множеством значений у оператора  $A_1$  в гиперплоскости  $E_1$ .

Пусть  $y_0$  — внутренняя точка множества  $T$ . Обозначим через  $P$  оператор, определенный на  $E_1$ , совпадающий с оператором тождественного преобразования на  $T$  и преобразующий каждую точку  $y \in T$  ( $y \in E_1$ ) в точку пересечения границы множества  $T$  с отрезком, соединяющим  $y$  и  $y_0$ . Оператор  $P$  непрерывен и преобразует все  $E_1$  на  $T$ .

Через  $\tilde{A}$  обозначим оператор  $PA_1$ . Этот оператор определен на всем  $\mathfrak{G} + \Gamma$ , совпадает с  $A$  на  $\Gamma \cap K$ , причем

$$\tilde{A}(\mathfrak{G} + \Gamma) \subset T \subset K$$

и

$$\min_{x \in \mathfrak{G} + \Gamma} \|\tilde{A}x\| > 0.$$

Из предположения об отсутствии у оператора  $A$  собственных векторов на  $\Gamma \cap K$  вытекает, что оператор  $\tilde{A}$  не имеет на всей границе  $\Gamma$  собственных векторов, которым соответствуют неотрицательные собственные значения. Поэтому векторные поля

$$F(x; \mu) = x - \mu \tilde{A}x$$

не имеют на  $\Gamma$  нулевых векторов при всех  $\mu \geq 0$ . Это значит, что все векторные поля  $F(x; \mu)$  ( $\mu \geq 0$ ) гомотопны друг другу и имеют поэтому одинаковое вращение.

С другой стороны, при  $\mu = 0$  вращение рассматриваемого поля равно 1, а при больших значениях  $\mu$  оно равно нулю, так как при больших значениях  $\mu$  все векторы  $F(x; \mu)$  ( $x \in \Gamma$ ) не совпадают по направлению с векто-

ром  $z_0$ , где  $z_0$  — произвольный фиксированный нормированный ( $\|z_0\|=1$ ) элемент из  $K$ . Действительно, если бы при любом  $\mu$  один из векторов  $F(x; \mu)$  ( $x \in \Gamma$ ) совпадал бы по направлению с  $z_0$ , то нашлась бы такая последовательность  $x_n \in \Gamma$ , что

$$\frac{x_n - n\tilde{A}x_n}{\|x_n - n\tilde{A}x_n\|} = z_0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

или, что то же,

$$\frac{\frac{x_n}{n} - \tilde{A}x_n}{\left\| \frac{x_n}{n} - \tilde{A}x_n \right\|} = z_0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Можно выбрать подпоследовательность индексов  $n_i$  так, что последовательность точек  $x_{n_i}$  будет сходиться к некоторой точке  $x^* \in \Gamma$ . Переходя в последних равенствах по этой подпоследовательности индексов к пределу, получим

$$\tilde{A}x^* = -\|\tilde{A}x^*\|z_0,$$

то есть  $\tilde{A}x^* \notin T$ , чего по построению быть не может.

Итак, векторные поля  $F(x; \mu)$  не могут быть гомотопны. Полученное противоречие доказывает сформулированное утверждение.

**6. Завершение доказательства теоремы 5.5.** Пусть теперь  $\Gamma$  — граница открытого ограниченного множества  $\mathcal{G}$  в бесконечномерном пространстве  $E$ , причем  $\theta \in \mathcal{G}$ . Покажем, что положительный вполне непрерывный оператор  $A$  имеет на  $\Gamma \cap K$  по крайней мере один собственный вектор, если выполнено условие

$$\inf_{x \in \Gamma \cap K} \|Ax\| > 0. \quad (5.20)$$

Доказательство будем вести от противного: предположим, что на  $\Gamma \cap K$  нет собственных векторов у оператора  $A$ , и покажем, что тогда утверждение теоремы 5.5 несправедливо для случая конечномерных пространств, а это противоречит результату предыдущего пункта.

Допустим, что положительный вполне непрерывный оператор  $A$  удовлетворяет условию (5.20), но не имеет на  $\Gamma \cap K$



собственных векторов, которым отвечают положительные собственные значения. Тогда найдется такое число  $a > 0$ , что

$$\|Ax - tx\| \geq a \quad (x \in \Gamma \cap K, \quad 0 \leq t < \infty).$$

Действительно, предположив обратное, построим такую последовательность элементов  $x_n \in \Gamma \cap K$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и такую последовательность неотрицательных чисел  $t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), что

$$\|Ax_n - t_n x_n\| < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} r_1 &= \inf_{x \in \Gamma} \|x\|, & R_1 &= \sup_{x \in \Gamma} \|x\|, \\ r_2 &= \inf_{x \in \Gamma \cap K} \|Ax\|, & R_2 &= \sup_{x \in \Gamma \cap K} \|Ax\|. \end{aligned}$$

Очевидно, все числа  $r_1, R_1, r_2, R_2$  конечны и положительны. Очевидно,

$$t_n \leq \frac{\|Ax_n\| + \|Ax_n - t_n x_n\|}{\|x_n\|} < \frac{1}{r_1} \left( R_2 + \frac{1}{n} \right)$$

и

$$t_n \geq \frac{\|Ax_n\| - \|Ax_n - t_n x_n\|}{\|x_n\|} > \frac{1}{R_1} \left( r_2 - \frac{1}{n} \right).$$

Из этих неравенств и из полной непрерывности оператора  $A$  вытекает, что можно выбрать подпоследовательность индексов  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) таким образом, чтобы числа  $t_{n_i}$  сходились к некоторому положительному числу  $t_0$  ( $\frac{r_2}{R_1} \leq t_0 \leq \frac{R_2}{r_1}$ ), а элементы  $Ax_{n_i}$  сходились к некоторому вектору  $v_0$ . Тогда последовательность  $x_{n_i}$  сходится к элементу  $x_0 = \frac{v_0}{t_0}$ , так как

$$\begin{aligned} \|x_{n_i} - x_0\| &\leq \left\| x_{n_i} - \frac{1}{t_{n_i}} Ax_{n_i} \right\| + \\ &+ \frac{1}{t_{n_i}} \|Ax_{n_i} - v_0\| + \left\| \left( \frac{1}{t_{n_i}} - \frac{1}{t_0} \right) v_0 \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{n_i t_{n_i}} + \frac{1}{t_{n_i}} \|Ax_{n_i} - v_0\| + \|v_0\| \cdot \left| \frac{1}{t_{n_i}} - \frac{1}{t_0} \right|. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в неравенствах

$$\|Ax_{n_i} - t_{n_i} x_{n_i}\| < \frac{1}{n_i} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

получим равенство  $Ax_0 = t_0x_0$ , которое противоречит предположению.

Итак, если  $A$  удовлетворяет условию (5.20) и не имеет на  $\Gamma \cap K$  собственных векторов, то

$$\inf_{x \in \Gamma \cap K, t > 0} \|Ax - tx\| = a > 0.$$

Выберем в компактном множестве  $A(\Gamma \cap K)$  конечную  $\frac{a}{2}$ -сеть. Пусть эта  $\frac{a}{2}$ -сеть состоит из  $n$  точек  $y_1, \dots, y_n$ . Так как оператор  $A$  положителен, то  $y_i \in K$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Определим на  $A(\Gamma \cap K)$  шаудеровский оператор (см. гл. 4, § 3, п. 4) проектирования  $P$  равенством

$$Py = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(y) y_i}{\sum_{i=1}^n x_i(y)} \quad (y \in A(\Gamma \cap K)),$$

где

$$x_i(y) = \begin{cases} \frac{a}{2} - \|y - y_i\|, & \text{если } \|y - y_i\| \leq \frac{a}{2}, \\ 0, & \text{если } \|y - y_i\| \geq \frac{a}{2} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Непрерывный оператор  $P$  преобразует каждый элемент  $y \in A(\Gamma \cap K)$  в элемент выпуклой оболочки тех точек  $\frac{a}{2}$ -сети расстояние до которых от  $y$  меньше  $\frac{a}{2}$ . Поэтому

$$\|Py - y\| \leq \frac{a}{2} \quad (y \in A(\Gamma \cap K)),$$

откуда следует, что при всех  $t \geq 0$  и  $x \in \Gamma \cap K$

$$\|PAx - tx\| \geq \|Ax - tx\| - \|Ax - PAx\| \geq \frac{a}{2}. \quad (5.35)$$

Таким образом, оператор  $PA$  не имеет на  $\Gamma \cap K$  собственных векторов, которым отвечают положительные собственные значения.

Множество значений оператора  $PA$  лежит в конечномерном подпространстве  $E_1 \subset E$  — линейной оболочке точек

$y_1, \dots, y_n$ . Обозначим через  $K_1$  пересечение  $K \cap E_1$ . Множество  $K_1$  будет конусом в  $E_1$ . Пусть  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \cap E_1$  и  $\Gamma_1$  — граница  $\mathcal{G}_1$ ; очевидно,  $\Gamma_1 \subset \Gamma$  так, что на  $\Gamma_1 \cap K_1$  оператор  $PA$  определен. Оператор  $PA$  на  $\Gamma_1 \cap K_1$  удовлетворяет условиям утверждения, доказанного в предыдущем пункте ( $E_1$  конечномерно!), и поэтому имеет на  $\Gamma_1 \cap K_1$  по крайней мере один собственный вектор.

Мы пришли к противоречию.

Теорема 5.5 полностью доказана.

### 7. Вращение вполне непрерывного векторного поля.

Доказательства теорем 5.4 и 5.5 были основаны на предварительном переходе к конечномерному случаю и на дальнейшем использовании векторных полей и их свойств, связанных с вращением. Эта схема допускает обращение — теорию векторных полей можно перенести на поля в бесконечномерных пространствах (понятия вращения, гомотопности, индекса неподвижной точки, формулу (5.21) и т. д.), а затем эту теорию применять. В книге М. А. Красносельского [5] теория вращения векторных полей развита и изложена для случая, когда эти поля рассматриваются на границах  $\Gamma$  ограниченных областей; рассматриваемые векторные поля  $F(x)$  имеют вид  $F(x) = x - Ax$ , где  $A$  — вполне непрерывный оператор. Приложения изложенной в упомянутой книге теории к исследованию операторов, оставляющих инвариантным конус  $K$ , получаются непосредственно, если  $K$  телесен. Для изучения операторов, оставляющих инвариантным нетелесный конус  $K$ , понятие вращения полей в бесконечномерных пространствах приходится обобщать.

## § 3. Операторы с монотонными минорантами

1. Собственные векторы однородных операторов. Оператор  $B$  назовем однородным порядка  $s$ , если

$$B(tx) \equiv t^s Bx \quad (x \in K, \quad t \geq 0). \quad (5.36)$$

Примером однородного оператора первого порядка может служить линейный оператор.

Если  $x_0$  — собственный вектор однородного оператора  $B$ , то в силу (5.36) собственными векторами будут и все элементы вида  $tx_0$ . Совокупность элементов вида  $tx_0$  образует луч. Таким образом, из существования одного собственного

вектора у однородного оператора  $B$  вытекает существование бесконечной непрерывной ветви собственных векторов. Поэтому для однородных операторов достаточно доказывать существование одного собственного вектора.

**Теорема 5.6.** Пусть вполне непрерывный оператор  $B$  положителен, монотонен и однороден порядка  $s \leq 1$ . Пусть существует такой элемент  $u = v - w$  ( $v, w \in K$ ), что  $-u \in K$  и

$$B^p u \geq \alpha u, \quad (5.37)$$

где  $p$  и  $\alpha > 0$  — некоторые фиксированные числа.

Тогда оператор  $B$  имеет в конусе  $K$  собственные векторы.

**Доказательство.** Рассмотрим операторы  $B_n$  такие, что

$$B_n x = Bx + \frac{v}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Каждый из этих операторов вполне непрерывен и удовлетворяет условию

$$\inf_{x \in K, \|x\|=1} \|B_n x\| \geq \inf_{y \geq \frac{v}{n}} \|y\| > 0.$$

Из теоремы 5.5 вытекает, что у каждого из операторов  $B_n$  есть в конусе  $K$  нормированный собственный вектор  $x_n$ :

$$B_n x_n = \lambda_n x_n \quad (\|x_n\| = 1, \quad n = 1, 2, \dots),$$

то есть

$$Bx_n + \frac{v}{n} = \lambda_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.38)$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность элементов  $Bx_n$  сходится к некоторому элементу  $y^* \in K$ , а числа  $\lambda_n$  сходятся к пределу  $\lambda^*$  (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности).

Если бы оказалось, что  $\lambda^* > 0$  (конечность  $\lambda^*$  очевидна), то элементы  $x_n$  также сходились бы к некоторому элементу  $x^*$  и из (5.38) после предельного перехода вытекало бы равенство  $Bx^* = \lambda^* x^*$ .

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\inf_{n=1, 2, \dots} \lambda_n > 0. \quad (5.39)$$

Из (5.38) вытекает, что

$$Bx_n \leq \lambda_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поэтому

$$B^p x_n \leq B^{p-1}(\lambda_n x_n) \leq B^{p-2}(\lambda_n^{1+s} x_n) \leq \dots \leq \lambda_n^{1+s+\dots+s^{p-1}} x_n \quad (5.40)$$

Из (5.38) вытекает также, что

$$x_n \geq \frac{1}{n\lambda_n} v.$$

Поэтому найдется такое  $t_n > 0$ , что  $x_n \geq t_n v$  и  $x_n \geq t v$  при  $t > t_n$ . Тогда

$$B^p x_n \geq B^p(t_n v) = t_n^{s^p} B^p v \geq t_n^{s^p} B^p u$$

и в силу (5.37)

$$B^p x_n \geq \alpha t_n^{s^p} u.$$

Объединяя последнее неравенство с (5.40), приходим к неравенству

$$\lambda_n^{1+s+\dots+s^{p-1}} x_n \geq \alpha t_n^{s^p} u.$$

Из максимальной  $t_n$  вытекает, что

$$\frac{\alpha t_n^{s^p}}{\lambda_n^{1+s+\dots+s^{p-1}}} \leq t_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то есть

$$\lambda_n^{1+s+\dots+s^p} \geq \frac{\alpha}{t_n^{1-s^p}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.41)$$

Чтобы из (5.41) получить (5.39), нужно показать, что числа  $t_n$  ограничены сверху. Но это очевидно, так как в противном случае из  $x_n \geq t_n v$  вытекало бы, что  $v \in K$ .

Теорема доказана.

Из (5.41) можно получить и оценку для собственного значения  $\lambda^*$ . Если, например,  $s = 1$ , то из (5.41) вытекает, что

$$\lambda^* \geq \sqrt[p]{\alpha}. \quad (5.42)$$

Если же  $0 < s < 1$ , то

$$\lambda^* \geq t_0^{s-1} \alpha^{\frac{1-s}{1-s^p}}, \quad (5.43)$$

где через  $t_0$  обозначено такое наибольшее число, что неравенство  $x \geq t_0 v$  имеет место хотя бы при одном нормированном элементе  $x$  из конуса  $K$ .

**2. Непрерывная ветвь собственных векторов у оператора с монотонной однородной минорантой.** Напомним, что оператор  $B$  является минорантой для оператора  $A$  на множестве  $T$ , если

$$Ax \geq Bx \quad (x \in T). \quad (5.44)$$

Через  $K_r$ , как обычно, будем обозначать пересечение конуса  $K$  с шаром  $\|x\| \leq r$ .

**Теорема 5.7.** Пусть вполне непрерывный оператор  $A$  на  $K_r$  имеет миноранту  $B$ , удовлетворяющую условиям теоремы 5.6\*).

Тогда  $A$  имеет непрерывную ветвь длины  $r$  собственных векторов в конусе  $K$ .

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 5.6, построим операторы  $A_n$ :

$$A_n x = Ax + \frac{v}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Пусть  $\Gamma$  — граница некоторой, содержащейся в шаре  $\|x\| < r$  области  $\mathfrak{G}$ , внутренней точкой которой является  $\theta$ . В силу теоремы 5.5 каждый из операторов  $A_n$  имеет на  $\Gamma \cap K$  по крайней мере один собственный вектор  $x_n$ :

$$A_n x_n = \lambda_n x_n \quad (x_n \in \Gamma \cap K, \lambda_n > 0),$$

то есть

$$Ax_n + \frac{v}{n} = \lambda_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.45)$$

Без ограничения общности можно считать, что элементы  $Ax_n$  сходятся к некоторому  $y^*$ , а числа  $\lambda_n$  — к пределу  $\lambda^*$ . Как и при доказательстве теоремы 5.6, остается показать, что числа  $\lambda_n$  ограничены снизу положительной постоянной.

Из (5.45) вытекает, что

$$Bx_n + \frac{v}{n} \leq \lambda_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

---

\*) При доказательстве теоремы 5.7 не используется полная непрерывность оператора  $B$ .

то есть

$$Bx_n \leq \lambda_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и

$$x_n \geq \frac{1}{n\lambda_n} v \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Именно из последних неравенств при доказательстве теоремы 5.6 были получены неравенства

$$\lambda_n^{1+s+\dots+s^{p-1}} \geq \frac{\alpha}{t_n^{1-s^p}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где  $t_n$  — такие числа, что  $x_n \geq t_n v$  и  $x_n \leq t_n v$  при  $t > t_n$ . Из ограниченности сверху чисел  $t_n$  вытекает ограниченность снизу чисел  $\lambda_n$ .

Теорема доказана.

Если, в частности, у оператора  $A$  есть монотонная миноранта на всем конусе  $K$ , то собственные векторы оператора  $A$  в конусе  $K$  образуют непрерывную ветвь бесконечной длины.

**3. Основная теорема.** Если в условии (5.37)  $p = 1$ , то к оператору  $B$  можно предъявить меньше требования, чем в теоремах 5.6 и 5.7.

**Теорема 5.8.** Пусть положительный вполне непрерывный оператор  $A$  имеет на  $K$  положительную монотонную миноранту  $B$ . Пусть существует такой элемент  $u = v - w$  ( $v, w \in K$ ), что  $-u \in K$  и

$$B(tu) \geq \alpha tu \quad (0 \leq t \leq \gamma), \quad (5.46)$$

где  $\gamma$  — такое число, что из  $x \geq tu$  ( $t \geq 0$ ) и из  $\|x\| \leq r$  вытекает, что  $t \leq \gamma$ .

Тогда  $A$  имеет в конусе  $K$  непрерывную ветвь длины  $r$  собственных векторов.

**Доказательство.** Как и в предыдущей теореме, устанавливаем существование таких элементов  $x_n \in \Gamma$ , что

$$Ax_n + \frac{v}{n} = \lambda_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из этих равенств вытекают неравенства  $Bx_n \leq \lambda_n x_n$  и существование таких  $t_n > 0$ , что  $x_n \geq t_n u$  и  $x_n \leq t_n u$  при  $t > t_n$ . Тогда

$$\lambda_n x_n \geq Bx_n \geq B(t_n u) \geq \alpha t_n u,$$

откуда  $\lambda_n \geq \alpha$ . Собственный вектор оператора  $A$  можно построить как предел элементов  $x_n$ .

Теорема доказана.

**4. Принцип топологического продолжения.** Для доказательства теорем существования часто применяется так называемый принцип продолжения. Он заключается в следующем.

Требуется доказать существование решения у уравнения

$$x = Ax \quad (5.47)$$

с некоторым оператором  $A$ , действующим в банаховом пространстве  $E$ . Конструируется вспомогательный оператор  $A(x; \mu)$ , зависящий от параметра  $\mu \in [0, 1]$ . Параметр  $\mu$  вводится таким образом, чтобы уравнение  $x = A(x; 0)$  решалось просто (или чтобы для него просто доказывалась теорема существования). Уравнение  $x = A(x; 1)$  должно совпадать с уравнением (5.47). Решение уравнения (5.47) тогда можно получить, прослеживая за тем, как меняется решение  $x(\mu)$  уравнения

$$x = A(x; \mu). \quad (5.48)$$

Для того чтобы можно было проследить за решением  $x(\mu)$ , обычно приходится накладывать на рассматриваемые операторы жесткие ограждения. В частности, обычно приходится обеспечивать единственность (в некоторой области) решения уравнения (5.48).

Излагаемая ниже схема близка к принципу продолжения; однако в ряде случаев она имеет существенные преимущества. Например, ниже не предполагается, что решения уравнений (5.48) изолированы. Мы ограничимся описанием принципа топологического продолжения применительно к задаче о решениях, лежащих в конусе  $K$ .

Итак, пусть требуется доказать, что уравнение (5.47) имеет решение  $x \in K$ . Как и выше, вводим в уравнение параметр  $\mu$ , который может принимать различные числовые значения. Параметр  $\mu$  вводится таким образом, чтобы решения уравнений (5.48) образовали в  $K$  непрерывную ветвь  $\mathcal{M}$  бесконечной длины, если рассматривать решения, соответствующие всем неотрицательным  $\mu$ .

Допустим, что удастся доказать, что значения параметра  $\mu$  стремятся к некоторому пределу  $\mu_0$ , когда стремятся к нулю нормы решений  $x(\mu)$  уравнений (5.48). Аналогично пусть



значения  $\mu$  стремятся к  $\mu_\infty$ , когда нормы решений  $x(\mu)$  неограниченно возрастают. Тогда можно ожидать, что в непрерывной ветви  $\mathcal{N}$  есть решения, соответствующие всем значениям  $\mu \in (\mu_0, \mu_\infty)$ .

Пусть, наконец, уравнение (5.48) при  $\mu = 1$  переходит в уравнение (5.47). Тогда существование решения уравнения (5.47) будет доказано, если

$$1 \in (\mu_0, \mu_\infty). \quad (5.49)$$

Проведение изложенного принципа топологического продолжения состоит из нескольких этапов. Нужно суметь построить оператор  $A(x; \mu)$  — здесь общие рецепты указать трудно; во многих случаях достаточно положить  $A(x; \mu) = \mu Ax$ . Нужно показать, что решения уравнения (5.48) образуют непрерывную ветвь; если  $A(x; \mu) = \mu Ax$ , то здесь можно воспользоваться теоремой 5.7 или теоремой 5.8. Далее нужно найти числа  $\mu_0$  и  $\mu_\infty$ ; общие способы их отыскания для частного, но важного случая излагаются в следующем пункте. Наконец, нужно знать, что значения параметра  $\mu$ , при которых уравнение (5.48) имеет решение в конусе  $K$ , полностью заполняют интервал  $(\mu_0, \mu_\infty)$ ; здесь удобно пользоваться следующей теоремой:

**Теорема 5.9.** Пусть оператор  $A(x; \mu)$  ( $0 \leq \mu < \infty$ ) вполне непрерывен и пусть все ненулевые решения уравнения (5.48) образуют в  $K$  непрерывную локально компактную ветвь  $\mathcal{N}$  бесконечной длины. Пусть  $\mu \rightarrow \mu_0$  и  $\mu \rightarrow \mu_\infty$ , когда соответственно  $\|x(\mu)\| \rightarrow 0$  или  $\|x(\mu)\| \rightarrow \infty$ , где  $x(\mu) \in \mathcal{N}$ .

Тогда при каждом  $\mu^* \in (\mu_0, \mu_\infty)$  уравнение (5.48) имеет по крайней мере одно решение  $x(\mu^*) \in \mathcal{N}$ .

**Доказательство.** Допустим, что утверждение леммы неверно, то есть  $\mu^* \in (\mu_0, \mu_\infty)$ , но уравнение

$$x = A(x; \mu^*)$$

не имеет в конусе  $K$  ни одного ненулевого решения.

Число  $\mu^*$  разбивает прямую  $(-\infty, \infty)$  вещественных чисел на две части. Одна из них  $J_1$  либо содержит  $\lambda_\infty$ , либо  $\lambda_\infty$  является ее концом (в этом случае  $\lambda_\infty = \infty$ ). Вторая часть  $J_2$  содержит  $\lambda_0$ .

Обозначим через  $\mathcal{N}_1$  множество тех ненулевых решений уравнения (5.48), которым отвечают значения параметра  $\mu$  из  $J_1$ . Через  $\mathcal{N}_2$  обозначим множество остальных решений уравнения (5.48), к которым присоединен элемент  $\theta$ . Множества  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$  содержат все элементы непрерывной ветви  $\mathcal{N}$ .

Множества  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$  очевидным образом замкнуты и не пересекаются. При этом множество  $\mathcal{N}_1$  находится на положительном расстоянии от точки  $\theta$ , а множество  $\mathcal{N}_2$  ограничено.

Расстояние между множествами  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$  положительно. В предположении противного существуют такие последовательности  $x_n \in \mathcal{N}_1$  и  $y_n \in \mathcal{N}_2$ , что

$$x_n = A(x_n; \mu_n), \quad y_n = A(y_n; \nu_n),$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Последовательность  $y_n$  ограничена; следовательно, ограничена и последовательность  $x_n$ . Одна из числовых последовательностей  $\mu_n$  или  $\nu_n$  ограничена; без ограничения общности можно ее считать сходящейся. Пусть, для определенности, сходится последовательность  $\nu_n$ . Из полной непрерывности оператора  $A(x; \mu)$  вытекает тогда, что последовательность  $y_n$  можно считать сходящейся к некоторому элементу  $x^*$ . Тогда и последовательность  $x_n$  сходится к  $x^*$ . Значит,  $x^* \in \mathcal{N}_1$  и  $x^* \in \mathcal{N}_2$ . Мы пришли к противоречию.

Итак,

$$\rho(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) = \inf_{x \in \mathcal{N}_1, y \in \mathcal{N}_2} \|x - y\| = \alpha > 0. \quad (5.50)$$

Обозначим через  $\mathcal{G}$  ограниченное открытое множество, образованное объединением всех шаров радиуса  $\frac{\alpha}{2}$  с центрами в точках множества  $\mathcal{N}_2$ . Через  $\Gamma$  обозначим границу множества  $\mathcal{G}$ .

Очевидно, пересечение  $\Gamma \cap \mathcal{N}_2$  пусто. В силу (5.50) пусто и пересечение  $\Gamma \cap \mathcal{N}_1$ . Значит, на  $\Gamma$  нет решений уравнения (5.48) ни при каких значениях параметра  $\mu$ . Значит,  $\mathcal{N}$  не является непрерывной ветвью бесконечной длины.

Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

**5. Бифуркационные значения параметра.** В этом пункте мы рассмотрим вопрос о том, к каким пределам стремятся

позитивные собственные значения положительного вполне непрерывного оператора  $A$  ( $A\theta = \theta$ ), когда нормы собственных векторов стремятся к нулю или неограниченно возрастают. Такие предельные значения называют *бифуркационными значениями*.

Будем предполагать, что оператор  $A$  имеет сильную производную Фреше  $A'(\theta)$  по конусу и сильную асимптотическую производную  $A'(\infty)$  по конусу. Допустим, что существование непрерывной ветви бесконечной длины собственных векторов доказано.

Пусть

$$Ax_n = \lambda_n x_n \quad (x_n \in K, \quad n = 1, 2, \dots) \quad (5.51)$$

и  $\|x_n\| \rightarrow 0$ . Тогда без ограничения общности можно считать, что числа  $\lambda_n$  стремятся к некоторому числовому пределу  $\lambda_0$ , а элементы  $A'(\theta) \frac{x_n}{\|x_n\|}$  — к некоторому элементу  $v_0 \in K$ . Перепишем равенства (5.51) в виде

$$\frac{Ax_n - A'(\theta)x_n}{\|x_n\|} + A'(\theta) \frac{x_n}{\|x_n\|} = \lambda_n \frac{x_n}{\|x_n\|} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Из предельного равенства видно, что возможны два варианта: либо  $\lambda_0 = 0$  и  $v_0 = \theta$ , либо  $\lambda_0 > 0$  и элементы  $\frac{x_n}{\|x_n\|}$  сходятся к некоторому элементу  $u_0 \in K$ , причем  $A'(\theta)u_0 = \lambda_0 u_0$ , то есть  $\lambda_0$  — позитивное собственное значение оператора  $A'(\theta)$ .

Аналогично доказывается, что при  $\|x_n\| \rightarrow \infty$  собственные значения (если они сходятся) стремятся либо к нулю, либо к позитивному собственному значению оператора  $A'(\infty)$ .

Допустим, что изучаемый оператор  $A$  имеет линейную монотонную миноранту  $B$ . Через  $\mathfrak{N}$  обозначим совокупность всех тех собственных векторов, существование которых вытекает из доказательства теоремы 5.7. Эти собственные векторы образуют непрерывную ветвь, и этим собственным векторам соответствуют собственные значения, равномерно ограниченные снизу некоторым положительным числом (числом  $\sqrt[p]{\alpha}$ ). Поэтому для таких операторов числа  $\lambda_n$  в равенствах (5.51) не могут стремиться к нулю, когда  $\|x_n\| \rightarrow 0$  или  $\|x_n\| \rightarrow \infty$ . Следовательно, для операторов с линейной минорантой предельные значения параметра  $\lambda$

совпадают с позитивными собственными значениями операторов  $A'(\theta)$  и  $A'(\infty)$ .

Если считать, что каждый из операторов  $A'(\theta)$  и  $A'(\infty)$  имеет единственное позитивное собственное значение  $\lambda_0$  и соответственно  $\lambda_\infty$ , то из теоремы 5.9 можно сделать вывод, что все числа  $\lambda$  из интервала  $(\lambda_0, \lambda_\infty)$  являются позитивными собственными значениями. В частности, если  $1 \in (\lambda_0, \lambda_\infty)$ , то уравнение  $x = Ax$  имеет в конусе  $K$  по крайней мере одно ненулевое решение. Последнее утверждение другим методом было получено в гл. 4.

**6. Оценки собственных значений.** Нетрудно получить точные оценки собственных значений, если оператор имеет линейные миноранты или мажоранты, являющиеся  $u_0$ -положительными операторами.

**Теорема 5.10.** Пусть  $B_-$  и  $B_+$  — два линейных  $u_0$ -положительных оператора. Пусть  $\lambda_-$  и  $\lambda_+$  — единственные позитивные собственные значения операторов  $B_-$  и  $B_+$ . Пусть  $A$  — нелинейный положительный оператор и

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0. \quad (5.52)$$

Тогда из условия

$$B_- x \leq Ax \quad (x \in K) \quad (5.53)$$

следует, что

$$\lambda_0 \geq \lambda_-, \quad (5.54)$$

а из условия

$$Ax \leq B_+ x \quad (x \in K) \quad (5.55)$$

следует, что

$$\lambda_0 \leq \lambda_+. \quad (5.56)$$

**Доказательство.** Пусть

$$B_- h = \lambda_- h_0 \quad (h_0 \in K, \quad h_0 \neq \theta).$$

В силу леммы 2.1 оператор  $B_-$   $h_0$ -положителен. Поэтому найдется такое натуральное  $p$  и такие положительные числа  $\alpha$  и  $\beta$ , что

$$\alpha h_0 \leq B_-^p x_0 \leq \beta h_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_0 = \frac{1}{\lambda_0} Ax_0 &\geq \frac{1}{\lambda_0} B_- x_0 = \frac{1}{\lambda_0^2} B_- Ax_0 \geq \frac{1}{\lambda_0^2} B_-^2 x_0 \geq \dots \geq \\ &\geq \frac{1}{\lambda_0^p} B_-^p x_0 \geq \frac{\alpha}{\lambda_0^p} h_0. \end{aligned}$$

Поэтому найдется такое  $t_0 > 0$ , что

$$x_0 \geq t_0 h_0, \quad (5.57)$$

но  $x_0 \geq t h_0$  при  $t > t_0$ .

Из (5.57) следует, что

$$x_0 = \frac{1}{\lambda_0} A x_0 \geq \frac{1}{\lambda_0} B_- x_0 \geq \frac{t_0}{\lambda_0} B h_0 = \frac{\lambda_-}{\lambda_0} t_0 h_0,$$

и из максимальнойности  $t_0$  вытекает (5.54).

Аналогично, если выполнено условие (5.55) и

$$B_+ g_0 = \lambda_+ g_0 \quad (g_0 \in K, \quad g_0 \neq \theta),$$

то оператор  $B_+ g_0$ -положителен. Пусть

$$\alpha_1 g_0 \leq B_+ x_0 \leq \beta_1 g_0,$$

где  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  положительны. Тогда

$$\begin{aligned} x_0 = \frac{1}{\lambda_0} A x_0 &\leq \frac{1}{\lambda_0} B_+ x_0 = \frac{1}{\lambda_0^2} B_+ A x_0 \leq \frac{1}{\lambda_0^2} B_+^2 x_0 \leq \dots \\ &\dots \leq \frac{1}{\lambda_0^q} B_+^q x_0 \leq \frac{\beta_1}{\lambda_0^q} g_0. \end{aligned}$$

Поэтому найдется такое положительное  $t_0$ , что

$$x_0 \leq t_0 g_0 \quad (5.58)$$

и  $x_0 \leq t g_0$  при  $t < t_0$ . Из (5.58) следует, что

$$x_0 = \frac{1}{\lambda_0} A x_0 \leq \frac{1}{\lambda_0} B_+ x_0 \leq \frac{t_0}{\lambda_0} B_+ g_0 = \frac{\lambda_+}{\lambda_0} t_0 g_0,$$

и из минимальности  $t_0$  вытекает (5.56).

Теорема доказана.

Утверждение теоремы, как видно из доказательства, сохраняет силу, если отказаться от предположения об  $u_0$ -положительности операторов  $B_-$  и  $B_+$ , заменив его следующим менее удобным, но и менее жестким ограничением. Достаточно предположить, что оператор  $B_- h_0$ -ограничен снизу, а  $B_+ g_0$ -ограничен сверху, где  $h_0$  и  $g_0$  — отвечающие положительным собственным значениям  $\lambda_-$  и  $\lambda_+$  положительные собственные векторы операторов  $B_-$  и  $B_+$  соответственно.

## ГЛАВА 6

### УРАВНЕНИЯ С ВОГНУТЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Выделяются классы уравнений с положительными операторами, для которых справедлива теорема единственности ненулевого положительного решения. Изучается сходимость последовательных приближений к этому единственному решению.

#### § 1. Единственность положительного решения и сходимость последовательных приближений

**1. Вогнутые операторы.** Оператор  $A$ , действующий в пространстве  $E$  с конусом  $K$ , назовем *вогнутым*, если существует такой ненулевой элемент  $u_0 \in K$ , что для любого ненулевого  $x \in K$  справедливы неравенства

$$\alpha u_0 \leq Ax \leq \beta u_0, \quad (6.1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  положительны, и если для каждого такого  $x \in K$ , что  $\alpha_1(x)u_0 \leq x \leq \beta_1(x)u_0$  ( $\alpha_1(x), \beta_1(x) > 0$ ), справедливы соотношения

$$A(tx) \geq tAx \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (6.2)$$

Вогнутый оператор в случае одномерного пространства — это определенная при неотрицательных значениях аргумента функция  $f(x)$ , график которой обладает тем свойством, что на каждом отрезке  $[0, x_0]$  этот график не имеет точек, расположенных под прямой, проходящей через начало координат, и точку  $\{x_0, f(x_0)\}$ . Вогнутый оператор не обязательно непрерывен и не обязательно монотонен.

Простейшим примером вогнутого оператора является оператор  $Ax \equiv u_0$ .

Если оператор  $A$  вогнут, то вогнутыми будут операторы  $cA$ , где  $c$  — любое положительное число. Если  $A$

вогнут и монотонен, то этими свойствами будут обладать и операторы  $A^2$ ,  $A^3$  и т. д.

В определении вогнутого оператора фигурирует некоторый элемент  $u_0$ . Допустим, что даны два вогнутых оператора  $A$  и  $B$ , в определении вогнутости которых фигурирует один и тот же элемент  $u_0$ . Тогда вогнутым будет оператор  $A+B$ .

Мы не останавливаемся на доказательстве сформулированных утверждений, так как эти доказательства очевидны.

**2. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям.** В ряде приводимых ниже теорем изучаются собственные векторы вогнутого оператора  $A$ . В теоремах этого параграфа предполагается, что соответствующие собственные векторы существуют; вопрос о существовании собственных векторов обсуждается позднее.

**Теорема 6.1.** Пусть оператор  $A$  вогнут и монотонен. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — ненулевые положительные решения уравнения

$$Ax = \lambda x, \quad (6.3)$$

соответствующие различным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  параметра  $\lambda$ :

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, \quad Ax_2 = \lambda_2 x_2.$$

Пусть, наконец,

$$\lambda_1 < \lambda_2. \quad (6.4)$$

Тогда  $x_1 \geq x_2$ .

**Доказательство.** Предположим противное — пусть  $x_1 \not\geq x_2$ . Обозначим через  $t_0$  такое число, что  $x_1 \geq t_0 x_2$  и  $x_1 \not\geq t x_2$  при  $t > t_0$ . Очевидно,  $0 \leq t_0 < 1$ .

Из определения вогнутости оператора  $A$  вытекает, что

$$\alpha_1 u_0 \leq Ax_1 \leq \beta_1 u_0, \quad \alpha_2 u_0 \leq Ax_2 \leq \beta_2 u_0,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ . Поэтому

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1} Ax_1 \geq \frac{\alpha_1}{\lambda_1} u_0 \geq \frac{\alpha_1}{\lambda_1 \beta_2} Ax_2 = \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1 \beta_2} x_2.$$

ледовательно,  $t_0 > 0$ .

Из монотонности и вогнутости оператора  $A$  вытекает тогда, что

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1} Ax_1 \geq \frac{1}{\lambda_1} A(t_0 x_2) \geq \frac{t_0}{\lambda_1} Ax_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t_0 x_2.$$

Из максимальности  $t_0$  вытекает, что  $\lambda_2 \leq \lambda_1$ , а это противоречит (6.4).

Теорема доказана.

Пусть выполнены условия теоремы 6.1. Рассмотрим конусный отрезок  $\langle x_2, x_1 \rangle$ . Пусть  $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ . Оператор  $A(\lambda) = \frac{1}{\lambda} A$  преобразует этот отрезок в себя, так как  $A(\lambda)$  монотонен, а

$$A(\lambda) x_2 = \frac{1}{\lambda} Ax_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda} x_2 \geq x_2$$

и

$$A(\lambda) x_1 = \frac{1}{\lambda} Ax_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 \leq x_1.$$

Это позволяет для доказательства существования неподвижных точек у оператора  $A(\lambda)$  (то есть для доказательства существования решений у уравнения (6.3)) применить теорему 4.1 или теорему 4.2. В частности, из теоремы 4.1 вытекает

**Теорема 6.2.** Пусть уравнение (6.3) с вогнутым и монотонным оператором  $A$  имеет ненулевые положительные решения  $x_1$  и  $x_2$  при положительных значениях  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  параметра  $\lambda$ .

Пусть выполнено дополнительно одно из следующих условий:

6.2 (а) Конус  $K$  сильно миниедрален;

6.2 (б) конус  $K$  правилен; оператор  $A$  непрерывен;

6.2 (в) конус  $K$  нормален; оператор  $A$  вполне непрерывен.

Тогда уравнение (6.3) имеет ненулевые положительные решения при всех  $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ .

**3. Теорема единственности.** Вогнутый оператор  $A$  назовем  $u_0$ -вогнутым, если условие (6.2) заменено более жестким ограничением: для каждого положительного числа  $t_0 \in (0, 1)$  можно указать такое  $\eta = \eta(x; t_0) > 0$ , что

$$A(t_0 x) \geq (1 + \eta) t_0 Ax. \quad (6.5)$$



Здесь, как и в условии (6.2), рассматриваются такие  $x \in K$ , что

$$\alpha_1(x)u_0 \leq x \leq \beta_1(x)u_0 \quad (\alpha_2(x) > 0, \quad \beta_1(x) > 0).$$

Оператор  $Ax \equiv u_0$  является  $u_0$ -вогнутым оператором. Если  $A$  является  $u_0$ -вогнутым оператором, то  $u_0$ -вогнуты все операторы  $cA$  при  $c > 0$ .

Если оператор  $B$  вогнут и в определении его вогнутости фигурирует элемент  $u_0$ , то из  $u_0$ -вогнутости оператора  $A$  следует  $u_0$ -вогнутость оператора  $A+B$ . Докажем этот простой факт.

Пусть выполнено неравенство (6.5) и пусть

$$au_0 \leq Ax \leq \beta u_0, \quad \alpha_1 u_0 \leq Bx \leq \beta_1 u_0.$$

Положим

$$\eta_1 = \frac{\alpha \eta_1}{\alpha + \beta_1}.$$

Тогда

$$(1 + \eta)Ax + Bx \geq$$

$$\geq (1 + \eta_1)Ax + \left(\eta - \frac{\alpha \eta_1}{\alpha + \beta_1}\right)au_0 + (1 + \eta_1)Bx - \frac{\alpha \eta_1}{\alpha + \beta_1}\beta_1 u_0 = \\ = (1 + \eta_1)(Ax + Bx),$$

то есть

$$(A+B)(t_0 x) \geq (1 + \eta)t_0 Ax + t_0 Bx \geq (1 + \eta_1)t_0(A+B)x.$$

**Теорема 6.3.** Если оператор  $A$   $u_0$ -вогнут и монотонен, то уравнение (6.3) ни при каком значении параметра  $\lambda$  не имеет двух различных ненулевых решений в конусе.

**Доказательство.** Допустим, что

$$Ax_1 = \lambda x_1, \quad Ax_2 = \lambda x_2,$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — различные ненулевые элементы из  $K$ . Без ограничения общности можно считать, что  $x_1 \geq x_2$ . Как при доказательстве теоремы 6.1, вводим такое максимальное  $t_1$ , что  $x_1 \geq t_0 x_2$  и  $x_1 \geq t x_2$  при  $t > t_0$ , и показываем, что  $0 < t_0 < t$ .

Из  $u_0$ -вогнутости оператора  $A$  вытекает, что

$$A(t_0 x_2) \geq (1 + \eta)t_0 Ax_2,$$

где  $\eta > 0$ . Но тогда из монотонности оператора  $A$  следует неравенство

$$x_1 = \frac{1}{\lambda} Ax_1 \geq \frac{1}{\lambda} A(t_0 x_2) \geq \frac{(1+\eta)t_0}{\lambda} Ax_2 = (1+\eta)t_0 x_2.$$

Последнее неравенство противоречит максимальнойности  $t_0$ . Теорема доказана.

Оператор  $A$  назовем  $u_0$ -монотонным, если он вогнут, если  $A(tx) \neq tAx$  при  $t \neq 0, 1$  и при каждом таком  $x \in K$ , что  $x \geq \gamma u_0$  ( $\gamma > 0$ ), и если, наконец, из  $x \geq y$  и  $x \neq y$  следует, что  $Ax \geq Ay + \varepsilon_0 u_0$ , где  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x, y) > 0$ . Если  $A$   $u_0$ -монотонен, то  $u_0$ -монотонны и все операторы  $cA$ , где  $c > 0$ .

**Теорема 6.4.** Если оператор  $A$   $u_0$ -монотонен, то уравнение (6.3) ни при каком значении параметра  $\lambda$  не имеет двух различных ненулевых решений в конусе.

**Доказательство.** Предположим противное и (как при доказательстве теоремы 6.3) обозначим через  $t_0$  такое число из  $(0, 1)$ , что  $x_1 \geq t_0 x_2$  и  $x_1 \not\geq t x_2$  при  $t > t_0$ , где

$$Ax_1 = \lambda x_1, \quad Ax_2 = \lambda x_2.$$

Из равенства  $x_1 = t_0 x_2$  следовало бы, что

$$x_1 = \frac{1}{\lambda} Ax_1 = \frac{1}{\lambda} A(t_0 x_2) \neq \frac{t_0}{\lambda} Ax_2 = t_0 x_2 = x_1.$$

Поэтому  $x_1 \neq t_0 x_2$  и

$$Ax_1 \geq A(t_0 x_2) + \varepsilon u_0 \geq t_0 Ax_2 + \varepsilon u_0.$$

Пусть  $Ax_2 \leq \beta u_0$ . Тогда из предыдущего неравенства вытекает, что

$$Ax_1 \geq \left(t_0 + \frac{\varepsilon}{\beta}\right) Ax_2,$$

то есть

$$x_1 \geq \left(t_0 + \frac{\varepsilon}{\beta}\right) x_2,$$

а это неравенство противоречит максимальнойности  $t_0$ .

Теорема доказана.

**4. Квадрат вогнутого оператора.** Каждое решение уравнения  $Ax = x$  является одновременно решением всех уравнений  $A^2 x = x$ ,  $A^3 x = x$  и т. д. Поэтому доказательство

единственности решения уравнения  $Ax = x$  равносильно доказательству единственности решения у уравнения  $A^n x = x$  при некотором  $n$ . Достаточно, например, доказать, что оператор  $A^n$   $u_0$ -вогнут.

На этом пути легко получить новое доказательство теоремы 6.4, так как квадрат  $u_0$ -монотонного оператора является  $u_0$ -вогнутым оператором. Докажем более общее утверждение.

**Теорема 6.5.** Пусть оператор  $A$  вогнут и монотонен. Пусть для каждого такого  $x$ , что  $\alpha(x)u_0 \leq x \leq \beta(x)u_0$  ( $\alpha(x), \beta(x) > 0$ ), выполнено неравенство

$$A(t_0x) \neq t_0Ax \quad (0 < t_0 < 1). \quad (6.6)$$

Пусть для любой пары ненулевых элементов  $v$  и  $w$  ( $\alpha_1 u_0 \leq v \leq \beta_1 u_0$ ,  $\alpha_2 u_0 \leq w \leq \beta_2 u_0$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ ) из

$$t_0 v \leq w \leq v \quad (t_0 v \neq w, w \neq v, t_0 > 0) \quad (6.7)$$

следует, что

$$Aw \geq t_0 Av + \varepsilon_0 u_0, \quad (6.8)$$

где  $\varepsilon_0 > 0$ .

Тогда  $A^2$  является  $u_0$ -вогнутым оператором.

**Доказательство.** Пусть  $x$  — произвольный элемент, удовлетворяющий условиям

$$\alpha u_0 \leq x \leq \beta u_0 \quad (\alpha, \beta > 0),$$

и пусть  $0 < t_0 < 1$ . Из вогнутости и монотонности оператора  $A$  следует, что

$$Ax \geq A(t_0x) \geq t_0Ax, \quad (6.9)$$

причем выполнено неравенство (6.6).

Если  $A(t_0x) = Ax$ , то это равенство можно рассматривать как условие (6.5).

Если  $A(t_0x) \neq Ax$ , то (6.9) можно рассматривать как неравенство (6.7). Неравенство (6.8) переписывается тогда в виде

$$A^2(t_0x) \geq t_0A^2x + \varepsilon_0 u_0. \quad (6.10)$$

Пусть  $A^2x \leq \beta u_0$  ( $\beta > 0$ ). Из (6.10) тогда вытекает неравенство

$$A^2(t_0x) \geq \left(t_0 + \frac{\varepsilon}{\beta}\right) A^2x,$$

которое является условием (6.5).

Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что  $u_0$ -монотонные и, конечно,  $u_0$ -вогнутые операторы удовлетворяют условиям теоремы 6.5.

**5. Признаки вогнутости оператора в свойствах производных.** Предположим, что оператор  $A$  дифференцируем по конусу и, более того, что значение оператора  $A$  в каждой точке  $x \in K$  может быть представлено в виде

$$Ax = A\theta + \int_0^1 A'(\sigma x) x d\sigma. \quad (6.11)$$

Аналогично тому, как вогнутость обычной скалярной функции вытекает из невозрастания производной, свойство (6.2) оператора  $A$  вытекает из условия

$$A'(\sigma_1 x) x \leq A'(\sigma_2 x) x \quad (x \in K, \quad 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1). \quad (6.12)$$

Действительно из (6.12) и (6.11) следует, что при  $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} A(tx) &= A\theta + t \int_0^1 A'(\sigma tx) x d\sigma = A\theta + \int_0^t A'(sx) x ds \geq \\ &\geq A\theta + \int_0^t A'\left(\frac{s}{t}x\right) x ds = A\theta + t \int_0^1 A'(\sigma x) x d\sigma \end{aligned}$$

то есть

$$A(tx) \geq (1-t)A\theta + tAx. \quad (6.13)$$

Условие (6.1) вогнутости оператора  $A$  выполнено, если  $A\theta$   $u_0$ -измерим и производные  $A'(x)$  ( $x \in K$ ) удовлетворяют условию

$$\alpha(x) u_0 \leq A'(x) x \leq \beta(x) u_0, \quad (6.14)$$

где  $\alpha(x), \beta(x) > 0$  при  $x \neq 0$ . Доказательство очевидно: в силу (6.11)

$$Ax \leq A\theta + u_0 \int_0^1 \beta(\sigma x) d\sigma \leq \beta u_0,$$

и

$$Ax \geq A\theta + u_0 \int_0^1 \alpha(\sigma x) d\sigma \geq \alpha u_0.$$

Если  $A\theta \geq \alpha_0 u_0$ , где  $\alpha_0 > 0$ , то оператор  $A$  будет  $u_0$ -вогнут. Это вытекает из (6.13): при  $t_0 \in (0, 1)$

$$A(t_0 x) \geq (1 - t_0) A\theta + t_0 Ax \geq (1 - t_0) \alpha_0 u_0 + t_0 Ax \geq \geq \left[ t_0 + (1 - t_0) \frac{\alpha_0}{\beta} \right] Ax.$$

Можно указать менее ограниченные свойства производной, гарантирующие вогнутость или  $u_0$ -вогнутость оператора  $A$ . Эти свойства более сложно описываются, и мы на них не будем останавливаться. Нетрудно также выписать свойства производных, при которых оператор  $A$   $u_0$ -монотонен или удовлетворяет условиям теоремы 6.5.

**6. Основная теорема о сходимости последовательных приближений.** В § 1 гл. 4 были рассмотрены различные случаи, когда решение  $x^*$  уравнения

$$x = Ax \quad (6.15)$$

может быть получено как предел последовательных приближений

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.16)$$

В рассмотренных в гл. 4 случаях начальное приближение выбиралось таким образом, чтобы последовательность (6.16) была монотонна. Тогда вывод о сходимости этой последовательности может быть сделан либо из полной непрерывности оператора  $A$  (если последовательность ограничена по норме), либо из правильности конуса (если последовательность ограничена в смысле полуупорядоченности), либо из полной правильности конуса (если последовательность ограничена по норме). Основная трудность в применении теорем гл. 4 заключается в построении начального приближения.

В случае уравнения (6.15) с вогнутым оператором  $A$  этой последней трудности нет.

**Теорема 6.6.** Пусть уравнение (6.15) с вогнутым монотонным оператором  $A$  имеет в конусе  $K$  единственное\*) ненулевое решение  $x^*$ . Пусть выполнено одно из условий:

6.6 (а) конус  $K$  правилен, оператор  $A$  непрерывен,

6.6 (б) конус  $K$  нормален, оператор  $A$  вполне непрерывен.

---

\*) Достаточно, чтобы некоторая степень оператора  $A$  была  $u_0$ -вогнутым оператором.

Тогда последовательные приближения (6.16) сходятся по норме к  $x^*$ , каково бы ни было начальное приближение  $x_0 \in K$ ,  $x_0 \neq \theta$ .

Доказательство. Рассмотрим конусные отрезки  $\langle v_0, w_0 \rangle$ , где

$$v_0 = t_1 x^*, \quad w_0 = t_2 x^* \quad (0 \leq t_1 \leq 1 \leq t_2). \quad (6.17)$$

Из вогнутости оператора  $A$  вытекает, что

$$Av_0 = A(t_1 x^*) \geq t_1 Ax^* = v_0$$

и

$$Aw_0 = A(t_2 x^*) \leq t_2 Ax^* = w_0.$$

Таким образом, оператор  $A$  оставляет каждый конусный отрезок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  инвариантным.

Из теоремы 4.4 вытекает, что последовательные приближения (6.16) сходятся к  $x^*$ , если начальное приближение принадлежит одному из конусных отрезков  $\langle v_0, w_0 \rangle$ . Более того, из теоремы 4.4 вытекает, что приближения (6.16) сходятся к  $x^*$ , если один из элементов  $A^p x_0$  принадлежит какому-либо конусному отрезку  $\langle v_0, w_0 \rangle$ .

Пусть  $x_0$  — произвольный ненулевой элемент из  $K$ . Из условия (6.1) вытекает, что

$$\alpha u_0 \leq Ax_0 \leq \beta u_0 \quad (\alpha, \beta > 0)$$

и

$$\alpha_0 u_0 \leq x^* = Ax^* \leq \beta_0 u_0 \quad (\alpha_0, \beta_0 > 0),$$

где  $u_0$  — ненулевой элемент из  $K$ , фигурирующий в определении вогнутости оператора.

Поэтому

$$\frac{\alpha}{\beta_0} x^* \leq \alpha u_0 \leq Ax_0 \leq \beta u_0 \leq \frac{\beta}{\alpha_0} x^*.$$

то есть  $Ax_0$  принадлежит конусному отрезку  $\langle v_0, w_0 \rangle$ , где

$$v = \frac{\alpha}{\beta_0} x^*, \quad w_0 = \frac{\beta}{\alpha_0} x^*.$$

Теорема доказана.

### 7. Сходимость последовательных приближений для $u_0$ -вогнутых операторов.

Теорема 6.7. Пусть оператор  $A$  монотонен и  $u_0$ -вогнут. Пусть конус  $K$  нормален.

Тогда последовательные приближения (6.16) по  $u_0$ -норме сходятся к ненулевому решению  $x^*$  уравнения (6.15) при любом ненулевом начальном приближении  $x_0 \in K$ , а если конус  $K$  нормален, то и по обычной норме.

Доказательство. Из условия (6.1) вытекает, что

$$\alpha_0 u_0 \leq Ax^* = x^* \leq \beta_0 u_0 \quad (\alpha_0, \beta_0 > 0).$$

Поэтому (см. стр. 17)  $u_0$ -норма эквивалентна  $x^*$ -норме. Таким образом, достаточно доказать, что в условиях теоремы приближения (6.16) сходятся к  $x^*$  по  $x^*$ -норме.

Пусть вначале

$$v_n = Av_{n-1}, \quad v_0 = t_1 x^* \quad (0 < t_1 < 1). \quad (6.18)$$

Эта последовательность не убывает, причем

$$t_1 x^* \leq v_n \leq x^* \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Обозначим через  $\rho_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) максимальное число, при котором выполняется неравенство

$$\rho_n x^* \leq v_n. \quad (6.19)$$

Очевидно,

$$0 < t_1 = \rho_0 \leq \rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_n \leq \dots \leq 1.$$

Если мы покажем, что  $\rho_n \rightarrow 1$ , то отсюда будет вытекать, что последовательность (6.18) сходится к  $x^*$  по  $x^*$ -норме.

Предположим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \gamma < 1. \quad (6.20)$$

Из  $u_0$ -вогнутости оператора  $A$  вытекает существование такого  $\eta > 0$ , что

$$A(\gamma x^*) \geq (1 + \eta) \gamma Ax^* = (1 + \eta) \gamma x^*,$$

откуда

$$A(tx^*) = A\left(\frac{t}{\gamma} \gamma x^*\right) \geq \frac{t}{\gamma} A(\gamma x^*) \geq (1 + \eta) tx^* \quad (0 \leq t \leq \gamma).$$

В частности,

$$A(\rho_n x^*) \geq (1 + \eta) \rho_n x^* \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.21)$$

Из (6.19) и монотонности оператора следует, что

$$v_{n+1} = Av_n \geq A(\rho_n x^*)$$

и в силу (6.21)

$$(1 + \eta) \rho_n x^* \leq v_{n+1}.$$

Значит,

$$(1 + \eta) \rho_n \leq \rho_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

откуда

$$\rho_n \geq (1 + \eta)^n \rho_0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

что противоречит (6.20).

Итак,  $\rho_n \rightarrow 1$ .

Теперь рассмотрим последовательность

$$w_n = Aw_{n-1}, \quad w_0 = t_2 x^* \quad (t_2 > 1). \quad (6.22)$$

Эта последовательность не возрастает:

$$w_0 \geq w_1 \geq w_2 \dots \geq w_n \geq \dots \geq x^*.$$

Через  $\xi_n$  обозначим минимальное число, при котором выполняется неравенство

$$w_n \leq \xi_n x^* \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.23)$$

Очевидно,

$$\xi_0 \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n \geq \dots \geq 1.$$

Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 1.$$

Пусть, в предположении противного  $\xi_n \rightarrow \gamma_0 > 1$ . Из  $\mu_0$ -вогнутости оператора  $A$  следует существование такого  $\eta_0 > 0$ , что

$$Ax^* = A\left(\frac{1}{\gamma_0} \gamma_0 x^*\right) \geq \frac{1 + \eta_0}{\gamma_0} A(\gamma_0 x^*),$$

то есть

$$A(\gamma_0 x^*) \leq \frac{\gamma_0}{1 + \eta_0} Ax^* = \frac{\gamma_0 x^*}{1 + \eta_0},$$

откуда следуют неравенства

$$A(tx^*) = A\left(\frac{t}{\gamma_0} \gamma_0 x^*\right) \leq \frac{t}{\gamma_0} A(\gamma_0 x^*) \leq \frac{tx^*}{1 + \eta_0} \quad (t \geq \gamma_0).$$

В частности,

$$A(\xi_n x^*) \leq \frac{\xi_n}{1 + \eta_0} x^* \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$



и

$$w_{n+1} = Aw_n \leq A(\xi_n x^*) \leq \frac{\xi_n}{1 + \eta_0} x^*,$$

откуда

$$\xi_{n+1} \leq \frac{\xi_n}{1 + \eta_0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Значит,

$$\xi_n \leq \frac{\xi_0}{(1 + \eta_0)^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

что противоречит неравенству  $\xi_n \geq \gamma_0$ .

Рассмотрим теперь последовательность (6.16) с произвольным ненулевым начальным приближением  $x_0 \in K$ . Как и при доказательстве предыдущей теоремы, убеждаемся в том, что

$$v_0 = t_1 x^* \leq x_1 = Ax_0 \leq t_2 x^* = w_0$$

при некоторых  $t_1$  и  $t_2$ , удовлетворяющих неравенствам

$$0 < t_1 < 1 < t_2.$$

Тогда последовательные приближения (6.25) удовлетворяют неравенствам

$$v_n \leq x_{n+1} \leq w_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где  $v_n$  и  $w_n$  определяются формулами (6.18) и (6.22). Из (6.19) и (6.23) вытекает, что

$$\rho_n x^* \leq x_{n+1} \leq \xi_n x^* \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из этих неравенств следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|_{x^*} = 0, \quad (6.24)$$

так как  $\rho_n \rightarrow 1$  и  $\xi_n \rightarrow 1$ .

Теорема доказана.

Утверждение теоремы сохраняет силу, если  $u_0$ -вогнут оператор  $A^p$ , где  $p$  — некоторое натуральное число. Для доказательства достаточно заметить, что из теоремы 6.7 вытекает сходимости по  $u_0$ -норме последовательностей

$$A^k x_0, \quad A^{k+p} x_0, \quad A^{k+2p} x_0, \dots \quad (k = 0, 1, \dots, p-1)$$

к одному и тому же пределу  $x^*$ . Поэтому и последовательность (6.16) сходится к  $x^*$  по  $u_0$ -норме.

В условиях теоремы 6.7 не предполагалось, что оператор  $A$  непрерывен.

Вывод о сходимости последовательных приближений по  $u_0$ -норме может быть сделан и в условиях теоремы 6.6, если некоторая степень  $A^p$  оператора  $A$  преобразует каждую сходящуюся по обычной норме последовательность в последовательность, сходящуюся по  $u_0$ -норме.

## § 2. Существование континуума собственных векторов

**1. Вполне непрерывные вогнутые операторы.** Предположим вначале, что вогнутый оператор  $A$  вполне непрерывен и монотонен.

Пусть задано любое  $\varepsilon > 0$ . Обозначим через  $\gamma$  такое положительное число, что из  $\|x\| \leq r$  и  $x \geq tu_0$  следует, что  $t \leq \gamma$ . Пусть

$$A(\gamma u_0) \geq \alpha_0 u_0 \quad (\alpha_0 > 0).$$

Из условия (6.2) вытекает тогда, что при  $0 \leq t \leq \gamma$

$$A(tu_0) \geq \frac{t}{\gamma} A(\gamma u_0) \geq \frac{\alpha_0}{\gamma} tu_0.$$

Полученное неравенство можно рассматривать как условие (5.46) теоремы 5.8. Из этой теоремы вытекает, что  $A$  имеет континуум собственных векторов и что эти собственные векторы образуют непрерывную ветвь бесконечной длины.

Предположим дополнительно, что конус  $K$  нормален. Тогда из теоремы 6.2 вытекает, что позитивный спектр оператора  $A$  образует промежуток.

Пусть для оператора  $A$  справедлива теорема единственности (например,  $A$   $u_0$ -вогнут,  $u_0$ -монотонен или удовлетворяет условиям теоремы 6.5). Тогда позитивный спектр образует интервал. Действительно, если в позитивном спектре есть наибольшее число  $\lambda_0 > 0$ , которому соответствует собственный вектор  $x_0$  ( $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ ), то все остальные собственные векторы  $x(\lambda)$  в силу теоремы 6.1 удовлетворяют неравенству  $x(\lambda) \geq x_0$ . Из полумонотонности нормы вытекает тогда, что  $\|x(\lambda)\| \geq a\|x_0\|$ , то есть оператор  $A$  не имеет собственных векторов малой нормы, а это противоречит теореме 5.8. Аналогично, если в позитивном спектре есть наименьшее число, то оно положительно в силу

условия (6.1). Из теоремы 6.1 и полумонотонности нормы тогда легко сделать вывод об отсутствии у оператора  $A$  собственных векторов, имеющих большую норму, что противоречит снова теореме 5.8\*).

Пусть позитивный спектр образует интервал  $(\lambda_\infty, \lambda_0)$ . Собственные векторы  $x(\lambda)$ ,

$$Ax(\lambda) = \lambda x(\lambda) \quad (\lambda_\infty < \lambda < \lambda_0),$$

образуют в силу теоремы 6.1 монотонную функцию, определенную на  $(\lambda_\infty, \lambda_0)$ . Эта функция  $x(\lambda)$  непрерывна, так как для любого  $\lambda_0 \in (\lambda_\infty, \lambda_0)$  и любой неубывающей последовательности  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  собственные векторы  $x(\lambda_n)$  образуют невозрастающую компактную последовательность, ограниченную снизу элементом  $x(\lambda_0)$ . Предел последовательности  $x(\lambda_n)$  будет решением уравнения  $Ax = \lambda_0 x$  и будет в силу теоремы единственности совпадать с  $x(\lambda_0)$ . Аналогично, если  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  и  $\lambda_n$  не возрастают, то последовательность  $x(\lambda_n)$  не убывает, ее предел является решением уравнения  $Ax = \lambda_0 x$  и в силу единственности совпадает с  $x(\lambda_0)$ .

Объединим полученные утверждения.

**Теорема 6.8.** *Собственные векторы вогнутого и монотонного вполне непрерывного оператора  $A$  образуют непрерывную ветвь бесконечной длины.*

*Если конус  $K$  нормален, то позитивный спектр образует промежуток.*

*Если дополнительно для оператора  $A$  справедлива теорема единственности, то позитивный спектр образует интервал  $(\lambda_\infty, \lambda_0)$ , причем*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|x(\lambda)\| = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|x(\lambda)\| = \infty,$$

где  $Ax(\lambda) = \lambda x(\lambda)$ . Вектор-функция  $x(\lambda)$  при этом однозначна и убывает при возрастании  $\lambda$ .

**2. Общий случай вогнутого оператора.** Откажемся теперь от предположения о полной непрерывности оператора  $A$ . В этом случае ряд утверждений теоремы 6.6 сохраняется.

---

\*) Тот факт, что в позитивном спектре нет наибольшего числа  $\lambda_0$ , легко доказать и без предположения о нормальности конуса, так как из  $x(\lambda) \geq x_0$ , где  $x_0 \in K$  и  $x_0 \neq 0$ , вытекает, что  $\inf_{\lambda} \|x(\lambda)\| > 0$ .

Для доказательства существования ненулевого положительного решения у уравнения  $Ax = \lambda x$  удобно применять теорему 4.1, относящуюся к произвольным монотонным, а не только вогнутым операторам. Инвариантный для  $A$  конусный отрезок  $\langle v, w \rangle$  удобно конструировать при помощи методов, изложенных в гл. 3.

В дополнение к общим соображениям отметим, что для  $u_0$ -вогнутых операторов из неравенств

$$\lambda Av \geq v, \quad \lambda Aw \leq w \quad (6.25)$$

автоматически вытекает, что

$$v \leq w. \quad (6.26)$$

В предположении противного обозначим через  $t_0$  такое максимальное число, что  $w \geq t_0 v$ . Очевидно,  $t_0 < 1$ . Пусть

$$\alpha_1 u_0 \leq Av \leq \beta_1 u_0, \quad \alpha_2 u_0 \leq Aw \leq \beta_2 u_0.$$

Тогда

$$w \geq \lambda Aw \geq \lambda \alpha_2 u_0 \geq \frac{\lambda \alpha_2}{\beta_1} Av \geq \frac{\alpha_2}{\beta_1} v,$$

откуда следует, что  $t_0 > 0$ . Из  $u_0$ -вогнутости оператора  $A$  следует тогда, что

$$w \geq \lambda Aw \geq \lambda A(t_0 v) \geq \lambda(1 + \eta)t_0 Av \geq (1 + \eta)t_0 v,$$

а это противоречит максимальнойности  $t_0$ . То же доказательство сохраняется, если оператор  $A$   $u_0$ -монотонен или удовлетворяет условиям теоремы 6.5.

Нетрудно также видеть, что для вогнутых операторов неравенство (6.26) следует из (6.25), если либо первое из условий (6.25) заменено более сильным  $\lambda Av \geq v + \varepsilon u_0$  ( $\varepsilon > 0$ ), либо второе из условий (6.25) — условием  $\lambda Aw + \varepsilon u_0 \leq w$  ( $\varepsilon > 0$ ).

Для вогнутых операторов (как и для любых монотонных) существование собственных векторов становится очевидным, если  $A\theta \neq \theta$ . В этом случае обозначим через  $\beta_0$  такое положительное число, что  $Au_0 \leq \beta_0 u_0$ . Тогда оператор  $\frac{1}{\beta_0} A$  будет оставлять инвариантным конусный отрезок  $\langle \theta, u_0 \rangle$ , и уравнение  $Au_0 = \beta_0 u_0$  будет иметь ненулевое положительное решение, если конус сильно миниедрален или конус правилен, а  $A$  непрерывен.

Выше мы отмечали, что из единственности решения у уравнения  $x = A^p x$  вытекает единственность решения у уравнения  $x = Ax$ . Справедливо аналогичное утверждение и в задаче о существовании решения. Пусть уравнение  $x = A^p x$  имеет в некоторой области  $T$ , инвариантной для оператора  $A$ , единственное решение  $x^*$ . Тогда  $Ax^* = A^p Ax^*$ , и из единственности вытекает, что  $Ax^* = x^*$ , то есть  $x^*$  — решение уравнения  $x = Ax$ .

Из этого соображения вытекает, что все утверждения теоремы 6.8 сохраняют силу, если некоторая степень  $A^p$  оператора  $A$  является вполне непрерывным  $u_0$ -вогнутым оператором.

Приводимые ниже в этом пункте утверждения справедливы для операторов, некоторая степень которых  $u_0$ -вогнута. Мы ограничимся случаем, когда сам оператор  $A$  является  $u_0$ -вогнутым оператором.

*Лемма 6.1. Пусть  $u_0$ -вогнутый оператор  $A$  непрерывен; пусть конус  $K$  правилен<sup>\*)</sup>.*

*Тогда позитивный спектр оператора  $A$  вместе с каждой точкой  $\lambda_0$  содержит полностью некоторую ее окрестность.*

*Доказательство.* Пусть  $Ax_0 = \lambda_0 x_0$  ( $x_0 \neq 0$ ) и

$$A\left(\frac{1}{2} x_0\right) \geq \frac{1+\eta}{2} Ax_0 = \frac{1+\eta}{2} \lambda_0 x_0 \quad (\eta > 0).$$

Тогда при  $\lambda_0 < \lambda < (1+\eta)\lambda_0$

$$\frac{1}{\lambda} A\left(\frac{1}{2} x_0\right) \geq \frac{1}{(1+\eta)\lambda_0} A\left(\frac{1}{2} x_0\right) \geq \frac{1}{2} x_0,$$

$$\frac{1}{2} Ax_0 \leq \frac{1}{\lambda_0} Ax_0 = x_0.$$

Значит, операторы  $\frac{1}{\lambda} A$  оставляют инвариантным конусный отрезок  $\langle \frac{1}{2} x_0, x_0 \rangle$  при  $\lambda_0 < \lambda < (1+\eta)\lambda_0$  и в силу теоремы 4.1 имеют при этих значениях  $\lambda$  неподвижные точки на этом отрезке.

---

<sup>\*)</sup> Если конус  $K$  сильно мидиедрален, то непрерывность оператора  $A$  не нужна.

Пусть

$$Ax_0 = A\left(\frac{1}{2} \cdot 2x_0\right) \geq \frac{1+\eta_1}{2} A(2x_0) \quad (\eta_1 > 0).$$

Тогда при  $\frac{\lambda_0}{1+\eta_1} < \lambda < \lambda_0$

$$\frac{1}{2} Ax_0 \geq \frac{1}{\lambda_0} Ax_0 = x_0,$$

$$\frac{1}{\lambda} A(2x_0) \leq \frac{2}{(1+\eta_1)\lambda} Ax_0 \leq \frac{2}{\lambda_0} Ax_0 = 2x_0,$$

то есть оператор  $\frac{1}{2} Ax$  оставляет инвариантным конусный отрезок  $\langle x_0, 2x_0 \rangle$  и имеет на нем неподвижную точку в силу теоремы 4.1.

Лемма доказана.

Из этой леммы и теоремы 6.2 вытекает, что позитивный спектр непрерывного  $u_0$ -вогнутого оператора образует интервал  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ , если  $K$  правилен. Вектор-функция  $x(\lambda)$ , значения которой — собственные векторы, однозначна в силу теоремы 6.4, монотонна в силу теоремы 6.1 и непрерывна. Непрерывность доказывается дословно так же, как и в случае вполне непрерывного оператора.

Утверждение леммы 6.1 остается справедливым, если конус  $K$  обладает лишь свойством нормальности, а  $u_0$ -вогнутый оператор  $A$  дополнительно обладает свойством полной непрерывности. Доказательство не меняется.

Покажем в заключение, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \Lambda_1} \|x(\lambda)\| = \infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \Lambda_2} \|x(\lambda)\| = 0, \quad (6.27)$$

если конус вполне правилен.

Предположим, например, что не выполнено первое из равенств (6.27). Тогда имеет место неравенство

$$\sup_{\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2} \|x(\lambda)\| < \infty. \quad (6.28)$$

Действительно, если для некоторой последовательности  $\lambda_n \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(\lambda_n)\| = \infty, \quad (6.29)$$

то без ограничения общности можно считать, что

$$\|x(\lambda_{n+1})\| \geq m \|x(\lambda_n)\| \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.30)$$

(в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности), где  $m$  — такое число, что из  $\theta \leq x \leq y$  следует неравенство  $\|x\| \leq m \|y\|$ . Существование числа  $m$  вытекает из теорем 1.6 и 1.2 — в силу первой из них правильный конус нормален, а в силу второй норма полумонотонна, если конус нормален. Из (6.30) и теоремы 6.1 вытекает, что последовательность  $\lambda_n$  не возрастает. Пусть  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ . Имеет место равенство  $\lambda_0 = \Lambda_1$ , так как в противном случае  $\lambda_0 > \Lambda_1$  и  $x(\lambda_n)$  сходится по норме к  $x(\lambda_0)$ , что противоречит (6.29). Для любой последовательности  $\mu_k \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ , сходящейся к  $\Lambda_1$ , можно указать такую подпоследовательность  $\lambda_{n_k}$  (некоторые числа здесь могут повторяться), что

$$\Lambda_1 < \mu_k < \lambda_{n_k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Из теоремы 6.1 следует тогда, что

$$x(\mu_k) \geq x(\lambda_{n_k}) \quad (k = 1, 2, \dots);$$

из полумонотонности нормы следует, что

$$\|x(\mu_k)\| \geq \frac{1}{m} \|x(\lambda_{n_k})\| \quad (k = 1, 2, \dots),$$

а из этих неравенств и из (6.29) следует, что выполнено первое из равенств (6.27).

Итак, если не выполнено первое из равенств (6.27), то выполнено неравенство (6.28).

Из (6.28) и из полной правильности конуса  $K$  вытекает, что  $x(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \Lambda_1$  сходится к некоторому элементу  $x^*$ . Переходя в равенстве

$$Ax(\lambda) = \lambda x(\lambda)$$

к пределу при  $\lambda \rightarrow \Lambda_1$ , получаем  $Ax^* = \Lambda_1 x^*$ , причем  $x^* \neq \theta$ , так как  $x^* \geq x(\lambda)$  при  $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ . Таким образом,  $\Lambda_1$  не является границей позитивного спектра. Мы пришли к противоречию. Первое из равенств (6.27) доказано.

Аналогично доказывается второе равенство (6.27).

Сформулируем полученные результаты в виде одного утверждения.

**Теорема 6.9.** Пусть конус  $K$  вполне правилен. Пусть непрерывный  $u_0$ -вогнутый оператор  $A$  имеет один положительный собственный вектор.

Тогда  $A$  имеет континуум собственных векторов  $x(\lambda)$ , который является значениями однозначной непрерывной и убывающей вектор-функции, определенной на позитивном спектре, который образует некоторый интервал. Выполнены равенства (6.27).

Нам представляется вероятным, что из непрерывности вогнутого оператора в пространстве с вполне правильным конусом (а возможно, и при меньших ограничениях на конус) вытекает существование собственных векторов. Однако этот факт не доказан.

**3. Верхняя граница позитивного спектра вогнутого оператора.** Продолжим изучение спектра положительного и непрерывного  $u_0$ -вогнутого оператора  $A$ . Будем считать, что собственные векторы  $x(\lambda)$ ,

$$Ax(\lambda) = \lambda x(\lambda), \quad (6.31)$$

образуют на некотором интервале  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  однозначную непрерывную и убывающую вектор-функцию, удовлетворяющую равенствам (6.27). Для этого достаточно, чтобы были выполнены условия теоремы 6.8 или теоремы 6.7.

Пусть  $\|x(\lambda)\| \rightarrow 0$ , тогда  $\lambda \rightarrow \Lambda_2$ . Если  $A\theta \neq \theta$ , то из (6.31) вытекает, что  $\Lambda_2 = \infty$ .

Пусть  $A\theta = \theta$ ; тогда  $\Lambda_2$  может также быть равно  $+\infty$ , но может быть конечным положительным числом. Рассмотрим этот последний случай.

**Лемма 6.2.** Пусть оператор  $A$  ( $A\theta = \theta$ ) имеет слабую производную  $A'(\theta)$  по конусу. Тогда  $A'(\theta)$  является мажорантой вогнутого оператора  $A$ .

**Доказательство.** Допустим, что  $A'(\theta)$  не является мажорантой. Тогда найдется такой ненулевой элемент  $x \in K$ , что  $A'(\theta)x \not\geq Ax$ , то есть  $A'(\theta)x - Ax \notin K$ .

Построим линейный положительный функционал  $f(x)$  так, что

$$f[A'(\theta)x - Ax] = a < 0.$$

Очевидно, при  $0 < t < 1$

$$f\left[\frac{A'(\theta)tx - A(tx)}{t}\right] = a + f\left[\frac{tAx - A(tx)}{t}\right] \leq a.$$



Устремляя  $t$  к нулю и замечая, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \left[ \frac{A'(\theta)tx - A(tx)}{t} \right] = 0,$$

приходим к неравенству  $a \geq 0$ . Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

В условиях леммы 6.2  $\Lambda_2 < \infty$ . Действительно, при  $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$

$$\lambda = \frac{\|Ax(\lambda)\|}{\|x(\lambda)\|} \leq \left\| \frac{Ax(\lambda) - A'(\theta)x(\lambda)}{\|x(\lambda)\|} \right\| + \|A'(\theta)\|.$$

а первое слагаемое в правой части ограничено при малых  $\|x(\lambda)\|$ , так как отношение

$$\frac{Ax(\lambda) - A'(\theta)x(\lambda)}{\|x(\lambda)\|}$$

слабо сходится к нулю.

Ниже предполагается, что  $A'(\theta)$  — это сильная производная Фреше по конусу.

**Теорема 6.10.** Пусть  $A'(\theta)$  вполне непрерывен. Тогда верхняя граница  $\Lambda_2$  позитивного спектра оператора  $A$  является позитивным собственным значением оператора  $A'(\theta)$ .

**Доказательство.** Вначале заметим, что в силу леммы 6.2 оператор  $A$  является монотонной минорантой оператора  $A'(\theta)$ . Из теоремы 5.8 вытекает тогда, что  $A'(\theta)$  имеет положительные собственные векторы. Следовательно,  $A'(\theta)$  имеет позитивные собственные значения.

Выберем такую последовательность  $\lambda_n \rightarrow \Lambda_2$ , что элементы  $A'(\theta) \frac{x(\lambda_n)}{\|x(\lambda_n)\|}$  сходятся к некоторому элементу  $y_0 \in K$ . Переходя в равенствах

$$\frac{\lambda_n x(\lambda_n)}{\|x(\lambda_n)\|} = \frac{Ax(\lambda_n) - A'(\theta)x(\lambda_n)}{\|x(\lambda_n)\|} + A'(\theta) \frac{x(\lambda_n)}{\|x(\lambda_n)\|} \quad (6.32)$$

к пределу, убеждаемся в сходимости последовательности  $\frac{x(\lambda_n)}{\|x(\lambda_n)\|}$  к элементу  $x_0 = \frac{1}{\Lambda_2} y_0 \in K$ . После перехода к пределу получаем равенство

$$A'(\theta)x_0 = \Lambda_2 x_0. \quad (6.33)$$

Теорема доказана.

Если  $A'(\theta)$  имеет единственное позитивное собственное число, то теорема 6.10 позволяет указать верхнюю границу позитивного спектра.

**4. Нижняя граница позитивного спектра.** Нижняя граница  $\Lambda_1$  позитивного спектра может быть равна нулю. В случае  $\Lambda_1 > 0$  исследование проводится тем же методом, который в предыдущем пункте был применен в случае  $\Lambda_2 < \infty$ .

Аналогично лемме 6.2 доказывается, что слабая производная  $A'(\infty)$  по конусу  $K$  (если эта производная существует) является на  $K$  минорантой оператора  $A$ . Если оператор  $A'(\infty)$  является при этом  $u_0$ -положительным оператором, то из теоремы 5.10 вытекает, что все собственные значения оператора  $A$  не меньше (а следовательно, больше), чем позитивное собственное значение оператора  $A'(\infty)$ . Поэтому из рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 6.10, вытекает

*Теорема 6.11. Пусть  $u_0$ -вогнутый, положительный и непрерывный оператор  $A$  имеет сильную асимптотическую производную  $A'(\infty)$  по конусу. Пусть оператор  $A'(\infty)$  вполне непрерывен и  $u_0$ -положителен.*

*Тогда  $\Lambda_1$  является позитивным собственным значением оператора  $A'(\infty)$ .*

Если  $A'(\infty)$  не обладает свойством  $u_0$ -положительности, то  $\Lambda_1$  будет либо позитивным собственным значением оператора  $A'(\infty)$ , либо нулем. Если  $A'(\infty)$  не имеет позитивных собственных значений, то  $\Lambda_1 = 0$ .

Отметим, что теоремы 6.10 и 6.11 сохраняют силу для некоторых случаев, когда  $A'(\theta)$  и  $A'(\infty)$  не вполне непрерывны.

**5. Операторы, вогнутые на части конуса.** Пусть в пространстве  $E$  заданы два конуса  $K$  и  $K_0$ . Пусть, как обычно,  $K_0 \subset K$  и полуупорядоченность в  $E$  введена при помощи большего конуса  $K$ .

Допустим, что оператор  $A$  задан на  $K_0$  и оставляет  $K_0$  инвариантным. Пусть  $u_0 \in K_0$ .

Все определения, данные в настоящей главе, переносятся на операторы, оставляющие инвариантным конус  $K_0$ , без изменений — нужно лишь требовать, чтобы соответствующие неравенства выполнялись лишь для элементов из  $K_0$ . Например, оператор  $A$   $u_0$ -вогнут на  $K_0$ , если для любого ненулевого  $x \in K_0$  справедливы неравенства (6.1) и если для каждого такого  $x \in K_0$ , что  $\alpha_1(x)u_0 \leq x \leq \beta_1(x)u_0$  ( $\alpha_1(x) > 0$ ,  $\beta_1(x) > 0$ ), и каждого положительного  $t_0 < 1$  можно указать

такое  $\eta = \eta(x, t_0) > 0$ , что

$$A(t_0 x) \geq (1 + \eta) t_0 A x.$$

Все доказанные до сих пор в этой главе теоремы сохраняют силу, если от вогнутых на всем конусе  $K$  операторов перейти к операторам, вогнутым на  $K_0$ . Доказательства при этом не меняются.

Доказательства теорем 6.1, 6.3, 6.4 не меняются и в том случае, если оператор вогнут на некотором множестве  $T_0 \subset K$  более сложной природы, чем конус  $K_0$ . Нужно лишь требовать, чтобы множество  $T_0$  вместе с каждым элементом  $x$  содержало все элементы  $tx$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Примерами таких множеств могут быть конусные отрезки  $\langle \theta, w_0 \rangle$ , пересечения  $K_r$  конуса  $K$  с шаром  $\|x\| \leq r$ , пересечения  $K_0 \langle \theta, w_0 \rangle$  конуса  $K_0$  с конусным отрезком  $\langle \theta, w_0 \rangle$  и т. д.

Теорема 6.2 сохраняет при переходе к множеству  $T_0$  силу, если оно вместе с каждым элементом  $x_0$  содержит конусный отрезок  $\langle \theta, x_0 \rangle$ . Если же  $A_0$  оставляет инвариантным конус  $K_0 \subset K$ , то достаточно, чтобы  $T_0$  содержало все множества  $K_0 \langle \theta, x_0 \rangle$  ( $x_0 \in T_0$ ).

Теорема 6.5 сохраняет силу, если  $AT \subset T$ .

Теоремы о сходимости последовательных приближений требуют изменения формулировок. Отметим лишь, что последовательные приближения

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходятся к единственному на  $K_0 \langle \theta, u_0 \rangle$  ненулевому решению  $x^*$  уравнения  $x = Ax$  при любом ненулевом начальном приближении  $x_0 \in K \langle \theta, u_0 \rangle$ , если вполне непрерывный оператор  $A$  вогнут на  $K_0 \langle \theta, u_0 \rangle$  и если  $Au_0 \leq u_0$ .

Нетрудно также указать обобщения теорем настоящего параграфа.

### § 3. Уравнения с выпуклыми операторами

**1. Выпуклые операторы.** Пусть множество  $T \subset K$  замкнуто и обладает тем свойством, что вместе с каждым элементом  $x$  оно содержит все точки  $tx$ , где  $0 \leq t \leq 1$ . Пусть  $u_0$  — фиксированный ненулевой элемент из  $T$ .

Оператор  $A$  назовем  $u_0$ -выпуклым на  $T$ , если для каждого ненулевого  $x \in T$  выполнены неравенства

$$\alpha u_0 \leq Ax \leq \beta u_0, \quad (6.34)$$

где  $\alpha = \alpha(x)$ ,  $\beta = \beta(x)$  положительны, и если для каждого такого  $x \in T$ , что  $\alpha_1(x) u_0 \leq x \leq \beta_1(x) u_0$  ( $\alpha_1(x)$ ,  $\beta_1(x) > 0$ ), и для каждого положительного числа  $t_0 \in (0, 1)$  можно указать такое

$$\eta = \eta(x, t_0) > 0,$$

что

$$A(t_0 x) \leq (1 - \eta) t_0 Ax. \quad (6.35)$$

На уравнения с выпуклыми операторами не переносятся основные теоремы, доказанные в предыдущих двух параграфах для уравнений с вогнутыми операторами. В частности, неверна теорема единственности положительного решения.

В качестве примера рассмотрим в двумерном пространстве точек  $x = \{\xi_1, \xi_2\}$  оператор

$$A\{\xi_1, \xi_2\} = \left\{ \xi_1^2 + \xi_2, \frac{1}{\varepsilon} \xi_2^2 + \varepsilon^2 \xi_1 \right\}, \quad (6.36)$$

где  $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число. Конус  $K$  пусть состоит из элементов с неотрицательными координатами  $u_0 = \{1, 1\}$ . Очевидна  $u_0$ -выпуклость оператора (6.36). В то же время уравнение  $x = Ax$  имеет в конусе три решения. Чтобы найти эти решения, нужно найти такие  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , что

$$\xi_1 = \xi_1^2 + \xi_2, \quad \xi_2 = \frac{1}{\varepsilon} \xi_2^2 + \varepsilon^2 \xi_1. \quad (6.37)$$

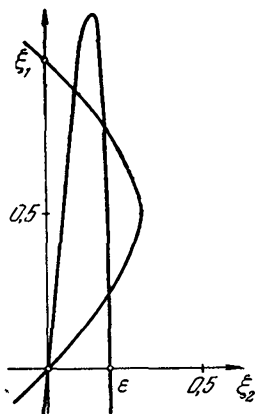


Рис. 1.

Равенства (6.37) можно рассматривать как уравнения двух парабол в плоскости  $\{\xi_1, \xi_2\}$ . Графики этих парабол, как легко убедиться, имеют такой вид, какой показан на рис. 1. Поэтому существуют три решения в конусе  $K$ .

В то же время существуют выпуклые на всем  $K$  операторы, для которых единственность решения ясна из других соображений. Пример подобной ситуации указан ниже, в гл. 7.

Отыскание возможно меньших дополнительных ограничений, при которых уравнения с выпуклыми операторами имеют единственное решение, является важной нерешенной задачей.

## 2. Принцип единственности.

Лемма 6.3. Пусть уравнение  $x = Ax$  с монотонным  $u_0$ -выпуклым оператором  $A$  имеет два ненулевых положительных решения  $x^*$  и  $x^{**}$ . Тогда

$$x^* \leq tx^{**} \quad (0 < t < 1). \quad (6.38)$$

Доказательство. Допустим, что выполнено неравенство  $x^* \leq t^*x^{**}$  при некотором  $t^* \in (0, 1)$ . Обозначим через  $t_0$  такое число, что  $x^* \leq t_0x^{**}$  и  $x^* \leq tx^{**}$  при  $t < t_0$ . Из (6.34) вытекает, что  $t_0 > 0$ .

В силу монотонности  $A$  и в силу (6.35)

$$x^* = Ax^* \leq A(t_0x^{**}) \leq (1 - \eta)t_0Ax^{**} = (1 - \eta)t_0x^{**}.$$

что противоречит минимальности  $t_0$ .

Лемма доказана.

Если  $u_0$ -выпуклый оператор  $A$  обладает тем дополнительным свойством, что из  $0 \leq x \leq u$  и  $x \neq u$  вытекает неравенство  $Au \geq Ax + \varepsilon_0 u_0$ , где  $\varepsilon_0 > 0$ , то имеет место более сильное, чем (6.38), соотношение  $x^* \leq x^{**}$ . Доказательство почти не меняется.

В следующем параграфе лемма 6.3 будет применена в виде следующего принципа единственности: если в условиях леммы 6.3 конус  $K$  телесен и один из элементов  $x^* - x^{**}$ ,  $x^{**} - x^*$  может быть либо нулем, либо внутренним элементом конуса, то

$$x^* = x^{**}.$$

## § 4. Приложения к задаче о точках бифуркации

### 1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Ax = \lambda x \quad (6.39)$$

с числовым параметром, который для простоты будем считать положительным. Пусть  $A\theta = \theta$ ; тогда уравнение (6.39) имеет нулевое решение  $\theta$  при всех значениях параметра  $\lambda$ .

Число  $\lambda_0$  называется *точкой бифуркации* для оператора  $A$ , если каждому  $\varepsilon > 0$  соответствует такое значение  $\lambda$ , которое удовлетворяет неравенству

$$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon,$$

при котором уравнение (6.39) имеет по крайней мере одно ненулевое решение  $x(\lambda)$ , удовлетворяющее условию

$$\|x(\lambda)\| < \varepsilon.$$

Всюду ниже предполагается, что оператор  $A$  в точке  $\theta$  имеет сильную производную Фреше

$$A'(\theta) = B.$$

**Лемма 6.4.** *Если оператор  $B - \lambda_0 I$  имеет непрерывный обратный, то  $\lambda_0$  не является точкой бифуркации.*

**Доказательство.** Так как  $B - \lambda_0 I$  имеет непрерывный обратный оператор, то

$$\|Bx - \lambda_0 x\| \geq k_0 \|x\| \quad (x \in E),$$

где  $k_0 > 0$ . Выберем  $r_0$  так, что при  $\|x\| \leq r_0$  выполняется неравенство

$$\|Ax - Bx\| \leq \frac{k_0}{3} \|x\|.$$

Тогда при  $|\lambda - \lambda_0| < \frac{k_0}{3}$ ,  $\|x\| \leq r_0$ ,

$$\|Ax - \lambda x\| \geq \|Bx - \lambda_0 x\| - \|Ax - Bx\| - |\lambda_0 - \lambda| \|x\| \geq \frac{k_0}{3} \|x\|.$$

Значит, уравнение (6.39) при  $|\lambda - \lambda_0| < \frac{k_0}{3}$  не имеет ненулевых решений, удовлетворяющих неравенству  $\|x\| < r_0$ .

Лемма доказана.

Таким образом, точки бифуркации нужно искать среди точек спектра оператора  $B$ .

Допустим, что положительное число  $\lambda_0$  является изолированной точкой спектра линейного оператора  $B$ . Оказывается (см. М. А. Красносельский [5]), что этого недостаточно для того, чтобы  $\lambda_0$  было точкой бифуркации (даже если  $\lambda_0$  имеет конечную кратность!). Требуется дополнительные предположения либо о кратности собственного значения  $\lambda_0$ , либо о свойствах производных высших порядков оператора  $A$  в точке  $\theta$ .

Если известно, что собственное значение  $\lambda_0$  линейного оператора  $A$  является точкой бифуркации, то возникают естественные новые вопросы. Основные из них относятся к свойствам совокупности тех близких к  $\lambda_0$  значений  $\lambda$ , при которых уравнение (6.39) имеет ненулевые решения: расположены ли эти  $\lambda$  по обе стороны от  $\lambda_0$  или одну (но какую?), заполняют ли эти  $\lambda$  полностью какой-либо интервал, одним из концов которого является  $\lambda_0$ , и т. д. Далее, важно знать, сколько есть малых ненулевых решений при заданном  $\lambda$ , как меняются эти решения при изменении  $\lambda$ .

**2. Основной результат.** Ограничимся рассмотрением случая, когда  $\lambda_0 > 0$  и  $\lambda_0$  является простым собственным значением линейного оператора  $B$ . Будем считать, что каждый элемент  $x \in E$  допускает единственное представление в виде

$$x = Px + \xi(x) h_0, \quad (6.40)$$

где  $h_0$  — нормированный ( $\|h_0\| = 1$ ) собственный вектор оператора  $B$ , соответствующий собственному значению  $\lambda_0$ ,

$$Bh_0 = \lambda_0 h_0, \quad (6.41)$$

$P$  — линейный оператор проектирования на инвариантное для оператора  $B$  подпространство  $E_0$ ,  $\xi(x)$  — линейный функционал, удовлетворяющий условиям

$$\xi(h_0) = 1, \quad \xi(x) = 0 \quad (x \in E_0). \quad (6.42)$$

Если  $B$  рассматривать только на  $E_0$ , то  $\lambda_0$  не будет принадлежать его спектру:

$$(B - \lambda_0 I) E_0 = E_0, \quad \|Bx - \lambda_0 x\| \geq \frac{1}{m_0} \|x\| \quad (x \in E_0). \quad (6.43)$$

Если  $B$  — самосопряженный оператор, то формула (6.40) приобретает особо простой характер:  $P$  — оператор ортогонального проектирования на ортогональное к  $h_0$  подпространство  $E_0$ ,  $\xi(x) = (x, h_0)$ .

Оператор  $B$  очевидным образом коммутирует с  $P$  и имеет место формула

$$Bx = PBx + \lambda_0 \xi(x) h_0 \quad (x \in E). \quad (6.44)$$

Будем считать, что оператор  $A$  ( $A\theta = \theta$ ) допускает представление

$$Ax = Bx + Cx + Dx, \quad (6.45)$$

где  $B$  — линейный описанный выше оператор;  $C$  — однородный оператор некоторого порядка  $s > 1$ , то есть

$$C(tx) \equiv t^s Cx \quad (-\infty < t < \infty, \quad x \in E) \quad (6.46)$$

и

$$\|Cx_1 - Cx_2\| \leq q_0 r^{s-1} \|x_1 - x_2\| \quad (\|x_1\|, \|x_2\| \leq r), \quad (6.47)$$

$D$  — оператор высшего, чем  $s$ , порядка малости, то есть

$$\|Dx\| = o(\|x\|^s), \quad (6.48)$$

и

$$\|Dx_1 - Dx_2\| \leq q_1(r) \|x_1 - x_2\| \quad (\|x_1\|, \|x_2\| \leq r), \quad (6.49)$$

где

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{q_1(r)}{r^{s-1}} = 0. \quad (6.50)$$

Ниже будет показано, что при перечисленных условиях  $\lambda_0$  будет точкой бифуркации для оператора  $A$ . Чтобы получить ответ на вопрос о том, при каких близких к  $\lambda_0$  значениях  $\lambda$  уравнение (6.39) имеет решения с малыми нормами (и сколько имеет таких решений), естественно применить следующую приближенную вычислительную схему.

Будем искать приближенные ненулевые решения  $\tilde{x}(\lambda)$  уравнения (6.39) в виде

$$\tilde{x}(\lambda) = \alpha h_0 \quad (6.51)$$

Оператор  $A$  заменим приближенно оператором  $\tilde{A} = B + C$ . Для определения значений  $\alpha$  воспользуемся равенством

$$\xi(\tilde{A}\tilde{x} - \lambda\tilde{x}) = 0. \quad (6.52)$$

Уравнение (6.52) можно расписать в виде

$$\alpha^s \xi(Ch_0) + (\lambda_0 - \lambda)\alpha = 0.$$

Нулевое решение этого последнего уравнения соответствует тривиальному нулевому решению  $\theta$  уравнения (6.39). Ненулевые решения определяются из уравнения

$$\alpha^{s-1} \xi(Ch_0) = \lambda - \lambda_0. \quad (6.53)$$



Ясно, что этим приближенным уравнением можно пользоваться лишь в случае, когда

$$\xi(Ch_0) \neq 0. \quad (6.54)$$

Это предположение описывает «общий случай».

Оказывается, что выводы, которые можно получить при анализе приближенного уравнения (6.53), правильно отвечают на поставленные выше вопросы.

Имеет место

**Теорема 6.12.** Пусть выполнено условие (6.54). Тогда можно указать такие  $r_0 > 0$  и  $\delta_0 > 0$ , что справедливы следующие утверждения:

1. Уравнение (6.39) при  $\lambda = \lambda_0$  не имеет ненулевых решений в шаре  $\|x\| \leq r_0$ .

2. Если  $s$  четно, то при  $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$  ( $\lambda \neq \lambda_0$ ) уравнение (6.39) имеет в шаре  $\|x\| \leq r_0$  единственное непрерывно зависящее от  $\lambda$  ненулевое решение  $x(\lambda)$ , причем

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \xi[x(\lambda)] &= \operatorname{sign} \xi(Ch_0) \cdot \operatorname{sign}(\lambda - \lambda_0), \\ \|x(\lambda) - \xi[x(\lambda)] h_0\| &\leq M |\xi[x(\lambda)]|^s \end{aligned} \quad (6.55)$$

и

$$M_1(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{s-1}} \leq \|x(\lambda)\| \leq M_2(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{s-1}}, \quad (6.56)$$

где

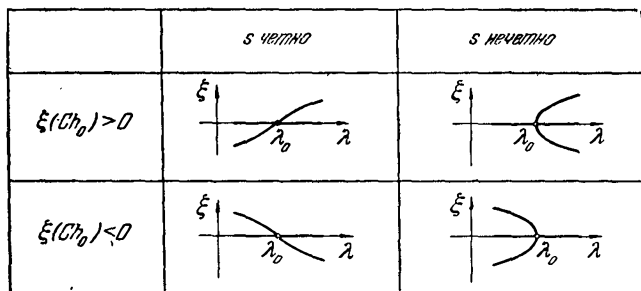
$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} M_1(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} M_2(\lambda) = |\xi(Ch_0)|^{\frac{1}{s-1}}.$$

3. Если  $s$  нечетно и  $\xi(Ch_0) > 0$ , то уравнение (6.39) не имеет в шаре  $\|x\| \leq r_0$  ненулевых решений при  $\lambda \in (\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0)$  и имеет ровно два непрерывно зависящих от  $\lambda$  ненулевых решения  $x_1(\lambda)$  и  $x_2(\lambda)$  при  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta_0)$ . Эти решения удовлетворяют условиям (6.55), (6.56) и

$$\operatorname{sign} \xi[x_1(\lambda)] > 0, \quad \operatorname{sign} \xi[x_2(\lambda)] < 0. \quad (6.57)$$

4. Если  $s$  нечетно и  $\xi(Ch_0) < 0$ , то уравнение (6.39) не имеет в шаре  $\|x\| \leq r_0$  ненулевых решений при  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta_0)$  и имеет ровно два непрерывно зависящих от  $\lambda$  ненулевых решения  $x_1(\lambda)$  и  $x_2(\lambda)$  при  $\lambda \in (\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0)$ . Эти решения удовлетворяют условиям (6.55), (6.56) и (6.57).

Теорема 6.12 становится обозримой, если вычертить примерные графики функций  $\xi[x(\lambda)]$  для различных случаев. Эти графики имеют такой вид:



Во многих задачах механики (возникновение волн, потеря устойчивости упругих систем и т. д.) в уравнении (6.39) параметр  $\lambda$  имеет вид  $\lambda = \frac{1}{\mu}$  и ненулевые решения возникают лишь при значениях параметра  $\mu$ , больших чем бифуркационное значение  $\mu_0 = \frac{1}{\lambda_0}$  ( $\mu_0$  — критическая скорость движения жидкости,  $\mu_0$  — критическая нагрузка Эйлера и т. д.). Из теоремы 6.12 вытекает, что в уравнениях (6.39), описывающих такие процессы, должны фигурировать операторы  $A$ , в представлении (6.45) которых за линейным членом  $B$  идут, вообще говоря, члены  $C$  нечетного порядка, причем знак этих нечетных членов противоположен знаку линейного члена.

Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы 6.12. Применяемый метод исследования в существенной части не зависит от кратности собственного значения  $\lambda_0$ . Однако случай кратного собственного значения требует привлечения понятий комбинаторной топологии, в связи с чем мы его здесь не касаемся.

**3. Кривая подозрительных точек.** Оператор  $B - \lambda_0 I$  имеет, по предположению, на инвариантном подпространстве  $E_0$  непрерывный обратный  $R(\lambda_0)$ . Пусть  $\|R(\lambda_0)\| \leq m_0$ .

Как известно, операторы  $B - \lambda I$  при близких к  $\lambda_0$  значениях  $\lambda$  также имеют на  $E_0$  обратные  $R(\lambda)$ . Нетрудно

видеть, что  $R(\lambda)$  представим рядом

$$R(\lambda)x = R(\lambda_0)x + (\lambda_0 - \lambda)R^2(\lambda_0)x + \dots \\ \dots + (\lambda_0 - \lambda)^n R^{n+1}(\lambda_0)x + \dots \quad (x \in E_0),$$

откуда

$$\|R(\lambda)\| \leq m_0 + |\lambda_0 - \lambda|m_0^2 + \dots + |\lambda_0 - \lambda|^n m_0^{n+1} + \dots,$$

то есть

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{m_0}{1 - |\lambda_0 - \lambda|m_0}. \quad (6.58)$$

Все дальнейшие рассуждения проводятся в предположении, что рассматриваются лишь такие  $\lambda$ , при которых

$$\|R(\lambda)\| \leq 2m_0. \quad (6.59)$$

В силу (6.58) последние неравенства выполнены, если

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{1}{2m_0}. \quad (6.60)$$

Зафиксируем  $\lambda$  и будем искать такие элементы  $x$ , что

$$P(Ax - \lambda x) = \theta. \quad (6.61)$$

Нас будут интересовать при этом лишь те решения, которые имеют достаточно малую норму.

Оказывается, что уравнение (6.61) имеет континуум решений. При этом каждому достаточно малому числу  $\alpha$  соответствует единственное решение  $x$  уравнения (6.61) с малой нормой и такое, что  $\xi(x) = \alpha$ . Это решение будем обозначать через  $x_\alpha$ . Тогда

$$x_\alpha = Px_\alpha + \alpha h_0. \quad (6.62)$$

Чтобы доказать существование решений вида (6.62) уравнения (6.61), воспользуемся представлением (6.45) оператора  $A$  и равенством (6.44). Тогда уравнение (6.61) примет вид

$$(B - \lambda I)Px + P(Cx + Dx) = \theta.$$

Если решение последнего уравнения искать в виде (6.62), то это уравнение можно записать в виде

$$(B - \lambda I)Px_\alpha + P[C(Px_\alpha + \alpha h_0) + D(Px_\alpha + \alpha h_0)] = \theta$$

или

$$Px_\alpha = -R(\lambda)P[C(Px_\alpha + \alpha h_0) + D(Px_\alpha + \alpha h_0)]. \quad (6.63)$$

Введем в рассмотрение операторы  $S(\alpha)$ :

$$S(\alpha)y = -R(\lambda)P[C(y + \alpha h_0) + D(y + \alpha h_0)] \quad (y \in E). \quad (6.64)$$

В силу условий (6.47)–(6.50) можно выбрать такое  $r_0$ , что операторы  $S(\alpha)$  при  $\|\alpha\| \leq r_0$  в шаре  $T \{ \|y\| \leq r_0, y \in E \}$  удовлетворяют условиям принципа сжатых отображений: операторы  $S(\alpha)$  преобразуют шар  $T$  в себя и на этом шаре  $T$  удовлетворяют условию Липшица

$$\begin{aligned} \|S(\alpha)y_1 - S(\alpha)y_2\| &\leq q \|y_1 - y_2\| \\ (y_1, y_2 \in E_0, \|y_1\|, \|y_2\| &\leq r_0) \end{aligned} \quad (6.65)$$

с постоянной  $q < 1$ . Из принципа сжатых отображений вытекает существование и единственность в шаре  $T$  решения уравнения

$$y = S(\alpha)y \quad (6.66)$$

при  $|\alpha| \leq r$ . Уравнение (6.66) совпадает с уравнением (6.63).

Вектор-функция (6.62) сильно непрерывна по  $\alpha$  и, более того, удовлетворяет по  $\alpha$  условию Липшица. Действительно, из равенств

$$\begin{aligned} Px_{\alpha_1} &= -R(\lambda)P[C(Px_{\alpha_1} + \alpha_1 h_0) + D(Px_{\alpha_1} + \alpha_1 h_0)], \\ Px_{\alpha_2} &= -R(\lambda)P[C(Px_{\alpha_2} + \alpha_2 h_0) + D(Px_{\alpha_2} + \alpha_2 h_0)] \end{aligned}$$

и из (6.65) следует, что

$$\|Px_{\alpha_1} - Px_{\alpha_2}\| \leq q (\|Px_{\alpha_1} - Px_{\alpha_2}\| + |\alpha_1 - \alpha_2|),$$

откуда

$$\|Px_{\alpha_1} - Px_{\alpha_2}\| \leq \frac{q}{1-q} |\alpha_1 - \alpha_2|. \quad (6.67)$$

Каждое решение уравнения  $Ax = \lambda x$  является одновременно решением уравнения (6.61). Поэтому ненулевые решения уравнения  $Ax = \lambda x$  можно искать и нужно искать лишь на кривой  $x = x_\alpha$ , которую будем обозначать буквой  $\Gamma$ . Это существенно упрощает задачу, так как кривая  $\Gamma$  гомеоморфна отрезку.

Отметим одно свойство кривой  $\Gamma$ .

В силу (6.46) и (6.48)

$$\|S(\alpha)\theta\| \leq \|R(\lambda)\| \|P\| [\|C(\alpha h_0)\| + D(\alpha h_0)] \leq L_1 |\alpha|^s. \quad (6.68)$$

Из (6.65) тогда вытекает неравенство

$$\|Px_\alpha\| = \|S(\alpha)Px_\alpha\| \leq \|S(\alpha)\theta\| + \\ + \|S(\alpha)Px_\alpha - S(\alpha)\theta\| \leq q\|Px_\alpha\| + L_1(\alpha)^s,$$

откуда

$$\|Px_\alpha\| \leq \frac{L_1}{1-q} |\alpha|^s \quad (|\alpha| \leq r_0). \quad (6.69)$$

Из вывода неравенства (6.65) следует, что  $q \rightarrow 0$ , если  $r_0 \rightarrow 0$ .

**4. Существование ненулевых малых решений.** Для того чтобы точка  $x_\alpha$  на кривой  $\Gamma$  была решением уравнения  $Ax = \lambda x$ , необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\xi(Ax_\alpha - \lambda x_\alpha) = 0, \quad (6.70)$$

которое мы перепишем в виде

$$\xi\{C(Px_\alpha + \alpha h_0)\} + \xi\{D(Px_\alpha + \alpha h_0)\} = (\lambda - \lambda_0)\alpha. \quad (6.71)$$

Введем обозначение

$$\varphi(\alpha) = \xi\{C(Px_\alpha + \alpha h_0) - C(\alpha h_0) + D(Px_\alpha + \alpha h_0)\}. \quad (6.72)$$

В силу условий (6.47)–(6.50) и неравенства (6.69)

$$\varphi(\alpha) = \varphi_0(\alpha) |\alpha|^s \xi(Ch_0), \quad \varphi_0(\alpha) = o(1). \quad (6.73)$$

Равенство (6.71) можно переписать в виде

$$\xi(Ch_0) \alpha^s [1 + \varphi_0(\alpha)] = \alpha(\lambda - \lambda_0). \quad (6.74)$$

Существование или отсутствие ненулевых решений у уравнения (6.74) равносильно существованию или отсутствию ненулевых решений у уравнения  $Ax = \lambda x$ .

Выберем число  $\alpha_0 \in (0, r_0)$  так, чтобы при  $|\alpha| \leq \alpha_0$  выполнялось неравенство

$$|\varphi_0(\alpha)| < \frac{1}{2}.$$

Будем искать ненулевые решения уравнения (6.74), удовлетворяющие условию  $|\alpha| \leq \alpha_0$ . Эти ненулевые решения определяются из уравнения

$$[1 + \varphi_0(\alpha)] \alpha^{s-1} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\xi(Ch_0)}. \quad (6.75)$$

Анализ решений проще всего провести графическим путем.

При  $\lambda = \lambda_0$  уравнение (6.75) не имеет ненулевых решений. Этим доказано первое утверждение теоремы 6.12.

График непрерывной функции

$$\beta = [1 + \varphi_0(\alpha)] \alpha^{s-1} \quad (6.76)$$

заключен между графиками двух функций

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \alpha^{s-1}, \quad \beta_2 = \frac{3}{2} \alpha^{s-1}.$$

При четном  $s$  (рис. 2 сделан для случая  $s=2$ ) функция  $\beta$  принимает положительные значения при  $\alpha > 0$  и отрицательные при  $\alpha < 0$ . Поэтому уравнение (6.75) имеет положительные решения и не имеет отрицательных решений, если

$$\text{sign}(\lambda - \lambda_0) = \text{sign} \xi(Ch_0).$$

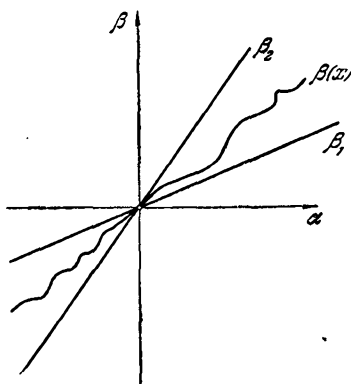


Рис. 2.

Аналогично уравнение (6.75) имеет отрицательные решения и не имеет положительных решений, если

$$\text{sign}(\lambda - \lambda_0) = -\text{sign} \xi(Ch_0).$$

При нечетном  $s$  (рис. 3 сделан для случая  $s=3$ ) функ-

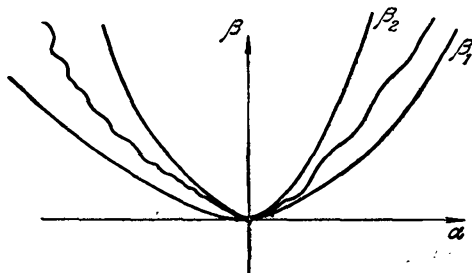


Рис. 3.

ция (6.76) принимает только положительные значения. Поэтому уравнение (6.75) не имеет ненулевых решений, если

$$\text{sign}(\lambda - \lambda_0) = -\text{sign} \xi(Ch_0).$$

и имеет по крайней мере одно положительное и по крайней мере одно отрицательное решения, если

$$\operatorname{sign}(\lambda - \lambda_0) = \operatorname{sign} \xi(Ch_0).$$

Полученный результат полностью доказывает ту часть утвержденной теоремы 6.12, которая относится к существованию или отсутствию ненулевых решений.

**5. Оценка норм ненулевых решений.** Из (6.75) вытекает, что для решений  $x(\lambda)$  уравнения  $Ax = \lambda x$  (если эти решения существуют) справедливы неравенства

$$N_1(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{s-1}} \leq |\xi[x(\lambda)]| \leq N_2(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{s-1}}, \quad (6.77)$$

причем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} N_1(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} N_2(\lambda) = |\xi(Ch_0)|^{\frac{1}{s-1}}.$$

Из (6.69) вытекают неравенства

$$\|Px(\lambda)\| \leq N_3 |\xi[x(\lambda)]|^s. \quad (6.78)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|x(\lambda)\| &\leq \|Px(\lambda)\| + |\xi[x(\lambda)]| \leq \\ &\leq N_3 [N_2(\lambda)]^s |\lambda - \lambda_0|^{\frac{s}{s-1}} + N_2(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{s-1}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \|x(\lambda)\| &\geq |\xi[x(\lambda)]| - \|Px(\lambda)\| \geq \\ &\geq N_1(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{s-1}} - N_3 [N_2(\lambda)]^s |\lambda - \lambda_0|^{\frac{s}{s-1}}, \end{aligned}$$

то есть

$$M_1(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{s-1}} \leq \|x(\lambda)\| \leq M_2(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{s-1}}, \quad (6.79)$$

где

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} M_1(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} M_2(\lambda) = |\xi C Ch_0|^{\frac{1}{s-1}}.$$

Неравенства (6.78) и (6.79) являются соответственно неравенствами (6.55) и (6.56).

Таким образом, доказательство теоремы 6.12 будет завершено, если мы покажем, что ненулевые малые решения  $x(\lambda)$  (при тех значениях  $\lambda$ , при которых они существуют)

единственны при заданном знаке  $\xi[x(\lambda)]$ , и если будет доказана непрерывная зависимость  $x(\lambda)$  от  $\lambda$ .

**6. Лемма о положительности оператора.** Предположим, что спектр оператора  $B$ , рассматриваемого на  $E_0$ , лежит в круге, радиус которого меньше  $k_0\lambda_0$ , где  $k_0 < 1$ .

В силу леммы 2.2 в  $E_0$  может быть введена такая эквивалентная первоначально заданной норма  $\|x\|_0$ , что

$$\|Bx\|_0 \leq k_0\lambda_0\|x\|_0 \quad (x \in E_0). \quad (6.80)$$

Во всем пространстве  $E$  можно ввести такие нормы, которые на  $E_0$  совпадают с  $\|x\|_0$ ; их можно определить, например, равенством

$$\|x\|_1 = \|Px\|_0 + |\xi(x)| \quad (x \in E)$$

или

$$\|x\|_2 = \sqrt{\|Px\|_0^2 + |\xi(x)|^2} \quad (x \in E).$$

Дальнейшие рассуждения не зависят от того, каким образом норма  $\|x\|_0$  продолжена с  $E_0$  на  $E$ ; ниже за продолженной нормой сохраняется обозначение  $\|x\|_0$ . Будем считать, что  $\|h_0\|_0 = 1$ .

Если  $B$  — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то переходить к новой норме не нужно, так как норма самосопряженного оператора равна радиусу наименьшего круга, в котором лежит спектр.

Через  $K(h_0, \rho)$  (см. стр. 33) обозначим допускающий оштукатуривание телесный конус, выделенный условиями (1.20):

$$\xi(x) \geq 0, \quad \|Px\|_0 \leq \rho\xi(x), \quad (6.81)$$

где  $\rho$  — некоторое положительное число. Из (6.81) очевидным образом вытекает неравенство

$$\|x\|_0 \leq \|Px\|_0 + \|\xi(x)h_0\|_0 \leq (1 + \rho)\xi(x) \quad (x \in K(h_0, \rho)). \quad (6.82)$$

Оператор  $B$  оставляет каждый конус  $K(h_0, \rho)$  инвариантным. Для элементов  $x \in K(h_0, \rho)$  с малой нормой это свойство переносится на оператор  $A$ .

Ниже через  $T(\rho; r)$  обозначается пересечение конуса  $K(h_0, \rho)$  с шаром  $\|x_0\| \leq r$ .



**Лемма 6.5.** По каждому положительным  $\rho_1$  и  $\rho_2$  может быть построено такое  $r_0 > 0$ , что

$$AT(\rho, r_0) \subset K(h_0, \rho)$$

при  $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ . Более того,  $r_0$  можно выбрать так, что  $Ax$  ( $x \in T(\rho, r_0)$ ,  $x \neq \theta$ ) являются внутренними элементами конуса  $K(h_0, \rho)$ .

**Доказательство.** Число  $r_0$  выберем так, чтобы при  $\|x\|_0 \leq r_0$  выполнялось неравенство

$$\|Cx + Dx\|_0 \leq \delta_0 \|x\|_0, \quad (6.83)$$

где  $\delta_0$  настолько мало, что

$$\lambda_0 - \|\xi\| \delta_0 (1 + \rho_2) > 0,$$

и при  $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$

$$\frac{k_0 \lambda_0 \rho + \delta_0 \|P\| (1 + \rho)}{\lambda_0 - \|\xi\| \delta_0 (1 + \rho_2)} = \rho^* < \rho. \quad (6.84)$$

Пусть  $x \in T(\rho, r_0)$  и  $x \neq \theta$ . Очевидно,

$$\xi(Ax) = \xi(Bx) + \xi(Cx + Dx) \geq \lambda_0 \xi(x) - \|\xi\| \|Cx + Dx\|_0,$$

откуда в силу (6.82) и (6.83)

$$\xi(Ax) \geq [\lambda_0 - \|\xi\| \delta_0 (1 + \rho_2)] \xi(x). \quad (6.85)$$

Полученное неравенство означает, что для элементов

$$Ax \quad (x \in T(\rho, r_0), \quad x \neq \theta, \quad \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2)$$

выполнено условие

$$\xi(Ax) > 0.$$

Аналогично

$$\|PAx\|_0 \leq \|BPx\|_0 + \|P(Cx + Dx)\|_0 \leq k_0 \lambda_0 \|Px\|_0 + \delta_0 \|P\| \|x\|_0,$$

откуда

$$\|PAx\|_0 \leq [k_0 \lambda_0 \rho + \delta_0 \|P\| (1 + \rho)] \xi(x)$$

и в силу (6.85)

$$\|PAx\|_0 \leq \frac{k_0 \lambda_0 \rho + \delta_0 \|P\| (1 + \rho)}{\lambda_0 - \|\xi\| \delta_0 (1 + \rho_2)} \xi(Ax).$$

Последнее неравенство в силу (6.84) означает, что элемент  $Ax$  является ненулевым элементом конуса  $K(h_0, \rho^*)$  и, следовательно, внутренним элементом конуса  $K(h_0, \rho)$ .

Лемма доказана.

Заметим, что лемма справедлива без предположений о свойствах операторов  $C$  и  $D$ . Достаточно, чтобы  $B$  был сильной производной Фреше  $A'(\theta)$  оператора  $A$ .

**7. Лемма о монотонности оператора.** Ниже используются полуупорядоченности, порожденные различными конусами  $K(h_0, \rho)$ . Будем писать  $x \overset{p}{\leq} y$ , если  $y - x \in K(h_0, \rho)$ .

Пусть выполнены условия предыдущего пункта.

**Лемма 6.6.** По каждому положительным  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ) может быть указано такое  $r_0 > 0$ , что на всем шаре  $T\{\|x\| \leq r_0\}$  оператор  $A$  монотонен в смысле полуупорядоченности, порожденной каждым конусом  $K(h_0, \rho)$  ( $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ ).

**Доказательство.** Число  $r_0$  выберем так, чтобы при  $\|x_1\|_0 \leq r_0$ ,  $\|x_2\|_0 \leq r_0$  выполнялось неравенство

$$\|Cx_1 + Dx_1 - Cx_2 - Dx_2\|_0 \leq \delta_1 \|x_1 - x_2\|_0, \quad (6.86)$$

где  $\delta_1$  настолько мало, что

$$\lambda_0 - \|\xi\| \delta_1 (1 + \rho_2) > 0, \quad (6.87)$$

и при  $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$

$$\frac{k_0 \lambda_0 \rho + \|P\| \delta_1 (1 + \rho_2)}{\lambda_0 - \|\xi\| \delta_1 (1 + \rho_2)} = \rho^{**} < \rho. \quad (6.88)$$

Пусть  $x_1 \overset{p}{\leq} x_2$ .

Из равенств

$$Ax_1 = Bx_1 + Cx_1 + Dx_1, \quad Ax_2 = Bx_2 + Cx_2 + Dx_2 \quad (6.89)$$

вытекает, что

$$\begin{aligned} \xi(Ax_2 - Ax_1) &= \lambda_0 \xi(x_2 - x_1) + \xi(Cx_2 + Dx_2 - Cx_1 - Dx_1) \geq \\ &\geq \lambda_0 \xi(x_2 - x_1) - \|\xi\| \delta_1 \|x_2 - x_1\|_0, \end{aligned}$$

откуда

$$\xi(Ax_2 - Ax_1) \geq [\lambda_0 - \|\xi\| \delta_1 (1 + \rho_2)] \xi(x_2 - x_1). \quad (6.90)$$

Из тех же равенств (6.89) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|P(Ax_2 - Ax_1)\|_0 &\leq \\ &\leq \|BP(x_2 - x_1)\|_0 + \|P\| \|Cx_2 + Dx_2 - Cx_1 - Dx_1\|_0 \leq \\ &\leq k_0 \lambda_0 \|P(x_2 - x_1)\|_0 + \|P\| \delta_1 \|x_2 - x_1\|_0 \leq \\ &\leq [k_0 \lambda_0 \rho + \|P\| \delta_1 (1 + \rho_2)] \xi(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

откуда в силу (6.90)

$$\|P(Ax_2 - Ax_1)\|_0 \leq \frac{k_0 \lambda_0 \rho + \|P\| \delta_1 (1 + \rho_2)}{\lambda_0 - \|\xi\| \delta_1 (1 + \rho_2)} \xi(Ax_2 - Ax_1).$$

Последнее неравенство в силу (6.88) означает, что

$$Ax_2 - Ax_1 \in K(h_0, \rho), \quad \text{то есть} \quad Ax_1 \overset{p}{\leq} Ax_2.$$

Лемма доказана.

Лемма может быть усилена, например, в следующем направлении. Пусть  $k_0 \rho_2 < \rho_1 \leq \rho_2$ ; тогда  $r_0$  можно выбрать так, что на шаре  $\|x\| \leq r_0$  оператор  $A$  монотонен в уси-

ленном смысле: из  $x_1 \overset{p_2}{\leq} x_2$  следует, что  $Ax_1 \overset{p_1}{\leq} Ax_2$ . Отметим также, что в условиях леммы не использованы все свойства операторов  $C$  и  $D$ .

**8. Доказательство единственности в специальном случае вогнутого оператора.**

Лемма 6.7. Если

$$\xi(Ch_0) < 0, \quad (6.91)$$

то найдутся такие числа  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $0 < \rho_1 \leq \rho_2$ ) и такое число  $r_0 > 0$ , что для каждого  $x \in T(\rho_1, r_0)$  и каждого  $t_0 \in (0, 1)$  можно указать такое  $\eta > 0$ , что

$$A(t_0 x) \overset{p_2}{\geq} (1 + \eta)t_0 Ax. \quad (6.92)$$

Доказательство совершенно простое, но требует громоздких выкладок.

Число  $\rho_1$  выберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho_1 (1 + \rho_1)^{s-1} \leq \frac{|\xi(Ch_0)|}{2q_0 \|\xi\|}, \quad (6.93)$$

где  $q_0$  — коэффициент из условия (6.47). Число  $\rho_2$  выберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|PCh_0\|_0 + q_0 \|P\| \rho_1 (1 + \rho_1)^{s-1} < \frac{\rho_2}{4} |\xi(Ch_0)|. \quad (6.94)$$

Подчеркнем, что число  $\rho_2$  можно считать сколь угодно большим.

Пусть  $x \in K(h_0, \rho_1)$ . Тогда

$$x = Px + \xi(x)h_0, \quad \xi(x) \geq 0, \quad \|P(x)\| \leq \rho_1 \xi(x).$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \|Cx - C[\xi(x)h_0]\|_0 &\leq q_0(1 + \rho_1)^{s-1} |\xi(x)|^{s-1} \|Px\|_0 \leq \\ &\leq q_0(1 + \rho_1)^{s-1} \rho_1 |\xi(x)|^s. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} -\xi(Cx) &= -[\xi(x)]^s \xi(Ch_0) + \xi\{C[\xi(x)h_0] - Cx\} \geq \\ &\geq [|\xi(Ch_0)| - q_0 \|\xi\| (1 + \rho_1)^{s-1} \rho_1] [\xi(x)]^s \end{aligned}$$

и в силу (6.93)

$$-\xi(Cx) \geq \frac{1}{2} |\xi(Ch_0)| [\xi(x)]^s. \quad (6.95)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \|PCx\|_0 &\leq \|PC[\xi(x)h_0]\|_0 + \|P\{Cx - C[\xi(x)h_0]\}\|_0 \leq \\ &\leq [\|PCh_0\|_0 + \|P\| q_0(1 + \rho_1)^{s-1} \rho_1] [\xi(x)]^s \end{aligned}$$

и в силу (6.94)

$$\|PCx\|_0 \leq \frac{\rho_2}{4} |\xi(Ch_0)| [\xi(x)]^s. \quad (6.96)$$

Из (6.95) и (6.96) вытекает, что элементы  $-Cx$  ( $x \neq 0$ ) при  $x \in K(h_0; \rho_1)$  принадлежат конусу  $K(h_0, \rho_2)$  вместе с шаровой окрестностью радиуса  $R_0 \|x\|_0^s$ , где

$$R_0 = \frac{\rho_2 |\xi(Ch_0)|}{4(\|P\| + \rho_2 \|\xi\|)(1 + \rho_1)^s}. \quad (6.97)$$

Действительно, если

$$\|y\|_0 \leq R_0 \|x\|_0^s,$$

то в силу (6.95)

$$\begin{aligned} \xi(-Cx + y) &\geq -\xi(Cx) - |\xi(y)| \geq \frac{|\xi(Ch_0)|}{2} [\xi(x)]^s - \\ &- \|\xi\| \cdot \|y\|_0 \geq \frac{|\xi(Ch_0)|}{2} \cdot \frac{\|x\|_0^s}{(1 + \rho_1)^s} - \|\xi\| R_0 \|x\|_0^s, \end{aligned}$$

откуда

$$\xi(-Cx + y) \geq \frac{|\xi(Ch_0)|}{(1 + \rho_1)^s} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\rho_2 \|\xi\|}{4(\|P\| + \rho_2 \|\xi\|)} \right] \|x\|_0^s.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \|P(-Cx + y)\|_0 &\leq \|PCx\|_0 + \|Py\|_0 \leq \\ &\leq \frac{\rho_2}{4} \frac{|\xi(Ch_0)|}{(1 + \rho_1)^s} \|x\|_0^s + \|P\| R_0 \|x\|_0^s \leq \\ &\leq \frac{\rho_2 |\xi(Ch_0)|}{(1 + \rho_1)^s} \left[ \frac{1}{4} + \frac{\|P\|}{4(\|P\| + \rho_2 \|\xi\|)} \right] \|x\|_0^s. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|P(-Cx + y)\|_0 \leq \rho_2^s (-Cx + y).$$

Выберем число  $r_0$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|Dx\|_0 \leq \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) R_0 \|x\|_0^s \quad (\|x\|_0 \leq r_0) \quad (6.98)$$

и

$$\|Dx_1 - Dx_2\|_0 \leq \frac{R_0}{8} \|x_1 - x_2\| \quad (\|x_1\|_0, \|x_2\|_0 \leq r_0). \quad (6.99)$$

Тогда при  $\|x\| \leq r_0$  будут выполнены неравенства

$$\|D(t_0x) - t_0Dx\|_0 \leq (t_0 - t_0^s) \frac{R_0}{2} \|x\|_0^s \quad (0 \leq t_0 \leq 1). \quad (6.100)$$

Действительно, при  $0 \leq t_0 \leq \frac{1}{2}$  в силу (6.98)

$$\begin{aligned} \|D(t_0x) - t_0Dx\|_0 &\leq \|D(t_0x)\| + t_0\|Dx\|_0 \leq \\ &\leq \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) R_0 (t_0^s + t_0) \|x\|_0^s \leq \frac{1}{8} (1 - t_0^{s-1}) R_0 \cdot 2t_0 \|x\|_0^s, \end{aligned}$$

откуда следует (6.100). Если же  $\frac{1}{2} \leq t_0 \leq 1$ , то в силу (6.98) и (6.99)

$$\begin{aligned} \|D(t_0x) - t_0Dx\|_0 &\leq (1 - t_0) \|Dx\|_0 + \|Dx - D(t_0x)\|_0 \leq \\ &\leq (1 - t_0) \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) R_0 \|x\|_0^s + \frac{R_0}{8} (1 - t_0)^s \|x\|_0^s \leq \\ &\leq \frac{1 - t_0}{4} R_0 \|x\|_0^s \leq \frac{t_0(1 - t_0^s)}{2} R_0 \|x\|_0^s, \end{aligned}$$

и снова выполнено неравенство (6.100).

Из (6.100) вытекает, что элементы

$$(-t_0 + t_0^s)Cx - [t_0Dx - D(t_0x)] \quad (x \in T(\rho_1, r_0), \quad 0 \leq t_0 \leq 1)$$

входят в  $K(h_0, \rho_2)$  вместе с шаровой окрестностью радиуса

$$(t_0 - t_0^s) \frac{R_0}{2} \|x\|_0^s.$$

Зафиксируем теперь  $x \in T(\rho_1, r_0) (x \neq \theta)$  и  $t \in (0, 1)$ . Выберем такое  $\eta > 0$ , что

$$t_0\eta \|Bx + Cx + Dx\|_0 < (t_0 - t_0^s) \frac{R_0}{2} \|x\|_0^s, \quad (6.101)$$

тогда

$$(-t + t_0^s)Cx - [t_0Dx - D(t_0x)] - \\ - \eta(t_0Bx + t_0Cx + t_0Dx) \in K(h_0, \rho_2),$$

то есть

$$C(t_0x) + D(t_0x) \geq_{\rho_2} \eta t_0Bx + (1 + \eta)t_0(Cx + Dx),$$

откуда

$$A(t_0x) \geq_{\rho_2} (1 + \eta)t_0Ax.$$

Лемма доказана.

Леммы 6.5, 6.6 и 6.7 означают, что оператор  $A$  монотонен и  $h_0$ -вогнут на некотором  $T(\rho_1; r_0)$  в смысле монотонности, порожденной конусом  $K(h_0, \rho_2)$ . Из теоремы 6.3 вытекает, что уравнение  $Ax = \lambda x$  не может иметь на  $T(\rho_1, r_0)$  более одного ненулевого решения. Вне  $T(\rho_1, r_0)$  ненулевых малых решений нет в силу (6.78).

Этим рассуждением завершается доказательство единственности при  $\xi(Ch_0) < 0$  (в специальном предположении о спектре оператора  $B$ ) ненулевого решения  $x(\lambda)$ , для которого  $\xi[x(\lambda)] > 0$ .

**9. Доказательство единственности в специальном случае выпуклого оператора.** Как и в предыдущих трех пунктах, будем считать, что спектр оператора  $B$ , рассматриваемого на  $E_0$ , лежит в круге, радиус которого меньше  $k_0\lambda_0$ , где  $k_0 < 1$ .

Лемма 6.8. Пусть в лемме 6.7 условие (6.91) заменено условием

$$\xi(Ch_0) > 0. \quad (6.102)$$

Тогда найдутся такие числа  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $0 < \rho_1 \leq \rho_2$ ) и такое число  $r_0 > 0$ , что для каждого  $x \in T(\rho_1, r_0)$  и каждого  $t_0 \in (0, 1)$  можно указать такое  $\eta > 0$ , что

$$A(t_0x) \leq_{\rho_2} (1 - \eta)t_0Ax. \quad (6.103)$$

Доказательство близко к доказательству леммы 6.7. Числа  $\rho_1$  и  $\rho_2$  выбираем так, чтобы выполнялись неравенства (6.93) и (6.94). Те же рассуждения, которые были использованы при доказательстве леммы 6.7, приводят к заключению, что элементы  $Cx$  при  $x \in K(h_0, \rho_1)$  принадлежат

конусу  $K(h_0, \rho_2)$  вместе с шаровой окрестностью радиуса  $R_0 \|x\|_0^s$ , где  $R_0$  определено формулой (6.97).

Далее выбираем  $r_0$  так, чтобы при  $\|x\|_0 \leq r$  выполнялось неравенство (6.100). Тогда элементы

$$(t_0 - t_0^s) Cx + t_0 D x - D(t_0 x)$$

входят в  $K(h_0, \rho_2)$  вместе с шаровой окрестностью радиуса  $(t_0 - t_0^s) \frac{R_0}{2} \|x\|_0^s$ .

При фиксированных  $x \in T(\rho_1; r_0)$  и  $t_0 \in (0, 1)$  можно указать такое  $\eta > 0$ , чтобы выполнялось неравенство (6.100). Тогда

$$\begin{aligned} (t_0 - t_0^s) Cx + t_0 D x - D(t_0 x) - \\ - \eta t_0 (Bx + Cx + D x) \in K(h_0, \rho_2), \end{aligned}$$

то есть

$$C(t_0 x) + D(t_0 x) \leqslant -\eta t_0 Bx + (1 - \eta) t_0 (Cx + Dx),$$

откуда следует (6.103).

Лемма доказана.

Леммы 6.5, 6.6 и 6.8 означают, что оператор  $A$  при условии (6.102) монотонен и  $h_0$ -выпукл на  $T(\rho_1, r_0)$  в смысле полупорядоченности, порожденной конусом  $K(h_0, \rho_2)$ . Но тогда можно применить изложенный в § 3 принцип единственности для уравнений с вогнутыми операторами. Действительно, если мы предположим, что уравнение  $Ax = \lambda x$  при некотором  $\lambda$  имеет на  $T(\rho_1; r_0)$  ( $r_0$  достаточно мало) два ненулевых решения  $x_1$  и  $x_2$ , то из (6.67) вытекает, что либо

$$\|P(x_1 - x_2)\| \leqslant \frac{q}{1-q} \xi(x_1 - x_2),$$

либо

$$\|P(x_2 - x_1)\| \leqslant \frac{q}{1-q} \xi(x_2 - x_1).$$

Без ограничения общности можно считать, что  $\frac{q}{1-q} \leqslant \rho_2$ . Тогда один из элементов  $x_1 - x_2$  или  $x_2 - x_1$  является либо нулем, либо внутренним элементом конуса  $K(h_0; \rho_2)$ . Из принципа единственности вытекает, что  $x_1 = x_2$ .

Рассмотренные в этом и предыдущем пунктах случаи охватывают следующие сочетания значений  $\xi(Ch_0)$  и  $\lambda$ :

$$\lambda > \lambda_0 \quad \text{и} \quad \xi(Ch) > 0$$

или

$$\lambda < \lambda_0 \quad \text{и} \quad \xi(Ch_0) < 0.$$

Оставшиеся случаи легко сводятся к этим, если ввести обозначения  $h_1 = -h_0$ ,  $\xi_1(x) = -\xi(x)$ .

**10. Доказательство единственности в общем случае.** Пусть задано семейство  $A(\beta)$  ( $|\beta - \beta_0| \leq \gamma_0$ ) нелинейных операторов, каждый из которых допускает представление

$$A(\beta) = B(\beta) + C(\beta) + D(\beta), \quad (6.104)$$

где  $B(\beta)$  — линейные операторы, каждый из которых задан равенством

$$B(\beta)x = B(\beta)Px + \lambda_0 \xi(x)h_0 \quad (6.105)$$

(оператор  $P$  проектирования на  $E_0$ , функционал  $\xi(x)$  и элемент  $h_0$  от  $\beta$  не зависят); операторы  $C(\beta)$  однородны порядка  $s$ , причем справедлива оценка

$$\|C(\beta)x_1 - C(\beta)x_2\| \leq q_0 r^{s-1} \|x_1 - x_2\| \quad (\|x_1\|, \|x_2\| \leq r), \quad (6.106)$$

в которой  $q_0$  не зависит от  $\beta$ ; операторы  $D(\beta)$  состоят из членов высшего чем  $s$  порядка, причем справедливы оценки

$$\max_{\beta} \|D(\beta)x\| = o(\|x\|^s) \quad (6.107)$$

и

$$\|D(\beta)x_1 - D(\beta)x_2\| \leq q_1(r) \|x_1 - x_2\| \quad (\|x_1\|, \|x_2\| \leq r), \quad (6.108)$$

где  $q_1(r) = o(r^{s-1})$  и  $q_1(r)$  от  $\beta$  не зависит.

Пусть  $\lambda_0 > 0$  и нормы всех операторов  $B(\beta)$ , рассматриваемых на  $E_0$ , равномерно ограничены числом  $k_0 \lambda_0$ , где  $k_0 < 1$ :

$$\|B(\beta)x\| \leq k_0 \lambda_0 \|x\| \quad (x \in E_0; |\beta - \beta_0| \leq \gamma_0). \quad (6.109)$$

Наконец, предположим, что выполнено условие

$$\xi^* \leq |\xi[C(\beta)h_0]| \leq \xi^{**}, \quad (6.110)$$

где  $\xi^*$  и  $\xi^{**}$  — положительные числа.



Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве лемм 6.5 — 6.8, убеждаемся в существовании таких  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и такого  $r_0 > 0$ , что на  $T(\rho_1, r_0)$  каждый оператор  $A(\beta)$  монотонен и либо  $h_0$ -вогнут, либо  $h_0$ -выпукл (в зависимости от знака  $\xi[C(\beta)h_0]$ ) в смысле полуупорядоченности, определенной конусом  $K(h_0, \rho_2)$ . Число  $\rho_2$  можно считать достаточно большим. Все числа  $\rho_1, \rho_2, r_0$  не зависят от  $\beta$ .

Перейдем к изучению уравнения  $Ax = \lambda x$ , где  $A$  допускает представление (6.45). Уравнение

$$Ax = \lambda x \quad (6.111)$$

эквивалентно, очевидно, системе

$$BPx + P(Cx + Dx) = \lambda Px, \quad (6.112)$$

$$\lambda_0 \xi(x) + \xi(Cx + Dx) = \lambda \xi(x). \quad (6.113)$$

Первое из этих уравнений эквивалентно уравнению

$$R(\lambda)P(Cx + Dx) = Px, \quad (6.114)$$

где  $R(\lambda)$  — рассматриваемый на  $E_0$  обратный к  $B - \lambda I$  оператор. Система (6.113) — (6.114) эквивалентна одному уравнению

$$\lambda \xi(x) h_0 + \lambda R(\lambda)P(Cx + Dx) + \xi(Cx + Dx) h_0 = \lambda x. \quad (6.115)$$

Таким образом, уравнение (6.111) эквивалентно уравнению (6.115).

Рассмотрим операторы

$$A(\lambda) = \lambda_0 \xi(x) h_0 + \lambda R(\lambda)P(Cx + Dx) + \xi(Cx + Dx) h_0. \quad (6.116)$$

Эти операторы допускают представление (6.104), где

$$B(\lambda)x = \lambda_0 \xi(x) h_0, \quad (6.117)$$

$$C(\lambda)x = \lambda R(\lambda)PCx + \xi(Cx) h_0, \quad (6.118)$$

$$D(\lambda)x = \lambda R(\lambda)PDx + \xi(Dx) h_0. \quad (6.119)$$

Все перечисленные в начале пункта свойства вытекают из соответствующих свойств операторов  $C$  и  $D$ , так как при значениях  $\lambda$ , близких к  $\lambda_0$ , нормы операторов  $R(\lambda)$  равномерно ограничены.

Так как  $\lambda R(\lambda) PCh_0 \in E_0$ , то

$$\xi[C(\lambda)h_0] = \xi[\xi(Ch_0)h_0] = \xi(Ch_0).$$

Значит, условие (6.110) выполнено, если  $\xi(Ch_0) \neq 0$ . Следовательно, все операторы (6.116) при достаточно близких к  $\lambda_0$  значениях  $\lambda$  на одном и том же множестве  $T(\rho_1, r_0)$  одновременно  $h_0$ -вогнуты или  $h_0$ -выпуклы в смысле полупорядоченности по конусу  $K(h_0, \rho_2)$  в зависимости от того, каков знак числа  $\xi(Ch_0)$ .

Допустим, что  $\xi(Ch_0) < 0$ . Тогда операторы  $A(\lambda)$  вогнуты и, следовательно, уравнение  $A(\lambda)x = \lambda x$  на  $T(\rho_1, r_0)$  имеет не более одного ненулевого решения. Из эквивалентности уравнений (6.115) и (6.111) вытекает, что на  $T(\rho_1, r_0)$  уравнение (6.111) имеет не более одного ненулевого решения при значениях  $\lambda$ , близких к  $\lambda_0$ . Из (6.78) вытекает, что все решения  $x(\lambda)$ , для которых  $\xi[x(\lambda)] > 0$ , лежат в  $T(\rho_1, r_0)$ . Этим доказательство единственности завершается.

Допустим, что  $\xi(Ch_0) > 0$ . Операторы  $A(\lambda)$  тогда выпуклы, и из принципа единственности вытекает, что различные решения  $x^*$  и  $x^{**}$  уравнения  $A(\lambda)x = \lambda x$  (то есть уравнения  $Ax = \lambda x$ ) обладают тем свойством, что  $x^* - x^{**}$  и  $x^{**} - x^*$  — не внутренние элементы конуса  $K(h_0, \rho)$ . Это противоречит (6.67). Таким образом, и в случае  $\xi(Ch_0) > 0$  ненулевое решение на  $T(\rho_1, r_0)$  единственно.

Случаи, когда существуют ненулевые решения  $x(\lambda)$ , для которых  $\xi[x(\lambda)] < 0$ , сводится к рассмотренному, если произвести замену  $h_0 = -h_1$ ,  $\xi(x) = -\xi_1(x)$ .

**11. Непрерывная зависимость от параметра.** Допустим, что уравнение  $Ax = \lambda x$  имеет ненулевые решения  $x(\lambda)$  ( $\xi[x(\lambda)] > 0$ ) при  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ , где  $\lambda_1$  достаточно близко к  $\lambda_0$ . Положим  $x(\lambda_0) = 0$ . По уже доказанному вектор-функция  $x(\lambda)$  однозначна. Из (6.79) вытекает непрерывность этой функции в точке  $\lambda = \lambda_0$ .

Рассмотрим уравнение

$$y = -R(\lambda)P[C(y + \alpha h_0) + D(y + \alpha h_0)], \quad (6.120)$$

где  $\alpha$  положительно и достаточно мало, а  $\lambda$  достаточно близко к  $\lambda_0$ . Значения оператора  $S(\alpha)$ ,

$$S(\alpha)y = -R(\lambda)P[C(y + \alpha h_0) + D(y + \alpha h_0)], \quad (6.121)$$

принадлежат  $E_0$ . Поэтому решения уравнения (6.120) ищем в  $E_0$ . Из свойств операторов  $C$  и  $D$  вытекает, что оператор  $S(\alpha)$  преобразует некоторый шар  $T_0 \{ \|y\| \leq r_0, y \in E_0 \}$  в себя и на этом шаре удовлетворяет условию сжатия. Из принципа сжатых отображений вытекает существование и единственность решения  $y = y(\lambda; \alpha)$  уравнения (6.120) в шаре  $T_0$ .

Резольвента  $R(\lambda)$  оператора  $B$  в подпространстве  $E_0$  удовлетворяет, как известно, операторному уравнению

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu).$$

Поэтому при достаточно близких к  $\lambda_0$  значениях  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  выполнено неравенство

$$\|R(\lambda_1) - R(\lambda_2)\| \leq K |\lambda_1 - \lambda_2|. \quad (6.122)$$

Так как операторы  $C$  и  $D$  на элементах малой нормы удовлетворяют условиям Липшица с малыми коэффициентами, то из (6.121) и (6.122) следует, что

$$\begin{aligned} & \|R(\lambda_1) P[C(y_1 + \alpha_1 h_0) + D(y_1 + \alpha_1 h_0)] - \\ & \quad - R(\lambda_2) P[C(y_2 + \alpha_2 h_0) + D(y_2 + \alpha_2 h_0)]\| \leq \\ & \leq \|R(\lambda_1) - R(\lambda_2)\| \cdot \|P[C(y_1 + \alpha_1 h_0) + D(y_1 + \alpha_1 h_0)]\| + \\ & \quad + \|R(\lambda_2)\| \cdot \|P\| \{ \|C(y_1 + \alpha_1 h_0) - C(y_2 + \alpha_2 h_0)\| + \\ & \quad + \|D(y_1 + \alpha_1 h_0) - D(y_2 + \alpha_2 h_0)\| \} \leq \\ & \leq K_1 |\lambda_1 - \lambda_2| + K_2 \|y_1 - y_2\| + K_3 |\alpha_1 - \alpha_2|, \end{aligned} \quad (6.123)$$

где числа  $K_2$  и  $K_3$  можно считать малыми. Из полученного неравенства вытекает, что решение  $y(\lambda, \alpha)$  уравнения (6.120) удовлетворяет по совокупности переменных условию Липшица.

Действительно, из

$$y(\lambda_1, \alpha_1) = -R(\lambda_1) P \{ C[y(\lambda_1, \alpha_1) + \alpha_1 h_0] + \\ + D[y(\lambda_1, \alpha_1) + \alpha_1 h_0] \}$$

и

$$y(\lambda_2, \alpha_2) = -R(\lambda_2) P \{ C[y(\lambda_2, \alpha_2) + \alpha_2 h_0] + \\ + D[y(\lambda_2, \alpha_2) + \alpha_2 h_0] \},$$

и из равенства (6.123) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \|y(\lambda_1, \alpha_1) - y(\lambda_1, \alpha_2)\| \leq \\ & \leq K_1 |\lambda_1 - \lambda_2| + K_2 \|y(\lambda_1, \alpha_1) - y(\lambda_2, \alpha_2)\| + K_3 |\alpha_1 - \alpha_2|, \end{aligned}$$

откуда

$$\|y(\lambda_1, \alpha_1) - y(\lambda_2, \alpha_2)\| \leq \frac{K_1}{1-K_2} |\lambda_1 - \lambda_2| + \frac{K_3}{1-K_2} |\alpha_1 - \alpha_2|. \quad (6.124)$$

Если  $x(\lambda)$  ( $\xi[x(\lambda)] > 0$ ) — решение уравнения  $Ax = \lambda x$ , то

$$BPx(\lambda) + P\{C[Px(\lambda) + \xi[x(\lambda)]h_0] + D[Px(\lambda) + \xi[x(\lambda)]h_0]\} = \lambda Px(\lambda).$$

Следовательно,

$$Px(\lambda) = y[\lambda, \xi[x(\lambda)]], \quad (6.125)$$

где  $y(\lambda, \alpha)$  — решение уравнения (6.120). Из (6.124) вытекает, что вектор-функция  $Px(\lambda)$  непрерывна по  $\lambda$ , если непрерывна скалярная функция  $\xi(\lambda) = \xi[x(\lambda)]$ . При этом непрерывна и вектор-функция

$$x(\lambda) = Px(\lambda) + \xi(\lambda)h_0.$$

Допустим, что  $\xi(\lambda)$  разрывна в некоторой точке  $\lambda^*$ . Тогда найдется такая последовательность  $\lambda_n \rightarrow \lambda^*$ , что числа  $\xi_n = \xi(\lambda_n)$  сходятся к некоторому числу  $\xi^*$ , отличному от  $\xi(\lambda^*)$ . Из (6.125) вытекает, что элементы  $Px(\lambda_n)$  будут по норме сходить к  $y^* = y(\lambda^*, \xi^*)$ .

Перейдем в равенствах

$$BPx(\lambda_n) + P\{C[Px(\lambda_n) + \xi_n h_0] + D[Px(\lambda_n) + \xi_n h_0]\} = \lambda_n Px(\lambda_n)$$

и

$$\lambda_0 \xi[x(\lambda_n)] + \xi\{C[Px(\lambda_n) + \xi_n h_0] + D[Px(\lambda_n) + \xi_n h_0]\} = \lambda_n \xi[x(\lambda_n)]$$

к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Предельные равенства имеют вид

$$By^* + P\{C(y^* + \xi^* h_0) + D(y^* + \xi^* h_0)\} = \lambda^* y^*$$

и

$$\lambda_0 \xi^* + \xi\{C(y^* + \xi^* h_0) + D(y^* + \xi^* h_0)\} = \lambda^* \xi^*.$$

Из этих равенств вытекает, что

$$B(y^* + \xi^* h_0) + C(y^* + \xi^* h_0) + D(y^* + \xi^* h_0) = \lambda^*(y^* + \xi^* h_0).$$

то есть

$$A(y^* + \xi^* h_0) = \lambda^* (y^* + \xi^* h_0).$$

Следовательно,

$$y^* + \xi^* h_0 = x(\lambda^*),$$

откуда вытекает равенство

$$\xi^* = \xi(\lambda^*) = \xi[x(\lambda^*)].$$

Мы пришли к противоречию. Значит,  $\xi(\lambda)$  непрерывна.

Теорема 6.12 полностью доказана.

## ГЛАВА 7

### ПРИЛОЖЕНИЯ

Применения общей теории, развитой в предыдущих главах, основаны на сведении различных задач к уравнениям с операторами, действующими в банаховых пространствах с конусом и оставляющими этот конус инвариантным. Во многих случаях, как видно из дальнейшего, такое сведение не связано с преодолением существенных трудностей.

Во всех приводимых примерах мы не стремились к наиболее общим формулировкам. Нашей целью было лишь изложение основных результатов. Можно получить более общие утверждения, если использовать при рассмотрении соответствующих операторов другие признаки монотонности, положительности, вогнутости, дифференцируемости и т. д.

#### § 1. Существование положительных решений у интегральных уравнений

**1. Линейные интегральные операторы.** В этом параграфе через  $\Omega$  обозначается ограниченное замкнутое\*) множество конечномерного пространства.

Рассмотрим линейный интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds \quad (7.1)$$

с неотрицательным ядром  $k(t, s)$ . Будем предполагать, что ядро  $k(t, s)$  обладает такими свойствами, в силу которых оператор (7.1) действует и непрерывен в некотором пространстве  $E$  функций, определенных на  $\Omega$ . Если  $E$  — это

---

\*) Предположение о замкнутости несущественно, если интегральные операторы рассматриваются в пространствах  $L_p$ .

пространство  $C$  непрерывных на  $\Omega$  функций, то достаточным условием полной непрерывности оператора (7.1) в  $E$  является, например, непрерывность ядра  $k(t, s)$ . Если  $E$  — это пространство  $L_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ), то достаточным условием полной непрерывности является неравенство

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |k(t, s)|^q dt ds < \infty. \quad (7.2)$$

где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Известны менее ограничительные, но более громоздко формулируемые условия непрерывности и полной непрерывности интегрального оператора в пространствах  $L_p$ , пространстве  $C$ , пространствах Орлича и др. (см. литературные указания).

Из неотрицательности ядра  $k(t, s)$  вытекает, что оператор (7.1) оставляет инвариантным конус  $K$  неотрицательных функций в пространстве  $E$ . Чтобы теоремы, доказанные в гл. 2, можно было рассматривать как утверждения об уравнениях с интегральным оператором (7.1), нужно выяснить, при каких дополнительных условиях этот оператор  $u_0$ -положителен или  $u_0$ -ограничен сверху или снизу. Такие дополнительные условия нетрудно привести в виде различных неравенств, которым должно удовлетворять ядро  $k(t, s)$  или некоторая его итерация. Ограничимся достаточными условиями  $u_0$ -положительности.

Пусть ядро  $k(t, s)$  удовлетворяет неравенствам

$$u_0(t) \varphi(s) \leq k(t, s) \leq u_0(t) \psi(s) \quad (t, s \in \Omega), \quad (7.3)$$

где  $u_0(t)$  — неотрицательная функция из пространства  $E$ , в котором действует оператор (7.1), а функции  $\varphi(s)$  и  $\psi(s)$  обращаются в нуль лишь на множестве нулевой меры и обладают тем свойством, что

$$\left| \int_{\Omega} x(s) \varphi(s) ds \right| < \infty, \quad \left| \int_{\Omega} x(s) \psi(s) ds \right| < \infty$$

при  $x(t) \in E$ . Тогда для каждой функции  $x(t) \in E$  будут выполнены неравенства

$$\alpha u_0(t) \leq \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds \leq \beta u_0(t) \quad (t \in \Omega),$$

где

$$\alpha = \int_{\Omega} \varphi(s) x(s) ds, \quad \beta = \int_{\Omega} \psi(s) x(s) ds.$$

Следовательно, неравенства (7.3) обеспечивают  $u_0$ -положительность оператора (7.1).

Допустим, что ядро  $k(t, s)$ , как это часто бывает, «не ограничено на диагонали», то есть

$$\lim_{t \rightarrow s} k(t, s) = \infty \quad (s \in \Omega).$$

В этом случае ядро  $k(t, s)$  не может удовлетворять неравенствам типа (7.3). Для линейных интегральных операторов с такими ядрами  $u_0$ -положительность приходится либо устанавливать по оценкам для итерированных ядер, либо по интегральным оценкам для самого ядра.

*Лемма 7.1. Пусть оператор (7.1) действует в пространстве  $C$  непрерывных функций. Пусть для каждого множества  $\Omega_1 \subset \Omega$  положительной меры может быть указано такое положительное  $\eta = \eta(\Omega_1)$ , что*

$$\eta \int_{\Omega} k(t, s) ds \leq \int_{\Omega_1} k(t, s) ds \quad (t \in \Omega). \quad (7.4)$$

*Тогда оператор (7.1)  $u_0$ -положителен, где*

$$u_0(t) = \int_{\Omega} k(t, s) ds. \quad (7.5)$$

*Более того, для каждой неотрицательной и не равной тождественно нулю функции  $x(t)$  имеют место неравенства*

$$\alpha u_0(t) \leq \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds \leq \beta u_0(t) \quad (t \in \Omega, \quad \alpha, \beta > 0).$$

*Доказательство. Пусть  $x(t) \geq 0$  ( $t \in \Omega$ ) и  $x(t) \not\equiv 0$ . Тогда найдется множество  $\Omega_1 \subset \Omega$  такое, что  $\text{mes } \Omega_1 > 0$  и  $x(t) \geq \alpha_0 > 0$  при  $t \in \Omega_1$ . Следовательно,*

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds \geq \alpha_0 \int_{\Omega_1} k(t, s) ds \geq \\ &\geq \alpha_0 \eta(\Omega_1) u_0(t) \quad (t \in \Omega), \end{aligned}$$

*то есть  $A$  является  $u_0$ -ограниченным снизу.*



Очевидна  $u_0$ -ограниченность сверху:

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k(t, s) x(s) ds \leq \max_{s \in \Omega} |x(s)| u_0(t) \quad (t \in \Omega).$$

Лемма доказана.

Из результатов второй главы вытекает, в частности, что при выполнении неравенств (7.3) или при выполнении условий леммы 7.1 интегральный оператор (7.1) (вполне непрерывный в некотором пространстве  $E$ ) имеет единственную неотрицательную нормированную собственную функцию, которой соответствует положительное значение  $\lambda_0$ . Собственное значение  $\lambda_0$  простое. Остальные собственные значения по модулю строго меньше чем  $\lambda_0$ .

**2. Условия полной непрерывности нелинейного интегрального оператора.** Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k[t, s, x(s)] dx, \quad (7.6)$$

который в дальнейшем будем называть *оператором Урысона*.

Для того чтобы оператор (7.6) действовал и был вполне непрерывен в пространстве  $C$ , достаточно непрерывности функции  $k(t, s, u)$  ( $t, s \in \Omega$ ,  $-\infty < u < \infty$ ) по совокупности переменных. Доказательство очевидно. (О более точных условиях полной непрерывности оператора Урысона в пространстве  $C$  см. в литературных указаниях.)

Допустим, что оператор Урысона не действует в пространстве  $C$  или его по каким-либо соображениям неудобно рассматривать в  $C$ . В этом случае пространства, в которых можно рассматривать оператор Урысона, определяются характером нелинейности функции  $k(t, s, u)$  по переменной  $u$ . Если эти нелинейности существенно нестепенные, например экспоненциальные, то приходится применять пространства Орлича. Если нелинейности степенные, то можно обойтись пространствами  $L_p$ .

Предположим, что

$$|k(t, s, u)| \leq R(t, s)(a + b|u|^{\alpha_0}), \quad (7.7)$$

где  $\alpha_0 \geq 0$ , а функция  $R(t, s)$  суммируема по совокупности

переменных с некоторой степенью  $\beta_0 > 1$ :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |R(t, s)|^{\beta_0} dt ds < \infty. \quad (7.8)$$

Предполагается, что  $k(t, s, u)$  непрерывна по  $u$ .

**Теорема 7.1.** Если

$$\alpha_0 \leq \beta_0 - 1,$$

то оператор Урысона действует и вполне непрерывен в каждом пространстве  $L_p$ , где  $p > 1$  и

$$\frac{\alpha_0 \beta_0}{\beta_0 - 1} \leq p \leq \beta_0. \quad (7.9)$$

На доказательстве этой теоремы мы не останавливаемся.

Мы привели теорему 7.1 для случая, когда функция  $k(t, s, u)$  удовлетворяет условию (7.7) при всех значениях  $u$ . Если эти условия выполнены лишь при  $u \geq 0$ , то оператор Урысона определен и вполне непрерывен на конусе  $K$  неотрицательных функций в  $L_p$ . Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть функцию

$$k_1(t, s, u) = \begin{cases} k(t, s, u), & \text{если } u \geq 0 \\ k(t, s, -u), & \text{если } u \leq 0 \end{cases}$$

и оператор

$$A_1 x(t) = \int_{\Omega} k_1[t, s, x(s)] ds;$$

функция  $k_1(t, s, u)$  будет удовлетворять условию (7.7) при всех  $u$ ; оператор  $A_1$  будет в силу теоремы 7.1 вполне непрерывен на всем  $L_p$ ; остается заметить, что операторы  $A$  и  $A_1$  принимают одинаковые значения на  $K$ .

Аналогично оператор Урысона вполне непрерывен на конусе  $K$  неотрицательных функций пространства  $C$ , если  $k(t, s, u)$  непрерывна по совокупности переменных  $t, s \in \Omega$  и  $u \geq 0$ .

Мы не привели условий полной непрерывности оператора Урысона в пространствах Орлича (см. М. А. Красносельский и Я. Б. Рутцкий [1]). Отметим, однако, что при условии

$$|k(t, s, u)| \leq \Phi(u) \quad (t, s \in \Omega, \quad -\infty < u < \infty)$$

оператор Урысона вполне непрерывен в некотором пространстве Орлича  $L_M^*$ , где  $M(u)$  определяется по функции  $\Phi(u)$ .

**3. Дифференцируемость оператора Урысона.** Приведем вначале простые условия дифференцируемости по Фреше оператора Урысона в пространстве  $C$ .

Допустим, что функция  $k(t, s, u)$  непрерывна вместе со своей производной  $k'_u(t, s, u)$  по совокупности переменных  $t, s \in \Omega$ ,  $-\infty < u < \infty$ . Тогда оператор Урысона сильно дифференцируем по Фреше в каждой точке  $x_0(t)$  пространства  $C$ . Производная Фреше определяется формулой

$$A'(x_0)h(t) = \int_{\Omega} k'_u[t, s, x_0(s)]h(s)ds. \quad (7.10)$$

Доказательство очевидно, так как в силу формулы конечных приращений

$$\begin{aligned} A(x_0 + h) - Ax_0 - A'(x_0)h &= \\ &= \int_{\Omega} \{k'_u[t, s, x_0(s) + \theta(t, s)h(s)] - k'_u[t, s, x_0(s)]\}h(s)ds, \end{aligned} \quad (7.11)$$

где  $0 < \theta(t, s) < 1$ , откуда

$$\begin{aligned} \frac{\|A(x_0 + h) - Ax_0 - A'(x_0)h\|}{\|h\|} &\leq \\ &\leq \text{mes } \Omega \sup_{t, s \in \Omega} |k'_u[t, s, x_0(s) + \theta(t, s)h(s)] - k'_u[t, s, x_0(s)]|, \end{aligned}$$

и так как  $k'_u(t, s, u)$  равномерно непрерывна по  $u$ , то

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|A(x_0 + h) - Ax_0 - A'(x_0)h\|}{\|h\|} = 0.$$

В отличие от случая пространства  $C$ , дифференцируемость оператора Урысона в пространстве  $L_p$  не вытекает из непрерывной дифференцируемости по переменной  $u$  функции  $k(t, s, u)$ . Например, оператор

$$Ax(t) = \int_{\Omega} \sin e^{x(s)} ds$$

действует и вполне непрерывен в любом  $L_p$ , однако оператор (7.10) может не быть его производной и, более того,

может не быть определен на  $L_p$ , так как в рассматриваемом примере

$$k'_u[t, s, x_0(s)] = e^{x_0(s)} \cos e^{x_0(s)},$$

а эта функция может оказаться несуммируемой.

Приведем один пример условий дифференцируемости по Фреше.

Пусть оператор Урысона действует в  $L_2$ . Тогда достаточным условием сильной дифференцируемости по Фреше в любой точке  $x_0 = x_0(t)$  пространства  $L_2$  является непрерывность по  $u$  производной  $k'_u(t, s, u)$  и выполнение неравенства

$$|k'_u(t, s, u)| \leq a + b|u| \quad (t, s \in \Omega, \quad -\infty < u < \infty). \quad (7.12)$$

При этом производная  $A'(x_0)$  определяется равенством (7.10).

Для доказательства заметим, что в силу неравенства Буняковского — Коши из (7.11) вытекает неравенство

$$|A(x_0 + h) - Ax_0 - A'(x_0)h| \leq \leq \|h\| \sqrt{\int_{\Omega} |k'_u[t, s, x_0(s) + \theta(t, s)h(s)] - k'_u[t, s, x_0(s)]|^2 ds},$$

откуда

$$\frac{\|A(x_0 + h) - Ax_0 - A'(x_0)h\|}{\|h\|} \leq \leq \sqrt{\int_{\Omega} \int_{\Omega} |k'_u[t, s, x_0(s) + \theta(t, s)h(s)] - k'_u[t, s, x_0(s)]|^2 dt ds}.$$

Остается показать, что двойной интеграл в правой части стремится к нулю, когда  $\|h\| \rightarrow 0$ . Но это очевидно, так как в силу непрерывности  $k'_u(t, s, u)$  по переменной  $u$  подынтегральное выражение стремится к нулю по мере, а в силу (7.12) функции

$$|k'_u[t, s, x_0(s) + \theta_n(t, s)h_n(s)] - k'_u[t, s, x_0(s)]|^2 \\ (n = 1, 2, \dots)$$

имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы для любой последовательности  $h_n(t) \in L_2$ ,  $\|h_n\| \rightarrow 0$ . Поэтому (см. И. П. Натансон [1], стр. 168, теорема Витали) можно под знаком интеграла перейти к пределу.

**4. Производные по конусу.** Введем в рассмотрение функцию

$$H(t, s, u) = \frac{1}{u} k(t, s, u) \quad (u > 0). \quad (7.13)$$

Будем говорить, что  $H(t, s, u)$  почти всюду убывает при возрастании  $u$ , если эта функция не возрастает по  $u$  и если при любом фиксированном  $t \in \Omega$  и при любых фиксированных  $u_2 > u_1$  неравенство

$$H(t, s, u_1) - H(t, s, u_2) > 0 \quad (7.14)$$

выполняется почти при всех  $s \in \Omega$ .

**Теорема 7.2.** Пусть  $k(t, s, 0) \equiv 0$  и существует производная

$$k'_u(t, s, 0) = P(t, s) \quad (t, s \in \Omega). \quad (7.15)$$

Пусть оператор (7.1) и линейный интегральный оператор

$$Px(t) = \int_{\Omega} P(t, s) x(s) ds \quad (7.16)$$

действуют в пространстве  $C$ . Пусть, наконец, функция  $H(t, s, u)$  почти всюду убывает при возрастании  $u$  (при малых  $u$ ).

Тогда оператор (7.16) является сильной производной Фреше  $A'(\theta)$  по конусу  $K$  неотрицательных функций пространства  $C$  оператора (7.6).

**Доказательство.** Пусть  $x_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — последовательность непрерывных неотрицательных функций, равномерно сходящаяся к нулю. Без ограничения общности можно считать, что  $\|x_n\|$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) монотонно убывают. Обозначим через  $\Omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) множество тех  $t \in \Omega$ , в которых  $x_n(t) > 0$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{\|Ax_n - Px_n\|}{\|x_n\|} &= \max_t \frac{1}{\|x_n\|} \int_{\Omega} \{P(t, s) x_n(s) - k[t, s, x_n(s)]\} ds = \\ &= \max_t \frac{1}{\|x_n\|} \int_{\Omega_n} \{P(t, s) - H[t, s, x_n(s)]\} x_n(s) ds \leq \\ &\leq \max_t \int_{\Omega_n} \{P(t, s) - H[t, s, x_n(s)]\} ds. \end{aligned}$$

В силу того, что функция  $H(t, s, u)$  почти всюду убывает, из последнего неравенства следует, что

$$\frac{\|Ax_n - Px_n\|}{\|x_n\|} \leq \max_t \int_{\Omega} \{P(t, s) - H[t, s, \|x_n\|]\} ds. \quad (7.17)$$

Функции

$$f_n(t) = \int_{\Omega} \{P(t, s) - H[t, s, \|x_n\|]\} ds \quad (n = 1, 2, \dots)$$

непрерывны, так как операторы (7.16) и (7.1) действуют в  $S$ . Подынтегральные выражения при всех  $t, s \in \Omega$  стремятся к нулю. При каждом фиксированном  $t$  под знаком интеграла можно перейти к пределу, так как неотрицательные подынтегральные выражения монотонно убывают. Следовательно,  $f_n(t)$  сходятся к нулю, монотонно убывая. В силу теоремы Дини последовательность  $f_n(t)$  сходится к нулю равномерно.

Поэтому из (7.17) вытекает, что

$$\lim_{\|x_n\| \rightarrow 0} \frac{\|Ax_n - A\theta - Px_n\|}{\|x_n\|} = \lim_{\|x_n\| \rightarrow 0} \frac{\|Ax_n - Px_n\|}{\|x_n\|} = 0.$$

Теорема доказана.

Предположение об убывании функции  $H(t, s, u)$  означает, что при фиксированных  $t, s \in \Omega$  график непрерывной функции  $H(t, s, u)$  при  $u > 0$  обладает тем свойством, что каждая прямая  $u = ku$  пересекает его не более чем в одной точке. Если  $k(t, s, u)$  дифференцируема по  $u$ , то  $H(t, s, u)$  при  $u > 0$  также дифференцируема по  $u$ , причем

$$H'_u(t, s, u) = \frac{uk'_u(t, s, u) - k(t, s, u)}{u^2}.$$

Поэтому для убывания функции  $H(t, s, u)$  достаточно выполнения неравенства

$$uk'_u(t, s, u) < k(t, s, u). \quad (7.18)$$

Неравенство (7.18) очевидным образом выполнено, если  $k(t, s, 0) \geq 0$  и производная  $k'_u(t, s, u)$  убывает, так как

$$k(t, s, u) = k(t, s, 0) + uk'_u[t, s, \theta(t, s, u)].$$

Приведем аналог теоремы 7.2 для операторов, действующих в пространствах  $L_p$ .

Ниже будет использовано следующее неравенство, вытекающее очевидным образом из неравенства Гёльдера:

$$\left\{ \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega_1} u(t, s) v(s) ds \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq \|v(s)\|_{L_p(\text{mes } \Omega)}^{\frac{|p-q|}{pq}} \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} |u(t, s)|^r dt ds \right\}^{\frac{1}{r}}, \quad (7.19)$$

где  $\Omega_1 \subset \Omega$ ,

$$p > 1, \quad q = \frac{p}{p-1}, \quad r = \max\{p, q\}.$$

**Теорема 7.3.** Пусть функция  $H(t, s, u)$  неотрицательна и убывает при возрастании  $u$ . Пусть  $k(t, s, 0) \equiv 0$ . Пусть, наконец, существует производная (7.15), причем

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |P(t, s)|^r dt ds < \infty. \quad (7.20)$$

Тогда оператор Урысона (7.6) определен на конусе  $K$  неотрицательных функций пространства  $L_p$ ; значения его принадлежат  $L_p$ ; формула (7.16) определяет сильную производную Фреше оператора (7.6) в точке  $\theta$  по конусу  $K$ .

**Доказательство.** Вначале покажем, что из (7.20) и из убывания функции  $H(t, s, u)$  следует, что оператор Урысона определен на неотрицательных функциях из  $L_p$  и множество его значений лежит в  $L_p$ . Действительно,

$$P(t, s) = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{k(t, s, u) - k(t, s, 0)}{u} = \lim_{u \rightarrow +0} H(t, s, u)$$

и в силу убывания  $H(t, s, u)$

$$P(t, s) \geq H(t, s, u) \quad (t, s \in \Omega, \quad u \geq 0).$$

Поэтому для любой функции  $x(t) \in L_p$  ( $x(t) \geq 0$ ) из неравенства (7.19) следует, что

$$\left\{ \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} k[t, s, x(s)] ds \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} P(t, s) x(s) ds \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq \|x(s)\|_{L_p(\text{mes } \Omega)}^{\frac{|p-q|}{pq}} \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega} |P(t, s)|^r dt ds \right\}^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

то есть  $Ax(t) \in L_p$ .

Пусть задано  $\varepsilon > 0$ .

В силу абсолютной непрерывности интеграла (7.20) можно указать такое  $\delta > 0$ , что для любого множества  $\tilde{\Omega} \subset \Omega \times \Omega$  из  $\text{mes } \tilde{\Omega} < \delta$  будет следовать неравенство

$$\left\{ \int_{\tilde{\Omega}} \int |P(t, s)|^r dt ds \right\}^{\frac{1}{r}} < \varepsilon. \quad (7.21)$$

На основании теоремы Егорова можно указать такое множество  $\mathfrak{M}_\delta \subset \Omega \times \Omega$ , что

$$\text{mes}[(\Omega \times \Omega) \setminus \mathfrak{M}_\delta] < \delta$$

и на  $\mathfrak{M}_\delta$  последовательность функций

$$nk\left(t, s, \frac{1}{n}\right) = H\left(t, s, \frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

сходится к  $P(t, s)$  равномерно. Выберем натуральное число  $n_0$  так, чтобы при  $n \geq n_0$  выполнялось неравенство

$$\left| nk\left(t, s, \frac{1}{n}\right) - P(t, s) \right| \leq \varepsilon, \quad ((t, s) \in \mathfrak{M}_\delta). \quad (7.22)$$

Выберем, наконец, такое натуральное  $k$ , что

$$n_0^{-(k-1)p} < \frac{\delta}{\text{mes } \Omega}. \quad (7.23)$$

Пусть  $x(t)$  — такая неотрицательная функция из  $L_p$ , что

$$\|x(t)\| \leq n_0^{-k}.$$

Обозначим через  $\Omega_1$  множество тех  $t \in \Omega$ , в которых выполнено неравенство

$$x(t) \geq \frac{1}{n_0}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_0^k} \geq \|x(t)\| &= \left\{ \int_{\Omega} |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \geq \\ &\geq \left\{ \int_{\Omega_1} |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{n_0} (\text{mes } \Omega_1)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$



откуда в силу (7.23)

$$\text{mes } \Omega_1 \leq \frac{1}{n_0^{(k-1)p}} < \frac{\delta}{\text{mes } \Omega}. \quad (7.24)$$

Через  $\Omega_0$  обозначим множество тех  $t \in \Omega$ , в которых  $x(t) > 0$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{\|Px - Ax\|}{\|x\|} &= \\ &= \frac{1}{\|x\|} \left\{ \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega_0} \{P(t, s) - H[t, s, x(s)]\} x(s) ds \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\|x\|} \left\{ \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega_1} \{P(t, s) - H[t, s, x(s)]\} x(s) ds \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

и

$$I_2 = \frac{1}{\|x\|} \left\{ \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega_0 \setminus \Omega_1} \{P(t, s) - H[t, s, x(s)]\} x(s) ds \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Оценим отдельно каждое слагаемое  $I_1$  и  $I_2$ .

Неравенство (7.19) в применении к первому слагаемому дает

$$I_1 \leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{|p-q|}{pq}} \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} |P(t, s) - H[t, s, x(s)]|^r dt ds \right\}^{\frac{1}{r}},$$

откуда

$$I_1 \leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{|p-q|}{pq}} \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} |P(t, s)|^r dt ds \right\}^{\frac{1}{r}}$$

и в силу (7.24) и (7.21)

$$I_1 \leq \epsilon (\text{mes } \Omega)^{\frac{|p-q|}{pq}}.$$

Введем обозначения

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \cap [\Omega \times (\Omega_0 \setminus \Omega_1)], \quad \mathfrak{M}_2 = [\Omega \times (\Omega_0 \setminus \Omega_1)] \setminus \mathfrak{M}_1.$$

Неравенство (7.19) в применении к  $I_2$  дает

$$I_2 \leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{|p-q|}{pq}} \left\{ \int_{\mathfrak{M}_1} \int |P(t, s) - H[t, s, x(s)]|^r dt ds + \right. \\ \left. + \int_{\mathfrak{M}_2} \int |P(t, s) - H[t, s, x(s)]|^r dt ds \right\}^{\frac{1}{r}}.$$

Легко видеть, что  $\text{mes } \mathfrak{M}_2 < \delta$ . Поэтому и в силу (7.21)

$$\int_{\mathfrak{M}_2} \int |P(t, s) - H[t, s, x(s)]|^r dt ds \leq \int_{\mathfrak{M}_2} \int |P(t, s)|^r dt ds \leq \varepsilon^r.$$

В силу (7.22)

$$\int_{\mathfrak{M}_1} \int |P(t, s) - H[t, s, x(s)]|^r dt ds \leq \\ \leq \int_{\mathfrak{M}_1} \int \left| P(t, s) - n_0 k\left(t, s, \frac{1}{n_0}\right) \right|^r dt ds \leq \varepsilon^r (\text{mes } \Omega)^2.$$

Из последних двух оценок вытекает, что

$$I_2 \leq \varepsilon (\text{mes } \Omega)^{\frac{|p-q|}{pq}} [1 + (\text{mes } \Omega)^2]^{\frac{1}{r}}.$$

Таким образом, при  $\|x(t)\| \leq n_0^{-k}$  выполняется неравенство

$$\frac{\|Px - Ax\|}{\|x\|} \leq \varepsilon (\text{mes } \Omega)^{\frac{|p-q|}{pq}} \left\{ 1 + [1 + (\text{mes } \Omega)^2]^{\frac{1}{r}} \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0, x \in K} \frac{\|Px - Ax\|}{\|x\|} = 0.$$

Теорема доказана.

**5. Асимптотические производные.** Пусть оператор Урысона определен на конусе  $K$  неотрицательных функций в пространстве  $C$  или пространстве  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) и вполне непрерывен в соответствующем пространстве. Предположим, что функция

$$H(t, s, u) = \frac{1}{u} k(t, s, u)$$

- при  $u \rightarrow +\infty$  равномерно относительно  $t, s \in \Omega$  стремится к некоторой функции  $Q(t, s)$  ( $t, s \in \Omega$ ), причем интегральный оператор

$$Qx(t) = \int_{\Omega} Q(t, s) x(s) ds \quad (7.25)$$

действует в соответствующем пространстве. Оказывается, что  $Q$  является сильной асимптотической производной по конусу  $K$  оператора Урысона (7.6).

Проведем доказательство для случая пространства  $C$ . Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Выберем такое  $R$ , что при  $u \geq R$  выполняется неравенство

$$|H(t, s, u) - Q(t, s)| < \varepsilon \quad (t, s \in \Omega). \quad (7.26)$$

Обозначим через  $K_R$  пересечение конуса  $K$  с шаром  $\|x\| \leq R$ . Пусть

$$M = \sup_{x \in K_R} \{\|Ax(t)\|, \|Qx(t)\|\}; \quad (7.27)$$

число  $M$  конечно, так как множества  $AK_R$  и  $QK_R$  компактны.

Введем в рассмотрение операторы  $U_1$  и  $U_2$  равенствами

$$U_1 x(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } x(t) \leq R, \\ R, & \text{если } x(t) \geq R, \end{cases}$$

и

$$U_2 x(t) = \begin{cases} R, & \text{если } x(t) \leq R, \\ x(t), & \text{если } x(t) \geq R. \end{cases}$$

Очевидно, для каждой функции  $x(t) \in K$

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \int_{\Omega} k[t, s, x(s)] ds = \int_{\Omega} k[t, s, U_1 x(s)] ds + \\ &+ \int_{\Omega} k[t, s, U_2 x(s)] ds - \int_{\Omega} k[t, s, R] ds = \\ &= AU_1 x(t) + AU_2 x(t) - AR(t), \end{aligned}$$

где  $R(t) \equiv R$ , и

$$\begin{aligned} Qx(t) &= \int_{\Omega} Q(t, s) U_1 x(s) ds + \int_{\Omega} Q(t, s) U_2 x(s) ds - \\ &- R \int_{\Omega} Q(t, s) ds = QU_1 x(t) + QU_2 x(t) - QR(t). \end{aligned}$$

В силу (7.27)

$$\|AU_1x(t)\| \leq M, \quad \|AR(t)\| \leq M, \quad \|QU_1x(t)\| \leq M, \\ \|QR(t)\| \leq M.$$

Поэтому

$$\|Ax(t) - Qx(t)\| \leq 4M + \|AU_2x(t) - QU_2x(t)\| = \\ = 4M + \left\| \int_{\Omega} \{H[t, s, U_2x(s)] - Q(t, s)\} U_2x(s) ds \right\|$$

и в силу (7.26)

$$\|Ax(t) - Qx(t)\| \leq 4M + \varepsilon \left\| \int_{\Omega} U_2x(s) ds \right\| = \\ = 4M + \varepsilon (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \int_{\Omega} U_2x(s) ds,$$

откуда

$$\|Ax(t) - Qx(t)\| \leq 4M + \varepsilon (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \int_{\Omega} [R + x(s)] ds \leq \\ \leq 4M + \varepsilon (a + b\|x\|).$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\overline{\lim}_{\|x\| \rightarrow \infty, x \in K} \frac{\|Ax(t) - Qx(t)\|}{\|x\|} \leq b\varepsilon$$

и в силу произвольности  $\varepsilon$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty, x \in K} \frac{\|Ax(t) - Qx(t)\|}{\|x\|} = 0.$$

Этим доказательство завершается.

В случае пространства  $L_p$  рассуждения почти не меняются.

**6. Положительность интегрального оператора.** В дальнейшем будет предполагаться, что выполнено условие

$$k(t, s, u) \geq 0 \quad (t, s \in \Omega, u \geq 0). \quad (7.28)$$

Тогда оператор Урысона (7.6) будет оставлять инвариантным конус  $K$  неотрицательных функций в том пространстве  $E$ , в котором он действует.

В некоторых случаях можно указать более узкие конусы, инвариантные для оператора Урысона.

Пусть кроме (7.28) выполнено дополнительное условие

$$\sup_{t \in \Omega} k(t, s, u) \leq \rho \inf_{t \in \Omega} k(t, s, u) \quad (s \in \Omega, \quad u \geq 0), \quad (7.29)$$

где фиксированное число  $\rho > 1$ . Если, например,

$$k(t, s, u) = k(t, s) f(s, u) \quad (t, s \in \Omega, \quad u \geq 0) \quad (7.30)$$

и ядро  $k(t, s)$  непрерывно и положительно, то условие (7.29) выполнено. Действительно, если

$$M = \max_{t, s \in \Omega} k(t, s), \quad m = \min_{t, s \in \Omega} k(t, s),$$

то

$$\sup_{t \in \Omega} k(t, s, u) \leq M f(s, u) \leq \frac{M}{m} \inf_{t \in \Omega} k(t, s, u).$$

Пусть оператор Урысона определен на конусе  $K$  неотрицательных функций пространства  $C$  или одного из пространств  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ). В том же пространстве рассмотрим множество  $\tilde{K}$  неотрицательных функций  $x(t)$ , удовлетворяющих дополнительному условию

$$\sup_{t \in \Omega} x(t) \leq \rho \inf_{t \in \Omega} x(t).$$

Множество  $\tilde{K}$  является конусом  $K_{u_0, \rho}$  (см. стр. 47), где  $u_0(t) \equiv 1$ . Так как конус  $K$  неотрицательных функций и в пространстве  $C$ , и в пространствах  $L_p$  нормален, то конус  $\tilde{K}$  в силу теоремы 1.13 допускает оштукатуривание.

Если выполнено условие (7.29), то оператор Урысона оставляет инвариантным конус  $\tilde{K}$ , более того, оператор Урысона при этом условии преобразует все неотрицательные функции в элементы из  $\tilde{K}$ . Для доказательства рассмотрим произвольную неотрицательную функцию  $x(t)$ ; в силу (7.29) при любых  $t_1, t_2 \in \Omega$  имеют место неравенства

$$Ax(t_1) = \int_{\Omega} k[t_1, s, x(s)] ds \leq \rho \int_{\Omega} k[t_2, s, x(s)] ds = \rho Ax(t_2),$$

откуда

$$\sup_{t_1 \in \Omega} Ax(t_1) \leq \rho Ax(t_2)$$

и

$$\sup_{t_1 \in \Omega} Ax(t_1) \leq \rho \inf_{t_2 \in \Omega} Ax(t_2).$$

**7. Неотрицательные решения.** Пусть выполнены условия (см. п. 2), при которых оператор Урысона определен и вполне непрерывен на конусе  $K$  неотрицательных функций одного из пространств  $C$  или  $L_p$ . Пусть, далее, оператор  $A$  имеет сильную асимптотическую производную по конусу, причем

$$A'(\infty)x(t) = \int_{\Omega} Q(t, s)x(s)ds. \quad (7.31)$$

Допустим, что выполнено условие (7.28); тогда ядро  $Q(t, s)$  будет неотрицательно и оператор  $A'(\infty)$  будет положительным линейным вполне непрерывным оператором, действующим в соответствующем функциональном пространстве.

Из теоремы 4.7 вытекает

**Теорема 7.4.** *При перечисленных условиях для существования у нелинейного интегрального уравнения*

$$x(t) = \int_{\Omega} k[t, s, x(s)]ds \quad (7.32)$$

*по крайней мере одного неотрицательного решения достаточно, чтобы ядро  $Q(t, s)$  не имело положительных собственных значений, которые бы превосходили или равнялись 1.*

Более простое условие существования неотрицательного решения у уравнения (7.32) можно формулировать в виде неравенств

$$0 \leq k(t, s, u) \leq a + bu \quad (t, s \in \Omega, u \geq 0), \quad (7.33)$$

где  $a \geq 0$  и

$$b \operatorname{mes} \Omega < 1. \quad (7.34)$$

Если  $A$  действует в пространстве  $C$  непрерывных функций, то доказательство сформулированного утверждения очевидно. Достаточно рассмотреть пересечение  $K_R$  конуса неотрицательных функций с шаром  $\|x\| \leq R$ , где

$$R \geq \frac{a \operatorname{mes} \Omega}{1 - b \operatorname{mes} \Omega},$$

и заметить, что вполне непрерывный оператор  $A$  преобра-

зует  $K_R$  в себя, так как при  $x(t) \in K_R$

$$\begin{aligned} Ax(t) &\leq \int_{\Omega} [a + bx(t)] dt = a \operatorname{mes} \Omega + b \int_{\Omega} x(t) dt \leq \\ &\leq R(1 - b \operatorname{mes} \Omega) + bR \operatorname{mes} \Omega = R. \end{aligned}$$

После этого остается воспользоваться принципом Шаудера. В случае, если  $A$  действует в  $L_p$ , доказательство аналогично:  $A$  преобразует в себя  $K_R$ , где

$$R \geq \frac{a(\operatorname{mes} \Omega)^{1 + \frac{1}{p}}}{1 - b \operatorname{mes} \Omega}.$$

Существование неотрицательного решения при условии (7.33) можно получить и как следствие теоремы 4.9.

**8. Положительные решения.** В этом пункте предполагается, что

$$k(t, s, 0) \equiv 0 \quad (t, s \in \Omega). \quad (7.35)$$

При этом условии уравнение (7.30) имеет тривиальное нулевое решение. Приведем некоторые условия, вытекающие из теорем 4.11—4.16, существования второго (уже нетривиального) неотрицательного решения.

Будем предполагать, что выполнено условие (7.28), из которого вытекает, что оператор Урысона преобразует конус  $K$  неотрицательных функций в себя. Далее, будем считать, что оператор  $A$  на конусе  $K$  (в пространстве  $C$  или в одном из пространств  $L_p$ ) (вполне непрерывен и имеет сильную асимптотическую производную (7.31) по конусу и сильную производную Фреше  $A'(\theta)$  по конусу в точке  $\theta$ , причем

$$A'(\theta)x(t) = \int_{\Omega} P(t, s)x(s)ds, \quad (7.36)$$

где

$$P(t, s) = k'_u(t, s, 0). \quad (7.37)$$

Функции  $P(t, s)$  и  $Q(t, s)$  неотрицательны в силу условия (7.28). Мы будем считать, что эти функции удовлетворяют дополнительным ограничениям, в силу которых линейные интегральные операторы (7.31) и (7.36) имеют единственный нормированный собственный вектор в конусе  $K$ . Для этого, например, достаточно, чтобы ядра  $P(t, s)$  и  $Q(t, s)$  удовле-

творяли условиям  $u_0$ -положительности, приведенным в п. 1 настоящего параграфа. Через  $\lambda_0$  и  $\lambda_\infty$  обозначим наибольшее положительное собственное значение (оно соответствует неотрицательной собственной функции) соответственно оператора  $A'(\theta)$  и оператора  $A'(\infty)$ .

Из теорем 4.11 и 4.16 вытекает

*Теорема 7.5. Уравнение (7.32) имеет по крайней мере одно неотрицательное и не равное тождественному нулю решение при перечисленных выше условиях, если либо*

$$\lambda_0 < 1 < \lambda_\infty \quad (7.38)$$

*либо*

$$\lambda_\infty < 1 < \lambda_0. \quad (7.39)$$

Приведем еще один пример. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \int_{\Omega} k(t, s) f[s, x(s)] ds \quad (7.40)$$

с непрерывным положительным ядром  $k(t, s)$  и непрерывной и непрерывно дифференцируемой функцией  $f(s, u)$ , удовлетворяющей условиям

$$f(s, 0) \equiv 0, \quad f(s, u) \geq 0, \quad f(s, u) \geq au^{1+\varepsilon_0} - b(u \geq 0), \quad (7.41)$$

где  $a, b, \varepsilon_0 > 0$ .

*Теорема 7.6. Пусть спектр ядра*

$$P(t, s) = k(t, s) f'_u(s, 0) \quad (7.42)$$

*лежит в круге радиуса  $\rho_0 < 1$ . Тогда уравнение (7.40) имеет кроме нулевого по крайней мере одно положительное решение.*

*Доказательство.* При перечисленных условиях оператор

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k(t, s) f[s, x(s)] ds$$

вполне непрерывен в  $C$  и оставляет инвариантным конус  $\tilde{K}$  (см. п. 6) неотрицательных функций, удовлетворяющих условию

$$\|x\| = \max_{t \in \Omega} x(t) \leq \rho \min_{t \in \Omega} x(t). \quad (7.43)$$



Оператор  $A$  имеет сильную производную Фреше  $A'(0)$ , являющуюся линейным интегральным оператором с ядром (7.42). По предположению, спектр оператора  $A'(0)$  лежит в круге радиуса  $\rho_0 < 1$ . Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что найдется такое  $R$ , что при  $x(t) \in K$  и  $\|x(t)\| \geq R$  выполнено соотношение  $Ax \leq x$ , то есть разность  $x(t) - Ax(t)$  не принадлежит конусу  $\tilde{K}$ .

В предположении противного можно найти такую последовательность  $x_n(t) \in \tilde{K}$ , что  $\|x_n(t)\| \rightarrow \infty$  и

$$x_n(t) - Ax_n(t) \in \tilde{K} \subset K \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.44)$$

В то же время в силу (7.41) и (7.43)

$$\begin{aligned} x_n(t) - Ax_n(t) &= x_n(t) - \int_{\Omega} k(t, s) f(s, x_n(s)) ds \leq \\ &\leq x_n(t) - \int_{\Omega} k(t, s) \{a |x_n(s)|^{1+\varepsilon_0} - b\} ds \leq \\ &\leq \|x_n\| - \frac{a}{\rho^{1+\varepsilon_0}} \|x_n\|^{1+\varepsilon_0} \int_{\Omega} k(t, s) ds + b \int_{\Omega} k(t, s) ds \end{aligned}$$

и при достаточно больших  $n$  функции  $x_n(t) - Ax_n(t)$  отрицательны, что противоречит (7.44).

Теорема доказана.

Аналогичное утверждение нетрудно формулировать и для уравнения (7.32).

### 9. Собственные функции. Ограничимся одним примером.

**Теорема 7.7.** Пусть функция  $K(t, s, u)$  удовлетворяет неравенству

$$k(t, s, u) \geq P(t, s)u \quad (t, s \in \Omega, \quad u \geq 0). \quad (7.45)$$

Пусть оператор Урысона вполне непрерывен на конусе  $K$  неотрицательных функций в пространстве  $E$  ( $C$  или  $L_p$ ), в котором непрерывен линейный интегральный оператор с ядром  $P(t, s)$ . Пусть

$$0 < m \leq P(t, s) \leq M < \infty \quad (t, s \in \Omega). \quad (7.46)$$

Тогда оператор Урысона имеет континуум положительных собственных функций, среди которых есть собственные функции любой нормы.

**Доказательство.** Для доказательства достаточно заметить, что в условиях теоремы линейный интегральный оператор с ядром  $P(t, s)$  является монотонной минорантой оператора Урысона, а затем сослаться на теорему 5.2. Из этой теоремы вытекает, что в условиях теоремы 7.7 положительные собственные функции образуют непрерывную ветвь бесконечной длины.

Условие (7.46) может быть заменено любым условием  $u_0$ -положительности (даже  $u_0$ -ограниченности снизу) линейного интегрального оператора с ядром  $P(t, s)$  (см. п. 1).

**10. Уравнение с вогнутыми нелинейностями.** Продолжим изучение интегрального оператора Урысона

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k[t, s, x(s)] ds.$$

В этом параграфе предполагается, что  $k(t, s, 0) \equiv 0$  и функция  $k(t, s, u)$  не убывает при возрастании  $u$ , то есть при  $u_1 < u_2$  выполнены неравенства

$$k(t, s, u_1) \leq k(t, s, u_2) \quad (t, s, \in \Omega).$$

Это условие, очевидно, обеспечивает монотонность оператора по отношению к полуупорядоченности, определенной конусом неотрицательных функций.

В построениях настоящего пункта существенную роль играет функция (7.13):

$$H(t, s, u) = \frac{1}{u} k(t, s, u) \quad (u > 0).$$

Ниже используется следующее обозначение:

$$u_0 = u_0(t) \equiv 1.$$

Пусть функция  $H(t, s, u)$  почти всюду убывает (см. стр. 252) при возрастании  $u$ . Тогда, как легко видеть, при любом  $t \in \Omega$  и любом  $a > 0$  неравенство

$$k(t, s, u) > 0 \quad (u \geq a) \quad (7.47)$$

выполняется почти при всех  $s \in \Omega$ .

Рассмотрим вначале оператор Урысона в пространстве  $C$  непрерывных на  $\Omega$  функций. Пусть  $x(t)$  неотрицательна и не равна тождественно нулю. Тогда можно указать такое  $a > 0$ ,

что множество  $\Omega_1$  тех  $t \in \Omega$ , в которых  $x(t) \geq a$ , имеет положительную меру. Отсюда и из (7.47) следует, что

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k[t, s, x(s)] ds \geq \int_{\Omega_1} k[t, s, x(s)] ds > 0 \quad (t \in \Omega).$$

Это означает, что непрерывная на компактном множестве  $\Omega$  функция  $Ax(t)$  положительна; следовательно, она ограничена снизу и сверху положительными числами  $\alpha$  и  $\beta$ , то есть

$$\alpha u_0(t) \leq Ax(t) \leq \beta u_0(t) \quad (t \in \Omega). \quad (7.48)$$

Покажем, что условия убывания почти всюду функции  $H(t, s, u)$  влечет  $u_0$ -вогнутость оператора Урысона на конусе  $K$  неотрицательных функций пространства  $C$  (если, конечно, оператор Урысона действует в пространстве  $C$ ).

Пусть функция  $x(t)$  удовлетворяет условию  $\gamma u_0 \leq x \leq \gamma_0 u_0$  ( $\gamma > 0$ ), то есть  $\gamma \leq x(t) \leq \gamma_0$  ( $t \in \Omega$ ). Пусть  $\tau$  — некоторое фиксированное число из  $(0, 1)$ .

Выберем натуральное число  $n$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\gamma_0 - \tau\gamma}{n} < \frac{\gamma(1 - \tau)}{2}.$$

Разобьем сегмент  $[\tau\gamma, \gamma_0]$  на  $n$  равных частей точками

$$\tau\gamma = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = \gamma_0.$$

Пусть

$$\gamma \leq x \leq \gamma_0, \quad \xi_{i-1} \leq \tau x \leq \xi_i.$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} x &= \tau x + (1 - \tau)x \geq \\ &\geq \xi_{i-1} + (1 - \tau)\gamma > \xi_{i-1} + \frac{2}{n}(\gamma_0 - \tau\gamma) = \xi_{i+1}, \end{aligned}$$

причем при  $i = n$  через  $\xi_{i+1}$  обозначено число  $\gamma_0 = \frac{\gamma_0 - \tau\gamma}{n}$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} k(t, s, \tau x) - \tau k(t, s, x) &= \tau x [H(t, s, \tau x) - H(t, s, x)] = \\ &= \tau x \{ [H(t, s, \tau x) - H(t, s, \xi_i)] + \\ &\quad + [H(t, s, \xi_i) - H(t, s, \xi_{i+1})] + \\ &\quad + [H(t, s, \xi_{i+1}) - H(t, s, x)] \} \geq \tau x [H(t, s, \xi_i) - H(t, s, \xi_{i+1})], \end{aligned}$$

и в силу убывания почти всюду функции  $H(t, s, u)$  неравенство

$$k(t, s, \tau x) - \tau k(t, s, x) > 0$$

выполняется при каждом  $t$  для любых  $x \in [\gamma, \gamma_0]$  почти при всех  $s \in \Omega$ .

В частности, для функции  $x(t)$ , удовлетворяющей неравенствам  $\gamma \leq x(t) \leq \gamma_0$  почти при всех  $s \in \Omega$ , выполнено неравенство

$$k[t, s, \tau x(s)] - \tau k[t, s, x(s)] > 0.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$A[\tau x(t)] - \tau Ax(t) > 0 \quad (t \in \Omega).$$

Разность в левой части является непрерывной положительной функцией. Поэтому найдется такое  $\mu$ , что

$$A[\tau x(t)] - \tau Ax(t) \geq \mu \quad (t \in \Omega)$$

и в силу (7.48)

$$A[\tau x(t)] - \tau Ax(t) \geq \frac{\mu}{p} Ax(t) \quad (t \in \Omega),$$

то есть

$$A(\tau x) \geq \tau \left(1 + \frac{\mu}{\tau p}\right) Ax.$$

Этим завершается доказательство  $u_0$ -вогнутости оператора  $A$  в пространстве  $C$ .

Будем говорить, что  $H(t, s, u)$  равномерно убывает при возрастании  $u$ , если разность  $H(t, s, u_1) - H(t, s, u_2)$  при  $u_1 < u_2$  имеет положительный infimum по  $t, s \in \Omega$ .

Равномерное убывание функции  $H(t, s, u)$  влечет  $u_0$ -вогнутость в пространстве  $L_p$  оператора Урысона на конусе неотрицательных функций (доказательство аналогично случаю пространства  $C$ ). При этом условие, гарантирующее полную непрерывность оператора Урысона на конусе неотрицательных функций пространства  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ), можно записать в виде

$$\sup_t \int_{\Omega} |k'_u(t, s, 0)| \frac{p}{p-1} ds < \infty.$$

В силу теоремы 6.2 указанные в этом пункте условия вогнутости интегрального оператора являются условиями

единственности положительного решения у интегрального уравнения

$$x(t) = \int_{\Omega} k[t, s, x(s)] ds.$$

Так как вогнутый оператор удовлетворяет требованиям, предъявляемым к монотонным минорантам, то в условиях, приведенных в настоящем пункте, оператор Урысона имеет континуум положительных собственных функций. В силу теорем гл. 6 эти собственные функции непрерывно и монотонно зависят от параметра.

Отметим в заключение пункта, что функция  $H(t, s, u)$  убывает при возрастании  $u$ , если  $k(t, s, u)(k(t, s, 0) \equiv 0, k(t, s, u) > 0$  при  $u > 0)$  вогнута по переменной  $u$ .

**11. Уравнения с выпуклыми нелинейностями.** Для интегральных уравнений с оператором Урысона, содержащим выпуклые по  $u$  функции  $k(t, s, u)$ , достаточно общие теоремы единственности положительного решения неизвестны. Неизвестен и общий способ доказательства таких теорем.

В некоторых частных случаях удается воспользоваться приведенным в гл. 6 (стр. 220) принципом единственности для уравнений с выпуклыми операторами. Приводимый ниже пример интересен в основном методом доказательства. Читатель без труда обобщит его на уравнения с операторами Урысона. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \int_{\Omega} k(t, s) f[x(s)] ds \quad (7.49)$$

при следующих условиях. Функция  $k(t, s)$  непрерывна по совокупности переменных и

$$0 < m \leq k(t, s) \leq M < \infty \quad (t, s \in \Omega), \quad (7.50)$$

функция  $f(u)$  ( $u \geq 0$ ) непрерывна, неотрицательна, монотонна и выпукла,  $f(0) = 0$  и  $f'(0) = 1$ ; для простоты будем предполагать, что  $\text{mes } \Omega = 1$ .

При перечисленных ограничениях оператор

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k(t, s) f[x(s)] ds \quad (7.51)$$

вполне непрерывен в пространстве  $C$ , оставляет конус  $K$  неотрицательных функций инвариантным. Более того, оператор  $A$  оставляет инвариантным конус  $\tilde{K}$  таких неотрицательных функций  $x(t)$ , что

$$\min x(t) \geq \frac{m}{M} \max x(t) = \frac{m}{M} \|x(t)\|.$$

На конусе  $\tilde{K}$  оператор  $A$  является  $u_0$ -выпуклым оператором (доказательство проводится теми же рассуждениями, при помощи которых в предыдущем пункте были найдены условия  $u_0$ -вогнутости оператора Урысона).

Производная Фреше  $A'(\theta)$  оператора (7.51) определится равенством

$$A'(\theta) h(t) = \int_0^1 k(t, s) h(s) ds,$$

и в силу (7.50) спектр оператора  $A'(\theta)$  лежит в круге радиуса  $M$ . Будем считать, что

$$M < 1. \quad (7.52)$$

В дальнейшем нам удобно будет функцию  $f(u)$  записывать в виде

$$f(u) = u[1 + \varphi(u)] \quad (u \geq 0).$$

Будем предполагать, что  $\varphi(u)$  монотонна и  $\varphi(u) \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow \infty$ . Тогда для функций  $x(t) \in \tilde{K}$  будет выполнено неравенство

$$Ax(t) \geq m \int_0^1 x(s) \{1 + \varphi[x(s)]\} ds \geq \frac{m^2}{M} \|x\| \varphi\left(\frac{m}{M} \|x\|\right),$$

откуда вытекает, что для функций  $x(t) \in \tilde{K}$  с большой нормой выполнено соотношение  $Ax \leq x$ . Из теоремы о неподвижных точках операторов, растягивающих конус, вытекает существование при условии (7.52) по крайней мере одного решения уравнения (7.49).

Допустим, что уравнение (7.49) имеет два положительных решения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Из принципа единственности для выпуклых операторов вытекает, что обе разности  $x_1(t) - x_2(t)$  и  $x_2(t) - x_1(t)$  не являются строго положительными

функциями. Без ограничения общности можно считать, что разность

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

обладает следующим свойством: найдутся такие  $t_0$  и  $t_1$ , что

$$y(t_0) = \max_{t \in \mathbb{Q}} y(t) = \|y(t)\|, \quad y(t_1) \leq 0. \quad (7.53)$$

Для каждой функции  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) очевидны оценки

$$\|x_i(t)\| = \max_{t \in \mathbb{Q}} \int_{\mathbb{Q}} k(t, s) f[x_i(s)] ds \leq M \|x_i\| [1 + \varphi(\|x_i\|)]$$

$$\begin{aligned} \min_{t \in \mathbb{Q}} x_i(t) &= \min_{t \in \mathbb{Q}} \int_{\mathbb{Q}} k(t, s) f[x_i(s)] ds \geq \\ &\geq m \min_{t \in \mathbb{Q}} |x_i(t)| \{1 + \varphi[\min_{t \in \mathbb{Q}} x_i(t)]\} \geq \\ &\geq \min_{t \in \mathbb{Q}} x_i(t) m \left[1 + \varphi\left(\frac{m}{M} \|x_i\|\right)\right], \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\varphi^{-1}\left(\frac{1}{M} - 1\right) \leq \|x_1\|, \quad \|x_2\| \leq \frac{M}{m} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{m} - 1\right), \quad (7.54)$$

где через  $\varphi^{-1}(u)$  обозначена функция, обратная к  $\varphi(u)$ . Из равенств

$$x_1(t) = \int_{\mathbb{Q}} k(t, s) f[x_1(s)] ds$$

и

$$x_2(t) = \int_{\mathbb{Q}} k(t, s) f[x_2(s)] ds$$

вытекает, что

$$y(t) = \int_{\mathbb{Q}} k(t, s) f'[x(s)] y(s) ds, \quad (7.55)$$

где функция  $\tilde{x}(s)$  принимает значения, промежуточные между значениями  $x_1(s)$  и  $x_2(s)$ . В силу неравенства (7.54) (и так как  $x_i(t) \in \tilde{K}$ ,  $i = 1, 2$ ) функция  $\tilde{x}(s)$  удовлетворяет неравенствам

$$\frac{m}{M} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{M} - 1\right) \leq \tilde{x}(s) \leq \frac{M}{m} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{m} - 1\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a_1 = m f' \left[ \frac{m}{M} \varphi^{-1} \left( \frac{1}{M} - 1 \right) \right] &\leq k(t, s) f' [\tilde{x}(s)] \leq \\ &\leq M f' \left[ \frac{M}{m} \varphi^{-1} \left( \frac{1}{m} - 1 \right) \right] = a_2 \quad (t, s \in \Omega). \end{aligned}$$

Перепишем равенство (7.55) в виде

$$\begin{aligned} y(t) - \frac{a_1 + a_2}{2} \int_{\Omega} y(s) ds = \\ = \int_{\Omega} \left[ k(t, s) f' [\tilde{x}(s)] - \frac{a_1 + a_2}{2} \right] y(s) ds. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Из (7.53) вытекает, что

$$\|y(t) - b\| \geq \frac{1}{2} \|y(t)\|$$

при любой постоянной  $b$ . В частности,

$$\left\| y(t) - \frac{a_1 + a_2}{2} \int_{\Omega} y(s) ds \right\| \geq \frac{1}{2} \|y(t)\|.$$

Следовательно, из (7.56) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y(t)\| &\leq \sup_{t, s \in \Omega} \left| k(t, s) f' [\tilde{x}(s)] - \frac{a_1 + a_2}{2} \right| \|y\| \leq \\ &\leq \frac{a_2 - a_1}{2} \|y(t)\|, \end{aligned}$$

то есть

$$M f' \left[ \frac{M}{m} \varphi^{-1} \left( \frac{1}{m} - 1 \right) \right] - m f' \left[ \frac{m}{M} \varphi^{-1} \left( \frac{1}{M} - 1 \right) \right] \geq 1.$$

Если последнее неравенство не имеет места, то уравнение (7.49) имеет единственное положительное решение. Нами доказана

**Теорема 7.8.** *Уравнение (7.49) имеет единственное положительное решение, если*

$$M f' \left[ \frac{M}{m} \varphi^{-1} \left( \frac{1}{m} - 1 \right) \right] - m f' \left[ \frac{m}{M} \varphi^{-1} \left( \frac{1}{M} - 1 \right) \right] < 1. \quad (7.57)$$

Заметим, что условие (7.57) очевидным образом выполняется, если  $m$  достаточно близко к  $M$ , так как при  $m \rightarrow M$  левая часть в неравенстве стремится к нулю.



Условие (7.57) принимает более обозримый вид для частных классов функций. Пусть, например,  $f(x) = x(1 + \alpha x^r)$ . Тогда

$$\varphi(x) = \alpha x^r, \quad \varphi^{-1}(u) = \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{\frac{1}{r}}, \quad f'(x) = 1 + \alpha(r+1)x^r.$$

Условие (7.57) записывается в форме

$$\left(\frac{M^{r+1}}{m^{r+1}} + 1\right)(1-m) < 1 + \left(\frac{m^{r+1}}{M^{r+1}} + 1\right)(1-M). \quad (7.58)$$

Для допустимых значений  $\{m, M\}$  в плоскости  $\{m, M\}$  получаем область, заштрихованную на рис. 4. Без существенных изменений проведенные рассуждения обобщаются на случай, когда ядро  $k(t, s)$  удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_0 u(t) \leq k(t, s) \leq \beta_0 u(t),$$

где  $\alpha_0, \beta_0 > 0$ , а  $u(t)$  — некоторая неотрицательная функция.

**12. Замечания.** За недостатком места и чтобы избежать громоздких формулировок, мы не излагали приложения к системам интегральных уравнений. Эти при-

ложения могут быть получены по той же схеме, которая применялась выше при рассмотрении одного уравнения, но при этом интегральные операторы приходится рассматривать в пространствах вектор-функций.

Ряд следствий для интегральных уравнений, которые не требуют специальных построений, нами полностью опущен. Например, теорема 6.9 о точках бифуркации без всяких изменений относится к дифференцируемым интегральным операторам. В условиях п. 10 положительное решение уравнения Урысона может быть получено как равномерный предел последовательных приближений

$$x_n(t) = \int_a^b k[t, s, x_{n-1}(s)] ds \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отметим еще, что некоторые частные классы интегральных операторов рассматриваются в следующих параграфах.

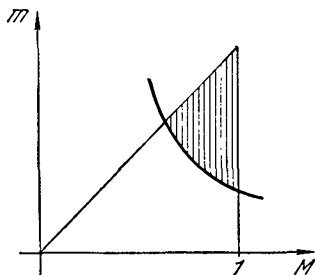


Рис. 4.

## § 2. Первая краевая задача для эллиптических уравнений второго порядка с нелинейностями

**1. Эллиптический оператор.** Пусть  $\Omega$  — ограниченная открытая область  $N$ -мерного пространства. Граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  предполагается достаточно гладкой.

Рассматривается дифференциальное выражение

$$Lu(t) = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t_1, \dots, t_N) \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{i=1}^N a_i(t_1, \dots, t_N) \frac{\partial u}{\partial t_i} + a(t_1, \dots, t_N) u, \quad (7.59)$$

где  $t = \{t_1, \dots, t_N\} \in \bar{\Omega}$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ . В дальнейшем предполагается, что

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t) \xi_i \xi_j \geq \gamma \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \quad (\gamma > 0) \quad (7.60)$$

при любых  $\xi_1, \dots, \xi_N$ , а функция  $a(t_1, \dots, t_N)$  неотрицательна. Для простоты будем считать, что коэффициенты дифференциального выражения (7.59) достаточно гладкие (достаточно предполагать, что коэффициенты  $a_{ij}(t_1, \dots, t_N)$  имеют первые производные и что эти первые производные, а также функции  $a_i(t_1, \dots, t_N)$  и функции  $a(t_1, \dots, t_N)$  удовлетворяют в замкнутой области  $\bar{\Omega}$  некоторому условию Гёльдера).

*Первой краевой задачей* называют задачу об отыскании решения дифференциального уравнения

$$Lu(t) = v(t), \quad (7.61)$$

удовлетворяющего нулевому граничному условию

$$u(t)_{t \in \Gamma} = 0. \quad (7.62)$$

Под регулярным решением первой краевой задачи понимают дважды непрерывно дифференцируемую в  $\Omega$  и непрерывную на  $\bar{\Omega}$  функцию  $u(t)$ , удовлетворяющую в  $\Omega$

уравнению (7.61) и обращающуюся в нуль на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ .

Если функция  $v(t)$  достаточно гладкая, то, как известно, регулярное решение существует и может быть представлено в виде

$$u(t) = Av(t) = \int_{\Omega} G(t, s) v(s) ds, \quad (7.63)$$

где ядро  $G(t, s)$  называется *функцией Грина первой краевой задачи*.

Функция Грина  $G(t, s)$  непрерывна по совокупности переменных при  $t \in \bar{\Omega}$ ,  $s \in \Omega$  и  $s \neq t$ . При  $N > 2$  имеет место оценка

$$0 \leq G(t, s) \leq \frac{k_0}{|t - s|^{N-2}}, \quad (7.64)$$

а при  $N = 2$

$$0 \leq G(t, s) \leq k_0 |\ln |t - s||, \quad (7.65)$$

где через  $|t - s|$  обозначено расстояние между точками  $t$  и  $s$ .

Из оценок (7.64) и (7.65) и из теорем С. Л. Соболева об операторах типа потенциала вытекает, что оператор (7.63) действует из каждого  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ), где

$$p > \frac{N}{2}, \quad (7.66)$$

в пространсто  $C$  непрерывных на  $\bar{\Omega}$  функций и является вполне непрерывным оператором.

Если функция  $v(t)$  не обладает свойствами достаточной гладкости, то первая краевая задача может не иметь регулярных решений. В этом случае расширяют понятие решения краевой задачи. Один из наиболее естественных способов такого расширения заключается в том, что решение определяется формулой (7.63). Из проведенных выше рассуждений тогда вытекает, что решение первой краевой задачи существует при любой функции  $v(t) \in L_p$ .

Из результатов А. И. Кошелева [1] вытекает, что решения первой краевой задачи непрерывно дифференцируемы при  $v(t) \in L_p$ , если  $p > N$ .

В частности, решения  $Av(t)$  непрерывно дифференцируемы при непрерывных  $v(t)$ .

Из результатов Кошелева вытекает и более сильное утверждение. Операторы

$$B_t v(t) = \frac{\partial}{\partial t_t} A v(t) \quad (t = 1, \dots, N) \quad (7.67)$$

являются вполне непрерывными операторами, действующими из пространств  $L_p$ , где  $p > N$ , в пространство  $C$  непрерывных на  $\bar{\Omega}$  функций. В частности, операторы (7.67) вполне непрерывны в  $C$ .

**2. Интегральное неравенство для функции Грина.** Как известно, функция Грина первой краевой задачи неотрицательна (это вытекает из принципа максимума; см. Миранда [1]). Поэтому оператор (7.63) оставляет инвариантным конус неотрицательных функций.

Из неотрицательности функции Грина вытекает, что

$$\int_{\Omega_1} G(t, s) ds \leq \int_{\Omega_2} G(t, s) ds \quad (t \in \Omega),$$

если  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ . Оказывается, что может быть установлено и противоположное в определенном смысле неравенство.

**Лемма 7.2.** Пусть  $\Omega_0$  — некоторая замкнутая подобласть области  $\Omega$ . Тогда найдется такое  $\varepsilon = \varepsilon(\Omega_0) > 0$ , что

$$\varepsilon \int_{\Omega} G(t, s) ds \leq \int_{\Omega_0} G(t, s) ds \quad (t \in \bar{\Omega}). \quad (7.68)$$

**Доказательство.** Обозначим через  $\varphi_0(t)$  ( $t \in \bar{\Omega}$ ) функцию, тождественно равную 1, а через  $\varphi_1(t)$  — непрерывно дифференцируемую функцию, равную нулю на  $\bar{\Omega} \setminus \Omega_0$ , равную 1 на некоторой области  $\Omega_1 \subset \Omega_0$ , а в остальных точках принимающую значение из  $[0, 1]$ .

Функции  $A\varphi_0(t)$  и  $A\varphi_1(t)$  будут положительны при  $t \in \Omega$  и равны нулю при  $t \in \Gamma$ . Они являются регулярными непрерывно дифференцируемыми решениями задачи (7.61) — (7.62) при соответственно  $v(t) = \varphi_0(t)$  и  $v(t) = \varphi_1(t)$ .

Из оценок Жиро — Олейник (см. например, Миранда [1]) вытекает, что нормальные производные функции  $A\varphi_0(t)$  и  $A\varphi_1(t)$  во всех точках  $t \in \Gamma$  положительны.

Поэтому найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что нормальная производная функций

$$\psi_\varepsilon(t) = A\varphi_1(t) - \varepsilon A\varphi_0(t)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  будет положительна во всех точках  $t \in \Gamma$ . При этих значениях  $\varepsilon$  функции  $\psi_\varepsilon(t)$  будут принимать неотрицательные значения в некоторой граничной полоске. Так как функция Грина  $G(t, s)$  ограничена снизу положительной постоянной, когда расстояния от точек  $t$  и  $s$  до  $\Gamma$  больше некоторого положительного числа, то функции  $A\varphi_0(t)$  и  $A\varphi_1(t)$  строго положительны во всех внутренних точках области  $\Omega$ . Поэтому функции  $\psi_\varepsilon(t)$  неотрицательны во всей замкнутой области  $\bar{\Omega}$  при достаточно малых  $\varepsilon$ , то есть

$$\varepsilon \int_{\Omega} G(t, s) ds \leq \int_{\Omega} G(t, s) \varphi_1(s) ds \quad (t \in \bar{\Omega}).$$

Но из неотрицательности функции Грина вытекает, что

$$\int_{\Omega} G(t, s) \varphi_1(s) ds \leq \int_{\Omega_0} G(t, s) ds \quad (t \in \bar{\Omega}).$$

Лемма доказана.

Введем обозначение

$$u_0(t) = \int_{\Omega} G(t, s) ds. \quad (7.69)$$

Из лемм 7.1 и 7.2 вытекает

**Теорема 7.9.** *Линейный интегральный оператор (7.63), ядром которого является функция Грина  $G(t, s)$  задачи (7.61)—(7.62),  $u_0$ -ограничен.*

Из этой теоремы и из результатов второй главы вытекают различные утверждения о неотрицательной собственной функции оператора (7.63) или, что то же, о собственных функциях задачи

$$\lambda Lu(t) = u(t), \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0. \quad (7.70)$$

Сформулируем часть этих утверждений.

**Теорема 7.10.** *Задача (7.70) имеет единственную нормированную неотрицательную собственную функцию, которой соответствует положительное собственное значение  $\lambda_0$ . Собственное значение  $\lambda_0$  простое. Остальные собственные значения по модулю строго меньше  $\lambda_0$ .*

**3. Неоднородное линейное уравнение.** Рассмотрим задачу

$$Lu(t) = au(t) + f(t), \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0. \quad (7.71)$$

Через  $\lambda_0$  будем обозначать собственное значение задачи (7.70), которому соответствует неотрицательная собственная функция.

Задача (7.71) эквивалентна уравнению

$$u(t) = \alpha A u(t) + f_1(t), \quad (7.72)$$

где  $A$  — оператор (7.63),  $f_1(t) = A f(t)$ .

Пусть  $f(t)$  неотрицательна и не равна тождественно нулю, тогда функция  $f_1(t)$  также неотрицательна и не равна тождественно нулю. Из теорем 7.9 и 2.16 вытекает тогда, что задача (7.71) имеет единственное неотрицательное решение, если  $\alpha \lambda_0 < 1$ ; задача (7.71) не имеет неотрицательных решений, если  $\alpha \lambda_0 \geq 1$ .

**4. Существование неотрицательного решения.** Перейдем к изучению нелинейного уравнения

$$Lu(t) = f\left(t_1, \dots, t_N, u, \frac{\partial u}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_N}\right) \quad (7.73)$$

с нулевым граничным условием (7.62). Будем предполагать, что функция

$$f(t, u, v) \equiv f(t_1, \dots, t_N, u, v_1, \dots, v_N)$$

непрерывна по совокупности переменных  $t = \{t_1, \dots, t_N\}$ ,  $u$  и  $v = \{v_1, \dots, v_N\}$  в области

$$\tilde{\Omega} : t \in \bar{\Omega}, \quad u \geq 0, \quad -\infty < v_1, \dots, v_N < \infty$$

и принимает в этой области неотрицательные значения.

Нас будет интересовать вопрос о существовании неотрицательных решений задачи (7.73)—(7.62).

Естественно, что такие решения не всегда существуют. Пусть, например,

$$f(t, u, v) \geq \alpha u \quad (|t, u, v| \in \tilde{\Omega}) \quad (7.74)$$

и

$$\alpha \lambda_0 \geq 1, \quad (7.75)$$

где  $\lambda_0$  — наибольшее собственное значение задачи (7.70). Допустим, что задача (7.73)—(7.62) имеет при этом неотрицательное решение  $u^*(t)$ . Из рассуждений предыдущего пункта вытекает тогда, что функция  $u^*(t)$  удовлетворяет тождеству

$$f\left[t_1, \dots, t_N, u^*(t), \frac{\partial u^*(t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u^*(t)}{\partial t_N}\right] \equiv 0.$$

Следовательно,  $u^*(t)$  является решением задачи

$$Lu = 0, \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0.$$

Значит,  $u^*(t) \equiv 0$ . Итак, если выполнены условия (7.74) и (7.75), то задача (7.73)—(7.62) не имеет неотрицательных, отличных от тождественного нуля решений.

Введем в рассмотрение оператор

$$Fw(t) = f[t_1, \dots, t_N, Aw(t), B_1w(t), \dots, B_Nw(t)], \quad (7.76)$$

где  $A, B_1, \dots, B_N$  — соответственно операторы (7.63) и (7.67). Как было выяснено в п. 1, операторы  $A, B_1, \dots, B_N$  вполне непрерывны в пространстве  $C$ . Поэтому и оператор  $F$  вполне непрерывен в  $C$ .

Из неотрицательности функции  $f(t, u, v)$  в области  $\tilde{\Omega}$  вытекает, что оператор  $F$  преобразует в себя конус  $K$  неотрицательных непрерывных функций. Этот факт позволяет применить разработанные в предыдущих главах методы к исследованию неотрицательных решений уравнений

$$Fw(t) = w(t) \quad (7.77)$$

и

$$Fw(t) = \lambda w(t), \quad (7.78)$$

где  $\lambda > 0$ .

Нетрудно видеть, что уравнение (7.77) эквивалентно краевой задаче (7.73)—(7.62). Действительно, если  $u^*(t)$  — решение этой краевой задачи, то функция

$$w^*(t) = Lu^*(t) \quad (7.79)$$

будет решением уравнения

$$Fw(t) = f[t_1, \dots, t_N, Aw(t), B_1w(t), \dots, B_Nw(t)]$$

или, что то же, уравнения (7.77). Наоборот, если  $w^*(t)$  — решение уравнения (7.77), то функция

$$u^*(t) = Aw^*(t) \quad (7.80)$$

будет решением задачи (7.73)—(7.62).

Аналогично формулы (7.79) и (7.80) устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями урав-

нения (7.78) и решениями краевой задачи:

$$\lambda Lu = f\left(t_1, \dots, t_N, u, \frac{\partial u}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_N}\right), \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0. \quad (7.81)$$

Следует еще отметить, что неотрицательным решением  $w^*(t)$  уравнения (7.77) или (7.78) отвечает неотрицательное решение  $u^*(t)$  соответствующей краевой задачи — это вытекает из положительности оператора  $A$ . Наоборот, если  $u^*(t)$  — неотрицательное решение краевой задачи, то функция  $f\left[t_1, \dots, t_N, u^*(t), \frac{\partial u^*(t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u^*(t)}{\partial t_N}\right]$  неотрицательна и поэтому неотрицательно решение (7.79) соответствующего уравнения (7.77) или (7.78).

Допустим снова, что выполнено условие (7.74), в котором  $\alpha$  — некоторое положительное число. Тогда для каждой неотрицательной и непрерывной на  $\bar{\Omega}$  функции  $x(t)$  будут выполнены неравенства

$$Fx(t) \geq \alpha Ax(t) \quad (t \in \bar{\Omega}).$$

Эти неравенства означают, что  $u_0$ -положительный (см. 2) линейный оператор  $\alpha A$  является монотонной минорантой оператора  $F$ . Из теоремы 5.7 вытекает, что уравнение (7.78) имеет континуум не равных тождественно нулю неотрицательных решений  $w^*(t)$ , соответствующих некоторым положительным значениям  $\lambda$ . Из приведенных в начале пункта рассуждений вытекает, что эти значения удовлетворяют неравенству

$$\lambda > \alpha \lambda_0.$$

Переходя от уравнения (7.78) к краевой задаче (7.81), приходим к выводу, что условие (7.74) достаточно для того, чтобы нелинейная краевая задача (7.81) имела континуум различных неотрицательных решений, каждое из которых соответствует некоторому положительному  $\lambda$ .

Вернемся к изучению нелинейного уравнения (7.73).

Допустим вначале, что функция  $f(t, u, v)$  удовлетворяет условию

$$0 \leq f(t, u, v) \leq a + bu \quad (\{t, u, v\} \in \tilde{\Omega}), \quad (7.82)$$



где  $a, b \geq 0$ . Тогда оператор (7.76) удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq Fw(t) \leq a + bAw(t) \quad (t \in \bar{Q}, \quad w(t) \geq 0). \quad (7.83)$$

Если дополнительно выполнено условие

$$b\lambda_0 < 1, \quad (7.84)$$

где  $\lambda_0$  — наибольшее собственное значение оператора  $A$ , то уравнение  $w = Fw$  имеет по крайней мере одно решение в конусе  $K$  неотрицательных функций. Это утверждение является непосредственным следствием теоремы 4.10. Нами доказана

**Теорема 7.11.** *Краевая задача (7.73) — (7.62) имеет по крайней мере одно неотрицательное решение, если выполнены условия (7.82) и (7.84).*

**5. Существование неотрицательного и не равного тождественно нулю решения.** Если

$$f(t_1, \dots, t_N, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (\{t_1, \dots, t_N\} \in \bar{Q}), \quad (7.85)$$

то краевая задача (7.73) — (7.62) имеет тривиальное нулевое решение. Укажем некоторые простые условия, при которых эта задача имеет нетривиальные неотрицательные решения.

Будем предполагать, что  $f(t_1, \dots, t_N, u, v_1, \dots, v_N)$  непрерывно дифференцируема по переменным  $u, v_1, \dots, v_N$  в окрестности нулевой точки. Из неотрицательности функции  $f(t, u, v)$  в области  $\bar{Q}$  вытекает, что

$$\begin{aligned} f'_{v_1}(t_1, \dots, t_N, 0, 0, \dots, 0) &\equiv \dots \\ \dots &\equiv f'_{v_N}(t_1, \dots, t_N, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0. \end{aligned}$$

Функция

$$g(t) = g(t_1, \dots, t_N) = f'_u(t_1, \dots, t_N, 0, 0, \dots, 0)$$

неотрицательна. Оператор (7.76) в точке  $\theta$  будет иметь сильную производную Фреше, причем

$$F'(\theta)x(t) = g(t)Ax(t). \quad (7.86)$$

Доказательство очевидно.

Предположим, что функция  $g(t)$  отлична от тождественного нуля. Пусть  $u_0(t)$  — функция (7.69).

Лемма 7.3. *Оператор (7.86)  $v_0$ -положителен, где  $v_0(t) = g(t) u_0(t)$ .*

Доказательство. При доказательстве леммы 7.1 было показано, что из неравенств (7.68) вытекает справедливость для каждой неотрицательной и отличной от тождественного нуля функции  $x(t)$  неравенств

$$\alpha u_0(t) \leq Ax(t) \leq \beta u_0(t) \quad (t \in \bar{Q}),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  положительны. Тогда выполнены неравенства

$$\alpha v_0(t) \leq F'(\theta) x(t) \leq \beta v_0(t) \quad (t \in \bar{Q}).$$

Лемма доказана.

В силу леммы 7.3 линейный оператор  $F'(\theta)$  имеет единственную нормированную собственную неотрицательную функцию, которой соответствует положительное собственное значение  $\Lambda(\theta)$ .

Теорема 7.12. *Пусть выполнены условия (7.82) и (7.84). Пусть  $\Lambda(\theta) > 1$ . Тогда краевая задача (7.73) — (7.62) имеет кроме тривиального нулевого еще по крайней мере одно неотрицательное решение.*

Для доказательства достаточно из теорем об операторах, сжимающих конус, сделать вывод о существовании не тривиального неотрицательного решения у уравнения (7.77), а затем построить искомое решение по формуле (7.80).

Лемма 7.4. *Пусть функция  $f(t, u, v)$  удовлетворяет условию (7.82) подлинейности и пусть*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{t \in \bar{Q}, -\infty < v_l < \infty} \left| \frac{1}{u} f(t, u, v) - h(t) \right| = 0, \quad (7.87)$$

где  $h(t) = h(t_1, \dots, t_N)$  — некоторая непрерывная неотрицательная функция.

Тогда оператор  $F$  имеет сильную асимптотическую производную  $F'(\infty)$  по конусу  $K$ , причем

$$F'(\infty) x(t) = h(t) Ax(t). \quad (7.88)$$

Доказательство по существу очевидно. В предположении противного найдется такая последовательность неотрицательных функций  $x_n(t)$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n(t)\| = \infty$$

и

$$\|Fx_n(t) - h(t)Ax_n(t)\| \geq \beta_0 \|x_n(t)\| \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7.89)$$

где  $\beta_0$  — некоторое положительное число.

Из (7.87) вытекает существование такого  $\gamma_0 > 0$ , что при  $u \geq \gamma_0$  выполняется неравенство

$$|f(t, u, v) - h(t)u| < \frac{1}{2} \beta_0 u. \quad (7.90)$$

Определим функции  $z_n(t)$  равенствами

$$z_n(t) = \begin{cases} Ax_n(t), & \text{если } Ax_n(t) \geq \gamma_0, \\ \gamma_0, & \text{если } Ax_n(t) < \gamma_0. \end{cases}$$

Из условий (7.90) и (7.82) вытекает, что

$$\begin{aligned} \max_{t \in \overline{Q}} |Fx_n(t) - h(t)Ax_n(t)| &\leq \\ &\leq \max_{t \in \overline{Q}} |f[t, z_n(t), B_1x_n(t), \dots, B_Nx_n(t)] - h(t)z_n(t)| + \\ &+ \max_{t \in \overline{Q}, 0 \leq u \leq \gamma_0} |f[t, u, B, x_n(t), \dots, B_Nx_n(t)]| + \gamma_0 \max_{t \in \overline{Q}} h(t) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \beta_0 \|z_n(t)\| + a + b\gamma_0 + \gamma_0 \|h(t)\|, \end{aligned}$$

то есть

$$\|Fx_n(t) - h(t)Ax_n(t)\| \leq M + \frac{1}{2} \beta_0 \|x_n(t)\|,$$

что противоречит (7.89).

Лемма доказана.

Аналогично тому, как была доказана лемма 7.3, можно показать, что оператор (7.88)  $v_1$ -ограничен, где  $v_1(t) = = h(t)u_0(t)$ . Поэтому оператор (7.88) имеет единственную неотрицательную собственную функцию, которой соответствует собственное значение  $\Lambda(\infty)$ .

Выше через  $\Lambda(0)$  было обозначено наибольшее собственное значение линейного оператора (7.86) (для случая, когда функция  $g(t)$  не равна тождественно нулю). В случае, когда

$$f'_n(t_1, \dots, t_N, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0,$$

оператор  $F$  имеет в точке  $\theta$  сильную производную Фреше, равную нулю; в этом случае будем считать, что  $\Lambda(0) = 0$ .

Теорема 7.13. Пусть

$$\Lambda(\theta) < 1 < \Lambda(\infty).$$

Тогда нелинейная краевая задача (7.73) — (7.62) имеет кроме тривиального нулевого еще по крайней мере одно неотрицательное решение.

Доказательство. Для доказательства достаточно из теорем об операторах, растягивающих конус, сделать вывод о существовании нетривиального неотрицательного решения  $w^*(t)$  у уравнения (7.77), а затем построить решение краевой задачи по формуле (7.80).

За недостатком места мы ограничиваемся приведенными примерами.

**6. Единственность положительного решения.** Рассмотрим здесь более простую задачу

$$Lu = f(t, u), \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0. \quad (7.91)$$

Эту задачу заменим эквивалентным интегральным уравнением

$$u(t) = \int_{\Omega} G(t, s) f[s, u(s)] ds, \quad (7.92)$$

где  $G(t, s)$  — функция Грина дифференциального оператора  $L$  при нулевых граничных условиях.

Будем предполагать, что функция  $f(t, u)$  неотрицательна и по переменной  $u$  вогнута в следующем обобщенном смысле: при  $u > 0$  и любом  $\tau \in (0, 1)$

$$f(t, \tau, u) - \tau f(t, u) > 0 \quad (t \in \Omega). \quad (7.93)$$

Лемма 7.5\*). Если выполнено условие (7.93), то оператор

$$Fx(t) = \int_{\Omega} G(t, s) f([s, x(s)]) ds \quad (7.94)$$

$u_0$ -вогнут, где  $u_0(t)$  — функция (7.69).

---

\*) Утверждение леммы относится к произвольным нелинейным интегральным операторам вида (7.92), в которых ядро  $G(t, s)$  определяет интегральный линейный оператор  $A$ , обладающий тем свойством, что для каждой неотрицательной и не равной тождественно нулю функции  $x(t)$  выполняются неравенства,

$$\alpha u_0(t) \leq Ax(t) \leq \beta u_0(t),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  положительны, а  $u_0(t)$  — некоторая фиксированная функция.

**Доказательство.** Если  $u(t)$  неотрицательна, то и  $f[t, u(t)]$  неотрицательна, причем  $f[t, u(t)]$  положительна (в силу (7.93)) в тех точках, в которых положительна  $u(t)$ . Из теоремы 7.9 вытекает, что выполнено условие (6.1).

Если  $u(t)$  неотрицательна и не равна тождественно нулю, то при любом  $\tau_0 \in (0, 1)$  в тех точках  $t \in \bar{Q}$ , в которых  $u(t) > 0$ , выполняется неравенство

$$f[t, \tau_0 u(t)] - \tau_0 f[t, u(t)] > 0. \quad (7.95)$$

Из (7.95) и снова из теоремы 7.9 вытекает, что

$$\int_{\bar{Q}} G(t, s) \{f[s, \tau_0 u(s)] - \tau_0 f[s, u(s)]\} ds \geq \alpha u_0(t) \quad (t \in \bar{Q}),$$

где  $\alpha > 0$ . Но

$$\int_{\bar{Q}} G(t, s) f[s, u(s)] ds \leq \beta_1 u_0(t) \quad (t \in \bar{Q}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\bar{Q}} G(t, s) f[s, \tau_0 u(s)] ds &\geq \\ &\geq \tau_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\beta_1 \tau_0}\right) \int_{\bar{Q}} G(t, s) f[s, u(s)] ds \quad (t \in \bar{Q}). \end{aligned}$$

Последнее неравенство совпадает с условием (6.5)  $u_0$ -вогнутости.

Лемма доказана.

Из леммы 7.5 и теоремы 6.3 вытекает, что для единственности нетривиального неотрицательного решения уравнения (7.92) достаточно, чтобы оператор (7.94) был монотонен. Для монотонности оператора (7.94) достаточно неубывания по переменной  $u$  функции  $f(t, u)$ .

Уравнение (7.92) эквивалентно задаче (7.91). Поэтому нами доказана

**Теорема 7.14.** Если  $f(t, u)$  не убывает по переменной  $u$ , а  $u$  удовлетворяет условию (7.93), то краевая задача (7.91) имеет не более одного неотрицательного и не равного тождественно нулю решения.

Это утверждение можно дополнить теоремой о сходимости последовательных приближений к единственному неотрицательному решению.

**Теорема 7.15.** Пусть  $f(t, u)$  не убывает по переменной  $u$  и удовлетворяет условию (7.93).

Тогда краевая задача

$$\lambda Lu = f(t, u), \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0 \quad (7.96)$$

имеет ненулевые неотрицательные решения при значениях  $\lambda$ , заполняющих некоторый интервал. Эти решения  $u(t; \lambda)$  монотонно и непрерывно зависят от  $\lambda$ .

Теорема 7.15 содержит следствия из части результатов, изложенных в гл. 6, § 2. Читатель без труда сформулирует следствия из других указанных там теорем.

**7. О квазилинейных уравнениях.** Общая теория положительных решений нелинейных операторных уравнений может быть полезна и при исследовании квазилинейных уравнений, например, вида

$$\begin{aligned} L(u)u &\equiv - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{i=1}^N a_i(t, u) \frac{\partial u}{\partial t_i} + a(t, u)u = \\ &= f\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_N}\right). \end{aligned} \quad (7.97)$$

Предположим снова, что рассматривается первая краевая задача, то есть ищутся решения, удовлетворяющие нулевому граничному условию (7.62).

Относительно коэффициентов будем предполагать, что они достаточно гладкие и удовлетворяют таким условиям, при которых задача

$$L(u)u = f(t), \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0 \quad (7.98)$$

имеет единственное решение при любой функции  $f(t)$  из некоторого функционального пространства (например, при любой непрерывной  $f(t)$ ). Это решение  $u(t)$  определяет нелинейный оператор  $L^{-1}$  равенством  $L^{-1}f = u$ .

Допустим, что коэффициенты дифференциального оператора  $L(u)$  удовлетворяют условию типа (7.60) (при любом неотрицательном  $u$ ) и условию  $a(t, u) \geq 0$ . Тогда оператор  $L^{-1}$  будет оставлять инвариантным конус неотрицательных

функций. Действительно, если  $f(t) \geq 0$  и  $u^*(t)$  — решение задачи (7.98), то  $u^*(t)$  будет одновременно решением задачи

$$L(u^*)u = f(t), \quad u(t)|_{t \in I} = 0, \quad (7.99)$$

а решение последней задачи, как было выяснено в п. 1, неотрицательно.

Краевую задачу (7.96) — (7.62) можно теперь свести к уравнению с оператором, оставляющим инвариантным конус, при помощи замены  $L(u)u = w$ .

Применения описанной схемы требуют преодоления ряда трудностей. Здесь пока получены лишь первые результаты.

### § 3. Существование положительных периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Общая теория, развитая в настоящей книге, может быть применена в двух планах к исследованию задачи о периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во-первых, можно пытаться в фазовом пространстве находить конусы, которые инвариантны по отношению к сдвигам по траекториям системы. Если, далее, удастся показать, что при сдвиге, соответствующем изменению времени на величину периода правых частей, есть неподвижная точка, то отсюда можно сделать вывод о наличии периодических решений.

Второй путь основан на переходе от системы дифференциальных уравнений к интегральным или интегро-функциональным уравнениям, решения которых соответствуют периодическим решениям системы дифференциальных уравнений. Система интегральных или интегро-функциональных уравнений рассматривается как операторное уравнение  $\varphi = A\varphi$  в некотором банаховом пространстве  $E$ . Если удастся найти в  $E$  инвариантный для  $A$  конус  $K$ , то можно пытаться при помощи общих принципов доказывать наличие неподвижных точек у оператора  $A$ , исследовать зависимость неподвижных точек от различных параметров и т. д. Условия, при которых есть неподвижные точки у оператора  $A$ , являются





(следует иметь в виду, что это допущение является существенным ограничением). По каждой точке  $x_0 \in E^n$  построим решение  $x = x(t, x_0)$  системы (7.101), удовлетворяющее начальному условию

$$x(0, x_0) = x_0. \quad (7.104)$$

Определим оператор  $A$  равенством

$$Ax_0 = x(\omega, x_0). \quad (7.105)$$

Если окажется, что оператор  $A$  имеет неподвижную точку  $x^*$ , то это означает, что у системы (7.101) есть решение  $x^*(t)$ , удовлетворяющее условию  $x^*(\omega) = x^*(0) = x^*$ . Из периодичности по  $t$  правых частей системы вытекает, что  $x^*(t)$  можно по периодичности продолжить на все значения  $t$  и это продолжение будет решением системы (7.101). Иначе говоря, из существования неподвижной точки у оператора (7.105) вытекает существование периодического решения у системы (7.101).

В ряде случаев оператор (7.105) удобно рассматривать не на всем пространстве  $E^n$ , а на некотором множестве  $T \subset E$ . Ниже роль этого множества  $T$  будет играть конус  $K$  векторов с неотрицательными координатами.

Если нельзя гарантировать продолжимость всех решений системы (7.101) на промежутки  $[0, \omega]$ , то иногда удастся построить новую систему

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), \quad (7.106)$$

решения которой продолжимы на  $[0, \omega]$ , причем все периодические решения новой системы являются одновременно периодическими решениями системы (7.101). Для доказательства существования периодических решений у системы (7.106) уже можно применить изложенный выше принцип Пуанкаре.

**2. Существование неотрицательного периодического решения.** Потребуем дополнительно, чтобы каждая функция  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  удовлетворяла условию:

$$f_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0 \quad (x_j \geq 0 \text{ при } j \neq i). \quad (7.107)$$

Из этого условия вытекает, что при движении по траекториям системы (7.101) ни одна точка не может выйти из



Каждая траектория системы (7.101) не выходит из области  $T$ . Поэтому оператор (7.105) преобразует  $T$  в себя. Множество  $T$  ограничено, выпукло и замкнуто. Из принципа неподвижной точки Брауэра (обобщением которого является применявшийся выше принцип Шаудера) вытекает, что  $A$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку на  $T$ .

Таким образом, из условий (7.107) и (7.110) вытекает существование по крайней мере одного периодического решения системы (7.100), лежащего в конусе  $K$ . В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2). \quad (7.111)$$

Тогда условия существования периодических решений имеют следующий вид:

*Теорема 7.16. Пусть правые части системы (7.100) периодичны по  $t$  с периодом  $\omega$ . Пусть выполнены условия (7.107). Пусть, наконец,*

$$\sum_{i=1}^n x_i f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad (7.112)$$

*если сумма  $x_1 + \dots + x_n$  ( $x_j \geq 0$ ) достаточно велика.*

*Тогда система (7.100) имеет по крайней мере одно неотрицательное периодическое решение*

$$x_i(t) \geq 0, \quad x_i(t + \omega) \equiv x_i(t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.113)$$

Рассуждения настоящего пункта без труда переносятся на случай более широких классов функций  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих условию (7.109).

Выбор различных функционалов приводит к различным условиям типа (7.112). В частности, условие (7.112) можно заменить неравенством

$$\sum_{i=1}^n x_i^\alpha f_i(t, x, \dots, x_n) \leq 0, \quad (7.114)$$

где  $\alpha$  — любое фиксированное число из промежутка  $(-1, \infty)$ .

**3. Постановка задачи о существовании положительного периодического решения.** В этом и следующих пунктах мы будем предполагать, что

$$f_i(t, 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.115)$$



При построении и исследовании решений системы (7.116) важную роль играет так называемый *матрицант*  $U(t, s)$ , определяемый равенством

$$U(t, s) = I + \int_s^t B(t_1) dt_1 + \int_s^t B(t_2) \int_s^{t_2} B(t_1) dt_1 dt_2 + \dots, \quad (7.118)$$

который является при фиксированных  $t$  и  $s$  линейным оператором, так как ряд (7.118) сходится по норме операторов равномерно относительно  $t$  и  $s$  из любых конечных промежутков.

Решение линейного однородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = B(t) x, \quad (7.119)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(s) = x_0, \quad (7.120)$$

можно записать в виде

$$x(t) = U(t, s) x_0. \quad (7.121)$$

Решение неоднородного уравнения (7.117), удовлетворяющее начальному условию (7.120), записывается в виде

$$x(t) = U(t, s) x_0 + \int_s^t U(t, \tau) h(\tau) d\tau. \quad (7.122)$$

Обе последние формулы проверяются непосредственным дифференцированием, если учесть равенства

$$U(t, t) = I, \quad U(t, \tau) U(\tau, s) = U(t, s).$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты  $b_{ij}(t)$  системы (7.116) периодичны по  $t$  с периодом  $\omega$ . Для этого частного случая матрицу

$$U = U(\omega, 0)$$

называют *матрицей монодромии*.



Матрицантом этой системы является матрица  $e^{B(t-s)}$ ; матрица монодромии — это матрица  $e^{B\omega}$ . Собственные значения матрицы монодромии равны  $e^{\lambda\omega}$ , где  $\lambda$  — собственные значения матрицы  $B$ , то есть корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7.126)$$

Из теоремы 7.17 вытекает (впрочем, это легко получить и непосредственно), что уравнение (7.126) имеет по крайней мере один вещественный корень, если неотрицательны все недиагональные элементы матрицы  $B$ .

**5. Производная оператора  $A$ .** Предположим, что функции  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  удовлетворяют условиям

$$f_i(t, 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.127)$$

Будем считать, что существуют производные

$$b_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(t, 0, \dots, 0) \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

и, более того, что имеют место представления

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = b_{i1}(t)x_1 + \dots + b_{in}(t)x_n + \varphi_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (7.128)$$

где функции  $\varphi_i(t, x_1, \dots, x_n)$  содержат малые высших порядков:

$$|\varphi_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq \alpha(\|x\|) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7.129)$$

и неубывающая функция  $\alpha(\rho)$  удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\alpha(\rho)}{\rho} = 0. \quad (7.130)$$

Тогда система (7.101) может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x + \varphi(t, x), \quad (7.131)$$

где

$$\|\varphi(t, x)\| \leq n\alpha(\|x\|). \quad (7.132)$$

Покажем, что производная  $A'(\theta)$  оператора (7.105) определяется равенством

$$A'(\theta) x_0 = U x_0 = U(\omega, 0) x_0. \quad (7.133)$$

Уравнение (7.131) равносильно интегральному уравнению

$$x(t) = U(t, 0) x_0 + \int_0^t U(t, \tau) \varphi[\tau, x(\tau)] d\tau,$$

откуда вытекает оценка

$$\|x(t)\| \leq b_1 \|x_0\| + b_1 \omega \max_{0 \leq \tau \leq \omega} \|\varphi[\tau, x(\tau)]\| \quad (0 \leq t \leq \omega)$$

и в силу (7.132)

$$\max_{0 \leq t \leq \omega} \|x(t)\| \leq b_1 \|x_0\| + b_1 \omega n \alpha \left( \max_{0 \leq \tau \leq \omega} \|x(\tau)\| \right). \quad (7.134)$$

Из (7.130) и из непрерывной зависимости решений от начальных данных вытекает существование такого  $\delta_0$ , что при  $\|x_0\| < \delta_0$  выполняется неравенство

$$\alpha \left( \max_{0 \leq \tau \leq \omega} \|x(\tau)\| \right) \leq \frac{1}{2b_1 \omega n} \max_{0 \leq \tau \leq \omega} \|x(\tau)\|.$$

Значит, при  $\|x_0\| < \delta_0$  из (7.134) вытекает следующая оценка:

$$\max_{0 \leq t \leq \omega} \|x(t)\| \leq 2b_1 \|x_0\|. \quad (7.135)$$

Обозначим через  $y(t)$  решение однородной системы  $\frac{dy}{dt} = B(t)y$ . Оценим разность  $x(t) - y(t)$ , где решение  $x(t)$  удовлетворяет тому же начальному условию, которому удовлетворяет  $y(t)$ . Очевидно,

$$\frac{d[x(t) - y(t)]}{dt} = B(t)[x(t) - y(t)] + \varphi[t, x(t)],$$

откуда

$$x(t) - y(t) = \int_0^t U(t, \tau) \varphi[\tau, x(\tau)] d\tau$$

и в силу (7.135) при  $\|x_0\| < \delta_0$  выполняется неравенство

$$\|x(t) - y(t)\| \leq b_1 \omega n \alpha(2b_1 \|x_0\|) \quad (0 \leq t \leq \omega).$$



Из (7.130) вытекает тогда, что

$$\lim_{\|x_0\| \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq \omega} \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|x_0\|} \leq b_1 \omega n \lim_{\|x_0\| \rightarrow 0} \frac{\alpha(2b_1 \|x_0\|)}{\|x_0\|} = 0.$$

Формула (7.133) доказана.

**6. Существование положительного периодического решения.** В п. 3 было показано, что при условиях типа (7.1) можно гарантировать существование положительного периодического решения, если оператор  $A'(\theta)$  имеет в конусе единственный собственный вектор, которому соответствует собственное значение, большее чем 1.

Таким образом, нами доказана

**Теорема 7.18.** Пусть удовлетворяющие условиям (7.107) и (7.117) функции  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  допускают представление (7.128). Пусть выполнено условие (7.112). Пусть, наконец, наибольшее вещественное собственное значение матрицы монодромии линеаризованной системы  $\frac{dy}{dt} = B(t)y$  больше чем 1 и матрица монодромии в конусе неотрицательных векторов не имеет ненулевых неподвижных точек (не имеет положительных собственных векторов, которым отвечает собственное значение, равное 1).

Тогда система (7.100) имеет по крайней мере одно положительное периодическое решение  $x(t)$ :

$$x_i(t) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i(t) > 0, \quad x_i(t + \omega) \equiv x_i(t).$$

Заметим, что из условий (7.107) и (7.117) вытекает неотрицательность функций  $b_{ij}(t)$  при  $i \neq j$ . Поэтому матрица монодромии всегда имеет положительное вещественное собственное значение.

Если матрица  $B(t)$  не зависит от  $t$ , то достаточное условие существования положительного периодического решения (при выполнении условий (7.107), (7.117) и (7.112)) формулируется особенно просто — достаточно, чтобы уравнение (7.126) имело положительный корень и не имело нулевого корня.

Допустим теперь, что при неотрицательных  $x_j$  и при достаточно больших суммах  $x_1 + \dots + x_n$  выполнено



системы (7.137) будет одновременно периодическим решением основной системы (7.100). Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что в силу (7.136) на каждом решении

$$x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$$

системы (7.137), лежащем в области (7.138), функция

$$u(t) = \Phi[x_1(t), \dots, x_n(t)]$$

строго возрастает, так как ее производная положительна.

Правые части системы (7.137) удовлетворяют условию (7.136). Таким образом, общность результата не уменьшится, если мы дополнительно к условию (7.136) предположим, что все решения системы (7.100) определены на промежутке  $[0, \omega]$ .

Из условия (7.136) легко вывести следствие, что оператор  $A$ , определенный равенством (7.105), либо удовлетворяет при больших значениях  $B(x_1, \dots, x_n)$  условию

$$Ax_0 \leq x_0,$$

либо его можно переопределить таким образом, чтобы это условие выполнялось для переопределенного оператора. Из результатов гл. 4 вытекает тогда, что достаточным условием существования периодических решений у системы (7.100) является предположение о том, что спектр оператора  $A'(\theta)$  лежит в круге, радиус которого меньше 1. Как нам уже известно, оператор  $A'(\theta)$  есть оператор монодромии линеаризованной системы.

Выбирая в качестве  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  функцию (7.111), приходим к следующей теореме:

**Теорема 7.19.** Пусть удовлетворяющие условиям (7.107) и (7.117) функции  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  допускают представление (7.128). Пусть выполнено условие

$$\sum_{i=1}^n x_i f_i(t, x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad (7.139)$$

если сумма  $x_1 + \dots + x_n$  ( $x_j \geq 0$ ) достаточно велика. Пусть, наконец, все собственные значения матрицы монодромии линеаризованной системы  $\frac{dy}{dt} = B(t)y$  по модулю меньше 1.

Тогда система (7.100) имеет по крайней мере одно положительное периодическое решение  $x(t)$ :

$$x_i(t) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i(t) > 0, \quad x_i(t + \omega) \equiv x_i(t).$$

**7. Линеаризация на бесконечности.** Предположим, что функции  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  асимптотически линейны по конусу  $K$ . Это значит, что существуют такие функции  $c_{ij}(t)$ , что при неотрицательных  $x_1, \dots, x_n$  справедливы представления

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = c_{i1}(t)x_1 + \dots + c_{in}(t)x_n + \psi_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (7.140)$$

где

$$|\psi_i(t, x_1, \dots, x_n)| < \gamma(\|x\|), \quad (7.141)$$

причем неубывающая функция  $\gamma(\rho)$  удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\gamma(\rho)}{\rho} = 0. \quad (7.142)$$

Функции  $c_{ij}(t)$  в дальнейшем предполагаются непрерывными.

Если выполнено условие (7.140), то систему (7.101) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + \psi(t, x), \quad (7.143)$$

где

$$\|\psi(t, x)\| \leq n\gamma(\|x\|). \quad (7.144)$$

Отметим, что все решения системы (7.143), лежащие в конусе, будут определены при всех значениях  $t \geq 0$ .

Матрицант линейной системы

$$\frac{dy}{dt} = C(t)y \quad (7.145)$$

обозначим через  $V(t, s)$ . Тогда решения системы (7.143) будут удовлетворять интегральному уравнению

$$x(t) = V(t, 0)x_0 + \int_0^t V(t, \tau)\psi[\tau, x(\tau)]d\tau. \quad (7.146)$$

Нашей ближайшей целью является доказательство асимптотической линейности по конусу оператора  $A$ , определенного равенством (7.105), и установление равенства

$$A'(\infty)x_0 = Vx_0 = V(\omega, 0)x_0. \quad (7.147)$$

Пусть задано произвольное  $\varepsilon > 0$ . Из (7.144) и (7.142) вытекает существование такого числа  $M = M(\varepsilon)$ , что

$$\|\psi(t, x)\| \leq \varepsilon \|x\| + M(\varepsilon) \quad (x \in K). \quad (7.148)$$

Тогда из (7.146) вытекает неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq \omega} \|x(t)\| \leq b_2 \|x_0\| + b_2 \omega [\varepsilon \max_{0 \leq t \leq \omega} \|x(t)\| + M(\varepsilon)],$$

откуда

$$\max_{0 \leq t \leq \omega} \|x(t)\| \leq \frac{b_2 \|x_0\| + b_2 \omega M(\varepsilon)}{1 - b_2 \omega \varepsilon}, \quad (7.149)$$

где

$$b_2 = \max_{0 \leq t, s \leq \omega} \|V(t, s)\|.$$

Пусть  $y(t)$  — решение системы (7.145), удовлетворяющее тому же начальному условию, которому удовлетворяет решение  $x(t)$  системы (7.143). Очевидно,

$$\frac{d(x-y)}{dt} = C(t)(x-y) + \psi(t, x),$$

откуда

$$x(t) - y(t) = \int_0^t V(t, \tau) \psi(\tau, x(\tau)) d\tau$$

и в силу (7.148) и (7.149)

$$\|x(t) - y(t)\| \leq b_2 \omega \varepsilon \frac{b_2 \|x_0\| + b_2 \omega M(\varepsilon)}{1 - b_2 \omega \varepsilon}.$$

Из полученного неравенства вытекает, что

$$\lim_{x_0 \in K, \|x_0\| \rightarrow \infty} \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|x_0\|} \leq \frac{b_2^2 \omega \varepsilon}{1 - b_2 \omega \varepsilon}.$$

и так как  $\varepsilon$  произвольно, то

$$\lim_{x_0 \in K, \|x_0\| \rightarrow \infty} \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|x_0\|} = 0.$$

Полагая в последнем равенстве  $t = \omega$ , приходим к равенству (7.147).

**8. Существование положительных периодических решений у линейных на бесконечности систем.** Из результатов последнего пункта и из теоремы 4.7 вытекает, что система (7.100) имеет по крайней мере одно периодическое решение, если выполнено условие

$$f_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0 \quad (x_j \geq 0 \text{ при } j \neq i) \quad (7.107)$$

и если все собственные значения матрицы монодромии системы (7.145) по модулю меньше 1. Здесь предполагается, что правые части системы допускают представление (7.140).

Сформулируем в качестве отдельной теоремы следствия из теорем 4.11 и 4.16.

**Теорема 7.20.** Пусть выполнены условия (7.107) и (7.117). Пусть правые части системы (7.100) допускают представления (7.128) и (7.140), причем каждая из матриц монодромии систем  $\frac{dy}{dt} = B(t)y$  и  $\frac{dy}{dt} = C(t)y$  имеет единственный собственный вектор с неотрицательными компонентами, которым отвечают собственные значения  $\lambda_0$  и  $\lambda_\infty$ .

Тогда для существования положительного периодического решения достаточно, чтобы выполнялось одно из условий: либо

$$\lambda_0 < 1, \quad \lambda_\infty > 1,$$

либо

$$\lambda_0 > 1, \quad \lambda_\infty < 1.$$

**9. Замечание о теоремах единственности.** Теоремы единственности и теоремы о сходимости последовательных приближений, установленные в гл. 6, применимы и к задаче о периодических решениях системы (7.100). Эти применения основаны на признаках вогнутости операторов точечных преобразований.

Отметим, что условия применимости метода последовательных приближений являются одновременно условиями асимптотической устойчивости соответствующего периодического решения.

Соответствующие результаты будут изложены в другом месте.

### § 4. Двухточечная краевая задача

1. Функция Грина оператора  $\ddot{x}$ . Рассмотрим краевую задачу

$$-\frac{d^2x}{dt^2} = y(t), \quad x(0) = x(1) = 0. \quad (7.150)$$

Функция  $x(t)$  определится, как известно, равенством

$$x(t) = Ay(t) = \int_0^1 G(t, s) y(s) ds, \quad (7.151)$$

где функция Грина  $G(t, s)$  имеет вид

$$G(t, s) = \begin{cases} t(1-s), & \text{если } t \leq s, \\ s(1-t), & \text{если } s \leq t. \end{cases} \quad (7.152)$$

В справедливости формулы (7.151) легко убедиться непосредственным дифференцированием.

Лемма 7.6. Пусть  $y(t) \geq 0$  и  $y(t) \not\equiv 0$ . Тогда найдутся такие положительные  $\alpha$  и  $\beta$ , что

$$\alpha t(1-t) \leq Ay(t) \leq \beta t(1-t) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (7.153)$$

Доказательство. Пусть  $[t_1, t_2]$  — произвольный отрезок, являющийся частью отрезка  $[0, 1]$ . В силу (7.152) при  $0 \leq t \leq \frac{t_1+t_2}{2}$  будет выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} G(t, s) ds &\geq \int_{\frac{t_1+t_2}{2}}^{t_2} G(t, s) ds = t \int_{\frac{t_1+t_2}{2}}^{t_2} (1-s) ds \geq \\ &\geq t \int_{1-\frac{t_2-t_1}{2}}^1 (1-s) ds = at, \end{aligned}$$

а при  $\frac{t_1+t_2}{2} \leq t \leq 1$  — неравенство

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} G(t, s) ds &\geq \int_{t_1}^{\frac{t_1+t_2}{2}} G(t, s) ds = \\ &= (1-t) \int_{t_1}^{\frac{t_1+t_2}{2}} s ds \geq (1-t) \int_0^{\frac{t_2-t_1}{2}} s ds = a(1-t). \end{aligned}$$

Из полученных неравенств вытекает, что при всех  $t \in [0, 1]$ , справедливо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} G(t, s) ds \geq a \min \{t, 1-t\} \geq at(1-t).$$

Очевидно,

$$\int_0^1 G(t, s) ds = \int_0^t s(1-t) ds + \int_t^1 t(1-s) ds = \frac{1}{2} t(1-t).$$

Таким образом,

$$\int_{t_1}^{t_2} G(t, s) ds \geq \eta \int_0^1 G(t, s) ds.$$

Последнее неравенство является условием (7.4) леммы 7.1. Из этой леммы вытекает справедливость неравенств (7.153).

Лемма доказана.

Оператор (7.151) действует в пространстве  $C$  непрерывных на  $[0, 1]$  функций, и его значения являются дифференцируемыми функциями. Положим

$$By(t) = \frac{d}{dt} Ay(t).$$

Очевидно,

$$By(t) = \int_0^1 G'_t(t, s) y(s) ds = - \int_0^t sy(s) ds + \int_t^1 (1-s) y(s) ds. \quad (7.154)$$

Операторы  $A$  и  $B$  вполне непрерывны в пространстве  $C$ . Из неотрицательности  $G(t, s)$  вытекает, что оператор  $A$  оставляет инвариантным конус  $K$  неотрицательных функций. Лемма 7.6, в частности, означает, что оператор (7.151)  $u_0$ -положителен, где

$$u_0(t) = 2 \int_0^1 G(t, s) ds = t(1-t). \quad (7.155)$$



2. Собственные значения и осциллирование решений. В дальнейших построениях важную роль будут играть операторы  $P$  и  $Q$  вида

$$Px(t) = b(t) \int_0^1 G(t, s) x(s) ds \quad (7.156)$$

и

$$Qx(t) = \int_0^1 G(t, s) b(s) x(s) ds. \quad (7.157)$$

Функция  $b(t)$  предполагается неотрицательной.

Каждый из операторов  $P$  и  $Q$  очевидным образом  $v_0$ -положителен. Это следует из неравенств (7.153), если в случае оператора  $P$  положить  $v_0(t) = b(t) u_0(t)$ , а в случае оператора  $Q$  положить  $v_0(t) = u_0(t)$ . Поэтому каждый из операторов (7.156) и (7.157) имеет единственную неотрицательную собственную функцию, которой соответствует простое положительное собственное значение, причем это собственное значение больше абсолютных величин остальных собственных значений. Это собственное значение будем обозначать соответственно через  $\lambda(P)$  или  $\lambda(Q)$ .

Операторы  $P$  и  $Q$  тесно связаны с краевой задачей

$$\lambda \frac{d^2 x}{dt^2} + b(t) x = 0, \quad x(0) = x(1) = 0. \quad (7.158)$$

Эта краевая задача эквивалентна уравнению

$$Qx(t) = \lambda x(t).$$

Если же в краевой задаче произвести замену (7.150), то мы придем к уравнению

$$Px(t) = \lambda x(t).$$

Таким образом, собственные значения операторов  $P$  и  $Q$  совпадают с собственными значениями краевой задачи (7.158).

Пусть  $\lambda^*$  — наибольшее собственное значение краевой задачи (7.158). Число  $\lambda^*$  будет одновременно наибольшим собственным значением оператора  $Q$ . Поэтому соответствующая собственная функция  $x^*(t)$  на интервале  $(0, 1)$  положительна. Из теоремы Штурма (см. В. В. Степанов [1]) вытекает, что

ни одно решение уравнения

$$\lambda^* \frac{d^2 x}{dt^2} + b(t) x = 0$$

не обращается два раза в нуль на интервале  $(0, 1)$ .

Допустим, что  $\lambda^* < 1$ . Тогда у уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b(t)}{\lambda^*} x = 0 \quad (7.159)$$

коэффициент при  $x$  больше коэффициента  $b(t)$  при  $x$  у уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b(t) x = 0. \quad (7.160)$$

Из теорем сравнения (см. В. В. Степанов [1]) вытекает, что у уравнения (7.160) нет решений, дважды обращающихся в нуль на  $(0, 1)$ . Более того, у уравнения (7.160) нет решений, дважды обращающихся в нуль на  $[0, 1]$ . Действительно, если бы у уравнения (7.160) было решение  $x_1(t)$ , обращающееся в нуль в точках 0 и  $t_1$ , где  $0 < t_1 < 1$ , то решение  $x_2(t)$ , обращающееся в нуль в точке  $t = \varepsilon$  (где  $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число), обратилось бы в нуль в некоторой точке  $t_2 \in (t_1, 1)$  (рис. 5). Это означало бы, что у уравнения (7.160) есть решения, дважды аннулирующиеся на  $(0, 1)$ , чего быть не может. Аналогично доказывается, что у уравнения (7.160) нет решений, аннулирующихся в точке  $t = 1$  и в некоторой точке  $t_1 \in (0, 1)$ . Наконец, не может быть решений, аннулирующихся в точках 0 и 1, — в противном случае это решение было бы знакопостоянным и его без ограничения общности можно было бы считать неотрицательным; но в этом случае у краевой задачи (7.158) или, что то же, у оператора (7.157) есть два собственных значения  $\lambda = \lambda^*$  и  $\lambda = 1$ , которым соответствуют неотрицательные собственные функции; а это противоречит тому, что оператор (7.157)  $v_0$ -положителен.

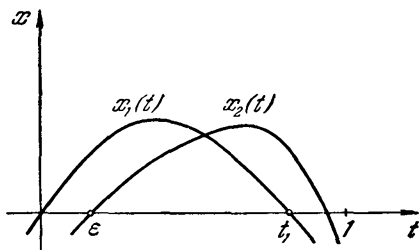


Рис. 5.

Допустим, что  $\lambda^* > 1$ . Тогда из теоремы сравнения вытекает, что между каждыми двумя нулями любого решения уравнения (7.159) любое решение уравнения (7.160) по крайней мере один раз обращается в нуль. Пусть  $x_1(t)$  — решение уравнения (7.160), обращающееся в нуль в точке  $t=0$ ; следующий нуль  $t_1$  будет в интервале  $(0, 1)$  (см. рис. 5). Решение уравнения (7.160), обращающееся в нуль в точке  $t=\varepsilon$  ( $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число), будет на интервале  $(0, 1)$  обращаться в нуль дважды.

Пусть  $\lambda^* = 1$ . Тогда ни одно решение уравнения (7.160) (которое в рассматриваемом случае совпадает с уравнением (7.159)) не обратится в нуль на интервале  $(0, 1)$  дважды, так как в противном случае неотрицательная собственная функция в силу теоремы Штурма обращалась бы в нуль в некоторой точке интервала  $(0, 1)$  и была бы знакопеременной.

Нами доказана

**Теорема 7.21.** *Для того чтобы наибольшее собственное значение  $\lambda^*$  операторов  $P$  и  $Q$  удовлетворяло неравенству  $\lambda^* < 1$ , необходимо и достаточно, чтобы ни одно нетривиальное решение уравнения (7.160) не обращалось в нуль дважды на промежутке  $[0, 1]$ .*

*Для того чтобы наибольшее собственное значение  $\lambda^*$  операторов  $P$  и  $Q$  удовлетворяло неравенству  $\lambda^* > 1$ , необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно нетривиальное решение уравнения (7.160) дважды обращалось в нуль на интервале  $(0, 1)$ .*

**3. Двухточечная краевая задача для скалярного уравнения.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \quad (7.161)$$

Двухточечной краевой задачей называют задачу об отыскании решений уравнения (7.161), удовлетворяющих граничным условиям

$$x(a) = x_1, \quad x(b) = x_2.$$

Иначе говоря, решения двухточечной задачи — это интегральные кривые, проходящие через две заданные точки.

После замены переменных

$$t = a + (b-a)\tau, \quad x = y + x_1 + \frac{x_2 - x_1}{b-a}(t-a)$$

двухточечная задача переходит в задачу об отыскании решений дифференциального уравнения второго порядка, принимающих в точках 0 и 1 нулевые значения. Мы предположим сразу, что ищутся решения уравнения (7.161), удовлетворяющие граничным условиям

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (7.162)$$

Нас будут интересовать неотрицательные решения задачи (7.161) — (7.162).

Произведя в уравнении (7.161) замену (7.150), получим эквивалентное краевой задаче (7.161) — (7.162) интегральное уравнение

$$y(t) = f \left[ t, \int_0^1 G(t, s) y(s) ds, \int_0^1 G'_t(t, s) y(s) ds \right], \quad (7.163)$$

которое мы будем записывать в виде

$$y(t) = f[t, Ay(t), By(t)], \quad (7.163)$$

где  $A$  и  $B$  — операторы (7.151) и (7.154).

Если  $f(t, u, v)$  непрерывна по совокупности переменных, то оператор  $F$ , определенный правой частью уравнения (7.163),

$$Fy(t) = f[t, Ay(t), By(t)], \quad (7.164)$$

действует в  $C$  и вполне непрерывен. В дальнейшем предполагается, что

$$f(t, u, v) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq 1, \quad u \geq 0, \quad -\infty < v < \infty). \quad (7.165)$$

Тогда оператор (7.164) оставляет инвариантным конус  $K$  неотрицательных функций.

**4. Неотрицательные решения двухточечной задачи.** Пусть

$$\begin{aligned} 0 \leq f(t, u, v) \leq a + b_0(t)u \\ (0 \leq t \leq 1, \quad u \geq 0, \quad -\infty < v < \infty). \end{aligned} \quad (7.166)$$

Тогда оператор (7.164) будет иметь мажоранту

$$F^+ y(t) = a + b_0(t) Ay(t),$$

причем  $F^+$  будет иметь сильную асимптотическую производную

$$F^{+'}(\infty) y(t) = b_0(t) Ay(t).$$

Из теоремы 4.10 вытекает, что уравнение (7.163) имеет по крайней мере одно неотрицательное решение, если наибольшее собственное значение  $\lambda^*$  оператора  $F^{+'}(\infty)$  меньше чем 1. Поэтому двухточечная краевая задача имеет по крайней мере одно неотрицательное решение, если  $\lambda^* < 1$ . Если использовать теорему 7.21, то последнее утверждение можно формулировать в следующем виде:

**Теорема 7.22.** Пусть непрерывная функция  $f(t, u, v)$  удовлетворяет условию (7.166). Пусть ни одно нетривиальное решение уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b_0(t) x = 0$$

на промежутке  $[0, 1]$  не обращается дважды в нуль.

Тогда краевая задача (7.161) — (7.162) имеет по крайней мере одно неотрицательное решение.

Приведем одну теорему о существовании нетривиальных неотрицательных решений двухточечной краевой задачи в условиях, когда эта задача имеет тривиальное нулевое решение, то есть когда имеет место равенство

$$f(t, 0, 0) \equiv 0 \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (7.167)$$

Пусть  $f(t, u, v)$  непрерывно дифференцируема по  $u$  и  $v$  при малых значениях этих переменных. Из условия (7.165) вытекает, что  $f'_v(t, 0, 0) \equiv 0$ . Оператор (7.164) будет иметь в точке  $\theta$  сильную производную Фреше

$$F'(\theta) y(t) = a(t) Ay(t), \quad (7.168)$$

где  $a(t) = f'_u(t, 0, 0)$  и  $a(t)$  — неотрицательная непрерывная функция. Далее, пусть функция  $f(t, u, v)$  асимптотически линейна в том смысле, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1, -\infty < v < \infty} \frac{|f(t, u, v) - b(t)u|}{u} = 0,$$

где  $b(t)$  — некоторая неотрицательная непрерывная функция. Нетрудно видеть (ср. § 2, п. 6), что при этом условии опе-

ратор  $F$  имеет сильную асимптотическую производную

$$F'(\infty) y(t) = b(t) Ay(t). \quad (7.169)$$

Из результатов гл. 4 и из теоремы 7.21 вытекает

**Теорема 7.23.** Пусть выполнено условие (7.167). Пусть каждое нетривиальное решение одного из уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)x = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + b(t)x = 0$$

не обращается дважды в нуль на промежутке  $[0, 1]$ , а второе из уравнений имеет хотя бы одно решение, аннулирующееся дважды на интервале  $(0, 1)$ .

Тогда краевая задача (7.161) — (7.162) имеет кроме нулевого еще по крайней мере одно неотрицательное решение.

Рассмотрим более простую двухточечную задачу:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0, \quad x(0) = x(1) = 0. \quad (7.170)$$

Она эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f[x(s)] ds. \quad (7.171)$$

Если функция  $f(u)$  вогнута, то оператор, определенный правой частью уравнения (7.171), будет  $u_0$ -вогнут, где  $u_0(t) = = t(1-t)$ . Поэтому вогнутость функции  $f(u)$  влечет единственность нетривиального неотрицательного решения задачи (7.170).

Читатель без труда сформулирует для двухточечной краевой задачи следствия из других результатов гл. 4—6.

Отметим, что приведенные выше теоремы о решениях двухточечной краевой задачи для скалярного уравнения (7.161) могут быть получены и без привлечения методов функционального анализа. Для этого может быть использован метод изучения интегральных кривых на фазовой плоскости. Однако примененные методы имеют то серьезное преимущество, что они без затруднения переносятся на случай векторных уравнений. Примеры такого переноса читатель найдет в следующем параграфе.

Сделаем еще одно замечание. Анализ фазового портрета уравнения (7.170) показывает, что оно имеет единственное нетривиальное неотрицательное решение и в случае, когда  $f(u)$  ( $f(0) = 0$ ) выпукла. Иначе говоря, интегральное уравнение (7.171) с выпуклой функцией  $f(u)$  имеет единственное нетривиальное решение в конусе неотрицательных функций. Какими общими свойствами выпуклого оператора, определенного правой частью уравнения, вызвана в этом случае единственность? Этот вопрос не исследован.

**Б. Еще одно условие разрешимости двухточечной задачи.** Предположим, что

$$0 \leq f(t, x, p) \leq \varphi(t) R(p) \\ (0 \leq t \leq 1, \quad x \geq 0, \quad -\infty < p < \infty),$$

и рассмотрим оператор (7.164). Если этот оператор  $F$  не имеет в конусе  $K$  неотрицательных функций неподвижной точки, то можно указать такую последовательность  $y_n(t) \in K$ , что  $\|y_n\| \rightarrow \infty$  и

$$F y_n(t) \geq y_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Последние неравенства после замены (7.151) примут вид

$$-\frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} \leq \varphi(t) R\left[\frac{dx_n(t)}{dt}\right] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Пусть  $-\ddot{x}_n(t_n) \rightarrow \infty$ . Из последних неравенств вытекает тогда, что  $\dot{x}_n(t_n) \rightarrow \infty$ .

Так как  $x_n(0) = x_n(1) = 0$ , то найдутся такие точки  $t_n^*$ , что  $\dot{x}_n(t_n^*) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Очевидно,

$$\left| \int_{t_n^*}^{t_n} \varphi(t) dt \right| \geq \left| \int_{t_n^*}^{t_n} \frac{\ddot{x}_n(t) dt}{R[\dot{x}_n(t)]} \right| = \left| \int_0^{\dot{x}_n(t_n)} \frac{dp}{R(p)} \right|,$$

откуда

$$\int_0^1 \varphi(t) dt > \left| \int_0^{\dot{x}_n(t_n)} \frac{dp}{R(p)} \right| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\int_0^1 \varphi(t) dt \geq \min \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{R(p)}, \int_0^{\infty} \frac{dp}{R(p)} \right\}.$$

Таким образом, *неравенство*

$$\int_0^1 \varphi(t) dt < \min \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{R(p)}, \int_0^{\infty} \frac{dp}{R(p)} \right\}$$

является достаточным условием разрешимости задачи (7.161) — (7.162).

**6. Использование конуса выпуклых функций.** Оператор (7.151) преобразует каждую неотрицательную суммируемую функцию  $y(s)$  в неотрицательную функцию  $x(t) = Ay(t)$ , обращающуюся на концах промежутка  $[0, 1]$  в нуль и направленную выпуклостью вверх. При этом функция  $x(t)$  будет непрерывно дифференцируема и почти всюду будет иметь вторую производную.

Непосредственно из вида оператора  $A$  видно, что он каждое ограниченное в  $L_1$  множество функций преобразует в множество, компактное по равномерной норме. Далее, оператор  $A$  каждую ограниченную по норме  $L_1$  и почти всюду сходящуюся последовательность функций преобразует в последовательность функций, сходящуюся равномерно.

Предположим, что функция  $f(t, x, y)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $-\infty < y < \infty$ ) неотрицательна, непрерывна по совокупности переменных и равномерно ограничена, когда  $x$  принимает значения из конечного промежутка.

Рассмотрим оператор

$$Ty(t) = Af[t, y(t), y'(t)]$$

на конусе  $K$  непрерывных и выпуклых (вверх) на  $[0, 1]$  функций, удовлетворяющих условию  $y(0) = y(1) = 0$ . Непосредственная проверка показывает, что оператор  $T$  определен на  $K$ , преобразует  $K$  в себя и вполне непрерывен на  $K$ . Кроме этого, неподвижные точки оператора  $T$  совпадают с решениями краевой задачи (7.161) — (7.162).



Различные ограничения на характер роста функции  $f(t, x, y)$  по переменной  $x$  позволяют применять различные общие принципы из предыдущих глав.

Пусть, например,

$$0 \leq f(t, x, y) \leq a + bx \\ (0 \leq t \leq 1, \quad x \geq 0, \quad -\infty < y < \infty).$$

Тогда для оператора  $T$  будут справедливы неравенства

$$Ty(t) \leq A[a + by(t)] \leq a_1 + b\|A\|\|y\|,$$

откуда вытекает, что при  $b\|A\| < 1$  оператор  $T$  оставляет инвариантным пересечение конуса  $K$  с шаром  $\|x\| \leq R$  достаточно большого радиуса  $R$ . Из принципа Шаудера вытекает тогда существование неподвижной точки.

Предположим дополнительно, что  $f(t, 0, 0) \equiv 0$ , и поставим вопрос о существовании нетривиальных неподвижных точек.

Пусть существует такое  $\delta_0 > 0$  и такое  $b_1 > \pi^2$ , что

$$f(t, x, y) \geq b_1 x \quad (0 \leq x \leq \delta_0).$$

Тогда на функциях  $y(t) \in K$  с малой нормой будет выполнено неравенство  $Ty(t) \geq b_1 Ay(t)$ , откуда следует, что  $Ty(t) \leq y(t)$ . Таким образом, мы находимся в условиях теоремы об операторах, сжимающих конус. Существование ненулевой неподвижной точки доказано.

Более сложным является случай, когда  $f(t, x, y)$  содержит «сильные» по переменной  $x$  нелинейности.

Пусть, например, существуют такие  $\delta_0 > 0$  и  $M_0 > 0$ , что

$$f(t, x, y) \geq a_0 x^{1+\varepsilon} \quad (x \geq M_0, \quad a_0 > 0), \\ f(t, x, y) \leq a_1 x^{1+\varepsilon} \quad (x \leq \delta_0, \quad a_1 \geq 0).$$

Через  $h_0(t)$  обозначим характеристическую функцию отрезка  $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ . Для каждой функции  $y(t) \in K$  очевидным образом выполняется неравенство

$$y(t) \geq \frac{\|y\|}{4} h_0(t) = \frac{\max y(t)}{4} h_0(t).$$

На элементах малой нормы оператор  $T$  удовлетворяет неравенству

$$Ty(t) \leq a_1 A[y(t)]^{1+\varepsilon} \leq a_2 \|y\|^{1+\varepsilon},$$

откуда следует, что  $Ty(t) \geq y(t)$ . На элементах большой нормы

$$Ty(t) \geq a_0 A\left\{\left[\frac{1}{4}\|y\|\right]^{1+\varepsilon} h_0(t)\right\} = a_0 \left(\frac{\|y\|}{4}\right)^{1+\varepsilon} Ah_0(t),$$

откуда следует, что  $Ty(t) \leq y(t)$ . Таким образом, выполнены условия принципа ненулевой неподвижной точки для операторов, растягивающих конус. Значит,  $T$  имеет по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Аналогичными рассуждениями можно установить существование многих неподвижных точек, если  $f(t, x, y)$  имеет перемежающиеся участки быстрого и медленного роста по переменной  $x$ . Детальный анализ подобной ситуации проведен в § 6 для более сложного уравнения, в котором оператор  $\ddot{x}$  заменен оператором Монжа — Ампера. Отметим, что тот же метод применим и в случае, когда рассматривается «оператор Монжа — Ампера» (*гессиан*) для функций многих переменных.

## § 5. Периодические решения систем второго порядка

### 1. Нечетные решения. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (7.172)$$

с периодической по переменной  $t$  функцией  $f(t, u, v)$ . Нам будет удобно считать, что период равен 2:

$$f(2+t, u, v) \equiv f(t, u, v) \quad (-\infty < t, u, v < \infty). \quad (7.173)$$

Допустим, что функция  $f(t, u, v)$  удовлетворяет условию

$$f(-t, -u, v) \equiv -f(t, u, v) \quad (-\infty < t, u, v < \infty). \quad (7.174)$$

В этом случае для построения периодических решений уравнения (7.172) может быть применен следующий прием.

Вначале ищем решение  $x^*(t)$  уравнения (7.172), определенное на  $[0, 1]$  и удовлетворяющее граничным условиям

$$x^*(0) = x^*(1) = 0, \quad (7.175)$$

то есть ищем решение двухточечной задачи (см. § 4). Далее определяем функцию  $x^*(t)$  на  $[-1, 0]$ , доопределяя ее равенством

$$x^*(-t) = -x^*(t). \quad (7.176)$$

Нетрудно видеть, что функция  $x^*(t)$  будет непрерывно дифференцируема на  $[-1, 1]$ . Наконец, продолжим функцию  $x^*(t)$  на все значения как периодическую функцию с периодом  $\omega = 2$ . Из периодичности  $f(t, u, v)$  и из условия (7.174) вытекает, что периодическая функция  $x^*(t)$  будет удовлетворять уравнению (7.172) при всех  $t$ .

Проведенные рассуждения показывают, что в условиях теорем 7.22 и 7.23 уравнение (7.172) имеет периодические решения, если дополнительно выполнены тождества (7.173) и (7.174).

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) + h \sin \pi t = 0, \quad (7.177)$$

где

$$f(x) = \begin{cases} -ax_0 + b(x + x_0), & \text{если } x \leq -x_0, \\ ax, & \text{если } -x_0 \leq x \leq x_0, \\ ax_0 + b(x - x_0), & \text{если } x_0 \leq x. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что для уравнения (7.177) выполнено условие (7.166), где  $b_0(t) = b$ . Поэтому условия теоремы 7.22 будут выполнены, если

$$b < \pi^2. \quad (7.178)$$

Нечетность функции  $f(x)$  позволяет применить высказанные выше соображения. Следовательно, условие (7.178) достаточно для существования периодических решений у уравнения (7.177).

Описанный способ применим и для построения периодических решений у систем со многими степенями свободы.

**2. Автономные системы.** Построение периодических решений у автономных систем дифференциальных уравнений усложняется, так как априори неизвестен период искомого периодического решения.





где  $G(t, s)$  — определенная формулой (7.152) функция Грина задачи (7.150).

Обозначим через  $C^n$  пространство непрерывных вектор-функций

$$x(\tau) = \{x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)\} \quad (7.189)$$

с нормой

$$\|x(\tau)\| = \max_{0 \leq \tau \leq 1} |x_1(\tau)| + \dots + \max_{0 \leq \tau \leq 1} |x_n(\tau)|.$$

Через  $K$  обозначим конус в пространстве  $C^n$ , составленный из вектор-функций (7.189) с неотрицательными компонентами.

Систему (7.188) рассмотрим как операторное уравнение

$$Gx(\tau) = \frac{1}{\varphi^2} x(\tau), \quad (7.190)$$

где нелинейный вполне непрерывный\*) оператор  $G$  определен равенством

$$Gx(\tau) = \{G_1x(\tau), \dots, G_nx(\tau)\}. \quad (7.191)$$

В дальнейшем предполагается, что функции  $g_i(x_1, \dots, x_n)$  удовлетворяют условиям

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad (x_j \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n). \quad (7.192)$$

Тогда оператор  $G$  оставляет инвариантным конус  $K$  и для доказательства существования неотрицательных решений у системы (7.188) и их исследования могут быть применены результаты гл. 4—6.

Допустим, что по крайней мере одна функция  $g_{i_0}(x_1, \dots, x_n)$  из функций  $g_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) удовлетворяет условию

$$g_{i_0}(x_1, \dots, x_n) \geq kx_{i_0} \quad (x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n). \quad (7.193)$$

Тогда оператор  $G_-$

$$G_-x(\tau) = \{0, \dots, 0, \quad kAx_{i_0}(\tau), \quad 0, \dots, 0\} \quad (7.194)$$

будет минорантой (см. гл. 5) оператора (7.191), то есть для любой вектор-функции (7.189) будут выполнены условия

$$G_ix(\tau) \geq 0 \quad (0 \leq \tau \leq 1, \quad i \neq i_0)$$

---

\*) Здесь и в дальнейшем функции  $g_i$  предполагаются непрерывными по совокупности переменных.

и

$$G_{i_0} x(\tau) \geq k A x_{i_0}(\tau) \quad (0 \leq \tau \leq 1).$$

Оператор  $G_-$  удовлетворяет условию

$$G_- u^*(\tau) \geq \alpha u^*(\tau) \quad (0 \leq \tau \leq 1), \quad (7.195)$$

где  $\alpha$  — некоторое положительное число, а у вектор-функции

$$u^*(\tau) = \{u_1^*(\tau), \dots, u_n^*(\tau)\}$$

все компоненты  $u_i^*(\tau)$  равны нулю при  $i \neq i_0$  и

$$u_{i_0}^*(\tau) = \tau(1 - \tau) \quad (0 \leq \tau \leq 1).$$

Этот факт вытекает из леммы 7.6.

Из теоремы 5.7 вытекает, что оператор  $A$  имеет в конусе  $K$  бесконечную непрерывную ветвь собственных вектор-функций, которым соответствуют положительные собственные значения. Это значит, что система (7.188) имеет континуум решений при некоторых положительных значениях  $\omega$ , причем среди этих решений есть вектор-функции со сколь угодно большой нормой.

Решения системы (7.188) очевидным образом являются решениями системы (7.183) и удовлетворяют нулевым граничным условиям (7.187). Отсюда вытекает

**Теорема 7.24.** Пусть функции  $g_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) нечетны по совокупности переменных и неотрицательны при неотрицательных значениях аргументов. Пусть одна из этих функций удовлетворяет условию (7.193).

Тогда система (7.182) имеет континуум различных периодических решений, причем среди них есть решения со сколь угодно большой и сколь угодно малой амплитудами.

**4. Нечетные решения у систем с трением.** В качестве примера докажем одну теорему о периодических решениях системы (7.179) методом топологического продолжения.

В этом пункте будет рассмотрен случай, когда функции  $f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  по совокупности переменных  $x_1, \dots, x_n$  нечетны. Поэтому (см. п. 2) для доказательства существования у системы (7.179) периодических решений достаточно установить существование у системы (7.181) решений, удовлетворяющих нулевым граничным условиям (7.187).

Произведем (как в § 4) в уравнениях (7.181) замену

$$-\frac{d^2 x_i(\tau)}{d\tau^2} = v_i(\tau), \quad x_i(0) = x_i(1) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.196)$$

чевидно,

$$x_i(\tau) = \int_0^1 G(\tau, s) v_i(s) ds, \quad \frac{dx_i(\tau)}{d\tau} = \int_0^1 G'_\tau(\tau, s) v_i(s) ds, \quad (7.197)$$

система (7.181) перейдет в систему нелинейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} v_1(\tau) &= \omega^2 f_1 \left[ Av_1(\tau), \dots, Av_n(\tau), \frac{1}{\omega} Bv_1(\tau), \dots, \frac{1}{\omega} Bv_n(\tau) \right], \\ &\dots \dots \dots \\ v_n(\tau) &= \omega^2 f_n \left[ Av_1(\tau), \dots, Av_n(\tau), \frac{1}{\omega} Bv_1(\tau), \dots, \frac{1}{\omega} Bv_n(\tau) \right], \end{aligned} \quad (7.198)$$

где  $A$  и  $B$  — операторы (7.151) и (7.154):

$$Av_i(\tau) = \int_0^1 G(\tau, s) v_i(s) ds, \quad Bv_i(\tau) = \int_0^1 G'_\tau(\tau, s) v_i(s) ds. \quad (7.199)$$

Введем в рассмотренные операторы  $F_\omega$ :

$$F_\omega v(\tau) = F_\omega \{v_1(\tau), \dots, v_n(\tau)\} = \{F_\omega^{(1)} v(\tau), \dots, F_\omega^{(n)} v(\tau)\},$$

где

$$\begin{aligned} F_\omega^{(1)} v(\tau) &= f_1 \left[ Av_1(\tau), \dots, Av_n(\tau), \frac{1}{\omega} Bv_1(\tau), \dots, \frac{1}{\omega} Bv_n(\tau) \right], \\ &\dots \dots \dots \\ F_\omega^{(n)} v(\tau) &= f_n \left[ Av_1(\tau), \dots, Av_n(\tau), \frac{1}{\omega} Bv_1(\tau), \dots, \frac{1}{\omega} Bv_n(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Предположим, что выполнены условия

$$\begin{aligned} f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &\geq 0 \\ (x_j \geq 0, \quad -\infty < y_k < \infty, \quad i, j, k = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (7.200)$$



и по крайней мере одна функция  $f_{i_0}$  из функций  $f_1, \dots, f_n$  удовлетворяет условию

$$f_{i_0}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \geq kx_{i_0} \quad (7.201)$$

$$(x_j \geq 0, \quad -\infty < y_k < \infty, \quad j, k = 1, \dots, n).$$

Тогда каждый из операторов  $F_\omega$  будет вполне непрерывен в  $C^n$ , будет оставлять инвариантным конус  $K$  и будет на  $K$  иметь в качестве монотонной миноранты линейный оператор (7.194).

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 7.24, можно сделать вывод, что каждый из операторов  $F_\omega$  имеет бесконечную непрерывную ветвь собственных векторов.

Пусть

$$F_\omega v(\tau; \lambda) = \lambda v(\tau; \lambda). \quad (7.202)$$

Если нам удастся доказать, что среди тех  $\lambda$ , при которых уравнение (7.202) имеет решения, есть значение  $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ , то это решение будет решением системы (7.198). По этому решению, пользуясь формулами (7.197), можно будет построить решения системы (7.181), удовлетворяющие нулевым граничным условиям. Если дополнительно будут выполнены условия (7.184) нечетности, то мы получим теорему о существовании периодических решений у системы (7.179).

Допустим, что будет установлено неравенство

$$\overline{\lim}_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow 0} \lambda < \lim_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow \infty} \lambda \quad (7.203)$$

или неравенство

$$\lim_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow 0} \lambda > \overline{\lim}_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow \infty} \lambda. \quad (7.204)$$

Тогда, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 5.3, можно показать, что каждому значению  $\lambda$ , заключенному между пределами, указанными в (7.203) или в (7.204), соответствует собственный вектор оператора  $F_\omega$ . Отсюда вытекает существование в конусе ненулевого решения у системы уравнений (7.198), если либо

$$\overline{\lim}_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow 0} \lambda < \frac{1}{\omega^2} < \lim_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow \infty} \lambda, \quad (7.205)$$

либо

$$\lim_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow 0} \lambda > \frac{1}{\omega^2} > \overline{\lim}_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow \infty} \lambda. \quad (7.206)$$

Приведем условия, когда реализуются неравенства (7.206). Ограничимся при этом простейшим случаем.

Пусть существует такое  $\delta_0 > 0$ , что

$$f_l(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \geqslant \geqslant k_0(x_1 + \dots + x_n) \quad (0 \leqslant x_j \leqslant \delta_0, -\infty < y_n < \infty). \quad (7.207)$$

Тогда оператор  $F_\omega$  в окрестности точки  $\theta$  имеет миноранту  $k_0 F_0$ , где

$$F_0 x(\tau) = \{A[x_1(\tau) + \dots + x_n(\tau)], \dots, \dots, A[x_1(\tau) + \dots + x_n(\tau)]\}. \quad (7.208)$$

Оператор  $F_0$   $v_0$ -положителен, где

$$v_0(\tau) = \{\tau(1 - \tau), \dots, \tau(1 - \tau)\},$$

так как в силу леммы 7.6 для любой ненулевой вектор-функции

$$x(\tau) = \{x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)\}$$

с неотрицательными компонентами будут выполнены неравенства

$$\alpha\tau(1 - \tau) \leqslant A[x_1(\tau) + \dots + x_n(\tau)] \leqslant \beta\tau(1 - \tau) \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  положительны.

Из равенств (7.202) вытекает, что для собственных вектор-функций с малыми нормами выполняются неравенства

$$k_0 F_0 v(\tau; \lambda) \leqslant \lambda v(\tau; \lambda) \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1).$$

Поэтому из теорем 2.17 и 2.18 вытекает, что

$$\frac{\lambda}{k_0} \geqslant \lambda(F_0), \quad (7.209)$$

где  $\lambda(F_0)$  — единственное собственное значение оператора (7.208), которому соответствует собственная вектор-функция из конуса  $k$ . Из (7.209) в свою очередь вытекает неравенство

$$\lim_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow 0} \lambda \geqslant k_0 \lambda(F_0). \quad (7.210)$$

Далее, предположим, что выполнены неравенства

$$f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \leq k_1(x_1 + \dots + x_n) + k_2 \\ (x_j \geq 0, -\infty < y_k < \infty). \quad (7.211)$$

Тогда оператор  $F_\omega$  удовлетворяет на всем конусе условию

$$F_\omega x(\tau) \leq k_1 F_0 x(\tau) + w(\tau),$$

где  $w(\tau)$  — некоторая фиксированная вектор-функция. В частности,

$$\lambda v(\tau; \lambda) = F_\omega v(\tau; \lambda) \leq k_1 F_0 v(\tau; \lambda) + w(\tau). \quad (7.212)$$

Оператор  $F_0$   $v_0$ -положителен; поэтому его спектр лежит в круге  $|\lambda| \leq \lambda(F_0)$ . В силу леммы 2.2 можно в  $C^n$  ввести такую эквивалентную норму  $\|x(t)\|_0$ , в которой  $\|F_0\| < \lambda(F_0) + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — сколь угодно малое число. В силу леммы 2.3 эта норма обладает свойством монотонности, так как свойством монотонности обладает обычная норма в  $C^n$ . Из (7.212) вытекает тогда, что

$$\lambda \|v(\tau; \lambda)\|_0 \leq k_1 [\lambda(F_0) + \varepsilon] \|v(\tau; \lambda)\|_0 + \|w(\tau)\|_0,$$

откуда вытекает, что

$$\lambda \leq k_1 [\lambda(F_0) + \varepsilon] + \frac{\|w(\tau)\|_0}{\|v(\tau; \lambda)\|_0}.$$

Поэтому

$$\overline{\lim}_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow \infty} \lambda = \overline{\lim}_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow \infty} \lambda \leq k_1 [\lambda(F_0) + \varepsilon],$$

и так как  $\varepsilon$  произвольно, то

$$\overline{\lim}_{\|v(\tau; \lambda)\| \rightarrow \infty} \lambda \leq k_1 \lambda(F_0). \quad (7.213)$$

Допустим, что  $k_1 < k_0$ . Тогда из (7.210) и (7.213) вытекает, что неравенства (7.206) будут выполнены, если

$$k_1 \lambda(F_0) < \frac{1}{\omega^2} < k_0 \lambda(F_0). \quad (7.214)$$

Число  $\lambda(F_0)$ , фигурирующее в оценке (7.214), нетрудно вычислить. Обозначим для этого через

$$z(\tau) = \{z_1(\tau), \dots, z_n(\tau)\}$$



$$x(t) = \int_0^1 G_a(t, s) v(s) ds, \quad (7.219)$$

$$\alpha(t, s) = \frac{1}{2\alpha(e^\alpha - 1)} \begin{cases} e^{\alpha(t-s)} + e^{\alpha(1+s-t)}, & \text{если } s \leq t, \\ e^{\alpha(s-t)} + e^{\alpha(1+t-s)}, & \text{если } s \geq t. \end{cases} \quad (7.220)$$

оэтому задача о периодических решениях уравнения (7.216) называется эквивалентной интегральному уравнению

$$\begin{aligned} (t) = f \left[ t, \int_0^1 G_\alpha(t, s) v(s) ds, \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G_\alpha(t, s) v(s) ds \right] + \\ + \alpha \int_0^1 G_\alpha(t, s) v(s) ds. \end{aligned} \quad (7.221)$$

Для изучения интегрального уравнения (7.221) могут быть применены и развитые в книге методы. Здесь полезно учесть, что функция Грина (7.220) положительна.

## § 6. Задача Дирихле для уравнения Монжа — Ампера

**1. Нормальные отображения.** Во всем параграфе через  $\Omega$  обозначается ограниченная выпуклая область в плоскости  $\{x, y\}$ ;  $\Gamma$  — граница области  $\Omega$ ;  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ .

Пусть на  $\bar{\Omega}$  задана дважды непрерывно дифференцируемая функция  $z(x, y)$ . Рассмотрим отображение

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (7.222)$$

области  $\bar{\Omega}$  в плоскость переменных  $\{p, q\}$ . Якобиан этого преобразования совпадает со значением дифференциального оператора

$$H(z) = rt - s^2, \quad (7.223)$$

где, как обычно,

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Если  $rt - s^2 > 0$ , то отображение (7.222) будет взаимно однозначным; функция  $z(x, y)$  при этом будет строго выпуклой. Напомним, что функция строго выпуклая, если каждая опорная плоскость к графику функции имеет с графиком функции единственную общую точку (в случае гладкой

поверхностей опорные плоскости — это касательные плоскости).

Рассмотрим теперь произвольную выпуклую поверхность над областью  $\bar{Q}$ . Каждой точке  $\{x_0, y_0\}$  отнесем совокупность всех таких точек  $\{p, q\}$ , что плоскости

$$z - z(x_0, y_0) = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

опорны к поверхности. На выпуклой поверхности могут быть точки только трех типов: гладкие, ребристые и конические. В гладких точках существует единственная опорная плоскость, то есть гладким точкам при нашем отнесении соответствует единственная точка в плоскости  $\{p, q\}$ . Ребристым точкам соответствует совокупность опорных плоскостей, проходящих через общую прямую; таким точкам соответствует отрезок или луч в плоскости  $\{p, q\}$ . Наконец, коническим точкам соответствует в плоскости  $\{p, q\}$  выпуклая фигура с внутренними точками. Описанное отображение называют *нормальным*.

Через  $\Psi(\mathcal{E}; z)$  ( $\mathcal{E} \subset \bar{Q}$ ) обозначим сумму нормальных образов всех точек  $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ ; множество  $\Psi(\mathcal{E}; z)$  назовем нормальным образом множества  $\mathcal{E}$ .

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$H(z) \equiv rt - s^2 = \varphi(x, y) \quad (7.224)$$

с неотрицательной функцией  $\varphi(x, y)$ . Решение  $z(x, y)$  этого уравнения, если оно существует, будет выпуклой функцией. Это решение, очевидно, будет удовлетворять равенствам

$$\int_{\mathcal{E}} \int (rt - s^2) dx dy = \int_{\mathcal{E}} \int \varphi(x, y) dx dy$$

при любом измеримом  $\mathcal{E} \subset \bar{Q}$ . Последние равенства можно записать в виде

$$\int_{\mathcal{E}} \int \varphi(x, y) dx dy = \text{mes } \Psi(\mathcal{E}; z). \quad (7.225)$$

Последние равенства имеют смысл уже для любых (а не только гладких) выпуклых функций  $z(x, y)$ . Это приводит к обобщению\*) понятия решения уравнения (7.224): выпуклая

---

\*) Это обобщение восходит к А. Д. Александрову; наше изложение следует работам И. Я. Бакельмана.

функция  $z(x, y)$  является решением уравнения (7.224), если выполнены равенства (7.225). Так как левая часть равенств (7.225) определяет абсолютно непрерывную функцию множеств, то решения уравнения (7.224) не могут иметь конических точек.

**2. Вспомогательные функции.** Рассмотрим положительные решения дифференциального уравнения

$$rt - s^2 = R_0(1 + p^2 + q^2)^\alpha, \quad (7.226)$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$ , удовлетворяющие нулевому граничному условию на границе круга  $x^2 + y^2 = r_0^2$ . Решением уравнения (7.226) будет, очевидно, поверхность вращения, для отыскания которой удобно перейти к полярным координатам  $r, \theta$ . Уравнения меридианов запишутся в виде

$$\frac{z_{rr}z_r}{(1+z_r^2)^\alpha} = R_0r.$$

Это уравнение нужно решать на промежутке  $0 \leq r \leq r_0$  при условиях

$$z_r(0) = 0, \quad z(r_0) = 0.$$

Очевидно,

$$|z_r|^2 \leq \begin{cases} [(1-\alpha)R_0r^2 + 1]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1, & \text{если } 0 \leq \alpha < 1, \\ e^{R_0r^2} - 1, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$|z_r| \leq \begin{cases} \sqrt{[(1-\alpha)R_0r_0^2 + 1]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1}, & \text{если } 0 \leq \alpha < 1, \\ \sqrt{e^{R_0r_0^2} - 1}, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases} \quad (7.227)$$

и

$$|z| \leq \begin{cases} r_0 \sqrt{[(1-\alpha)R_0r_0^2 + 1]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1}, & \text{если } 0 \leq \alpha < 1, \\ r_0 \sqrt{e^{R_0r_0^2} - 1}, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases} \quad (7.228)$$



**3. Обращение оператора Монжа — Ампера.** Дифференциальный оператор  $(rt - s^2)(1 + p^2 + q^2)^{-\alpha}$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$ , будем называть *оператором Монжа — Ампера*.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^\alpha} = \varphi(x, y), \quad z|_\Gamma = 0. \quad (7.229)$$

Для этой краевой задачи решение (аналогично п. 1) определяется как выпуклая функция, удовлетворяющая равенствам

$$\int\limits_{\mathfrak{G}} \varphi(x, y) dx dy = \int\limits_{\Psi(\mathfrak{G}; z)} (1 + p^2 + q^2)^{-\alpha} dp dq. \quad (7.230)$$

Для случая неотрицательных ограниченных функций  $\varphi(x, y)$  (даже суммируемых) решение задачи (7.229) можно определять как неотрицательную выпуклую непрерывную функцию с абсолютно непрерывной площадью нормального изображения, удовлетворяющую граничному условию и удовлетворяющую дифференциальному уравнению почти всюду.

Известно\*), что задача (7.229) имеет единственное неотрицательное решение  $z(x, y)$ . Обращением оператора Монжа — Ампера назовем оператор  $A_\alpha$ , определяющийся равенством

$$A_\alpha \varphi(x, y) = z(x, y).$$

**4. Полная непрерывность операторов  $A_\alpha$ .** Предположим дополнительно, что удельная кривизна кривой  $\Gamma$  ограничена снизу положительным числом  $\frac{1}{r_0}$ . Это значит, что для каждой точки  $\{x_0, y_0\} \in \Gamma$  можно указать проходящую через эту точку окружность  $S(x_0, y_0)$  радиуса  $r_0$ , внутри которой полностью лежит область  $\Omega$ . Грубо говоря, это значит, что  $\Gamma$  не содержит прямолинейных отрезков.

Без ограничения общности можно считать, что  $S(x_0, y_0)$  является окружностью  $x^2 + y^2 = r_0^2$ . Через  $u(x, y)$  обозначим функцию, построенную в п. 2.

---

\*) Для случая  $\alpha = \frac{3}{2}$  (не входящего в наши рассмотрения) этот факт был установлен А. Д. Александровым; для случая  $\alpha = 0$  — А. В. Погореловым; в общем случае — И. Я. Бакельманом.

Пусть функция  $\varphi(x, y)$  удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \varphi(x, y) < R_0 \quad (\{x, y\} \in \mathfrak{Q}). \quad (7.231)$$

Покажем, что функция  $z(x, y) = A_x \varphi$  удовлетворяет тогда неравенству

$$z(x, y) \leq u(x, y) \quad (\{x, y\} \in \mathfrak{Q}). \quad (7.232)$$

Предположим противное и обозначим через  $\mathfrak{E}$  одну из компонент связности множества тех точек, в которых выполнено неравенство

$$u(x, y) < z(x, y).$$

Нормальное изображение  $\Psi(\mathfrak{E}; z)$  множества  $\mathfrak{E}$  будет содержать нормальное изображение  $\Psi(\mathfrak{E}; u)$  этого же множества. Это следует из того, что «линия» пересечения поверхностей  $z(x, y)$  и  $u(x, y)$  над множеством  $\mathfrak{E}$  расположена над каждой опорной плоскостью к графику функции  $u(x, y)$  над  $\mathfrak{E}$ . Из включения  $\Psi(\mathfrak{E}; u) \subset \Psi(\mathfrak{E}; z)$  вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(\mathfrak{E}; u)} \int \frac{dp dq}{(1 + p^2 + q^2)^\alpha} &\leq \int_{\Psi(\mathfrak{E}; z)} \int \frac{dp dq}{(1 + p^2 + q^2)^\alpha} = \\ &= \int_{\mathfrak{E}} \int \varphi(x, y) dx dy < R_0 \text{mes } \mathfrak{E}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\int_{\Psi(\mathfrak{E}; u)} \int \frac{dp dq}{(1 + p^2 + q^2)^\alpha} = \int_{\mathfrak{E}} \int \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^\alpha} dx dy = R_0 \text{mes } \mathfrak{E}.$$

Мы пришли к противоречию.

Из (7.232) и (7.228) вытекает оценка решений  $z(x, y)$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq z(x, y) &\leq \\ &\leq \begin{cases} r_0 \sqrt{[(1 - \alpha) R_0 r_0^2 + 1]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1}, & \text{если } 0 \leq \alpha < 1, \\ r_0 \sqrt{e^{R_0 r_0^2} - 1}. & \text{если } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.233)$$

Нормальное изображение точки  $\{x_0, y_0\}$  относительно функции  $z(x, y)$  содержится в нормальном изображении

функции  $u(x, y)$ , содержащемся в свою очередь в круге  $\Gamma$ , радиус которого определяется правой частью неравенства (7.227). Так как  $\{x_0, y_0\}$  — произвольная точка границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ , то нормальные изображения всех точек  $\Gamma$  содержатся в круге  $\Gamma$ . Поскольку функция  $z(x, y)$  выпукла, то ее нормальное изображение лежит в том же круге, в котором лежит нормальное изображение границы.

Таким образом, для наклонов опорных плоскостей к графику функции  $z(x, y)$  справедлива оценка

$$p^2 + q^2 \leq \begin{cases} [(1 - \alpha) R_0 r_0^2 + 1]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1, & \text{если } 0 \leq \alpha < 1, \\ e^{R_0 r_0^2} - 1, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases} \quad (7.234)$$

Из последних оценок вытекает, что оператор  $A_\alpha$  преобразует каждое равномерно ограниченное множество неотрицательных функций в компактное по метрике пространства  $C$  множество неотрицательных выпуклых функций, обращающихся в нуль на  $\Gamma$ .

Докажем теперь, что оператор  $A_\alpha$  преобразует каждую точечно почти везде сходящуюся равномерно ограниченную последовательность функций в последовательность выпуклых функций, сходящуюся равномерно.

В предположении противного можно указать такую равномерно ограниченную последовательность  $\varphi_n(x, y)$ , точечно сходящуюся к функции  $\varphi_0(x, y)$ , что последовательность  $z_n(x, y) = A_\alpha \varphi_n$  не имеет предела. Так как последовательность  $z_n(x, y)$  компактна, то без ограничения общности можно считать, что последовательности  $z_{2k+1}$  и  $z_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) сходятся равномерно к разным пределам  $z^*$  и  $z^{**}$ . Функции  $z^*(x, y)$  и  $z^{**}(x, y)$  выпуклы. Тогда, как показал И. Я. Бакельман [2], для любого измеримого  $\mathcal{G} \subset \bar{\Omega}$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}} \int_{z^*} \frac{dp \, dq}{(1 + p^2 + q^2)^\alpha} &= \int_{\mathcal{G}} \int_{z^{**}} \frac{dp \, dq}{(1 + p^2 + q^2)^\alpha} = \\ &= \int_{\mathcal{G}} \int \varphi_0(x, y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Из этих равенств вытекает, что  $z^*(x, y) \equiv z^{**}(x, y)$ . Мы пришли к противоречию.

Итак, операторы  $A_\alpha$  вполне непрерывны, как операторы, действующие из конуса ограниченных неотрицательных функций (с точечной сходимостью) в конус неотрицательных выпуклых непрерывных функций, обращающихся в нуль на  $\Gamma$ .

Б. Дальнейшие свойства операторов  $A_\alpha$ . Во-первых, отметим, что операторы  $A_\alpha$  монотонны: из  $0 \leq \varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$  следует, что

$$0 \leq A_\alpha \varphi_1(x, y) \leq A_\alpha \varphi_2(x, y) \quad (\{x, y\} \in \bar{\Omega}). \quad (7.235)$$

Доказательство достаточно провести для случая, когда выполнены строгие неравенства

$$\varphi_1(x, y) < \varphi_2(x, y) \quad (\{x, y\} \in \bar{\Omega}),$$

так как после этого общий случай можно получить предельным переходом, используя непрерывность оператора  $A_\alpha$ . Если неравенства (7.235) не выполнены, то обозначим через  $\mathcal{E}$  одну из компонент связности множества точек, в которых  $A_\alpha \varphi_1(x, y) > A_\alpha \varphi_2(x, y)$ ; нормальное изображение  $\Psi(\mathcal{E}; A_\alpha \varphi_1)$  будет содержать нормальное изображение  $\Psi(\mathcal{E}; A_\alpha \varphi_2)$ , поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} \int \varphi_2(x, y) dx dy &= \int_{\Psi(\mathcal{E}; A_\alpha \varphi_2)} \frac{dp dq}{(1+p^2+q^2)^\alpha} \leq \\ &\leq \int_{\Psi(\mathcal{E}; A_\alpha \varphi_1)} \frac{dp dq}{(1+p^2+q^2)^\alpha} = \int_{\mathcal{E}} \int \varphi_1(x, y) dx dy < \\ &< \int_{\mathcal{E}} \int \varphi_2(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

и мы пришли к противоречию.

При  $0 \leq \alpha < 1$  операторы  $A_\alpha$  обладают следующим свойством: для каждой неотрицательной функции  $\varphi$  выполнены неравенства

$$A_\alpha(\lambda\varphi) \geq \lambda^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} A_\alpha \varphi \quad (0 \leq \lambda \leq 1). \quad (7.236)$$

Для доказательства введем обозначение  $A_\alpha \varphi = u$  и предположим вначале, что функция  $u(x, y)$  достаточно гладкая. Очевидно, при  $0 < \mu \leq 1$

$$\left( \frac{1+u_x^2+u_y^2}{1+\mu^2 u_x^2+\mu^2 u_y^2} \right)^\alpha \leq \mu^{-2\alpha},$$

откуда следует, что

$$\frac{\mu^2 (u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)}{(1 + \mu^2 u_x^2 + \mu^2 u_y^2)^\alpha} \leq \mu^{2(1-\alpha)} \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^\alpha} = \mu^{2(1-\alpha)} \varphi, \quad (7.237)$$

и из монотонности оператора  $A_\alpha$  вытекает, что

$$\mu u(x, y) \leq A_\alpha [\mu^{2(1-\alpha)} \varphi(x, y)]$$

или, что то же,

$$\mu A_\alpha \varphi \leq A_\alpha (\mu^{2(1-\alpha)} \varphi). \quad (7.238)$$

Производя в последнем неравенстве замену  $\mu^{2(1-\alpha)} = \lambda$ , приходим к (7.236).

В случае произвольной ограниченной неотрицательной функции  $\varphi(x, y)$  функция  $u(x, y)$  имеет почти всюду второй дифференциал \*). Поэтому площадь нормального изображения с весом  $(1 + u_x^2 + u_y^2)^\alpha$  восстанавливается по значениям

$$\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^\alpha}$$

в тех точках, где это выражение определено.

В этих точках неравенство (7.237) выполняется. Поэтому функция

$$\frac{\mu^2 (u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)}{(1 + \mu^2 u_x^2 + \mu^2 u_y^2)^\alpha} = \psi(x, y)$$

ограничена. Проведенное выше рассуждение показывает, что площадь нормального изображения для функции  $A_\alpha \psi(x, y)$  также абсолютно непрерывна. Таким образом, из (7.237) вытекает (7.238), а следовательно, и (7.236).

В дальнейшем будет использован еще один факт: если  $\alpha_1 < \alpha_2$ , то для каждой неотрицательной функции  $\varphi(x, y)$  выполнено неравенство

$$A_{\alpha_1} \varphi(x, y) \leq A_{\alpha_2} \varphi(x, y) \quad (\{x, y\} \in \bar{\Omega}). \quad (7.239)$$

Для доказательства введем обозначение

$$v(x, y) = A_{\alpha_2} \varphi(x, y).$$

---

\*) См. Бузман и Феллер [1], А. Д. Александров [2].

Тогда

$$\frac{v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2}{(1 + v_x^2 + v_y^2)^{\alpha_1}} = \varphi(x, y)(1 + v_x^2 + v_y^2)^{\alpha_2 - \alpha_1} \geq \varphi(x, y)$$

и из монотонности оператора  $A_{\alpha_1}$  следует (7.239).

**6. Существование решения.** Изучим вопрос о существовании решений у уравнения

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^\alpha} = f(x, y, z, p, q), \quad (7.240)$$

удовлетворяющих условиям

$$z(x, y) \geq 0, \quad z|_\Gamma = 0. \quad (7.241)$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что  $f(x, y, z, p, q)$  ( $(x, y) \in \Omega$ ,  $z \geq 0$ ,  $-\infty < p, q < \infty$ ) непрерывна по совокупности переменных, неотрицательна и равномерно ограничена, если значения  $z$  принадлежат конечному промежутку.

**Теорема 7.26.** Пусть выполнено условие

$$0 \leq f(x, y, z, p, q) \leq \begin{cases} a_1(1 + z^2)^\gamma & \text{если } 0 \leq \alpha < 1, \\ a_1 \ln^{1-\varepsilon}(2 + z), & \text{если } \alpha = 1, \end{cases} \quad (7.242)$$

где  $\gamma < 1 - \alpha$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $a_1 > 0$ .

Тогда краевая задача (7.240) — (7.241) имеет по крайней мере одно решение.

**Доказательство.** Рассмотрим оператор

$$B\varphi(x, y) = A_\alpha f[x, y, \varphi(x, y), \varphi'_x(x, y), \varphi'_y(x, y)]. \quad (7.243)$$

Если функция  $\varphi(x, y)$  неотрицательна, выпукла и удовлетворяет условию (7.241), то почти всюду существуют производные  $\varphi'_x(x, y)$  и  $\varphi'_y(x, y)$ . Поэтому функция

$$\psi(x, y) = f\varphi(x, y) = f[x, y, \varphi(x, y), \varphi'_x(x, y), \varphi'_y(x, y)] \quad (7.244)$$

почти всюду определена и ограничена. Из свойств оператора  $A_\alpha$  вытекает, что функция  $A_\alpha \psi(x, y)$  определена. Таким образом, оператор  $B$  определен на конусе  $K$  неотрицатель-

ных выпуклых непрерывных функций, обращающихся в нуль на  $\Gamma$ . Значения оператора  $B$  принадлежат этому же конусу, который всюду в дальнейшем рассматривается как конус в пространстве  $S$  непрерывных функций.

Обозначим через  $K_R$  пересечение конуса  $K$  с шаром  $\|\varphi\| \leq R$ . Из оценок (7.242) вытекает, что функции  $f\varphi(x, y)$  ( $\varphi \in K_R$ ) равномерно ограничены. Поэтому множество  $BK_R$  компактно в  $S$ , то есть оператор  $B$  компактен на конусе  $K$ . Пусть теперь последовательность  $\varphi_n(x, y)$  сходится к  $\varphi_0(x, y)$ . Как известно\*), функции  $\frac{\partial}{\partial x} \varphi_n(x, y)$  и  $\frac{\partial}{\partial y} \varphi_n(x, y)$  почти всюду сходятся к  $\frac{\partial}{\partial x} \varphi_0(x, y)$  и  $\frac{\partial}{\partial y} \varphi_0(x, y)$ . Поэтому равномерно ограниченная последовательность функций  $f\varphi_n(x, y)$  точечно сходится к  $f\varphi_0(x, y)$ . Но тогда последовательность  $A_\alpha f\varphi_n(x, y)$  равномерно сходится к  $A_\alpha f\varphi_0(x, y)$ .

Мы показали, что оператор  $B$  вполне непрерывен на конусе  $K$ .

Нетрудно видеть, что неподвижные точки оператора  $B$  совпадают с решениями задачи (7.240) — (7.241).

Утверждение теоремы будет вытекать из принципа Шаудера, если показать, что при некотором  $R$  имеет место включение

$$BK_R \subset K_R. \quad (7.245)$$

Пусть, вначале,  $0 \leq \alpha < 1$ . Тогда из (7.242) вытекает, что

$$f\varphi(x, y) \leq a_1(1 + R^2)^{\gamma} \quad (\varphi(x, y) \in K_R),$$

откуда в силу (7.233)

$$B\varphi(x, y) \leq r_0 \sqrt{[(1 - \alpha)a_1(1 + R^2)^{\gamma}r_0^2 + 1]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1} \\ (\varphi(x, y) \in K_R).$$

Из этого неравенства следует, что (7.245) выполнено при больших  $R$ .

Пусть теперь  $\alpha = 1$ . Тогда из (7.242) и (7.233) следует, что

$$B\varphi(x, y) \leq r_0 \sqrt{e^{a_1 r_0^2 \ln^{1-\epsilon}(2+R)} - 1} \quad (\varphi(x, y) \in K_R). \quad (7.246)$$

\*) См. А. Д. Александров [2].

Из неравенства  $uv \leq \epsilon u^{\frac{1}{\epsilon}} + (1 - \epsilon) v^{\frac{1}{1-\epsilon}}$  вытекает, что при любом  $\delta > 0$

$$\ln^{1-\epsilon}(2+R) \leq \epsilon \delta^{-\frac{1}{\epsilon}} + (1-\epsilon) \delta^{\frac{1}{1-\epsilon}} \ln(2+R).$$

Поэтому из (7.246) вытекает неравенство

$$B\varphi(x, y) \leq r_0 \sqrt{e^{\epsilon \delta^{-\frac{1}{\epsilon}} a_1 r_0^2} (2+R)^{(1-\epsilon) \delta^{\frac{1}{1-\epsilon}} a_1 r_0^2} - 1}.$$

Если выбрать  $\delta$  достаточно малым, то можно затем выбрать такое большое  $R$ , при котором будет выполнено неравенство

$$B\varphi(x, y) < R \quad (\varphi(x, y) \in K_R), \quad (7.247)$$

из которого следует (7.245).

Тесрема доказана.

**7. Второе решение.** Предположим дополнительно, что

$$f(x, y, 0, 0, 0) \equiv 0 \quad (\{x, y\} \in \bar{\Omega}). \quad (7.248)$$

Тогда краевая задача (7.240) — (7.241) имеет тривиальное нулевое решение.

**Теорема 7.27.** Пусть выполнены условия теоремы 7.26, условие (7.248) и пусть найдется такое  $\delta_0 > 0$ , что

$$f(x, y, z, p, q) \geq a_2 z^{2-\epsilon} \quad (0 \leq z \leq \delta_0, -\infty < p, q < \infty), \quad (7.249)$$

где  $a_2 > 0$ .

Тогда задача (7.240) — (7.241) кроме тривиального нулевого имеет еще по крайней мере одно решение.

**Доказательство.** Пусть  $S_1, S_2$  и  $S_3$  — три концентрических круга радиусов соответственно  $r_1, r_2$  и  $r_3$ , первые два из которых лежат в области  $\Omega$ , а третий содержит  $\bar{\Omega}$  внутри. Через  $h_0(x, y)$  будем обозначать характеристическую функцию круга  $S_1$ .

Рассмотрим произвольную выпуклую на  $\Omega$  и обращающуюся в нуль на  $\Gamma$  функцию  $\varphi(x, y)$ . Имеет место неравенство

$$\varphi(x, y) \geq \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} \|\varphi\| h_0(x, y) \quad (\{x, y\} \in \bar{\Omega}), \quad (7.250)$$



в котором легко убедиться, рассматривая графики функции  $\varphi(x, y)$  в вертикальных плоскостях, проходящих через общий центр кругов  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  (рис. 6).

В условиях теоремы 7.26 при больших  $R$  выполнено неравенство (7.247). Если мы покажем, что для ненулевых

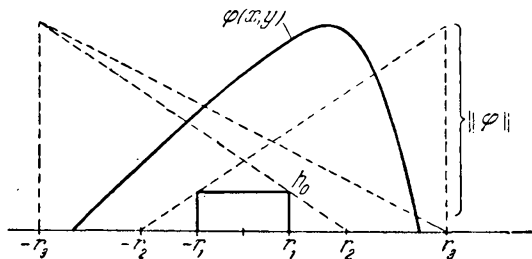


Рис. 6.

выпуклых функций  $\varphi(x, y)$  с достаточно малой нормой выполняется неравенство

$$B\varphi(x, y) \leq \varphi(x, y), \quad (7.251)$$

где  $B$  — оператор (7.243), то из теорем об операторах, сжимающих конус, будет вытекать, что  $B$  имеет в конусе  $K$  ненулевую неподвижную точку. Этим теорема будет полностью доказана.

Заметим, что соотношение (7.251) можно понимать в смысле полуупорядоченности, порожденной конусом  $K$  выпуклых функций или в смысле полуупорядоченности, порожденной конусом всех неотрицательных на  $\bar{\Omega}$  функций.

Из (7.249) вытекает, что для функций  $\varphi(x, y)$  с малой нормой

$$f\varphi(x, y) \geq a_2 [\varphi(x, y)]^{2-\alpha}$$

и в силу (7.250)

$$f\varphi(x, y) \geq a_2 \left[ \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} \|\varphi\| \right]^{2-\alpha} h_0(x, y).$$

Далее, из (7.239) и из монотонности оператора  $A_0$  следует, что

$$A_\alpha f\varphi \geq A_0 f\varphi \geq A_0 \left[ a_2 \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} \|\varphi\| \right)^{2-\alpha} h_0(x, y) \right]. \quad (7.252)$$

Если норма функции  $\varphi(x, y)$  достаточно мала, то имеет место неравенство

$$a_2 \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} \|\varphi\| \right)^{2-\varepsilon} < 1$$

и в силу (7.236)

$$\begin{aligned} A_0 \left\{ a_2 \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} \|\varphi\| \right)^{2-\varepsilon} h_0(x, y) \right\} &\geq \\ &\geq V \overline{a_2} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} \|\varphi\| \right)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} A_0 h_0(x, y). \end{aligned}$$

Объединяя последнее неравенство с (7.252), приходим к соотношению

$$B\varphi(x, y) \geq \|\varphi\|^{1-\frac{\varepsilon}{2}} w_0(x, y), \quad (7.253)$$

где

$$w_0(x, y) = V \overline{a_2} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} \right)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} A_0 h_0(x, y).$$

Из (7.253) непосредственно вытекает, что для выпуклых функций с малой ненулевой нормой выполнено условие (7.251).

Теорема доказана.

**8. Единственность ненулевого решения.** Рассмотрим частный случай задачи (7.240) — (7.241):

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^\alpha} = f(x, y, z), \quad z|_\Gamma = 0, \quad (7.254)$$

где  $0 \leq \alpha < 1$ . Пусть для задачи (7.254) справедлива теорема существования ненулевого неотрицательного решения (например, выполнены условия теоремы 7.27). В этом пункте мы приведем достаточные условия единственности такого решения.

Будем говорить, что функция  $f(x, y, z)$  квазиоднородна порядка  $\gamma$ , если  $f(x, y, z)$  не убывает по  $z$ , если

$$f(x, y, z) > 0 \quad (\{x, y\} \in \Omega, \quad z > 0) \quad (7.255)$$

и если

$$f(x, y, \lambda z) \geq \lambda^\gamma f(x, y, z) \quad (\{x, y\} \in \bar{\Omega}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad z \geq 0). \quad (7.256)$$

Примером может служить функция  $a + bz^\gamma$  ( $a, b \geq 0$ ).

**Теорема 7.28.** Пусть  $f(x, y, z)$  квазиоднородна порядка  $\gamma$ , причем

$$\gamma < 2(1 - \alpha). \quad (7.257)$$

Тогда краевая задача (7.254) не может иметь более одного ненулевого неотрицательного решения.

**Доказательство.** Как и при доказательстве двух предыдущих теорем, перейдем от краевой задачи (7.254) к уравнению  $\varphi = B\varphi$ , где

$$B\varphi(x, y) = A_\alpha f[x, y, \varphi(x, y)]. \quad (7.258)$$

Нам нужно доказать, что в условиях доказываемой теоремы оператор  $B$  имеет в конусе  $K$  не более одной ненулевой неподвижной точки. Для этого достаточно установить, что оператор  $B$  на конусе  $K$  является  $u_0$ -вогнутым оператором по отношению к полуупорядоченности, определенной конусом всех неотрицательных непрерывных функций (тогда можно применить теорему 6.3).

В качестве  $u_0(x, y)$  выберем функцию, графиком которой является конус единичной высоты с вершиной, проектирующейся в некоторую фиксированную внутреннюю точку  $\{x_0, y_0\}$  области  $\Omega$ , и с направляющей  $\Gamma$ .

Пусть  $\varphi(x, y)$  — ненулевая функция из  $K$ . Тогда  $z(x, y) = B\varphi(x, y)$  — также ненулевая функция из  $K$ . Геометрически очевидно, что

$$z(x_0, y_0) u_0(x, y) \leq z(x, y) = B\varphi(x, y) \quad (\{x, y\} \in \bar{\Omega}).$$

Из оценок, полученных в п. 3, вытекает, что наклоны опорных плоскостей к графику функции  $z(x, y)$  равномерно ограничены сверху некоторой постоянной  $L$ . Наклоны опорных плоскостей к графикам функций  $\beta u_0(x, y)$  в точках контура  $\Gamma$  ограничены снизу некоторой постоянной, неограниченно возрастающей при  $\beta \rightarrow \infty$ . Поэтому найдется такое  $\beta_0$ , что наклоны опорных плоскостей в точках контура  $\Gamma$  к графику функции  $\beta_0 u_0(x, y)$  будут больше  $L$ . Но тогда (график  $\beta_0 u_0(x, y)$  — это конус!) будет выполнено неравенство

$$B\varphi(x, y) = z(x, y) \leq \beta_0 u_0(x, y).$$

Мы показали, что

$$z(x_0, y_0) u_0(x, y) \leq B\varphi(x, y) \leq \beta_0 u_0(x, y).$$

то есть выполнено условие (6.1) в определении вогнутости оператора.

Монотонность оператора  $B$  вытекает из монотонности  $f(x, y, z)$  по переменной  $z$  и из монотонности оператора  $A_\alpha$ .

Остается доказать свойство (6.5), то есть доказать, что при  $0 < \lambda < 1$  для любой функции  $\varphi \in K$ , отличной от нуля,

$$B(\lambda\varphi) \geq \lambda(1 + \eta)B\varphi, \quad (7.259)$$

где  $\eta > 0$ . Действительно, из (7.256) вытекает, что

$$B[\lambda\varphi(x, y)] \geq A_\alpha \{\lambda^\gamma f[x, y, z(x, y)]\}$$

и в силу (7.236)

$$B[\lambda\varphi(x, y)] \geq \lambda^{\frac{\gamma}{2(1-\alpha)}} B\varphi(x, y) \quad (\{x, y\} \in \bar{Q}).$$

Последнее неравенство означает, что (7.259) выполнено при

$$\eta = \lambda^{\frac{2(1-\alpha)-\gamma}{1-\alpha}} - 1.$$

Теорема доказана.

### 9. Уравнения с сильными нелинейностями.

Теорема 7.29. Пусть найдутся такие  $\delta_0 > 0$  и  $M_0 > 0$ , что

$$f(x, y, z, p, q) \leq a_3 z^\gamma \quad (7.260)$$

и

$$(\{x, y\} \in \bar{Q}, \quad 0 \leq z \leq \delta_0, \quad -\infty < p, \quad q < \infty)$$

$$f(x, y, z, p, q) \geq a_4 z^\gamma \quad (7.261)$$

$$(\{x, y\} \in \bar{Q}, \quad z \geq M_0, \quad -\infty < p, \quad q < \infty),$$

где  $\gamma > 2$ ,  $a_4 > 0$ .

Тогда краевая задача (7.240) — (7.241) имеет кроме тривиального нулевого еще по крайней мере одно решение.

Доказательство. Перейдем от краевой задачи к операторному уравнению  $\varphi(x, y) = B\varphi(x, y)$ , где  $B$  — оператор (7.243), и покажем, что оператор  $B$  является растяжением конуса  $K$ . Этим доказательство будет завершено.

Покажем вначале, что при достаточно больших  $R$  выполнено соотношение

$$B\varphi(x, y) \leq \overline{\varphi}(x, y) \quad (\varphi \in K, \quad \|\varphi\| = R). \quad (7.262)$$

Действительно, из неравенства (7.250) вытекает неравенство

$$f[x, y, \varphi(x, y), \varphi'_x(x, y), \varphi'_y(x, y)] \geqslant \\ \geqslant a_4 \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} R \right)^{\gamma} h_0(x, y).$$

если только

$$\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} R \geqslant M_0.$$

Поэтому

$$B\varphi(x, y) \geqslant A_\alpha \left[ a_4 \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} R \right)^{\gamma} h_0(x, y) \right]$$

и в силу (7.239)

$$B\varphi(x, y) \geqslant A_0 \left[ a_4 \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} R \right)^{\gamma} h_0(x, y) \right] = \\ = \sqrt[\gamma]{a_4} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} \right)^{\frac{\gamma}{2}} R^{\frac{\gamma}{2}} A_0 h_0(x, y).$$

Из полученного неравенства вытекает, что (7.262) выполнено при достаточно больших  $R$ .

Нам осталось показать, что при достаточно малых положительных  $\rho$  выполняется соотношение

$$B\varphi(x, y) \geqslant \varphi(x, y) \quad (\varphi \in K, \quad \|\varphi\| = \rho). \quad (7.263)$$

Доказательство этого соотношения проведем отдельно для случаев  $0 \leqslant \alpha < 1$  и  $\alpha = 1$ .

Пусть  $0 \leqslant \alpha < 1$ . Тогда при  $\rho < \delta_0$

$$f[x, y, \varphi(x, y), \varphi'_x(x, y), \varphi'_y(x, y)] \leqslant a_3 \rho^{\gamma} \\ (\varphi \in K, \quad \|\varphi\| = \rho),$$

и из оценок (7.233) вытекает, что

$$B\varphi(x, y) \leqslant r_0 \sqrt{[(1 - \alpha) a_3 \rho^{\gamma} r_0^2 + 1]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1}.$$

откуда следует справедливость соотношений (7.263) при малых  $\rho$ .

Пусть  $\alpha = 1$ . Тогда

$$B\varphi(x, y) \leqslant r_0 \sqrt{e a_3 \rho^{\gamma} r_0^2 - 1}$$

и снова при малых  $\rho$

$$B\varphi(x, y) < \rho.$$

Теорема доказана.

**10. Условия существования многих решений.** Пусть  $h_0(x, y)$  — функция, введенная при доказательстве теоремы 7.27, и пусть  $Ah_0(x, y) = g_0(x, y)$  и

$$d_0 = \max A_0 h_0(x, y) = g_0(x_0, y_0).$$

В случае, когда функция  $f(x, y, z, p, q)$  по переменной  $z$  имеет перемежающиеся участки быстрого роста и участки медленного роста, краевая задача (7.240) — (7.241) имеет, вообще говоря, много решений. Укажем одну частную теорему для случая, когда  $0 \leq \alpha < 1$ .

**Теорема 7.30.** Пусть существует такая последовательность  $R_n \rightarrow \infty$ , что

$$f(x, y, z, p, q) \geq az^{\gamma_1} \quad \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} R_n \leq z \leq R_n \right), \quad (7.264)$$

где  $\gamma_1 > 2$ . Пусть, далее, существует такая последовательность  $R_n^* \rightarrow \infty$ , что

$$f(x, y, z, p, q) \leq a_n(1 + z^2)^{\gamma_2} \quad (0 \leq z \leq R_n^*), \quad (7.265)$$

где  $\gamma_2 \leq 1 - \alpha$ , а рост чисел  $a_n$  согласован с ростом чисел  $R_n^*$  неравенствами

$$r_0 \sqrt{[(1 - \alpha) a_n (1 + R_n^{*2})^{\gamma_2} r_0^2 + 1]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1} < R_n^*,$$

в которых  $\frac{1}{r_0}$  — оценка снизу для удельной кривизны контура  $\Gamma$ .

Тогда краевая задача (7.240) — (7.241) имеет счетное число различных решений, среди которых есть решения со сколь угодно большим максимумом.

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что числа  $R_n$  удовлетворяют неравенствам

$$R_n > \left( \frac{1}{ad_0^2} \right)^{\frac{1}{\gamma_1 - 2}} \left( \frac{r_2 + r_3}{r_2 - r_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 2}}.$$

Тогда для каждой функции  $\varphi(x, y) \in K$  из  $\|\varphi\| = R_n$  будет следовать, что

$$\varphi(x, y) \geq \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} R_n h_0(x, y),$$

откуда

$$\begin{aligned} B\varphi(x, y) &\geq A_\alpha \left[ a \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} R_n \right)^{\gamma_1} h_0(x, y) \right] \geq \\ &\geq A_0 \left[ a \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} R_n \right)^{\gamma_1} h_0(x, y) \right] = \\ &= \sqrt{a} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} R_n \right)^{\frac{\gamma_1}{2}} A_0 h_0(x, y) \end{aligned}$$

и

$$B\varphi(x_0, y_0) \geq \sqrt{ad_0^2} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_3} R_n \right)^{\frac{\gamma_1}{2}} > R_n.$$

Таким образом, из условия (7.264) вытекает, что

$$B\varphi(x, y) \leq \varphi(x, y) \quad (\varphi \in K, \quad \|\varphi\| = R_n). \quad (7.266)$$

Из условия (7.265) вытекает, что

$$B\varphi(x, y) \geq \varphi(x, y) \quad (\varphi \in K, \quad \|\varphi\| = R_n^*). \quad (7.267)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно повторить соответствующую часть доказательства теоремы 7.26.

Без ограничения общности можно считать, что числа  $R_n$  и  $R_n^*$  перемежаются (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности):

$$R_1 < R_1^* < R_2 < R_2^* < \dots$$

Тогда оператор  $B$  на каждом слое  $R_n \leq \|\varphi\| \leq R_n^*$  ( $\varphi \in K$ ) является оператором сжатия, а на каждом слое  $R_n^* \leq \|\varphi\| \leq R_{n+1}$  ( $\varphi \in K$ ) — оператором растяжения. Поэтому во всех указанных слоях оператор  $B$  имеет по крайней мере по одной неподвижной точке.

Остается воспользоваться тем, что неподвижные точки оператора  $B$  совпадают с решениями краевой задачи (7.240) — (7.241).

Теорема доказана.

Теорема остается справедливой для случая, когда  $\alpha = 1$ , если условие (7.265) заменить условием

$$f(x, y, z, p, q) \leq a_n \ln^{1-\varepsilon}(2+z) \quad (0 \leq z \leq R_n^*), \quad (7.268)$$

где рост чисел  $a_n$  согласован с ростом чисел  $R_n^*$  неравен-

ствами

$$r_0 \sqrt{e^{a_n r_0^2 \ln^{1-\varepsilon}(2+R_n^*)} - 1} < R_n^*.$$

**11. Замечания.** 1. Доказанные в параграфе теоремы допускают обобщение на случай уравнений

$$\frac{rt - s^2}{R(p, q)} = f(x, y, z, p, q),$$

где  $R(p, q)$  отлична от  $(1 + p^2 + q^2)^\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ). Здесь следует только иметь в виду, что допустимые значения  $f(x, y, z, p, q)$  приходится существенно ограничивать сверху, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{R(p, q)} < \infty.$$

2. И. Я. Бакельманом установлены теоремы, из которых следует, что оператор

$$A_\alpha [E(x, y, z, p, q)r + F(x, y, z, p, q)s + \\ + G(x, y, z, p, q)t]$$

вполне непрерывен на конусе  $K$  (выпуклых функций) и оставляет этот конус инвариантным, если

$$0 \leq -E(x, y, z, p, q)\xi^2 - F(x, y, z, p, q)\xi\eta - \\ - G(x, y, z, p, q)\eta^2 \leq \frac{\xi^2 + \eta^2}{Q_1(p) + Q_2(q)}$$

где  $Q_1(p)$  и  $Q_2(q)$  неотрицательны и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{Q_1(p)} < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{Q_2(q)} < \infty.$$

Поэтому доказанные в параграфе теоремы допускают распространение на случай уравнений

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^\alpha} = E(x, y, z, p, q)r + F(x, y, z, p, q)s + \\ + G(x, y, z, p, q)t + f(x, y, z, p, q)$$

с квазилинейной частью.



## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ 1—7 ГЛАВ

### Глава I

#### Пространства с конусом

**§ 1. Основные определения.** Множество  $K$  образует, по определению, *конус* в вещественном банаховом пространстве  $E$ , если оно выпукло и замкнуто, если с каждым элементом  $x$  оно содержит все элементы  $\alpha x$  ( $\alpha \geq 0$ ) и если из  $x$ , —  $x \in K$  следует, что  $x = \theta$ , где  $\theta$  — нуль пространства  $E$ .

Основным примером конусов являются совокупности  $K_+$  неотрицательных функций в пространствах  $C$ ,  $L_p$  и т. д.

Конус называется *телесным*, если он содержит внутренние элементы; конус  $K$  *воспроизводящий*, если каждый элемент  $x \in E$  представим в виде  $x = u - v$ , где  $u, v \in K$ .

Конус неотрицательных функций в пространстве  $C$  телесен, в пространствах  $L_p$  не телесен, но воспроизводящий.

Пространство  $E$  с конусом  $K$  превращается в *полуупорядоченное пространство*, если считать, что  $x \leq u$ , если  $u - x \in K$ . Знак  $\leq$  обладает свойством обычного знака  $\leq$ : неравенства можно складывать и можно умножать на положительные числа; из  $x \leq u$  и  $u \leq z$  следует, что  $x \leq z$ ; в неравенствах можно переходить к пределу и т. д.

**§ 2. Нормальные конусы.** Наиболее часто приходится применять конусы, обладающие дополнительными свойствами. Конус  $K$  называется *нормальным*, если существует такое  $\delta > 0$ , что  $\|e_1 + e_2\| > \delta$ , если  $e_1 \in K$ ,  $e_2 \in K$  и  $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ . Конусы неотрицательных функций в пространствах  $C$  и  $L_p$  нормальны.

Норма в  $E$  называется *полумонотонной*, если для любых  $x, y \in K$  из  $x \leq y$  следует, что  $\|x\| \leq N\|y\|$ , где постоянная  $N$  не зависит от  $x$  и  $y$ .

**Теорема (1.2).** *Чтобы конус  $K$  был нормален, необходимо и достаточно, чтобы норма была полумонотонна.*

Пусть  $u_0$  — фиксированный ненулевой элемент из  $K$ . Через  $E_{u_0}$  обозначим совокупность всех таких  $x \in E$ , которые при некоторых положительных  $t$  удовлетворяют неравенствам  $-tu_0 \leq x \leq tu_0$ . Наименьшее  $t$ , при котором выполнены эти неравенства, называется  $u_0$ -нормой элемента  $x \in E_{u_0}$  и обозначается через  $\|x\|_{u_0}$ .

**Теорема (1.1).** *Чтобы конус  $K$  был нормален, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство*

$$\|x\| \leq M \|x\|_{u_0} \cdot \|u_0\| \quad (x \in E_{u_0}),$$

где  $M$  не зависит ни от  $x$ , ни от  $u_0$ .

**§ 3. Пространство  $E_{u_0}$ .** Если  $E$  — это пространство  $L_p$ ,  $K$  — конус неотрицательных функций,  $u_0(t) \equiv 1$ , то  $E_{u_0}$  — это пространство  $L_p$ .

**Теорема (1.3).** *Если конус  $K$  нормален, то  $E_{u_0}$  полно по  $u_0$ -норме.*

Через  $K_{u_0}$  обозначим пересечение  $K \cap E_{u_0}$ . Если  $E_{u_0}$  полно, то  $K_{u_0}$  образует в  $E_{u_0}$  телесный конус, который нормален. Более того, норма в  $E_{u_0}$  монотонна: из  $0 \leq x \leq u$  следует, что  $\|x\|_{u_0} \leq \|u\|_{u_0}$ .

Если конус  $K$  не обладает свойством нормальности, то  $E_{u_0}$  может не обладать свойством полноты. Через  $\bar{E}_{u_0}$  обозначим пополнение  $E_{u_0}$  по  $u_0$ -норме, через  $\bar{K}_{u_0}$  — замыкание  $K_{u_0}$  в  $\bar{E}_{u_0}$ .

**Теорема (1.4).**  *$\bar{K}_{u_0}$  является телесным и нормальным конусом в  $\bar{E}_{u_0}$ ; норма в  $\bar{E}_{u_0}$  монотонна.*

**§ 4. Линейные положительные функционалы.** Линейный функционал  $f(x)$  называется *положительным*, если  $f(x) \geq 0$  при  $x \in K$ . Все линейные положительные функционалы образуют конус  $K^*$  в сопряженном пространстве  $E^*$  (если  $K$  воспроизводящий). Множество положительных функционалов достаточно «обширно»: для каждого  $x_0 \in K$  ( $x_0 \neq 0$ ) можно указать такой положительный функционал  $f(x)$ , что  $f(x_0) > 0$ ; для любых двух элементов  $x_0, y_0 \in K$  можно указать такой положительный функционал  $f(x)$ , что  $f(x_0) \neq f(y_0)$ . Если пространство  $E$  сепарабельно, то можно указать такой положительный линейный функционал  $f(x)$ , что  $f(x) > 0$  при  $x \in K$  и  $x \neq 0$ .

Функционал  $f(x)$  называется *равномерно положительным*, если  $f(x) \geq a \|x\|$  ( $x \in K$ ). Конус  $K$ , по определению, *допускает оштукатуривание*, если существует такой конус  $K_1$ , что каждый ненулевой элемент  $x_0 \in K$  является внутренней точкой конуса  $K_1$  и, более того, лежит в конусе  $K_1$  вместе с шаровой окрестностью радиуса  $b \|x_0\|$ , где  $b$  не зависит от  $x_0$ . Каждый допускающий оштукатуривание конус нормален, но не каждый нормальный конус допускает оштукатуривание.

**Теорема (1.5).** *Конус  $K$  допускает оштукатуривание тогда и только тогда, если на  $K$  может быть определен равномерно положительный линейный функционал.*

Конус неотрицательных функций в пространствах  $C$  и  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) не допускает оштукатуривания. Конус неотрицательных функций в пространстве  $L$  допускает оштукатуривание.

Пусть  $F$  — замкнутое выпуклое ограниченное множество, не содержащее нуль  $0$  пространства  $E$ . Через  $K(F)$  обозначим совокуп-

ность всех элементов вида  $\alpha x$  ( $\alpha \geq 0$ ,  $x \in F$ ). Множества  $K(F)$  являются конусами, допускающими оштукатуривание.

**§ 5. Правильные конусы.** Конус  $K$  называется *правильным*, если каждая неубывающая последовательность  $x_n$  ( $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ ), ограниченная сверху некоторым элементом ( $x_n \leq z$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), сходится по норме.

**Теорема (1.6).** *Каждый правильный конус нормален.*

Из нормальности не вытекает правильность конуса.

Конус  $K$  называется *вполне правильным*, если каждая неубывающая последовательность  $x_n$ , ограниченная по норме ( $\|x_n\| \leq M$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), сходится по норме.

**Теорема (1.7).** *Каждый вполне правильный конус правилен.*

Конус неотрицательных функций в пространствах  $L_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) вполне правилен; конус неотрицательных функций в пространстве  $C$  не обладает даже свойством правильности. Существуют конусы правильные, но не вполне правильные. Правильный телесный конус вполне правилен (теорема 1.8).

**Теорема (1.9).** *Если пространство  $E$  слабо полно, то каждый правильный в этом пространстве конус вполне правилен.*

**§ 6. Признаки правильности конуса.** Положительный ( $f(x) \geq 0$  при  $x \in K$ ) не обязательно линейный функционал  $f(x)$  будем называть *строго растущим*, если для любых  $h_n \in K$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) из  $\|h_n\| \geq \varepsilon_0 > 0$  вытекает, что  $f(h_1 + \dots + h_n) \rightarrow \infty$ .

**Теорема (1.10).** *Если на конусе  $K$  может быть определен строго растущий функционал, ограниченный на каждом шаре, то конус  $K$  вполне правилен.*

**Теорема (1.11).** *Если на конусе  $K$  может быть определен строго растущий функционал  $f(x)$ , который монотонен (из  $0 \leq x \leq y$  следует, что  $f(x) \leq f(y)$ ), конус  $K$  правилен.*

**Теорема (1.12).** *Если конус  $K$  допускает оштукатуривание, то он вполне правилен.*

Обратное утверждение неверно, так как конус неотрицательных функций в пространствах  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) вполне правилен, но оштукатуривания не допускает.

**§ 7. Миниэдральные конусы.** Множество  $\mathfrak{M} \subseteq E$  называется *ограниченным*, если существует такой элемент  $z$ , что  $x \leq z$  ( $x \in \mathfrak{M}$ ). Элемент  $z$  называется при этом *верхней границей* для  $\mathfrak{M}$ . Если в множество  $\mathfrak{M}$  всех верхних границ есть такой элемент  $z_0$ , что  $z_0 \leq z$  при всех  $z \in \mathfrak{M}$ , то  $z_0$  называется *точной верхней границей* множества  $\mathfrak{M}$ .

Конус  $K$  называется *миниэдральным*, если каждое конечное число элементов  $x_1, \dots, x_n \in E$  имеет точную верхнюю границу  $z_0 = \sup \{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Теорема (1.14).** *Если конус  $K$  миниэдрален и правилен, то каждая ограниченная последовательность имеет точную верхнюю границу.*

Конус  $K$  называется *сильно миниздральным*, если каждое ограниченное множество имеет точную верхнюю границу.

**Теорема (1.15).** Пусть на миниздральном и правильном конусе  $K$  можно определить некоторый строго монотонный функционал  $f(x)$  (из  $x \leq y$  и  $x \neq y$  следует, что  $f(x) < f(y)$ ), обладающий тем свойством, что для каждой неубывающей последовательности  $x_n$  из  $\|x_n - x^*\| \rightarrow 0$  следует, что  $f(x_n) \rightarrow f(x^*)$ .

Тогда конус  $K$  сильно миниздрален.

Конус  $K$  неотрицательных функций в пространствах  $L_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) сильно миниздрален. Конус неотрицательных функций в пространстве  $C$  миниздрален, но не обладает свойством сильной миниздральности (более того, в  $C$  не каждая монотонная и ограниченная последовательность имеет точную верхнюю грань).

**§ 8. Пространства с двумя конусами.** Пусть в  $E$  заданы два конуса  $K_0$  и  $K$ , причем  $K_0 \subset K$ . Через  $K_0(x_0, y_0)$  обозначим совокупность элементов  $x \in K_0$ , удовлетворяющих неравенствам  $x_0 \leq x \leq y_0$  (в  $E$  полуупорядоченность введена при помощи «большого» конуса  $K$ ).

**Теорема (1.16).** Чтобы множества  $K_0(x_0, y_0)$  были ограничены при любых  $x_0, y_0 \in K$ , необходимо и достаточно, чтобы норма на  $K_0$  была полумонотонна.

В пространствах с двумя конусами естественным образом вводится понятие *K-правильности* конуса  $K_0$  (монотонные и ограниченные последовательности элементов из  $K_0$  сходятся по норме) и *полной K-правильности* конуса  $K_0$  (монотонные и ограниченные по норме последовательности из  $K_0$  сходятся по норме). Имеют место естественные связи между свойствами *K-правильности* и *полной K-правильности* и обычной *правильности* и *полной правильности*. Имеют место аналоги теорем, приведенных в § 5.

## Глава 2

### Линейные положительные операторы

**§ 1. Линейные  $u_0$ -положительные операторы.** Линейный оператор  $A$ , действующий в банаховом пространстве  $E$  с конусом  $K$ , называется *положительным*, если он оставляет конус  $K$  инвариантным, то есть если из  $x \geq 0$  следует  $Ax \geq 0$ . Каждый положительный линейный оператор *монотонен* в том смысле, что из  $x \leq y$  ( $x, y \in E$ ) следует неравенство  $Ax \leq Ay$ .

Положительный линейный оператор  $A$  называется *сильно положительным*, если конус  $K$  телесен и если для каждого ненулевого  $x \in K$  можно указать такое натуральное  $p$ , что  $A^p x$  — внутренний элемент конуса  $K$ .

Линейный интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_a^b k(t, s) x(s) ds, \quad (2.1)$$

действующий в функциональном пространстве  $E$  (например,  $C$  или  $L_p$ ), полуупорядоченном при помощи конуса  $K$  неотрицательных на  $\mathcal{Q}$  функций, будет положителен, если ядро  $k(t, s)$  неотрицательно. Если ядро  $k(t, s)$  положительно и непрерывно, то  $A$  сильно положителен в пространстве  $C$ .

Пусть  $u_0$  — фиксированный ненулевой элемент из  $K$ . Положительный линейный оператор  $A$  называется  $u_0$ -ограниченным сверху, если для каждого  $x \in K$  можно указать такое  $p$ , что  $A^p x \leq \beta u_0$  ( $\beta > 0$ ). Если конус  $K$  телесен, а  $u_0$  — внутренний элемент  $K$ , то каждый линейный положительный оператор  $u_0$ -ограничен сверху.

Оператор  $A$  называется  $u_0$ -ограниченным снизу, если для каждого ненулевого  $x \in K$  можно указать такое  $p$ , что  $A^p x \geq \alpha u_0$  ( $\alpha > 0$ ). Если для каждого  $x \in K$  ( $x \neq 0$ ) можно указать такое  $n$ , что  $au_0 \leq A^n x \leq \beta u_0$  ( $\alpha, \beta > 0$ ), то линейный оператор  $A$  называется  $u_0$ -положительным. Примером  $u_0$ -положительного оператора является каждый сильно положительный оператор.

**Теорема (2.2).** Если оператор  $A$  одновременно  $u_0$ -ограничен сверху и снизу, то он  $u_0$ -положителен.

Через  $K_{u_0, p}$  обозначается совокупность таких элементов  $x \in K$ , что  $au_0 \leq x \leq \rho au_0$  при некотором  $a \geq 0$ .  $K_{u_0, p}$  является конусом, который допускает оштукатуривание, если  $K$  нормален (теорема 1.13).

**Теорема (2.1).** Пусть линейный оператор  $A$  преобразует конус  $K$  в конус  $K_{u_0, p}$  и пусть из  $Ax = 0$  ( $x \in K$ ) следует, что  $x = 0$ . Тогда оператор  $A$   $u_0$ -положителен на каждом конусе  $K_{u_0, p+\varepsilon}$ .

Линейный оператор, оставляющий инвариантным конус  $K$ , называется равномерно положительным, если  $\|Ax\| \geq b\|x\|$  ( $x \in K$ ), где  $b > 0$ . Примером равномерно положительного оператора может служить единичный оператор  $I$ .

**Теорема (2.4).** Если на конусе  $K$  может быть определен равномерно положительный и вполне непрерывный оператор, то конус  $K$  допускает оштукатуривание.

В некоторых случаях из положительности линейного оператора можно сделать заключение о его непрерывности.

**Теорема (2.3).** Пусть  $E_1$  и  $E_2$  — два банаховых пространства с конусами соответственно  $K_1$  и  $K_2$ , первый из которых воспроизводящий, а второй нормален. Пусть действующий из  $E_1$  в  $E_2$  аддитивный и однородный оператор  $A$  положителен в том смысле, что  $AK_1 \subset K_2$ . Тогда  $A$  непрерывен.

**§ 2. Существование собственного вектора.** Ненулевой элемент  $x$  называется собственным вектором оператора  $A$ , если  $Ax = \lambda x$ , где  $\lambda$  — некоторое вещественное число, которое называют собственным значением оператора  $A$ . Если собственный вектор принадлежит  $K$ , то он называется положительным собственным вектором; соответствующее собственное значение  $\lambda$  называется позитивным. Каждый положительный линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве, имеет положительный собственный вектор. В случае бесконечномерных пространств этот факт места

не имеет. Например, линейный интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_0^t k(t, s) x(s) ds \quad (2.2)$$

с непрерывным положительным ядром  $k(t, s)$  не имеет не только положительных, но и никаких других собственных векторов в пространствах  $C$  и  $L_p$ , в которых этот оператор не только положителен, но и вполне непрерывен.

В связи с указанным примером возникает задача о дополнительных условиях, при которых положительный линейный оператор имеет собственные векторы.

**Теорема (2.5).** Пусть линейный положительный оператор  $A$  вполне непрерывен. Пусть для некоторого ненулевого элемента  $u$  ( $-u \in K$ ;  $u = v - w$ ,  $v \in K$ ,  $w \in K$ ) выполняется соотношение

$$A^p u \geq \alpha u \quad (\alpha > 0), \quad (2.3)$$

где  $p$  — некоторое натуральное число. Тогда оператор  $A$  имеет по крайней мере один положительный собственный вектор, причем соответствующее положительное собственное значение больше или равно  $\sqrt[p]{\alpha}$ .

Пример (2.2) показывает, что условие (2.3) существенно.

**Теорема (2.6).** Каждый равномерно положительный вполне непрерывный оператор имеет по крайней мере один положительный собственный вектор.

В заключение рассмотрим случай, когда пространство  $E$  слабо полно и единичный шар в  $E$  слабо компактен. Если в этом случае конус  $K$  допускает оштукатуривание, то (теорема 2.7) положительный собственный вектор есть у каждого линейного положительного оператора. Пример (2.2) показывает, что каждое из перечисленных условий существенно: оператор (2.2) положителен в пространствах  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) слабо полных и слабо компактных, но оператор (2.2) не имеет в  $L_p$  собственных векторов — дело в том, что конус неотрицательных функций в  $L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) не допускает оштукатуривания; оператор (2.2) положителен в  $L$ , в котором конус неотрицательных функций допускает оштукатуривание, но собственных векторов в  $L$  нет — пространство  $L$  не обладает свойством слабой полноты и слабый компактности.

Существует ряд более частных признаков существования собственного вектора в конусе (теоремы 2.8 и 2.9).

**§ 3. Простота положительного собственного значения.** Все предложения настоящего и следующего параграфов относятся к случаю, когда конус  $K$  воспроизводящий. Во всех теоремах предполагается, что рассматриваемый линейный положительный оператор  $A$  имеет положительное собственное значение.

Собственное значение  $\lambda_0$  линейного оператора  $A$  называется простым, если все решения уравнений  $(A - \lambda_0 I)^n x = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

являются одновременно решениями уравнения  $Ax = \lambda_0 x$ , причем множество решений последнего уравнения одномерно.

**Теорема (2.10 и 2.11).** Пусть оператор  $A$   $u_0$ -положителен. Тогда

- а) позитивное собственное значение  $\lambda_0$  оператора  $A$  простое,
- б) оператор  $A$  имеет единственный (с точностью до нормы) собственный вектор в конусе.

Подпространство  $\Pi \subset E$  называется инвариантным подпространством оператора  $A$ , если  $A\Pi \subset \Pi$ .

**Теорема (2.12).** Пусть оператор  $A$   $u_0$ -положителен и пусть  $\Pi$  — инвариантное подпространство оператора  $A$ , которому не принадлежит положительный собственный вектор оператора  $A$ . Пусть выполнено одно из трех условий:

- а) подпространство  $\Pi$  конечномерно,
- б) оператор  $A$  вполне непрерывен,
- в) подпространство  $\Pi$  слабо полно, единичный шар в  $\Pi$  слабо компактен, конус  $K \cap \Pi$  допускает ошутукивание.

Тогда пересечение подпространства  $\Pi$  с конусом  $K$  состоит из одной точки  $\theta$ .

Обе сформулированные теоремы относятся, например, к интегральным операторам, если некоторая итерация  $k_N(t, s)$  ядра  $k(t, s)$  удовлетворяет неравенствам

$$u_0(t) \leq k_N(t, s) \leq \rho u_0(t) \quad (t, s \in \Omega);$$

последние неравенства обеспечивают  $u_0$ -положительность оператора.

**§ 4. Сравнение с другими собственными значениями.** Комплексное число  $\lambda = \sigma + i\tau$  называется собственным значением линейного оператора  $A$ , действующего в вещественном банаховом пространстве  $E$ , если имеет место формальное равенство

$$Ax + iAy = (\sigma + i\tau)(x + iy),$$

то есть имеют место два равенства:

$$Ax = \sigma x - \tau y, \quad Ay = \tau x + \sigma y.$$

**Теорема (2.13).** Пусть  $\lambda_0$  — позитивное собственное значение  $u_0$ -положительного оператора  $A$ . Тогда каждое другое собственное значение  $\lambda$  оператора  $A$  удовлетворяет неравенству  $|\lambda| < \lambda_0$ .

Для  $u_0$ -ограниченных сверху (теорема 2.14) и  $u_0$ -ограниченных снизу (теорема 2.15) операторов справедливы более слабые утверждения.

**§ 5. Неоднородные линейные уравнения.** Рассмотрим уравнение

$$\lambda x = Ax + f \quad (2.4)$$

с положительным оператором  $A$ . Пусть  $\lambda_0$  — точная верхняя грань всех собственных значений оператора  $A$ .

**Теорема (2.16).** Если  $\lambda > \lambda_0$  и  $f \in K$ , то уравнение (2.4) имеет в  $K$  единственное решение.

Если  $\lambda \leq \lambda_0$  и  $A^n f \geq \epsilon u_0$  ( $\epsilon > 0$ ), где  $u_0$  — такой ненулевой элемент из  $K$ , что  $A^n u_0 \geq \lambda_0^n u_0$ , то уравнение (2.4) не имеет в  $K$  решений.

Вторую часть утверждения этой теоремы можно рассматривать как предположение о невозможности некоторых неравенств.

В дальнейшем будем писать  $x \leq y$ , если  $y - x \in K$ .

**Теорема (2.17, 2.18 и 2.19).** Пусть оператор  $Au_0$ -ограничен снизу, причем  $Au_0 \geq \lambda_0 u_0$ . Тогда для любого ненулевого  $x \in K$  при  $\lambda < \lambda_0$  выполнено соотношение  $Ax \leq \lambda x$ , а из  $Ax \leq \lambda_0 x$  ( $x \in K$ ) следует, что  $x = k u_0$  и  $Au_0 = \lambda_0 u_0$ .

Пусть  $Au_0$ -ограничен сверху и  $Au_0 \leq \lambda_0 u_0$ . Тогда для любого ненулевого  $x \in K$  при  $\lambda > \lambda_0$  выполнено соотношение  $Ax \geq \lambda x$ .

Пусть  $A$ , наконец,  $u_0$ -положителен и  $Au_0 = \lambda_0 u_0$ . Тогда для любого ненулевого и неколлинеарного  $u_0$  элемента  $x \in K$  элементы  $\lambda_0 x$  и  $Ax$  несравнимы:

$$Ax \leq \lambda_0 x, \quad Ax \geq \lambda_0 x.$$

### Глава 3

## Дифференцируемость по конусу

**§ 1. Производные по конусу.** При изучении нелинейных операторов существенную роль играют понятия производных, которые определяются обычным образом: выделением главных линейных частей приращений. В связи с тем, что для бесконечномерных пространств существуют различные понятия предела (сильный и слабый), приходится рассматривать различные понятия производных. Приведем основные определения.

Пусть

$$A(x_0 + h) - Ax_0 = A'(x_0)h + \omega(x_0, h), \quad (3.1)$$

где  $A'(x_0)$  — линейный оператор. Оператор  $A'(x_0)$  называется *слабой производной Гато* оператора  $A$  в точке  $x_0$ , если для каждого линейного функционала  $f(x)$  и каждого фиксированного  $h_0 \in E$ , выполняется равенство  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f[\omega(x_0, th_0)] = 0$ . Оператор  $A'(x_0)$  называется *сильной производной Гато*, если

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \|\omega(x_0, th_0)\| = 0$$

при любом фиксированном  $h_0 \in E$ . Оператор  $A'(x_0)$  называется *сильной* или *слабой производной Фреше*, если  $\frac{1}{\|h\|} \omega(x_0, h)$  при  $\|h\| \rightarrow 0$  стремится к нулю по норме сильно или соответственно слабо.



Если в приведенных определениях рассматривать лишь элементы  $h \in K$ , то вместо производной Гато мы получим определения *производных по конусу  $K$  (слабой и сильной)*, а вместо производных по Фреше — *производных Фреше по конусу (слабой и сильной)*.

Предположение о существовании производных по конусу является существенно меньшим ограничением, чем предположение о существовании соответствующей производной Гато или Фреше. Однако в некоторых случаях из существования производных по конусу вытекает дифференцируемость по Фреше.

Конус  $K$ , по определению, *несплющен*, если найдется такое  $M > 0$ , что для каждого  $x \in E$  найдется такой элемент  $u = u(x) \in K$ , что  $x \leq u$  и  $\|u\| \leq M \|x\|$ . Конусы неотрицательных функций в пространствах  $G$  и  $L_p$  несплющены. Класс несплющенных конусов совпадает с классом воспроизводящих конусов.

**Теорема (3.1).** Пусть конус  $K$  несплющен. Пусть оператор  $A$  имеет слабую производную  $A'(x)$  по конусу  $K$ , причем  $A'(x)$  непрерывно (по норме линейных операторов) зависит от  $x$ . Тогда  $A'(x)$  является сильной производной Фреше.

**Теорема (3.2).** Сильная производная Фреше по несплющенному конусу  $K$  от вполне непрерывного оператора является вполне непрерывным оператором.

## § 2. Производная на бесконечности. Пусть

$$Ax = A'(\infty)x + \omega(x), \quad (3.2)$$

где  $A'(\infty)$  — некоторый линейный оператор. Оператор  $A'(\infty)$  называется *слабой производной на бесконечности* оператора  $A$ , если при каждом фиксированном ненулевом  $x_0 \in E$  и любом линейном функционале  $f(x)$  отношение  $\frac{1}{t} f[\omega(tx_0)]$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Оператор  $A'(\infty)$  называется *сильной производной на бесконечности*, если при каждом ненулевом  $x_0 \in E$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  отношение  $\frac{1}{t} \|\omega(tx_0)\|$ . Оператор  $A$  называется *асимптотически линейным (сильно или слабо)*, если при  $\|x\| \rightarrow \infty$  стремится к нулю отношение  $\frac{1}{\|x\|} \omega(x)$  (сильно или слабо); оператор  $A'(\infty)$  в этом случае называется *асимптотической производной (сильной или слабой)*.

Если в приведенных определениях рассматриваются лишь элементы  $x \in K$ , то мы приходим к определениям *производных и асимптотических производных по конусу  $K$* .

В естественных предположениях производная  $A'(\infty)$  на бесконечности может быть получена как предел обычных производных  $A'(x)$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ . Так, например,

**Теорема (3.3).** Оператор  $B$  является сильной асимптотической производной оператора  $A$ , если  $A$  имеет слабую производную Гато  $A'(x)$  в каждой точке  $x$  с достаточно большой нормой и если  $\|A'(x) - B\| \rightarrow 0$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

**Теорема (3.4).** *Оператор  $B$  является сильной асимптотической производной по конусу  $K$ , если  $B$  является пределом по норме операторов при  $\|x\| \rightarrow \infty$  и  $x \in K$  слабых производных Гато  $A'(x)$  по конусу и если при каждом  $R$  выполнено неравенство*

$$\|Ax\| \leq a(R) \quad (x \in K, \|x\| \leq R).$$

Для асимптотических производных по конусу вполне непрерывных операторов справедлива теорема, аналогичная второй теореме предыдущего пункта.

**§ 3. Неравенства для элементов с малыми нормами.** Здесь предполагается, что  $A\theta = \theta$ . Рассматривается вопрос о том, существуют ли такие ненулевые элементы  $x_0$  с малыми нормами, что  $Ax_0 \geq x_0$  или  $Ax_0 \leq x_0$ . Если  $Ax_0 \geq x_0$ , то будем говорить, что элемент  $x_0$  «идет вперед» при применении оператора  $A$ . Если  $Ax_0 \leq x_0$ , то элемент  $x_0$  «идет назад». Если  $Ax \leq x$  для всех ненулевых элементов  $x$  из  $K$  с достаточно малой нормой, то точку  $\theta$  будем называть *отталкивающей* для оператора  $A$ . Если для ненулевых элементов  $x \in K$  с малой нормой выполнено соотношение  $Ax \geq x$ , то точку  $\theta$  назовем *притягивающей*.

Так как изучаются значения оператора  $A$  на элементах с малой нормой, то естественно ожидать, что в основных случаях ответ на поставленный вопрос может быть дан в терминах, относящихся к свойствам производной  $A'(\theta)$ .

Предположим, что  $A'(\theta)$  — сильная производная оператора  $A$  по конусу, и пусть

$$A'(\theta)h_0 = \lambda_0 h_0 \quad (h_0 \in K, h_0 \neq \theta, \lambda_0 > 0). \quad (3.3)$$

**Теорема (3.4 и 3.6).** *Пусть выполнено одно из двух условий:*

а) конус  $K$  телесен,  $h_0$  — внутренний элемент конуса  $K$ ,

б)  $\|A(\epsilon h_0) - \epsilon A'(\theta)h_0\|_{h_0} = o(\epsilon)$ .

Тогда элементы  $\epsilon h_0$  при малых  $\epsilon > 0$  идут вперед, если  $\lambda_0 > 1$ , и идут назад, если  $\lambda_0 < 1$ .

Предположим дополнительно, что  $A$  допускает представление

$$Ax = A'(\theta)x + Cx + Dx, \quad (3.4)$$

где  $C$  — однородный оператор порядка  $k > 1$  ( $C(tx) \equiv t^k Cx$ ), а  $D$  — оператор высшего порядка малости ( $\|D(tx)\| = o(t^k)$ ).

**Теорема (3.5 и 3.6).** *Пусть  $\lambda_0 = 1$ . Пусть выполнено либо условие (а) предыдущей теоремы, либо условие (б) и соотношение  $\|D(\epsilon h_0)\|_{h_0} = o(\epsilon^k)$ .*

Тогда элементы  $\epsilon h_0$  при малых  $\epsilon > 0$  идут вперед, если  $\alpha h_0 \leq Ch_0 \leq \beta h_0$  ( $\alpha, \beta > 0$ ), и идут назад, если  $\alpha h_0 \leq -Ch_0 \leq \beta h_0$  ( $\alpha, \beta > 0$ ).

Оператор  $A$  называется *равномерно  $h_0$ -ограниченным сверху*, если для каждого достаточно малого  $\epsilon > 0$  можно указать такое  $r = r(\epsilon) > 0$ , что  $Ax \leq \epsilon h_0$  ( $x \in K, \|x\| \leq r$ ). Если конус  $K$  телесен и  $h_0$  — внутренний элемент  $K$ , то равномерно  $h_0$ -ограниченными сверху будут все непрерывные в точке  $\theta$  операторы, удовлетворяющие условию  $A\theta = \theta$ .

**теорема (3.7).** Пусть  $A'(\theta)$  является сильной производной Фреше по конусу вполне непрерывного оператора  $A$ , который монотонен и равномерно  $h_0$ -ограничен ( $h_0$  удовлетворяет равенству (3.3)). Пусть выполнено одно из условий а или б первой теоремы настоящего параграфа, причем при условии б предполагается, что  $\lambda_0$  — наибольшее собственное значение оператора  $A'(\theta)$ . Пусть конус  $K$  нормален и  $\lambda_0 < 1$ .

Тогда  $\theta$  является притягивающей точкой для оператора  $A$ .

Это утверждение сохраняет силу, если условие полной непрерывности оператора  $A$  заменить предположением о слабой непрерывности, а условие нормальности конуса заменить предположением о слабой полноте и слабой компактности шара в  $E$  и о том, что  $K$  допускает оштукатуривание.

Линейный оператор  $B$ , по определению,  $K$ -расщепляем, если он имеет в  $K$  собственный вектор  $h_0$  и имеет такое инвариантное подпространство  $E_1 \subseteq E$  дефекта 1, которое имеет с  $K$  общим лишь нулевой элемент  $\theta$ . Это значит, что каждый элемент  $x \in E$  однозначно представим в виде

$$x = f(x) h_0 + x_1 \quad (x_1 \in E_1), \quad (3.5)$$

где линейный функционал  $f(x)$  удовлетворяет условиям  $f(h_0) = 1$  и  $f(x_1) = 0$  при  $x_1 \in E_1$ . При этом

$$Bx = \lambda_0 f(x) h_0 + Bx_1.$$

Примером  $K$ -расщепляемого оператора может служить каждый  $u_0$ -положительный линейный вполне непрерывный оператор.

**теорема (3.8).** Пусть сильная производная Фреше  $A'(\theta)$  по конусу является  $K$ -расщепляемым оператором, причем функционал  $f(x)$  в представлении (3.5) равномерно положителен. Пусть  $\lambda_0 < 1$ .

Тогда  $\theta$  является притягивающей точкой для оператора  $A$ .

Имеют место аналоги последних двух теорем, в которых даются признаки того, что  $\theta$  является отталкивающей точкой для оператора  $A$ . Основное изменение в этих аналогах (теоремы 3.9 и 3.10) заключается в переходе от неравенства  $\lambda_0 < 1$  к неравенству  $\lambda_0 > 1$ .

**§ 4. Неравенства для элементов с большими нормами.** Для общей характеристики значений оператора  $A$  на элементах  $x$ , имеющих большую норму, может быть использована производная  $A'(\infty)$ . Имеют место утверждения (теоремы 3.11—3.13), аналогичные предложениям, приведенным в предыдущем параграфе. Основным результатом можно формулировать следующим образом.

Пусть положительный оператор  $A'(\infty)$  имеет в конусе  $K$  единственный собственный вектор  $g_0$ :

$$A'(\infty) g_0 = \lambda_\infty g_0.$$

Тогда элементы  $tg_0$  при больших  $t$ , вообще говоря, идут вперед, если  $\lambda_\infty > 1$ , и идут назад, если  $\lambda_\infty < 1$ . При  $\lambda_\infty > 1$  все элементы  $x \in K$  с большой нормой удовлетворяют, вообще говоря, соотношению  $Ax \leq x$ , а при  $\lambda_\infty < 1$  — соотношению  $Ax \geq x$ .

## Глава 4

## Существование положительных решений

**§ 1. Уравнения с монотонными операторами.** Через  $\langle x_0, u_0 \rangle$  означает совокупность всех таких элементов  $x \in E$ , что  $x \leq u_0$ ; эта совокупность называется *конусным отрезком*.

**Теорема (4.1).** Для существования у монотонного на  $\langle x_0, u_0 \rangle$  оператора  $A$  по крайней мере одной неподвижной точки достаточно, чтобы он преобразовывал  $\langle x_0, u_0 \rangle$  в себя и чтобы выполнялось одно из следующих четырех условий:

- а) конус  $K$  сильно миниздрален,
- б) конус  $K$  правилен, оператор  $A$  непрерывен,
- в) конус  $K$  нормален, оператор  $A$  вполне непрерывен,
- г) конус  $K$  нормален; пространство  $E$  слабо полно, и единственный шар в  $E$  слабо компактен; оператор  $A$  слабо непрерывен.

В условиях этой теоремы, как показывают примеры, решение может быть не единственным.

При условии  $a$  неподвижная точка  $x^*$  оператора  $A$  конструируется как супремум таких  $x \in \langle x_0, u_0 \rangle$ , что  $Ax \geq x$ . При остальных условиях точка  $x^*$  может быть получена как предел последовательных приближений  $x_n = Ax_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Применения теоремы требуют построения такого конусного резка  $\langle x_0, u_0 \rangle$ , который преобразуется оператором  $A$  в себя. Иначе говоря, нужно найти такие элементы  $x_0$  и  $u_0$  ( $x_0 \leq u_0$ ), что  $Ax_0 \leq u_0$  и  $u_0 \geq Au_0$ . Если искать элементы  $x_0$  с малой нормой, а  $u_0$  с большой, то можно применять теоремы гл. 3.

Существует ряд отличных от  $a$ — $г$  дополнительных условий существования неподвижных точек у монотонных операторов, остающихся инвариантным конусный отрезок или другую часть конуса. Приведем еще одно утверждение.

**Теорема (4.5).** Пусть положительный, монотонный и непрерывный оператор  $A$  имеет сильную асимптотическую производную  $A'(\infty)$  по конусу  $K$ . Пусть спектр линейного оператора  $A'(\infty)$  лежит в круге радиуса  $\rho_0 < 1$ . Пусть конус  $K$  вполне авилен.

Тогда оператор  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну неподвижную точку.

**§ 2. Уравнения с немонотонными операторами.** Наиболее устойчивый путь для доказательства существования в конусе  $K$  неподвижных точек у положительного оператора  $A$  заключается в отыскании инвариантных для  $A$  выпуклых множеств  $T \subset K$ . Если такие множества существуют и если их удастся найти, то в большинстве случаев остается применить принцип Шаудера или принцип Тихонова. Построение инвариантных множеств иногда требует специальных конструкций, но в основных случаях не требует преодоления каких-либо трудностей.

**Теорема (4.7).** Пусть положительный вполне непрерывный оператор  $A$  имеет сильную асимптотическую производную  $A'(\infty)$

по конусу и пусть спектр линейного оператора  $A'(\infty)$  лежит в круге  $|\lambda| \leq \rho_0$ , где  $\rho_0 < 1$ .

Тогда оператор  $A$  имеет в конусе  $K$  по крайней мере одну неподвижную точку.

**Теорема (4.9).** Пусть положительный вполне непрерывный оператор  $A$  удовлетворяет условию: существует такое  $R$ , что при всех  $\varepsilon > 0$

$$Ax \geq (1 + \varepsilon)x \quad (x \in K, \|x\| = R). \quad (4.1)$$

Тогда оператор  $A$  имеет в конусе  $K$  по крайней мере одну неподвижную точку.

Для проверки условия (4.1) удобно рассматривать различные мажоранты  $A^+$  оператора  $A$ : если это условие выполнено для мажоранты, то оно тем более выполнено для самого оператора  $A$ . Проверку условия (4.1) для оператора  $A$  или его мажоранты  $A^+$  можно провести, опираясь на теоремы, доказанные в гл. 3.

Предположим теперь, что  $A^0 = \theta$ , и поставим вопрос о существовании у положительного оператора  $A$  ненулевого положительного решения. Достаточные условия существования таких решений указанные в главе, вытекают из следующего простого геометрического соображения.

Пусть ненулевые элементы из конуса  $K$  с малыми нормами при применении оператора  $A$  идут вперед, а элементы с большими нормами — назад. Пусть конус  $K$  не только нормален, но, более того, норма монотонна. Тогда оператор  $A$  оставляет инвариантными пересечение конуса  $K$  с некоторым шаровым слоем  $0 < r \leq \|x\| \leq R < \infty$ . Если  $A$  вполне непрерывен, то существование неподвижной точки вытекает из принципа Шаудера. Перечисленные условия чрезвычайно ограничительны; однако их удается заменить более простыми и легко проверяемыми.

**Теорема (4.11).** Пусть положительный вполне непрерывный оператор  $A$  ( $A^0 = \theta$ ) имеет сильную производную Фреша  $A'(\theta)$  и сильную асимптотическую производную  $A'(\infty)$  по конусу. Пусть спектр оператора  $A'(\infty)$  лежит в круге  $|\lambda| \leq \rho_0$ , где  $\rho_0 < 1$ . Пусть оператор  $A'(\theta)$  имеет в  $K$  собственный вектор, которому соответствует собственное значение  $\lambda_0 > 1$ , и  $A'(\theta)$  не имеет в  $K$  собственных векторов, которым соответствует собственное значение, равное 1.

Тогда  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Будем говорить, что оператор  $A$  ( $A^0 = \theta$ ) является сжатием конуса, если выполнено условие (4.1) и если найдется такое  $r > 0$ , что

$$Ax \leq x \quad (x \in K, \|x\| \leq r, x \neq \theta). \quad (4.2)$$

**Теорема (4.12).** Пусть положительный вполне непрерывный оператор  $A$  является сжатием конуса. Тогда  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну неподвижную ненулевую точку.

Проверка условия (4.2) в ряде случаев упрощается, если привлечь к рассмотрению миноранты  $A^-$  оператора  $A$ .

**§ 3. Вспомогательные утверждения.** Последние две теоремы особо простой смысл имеют в случае, когда  $K$  — одномерный конус, то есть, когда  $Ax = f(x)$  — неотрицательная функция неотрицательной числовой переменной. Условие существования положительной неподвижной точки в этих теоремах заключается в том, что при малых  $x$  выполняется неравенство  $f(x) > x$ , а при больших — неравенство  $f(x) < x$ .

В одномерном случае, очевидно, для существования неподвижной точки достаточно, чтобы при малых  $x$  выполнялось неравенство  $f(x) < x$ , а при больших  $x$  — противоположное неравенство  $f(x) > x$ . В этих условиях неподвижная точка есть, но инвариантных отрезков, вообще говоря, нет. Поэтому ясно, что обобщение на бесконечномерный случай, если такое обобщение можно указать, не может быть основано на непосредственном применении принципов неподвижной точки типа принципа Шаудера или принципа Тихонова — нужны новые топологические теоремы.

Приведем основное утверждение, на котором основано изучение вполне непрерывных операторов.

**Теорема (лемма 4.5).** Пусть вполне непрерывный оператор  $A$  положителен на множестве  $T = T\{x: x \in K, r \leq \|x\| \leq R\}$  и удовлетворяет условиям

$$Ax \equiv v_0 \quad \text{при } x \in K, \quad \|x\| = r,$$

$$Ax \equiv u_0 \quad \text{при } x \in K, \quad \|x\| = R,$$

где  $\|v_0\| < r < R < \|u_0\|$ .

Тогда  $A$  имеет на  $T$  по крайней мере одну неподвижную точку.

**§ 4. Неподвижные точки операторов, растягивающих конус.** Положительный оператор  $A$  ( $A0 = 0$ ) называется *растяжением* конуса  $K$ , если найдутся такие  $r$  и  $R$ , что при всех  $\varepsilon > 0$

$$Ax \geq (1 + \varepsilon)x \quad (x \in K, \quad \|x\| \leq r) \quad (4.3)$$

и

$$Ax \leq x \quad (x \in K, \quad \|x\| \geq R). \quad (4.4)$$

**Теорема (4.14).** Пусть положительный вполне непрерывный оператор  $A$  является растяжением конуса. Тогда  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Проверка условий (4.3) и (4.4) может быть упрощена, если привлечь мажоранты  $A^+$  и миноранты  $A^-$  оператора  $A$ .

**Теорема (4.16).** Пусть сильная производная Фреше  $A'(\theta)$  по конусу не имеет позитивных собственных значений, превосходящих или равных 1. Пусть сильная асимптотическая производная  $A'(\infty)$  по конусу имеет позитивное собственное значение  $\lambda_\infty > 1$  и не имеет 1 своим позитивным собственным значением.

Тогда оператор  $A$  имеет на  $K$  по крайней мере одну неподвижную ненулевую точку.

Допустим дополнительно, что пространство  $E$  слабо полно, единичный шар в  $E$  слабо компактен, конус  $K$  допускает оштукатурирование. В этих предположениях почти все утверждения главы сохраняют силу, если предположение о полной непрерывности оператора  $A$  заменить предположением о его слабой непрерывности.

## Глава 5

### Непрерывные ветви положительных решений

§ 1. Положительные решения уравнений с параметром  
Изучается уравнение

$$x = A(x; \mu) \quad (5.1)$$

с положительным оператором  $A(x; \mu)$ , зависящим от числового параметра  $\mu$ . Предполагается, что  $A(x; \mu)$  вполне непрерывен как оператор от двух переменных.

Для доказательства существования решений при фиксированных значениях параметра  $\mu$  применяются результаты предыдущей главы. Приведем в качестве примера одно утверждение.

Предположим, что оператор  $A$  при каждом фиксированном  $\mu$  имеет сильную производную Фреше  $A'(\theta; \mu)$  по конусу вида

$$A'(\theta; \mu) = \mu A'(\theta)$$

и сильную асимптотическую производную  $A'(\infty; \mu)$  вида

$$A'(\infty; \mu) = \mu A'(\infty).$$

**Теорема (5.1).** Пусть каждый из линейных операторов  $A'(\theta)$  и  $A'(\infty)$  имеет единственное позитивное собственное значение, которое обозначим соответственно  $\lambda_0$  и  $\lambda_\infty$ . Пусть  $A(\theta; \mu) \equiv 0$ .

Тогда уравнение (5.1) при каждом  $\mu \in \left(\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_\infty}\right)$  имеет в конусе  $K$  по крайней мере одно ненулевое решение  $x(\mu)$ .

Если решение  $x(\mu)$  единственно, то оно непрерывно зависит от параметра  $\mu$ . В общем случае единственность решения  $x(\mu)$  места не имеет; поэтому непрерывную зависимость нужно понимать в некотором обобщенном смысле.

Множество  $\mathfrak{M} \subset E$  образует, по определению, непрерывную ветвь, связывающую ограниченное замкнутое множество  $F \subset E$  с множеством  $F_1$ , если непусто пересечение множества  $\mathfrak{M}$  с границей каждой ограниченной области, содержащей  $F$  и не имеющей общих точек с  $F_1$ .

Обозначим через  $X(\mu)$  множество всех решений  $x(\mu) \in K$  уравнения (5.1) при данном фиксированном значении параметра  $\mu$ . Если  $A(x; \mu)$  вполне непрерывен, то каждое  $X(\mu)$  замкнуто и локально компактно. Оказывается (теорема 5.4), что в приведенных выше условиях (при мало существенных дополнительных предположениях)

множество  $\mathfrak{N}$  всех решений уравнения (5.1) при всех  $\mu$  из промежутка

$$[\mu_1, \mu_2] \subset \left( \frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_\infty} \right)$$

образует непрерывную ветвь, связывающую множества  $X(\mu_1)$  и  $X(\mu_2)$ .

В специальном случае, когда уравнение (5.1) имеет вид

$$x = \mu Ax, \quad (5.2)$$

ненулевые решения  $x(\mu)$  называют *собственными векторами* нелинейного оператора  $A$ . Этот термин принят по аналогии с теорией линейных операторов, хотя роль собственных векторов в теории нелинейных уравнений весьма скромна из-за отсутствия принципа суперпозиции. Собственные векторы или собственные функции — это только ненулевые решения.

Уравнение (5.2) часто пишут в виде

$$Ax = \lambda x. \quad (5.3)$$

Значения  $\lambda$ , при которых уравнение (5.3) имеет ненулевые решения, называют *собственными значениями*. Совокупность собственных значений называют *спектром* оператора  $A$ .

**Теорема (5.5).** Пусть  $\Gamma$  — граница открытого ограниченного множества  $\mathfrak{G} \subset E$ , внутренней точкой которого является  $\emptyset$ . Пусть на  $\Gamma \cap K$  определен положительный вполне непрерывный оператор  $A$ , причем

$$\inf_{x \in \Gamma \cap K} \|Ax\| > 0. \quad (5.4)$$

Тогда оператор  $A$  имеет на  $\Gamma \cap K$  по крайней мере один собственный вектор  $x_0$ ,  $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ , которому соответствует положительное собственное значение  $\lambda_0$ .

Положительные векторы оператора  $A$  образуют, по определению, непрерывную ветвь  $\mathfrak{N}$  длины  $r$ , если эта совокупность  $\mathfrak{N}$  всех положительных собственных векторов имеет непустое пересечение с границей  $\Gamma$  каждого множества, содержащего  $\emptyset$  и содержащегося в шаре  $\|x\| < r$ . Из последней теоремы вытекает, что положительные собственные векторы положительного вполне непрерывного оператора  $A$  образуют непрерывную ветвь некоторой длины  $r$ , если  $A\emptyset \neq \emptyset$ .

**§ 2. Некоторые топологические теоремы.** Последние две (из приведенных в предыдущем пункте) теоремы имеют топологическую природу. Оказывается, что их доказательство требует либо применения теории степеней отображений, либо применения теории вращения векторных полей.

**§ 3. Операторы с монотонными минорантами.** Условие (5.4) ограничительно, поэтому важны теоремы существования собственных векторов, в которых нет этого условия. Основным метод дока-



зательства таких теорем заключается в построении таких операторов  $A_n$ , которые удовлетворяют условию (5.4) и которые сходятся к оператору  $A$ . Тогда существует такая последовательность  $x_n$ , что  $A_n x_n = \lambda_n x_n$ , где  $\lambda_n$  — некоторые неизвестные числа. Последовательность  $A_n x_n$  можно считать сходящейся, если  $A$  вполне непрерывен. Поэтому для доказательства существования собственного вектора у предельного оператора  $A$  нужно иметь возможность совершить по некоторой подпоследовательности индексов предельный переход, а для этого достаточно, чтобы числа  $\lambda_n$  были ограничены снизу некоторым положительным числом. Доказательство ограниченности снизу чисел  $\lambda_n$  представляет основные трудности.

Приведем основной результат.

**Т е о р е м а (5.8).** Пусть положительный вполне непрерывный оператор  $A$  имеет на множестве  $K_r = K_r \{x: x \in K, \|x\| \leq r\}$  монотонную миноранту  $B: B$  монотонен и

$$Ax \geq Bx \quad (x \in K_r). \quad (5.5)$$

Пусть существует такой ненулевой элемент  $u \in K$ , что

$$B(tu) \geq atu \quad (0 \leq t \leq \gamma), \quad (5.6)$$

где  $\alpha > 0$  и  $\gamma$  — такое число, что из  $x \geq tu$  и  $\|x\| \leq r$  вытекает что  $t \leq \gamma$ .

Тогда  $A$  имеет в конусе  $K$  непрерывную ветвь длины  $r$  собственных векторов.

Если  $B$  — линейный оператор, то условие (5.6) принимает простой вид:  $Bu \geq \alpha u$ .

Понятие непрерывной ветви решений находит применение в вопросах, связанных с продолжением решений. Обычный метод продолжения решения по параметру существенно связан с локальной единственностью решения при каждом рассматриваемом значении параметра. Ясно, что в существенно нелинейных задачах такая единственность места не имеет — при изменении параметра решения разветвляются, снова сливаются, появляются континуумы решений и т. д. Однако понятие непрерывной ветви позволяет описать общий принцип топологического продолжения (или топологического включения), охватывающий случай, когда при изменении параметра единственность решения не может быть гарантирована. Опишем этот общий принцип.

Допустим, что нужно доказать существование решения в уравнениях  $x = Ax$ . Пытаемся ввести в уравнение числовой параметр  $\mu$  так, чтобы новое уравнение (5.1) обращалось в первоначальное уравнение при  $\mu = 1$  и чтобы для уравнения (5.1) можно было установить существование непрерывной ветви  $\mathcal{U}$  решений, соответствующих некоторым неизвестным значениям параметра  $\mu$ . Если параметр  $\mu$  введен удачно, то в ряде случаев удастся показать, что значения параметра  $\mu$ , при которых уравнение (5.1) разрешимо, стремятся к некоторым пределам  $\mu_0$  и  $\mu_\infty$ , когда нормы решений, например, стремятся к нулю и к бесконечности. Из того факта, что решения образуют непрерывную ветвь, нужно сделать вывод (этот вывод удастся сделать при естественных ограничениях), что решения суще-

ствуют при всех  $\mu \in (\mu_0, \mu_\infty)$ . Таким образом, существование решения доказано, если  $1 \in (\mu_0, \mu_\infty)$ .

Проведение описанной схемы, в частности, требует отыскания тех пределов, к которым стремятся значения параметра, когда нормы решений стремятся к нулю или неограниченно возрастают. Если решения — положительные собственные векторы, то предельные значения параметра совпадают, вообще говоря, с положительными собственными значениями операторов  $A'(\theta)$  и  $A'(\infty)$ .

## Глава 6

### Уравнения с вогнутыми операторами

**§ 1. Единственность положительного решения и сходимость последовательных приближений.** Пусть  $u_0$  — некоторый фиксированный ненулевой элемент из конуса  $K$ .

Оператор  $A$  назовем *вогнутым*, если для любого ненулевого  $x \in K$  справедливы неравенства

$$\alpha(x) u_0 \leq Ax \leq \beta(x) u_0, \quad (6.1)$$

где  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  положительны, и если для каждого такого элемента  $x \in K$ , что  $\alpha_1(x) u_0 \leq x \leq \beta_1(x) u_0$  ( $\alpha_1(x) > 0$ ,  $\beta_1(x) > 0$ ), справедливы соотношения

$$A(tx) \geq tAx \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (6.2)$$

**Теорема (6.1).** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — ненулевые положительные решения уравнения

$$Ax = \lambda x \quad (6.3)$$

с вогнутым и монотонным оператором  $A$ , соответствующие различным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  параметра  $\lambda$ . Тогда из  $\lambda_1 < \lambda_2$  следует, что  $x_1 \geq x_2$ .

В условиях этой теоремы уравнение имеет ненулевые решения и при всех  $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ , если (теорема 6.2) выполнено одно из дополнительных условий:

- а) конус  $K$  сильно миниедрален,
- б) конус  $K$  правилен и оператор  $A$  непрерывен,
- в) конус  $K$  нормален и оператор  $A$  вполне непрерывен.

Вогнутый оператор  $A$  называется  *$u_0$ -вогнутым*, если условие (6.2) замещено более жестким ограничением: для каждого числа  $t_0 \in (0, 1)$  можно указать такое  $\eta = \eta(x; t_0) > 0$ , что

$$A(t_0 x) \geq (1 + \eta) t_0 Ax. \quad (6.4)$$

**Теорема (6.3).** Уравнение (6.3) с монотонным и  $u_0$ -вогнутым оператором  $A$  не может иметь в конусе  $K$  двух ненулевых решений ни при каком значении параметра  $\lambda$ .

Утверждение этой теоремы справедливо и для таких операторов  $A$ , некоторая степень  $A^p$  которых является  $u_0$ -вогнутым оператором. Указывается класс операторов, квадрат которых является  $u_0$ -вогнутым оператором.

Для нелинейных операторов справедливы признаки вогнутости, выраженные в свойствах производных, аналогичные соответствующим признакам вогнутости скалярных функций.

**Теорема (6.6).** Пусть  $x^*$  — единственное ненулевое положительное решение уравнения  $Ax = x$  с вогнутым и монотонным оператором  $A$ . Пусть выполнено одно из условий:

- а) конус  $K$  правилен и оператор  $A$  непрерывен,
- б) конус  $K$  нормален и оператор  $A$  вполне непрерывен.

Тогда последовательные приближения

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.5)$$

сходятся по норме к  $x^*$ , каково бы ни было начальное приближение  $x_0 \in K$ ,  $x_0 \neq 0$ .

Если оператор  $A$  монотонен и  $u_0$ -вогнут, а конус  $K$  нормален, то утверждение этой теоремы сохраняется без предположения о непрерывности оператора  $A$ . Более того, для уравнений с  $u_0$ -вогнутыми операторами последовательные приближения (6.5) при любом  $x_0 \in K$  ( $x_0 \neq 0$ ) сходятся к  $x^*$  по  $u_0$ -норме (теорема 6.7).

**§ 2. Существование континуума собственных векторов.** Для уравнений (6.3) с вогнутыми вполне непрерывными операторами существование непрерывной ветви решений при некоторых значениях  $\lambda$  вытекает из общих результатов гл. 5. В объединении с теоремами единственности это приводит к следующему результату:

**Теорема (6.8).** Позитивный спектр монотонного и  $u_0$ -вогнутого вполне непрерывного оператора  $A$  образует интервал  $(\lambda_\infty, \lambda_0)$ . Решения  $x(\lambda)$  ( $\lambda_\infty < \lambda < \lambda_0$ ) уравнения (6.3) образуют однозначную непрерывную и убывающую вектор-функцию.

Для вогнутых операторов, не обладающих свойством полной непрерывности, существование положительных собственных векторов не доказано. Но если известно, что есть один собственный вектор, то в случае вполне правильных конусов справедливы все утверждения сформулированной теоремы.

Границы  $\lambda_0$  и  $\lambda_\infty$  позитивного спектра оператора  $A$  определяются (теоремы 6.10 и 6.11), вообще говоря, как позитивное собственное значение сильной производной Фреше  $A'(\theta)$  по конусу и сильной асимптотической производной  $A'(\infty)$  по конусу.

Все утверждения, относящиеся к уравнениям с вогнутыми операторами, естественным образом обобщаются на случай, когда оператор  $A$  определен не на всем конусе  $K$ , а на некотором замкнутом множестве  $T \subset K$ , обладающем тем свойством, что каждый элемент  $x$  принадлежит  $T$  вместе со всеми элементами  $tx$  ( $0 \leq t \leq 1$ ).

**§ 3. Уравнения с выпуклыми операторами.** Оператор  $A$  называется  $u_0$ -выпуклым, если выполнено условие (6.1) и если для каждого такого элемента  $x \in K$ , что  $\alpha_1(x)u_0 \leq x \leq \beta_1(x)u_0$  ( $\alpha_1(x) > 0$ ,  $\beta_1(x) > 0$ ), и для каждого  $t_0 \in (0, 1)$  можно указать такое положительное  $\eta = \eta(x, t_0)$ , что

$$A(t_0x) \leq (1 - \eta)t_0Ax. \quad (6.6)$$

Для уравнений с выпуклыми операторами не имеют места многие утверждения, верные для уравнений с вогнутыми операторами. В частности, неверна без существенных дополнительных предположений теорема о единственности положительного решения.

**Принцип единственности.** Пусть  $x^*$  и  $x^{**}$  — ненулевые положительные решения уравнения (6.3) с монотонным  $\lambda_0$ -выпуклым оператором  $A$ . Пусть конус  $K$  телесен и один из элементов  $x^* - x^{**}$ ,  $x^{**} - x^*$  может быть либо нулем, либо внутренним элементом конуса. Тогда  $x^* = x^{**}$ .

**§ 4. Приложения к задаче о точках бифуркации.** Допустим, что  $A^0 = \theta$ . Тогда уравнение (6.3) имеет тривиальное нулевое решение  $\theta$  при всех значениях числового параметра  $\lambda$ . Число  $\lambda_0$  ( $\lambda_0 > 0$ ) называется *точкой бифуркации* для оператора  $A$ , если каждому  $\varepsilon > 0$  соответствует такое значение  $\lambda$ , которое удовлетворяет неравенству  $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$  и при котором уравнение (6.3) имеет по крайней мере одно ненулевое решение  $x(\lambda)$ , удовлетворяющее условию  $\|x(\lambda)\| < \varepsilon$ .

Предположим, что оператор  $A$  ( $A^0 = \theta$ ) допускает представление

$$Ax = Bx + Cx + Dx, \quad (6.7)$$

где  $B$  — линейный оператор,  $C$  — однородный оператор порядка  $s > 1$ ,  $D$  — члены высшего чем  $s$  порядка. Предполагается, что оператор  $B$  имеет простое собственное значение  $\lambda_0 > 0$ , которому соответствует собственный вектор  $h_0$ :  $Bh_0 = \lambda_0 h_0$ ; каждый элемент  $x \in E$  допускает единственное представление в виде

$$x = Px + \xi(x) h_0,$$

где  $P$  — линейный оператор проектирования на несодержащее  $h_0$  инвариантное подпространство оператора  $B$ ,  $\xi(x)$  — линейный функционал; оператор  $B$  коммутирует с  $P$  и

$$Bx = PBx + \lambda_0 \xi(x) h_0 \quad (x \in E). \quad (6.8)$$

Оператор  $C$  удовлетворяет условиям

$$C(tx) \equiv t^s Cx, \quad \|Cx_1 - Cx_2\| \leq q_0 r^{s-1} \|x_1 - x_2\| \quad (\|x_1\|, \|x_2\| \leq r). \quad (6.9)$$

Оператор  $D$  удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \|Dx\| &= o(\|x\|^s), \quad \|Dx_1 - Dx_2\| \leq q_1(r) \|x_1 - x_2\| \\ (\|x_1\|, \|x_2\| &\leq r, \quad q_1(r) = o(r^{s-1})). \end{aligned} \quad (6.10)$$

В подпространстве  $E_0$  оператор  $B - \lambda_0 I$  имеет непрерывный обратный.

Число  $\lambda_0$  является в этом случае точкой бифуркации для оператора  $A$ . Если выполнено дополнительное условие

$$\xi(CH_0) \neq 0, \quad (6.11)$$

то имеет место ряд простых и важных утверждений. Отметим, что неравенство (6.11) описывает общий случай.

**Теорема (6.12).** Пусть выполнено условие (6.11). Тогда можно указать такие  $r_0 > 0$  и  $\delta_0 > 0$ , что

1. Уравнение (6.3) при  $\lambda = \lambda_0$  не имеет ненулевых решений в шаре  $\|x\| \leq r_0$ .

2. Если  $s$  четно, то при  $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$  уравнение (6.3) имеет в шаре  $\|x\| \leq r_0$  единственное непрерывно зависящее от  $\lambda$  ненулевое решение  $x(\lambda)$ , причем

$$\operatorname{sign} \xi[x(\lambda)] = \operatorname{sign} \xi(Ch_0) \cdot \operatorname{sign}(\lambda - \lambda_0), \quad (6.12)$$

$$\|x(\lambda) - \xi[x(\lambda)]h_0\| \leq M|\xi[x(\lambda)]|^s \quad (6.13)$$

и

$$M_1(\lambda)|\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{s-1}} \leq \|x(\lambda)\| \leq M_2(\lambda)|\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{s-1}}, \quad (6.14)$$

где

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} M_1(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} M_2(\lambda) = |\xi(Ch_0)|^{\frac{1}{s-1}}. \quad (6.15)$$

3. Если  $s$  нечетно и  $\xi(Ch_0) > 0$ , то уравнение (6.3) не имеет в шаре  $\|x\| \leq r_0$  ненулевых решений при  $\lambda \in (\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0)$  и имеет ровно два непрерывно зависящих от  $\lambda$  ненулевых решения  $x_1(\lambda)$  и  $x_2(\lambda)$  при  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta_0)$ . Эти решения удовлетворяют условиям (6.13), (6.14) и

$$\operatorname{sign} \xi[x_1(\lambda)] > 0, \quad \operatorname{sign} \xi[x_2(\lambda)] < 0. \quad (6.16)$$

4. Если  $s$  нечетно и  $\xi(Ch_0) < 0$ , то уравнение (6.3) не имеет в шаре  $\|x\| \leq r_0$  ненулевых решений при  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta_0)$  и имеет ровно два непрерывно зависящих от  $\lambda$  ненулевых решения  $x_1(\lambda)$  и  $x_2(\lambda)$  при  $\lambda \in (\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0)$ . Эти решения удовлетворяют условиям (6.13), (6.14), (6.16).

Существенная часть доказательства этой теоремы заключается в установлении единственности ненулевого решения, удовлетворяющего одному из условий (6.16). Оказывается, что уравнение (6.3) можно заменить эквивалентным с оператором  $A_1$ , который  $u_0$ -вогнут, если  $\xi(Ch_0) < 0$ , и  $u_0$ -выпукл, если  $\xi(Ch_0) > 0$ , на некотором специальном образом конструируемом конусе. После этого единственность вытекает из общих теорем.

## Глава 7

### Приложения

Общая теория приложима к исследованию тех задач, которые могут быть сведены к уравнениям с операторами, оставляющими инвариантным некоторый конус. В главе приведены простейшие примеры приложений к нескольким задачам.

**§ 1. Существование положительных решений у интегральных уравнений.** Рассмотрим вначале линейный интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)ds \quad (7.1)$$

с неотрицательным ядром  $k(t, s)$ . Оператор  $A$  оставляет инвариантным конус  $K$  неотрицательных функций в том функциональном пространстве, в котором он действует.

Относительно всех рассматриваемых в этом параграфе линейных интегральных операторов  $A$  предполагается, что они  $u_0$ -положительны и, более того, что для каждой неотрицательной и не равной тождественно нулю функции  $x(t)$  выполнены неравенства

$$\alpha u_0(t) \leq Ax(t) \leq \beta u_0(t) \quad (t \in \Omega), \quad (7.2)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  положительны, а  $u_0(t)$  — некоторая неотрицательная функция. Чтобы условие (7.2) было выполнено, достаточно, чтобы ядро  $k(t, s)$  удовлетворяло неравенствам

$$u_0(t) \varphi(s) \leq k(t, s) \leq u_0(t) \psi(s) \quad (t, s \in \Omega), \quad (7.3)$$

где  $\varphi(s)$  и  $\psi(s)$  неотрицательны, обращаются в нуль лишь на множествах нулевой меры и обладают тем свойством, что

$$\left| \int_{\Omega} x(s) \varphi(s) ds \right| < \infty, \quad \left| \int_{\Omega} x(s) \psi(s) ds \right| < \infty \quad (x(t) \in E).$$

Неравенства (7.3) можно заменить менее ограничительным, но более сложно проверяемым условием (лемма 7.1): каждому множеству  $\Omega_1 \subset \Omega$  ненулевой меры соответствует такое  $\eta = \eta(\Omega_1) > 0$ , что

$$\eta \int_{\Omega} k(t, s) ds \leq \int_{\Omega_1} k(t, s) ds \quad (t \in \Omega). \quad (7.4)$$

Если линейный интегральный оператор (7.1) вполне непрерывен в функциональном пространстве  $E$  и удовлетворяет условиям (7.2), то у него есть единственная нормированная неотрицательная собственная функция; этой собственной функции соответствует простое собственное значение, которое строго больше абсолютной величины всех остальных собственных значений. Для оператора (7.1) справедливы и другие теоремы гл. 2.

Изучаются различные вопросы о неотрицательных решениях нелинейного интегрального уравнения

$$x(t) = \int_{\Omega} k[t, s, x(s)] ds. \quad (7.5)$$

Предполагается, что выполнены условия, при которых интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k[t, s, x(s)] ds \quad (7.6)$$

вполне непрерывен в некотором функциональном пространстве  $E$ . В случае, когда  $E$  — пространство  $C$  непрерывных функций, полная непрерывность вытекает, например, из непрерывности  $k(t, s, u)$  по совокупности переменных. Если выполнено неравенство

$$|k(t, s, u)| \leq k(t, s)(a + b|u|^{\alpha}),$$

где  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\int_{\Omega} \int_{\Omega} |k(t, s)|^{\beta_0} dt ds < \infty$  и  $\alpha_0 \leq \beta_0 - 1$ , то оператор (7.6) действует и вполне непрерывен в каждом пространстве  $L_p$ , где

$$p > 1, \quad \frac{\alpha_0 \beta_0}{\beta_0 - 1} \leq p \leq \beta_0.$$

При естественных предположениях оператор  $A$  дифференцируем по Фреше (в обычном смысле или по конусу); его производная  $A'(\theta)$  определяется равенством

$$A'(\theta) x(t) = \int_{\Omega} P(t, s) x(s) ds, \quad (7.7)$$

где

$$P(t, s) = k'_k(t, s, 0).$$

Если

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} k(t, s, u) = Q(t, s),$$

то при естественных дополнительных предположениях оператор (7.6) сильно асимптотически линеен по конусу неотрицательных функций, причем

$$A'(\infty) x(t) = \int_{\Omega} Q(t, s) x(s) ds. \quad (7.8)$$

Оператор (7.6) оставляет инвариантным конус неотрицательных функций, если

$$k(t, s, u) \geq 0 \quad (t, s \in \Omega, \quad u \geq 0). \quad (7.9)$$

Если выполнено дополнительное условие

$$\sup_{t \in \Omega} k(t, s, u) \leq \rho \inf_{t \in \Omega} k(t, s, u) \quad (s \in \Omega, \quad u \geq 0), \quad (7.10)$$

то оператор (7.6) оставляет инвариантным более узкий конус  $\tilde{K}$  функций, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{t \in \Omega} x(t) \leq \rho \inf_{t \in \Omega} x(t). \quad (7.11)$$

Из теорем гл. 4 вытекают различные условия существования неотрицательных решений у уравнения (7.5).

Если выполнено условие (7.9), то для существования у уравнения (7.5) по крайней мере одного неотрицательного решения достаточно (теорема 7.4), чтобы ядро линейного оператора (7.8) не имело собственных значений, которые больше или равны 1.

Если  $k(t, s, 0) \equiv 0$ , то уравнение (7.5) имеет тривиальное нулевое решение. Если при этом линейные операторы (7.7) и (7.8) существуют и  $u_0$ -положительны (например, их ядра удовлетворяют условиям (7.3) или (7.4)), то для существования второго неотрицательного решения достаточно (теорема 7.5), чтобы либо выполнялись

неравенства

$$\lambda_0 < 1 < \lambda_\infty,$$

либо неравенства

$$\lambda_\infty < 1 < \lambda_0,$$

где через  $\lambda_0$  и  $\lambda_\infty$  обозначены наибольшие собственные значения линейных интегральных операторов (7.7) и (7.8).

Рассмотрим более частный класс уравнений

$$x(t) = \int_{\Omega} k(t, s) f[s, x(s)] ds \quad (7.12)$$

с непрерывным положительным ядром  $k(t, s)$ . Если

$$f(s, 0) \equiv 0, \quad f(s, u) \geq 0, \quad f(s, u) \geq au^{1+\varepsilon_0} - b \quad (u \geq 0),$$

где  $a, b, \varepsilon_0 > 0$ , то для существования у уравнения (7.12) положительного решения достаточно (теорема 7.6), чтобы спектр ядра  $k(t, s) f'_u(s, 0)$  лежал в круге радиуса  $\rho_0 < 1$ .

Единственность неотрицательного и не равного тождественно нулю решения у уравнения (7.5) или уравнения (7.12) вытекает непосредственно из теорем о вогнутых операторах, если  $k(t, s, u)$  или  $f(t, u)$  (соответственно в случае уравнения (7.5) или уравнения (7.12)) вогнута по переменной  $u$ .

Для уравнений с выпуклыми нелинейностями единственность ненулевого неотрицательного решения удастся доказать лишь при жестких ограничениях (теорема 7.8).

Из теорем гл. 5 об операторах с монотонными минорантами вытекает, что существование у интегрального оператора (7.6) континуума неотрицательных собственных функций обеспечивается неравенством

$$k(t, s, u) \geq P(t, s) u \quad (t, s \in \Omega, \quad u \geq 0),$$

где ядро  $P(t, s)$  удовлетворяет, например, условию (7.3) или условию (7.4).

На других приложениях общей теории к нелинейным интегральным уравнениям мы не останавливаемся.

**§ 2. Первая краевая задача для эллиптических уравнений второго порядка с нелинейностями.** Пусть  $\Omega$  — ограниченная открытая область  $N$ -мерного пространства. Граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  предполагается достаточно гладкой. Рассматривается дифференциальное выражение

$$Lu(t) = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{i=1}^N a_i(t) \frac{\partial u}{\partial t_i} + a(t) u, \quad (7.13)$$



где  $t = \{t_1, \dots, t_N\} \in \bar{\Omega}$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ ; предполагается, что

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \gamma \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \quad (\gamma > 0)$$

при любых  $\xi_1, \dots, \xi_N$ , а функция  $a(t)$  неотрицательна. Коэффициенты дифференциального выражения (7.13) считаются гладкими.

Функция Грина дифференциального оператора  $L$  при нулевых граничных условиях неотрицательна и удовлетворяет условию (7.4). Это позволяет применить общие теоремы гл. 4—6 и 2 к исследованию первой краевой задачи для уравнений с оператором (7.13).

**Теорема (7.10). Краевая задача**

$$\lambda Lu(t) = u(t), \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0 \quad (7.14)$$

имеет единственную нормированную неотрицательную собственную функцию, которой соответствует положительное собственное значение  $\lambda_0$ . Собственное значение  $\lambda_0$  простое. Если существуют другие собственные значения, то их абсолютные величины строго меньше  $\lambda_0$ .

Рассмотрим теперь нелинейную краевую задачу

$$\lambda Lu(t) = f\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_N}\right), \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0. \quad (7.15)$$

Будем предполагать, что функция

$$f(t, u, v) \equiv f(t_1, \dots, t_N, u, v_1, \dots, v_N)$$

непрерывна по совокупности переменных в области  $\tilde{\Omega}(t \in \bar{\Omega}, u \geq 0, -\infty < v_1, \dots, v_N < \infty)$  и принимает в этой области неотрицательные значения.

Из теорем об операторах с монотонными минорантами вытекает, что для существования у краевой задачи (7.15) континуума неотрицательных решений, соответствующих некоторым значениям параметра  $\lambda$ , достаточно, чтобы выполнялось условие

$$f(t, u, v) \geq au \quad (\{t, u, v\} \in \Omega, \quad a > 0). \quad (7.16)$$

Перейдем к задаче

$$Lu(t) = f\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_N}\right), \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0. \quad (7.17)$$

Если

$$f(t, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (t \in \Omega),$$

то задача (7.17) имеет тривиальное нулевое решение. Из теорем об операторах, сжимающих конус, вытекает, что для существования нетривиального неотрицательного решения достаточно (теорема 7.12) выполнения следующих условий:

а) функция  $f(t, u, v)$  удовлетворяет в области  $\tilde{\Omega}$  неравенству

$$0 \leq f(t, u, v) \leq a + bu \quad (a, b \geq 0), \quad (7.18)$$

где  $b\lambda_0 < 1$ , а  $\lambda_0$  — наибольшее собственное значение краевой задачи (7.14); б) наибольшее собственное значение линейной краевой задачи

$$\lambda Lu = f'_u(t, 0, 0) u, \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0$$

удовлетворяет условию  $\Lambda(\theta) > 1$ .

Близкую теорему об условиях существования нетривиального неотрицательного решения можно получить и как следствие теорем об операторах, растягивающих конус (см. теорему 7.13).

Рассмотрим, наконец, более простую краевую задачу

$$Lu = f(t, u), \quad u(t)|_{t \in \Gamma} = 0. \quad (7.19)$$

Если функция  $f(t, u)$  по переменной  $u$  не убывает и вогнута, то эта задача приводится к уравнению с  $u_0$ -вогнутым оператором. Отсюда вытекают различные утверждения о единственности нетривиального неотрицательного решения, о сходимости к нему последовательных приближений и т. д. (см. теоремы 7.14 и 7.15).

**§ 3. Существование положительных периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.** Изучается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, \dots, x_n); \end{aligned} \quad (7.20)$$

предполагается, что правые части периодичны по  $t$  с периодом  $\omega$  и достаточно гладки.

Допустим, что каждая функция  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  удовлетворяет условию

$$f_i(t, x_1, \dots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \dots, x_n) \geq 0 \quad (x_j > 0 \text{ при } j \neq i). \quad (7.21)$$

Тогда каждая точка конуса  $K$ , составленного из векторов с неотрицательными компонентами, при движении по траекториям системы (7.20) не выйдет из конуса  $K$ . Предположим, что каждая траектория продолжима на промежуток времени, равный  $\omega$  (это существенное ограничение в окончательных формулировках не участвует), и определим преобразование  $A$  конуса  $K$  в себя по следующему правилу:  $Ax$  — это точка, в которую перейдет точка  $x$  при движении по траектории системы за время  $\omega$ . Каждая неподвижная точка преобразования  $A$  конуса  $K$  в себя определяет, очевидно, периодическое решение системы (7.20).

Описанная схема позволяет из общих теорем гл. 4–6 получить признаки существования положительных периодических решений. Приведем один пример.











где  $A_\alpha$  — обращение оператора Монжа — Ампера  $(rt - s^2) \times \times (1 + p^2 + q^2)^{-\alpha}$  при граничном условии (7.38).

Оператор  $B$  преобразует в себя конус  $K$  неотрицательных и удовлетворяющих условию (7.38) выпуклых функций. Это позволяет применить к исследованию уравнения (7.39) (то есть к исследованию краевой задачи (7.37) — (7.38)) общие принципы.

Выясняется, что для существования по крайней мере одного решения у краевой задачи (7.37) — (7.38) достаточно выполнения условия

$$0 \leq f(x, y, z, p, q) \leq \begin{cases} a_1 (1 + z^2)^\gamma, & \text{если } 0 \leq \alpha < 1, \\ a_1 |p|^{1-\epsilon} (2 + z), & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} \quad (7.40)$$

(теорема 7.26).

Предположим дополнительно, что  $f(x, y, 0, 0, 0) \equiv 0$ . Тогда краевая задача имеет тривиальное нулевое решение. Для существования еще одного уже нетривиального решения достаточно (теорема 7.27), чтобы кроме условия (7.40) было выполнено неравенство

$$f(x, y, z, p, q) \geq a_2 z^{2-\epsilon} \quad (0 \leq z \leq \delta_0), \quad (7.41)$$

где  $a_2, \epsilon$  и  $\delta_0$  — некоторые положительные числа.

**Теорема (7.28).** Если  $f(x, y, z, p, q) \equiv f(x, y, z)$  и  $0 \leq \alpha < 1$ , причем  $f(x, y, z)$  не убывает по  $z$  и однородна по  $z$  порядка  $\gamma < 2(1 - \alpha)$ , то краевая задача (7.37) — (7.38) имеет не более одного нетривиального решения.

Интересно отметить, что эта теорема единственности нетривиального решения получена в условиях, когда нет принципа максимума.

В сформулированных выше утверждениях предполагалось, что  $f(x, y, z, p, q)$  по переменной  $z$  растет существенно медленнее  $z^2$ . Приведем один признак существования ненулевого решения, охватывающий случай «сильных» нелинейностей по  $z$ .

**Теорема (7.29).** Пусть найдутся такие  $\delta_0 > 0$  и  $M_0 > 0$ , что

$$f(x, y, z, p, q) \leq a_3 z^{\gamma_1} \quad (0 \leq z \leq \delta_0)$$

и

$$f(x, y, z, p, q) \geq a_4 z^{\gamma_2} \quad (z \geq M_0),$$

где  $\gamma_1, \gamma_2 > 2$ ,  $a_3, a_4 > 0$ . Тогда краевая задача (7.37) — (7.38) имеет кроме тривиального нулевого еще по крайней мере одно решение.

Отметим в заключение, что без труда указываются условия существования у рассматриваемой краевой задачи многих (и даже бесконечного числа) решений. Для этого достаточно, чтобы функция  $f(x, y, z, p, q)$  имела перемежающиеся участки быстрого и медленного роста по переменной  $z$ .



## ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Известно небольшое число работ, в которых классическими методами изучаются задачи, связанные специально с положительными решениями различных нелинейных уравнений. Отметим здесь статью П. С. Урысона [1], посвященную рассмотрению одного класса нелинейных интегральных уравнений. Эта статья П. С. Урысона ряд лет была малоизвестна; после переиздания ее в 1949 г. (П. С. Урысон [2]) она привлекла внимание и послужила отправным пунктом для многих исследований.

Естественным орудием исследования положительных решений являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. Методы полуупорядоченных пространств к задачам о положительных решениях в различных аспектах применялись многими авторами (приведенный в конце книги список работ не претендует на полноту).

В настоящей книге использована теория полуупорядоченных пространств в той геометрической трактовке пространств с конусами, которая была развита М. Г. Крейном и его учениками.

Отметим здесь, что первые результаты, относящиеся к вполне непрерывным операторам, оставляющим инвариантным конус, были получены М. А. Рутманом.

Излагаемые в книге методы исследования положительных решений нелинейных операторных уравнений были развиты в основном автором и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным и В. Я. Стеценко, отдельные результаты публикуются впервые (ссылки на соответствующие работы с. л. далее).

## Глава I

## Пространства с конусом

§ 1. В изложении основных понятий, относящихся к пространствам с конусом, мы следуем М. Г. Крейну (см. М. Г. Крейн и М. А. Рутман [1]). М. Г. Крейном еще до войны была подготовлена рукопись монографии по теории конусов; к сожалению, эта рукопись не была опубликована. В рукописи М. Г. Крейна содержались, в частности, и утверждения, близкие к многим фактам, изложенным в первой главе.

§ 2. Понятие нормального конуса введено М. Г. Крейном. Признак нормальности телесного конуса был указан Д. П. Мильманом (см. М. Г. Крейн и М. А. Рутман [1]). М. Г. Крейн указал признак нормальности конуса в свойствах сопряженной полугруппы. И. А. Бахтин [2, 4] указал признак нормальности конуса, содержащий теорему 1.2. Близкий критерий нормальности ранее был установлен Ю. И. Гроссбергом и М. Г. Крейном [1]. Теорема 1.1 в той форме, в какой она приведена, указана в статье М. А. Красносельского [8].

§ 3. По-видимому, впервые  $u_0$ -норма введена и изучена М. Г. Крейном (см. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [1]). Существенную роль играет  $u_0$ -норма в ряде работ ленинградских математиков (см. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер [1]).  $u_0$ -норма применялась и изучалась и другими авторами (см., например, М. Г. Крейн и С. Г. Крейн [1], И. А. Бахтин и М. А. Красносельский [2]).

Отметим, что М. Г. Крейн называет конус *острым*, если норма монотонна на нем.

§ 4. Общая теория линейных положительных функционалов в банаховых пространствах с конусом развита М. Г. Крейном; в книге приведены лишь те факты этой теории, которые используются в дальнейших построениях.

Понятия равномерно положительного функционала и конуса, допускающего оштукатуривание, введены М. А. Красносельским [8]. Впрочем, свойство конуса допускать оштукатуривание (без выделения этого свойства в специальное понятие) использовалось и ранее.

§ 5. Правильные и вполне правильные конусы выделены в статье М. А. Красносельского [8]; в этой статье

приведены и теоремы 1.6—1.8. Теорема 1.9 доказана В. Я. Стеценко.

§ 6. Теоремы 1.10—1.13 были ранее приведены в статье М. А. Красносельского [8]. Построения п. 3 используют специальные функциональные пространства, выделенные В. Орличем [1, 2]. Используемые в этих построениях свойства норм элементов из пространств  $L_M^*$  были установлены ранее совместно М. А. Красносельским и Я. Б. Ругицким [1].

§ 7. Понятие миниздального конуса принадлежит М. Г. Крейну. Пространства с миниздальными и сильно миниздальными конусами — это различные классы  $KB$ -пространств Л. В. Канторовича; теория таких пространств детально изложена в книгах Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [1] и Б. З. Вулиха [1]. Примеры в конце параграфа предложены В. Я. Стеценко; ему принадлежит изложение доказательства теоремы 1.14 (аналогичное доказательство изложено в книге Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера).

§ 8. Основные результаты параграфа принадлежат В. Я. Стеценко [1, 3]. Теорема 1.6 принадлежит И. А. Бахтину [4]. Понятия  $K$ -правильного и вполне  $K$ -правильного конуса предложены М. А. Красносельским.

## Глава 2

### Линейные положительные операторы

§ 1. Класс  $u_0$ -положительных операторов был выделен и изучен М. А. Красносельским и Л. А. Ладыженским (см. М. А. Красносельский и Л. А. Ладыженский [2], М. А. Красносельский [4, 5]). Теорема 2.2 была сформулирована как гипотеза М. А. Красносельским и доказана В. Я. Стеценко; в книге дано новое доказательство. Остальные результаты ранее не указывались. Отметим, что теорема 2.3 может рассматриваться как обобщение теоремы М. Г. Крейна о непрерывности положительного функционала на телесном конусе (дальнейшее обобщение дано в статье И. А. Бахтина, М. А. Красносельского и В. Я. Стеценко [1]).

§ 2. В  $n$ -мерном вещественном пространстве с конусом  $K$  из векторов с неотрицательными координатами положительный линейный оператор — это матрица

с неотрицательными элементами. Существование у таких матриц собственных векторов с неотрицательными координатами было установлено Перроном. П. С. Александров и Г. Хопф показали, что теорема Перрона может быть доказана при помощи топологической теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Некоторые утверждения о матрицах с неотрицательными элементами, дополняющие теорему Перрона, приведены в книге Ф. Р. Гантмахера [1].

Аналогом теоремы Перрона на случай линейных интегральных операторов

$$Ax(t) = \int_a^b k(t, s) x(s) ds$$

является теорема Ентча [1], в которой утверждается, что линейный интегральный оператор  $A$  имеет положительную собственную функцию, если ядро  $k(t, s)$  непрерывно и положительно. В развитие идеи П. С. Александрова и Г. Хопфа доказательство теоремы Ентча было получено М. А. Рутманом [1, 2]. Этот результат позволил перейти к более детальному анализу линейных положительных операторов. Основные результаты здесь были получены М. Г. Крейном.

Существование собственных векторов в конусе  $K$  у операторов, оставляющих этот конус инвариантным, при различных дополнительных предположениях доказано в статье М. Г. Крейна и М. А. Рутмана [1]. В частности, доказанная в этой статье теорема существования собственного положительного вектора у вполне непрерывного оператора близка к теореме 2.5 (в настоящей книге дано другое доказательство; ср. М. А. Красносельский [5]). В статье М. Г. Крейна и М. А. Рутмана дано доказательство теоремы 2.9.

Теорема 2.6 близка к одной теореме Э. Роте.

В п. 6 рассматриваются операторы в слабо полных пространствах. Теоремы 2.7 и 2.8 допускают обобщение. Можно в пространстве  $E$  рассматривать слабую топологию, порожденную не всеми линейными функционалами, а некоторым линейным множеством  $E_0^*$  функционалов. От конуса  $K$  тогда нужно потребовать, чтобы на нем можно было определить равномерно положительный функционал  $f(x) \in E_0^*$ . Опера-

тор  $A$  должен быть слабо непрерывен в той слабой топологии, которая определяется множеством  $E_0^*$  линейных функционалов.

Так, например, если  $E$  — пространство линейных функционалов на некотором сепарабельном банаховом пространстве  $E_1$ , то в качестве  $E_0^*$  можно рассмотреть множество тех функционалов  $f(x)$ , которые можно представить в виде

$$f(x) = x(\varphi_0),$$

где  $\varphi_0$  — некоторая фиксированная точка пространства  $E_1$ . Пространство  $E_1$  в этом случае слабо полно и слабо компактно. Если  $K$  состоит из функционалов, положительных на телесном конусе  $K_1 \subset E_1$ , то на конусе  $K$  будут равномерно положительными все функционалы  $f(x) = x(\varphi_0)$ , где  $\varphi_0$  — внутренний элемент конуса  $K_1$ . В рассматриваемом случае  $A$  непрерывен в слабой топологии, порожденной множеством  $E_0^*$  линейных функционалов, если  $A$  является линейным оператором, сопряженным некоторому оператору, действующему в пространстве  $E_1$ . Последний описанный случай детально изучался М. Г. Крейном (см. также М. Г. Крейн и М. А. Рутман [1]); рассуждения М. Г. Крейна положены в основу доказательства теоремы 2.7.

М. Г. Крейном были также изучены совокупности коммутирующих друг с другом положительных операторов в сопряженном пространстве; у таких операторов есть, вообще говоря, общий собственный вектор; этот тонкий факт содержит ряд важных утверждений типа теоремы Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова о существовании инвариантных мер в компактных динамических системах.

Для нелинейных операторных уравнений, которым посвящена книга, роль сопряженных операторов в настоящее время невелика. Поэтому важные в других задачах результаты М. Г. Крейна здесь не излагаются.

Ряд предложений о собственных векторах операторов, остающихся инвариантными два конуса  $K$  и  $K_0$  ( $K_0 \subset K$ ), был установлен И. А. Бахтиным [3, 4].

**§ 3, 4.** Исследование кратности позитивного собственного значения и сравнение этого собственного значения с остальными для случая матрицы с положительными элементами было проведено Перроном, а для интегральных операторов

с положительными ядрами — Ентчем. Для операторов  $A$ , оставляющих инвариантным телесный конус  $K$  и сильно положительных в том смысле, что  $A^n x (x \in K, x \neq \theta)$  при некотором  $n$  является внутренним элементом конуса  $K$ , аналогичные результаты изложены в статье М. Г. Крейна и М. А. Рутмана [1].

Соответствующая теория для  $u_0$ -положительных операторов изложена в книге М. А. Красносельского [5]. Здесь даны существенные дополнения и упрощения. В частности, при этом использованы некоторые соображения И. А. Бахтина [4].

Теорема 2.12 была указана в статье М. А. Красносельского [8].

§ 5. Неоднородные линейные уравнения с положительными интегральными операторами специальному анализу подвергались впервые, по-видимому, П. С. Урысоном [1], который установил предложения, являющиеся простейшим аналогом теоремы 2.16. Неоднородные уравнения с абстрактными положительными операторами рассматривались Л. А. Ладыженским [2] и И. А. Бахтиным [3, 4].

Теорема 2.16 указана М. А. Красносельским. Теоремы, доказанные в п. 4, являются развитием лемм об оценке коэффициента (М. А. Красносельский [4, 5]).

Пункт 2 написан совместно с А. Ю. Левиным.

### Глава 3

## Дифференцируемость по конусу

§ 1. Основные факты дифференциального исчисления в банаховых пространствах изложены в курсах Л. А. Люстерника и В. И. Соболева [1] и Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [1]. Более детальное изложение см. в книге Хилла [1].

Понятия производных по конусу были предложены М. А. Красносельским. Производные по конусу некоторых интегральных операторов найдены в статье М. А. Красносельского и Л. А. Ладыженского [3].

В связи с теоремами 3.1 и 3.2 М. А. Красносельским на семинаре был поставлен вопрос о совпадении класса воспроизводящих и несплюснутых конусов. Положительный ответ на этот вопрос был получен И. А. Бахтиным (его

доказательство воспроизведено в книге). Как нам сообщил М. Г. Крейн, еще в 1940 г. несплюснутость некоторых классов воспроизводящих конусов была установлена им, а затем в общей форме В. Л. Шмульяном. Доказательство В. Л. Шмульяна заключалось в установлении полноты пространства  $E$  по норме

$$\|x\|_1 = \inf_{u, v \in K, u-v=x} (\|u\| + \|v\|)$$

и в дальнейшем использовании теоремы Банаха о непрерывности обратного оператора.

§ 2. Дифференцируемые на бесконечности операторы были выделены в специальный класс, по-видимому, впервые М. А. Красносельским [2] (см. также М. А. Красносельский [5]). Вычисление сильных асимптотических производных по конусу некоторых нелинейных интегральных операторов проведено в статье М. А. Красносельского и Л. А. Ладыженского [3].

§ 3, 4. Часть теорем этих параграфов была приведена в статье М. А. Красносельского [9]. Недавно Ю. В. Покорный усилил теоремы 3.7, 3.9 и 3.12, освободившись от предположения о полной непрерывности (или слабой непрерывности) изучаемых операторов.

## Глава 4

### Существование положительных решений

§ 1. Теорема 4.1 при условии 4.1а установлена Биркгофом [1].

Сходимость последовательных приближений к решению в условиях 4.1б и 4.1в использовалась многими авторами и является общеизвестным фактом. Более общее утверждение, чем теорема 4.1 и теорема 4.2, доказано в статье И. А. Бахтина и М. А. Красносельского [3]; это более общее утверждение содержится и теореме 4.3.

Термин «лемма о двух милиционерах» взят из студенческого фольклора.

§ 2—4. Часть результатов была указана в статье М. А. Красносельского [9].

## Глава 5

## Непрерывные ветви положительных решений

§ 1. Понятие непрерывной ветви введено М. А. Красносельским [4].

Простейшая теорема существования собственного вектора у абстрактного нелинейного положительного оператора была доказана Э. Роте [1]. Некоторые также простые теоремы существования собственных неотрицательных функций у нелинейных операторов были получены М. А. Рутманом (см. М. Г. Крейн и М. А. Рутман [1], § 9).

Изложенные в параграфе теоремы в основной своей части получены М. А. Красносельским и опубликованы ранее.

§ 2. По поводу основных топологических понятий см. П. С. Александров [1], или Л. С. Понтрягин [1], или М. А. Красносельский [5].

Доказательство теоремы 5.5 в основном повторяет приложение М. А. Красносельского к статье М. А. Красносельского и Л. А. Ладыженского [2].

§ 3. В основном повторены теоремы, ранее публиковавшиеся автором.

## Глава 6

## Уравнения с вогнутыми операторами

§ 1. Основные понятия и основные факты теории вогнутых операторов были введены и установлены М. А. Красносельским и Л. А. Ладыженским (см. М. А. Красносельский и Л. А. Ладыженский [2], М. А. Красносельский [5]). Существенное дополнение и усовершенствование теории вогнутых операторов получила в диссертации И. А. Бахтина [4] (см. также И. А. Бахтин [1, 5]). В частности, им был выделен класс операторов, рассматриваемый в теореме 6.5; им был подвергнут специальному исследованию класс операторов, вогнутых на некотором конусе в смысле полуупорядоченности, порожденной вторым конусом. В настоящей книге теория вогнутых операторов получила дальнейшее развитие; определения несколько изменены.

Теоремы 6.6 и 6.7 были ранее опубликованы (И. А. Бахтин и М. А. Красносельский [2, 3]).



§ 2. Результаты пп. 1, 3 и 4 близки к ранее опубликованным (М. А. Красносельский и Л. А. Ладыженский [2], М. А. Красносельский [5]).

Для доказательства существования собственных векторов у вогнутых вполне непрерывных операторов И. А. Бахтин предложил специальный прием. Вначале рассматриваются, как обычно, операторы  $A_n x = Ax + \frac{v}{n}$ , где  $v$  — подходящим образом подобранный элемент. Так как  $A\theta \neq \theta$ , то существование собственных векторов удастся доказать методом последовательных приближений; далее доказывается существование непрерывной ветви собственных векторов у вогнутых операторов  $A_n$ . Затем доказывается ограниченность снизу чисел  $\lambda_n$  в равенствах  $A_n x_n = \lambda_n x_n$  ( $\|x_n\| = \text{const}$ ); и собственный вектор оператора  $A$  конструируется как предел некоторой подпоследовательности  $x_{n_i}$ . Мы предпочли сохранить доказательство, опирающееся на топологические соображения (в случае вогнутого оператора достаточно применять принцип Шаудера).

§ 3. Попытка выделить классы выпуклых операторов, для которых справедлива теорема единственности положительного ненулевого решения, была предпринята по моему предложению Л. А. Ладыженским и И. А. Бахтиным. Оба они независимо получили предложения, близкие к лемме 6.3.

Л. А. Ладыженский [2] указал ряд примеров выпуклых операторов, для которых теорема единственности неверна. Исследование И. А. Бахтина [4] уравнений с выпуклыми операторами содержит ряд тонких соображений; однако полученные им результаты мало эффективны и далеки от окончательных.

Приведенный в книге принцип единственности для уравнений с выпуклыми операторами указан М. А. Красносельским в связи с изучением специального класса интегральных уравнений с выпуклыми нелинейностями (см. гл. 7, § 1).

§ 4. Основная теорема 6.12 принадлежит М. А. Красносельскому.

Уравнение (6.70) — это уравнение разветвления, возникающее в теории Ляпунова — Шмидта ветвления малых решений. Отметим, что при некоторых дополнительных предположениях о гладкости рассматриваемого оператора теорема 6.12 может быть доказана значительно проще. Однако

нам представляется, что приведенное в книге доказательство представляет самостоятельный интерес.

Леммы 6.5 — 6.7 для одного частного случая приведены и доказаны в статьях И. А. Бахтина и М. А. Красносельского [2, 3].

## Глава 7

### Приложения

**§ 1.** Условия полной непрерывности линейных интегральных операторов для различных функциональных пространств см. в общих курсах функционального анализа (С. Банах [1], Л. А. Люстерник и В. И. Соболев [1], Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1] и др.). Необходимые и достаточные условия полной непрерывности линейного интегрального оператора в пространстве  $C$  найдены Радоном [1]. Условия полной непрерывности линейных интегральных операторов в пространствах Орлича см. в книге М. А. Красносельского и Я. Б. Рутцкого [1]. Специальный анализ интегральных операторов типа потенциала приведен С. Л. Соболевым [1]. Важные условия полной непрерывности линейных интегральных операторов были найдены Л. В. Канторовичем [1]. Некоторые новые теоремы указаны М. А. Красносельским и Е. И. Пустыльником [1].

Условия полной непрерывности нелинейных интегральных операторов устанавливались многими авторами, начиная с В. В. Немыцкого [1, 2]. Наиболее общие условия полной непрерывности оператора (7.6) в пространстве  $C$  были указаны Л. А. Ладыженским [1, 2]. Теорема 7.1 (в другой формулировке) доказана М. А. Красносельским и Л. А. Ладыженским [1] (см. также М. А. Красносельский [5]). Дальнейшее усиление дано М. А. Красносельским и Е. И. Пустыльником [1]. Условия полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах Орлича найдены М. А. Красносельским и Я. Б. Рутцким [1].

Условия дифференцируемости интегральных операторов устанавливались многими авторами; в параграфе новых результатов в этом направлении нет. Пункты 4 и 5 написаны в соответствии со статьями М. А. Красносельского и Л. А. Ладыженского [3].

Ряд теорем о положительных собственных функциях интегральных операторов с вогнутыми нелинейностями, как мы уже упоминали, установил П. С. Урысон [1]. Метод Урысона был применен и развит рядом авторов; отметим в связи с этим работы И. А. Бахтина [4], А. И. Гусейнова [1], А. И. Гусейнова и Я. Д. Мамедова [1], Я. Д. Мамедова [1 — 5]. Для некоторых весьма специальных классов нелинейных интегральных операторов теоремы существования положительных собственных функций методами теории конусов доказал М. А. Рутман (см. М. Г. Крейн и М. А. Рутман [1]). Положительные собственные функции нелинейных интегральных операторов изучались М. А. Красносельским [4, 5], Л. А. Ладыженским [2], И. А. Бахтиным [4] и др.

Приведенные в параграфе теоремы единственности положительного решения для случая вогнутых нелинейностей по существу являются обобщениями теорем Урысона, применявшего другой метод исследования. Условия единственности для уравнения с выпуклыми нелинейностями указываются, по-видимому, впервые.

В силу теорем 6.6 и 6.7 положительные решения интегральных уравнений с вогнутыми нелинейностями могут быть получены как предел последовательных приближений. Этот факт (при некоторых дополнительных предположениях) содержится частично в статье П. С. Урысона [1]; построения этой статьи существенно основываются на специальных свойствах начального приближения, причем не указывается способ построения начального приближения, обладающего этими свойствами, а лишь доказывается существование такого приближения. Сам П. С. Урысон в [1] не интересуется вопросом о сходимости последовательных приближений, так как они в его построениях играют важную, но вспомогательную роль.

**§ 2.** Общие факты, относящиеся к эллиптическим операторам, см. в книге Миранды [1].

Интегральное неравенство (7.68) и теорема 7.9 установлены М. А. Красносельским и П. Е. Соболевским [1]; в указанной статье рассмотрен вопрос о том, какими свойствами гладкости должны обладать коэффициенты дифференциального оператора и границы области, чтобы выполнялось интегральное неравенство. Интересно было бы устано-

вить справедливость аналогичных неравенств для случая областей с кусочно гладкой границей.

Остальные результаты не отмечались, насколько нам известно.

§ 3. В части, относящейся к общей теории дифференциальных уравнений, приведены лишь хорошо известные факты, изложенные многими авторами (см., например, Ф. Р. Гаитмахер [1], Дж. Сансоне [1]). Принцип Пуанкаре точечных преобразований получил широкое развитие в работах горьковских математиков. Выделение инвариантных конусов при применении принципа Пуанкаре указано (по-видимому, впервые) М. А. Красносельским [9].

§ 4. Основоположная работа по двухточечной задаче принадлежит С. Н. Бернштейну [1]. Эта работа послужила отправным пунктом для многих исследований; многие результаты подытожены в книге Дж. Сансоне [1]. Методы функционального анализа в двухточечной задаче применялись М. А. Красносельским [3], А. И. Перовым [1], М. П. Семеновым [1] и др. К двухточечной краевой задаче для некоторого конкретного уравнения второго порядка приводит задача о продольном изгибе сжатого стержня; эта задача методами функционального анализа исследована М. А. Красносельским и И. А. Бахтиным (см. М. А. Красносельский [4, 5], М. А. Красносельский и И. А. Бахтин [1]); часть результатов другим методом была получена позже Я. Д. Мамедовым [5]. Отметим, что исследование И. А. Бахтина и М. А. Красносельского первой формы потери устойчивости сжатого стержня основано на сведении задачи к операторному уравнению с вогнутым на некотором конусе оператором.

Изложенные в параграфе факты, относящиеся к линейной двухточечной задаче, в близкой форме изложены у Сансоне [1].

Теоремы о неотрицательных решениях двухточечной краевой задачи для нелинейного скалярного уравнения, доказанные в параграфе, могут быть получены методами, основанными на изучении угловых функций решений (см. Дж. Сансоне [1], А. И. Перов [1]). В частности, в работе А. И. Перова [1] доказаны утверждения, содержащие теоремы 7.22 и 7.23.

В конце четвертого пункта сделано замечание о единственности решения двухточечной задачи в случае, когда функция  $f(x)$  в уравнении (7.170) выпукла. Этот факт,

по-видимому, известен; однако мы не знаем, где он в общем виде доказан. Доказательство указанного факта нам сообщил А. И. Перов; его доказательство по методам далеко от настоящей книги.

Соображения, изложенные в пп. 5 и 6, принадлежат И. Я. Бакельману и М. А. Красносельскому [2].

§ 5. Общая схема применения методов функционального анализа в теории нелинейных колебаний, примененная в параграфе, была указана М. А. Красносельским [6, 7].

§ 6. Изучение уравнений с операторами Монжа — Ампера проводилось, начиная с классических работ С. Н. Бернштейна, многими математиками; А. Д. Александровым, А. В. Погореловым, Лере и др. По-видимому, впервые в их теории топологические методы (принцип Шаудера) применил И. Я. Бакельман [5]. При этом И. Я. Бакельман использовал, с одной стороны, геометрические методы, созданные и развитые в работах А. Д. Александрова и А. В. Погорелова, и, с другой стороны, предложил новые функционально-аналитические соображения.

Изложенные в параграфе теоремы получены совместно И. Я. Бакельманом и М. А. Красносельским [1].

---

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Александров А. Д.

1. О применении теоремы об инвариантности области к доказательству существования. ИАН, сер. матем., 243 — 256, 1939.

2. Существование почти везде второго дифференциала выпуклой функции и связанные с ним свойства выпуклой поверхности. Ученые записки ЛГУ, сер. матем., т. 6, 3 — 35, 1939.

3. Аддитивные функции области в теории выпуклых поверхностей. Ленинград, Ученые записки Университета, сер. матем. 15, 82 — 100, 1948.

4. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, 1948.

5. Выпуклые многогранники. Гостехиздат, 1950.

6. Задача Дирихле для уравнений  $\det |z_{ik}| = f$ . Вестник ЛГУ, № 1, 1958.

Александров П. С.

1. Комбинаторная топология. Гостехиздат, 1947.

Александров П. С. и Хопф Г.

1. Topologie. Berlin, Springer, 1935.

Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г.

1. О некоторых вопросах теории моментов. Статья 4, Харьков, ГТТИ, 1938.

Аширов С. А.

1. О положительных решениях систем нелинейных интегральных уравнений типа Урысона. Ученые записки ТГУ (Ашхабад), № 15, 1960.

Бакельман И. Я.

1. Регулярность решений уравнения Монжа — Ампера. Ленинград, Ученые записки кафедры математики Пединститута, 166, 1958.

2. Обобщенные решения уравнений Монжа — Ампера. ДАН 114, 1143 — 1145, 1957.

3. Априорные оценки и регулярность обобщенных решений уравнений Монжа — Ампера. ДАН 116, 719 — 722, 1957.

4. К теории уравнений Монжа — Ампера. Вестник ЛГУ, № 1, 1958.

5. Первая краевая задача для нелинейных эллиптических уравнений. Диссертация, Ленинградский пединститут им. Герцена, 1960.

6. Задача Дирихле для уравнений типа Монжа — Ампера и их  $n$ -мерных аналогов. ДАН 126, № 5, 923 — 926, 1959.

7. Об устойчивости решений уравнений Монжа — Ампера эллиптического типа. УМН 15, вып. 1 (91), 163 — 170, 1960.

- Бакельман И. Я. и Красносельский М. А.  
 1. Нетривиальные решения задачи Дирихле для уравнений с оператором Монжа — Ампера. ДАН 136, № 1, 1961.  
 2. Об одном признаке разрешимости двухточечной краевой задачи. Вестник Ленинградского университета, № 13, 1961.
- Банах С.  
 1. Курс функционального анализа. Київ, 1948.
- Бахтин И. А.  
 1. Об одном классе уравнений с положительными операторами. ДАН 117, № 1, 1957.  
 2. Об одном критерии нормальности конуса. Труды семинара по функциональному анализу, Воронеж, вып. 6, 1958.  
 3. Об одном классе положительных операторов. Труды семинара по функциональному анализу, Воронеж, вып. 6, 1958.  
 4. О положительных решениях нелинейных уравнений с вогнутыми операторами. Воронеж, 1958.  
 5. О нелинейных уравнениях с вогнутыми и равномерно вогнутыми операторами. ДАН 126, № 1, 1959.
- Бахтин И. А., Красносельский М. А.  
 1. К задаче о продольном изгибе стержня переменной жесткости. ДАН 105, № 4, 1955.  
 2. К теории уравнений с вогнутыми операторами. ДАН 123, № 1, 1958.  
 3. Метод последовательных приближений в теории уравнений с вогнутыми операторами. Сибирский матем. журнал 2, 3, 1961.
- Бахтин И. А., Красносельский М. А., Стеценко В. Я.  
 1. О непрерывности линейных положительных операторов, Сибирский матем. журнал 3, № 1, 1962.
- Бернштейн С. Н.  
 1. Об уравнениях вариационного исчисления. УМН 8, 1941.  
 2. Собрание сочинений. Т. 3, статьи 9, 14.
- Биркгоф Г.  
 1. Теория структур. ИЛ, 1952.
- Боголюбов Н. Н. и Крылов Н. М.  
 1. La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire. Annals of Mathematics, 1936.
- Буземан Г. и Феллер В.  
 1. Acta Math. 66, 1936.
- Вулих Б. З.  
 1. Теория полупорядоченных пространств. Физматгиз, 1961.
- Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилев Г. Е.  
 1. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, 1960.
- Гантмахер Ф. Р. 1. Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
- Гроссберг Ю. И. и Крейн М. Г.  
 1. О разложении линейного функционала на положительные составляющие. ДАН 25, № 3, 1939.
- Гусейнов А. И.  
 1. Исследование положительных решений оператора Урысона, ядро которого линейно зависит от параметра. Ученые записки АГУ, № 12, 1956.

- Гусейнов А. И. и Мамедов Я. Д.  
1. О положительных решениях нелинейных интегральных уравнений. Труды III Всесоюзного съезда математиков 2, 1956.  
2. О положительных решениях нелинейных интегральных уравнений, линейно зависящих относительно параметра. Ученые записки АГУ, № 12, Баку, 1956.
- Ентч Р. (Jentzsch R.)  
1. Über Integralgleichungen mit positiven Kern. Journal für reine und angew. Math. 141, 1912.
- Канторович Л. В.  
1. Об интегральных операторах. УМН 11, № 2, 1956.  
Канторович Л. В. и Акилов Г. П.  
1. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.  
Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.  
1. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М. — Л., 1950.
- Кошелев А. И.  
1. Об ограниченности в  $L_p$  производных решений эллиптических дифференциальных уравнений. Матем. сб. 33 (80): 3, 1956.
- Красносельский М. А.  
1. Операторы с монотонными минорантами. ДАН 76, № 4, 1951.  
2. Собственные функции нелинейных операторов, асимптотически близких к линейным. ДАН 74, № 2, 1950.  
3. Об одной краевой задаче. ИАН, сер. матем. 20, 1956.  
4. Исследования по нелинейному функциональному анализу. Диссертация, Киев, 1950.  
5. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.  
6. О применении методов нелинейного функционального анализа в некоторых задачах о периодических решениях уравнений нелинейной механики. ДАН 111, 1956.  
7. О применении методов функционального анализа к задачам о нелинейных колебаниях. Труды III Всесоюзного съезда математиков 2, М., 1956.  
8. Правильные и вполне правильные конусы. ДАН 135, № 2, 1960.  
9. Неподвижные точки операторов, сжимающих или растягивающих конус. ДАН 135, № 3, 1960.
- Красносельский М. А., Ладыженский Л. А.  
1. Условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, действующего в пространстве  $L_p$ . Труды Матем. о-ва 3, М., 1954.  
2. Структура спектра положительных неоднородных операторов. Труды Матем. о-ва 3, М., 1954.  
3. Об объеме понятия  $\mu_0$ -вогнутого оператора. Известия высших учебных заведений, Математика, № 5, 1959.
- Красносельский М. А. и Пустыльник Е. И.  
1. О признаках полной непрерывности линейных и нелинейных интегральных операторов. ДАН 143, № 1, 1962.
- Красносельский М. А. и Рутецкий Я. Б.  
1. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.



- Красносельский М. А. и Соболевский П. Е.  
1. О неотрицательной собственной функции первой краевой задачи для эллиптического уравнения УМН 16, № 1, 1961.
- Крейн М. Г.  
1. Про позитивні адитивні функціонали в лінійних нормованих просторах. Харків, Зап. Матем. о-ва (4), 14, 1937.  
2. О линейных операторах, оставляющих инвариантным некоторое коническое множество. ДАН 23, 1939.  
3. Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха. ДАН 28, 1940.  
4. О минимальном разложении линейного функционала на положительные составляющие. ДАН 28, 1940.
- Крейн М. Г. и Крейн С. Г.  
1. Sur l'espace des fonctions continues définies sur un bicompat de Hausdorff et ses sousespaces semi-ordonnés. Матем. сб. 13 (55), 1943.
- Крейн М. Г. и Рутман М. А.  
1. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. УМН 3, № 1 (23), 1948.
- Ладыженский Л. А.  
1. Общие условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, действующего в пространстве непрерывных функций. ДАН 96, № 5, 1954.  
2. Об одном классе нелинейных уравнений. Кандидатская диссертация, Казань, 1954.
- Люстерник Л. А. и Соболев В. И.  
1. Элементы функционального анализа. М. — Л., 1951.
- Мамедов Я. Д.  
1. О положительных решениях нелинейных интегральных уравнений Урысона. ДАН Азерб. ССР, XI, № 9, 1955.  
2. О положительных решениях уравнения Урысона, ядро которого нелинейно относительно параметра. ДАН Азерб. ССР, XII, № 9, 1956.  
3. О положительных решениях нелинейных интегральных уравнений Урысона, ядро которых аналитично относительно параметра. Ученые записки АГУ, № 8, 1956.  
4. О положительных решениях одного класса нелинейных уравнений в функциональном пространстве. Ученые записки АГУ, № 3, 1957.  
5. К задаче о продольном изгибе стержня переменной жесткости. ДАН 118, № 1, 1958.
- Мамедов Я. Д. и Султанов Р. М.  
1. Аналог метода последовательных приближений Урысона для специального класса операторных уравнений. Ученые записки АГУ, № 2, 1958.
- Мираида К.  
1. Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, 1957.
- Натансон И. П.  
1. Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, М., 1957.

Неймарк Ю. И.

1. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Известия Министерства высшего образования, Радиофизика, № 1, 2, 5—6, 1958.

Немыцкий В. В.

1. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. 41, № 3, 1934.

2. I. Нелинейные интегральные уравнения, сравнимые с линейными. II. Общее нелинейное интегральное уравнение. ДАН 15, 1937.

3. Некоторые вопросы структуры спектра нелинейных вполне непрерывных операторов. ДАН 80, № 2, 1951.

4. Структура спектра нелинейных вполне непрерывных операторов. Матем. сб. 33, № 3, 1953. Исправления к работе в Матем. сб. 35, № 1, 1954.

Олейник О. А.

1. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. Матем. сб. 30, № 3, 1952.

Орлич (Orlicz W.)

1. Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bull. Intern. de l' Acad. Pol., série A, Cracovie, 8, 1932.

2. Über Räume ( $L^M$ ). Bull. Intern. de l' Acad. Pol., série A, Cracovie, 1936.

Перов А. И.

1. Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Кандидатская диссертация, Воронеж, 1959.

2. О двухточечной красовой задаче. ДАН 122, № 6, 1958.

Погорелов А. В.

1. Изгибание выпуклых поверхностей. Гостехиздат, 1951.

2. Регулярность выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной. Матем. сб. 31 (73), 88—103, 1952.

3. О краевой задаче для уравнения  $rt - s^2 = \varphi$  и ее геометрических приложениях. ДАН 83, 361—363, 1952.

4. Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве. ХГУ, 1957.

Понтрягин Л. С.

1. Основы комбинаторной топологии. М. —Л., 1947.

Радон (Radon I.)

1. О линейных функциональных преобразованиях и функциональных уравнениях. Работа 1919 г., русский перевод в УМН, вып. 1, 1936.

Роте Э. (Rotte Erich)

1. On non-negative functional Transformations, American Journal of Mathematics, vol. LXVI, № 2, 1944.

Рутман М. А.

1. Об одном специальном классе вполне непрерывных линейных операторов. ДАН 18, 1938.

2. Sur les opérateurs totalement continus linéaires laissant invariant un certain cône. Матем. сб. 8 (50), 1940.

Сансоне Дж.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ИЛ, 1953.

- Семенов М. П.  
1. Односторонние оценки в условиях существования нелинейных краевых задач. Доклады Высшей школы, № 5, 1959.
- Соболев С. Л.  
1. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Издание Ленинградского университета, 1950.
- Степанов В. В.  
1. Курс дифференциальных уравнений. М., 1953.
- Стеценко В. Я.  
1.  $K$ -правильные конусы. ДАН 136, № 5, 1961.  
2. К геометрии конусов. ДАН 137, № 5, 1961.
3. К геометрии банаховых пространств с двумя конусами. Диссертация. Ленинградский пединститут им. Герцена, 1962.
- Тихонов А. Н.  
1. Ein Fixpunktsatz. Math. Ann. 111, 1935.
- Урысон П. С.  
1. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. 31, 1924.
2. Труды по топологии и другим областям математики, Т. 1, М. — Л., 1951, стр. 45—77.
- Хилл Э.  
1. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1951.
- Шилов Г. Е.  
1. Математический анализ. Специальный курс, М., 1960.
-