

Л. М. Качанов

•

МЕХАНИКА
ПЛАСТИЧЕСКИХ
СРЕД

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
проф. А. И. ЛУРЬЕ
и проф. Л. Г. ЛОЙЦЯНСКОГО

О Г И З
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1948 МОСКВА

Л. М. КАЧАНОВ

**МЕХАНИКА
ПЛАСТИЧЕСКИХ
СРЕД**

**ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1948 МОСКВА**

Редактор *Г. Ю. Джанелидзе*

Техн. редактор *К. М. Волчок*

Подписано к печати 21/V 1948 г. 13,5 печ. л. 36 624 тип. зн. в печ. л. М-11954.
Тираж 5000 экз. Цена книги 7 р. 50 к. 11,56 авт. л. 12,33 уч.-изд. л. Заказ № 3175.

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗа
при Совете Министров СССР. Ленинград, Исамайловский пр., 29

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Глава I. Основные положения механики сплошных сред	
§ 1. Напряженное состояние	9
§ 2. Уравнения движения	15
§ 3. Тензор деформации	16
§ 4. Тензор скоростей деформации	20
§ 5. Уравнения состояния среды	21
Глава II. Механические свойства твердых тел	
§ 6. Изменение плотности и изменение формы твердого тела	24
§ 7. Упругая и пластическая деформация	24
§ 8. Упругий гистерезис. Упругое последствие	26
§ 9. Упрочнение. Влияние скорости деформации. Ползучесть	27
§ 10. Условие постоянства максимального касательного напряжения	29
§ 11. Условие постоянства интенсивности касательных напряжений	31
§ 12. Условие упрочнения	32
§ 13. Экспериментальные исследования пластических деформаций при сложном напряженном состоянии	33
§ 14. Замечание о других условиях текучести	35
§ 15. Приближенные представления условий текучести и упрочнения	36
Глава III. Теория малых упруго-пластических деформаций	
§ 16. Малые упруго-пластические деформации	38
§ 17. Обратимые и необратимые равновесные процессы деформации	39
§ 18. Уравнения состояния нелинейно-упругого тела	42
§ 19. Разгрузка	54
§ 20. Общая форма уравнений теории малых упруго-пластических деформаций	55
§ 21. Замечание об изотропности среды и подобии девиаторов D_σ и D_ϵ	56

§ 22. Смешанные задачи	57
§ 23. Замечание к истории вопроса	59
§ 24. Остаточные напряжения и деформации	60
§ 25. Дифференциальные уравнения равновесия в смещениях	61
§ 26. Упруго-пластическое равновесие шара	63
§ 27. Температурные напряжения в шаре при наличии текучести и упрочнения	68
§ 28. Распространение ударной волны в упруго-пластической среде	70
§ 29. Плоская деформация	72
§ 30. Вдавливание жесткого тела в пластическую среду	79
§ 31. Полный цилиндр под внутренним давлением	82
§ 32. Плоское напряженное состояние	84
 Глава IV. Энергетические теоремы и вариационные принципы в теории малых упруго-пластических деформаций	
§ 33. Работа внешних сил (обобщение теоремы Клапейрона)	87
§ 34. Начало возможных изменений деформированного состояния	90
§ 35. Задача о пластическом изгибе балки	96
§ 36. Кручение стержней	101
§ 37. Начало возможных изменений напряженного состояния	106
§ 38. Начало Кастильяно и теорема Кастильяно	109
§ 39. Приложение начала возможных изменений напряженного состояния к простейшим механическим системам за пределом упругости	111
§ 40. Приложение к задачам упруго-пластического изгиба балок	114
§ 41. Понятие дополнительной работы. Обобщение формул Кастильяно. Обобщение теоремы Кастильяно.	116
§ 42. Начало возможных изменений напряженного состояния для фазы текучести	123
§ 43. Начало возможных изменений напряженного состояния для упрочняющейся среды. Смешанные задачи	124
§ 44. Приложение начала возможных изменений напряженного состояния к задаче кручения	126
§ 45. Случай конечного числа обобщенных координат	135
§ 46. Упруго-пластический изгиб балок	138

§ 47. Вариационные начала для неравномерно нагретого тела. Влияние неравномерности нагрева тела	141
§ 48. Приближенные методы решения, основанные на вариационных принципах	143
§ 49. Вариационное уравнение движения. Теорема энергин	146
§ 50. Эффект ударной нагрузки	148
Глава V. Теория пластичности Сен-Венана-Мизеса и ее обобщения	
§ 51. Основные положения	150
§ 52. Теория пластичности Мизеса	152
§ 53. Случай плоской деформации	154
§ 54. Теория пластичности Сен-Венана	155
§ 55. Уравнения нелинейно-вязкой среды	156
§ 56. Вариационные уравнения в теории вязкой среды и среды Сен — Венана-Мизеса. Обобщение принципа Кастильяно на вязкие тела	157
§ 57. Теория Рейса	159
§ 58. Опыты по растяжению закрученной трубы	163
§ 59. Теория Прагера	165
§ 60. Теория пластичности Мизеса для анизотропной среды	168
Глава VI. Сложные среды. Теория ползучести	
§ 61. Введение	171
§ 62. Упруго-вязкая среда	172
§ 63. Крутильные колебания упруго-вязкого стержня	176
§ 64. Релаксирующая среда	180
§ 65. Крутильные колебания релаксирующего стержня	183
§ 66. Вязко-пластическая среда	185
§ 67. Течение вязко-пластической массы в трубе	189
§ 68. Вариационные уравнения вязко-пластического течения	191
§ 69. Теория наследственных сред	193
§ 70. Ползучесть	197
§ 71. Ползучесть сферического сосуда	203
Литература	210

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние десятилетия теория пластичности стала одним из основных направлений механики деформируемых тел и привлекает к себе все большее внимание ученых и инженеров. Помимо чисто теоретического интереса, теория пластичности имеет важные приложения во многих вопросах техники (вопросы прочности разнообразных конструкций, деформации не вполне упругих металлов, горячая и холодная обработка металлов, ползучесть машинных частей при высоких температурах и т. д.), в геофизике и в геологии. Советским ученым принадлежит ведущая роль в развитии математической теории пластичности.

В настоящей работе изложены теоретические основы механики пластических сред. Сюда отнесены вопросы деформаций (преимущественно — малой) твердых тел при значительных отклонениях от закона Гука. Эксперименты рассмотрены лишь для оценки достоверности теоретических предпосылок и выводов. Частные задачи, приведенные в этой книге, имеют своей целью иллюстрацию излагаемых теорий и ознакомление читателя с некоторыми приложениями этих теорий. Большое место в монографии отведено обоснованию теории малых упруго-пластических деформаций и развитию энергетических теорем и вариационных принципов (гл. III и IV); эти главы, в значительной части, содержат изложение работ автора. Подробное представление о содержании монографии дает оглавление.

От читателя требуется знакомство с основами механики сплошных сред и теории упругости.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность А. И. Лурье за интерес, проявленный им к этой работе и многочисленные советы и указания, а также Г. Ю. Джанелидзе, С. Г. Михлину и В. В. Соколовскому, за ряд ценных замечаний, сделанных ими при чтении рукописи.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

§ 1. Напряженное состояние

1. Напряженное состояние в данной точке сплошной среды характеризуется симметричным тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (1.01)$$

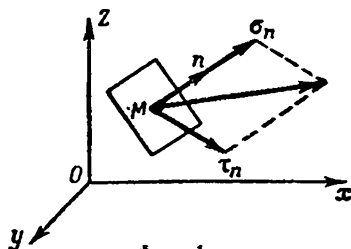
где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — нормальные, а $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ — касательные напряжения на площадках, перпендикулярных к координатным осям x, y, z .

Вектор напряжения на произвольно ориентированной площадке с нормалью n определяется формулами Коши:

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos^2(n, y) + \tau_{xz} \cos^2(n, z) \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) \\ Z_n &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) \end{aligned} \right\} \quad (1.02)$$

Проектируя этот вектор на направление нормали, получаем нормальное напряжение σ_n , действующее на рассматриваемой площадке (фиг. 1)

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2(n, x) + \sigma_y \cos^2(n, y) + \sigma_z \cos^2(n, z) + \\ &+ 2\tau_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y) + 2\tau_{yz} \cos(n, y) \cos(n, z) + \\ &+ 2\tau_{zx} \cos(n, z) \cos(n, x) \end{aligned} \quad (1.03)$$



Фиг. 1.

Касательную составляющую τ_n находим из соотношения

$$\tau_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2 - \sigma_n^2 \quad (1.04)$$

В каждой точке среды существуют такие три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю; направления нормалей к этим площадкам образуют главные оси тензора напряжений и не зависят от исходной системы координат x, y, z . Это означает, что любое напряженное состояние в рассматриваемой точке может быть вызвано растяжением окрестности точки в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Соответствующие нормальные напряжения называются главными нормальными напряжениями; будем обозначать их через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем условимся нумеровать главные оси так, чтобы

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (1.05)$$

Тензор напряжений, отнесенный к главным осям, имеет вид

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

В сечениях, делящих пополам углы между главными плоскостями, действуют главные касательные напряжения

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad (1.06)$$

Очевидно, что

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad (1.07)$$

Так называемые линейный, квадратичный и кубический инварианты тензора напряжения

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &\equiv \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2(T_\sigma) &\equiv \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ I_3(T_\sigma) &\equiv \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (1.08)$$

остаются неизменными при любом вращении координатного триэдра x, y, z . Величина

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (1.09)$$

называется средним давлением в точке. Смысл остальных инвариантов выяснится ниже.

II. В теории пластичности часто пользуются представлением тензора напряжений в виде суммы:¹

$$T_\sigma = \sigma T_1 + D_\sigma, \quad (1.10)$$

где

$$\sigma T_1 = \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} \quad (1.11)$$

шаровой тензор, соответствующий среднему давлению в точке, а

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

тензор, характеризующий напряжения сдвига в данной точке и называемый *девиатором напряжений*; его инварианты: $I_1(D_\sigma) = 0$

$$I_2(D_\sigma) = -\frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2)] = -\frac{2}{3}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) \quad (1.13)$$

$$I_3(D_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = (\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma)$$

III. Величину

$$T = +V|I_2(\overline{D_\sigma})| \quad (1.14)$$

¹ T_1 — так называемый единичный тензор

$$T_1 = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

называют, следуя Генки [4], *интенсивностью касательных напряжений*. В случае чистого сдвига

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau,$$

где τ — напряжение сдвига. Следовательно

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \tau; \quad \tau_2 = -\tau; \quad \tau_3 = \frac{1}{2} \tau$$

$$T = \tau$$

В случае простого растяжения (сжатия) в направлении оси x

$$\sigma_x = \sigma_1; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0,$$

тогда

$$T = \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{3}} \quad (1.16)$$

IV. Рош и Эйхингер [80] обратили внимание на возможность простого истолкования величин σ и T . Рассмотрим площадку, одинаково наклоненную ко всем главным осям (фиг. 2); в применении к этой площадке и осям 1, 2, 3 формула (1.03) имеет вид

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2(n, 1) +$$

$$+ \sigma_2 \cos^2(n, 2) + \sigma_3 \cos^2(n, 3),$$

но

$$\cos(n, 1) = \cos(n, 2) =$$

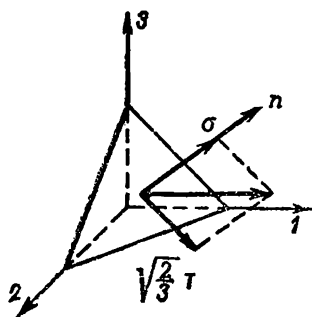
$$= \cos(n, 3) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Следовательно

$$\sigma_n = \sigma, \quad (1.17)$$

т. е. на рассматриваемой площадке нормальное напряжение равно среднему давлению; нетрудно убедиться в том, что величина касательного напряжения на той же площадке пропорциональна интенсивности касательных напряжений

$$|\tau_n| = \sqrt{\frac{2}{3}} T \quad (1.18)$$



Фиг. 2.

V. Наглядное представление о напряжениях в различных сечениях, проходящих через данную точку, дает *диаграмма Мора*. Пусть в этой точке направлении координатных осей совпадают с главными направлениями; тогда

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2(n, 1) + \sigma_2 \cos^2(n, 2) + \sigma_3 \cos^2(n, 3), \quad (1.19)$$

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2(n, 1) + \sigma_2^2 \cos^2(n, 2) + \sigma_3^2 \cos^2(n, 3), \quad (1.20)$$

причем

$$1 = \cos^2(n, 1) + \cos^2(n, 2) + \cos^2(n, 3) \quad (1.21)$$

Из этих уравнений находим

$$\begin{aligned} \cos^2(n, 1) &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n^2 - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \\ \cos^2(n, 2) &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \\ \cos^2(n, 3) &= \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Так как $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, а левые части этих равенств положительны, то должно быть

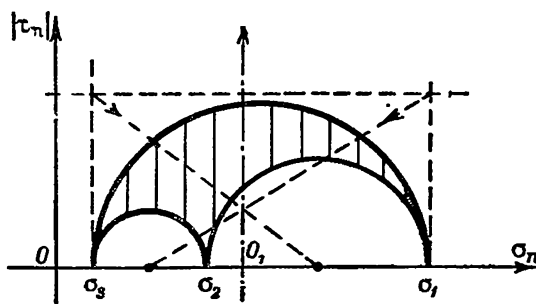
$$\begin{aligned} \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) &\geq 0, \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) &\leq 0, \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) &\geq 0, \end{aligned}$$

т. е. напряжения σ_n , $|\tau_n|$ лежат внутри некоторой области, ограниченной полуокружностями и заштрихованной на фиг. 3; точкам какой-либо окружности отвечают площадки, проходящие через соответствующую главную ось. Направляющие косинусы площадки с заданными σ_n , $|\tau_n|$ вычисляются по формулам (1.22). При наложении на тело дополнительного всестороннего давления радиусы окружностей, очевидно, не меняются и все построение лишь смещается вдоль горизонтальной оси σ_n . Для девиатора напряжений начало O_1 диаграммы Мора определяется простым геометрическим построением, ясным из приведенного чертежа.

VI. Взаимоотношение главных значений девиатора напряжений можно характеризовать введенным Лоде и Надаи [28] коэффициентом

$$\mu_\sigma = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}} \quad (1.23)$$

Для одних и тех же величин μ_σ диаграммы Мора подобны; в этом смысле о μ_σ можно говорить, как о форме девиа-



Фиг. 3.

тора напряжений (и тензора напряжений, ибо наложение всестороннего давления не сказывается на величине μ_σ). μ_σ изменяется в пределах от -1 до $+1$; так, для чистого растяжения ($\sigma_1; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\mu_\sigma = +1,$$

для чистого сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0$)

$$\mu_\sigma = -1,$$

для чистого сдвига ($\sigma_1; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\sigma_1$)

$$\mu_\sigma = 0$$

Фромм [52] указал на следующую зависимость μ_σ от инвариантов девиатора напряжений

$$\frac{I_3(D_\sigma)}{[I_2(D_\sigma)]^{3/2}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{\mu_\sigma(9 - \mu_\sigma^2)}{(3 + \mu_\sigma^2)^{3/2}}$$

§ 2. Уравнения движения

I. Обозначим через ρ — плотность среды, через X, Y, Z — компоненты массовой силы, через w_x, w_y, w_z — компоненты ускорения частицы среды. Движение элемента среды определяется приложенными к нему силами; подсчитав эти силы, легко найдем *дифференциальные уравнения движения* сплошной среды

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho (X - w_x) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho (Y - w_y) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho (Z - w_z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.01)$$

II. Приведем уравнения движения, отнесенные к *цилиндрическим координатам* r, φ, z

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \rho (X_r - w_r) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + \rho (Y_\varphi - w_\varphi) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho (Z_z - w_z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.02)$$

Для простейших задач равновесия, когда отсутствуют массовые силы, а напряженное состояние не зависит от координат φ и z , последние уравнения принимают вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0; \quad \frac{d\tau_{r\varphi}}{dr} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0; \quad \frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (2.03)$$

III. Уравнение движения в *сферических координатах* r (радиус), φ (долгота), χ (широта) в случае центральной симметрии имеет вид (см. [39])

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{r} + \rho (X_r - w_r) = 0, \quad (2.04)$$

причем

$$\sigma_\varphi = \sigma_\chi; \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = \tau_{r\chi} = 0$$

§ 3. Тензор деформации

I. Пусть при деформации среды точки последней получили смещение \vec{u} , составляющие которого мы обозначим через u_x, u_y, u_z . Квадрат элемента длины до деформации был равен

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

После деформации квадрат этого элемента длины равенется

$$ds_1^2 = (1 + 2\varepsilon_x) dx^2 + (1 + 2\varepsilon_y) dy^2 + (1 + 2\varepsilon_z) dz^2 + \\ + 2\gamma_{xy} dx dy + 2\gamma_{yz} dy dz + 2\gamma_{zx} dz dx,$$

где

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right], \text{ и т. п.} \quad (3.01) \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \text{ и т. п.}$$

Квадратичная форма $ds_1^2 - ds^2$ имеет определенный геометрический смысл, и совокупность величин $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \frac{1}{2}\gamma_{xz}$, характеризующая чистую деформацию среды, представляет собой симметричный тензор второго ранга

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}, \quad (3.02)$$

называемый *тензором деформации*. Тензор деформации, как и всякий симметричный тензор, приводится к главным осям

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix},$$

причем $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ называются главными удлинениями. Всякая чистая деформация может быть осуществлена простыми растя-

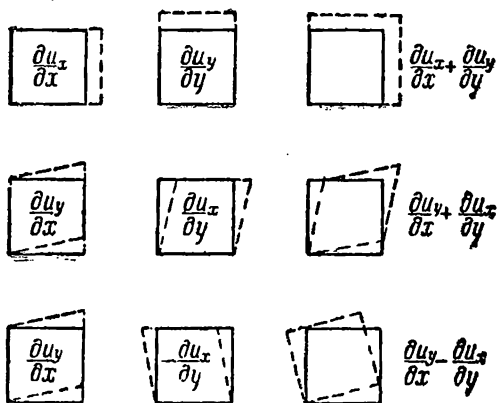
жениями в трех взаимно перпендикулярных направлениях (главных направлениях). Разности

$$\gamma_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3; \quad \gamma_2 = \epsilon_3 - \epsilon_1; \quad \gamma_3 = \epsilon_1 - \epsilon_2 \quad (3.03)$$

называются главными сдвигами; ясно, что

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \quad (3.04)$$

II. В случае малой деформации компоненты $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z; \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ малы по сравнению с единицей; тогда



Фиг. 4.

в формулах (3.01) обычно можно пренебрегать произведениями $\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2, \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y}, \dots$, следовательно

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.05)$$

Здесь $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ представляют собой относительные удлинения соответственно в направлениях осей x, y, z , а $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ — относительные сдвиги (см. схему на фиг. 4); относительное изменение объема равно

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (3.06)$$

Заметим, что в вопросах деформации и устойчивости гибких тел (стержни, пластины, оболочки) эти простые формулы часто оказываются недостаточными. В дальнейшем, говоря о малой деформации, мы будем подразумевать такую деформацию, когда формулы (3.05) справедливы.

III. Инварианты тензора деформации имеют вид

$$\begin{aligned}
 I_1(T_e) &\equiv \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon \\
 I_2(T_e) &\equiv \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \\
 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 \\
 I_3(T_e) &\equiv \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3
 \end{aligned} \quad (3.07)$$

IV. Удобно пользоваться представлением тензора деформации в виде суммы

$$T_e = \frac{1}{3} \varepsilon T_1 + D_e, \quad (3.08)$$

где $\frac{1}{3} \varepsilon T_1$ — шаровой тензор, соответствующий объемному расширению, а *девиатор деформации*

$$D_e = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \frac{1}{3} \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \frac{1}{3} \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \frac{1}{3} \varepsilon \end{vmatrix}$$

характеризует изменение формы элемента среды, обусловленное сдвигами; при этом

$$I_1(D_e) = 0$$

$$\begin{aligned}
 I_2(D_e) &= -\frac{1}{3} [(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \\
 &+ \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] = -\frac{1}{6} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) \quad (3.09)
 \end{aligned}$$

V. В теории пластичности важную роль играет квадратичный инвариант $I_2(D_e)$, который можно рассматривать как общую характеристику искажения формы элемента среды. Величина

$$\Gamma = +2\sqrt{|I_2(D_e)|} \quad (3.10)$$

называется *интенсивностью деформаций сдвига*.

В случае чистого сдвига

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0; \quad \gamma_{xy} = \gamma \quad (3.11)$$

Внося эти значения в (3.10), находим

$$\Gamma = |\gamma| \quad (3.12)$$

Заметим, что деформированное состояние в рассматриваемой точке также можно характеризовать соответствующим образом построенной диаграммой Мора; при этом, подобно коэффициенту μ_e , вводится коэффициент

$$\mu_e = \frac{\epsilon_2 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2}}{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2}} \quad (3.13)$$

VI. В дальнейшем нам понадобятся выражения компонентов деформации в цилиндрических и сферических координатах; приводим их без вывода (см. [39]).

Цилиндрические координаты r, φ, z . Пусть компоненты вектора смещения u_r, u_φ, u_z не зависят от φ и z ; тогда относительные удлинения

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \epsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}; \quad \epsilon_z = 0, \quad (3.14)$$

а относительные сдвиги

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}; \quad \gamma_{\varphi z} = 0; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (3.15)$$

Сферические координаты r, φ, χ . В интересующем нас случае центральной симметрии компоненты вектора смещения

$$u_\varphi = 0; \quad u_\chi = 0.$$

Поэтому

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \epsilon_\varphi = \epsilon_\chi = \frac{u_r}{r}; \quad \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi\chi} = \gamma_{\chi r} = 0 \quad (3.16)$$

§ 4. Тензор скоростей деформации

I. Пусть точкам среды соответствует некоторое поле скоростей

$$v_x = v_x(x, y, z, t); \quad v_y = v_y(x, y, z, t); \quad v_z = v_z(x, y, z, t)$$

В течение бесконечно малого промежутка времени dt среда испытывает бесконечно малую деформацию; отнеся последнюю к этому промежутку времени, можно сказать, что скорость любой точки элементарного объема среды складывается из скорости жесткого перемещения объема как целого и скорости деформации объема, характеризуемой симметричным *тензором скоростей деформации*

$$T_{\xi} = \begin{vmatrix} \xi_x & \frac{1}{2} \eta_{xy} & \frac{1}{2} \eta_{xz} \\ \frac{1}{2} \eta_{xy} & \xi_y & \frac{1}{2} \eta_{yz} \\ \frac{1}{2} \eta_{xz} & \frac{1}{2} \eta_{yz} & \xi_z \end{vmatrix}, \quad (4.01)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \xi_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad \xi_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ \eta_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}; \quad \eta_{yz} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}; \quad \eta_{zx} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.02)$$

Величины ξ_x, ξ_y, ξ_z определяют скорости относительных удлинений элементарного объема в направлениях координатных осей; $\eta_{xy}, \eta_{yz}, \eta_{zx}$ определяют угловые скорости скашивания первоначально прямых углов. Скорость относительного объемного расширения

$$\xi = \xi_x + \xi_y + \xi_z = \operatorname{div} \vec{v} \quad (4.03)$$

II. Скорость жесткого смещения состоит из поступательной скорости \vec{v} и вращательной с угловой скоростью

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} \quad (4.04)$$

Ускорение движущейся точки среды определяется субстанциональной производной скорости

$$w_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \text{ и т. п. } \quad (4.05)$$

III. *Инварианты тензора скоростей деформации*, так же как и девиатора скоростей деформации D_{ξ} , можно получить из формул (3.07), (3.09) заменой $e_x, e_y, \dots, \gamma_{zx}$ на $\xi_x, \xi_y, \dots, \eta_{zx}$. Выпишем лишь выражение интенсивности скоростей деформации сдвига

$$H = +2 \sqrt{|I_2(D_{\xi})|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{3}{2}(\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2)} \quad (4.06)$$

Диаграмма Мора и коэффициент μ_{ξ} сохраняют смысл и в применении к скоростям деформации.

IV. *Цилиндрические координаты r, φ, z* . Если компоненты вектора скорости v_r, v_{φ}, v_z не зависят от φ и z , то

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \xi_{\varphi} = \frac{v_r}{r}; \quad \xi_z = 0 \\ \eta_{r\varphi} &= \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r}; \quad \eta_{\varphi z} = 0; \quad \eta_{zr} = \frac{\partial v_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.07)$$

Сферические координаты r, φ, χ . В случае центральной симметрии $v_{\varphi} = v_{\chi} = 0$ и

$$\xi_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \xi_{\varphi} = \xi_{\chi} = \frac{v_r}{r}; \quad \eta_{r\varphi} = \eta_{\varphi\chi} = \eta_{\chi r} = 0 \quad (4.08)$$

V. *В случае малой деформации* имеются простые соотношения между компонентами деформации и компонентами скорости деформации; так как здесь

$$v_x = \frac{\partial}{\partial t} u_x; \quad v_y = \frac{\partial}{\partial t} u_y; \quad v_z = \frac{\partial}{\partial t} u_z, \quad (4.09)$$

то

$$\xi_x = \frac{\partial}{\partial t} e_x; \dots; \eta_{xy} = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{xy}; \dots; \xi = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon. \quad (4.10)$$

Проекции ускорения определяются формулами

$$w_x = \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}; \quad w_y = \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}; \quad w_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (4.11)$$

§ 5. Уравнения состояния среды

I. Рассмотренные выше величины (силы, напряжения, перенос, вращение, деформация, скорость деформации и т. п.) необходимы для описания динамического и кинематического

состояний элементарной частицы среды и могут быть названы механическими переменными. Они связаны, как мы знаем, только тремя уравнениями движения (2.01). Для построения замкнутой феноменологической теории движения сплошной среды должна быть также известна связь между динамическим и кинематическим состояниями частицы. Совокупность таких соотношений можно называть „механическими уравнениями состояния“; их необходимо отличать от уравнений движения (2.01), являющихся следствием принципа Даламбера и описывающих несущественную для состояния вещества (допущение, хотя и очевидное в обычных условиях опыта) механику переноса и вращения частицы среды.

Деформация среды, вообще говоря, сопровождается тепловыми, электрическими и т. п. явлениями; будем говорить о них, что они механически определены или механически неопределимы, смотря по тому, могут они быть выражены *независимо от времени* как функции механических переменных или нет. Явление двойного лучепреломления, обнаруживаемое во многих прозрачных телах, находящихся в напряженном состоянии, и лежащее в основе оптического метода исследования напряжений, может служить примером механически определимого явления.

II. Механика континуума издавна изучает движение идеальной и вязкой жидкостей, а также — деформацию идеально упругого тела. Для последнего в качестве уравнения состояния принимается *обобщенный закон Гука*

$$\varepsilon = 3k\sigma, \quad (5.01)$$

$$D_\sigma = 2GD_\varepsilon, \quad (5.02)$$

где k , G — константы материала ¹.

Для *идеальной жидкости* имеем характеристическое уравнение

$$f(\sigma, \rho) = 0 \quad (5.03)$$

и условие отсутствия внутреннего трения

$$D_\sigma = 0. \quad (5.04)$$

¹ Коэффициент объемного сжатия $k = \frac{1-2\nu}{E}$, где E — модуль

Юнга, ν — число Пуассона; модуль сдвига $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Для *вязкой жидкости*, кроме характеристического уравнения (5.03), принимается обобщенный закон Ньютона

$$D_{\epsilon} = 2\mu' D_{\epsilon}, \quad (5.05)$$

где $\mu' = \text{const}$ — коэффициент трения.

III. Одна из задач механики сплошных сред заключается в дальнейшем расширении типов идеальных тел, отражающих те или иные свойства реальных веществ. Существенно, чтобы вводимые гипотезы не противоречили общим законам физики и опытным данным. Обычно предполагают, что напряженное состояние в данной точке определяется состоянием деформации в этой же точке (а не в некоторой области); тогда можно ограничиться рассмотрением лишь первых производных по координатам от смещения и скорости. Тем самым вопрос сводится к установлению зависимости между тензорами напряжения, деформации (скоростей деформации) и их производными по времени; зависимости будут усложняться, если требовать от них более или менее полного описания механических свойств реальных тел. Следует, однако, иметь в виду последующие алгоритмические трудности. С этой точки зрения целесообразно изучать различные простые среды, что может оказаться весьма полезным при рассмотрении тех или иных вопросов деформации реальных тел.

ГЛАВА II

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 6. Изменение плотности и изменение формы твердого тела

I. Обычно принято различать твердые и жидкие тела, хотя с точки зрения физики это деление в известной мере условно. Твердые и капельно-жидкие тела различаются по действию, оказываемому на них внешними силами, именно — по неодинаковой сопротивляемости *изменению формы* (искажению углов). Вода почти не сопротивляется изменению формы, в то же время изменение формы куска стали требует приложения огромных усилий. Опыты Бриджмена и других исследователей показали, что объемное сжатие твердых (не пористых) и жидких тел является упругой деформацией, причем зависимость относительного изменения объема от давления очень близка к линейной (см. [2]).

Изменение формы тела вызывается деформациями сдвига. Допустимо считать, что деформации сдвига мало зависят от давления для не очень высоких давлений. По опытам Бриджмена увеличение модуля сдвига при давлении 10^5 атм. в сравнении с его значением при нулевом давлении составляет $+2,2\%$ для пружинной стали, $+1,8\%$ для никеля и т. д. Влияние давления может оказаться существенным в вопросах движения горных пород на больших глубинах Земли.

§ 7. Упругая и пластическая деформация

I. Представление о сопротивлении твердого тела изменению формы дают опыты по растяжению цилиндрических образцов под действием постепенно увеличивающейся

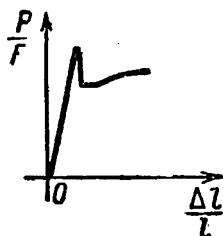
силы P . В верхней части фиг. 5 нанесены диаграммы растяжения мягкой стали и меди при комнатной температуре.

По вертикальной оси отложено истинное напряжение $\frac{P}{F}$, где

F — площадь сечения стержня в данный момент, а по горизонтальной — относительное удлинение $\frac{\Delta l}{l}$. Точка

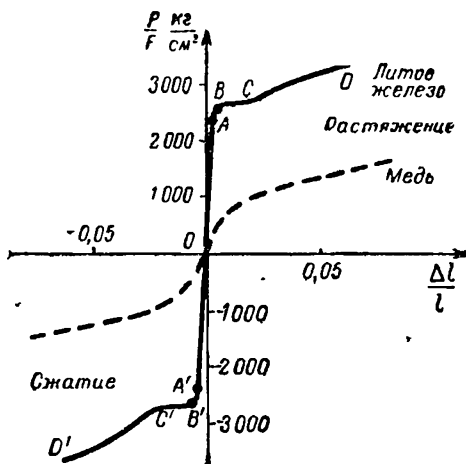
A соответствует так называемому пределу пропорциональности и лежит несколько ниже предела упругости B , после которого уже появляются остаточные деформации, и удлинения быстро увеличиваются;

обнаруживается характерная площадка текучести BC , за которой истинное напряжение вновь начинает возрастать до момента самого разрыва. Участок CD отвечает состоянию упрочнения материала. Диаграмма сжатия таких материалов, в общем, подобна диаграмме растяжения, хотя напряжения, отвечающие точкам A', B', C', D' по величине обычно несколько больше напряжений, соответствующих точкам A, B, C, D . Переход к площадке текучести иногда начинается с острого пика (фиг. 6). Напряжение, характерное для площадки текучести, называется пределом текучести.



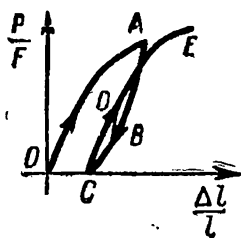
Фиг. 6.

Для других пластичных металлов (например — отожженная медь, алюминий и т. п.) кривая растяжения лишена площадки текучести и практически не имеет прямолинейного участка; остаточные деформации обнаруживаются при

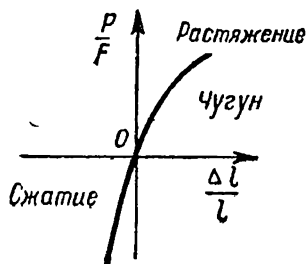


Фиг. 5.

самых незначительных нагрузках. Если нагрузку уменьшать, то кривая разгрузки ABC (фиг. 7) в общем близка к прямой линии; величина остаточной деформации измеряется отрезком OC .



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Хрупкие материалы (например, чугун, бетон, мрамор и т. п.) при растяжении и сжатии ведут себя часто различным образом (фиг. 8).

§ 8. Упругий гистерезис. Упругое последствие

I. Если после разгрузки вновь нагрузить образец, то получится кривая CDE (фиг. 7), образующая с кривой разгрузки *петлю упругого гистерезиса*. Если деформация лежит в пределах упругости, то площадь гистерезисной петли, дающая работу, переходящую необратимым образом в теплоту, очень мала. С появлением остаточных деформаций петля упругого гистерезиса достигает значительной ширины. При чисто объемных деформациях упругий гистерезис, повидимому, отсутствует, ясно проявляясь лишь при деформации сдвига. Для металлов можно считать, что работа, потерянная во время цикла, не зависит от скорости прохождения цикла. При повторяющейся нагрузке петля гистерезиса принимает определенную устойчивую форму.

II. *Явление упругого последствия* заключается во временном отставании упругих деформаций от изменений нагрузки. Так, при снятии нагрузки упругая деформация исчезает лишь через некоторое время; после приложения нагрузки требуется время для прекращения процесса незначительного

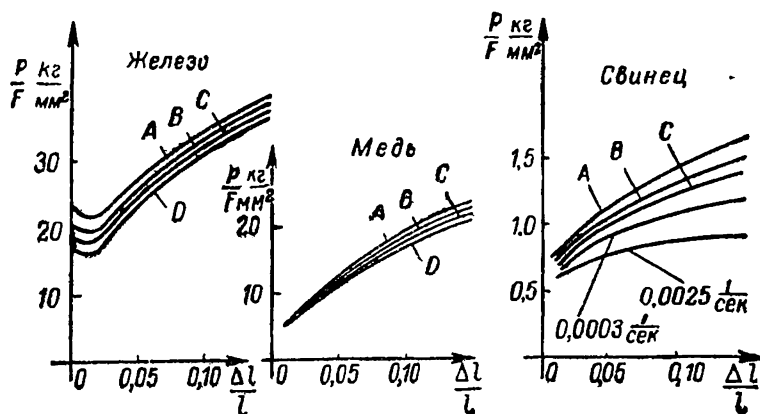
увеличения длины образца. Явление упругого последствия приводит к *петле наследственного гистерезиса*, площадь которой зависит от промежутка времени между нагрузкой и разгрузкой.

III. После снятия нагрузки, вызывавшей пластическую деформацию, материал течет в продолжение некоторого промежутка времени. Это явление называется *ползучестью*.

Рассмотренные явления не имеют в настоящее время исчерпывающего объяснения.

§ 9. Упрочнение. Влияние скорости деформации. Ползучесть

I. Для металлов кривая разгрузки *ABC* (фиг. 7), в общем, близка к прямой линии; если повторно нагрузить образец, то кривая нагрузки *CDE* будет мало отличаться от линии *ABC*.



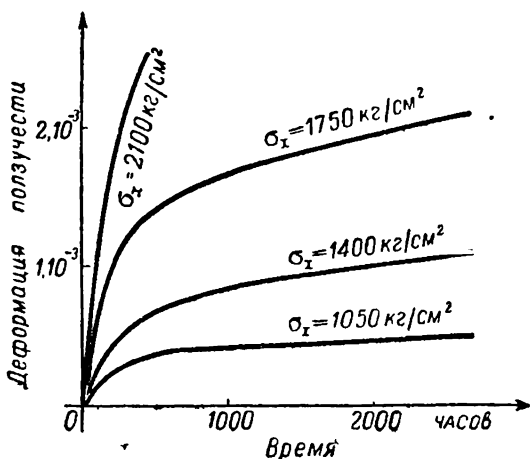
Фиг. 9. Опыты Зибеля и Помпа. Скорость относительного сжатия:

A — $1,25 \frac{1}{\text{сек}}$, B — $0,2 \frac{1}{\text{сек}}$, C — $0,025 \frac{1}{\text{сек}}$, D — около нуля.

Таким образом, металл вследствие первоначальной вытяжки как бы приобретает упругие свойства и повышает предел упругости, теряя, правда, в значительной мере способность к пластической деформации. Это явление называется *упрочнением* (наклепом).

С течением времени наблюдается частичное снятие упрочнения. Это явление, называемое отдыхом материала, с увеличением температуры становится все более заметным. При действии высокой температуры приобретенное упрочнение исчезает (отжиг материала).

II. *Эффект Баушингера* заключается в том, что предварительная пластическая деформация одного знака ухудшает



Фиг. 10.

механические свойства материала в отношении последующей деформации другого знака.

III. Если испытания происходят в обычные промежутки времени при комнатной температуре, то механические свойства стали и вообще тугоплавких металлов почти не зависят от скорости деформации (фиг. 9). Скорость испытаний, однако, имеет большое значение при опытах над очень тягучими материалами (свинец, олово и т. п.), при длительных испытаниях стали, меди и других металлов в условиях повышенной температуры и, наконец, при высоких скоростях деформации. Влияние скорости сильно зависит от температуры, именно с понижением температуры оно уменьшается, а при достаточно низких температурах, повидимому, вовсе

исчезает. Само влияние скорости выражается в росте сопротивления деформации с увеличением скорости деформации.

IV. При достаточно высоких температурах наблюдается растущая со временем пластическая деформация при самых незначительных напряжениях. Это явление называется *ползучестью* (*крипом*) и выражается в одних случаях в нарастании деформаций с течением времени при неизменной нагрузке, в других — в непрерывном спадании напряжений при постоянной деформации (*релаксация*). При высоких температурах ползучесть часто определяет прочность и долговечность машин. На фиг. 10 изображены кривые ползучести для хромистой стали (12% Cr) при температуре 550° C для различных напряжений. Первое время скорость ползучести убывает, затем устанавливается некоторая постоянная скорость нарастания удлинений.

§ 10. Условие постоянства максимального касательного напряжения

I. Изменение формы тела вызывается деформациями сдвига. На фиг. 11 схематически изображен характер экспериментальной зависимости между деформацией сдвига γ и касательным напряжением τ в опытах с чистым сдвигом. Вначале при $\tau < \tau_s$ материал подчиняется закону Гука

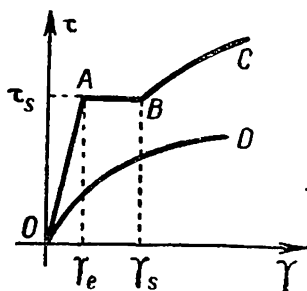
$$\tau = G\gamma \quad (10.01)$$

Затем наступает фаза текучести AB , характеризующаяся нарастанием деформации сдвига при неизменном касательном напряжении

$$\tau = \text{const} = \tau_s \quad (10.02)$$

Это состояние продолжается до тех пор, пока γ не достигнет величины γ_s , которую мы условимся называть предельным сдвигом текучести. С этого момента материал переходит в фазу упрочнения BC , где

$$\tau = 2g(\gamma^2)\gamma, \quad (10.03)$$



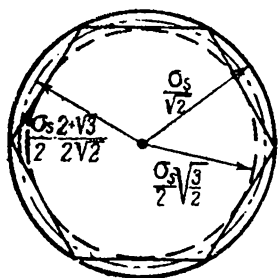
Фиг. 11.

где $g(\gamma^2)$ — некоторая характерная для данного материала функция. Для различных материалов кривая $OABC$ может иметь различный вид (например — кривая OD).

II. Выше рассматривалось одноосное напряженное состояние. Важно знать поведение материала *при сложном напряженном состоянии*. Треска, основываясь на своих опытах

по истечению металлов через отверстия, высказал предположение, что в состоянии текучести во всех точках среды максимальное касательное напряжение имеет одно и то же значение для данного материала. Это положение было математически сформулировано Сен-Венаном [81] для плоской задачи. В пространственном случае можно написать

$$\left. \begin{aligned} 2|\tau_1| &= |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_s \\ 2|\tau_2| &= |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_s \\ 2|\tau_3| &= |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_s \end{aligned} \right\} \quad (10.04)$$



Фиг. 12.

В состоянии текучести в одном или в двух из этих условий должен быть знак равенства (если все условия выполнены со знаком неравенства, то материал находится в упругом состоянии). В пространстве τ_1, τ_2, τ_3 условия (10.04) определяют поверхность куба с центром в начале координат, пересекающуюся с плоскостью

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

по правильному шестиугольнику (фиг. 12). Из (10.04) вытекает следующее соотношение между пределом текучести σ_s при растяжении и пределом текучести τ_s при сдвиге

$$\sigma_s = 2\tau_s \quad (10.05)$$

Условие Треска-Сен-Венана в общем удовлетворительно характеризует состояние текучести материала и согласуется

с наблюдениями над линиями Людерса [28]. Более тщательные экспериментальные исследования обнаруживают систематические отклонения поведения ковких металлов в состоянии текучести от условия Треска-Сен-Венана. К этому вопросу мы вернемся ниже.

§ 11. Условие постоянства интенсивности касательных напряжений

1. Использование условий текучести Треска-Сен-Венана в трехмерных задачах наталкивается на большие математические трудности. Это обстоятельство привело Мизеса¹ [65] к мысли о замене условий (10.04) одним уравнением

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = \frac{1}{2} \sigma_s^2, \quad (11.01)$$

определяющим в пространстве τ_1, τ_2, τ_3 поверхность шара с центром в начале координат, пересекающуюся с плоскостью (10.06) по окружности, описанной вокруг рассмотренного ранее шестиугольника (фиг. 12). Позднее Генки [57] заметил, что левая часть условия (11.01) имеет простой физический смысл, соответствуя (с точностью до постоянного множителя) энергии упругого изменения формы W . В самом деле, плотность потенциальной энергии упругого тела

$$\Pi = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

Исключая отсюда $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ с помощью закона Гука

$$\epsilon_i = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_i - 3\nu\sigma], \quad (i = 1, 2, 3) \quad (11.02)$$

находим

$$\Pi = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (11.03)$$

Вычитая отсюда плотность упругой энергии объемного сжатия

$$U = \frac{1}{2} \sigma_s = \frac{k}{6} \sigma_s^2, \quad (11.04)$$

¹ Позднее выяснилось, что еще в 1904 г. Губер предложил условие, близкое к (11.01).

получаем

$$W = \frac{1}{3G} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) \quad (11.05)$$

Таким образом, *состояние текучести достигается при некоторой постоянной энергии упругого изменения формы*. Условие Мизеса может быть записано в форме (§ 1)

$$T^2 = \frac{1}{3} \sigma_s^2 \quad (11.06)$$

В случае чистого сдвига $T = |\tau|$ и из (11.06) получаем

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = 0,577 \sigma_s \quad (11.07)$$

Мизес считал условие Сен-Венана точным, а уравнение (11.05) — приближенным; однако многочисленные эксперименты показали, что условие Мизеса выполняется в состоянии текучести для поликристаллических материалов лучше, чем условие постоянства максимального касательного напряжения. В частности, соотношение (11.07) находится в лучшем, нежели (10.05), согласии с опытными данными для пластичных металлов. Тем самым условие Мизеса приобрело самостоятельное значение.

§ 12. Условие упрочнения

Экспериментальные исследования показывают, что в области упрочнения, независимо от вида напряженного состояния, выполняется с практической достаточной точностью соотношение ¹

$$T = 2g(\Gamma^2)\Gamma, \quad (12.01)$$

где $g(\Gamma^2)$ — некоторая функция, характерная для данного материала. Так как вид этой функции не зависит от напряженного состояния, то ее можно определять, например, из опытов на простое растяжение. Соотношение (12.01) следует относить только к процессу монотонного нагружения, когда $d\Gamma > 0$ (см. § 19). Уравнение (12.01) можно рассма-

¹ Этот закон впервые, повидимому, был высказан Рошом и Эйхингером в 1927 г. (см. [83]).

тривать как общее условие, охватывающее различные фазы деформации. Так, полагая

$$2g(\Gamma^2) = \frac{\tau_s}{\Gamma}, \quad (12.02)$$

получаем условие текучести Мизеса

$$T = \tau_s^2; \quad (12.03)$$

полагая

$$2g(\Gamma^2) = G, \quad (12.04)$$

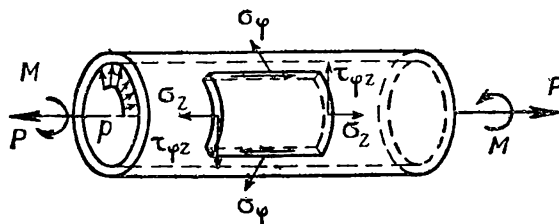
приходим к случаю упругой среды Гука, когда

$$T = G\Gamma. \quad (12.05)$$

Иные условия упрочнения предложили Одквист [71] и Шмидт [83].

§ 13. Экспериментальные исследования пластических деформаций при сложном напряженном состоянии

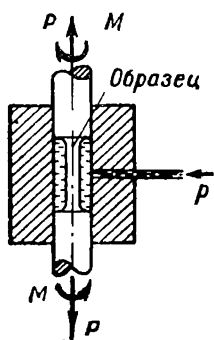
I. Экспериментальному изучению условий текучести и упрочнения при сложном напряженном состоянии посвящен ряд работ, выполненных преимущественно в последние десятилетия. Большинство исследователей ставит опыты над тонкостенными трубами (фиг. 13); путем растяжения, скручивания и создания внутреннего давления можно вызвать



Фиг. 13.

в стенке трубы плоское (вернее — „почти плоское“) напряженное состояние желательной интенсивности и замерить соответствующие деформации. Подробные опыты в различных

вариантах провели Гест ([55], 1900 г.), Мэсон ([63], 1909 г.), Рош и Эйхингер ([80], 1926 г.), Лоде ([62], 1926 г.), Тэйлор и Квини ([85], 1931 г.), Гогенемзер ([59], 1931 г.), Шмидт ([83], 1932 г.), Девис ([44], 1945 г.) и другие.



Фиг. 14.

Исследованы (Рош, Бекер и другие) также растяжение и кручение стержня, испытывающего давление по боковой поверхности (фиг. 14).

II. Условие текучести Мизеса выполняется значительно лучше, чем условие текучести Сен-Венана. По опытам над мягкими металлами предел текучести при чистом сдвиге

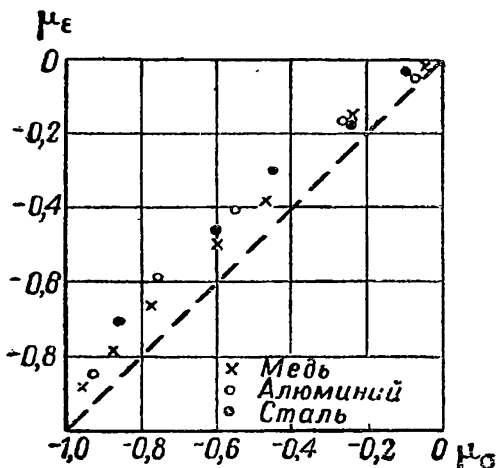
$$\tau_s \approx 0,6 \sigma_s, \quad (13.01)$$

что близко к соотношению

$$\tau_s = 0,577 \sigma_s,$$

вытекающему из условия текучести Мизеса. Опытами Роша и Эйхингера [80], Шмидта [83], Девиса [44] и др. хорошо обосновано условие упрочнения (12.01), справедливое при нагружении тела ($d\Gamma > 0$); разгрузка, как показывают эксперименты, происходит по почти прямой линии (фиг. 7).

III. По опытам направления главных осей тензора напряжений и тензора деформации, в общем, совпадают, хотя некоторые отклонения наблюдались многими исследователями. Наблюдались также незначительные, но систематические нарушения



Фиг. 15.

Наблюдались также незначительные, но систематические нарушения

условия подобия тензоров напряжения и деформации. На фиг. 15 показаны результаты тщательных опытов Тэйлора и Квини [85], подтвердивших выводы, ранее сделанные Лоде [62]; по горизонтальной оси отложено μ_v , по вертикальной μ_s , прямая линия $\mu_v = \mu_s$ соответствует условию подобия тензоров. Опыты показывают, что с развитием пластической деформации среда приобретает некоторую анизотропию и, следовательно, только в первом приближении может быть рассматриваема как изотропная.

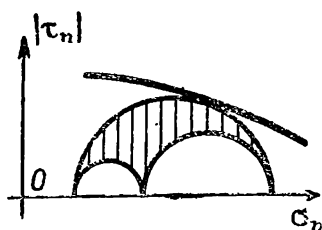
IV. В заключение отметим, что изменение плотности тела является упругой деформацией, определяемой средним давлением (§ 6). Несомненно, что незначительным изменением плотности, вызываемым пластической деформацией („разрыхлением“), можно пренебрегать.

§ 14. Замечание о других условиях текучести

I. Помимо условий текучести Сен-Венана и Мизеса предложено много других условий. Рассмотрим некоторые из них.

1. По Мору, в предельном состоянии наибольшее касательное напряжение является некоторой функцией нормального давления, действующего на ту же площадку, т. е.

$$|\tau_n| = f(\sigma_n) \quad (14.01)$$



Фиг. 16.

На диаграмме Мора эта кривая будет огибающей всех главных кругов Мора (фиг. 16). Условие Мора подтверждается наблюдениями над линиями Людерса (см. [28]) и, так же как и условие Сен-Венана, в общем удовлетворительно согласуется с поведением пластичных металлов; оно может рассматриваться как практически удобное приближение. Следует отметить, что опыты Роша [80] показали невозможность проведения огибающей кругов Мора на основании экспериментальных данных.

2. Прандтль [76] считает максимальное касательное напряжение линейной функцией нормального давления.

Для плоской задачи условие текучести Прандтля имеет вид ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$)

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = C_1 - C_2 \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad (14.02)$$

где C_1, C_2 — константы, и является простейшим обобщением условия текучести Сен-Венана. Условие (14.02) играет важную роль в теории сыпучих сред (см. [34]); случай $C_1 = 0$ соответствует идеально сыпучему телу.

3. Аналогичные обобщения сформулированы также применительно и к представлению об интенсивности касательных напряжений; так, по предложению Мизеса и Шлейхера ([82], 1926 г.) в состоянии текучести

$$T = f(\sigma) \quad (14.03)$$

§ 15. Приближенные представления условий текучести и упрочнения

I. Условие текучести Мизеса и условие упрочнения Роша-Эйхингера хорошо подтверждаются опытами и удобны для изучения общих вопросов теории пластичности. Однако, во многих частных задачах можно добиться значительного упрощения, если заменить выражения интенсивностей напряжений и деформаций сдвига соответственно через максимальное касательное напряжение $|\tau|_{\max}$ и максимальный сдвиг $|\gamma|_{\max}$. Интересные соображения по этому вопросу содержатся в недавно опубликованных статьях А. А. Ильюшина [12] и В. В. Соколовского [36].

Рассмотрим, следуя А. А. Ильюшину, величину

$$M = \frac{1}{|a|} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

где вещественные числа a, b, c удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0, \\ |a| &\geq |b| \geq |c|, \end{aligned}$$

в силу которых

$$-1 \leq \frac{b}{a} \leq -\frac{1}{2}; \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{c}{a} \leq 0.$$

Так как $M^2 = 2 \left[1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]$, то легко видеть, что

$$\sqrt{2} \geq M \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (15.01)$$

Величина M отличается от среднего значения $\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ не более чем на $7,1\%$. С тем же приближением можно писать

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} |a| \quad (15.02)$$

Этот результат позволяет указать следующие приближенные представления интенсивностей напряжений и деформаций сдвига

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} |\tau|_{\max}, \\ \Gamma &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} |\gamma|_{\max}, \end{aligned} \quad (15.03)$$

исходя из которых, можно формулировать приближенные условия текучести и упрочнения. Девис [44] экспериментальным путем установил близость формулировок условия упрочнения в величинах T , Γ и $|\tau|_{\max}$, $|\gamma|_{\max}$.

II. Рассмотренное приближение соответствует замене окружности шестиугольником (фиг. 12); оно может быть улучшено заменой окружности двенадцатиугольником и т. д. (см. [36]). Следует, однако, помнить о сравнительно небольшой точности экспериментальных данных, вследствие чего построение более высоких приближений практически бесполезно.

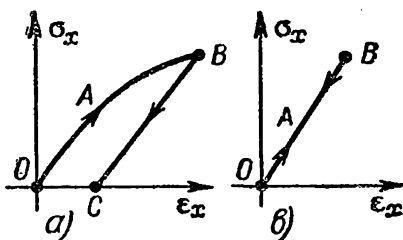
ГЛАВА III

ТЕОРИЯ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 16. Малые упруго-пластические деформации

I. В этой главе мы будем изучать малые деформации твердых тел, допуская, что время не влияет существенным образом на процесс деформации. Это условие ограничивает область применения рассматриваемой теории не слишком

высокими температурами (могущими вызвать ползучесть) и сравнительно медленными деформациями (в противном случае надлежит учесть вязкость и другие явления). В сфере изучения остается широкий круг важных вопросов малой пластической деформации таких металлов, как сталь, медь,



Фиг. 17.

алюминий и т. п. Укажем на столь существенные вопросы, как поведение различных конструкций при пластическом деформировании отдельных их частей, как целесообразное использование предварительной пластической деформации (автофретаж цилиндров, упрочнение турбинных дисков и т. п.), позволяющее значительно уменьшить вес машин и т. д.

II. Рассмотрим растяжение стержня (фиг. 17, а); вдоль участка OAB происходит нагружение, разгрузке соответствует линия BC . Площадь $OABC$ представляет собой потерянную работу деформации. Большая часть этой работы,

как показывают экспериментальные исследования [8], переходит в тепло и вызывает нагревание испытываемого образца, а следовательно, и дополнительное удлинение его, зависящее от величины повышения температуры и условий теплообмена с окружающей средой. Простой подсчет убеждает нас в ничтожности влияния этого дополнительного удлинения. В самом деле, пусть процесс растяжения стального образца осуществляется адиабатически (т. е. без теплообмена с внешней средой); будем полагать, что *вся работа* деформации переходит в теплоту. Принимая предел текучести $\sigma_s = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$, объемную теплоемкость равной $38 \text{ кг/см}^2 \text{ град.}$, находим, что при деформации $\epsilon = 0,04$ температура стержня возрастет примерно на два градуса $\left(\frac{\sigma_s \cdot 0,04}{38} \approx 2^\circ\text{C} \right)$, чему отвечает весьма малое, сравнительно с величиной ϵ_x , относительное тепловое удлинение $24 \cdot 10^{-6}$.

Таким образом, влиянием теплообмена с внешней средой на процесс малой деформации обычно можно пренебрегать, и продолжительность опыта, в значительной мере определяющая теплообмен, с этой стороны не может сказываться на кривой растяжения. При монотонном возрастании внешней нагрузки, в общем, безразлично, куда перешла работа деформации — в тепло или в упругую потенциальную энергию стержня — вид кривой OAB останется неизменным. Наоборот, при разгрузке, когда деформация среды происходит вследствие накопившейся в ней упругой энергии, происшедшее рассеяние энергии приобретает решающее значение, и чем оно больше, тем сильнее линия разгрузки BC отклоняется от линии нагружения OAB .

§ 17. Обратимые и необратимые равновесные процессы деформации

1. Пусть каждое состояние стержня, характеризуемое напряжением σ_x и деформацией ϵ_x , не изменяется со временем. В терминах термодинамики подобный процесс деформации называется *равновесным процессом*.

Представим себе процесс медленной разгрузки, происходящей вдоль той же кривой BAO (фиг. 17, *a*), причем в обратном порядке проходятся те же состояния, какие осуществлялись при нагрузке OAB . Если, придя в началь-

ную точку O , мы не сможем указать никаких изменений, то процесс OAB называется *обратимым*. Такой процесс можно осуществить при помощи идеально упругого тела, например, упругой среды Гука (фиг. 17, в); в случае, когда напряжения не пропорциональны деформациям, мы будем говорить о *нелинейно-упругом* теле.

Примером необратимого процесса может служить упруго-пластическая деформация $OABC$ (фиг. 17, а); при любом, даже бесконечно малом, уменьшении напряжения деформация не возвращается по кривой BAO , а следует линии разгрузки BC . Подчеркнем, что как обратимый, так и необратимый процессы в нашем случае являются равновесными.

II. Рассмотрим изотермический процесс *упругой* деформации; здесь существует однозначное соответствие между напряжением σ_x и деформацией ϵ_x

$$\sigma_x = f(\epsilon_x), \quad (17.01)$$

где f — однозначная функция. Уравнение состояния (17.01) можно представить и в дифференциальном виде

$$d\sigma_x = f'(\epsilon_x) d\epsilon_x \quad (17.02)$$

где штрих означает производную.

Обратимся теперь к равновесному *необратимому* процессу деформации; здесь уже невозможно указать зависимость вида (17.01), так как напряжение не является больше функцией только мгновенных значений деформации; процесс деформации зависит, кроме того, и от направления движения по кривой деформации, т. е. от того — происходит нагрузка или разгрузка. Уточним эти понятия: мы будем говорить о нагрузке, если

$$d|\epsilon_x| > 0, \quad (17.03)$$

и о разгрузке, если

$$d|\epsilon_x| < 0 \quad (17.04)$$

Мы рассматриваем *необратимый равновесный* процесс деформации; следовательно, искомое соотношение не должно содержать времени (а значит, и скорости деформации). Благодаря этому достаточно указать поведение материала при

нагрузке и разгрузке и состояние деформаций и напряжений в момент начала нагрузки (разгрузки).

Важность понятия равновесного необратимого процесса подчеркнута Дюгемом [46]. Такие процессы часто встречаются (упругий гистерезис, магнитный гистерезис, превращения серы, некоторые виды пластической деформации и т. д.); их можно подвергнуть сравнительно простому термодинамическому анализу.

III. Найдем, следуя идеям Дюгема, представление рассматриваемого нами необратимого равновесного процесса деформации. Пусть $(\sigma_x; \epsilon_x)$ и $(\sigma_x + d\sigma_x; \epsilon_x + d\epsilon_x)$ — два бесконечно близких состояния равновесия. Тогда

$$d\sigma_x = \{\varphi(\epsilon_x) + \psi(\epsilon_x, \sigma_x) \operatorname{sign} d|\epsilon_x|\} d\epsilon_x, \quad (17.05)$$

где $\varphi(\epsilon_x)$ и $\psi(\epsilon_x, \sigma_x)$ — характерные для данного материала функции.¹ При нагрузке

$$d\sigma_x = \{\varphi(\epsilon_x) + \psi(\epsilon_x, \sigma_x)\} d\epsilon_x, \quad (17.06)$$

а при разгрузке

$$d\sigma_x = \{\varphi(\epsilon_x) - \psi(\epsilon_x, \sigma_x)\} d\epsilon_x \quad (17.07)$$

Пусть линия нагрузки OAB представима уравнением (17.02), а разгрузка происходит по прямой линии BC , для которой

$$d\sigma_x = E d\epsilon_x \quad (17.08)$$

Сравнивая (17.06), (17.07) с формулами (17.02) и (17.08), находим

$$\varphi(\epsilon_x) = \frac{1}{2} [f'(\epsilon_x) + E]; \quad \psi(\epsilon_x, \sigma_x) = \frac{1}{2} [f'(\epsilon_x) - E] \quad (17.09)$$

Следовательно

$$d\sigma_x = \frac{1}{2} \left\{ f'(\epsilon_x) (1 + \operatorname{sign} d|\epsilon_x|) + \right. \\ \left. + E (1 - \operatorname{sign} d|\epsilon_x|) \right\} d\epsilon_x \quad (17.10)$$

¹ Функция $\operatorname{sign} x$ определена равенствами:

$\operatorname{sign} x = +1$ при $x > 0$; $\operatorname{sign} x = -1$ при $x < 0$; $\operatorname{sign} 0 = 0$,

Для всякого участка монотонной нагрузки

$$\sigma_x = f(\epsilon_x) + C_1,$$

а разгрузки

$$\sigma_x = E\epsilon_x + C_2,$$

где C_1 , C_2 — произвольные постоянные, определяемые по условиям в начальной точке соответствующего участка.

IV. Представление (17.05) в дальнейшем не играет, конечно, большой роли. Существенно, что *равновесный необратимый процесс деформации можно представить на каждом участке нагрузки (разгрузки) уравнением состояния некоторого идеального нелинейно-упругого тела.*

Мы столь подробно остановились на этом вопросе ввиду распространенности ошибочного мнения¹ о необходимости использования в теории пластичности *соотношений между напряжениями и скоростями деформации* для должного описания факта остаточных деформаций. Подобная точка зрения игнорирует независимость (в определенных условиях) кривой деформации от скорости деформирования и приводит иногда к построению неоправданно громоздких математических теорий (см. гл. V — теории Рейса и Прагера).

§ 18. Уравнения состояния нелинейно-упругого тела

I. *Основные положения.* Мы выяснили, что равновесный необратимый процесс деформации можно представить на каждом участке нагрузки (разгрузки) уравнением состояния некоторого нелинейно-упругого тела. Рассмотрим поэтому возможные формы этих уравнений состояния.

Исходя из экспериментальных данных о малой деформации металлов, мы постулируем следующие положения.

1. *Состояние тела вполне определяется семью независимыми параметрами состояния (обобщенными координатами состояния), за которые можно принять либо температуру θ и компоненты деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{zx}$, либо — температуру θ и компоненты напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$.* Остановимся на совокупности параметров $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{zx}; \theta$;

¹ См. например, обзорный доклад Мизеса [67], монографию Гейрингер ([54], § 4).

вследствие их независимости им можно сообщить в данный момент времени произвольные значения; компоненты напряжения, играющие теперь роль обобщенных сил состояния, должны определяться значениями координат. Тем самым напряженное и деформированное состояния тела будут известны. Температуру, вообще говоря, необходимо учитывать, так как ее изменения обуславливают дополнительные деформации (напомним о важном значении температурных напряжений, вызываемых неравномерным нагреванием).

2. Тело изотропно; его механические свойства можно считать неизменными в пределах наблюдаемой разности температур. Это допущение следует понимать в смысле неизменности изотермических кривых деформации в рассматриваемом интервале температур.

3. Относительное изменение объема состоит из упругой объемной деформации и теплового расширения

$$\epsilon = 3k\sigma + 3\alpha\theta \quad (18.01)$$

Это допущение исходит из хорошо установленных экспериментальных фактов.

4. Девиатор деформации пропорционален девиатору напряжений

$$D_\epsilon = \psi D_\sigma, \quad (18.02)$$

где ψ — некоторая, пока неопределенная, функция скалярных инвариантов тензоров T_σ , T_ϵ , не зависящая от температуры (соответственно допущению 2).

Полагая $\psi = \text{const} = \frac{1}{2G}$, мы приходим к закону Гука. Таким образом, уравнение (18.02) представляет собой естественное и простое обобщение закона Гука; оно содержит в себе утверждения коаксиальности и подобия девиаторов D_ϵ , D_σ . Действительно, из (18.02) вытекают соотношения

$$\frac{\epsilon_1 - \frac{1}{3}\epsilon}{\sigma_1 - \sigma} = \frac{\epsilon_2 - \frac{1}{3}\epsilon}{\sigma_2 - \sigma} = \frac{\epsilon_3 - \frac{1}{3}\epsilon}{\sigma_3 - \sigma} = \psi \quad (18.03)$$

Отсюда

$$\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_3}; \quad \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (18.04)$$

Складывая эти пропорции, находим

$$\mu_e = \mu_s \quad (18.05)$$

Очевидно, что соотношения (18.04) можно представить также в виде

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\epsilon_2 - \epsilon_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\epsilon_3 - \epsilon_1},$$

или

$$\frac{\tau_1}{\gamma_1} = \frac{\tau_2}{\gamma_2} = \frac{\tau_3}{\gamma_3}, \quad (18.06)$$

т. е. главные касательные напряжения пропорциональны главным сдвигам. Четвертое положение надлежит трактовать как известную идеализацию опытных данных (см. § 21).

II. *Уравнения Генки*. Напишем уравнение (18.02) в составляющих

$$\epsilon_x - \frac{1}{3} \epsilon = \psi \left(\begin{array}{c} \sigma_x - \sigma \\ \text{и т. п.} \end{array} \right) \quad \gamma_{xy} = 2\psi \left(\begin{array}{c} \tau_{xy} \\ \text{и т. п.} \end{array} \right) \quad (18.07)$$

Исключая отсюда с помощью (18.01) объемное расширение, легко находим соотношения Генки¹, дополненные тепловыми членами:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \psi \left(\sigma_x - \frac{\psi - k}{\psi} \sigma \right) + \alpha \theta \\ \epsilon_y &= \psi \left(\sigma_y - \frac{\psi - k}{\psi} \sigma \right) + \alpha \theta \\ \epsilon_z &= \psi \left(\sigma_z - \frac{\psi - k}{\psi} \sigma \right) + \alpha \theta \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\psi \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= 2\psi \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= 2\psi \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (18.08)$$

Иногда считают ψ функцией координат x, y, z ; целесообразно поэтому подчеркнуть, что ψ — функция инвариантов тензоров T_e, T_s , характеризующая состояние тела; она может зависеть от координат в случае неоднородного тела. Вычисляя с помощью (18.07) интенсивность деформаций сдвига, получаем важное соотношение

$$\Gamma = 2\psi T \quad (18.09)$$

¹ Генки пришел к своим уравнениям в 1924 г., исходя из некоторого вариационного принципа (см. ниже § 23).

Необходимо, кроме того, иметь условие, определяющее неизвестную функцию ψ и являющееся, в сущности, уравнением состояния среды

$$\psi = \psi(\varepsilon, \sigma; \Gamma, T; I_B(D_*), I_B(D_e)) \quad (18.10)$$

В качестве такого уравнения можно взять, например, экспериментальное условие текучести или упрочнения.

III. *Возможные состояния среды.* Мы не использовали еще условия обратимости процесса деформации изучаемой нами идеальной упругой среды; с помощью обычного термодинамического анализа выясним — какие ограничения накладывает оно на уравнение состояния (18.10).

Рассмотрим элементарный параллелепипед $dx dy dz$, мысленно выделенный из среды. На его грани действуют напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$. Приращение внутренней энергии элемента $\delta\Phi dx dy dz$ складывается из приращения работы деформации $\delta A^* dx dy dz$ и приращения количества тепла $\delta Q dx dy dz$, поглощенного рассматриваемым элементом тела, т. е.

$$\delta\Phi = \delta A^* + \delta Q, \quad (18.11)$$

причем

$$\delta A^* = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}, \quad (18.12)$$

$$\delta Q = q_{xx} \delta \varepsilon_x + q_{yy} \delta \varepsilon_y + \dots + q_{zx} \delta \gamma_{zx} + C \delta \theta, \quad (18.13)$$

где компоненты напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$ и коэффициенты $q_{xx}, q_{yy}, \dots, q_{zx}; C$, которые можно назвать обобщенными теплоемкостями, зависят, вообще говоря, от параметров состояния $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{zx}; \theta$.

Согласно первому началу термодинамики, внутренняя энергия Φ вполне определяется мгновенным состоянием системы¹, следовательно, $\delta\Phi$ должно быть полным дифференциалом.

¹ Т. е. не зависит от пути, проходимого телом от одного состояния к другому; иначе было бы возможно осуществление *perpetuum mobile* первого рода, т. е. возникновение энергии из ничего.

и три соотношения (a_2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \gamma_{xy}} &= \frac{\partial q_{xy}}{\partial \theta} \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned} \right\} \quad (a_2)$$

Сравнивая (a_1) и (a_2) с (с), получаем

$$\left. \begin{aligned} q_{xx} &= q_{yy} = q_{zz} = \frac{\alpha \theta}{k} \\ q_{xy} &= q_{yz} = q_{zx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

Подстановка этих величин в соотношения (d) обращает их в тождества. Далее, пользуясь (18.15), (18.16), находим из соотношений (а), что теплоемкость при отсутствии деформации C зависит только от температуры

$$C = C(\theta)$$

Оставшиеся соотношения будут, очевидно, удовлетворены, если $\delta\Phi$ — точный дифференциал. Мы имеем

$$\delta Q = C(\theta) \delta\theta + \frac{\alpha \theta}{k} \delta z \quad (18.17)$$

Вычислим работу деформации δA^* ; из уравнений Генки (18.08) находим

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= \psi \delta (\sigma_x - \sigma) + (\sigma_x - \sigma) \delta \psi + k \delta \sigma + \alpha \delta \theta; \dots \\ \delta \gamma_{xy} &= 2\psi \delta \tau_{xy} + 2\tau_{xy} \delta \psi; \dots \end{aligned} \right\}$$

Далее

$$\begin{aligned} \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z &= \frac{1}{2} \psi \delta (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 3\sigma^2) + \\ &+ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 3\sigma^2) \delta \psi + \frac{3}{2} k \delta \sigma^2 + 3\alpha \sigma \delta \theta \\ \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} &= \psi \delta (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + \\ &+ 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \delta \psi \end{aligned}$$

Складывая последние два равенства, получаем

$$\delta A^* = \delta (U + \psi T^2) + T^2 \delta \psi + 3\alpha \sigma \delta \theta,$$

где $U = \frac{3}{2} k \sigma^2$ — упругая энергия объемного сжатия. В силу (18.01) можно также писать

$$\delta A^* = \delta (U + \psi T^2) + T^2 \delta \psi + \frac{\alpha}{k} \varepsilon \delta \theta - \frac{3\alpha^2}{k} \theta \delta \theta \quad (18.18)$$

Складывая (18.17) и (18.18), находим приращение внутренней энергии

$$\delta \Phi = \delta (U + \psi T^2 + \frac{\alpha}{k} \varepsilon \theta - \frac{3\alpha^2}{2k} \theta^2) + C(\theta) \delta \theta + T^2 \delta \psi \quad (18.19)$$

Так как $\delta \Phi$ должно быть точным дифференциалом, то в рассматриваемой нами среде возможны лишь состояния:

$$1. \psi = \text{const}; \quad 2. T^2 = \text{const}; \quad 3. \psi = f(T^2), \quad (18.20)$$

каждое из которых мы изучим ниже. При этих же условиях в случае изотермического процесса $\theta = \text{const}$ приращение работы деформации δA^* является полином дифференциалом некоторой функции $\Pi = \Pi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{zx})$, которую мы условимся называть потенциалом деформации.

IV. *Обобщение формул Грина.* Так как Φ — функция состояния, то

$$\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx}$$

Сравнивая эту формулу с формулой (18.11), приходим к обобщению формул Грина

$$\left. \sigma_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_x} - \frac{\alpha \theta}{k} \right\}_{\text{и т. п.}}, \quad \left. \tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}} \right\}_{\text{и т. п.}}, \quad (18.21)$$

причем здесь внутренняя энергия выражена в функции переменных $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{zx}$; θ . Для изотермического процесса $\theta = \text{const}$ эти формулы принимают вид

$$\sigma_x = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_y}, \quad \dots, \quad \tau_{zx} = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{zx}} \quad (18.22)$$

V. *Состояние линейной упругости (закон Гука).* Случаю $\psi = \text{const} = \frac{1}{2G}$ соответствует состояние линейной упру-

гости; соотношения Генки переходят в закон Гука

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right) + \alpha \theta \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (18.23)$$

Здесь интенсивность касательных напряжений пропорциональна интенсивности деформаций сдвига

$$T = G\Gamma \quad (18.24)$$

Опираясь на соотношения (18.01), (18.23), (18.24), получаем из (18.19) формулу для приращения плотности внутренней энергии упругой среды Гука

$$\delta\Phi = \delta \left[\frac{\varepsilon^2}{6k} + \frac{G}{2} \Gamma^2 + \frac{\alpha}{k} (\Theta - \theta) \varepsilon \right] + C(\theta) \delta\theta$$

С помощью формул Грина (18.21) приходим к иной форме закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_x - \frac{\alpha}{k} \theta \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad (18.25)$$

где λ и $\mu = G$ — упругие константы Ламе.

В случае изотермического процесса потенциал работы деформации

$$\Pi = \frac{\varepsilon^2}{6k} + \frac{G}{2} \Gamma^2,$$

т. е. равняется сумме энергий упругого изменения объема и упругого изменения формы.

VI. *Состояние текучести.* В другом предельном случае $T^2 = \text{const}$; примем для постоянной значение τ_s^2 :

$$T^2 = \tau_s^2 \quad (18.26)$$

Последнее уравнение совпадает с условием текучести Мизеса. Таким образом, это состояние описывается уравнениями теории пластичности Генки¹. Выясним теперь смысл

¹ Подчеркнем, что в схеме нелинейно-упругого тела даже „состояние текучести“ является своеобразным упругим состоянием. Моделью нелинейно-упругого тела является пружина с нелинейной характеристикой. Можно провести некоторую аналогию между „состоянием текучести“ ($T = \text{const}$) и потенциальным полем силы тяжести (сила тяжести = const).

функции ψ ; согласно (18.09) и (18.26)

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\tau_s}, \quad (18.27)$$

т. е. в состоянии текучести функция ψ является мерой интенсивности сдвигов. Далее, из (18.19) и (18.27) следует

$$\delta\Phi = \delta \left[\frac{\varepsilon^2}{6k} + \tau_s \Gamma + \frac{\alpha}{k} (\Theta - \theta) \varepsilon \right] + C(\theta) \delta\theta \quad (18.28)$$

Рассмотрим изотермический процесс $\theta = \text{const}$; приращение потенциала работы деформации

$$\delta\Pi = \delta \left(\frac{\varepsilon^2}{6k} + \tau_s \Gamma \right), \quad (18.29)$$

т. е. равняется сумме приращений энергии упругого объемного сжатия и работы изменения формы $\tau_s \Gamma$.

Пользуясь формулами Грина (18.21), получаем

$$\tau_x = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} \frac{2\tau_s}{\Gamma} \right) \varepsilon + \frac{2\tau_s}{\Gamma} \varepsilon_x - \frac{\alpha}{k} \theta, \quad \tau_{xy} = \frac{\tau_s}{\Gamma} \gamma_{xy} \quad \left. \begin{array}{l} \text{и т. п.} \end{array} \right\} \quad (18.30)$$

Заметим, что напряжения, представленные этими формулами, тождественно удовлетворяют условию текучести Мизеса.

В случае несжимаемой среды $k = 0$, и напряжения определяются с точностью до среднего давления σ ; внося (18.01) в (18.30), находим

$$\sigma_x - \sigma = \frac{2\tau_s}{\Gamma} (\varepsilon_x - \alpha\theta) \quad \left. \begin{array}{l} \text{и т. п.} \end{array} \right\}, \quad \tau_{xy} = \frac{\tau_s}{\Gamma} \gamma_{xy} \quad \left. \begin{array}{l} \text{и т. п.} \end{array} \right\} \quad (18.31)$$

VII. *Состояние упрочнения.* Обратимся, наконец, к общему случаю, когда

$$\psi = f(T^2),$$

и соответственно этому

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = f(T^2) \left(\tau_x - \frac{f(T^2) - k}{f(T^2)} \sigma \right) + \alpha\theta \\ \gamma_{xy} = 2f(T^2) \tau_{xy} \\ \text{и т. п.} \end{array} \right\}, \quad (18.32)$$

а

$$\Gamma = 2f(T^2) T, \quad (18.33)$$

т. е. интенсивность сдвигов является некоторой функцией интенсивности касательных напряжений. Подобная зависимость, как показывают опыты (§ 12), характерна для состояния упрочнения. Условимся поэтому и рассматриваемое здесь состояние нелинейной упругости называть состоянием упрочнения. Функция $f(T^2)$ считается заданной и может быть найдена экспериментальным путем из наблюдений над каким-нибудь простым видом деформации (например, растяжением).

Приращение внутренней энергии для упрочняющейся среды описывается формулой

$$\delta\Phi = \delta \left[\frac{\varepsilon^2}{6k} + \int^{\Gamma^2} g(\zeta) d\zeta + \frac{\alpha}{k} (\Theta - \theta) \varepsilon \right] + C(\theta) \delta\theta, \quad (18.34)$$

причем

$$T = 2g(\Gamma^2) \Gamma \quad (18.35)$$

есть соотношение, обратное (18.33). Для изотермического процесса приращение потенциала работы деформации

$$\delta\Pi = \delta \left[\frac{\varepsilon^2}{6k} + \int^{\Gamma^2} g(\zeta) d\zeta \right] \quad (18.36)$$

С помощью формул Грина нетрудно найти уравнения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{k} - 4g(\Gamma^2) \right] \varepsilon + 4g(\Gamma^2) \varepsilon_w - \frac{\alpha}{k} \theta \\ \tau_{xy} &= 2g(\Gamma^2) \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{и т. п.} \\ \text{и т. п.} \end{array} \quad (18.37)$$

Заметим, что при $2g(\Gamma^2) = G$ получаем упругую среду Гука; при $2g(\Gamma^2) = \frac{\tau_s}{T}$ приходим к состоянию текучести.

В случае несжимаемой среды ($k=0$)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma &= 4g(\Gamma^2) (\varepsilon_x - \alpha\theta) \\ \tau_{xy} &= 2g(\Gamma^2) \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{и т. п.} \\ \text{и т. п.} \end{array}$$

Так как деформация протекает в направлении действующих усилий, то функции $g(\Gamma^2)$ и $f(T^2)$ положительны. При очень малых напряжениях, как показывают опыты, справедлив закон Гука; в тех случаях, когда это нужно учитывать, следует полагать

$$\lim_{T \rightarrow 0} 2f(T^2) = \frac{1}{G}; \quad \lim_{\Gamma \rightarrow 0} 2g(\Gamma^2) = G$$

VIII. *Обсуждение результатов.* Проведенный термодинамический анализ показывает, что уравнения Генки (с условием текучести Мизеса или с условием упрочнения Роша-Эйхингера) по своей структуре являются уравнениями состояния идеальной нелинейно-упругой среды и обобщают, следовательно, закон Гука. Эти уравнения, как мы знаем, применимы и к пластическим деформациям, если отдельно рассматривать нагрузку тела и его разгрузку. Разумеется, изменение температуры при упругой и пластической деформации имеет разный характер. Выше была найдена формула

$$\delta Q = C(\theta) \delta \theta + \frac{\alpha}{k} \theta \delta \epsilon$$

При адиабатическом процессе деформации

$$0 = C(\theta) \delta \theta + \frac{\alpha}{k} \theta \delta \epsilon, \quad (18.38)$$

т. е. изменение температуры тела связано только с изменением объема. Рассмотрим, в частности, адиабатическое растяжение стального стержня (кривая $OABC$, фиг. 18). Согласно (18.38) в упругой области стержень охлаждается, на площадке текучести температура стержня не меняется, наконец, в состоянии упрочнения должно наблюдаться дальнейшее падение температуры (пунктирная кривая на фиг. 18). Опыты рисуют несколько иную картину [41]; до предела упругости стержень охлаждается в хорошем соответствии с формулой (18.38), затем начинает нагреваться, правда, вначале очень незначительно. Это нагревание является результатом перехода части работы деформации в теплоту



Фиг. 18.

и, как было показано в § 16, практически не влияет на кривую деформации. Рассеяние работы обнаруживается при разгрузке, происходящей за счет накопившейся упругой энергии; большому рассеянию отвечает большая остаточная деформация.

§ 19. Разгрузка

I. В § 17 мы коснулись понятий нагрузки и разгрузки при простом растяжении. При сложном напряженном состоянии значительно труднее разграничить эти понятия; одним и тем же значениям интенсивностей T и Γ здесь могут отвечать разнообразные напряженные и деформированные состояния. Скудность экспериментальных данных не позволяет укавать в общем случае критерий того, когда в процессе деформации следует переходить от одних законов деформации к другим, когда нагрузка материала сменяется разгрузкой. Большая часть экспериментальных данных относится к случаю, когда напряжения изменяются пропорционально одному и тому же параметру λ (например — времени). Тогда увеличению λ соответствует состояние нагрузки, уменьшению λ — состояние разгрузки. Отметим здесь, что этот случай часто встречается и в практических задачах (см. [10, 12]).

Иной характер носят опыты Гогенемзера, подробно рассматриваемые ниже (§ 58). Обобщая результаты этого опыта, можно пытаться определить состояние нагрузки как состояние, в котором интенсивность деформаций сдвига растет, т. е.

$$d\Gamma > 0$$

при условии, что компоненты деформации по величине не убывают. Этот вопрос, однако, нуждается в тщательном экспериментальном исследовании. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь простейших случаев нагрузки и разгрузки и будем различать их соответственно условиям:

$$d\Gamma > 0 \text{ (нагрузка); } d\Gamma < 0 \text{ (разгрузка)}$$

II. При разгрузке деформация элемента среды происходит благодаря накопленной им упругой потенциальной энергии;

судить о последней можно, разумеется, лишь по опытным данным. На основании многочисленных экспериментов — при одноосном и сложном напряженных состояниях — можно считать установленным следующие положения:

1. Упругая энергия деформированного элемента среды определяется величинами σ и T , достигнутыми к моменту начала разгрузки, и значениями модулей упругости k и G , характерными для начального участка кривой нагружения.

2. Изменение объема является упругой деформацией, поэтому, независимо от направления процесса,

$$\epsilon = 3 k \sigma \quad (19.01)$$

3. При разгрузке

$$D_\sigma - \bar{D}_\sigma = 2G(D_* - \bar{D}_*), \quad (19.02)$$

где \bar{D}_σ , \bar{D}_* — девиаторы напряжения и деформации, соответствовавшие состоянию максимального нагружения, достигнутого к моменту начала разгрузки. Таким образом, при разгрузке разности компонентов напряжения $[\sigma_x - \bar{\sigma}] - (\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma})$

$\dots, (\tau_{zx} - \bar{\tau}_{zx})$ и разности компонентов деформации $\left[\left(\epsilon_x - \frac{1}{3} \epsilon \right) - \left(\bar{\epsilon}_x - \frac{1}{3} \bar{\epsilon} \right) \right], \dots, (\gamma_{zx} - \bar{\gamma}_{zx})$ удовлетворяют закону Гука. Соотношения (19.02) можно представить в виде

$$D_\sigma = 2GD_* + D_c, \quad (19.03)$$

где $D_c = \bar{D}_\sigma - 2G\bar{D}_*$ — фиксированный для каждого случая разгрузки девиатор.

Состояние разгрузки изучали Г. Генки [57] и А. А. Ильюшин [10].

§ 20. Общая форма уравнений теории малых упруго-пластических деформаций

1. Зная законы нагрузки и разгрузки, нетрудно указать (см. § 17) общую форму уравнений теории малых упруго-пластических деформаций

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon &= 3k d\sigma \\ dD_\sigma &= (1 + \text{sign } d\Gamma) d[h(\Gamma^2) D_*] + 2G dD_* \end{aligned} \right\}, \quad (20.01)$$

где положено

$$h(\Gamma^2) = 2g(\Gamma^2) - G \quad (20.02)$$

Так как значение модуля сдвига G соответствует (см. §§ 7, 19) наклону касательной к кривой деформации в начальной ее точке ($\tau = 0$, $\gamma = 0$), то $h(0) = 0$.

При нагрузке $d\Gamma > 0$, и уравнения (20.01) переходят в обобщенные соотношения Генки

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= 3k\sigma \\ D_e &= 4g(\Gamma^2) D_e + D'_e \end{aligned} \right\}, \quad (20.03)$$

где D'_e — произвольный постоянный девиатор.

При разгрузке $d\Gamma < 0$, и уравнение (20.01) принимает форму закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= 3k\sigma \\ D_e &= 2GD_e + D''_e \end{aligned} \right\} \quad (20.04)$$

Произвольный девиатор D'_e (D''_e) определяется состоянием деформаций и напряжений в точке перехода от нагрузки к разгрузке (от разгрузки к нагрузке).

§ 21. Замечание об изотропности среды и подобии девиаторов D_o , D_e

I. Выше предполагалось, что среда является изотропной. Опыт, однако, свидетельствует о том, что с развитием пластической деформации материал приобретает известную анизотропию и, следовательно, только в первом приближении может быть рассматриваем как изотропный.

Интересные наблюдения описаны Шмидтом [83]; оказывается, продольное растяжение вызывает в поперечном направлении большее упрочнение, чем в продольном. Точно также растяжение тонкостенной трубы больше действует в смысле упрочнения на последующее кручение, чем на дальнейшее растяжение.

Различные способы описания анизотропизации материала осуждались Шмидтом [83] и Прагером [74, 76].

II. Опыты Лоде [62], Тейлора и Квини [85] и др. свидетельствуют также о зависящем от материала систематическом отклонении от условия подобия девиаторов D_o и D_e . Результаты тщательных исследований Тейлора и Квини показаны на фиг. 15.

Недавно Прагер [49] рассмотрел возможное обобщение закона связи между напряжением и деформацией и показал, в частности, что если исходить из соотношения

$$D_e = AD_e^2 + BD_e + CT_1,$$

где D_e^2 — квадрат девиатора напряжений, а коэффициенты A, B, C — некоторые функции инвариантов $I_2(D_e), I_3(D_e)$, то можно добиться хорошего согласия с наблюдениями Тейлора и Квини.

§ 22. Смешанные задачи

I. Если кривая „ τ ; γ “ для данной среды имеет несколько участков (см. фиг. 11), то различные области тела могут находиться в различных состояниях. Пусть на тело действуют какие-нибудь внешние силы; оно будет целиком пребывать в фазе линейной упругости, пока интенсивность касательных напряжений T нигде не достигает предела τ_s ; с возрастанием нагрузки в теле, вообще говоря, образуются области текучести, которые отделяются от упругой части тела поверхностью

$$\psi = \text{const} = \frac{1}{2G} \quad (22.01)$$

По мере развития деформаций текучести происходит нарастание интенсивности сдвигов Γ , пока последняя не достигнет величины предельного сдвига текучести γ_s ; с этого момента в теле возникает область упрочнения, отделенная от области текучести поверхностью, на которой

$$\psi = \text{const} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_s}{\tau_s} \quad (22.02)$$

II. Мы будем предполагать, что смещение — непрерывная функция координат (т. е. „трещины“ отсутствуют) и что кривая „ τ ; γ “, являющаяся прообразом кривой „ T ; Γ “ непрерывна¹. Постараемся выяснить — как изменяются компоненты напряжения и деформации при переходе через поверхность S ,

¹ Что, быть может, иногда и нарушается (см. фиг. 6 — пик напряжений).

разделяющую области V_1 и V_2 различных состояний среды. Проведем в произвольной точке этой поверхности прямоугольную систему координат x, y, z так, чтобы ось z была направлена по нормали к S , а оси x, y лежали в касательной плоскости. Будем обозначать величины, относящиеся к области V_1 одним штрихом, к области V_2 — двумя штрихами.

Уравнения равновесия элемента поверхности S приводят, очевидно, к условиям

$$\sigma'_z = \sigma''_z; \tau'_{zx} = \tau''_{zx}; \tau'_{zy} = \tau''_{zy} \text{ на } S. \quad (22.03)$$

Далее необходимо, чтобы произвольно проведенная дуга на поверхности S обладала одним и тем же удлинением независимо от того, с какой стороны приближаются к S ; это требование будет выполнено, если

$$\epsilon'_x = \epsilon''_x; \epsilon'_y = \epsilon''_y; \gamma'_{xy} = \gamma''_{xy} \text{ на } S. \quad (22.04)$$

В силу непрерывности кривой „ T ”; Γ^* имеем

$$\Gamma' = \Gamma''; T' = T''; g'(\Gamma^2) = g''(\Gamma'^2) \text{ на } S \quad (22.05)$$

Согласно условиям (22.04)

$$\epsilon' - \epsilon'' = \epsilon'_z - \epsilon''_z \text{ на } S \quad (22.06)$$

Пользуясь третьим из соотношений (18.37) и условием $\sigma'_z = \sigma''_z$ на S , находим, что

$$\epsilon' = \epsilon'' \text{ на } S \quad (22.07)$$

Исходя из (18.37) и условий (22.03), (22.04), (22.05), (22.07), легко убедиться в том, что на поверхности S должны быть непрерывны все компоненты деформации и напряжения.

III. Если температура также является параметром состояния, то анализ условий на поверхности S усложняется. Полагая, что переход из одного состояния в другое осуществляется непрерывно (в смысле отсутствия „скрытой работы“, „скрытой теплоты“ перехода), следует считать на поверхности S непрерывными температуру θ и все компоненты деформации и напряжения.

§ 23. Замечание к истории вопроса

I. Теория малых упруго-пластических деформаций имеет свое начало в работе Хаара и Кармана ([56], 1909 г.), где в основание теории пластичности был положен следующий вариационный принцип: из всех систем напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad (23.01)$$

условию текучести Сен-Венана

$$2|\tau_1| \leq \sigma_s; \quad 2|\tau_2| \leq \sigma_s; \quad 2|\tau_3| \leq \sigma_s \quad (23.02)$$

и граничным условиям, только действительная система напряжений сообщает минимум упругой потенциальной энергии тела

$$\iiint_V \left(\frac{3}{2} k \sigma^2 + \frac{T^2}{2G} \right) dV = \min, \quad (23.03)$$

где V — объем тела.

Если в некоторой области все условия выполнены со знаком неравенства, то эта область находится в упругом состоянии, и постулированный Хааром и Карманом принцип переходит при этом в начало Кастильяно. Произвольность и необоснованность вариационного принципа Хаара и Кармана вызвали ряд возражений (Гогенемзер и Прагер [60] и др.).

II. Вследствие выбора условия текучести, мало подходящего для вычислений, Хаару и Карману не удалось прийти к определенной системе уравнений. Генки ([57], 1924) несколько изменил свойства среды, подчинив ее условию текучести Мизеса

$$T^2 = \tau_s^2 \quad (23.04)$$

В такой постановке вариационная задача приводит к шести (помимо четырех уравнений (23.01) и (23.04))

уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{1+\psi^*}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\psi^* + \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma}{1+\psi^*} \right] \\ &\quad \text{и т. п.} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{1+\psi^*}{G} \tau_{xy} \\ &\quad \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (23.05)$$

где

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z); \quad u_y = u_y(x, y, z); \quad u_z = u_z(x, y, z); \\ \psi^* &= \psi^*(x, y, z) \end{aligned}$$

суть множители Лагранжа, соответствующие уравнениям равновесия и условию Мизеса. По аналогии с упругой средой u_x, u_y, u_z рассматриваются как компоненты пластического смещения. Уравнения (23.05) есть известные уже нам уравнения Генки; в упругой среде $\psi^* = 0$, и уравнения (23.05) переходят в закон Гука.

III. В более поздних работах Генки [37], а также и другие исследователи иначе строят уравнения (23.05), именно — исходят из подобия и коаксиальности девиаторов напряжения и деформации, из уравнения объемного сжатия $e = 3k\epsilon$ и условия текучести Мизеса; справедливость этих утверждений считается установленной экспериментально.

Приведенный в этой главе термодинамический анализ изложен в работах автора [15, 16, 17].

§ 24. Остаточные напряжения и деформации

I. Если при нагрузке тело испытало неоднородную деформацию, то разгрузка, вообще говоря, будет сопровождаться появлением не только остаточных деформаций, но и остаточных напряжений.

Пусть состоянию максимального нагружения, за которым последовала разгрузка, соответствуют внешние силы $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$, $(\bar{X}_n, \bar{Y}_n, \bar{Z}_n)$, компоненты напряжения $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \dots, \bar{\tau}_{zx}$ и компоненты деформации $\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y, \dots, \bar{\gamma}_{zx}$. Предположим, что при разгрузке тело подчиняется закону Гука (§ 19), а сама разгрузка заканчивается обращением в нуль всех внешних

сил; при этом тело получает остаточные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$ и остаточные деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{zx}$. Считая справедливым закон сложения действия сил, а деформации — малыми, представим себе разгрузку как приложение к телу сил $(-\bar{X}, -\bar{Y}, -\bar{Z}), (-\bar{X}_n, -\bar{Y}_n, -\bar{Z}_n)$. Мы можем, не обращая внимания на исходное распределение напряжений $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \dots, \bar{\tau}_{zx}$ и деформаций $\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y, \dots, \bar{\gamma}_{zx}$, найти согласно уравнениям теории упругости напряжения $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \dots, \tau_{zx}^*$ и деформации $\epsilon_x^*, \epsilon_y^*, \dots, \gamma_{zx}^*$, отвечающие этим мысленно приложенным силам. В самом деле, напряжения $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \dots, \bar{\tau}_{zx}$ и деформации $\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y, \dots, \bar{\gamma}_{zx}$ можно рассматривать как некоторые начальные напряжения и деформации тела; известно что упругое тело, имеющее начальные напряжения и деформации, ведет себя под действием внешних сил так, как если бы начальных напряжений и деформаций не было (см. [38], § 64). Эта теорема предполагает применимым принцип сложения действия сил. Благодаря возможности суперпозиции остаточные напряжения и деформации равны:

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= \bar{\sigma}_x + \sigma_x^*; & \sigma_y^0 &= \bar{\sigma}_y + \sigma_y^*; & \dots; & & \tau_{zx}^0 &= \bar{\tau}_{zx} + \tau_{zx}^*. \\ \epsilon_x^0 &= \bar{\epsilon}_x + \epsilon_x^*; & \epsilon_y^0 &= \bar{\epsilon}_y + \epsilon_y^*; & \dots; & & \gamma_{zx}^0 &= \bar{\gamma}_{zx} + \gamma_{zx}^*. \end{aligned} \quad (24.01)$$

Результаты имеют смысл лишь до тех пор, пока при разгрузке не нарушается закон Гука, т. е. пока интенсивность остаточных напряжений сдвига T^0 не превышает некоторого значения, зависящего от свойств материала и от величины интенсивности касательных напряжений \bar{T} , достигнутой перед разгрузкой.

§ 25. Дифференциальные уравнения равновесия в смещениях

I. Для пластической среды нетрудно указать дифференциальные уравнения равновесия в смещениях, обобщающие известные уравнения Ламе в теории упругости. Для изотермического процесса $\theta = \text{const}$ (см. § 18)

$$\sigma_x = \frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_x}; \quad \sigma_y = \frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_y}; \quad \dots; \quad \tau_{zx} = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{zx}}, \quad (25.01)$$

где потенциал деформации Π выражается в функции переменных $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{zx}$. Подставляя (25.01) в уравнения равновесия, приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{xz}} \right) + \rho X = 0 \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (25.02)$$

Исключая отсюда компоненты деформации при помощи соотношений

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \dots; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x},$$

получаем систему трех дифференциальных уравнений относительно u_x, u_y, u_z . Для упругой среды Гука

$$\Pi = \frac{\epsilon^2}{6\kappa} + \frac{G\Gamma^2}{2},$$

и соотношения (25.02) приводятся к дифференциальным уравнениям Ламе. В состоянии текучести $\Pi = \frac{\epsilon^2}{6\kappa} + \tau_s \Gamma$, и система (25.02) получает вид ($X=Y=Z=0$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \epsilon_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{xz}} \right) + \frac{1}{3\tau_s \kappa} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0 \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (25.03)$$

Подобные уравнения указаны Г. Генки [4].

В общем случае („состояние упрочнения“)

$$\Pi = \frac{\epsilon^2}{6\kappa} + \int_{\Gamma^0}^{\Gamma} g(\zeta) d\zeta$$

Соответствующую систему уравнений мы не выписываем ввиду ее громоздкости.

Разумеется, к полученным дифференциальным уравнениям теории пластичности неприменимы классические методы интегрирования уравнений Ламе в теории упругости. Однако уравнения теории пластичности хорошо поддаются численным методам решения. Г. Генки [4] и А. А. Ильющин [10] рассматривали вопросы применения метода последовательных приближений.

§ 26. Упруго-пластическое равновесие шара

1. *Постановка задачи.* Рассмотрим задачу упруго-пластического равновесия полого шара, испытывающего внутреннее давление $-p$ и внешнее растяжение P . Решение аналогичной задачи и определение остаточных напряжений принадлежат Г. Генки [4].

Предполагая наличие центральной симметрии и вводя сферические координаты r, ψ, χ (§ 2), получаем

$$\sigma_\varphi = \sigma_\chi; \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi\chi} = \tau_{\chi r} = 0; \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}} |\sigma_r - \sigma_\varphi| \quad (26.01)$$

Нормальные напряжения σ_r и σ_φ должны удовлетворять уравнению равновесия (§ 2)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (26.02)$$

Пусть вокруг шаровой полости, радиус которой равен a (внешний радиус шара b), образуется некоторая область текучести ($a \leq r \leq c$), где $c \leq b$. Условие текучести имеет вид

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \pm \sigma_s$$

Знак может быть выбран из следующих соображений. Будем изменять заданные силы p и P пропорционально некоторому параметру $\lambda > 0$. При малом λ шар находится в упругом состоянии; будем увеличивать λ ; тогда при некотором значении $\lambda = \lambda_s$ вещество шара придет в предельное состояние на внутренней поверхности $r = a$. Напряжения $\sigma'_r, \sigma'_\varphi$ при $r = a$, соответствующие этому значению $\lambda = \lambda_s$, нам известны по решению упругой задачи, следовательно нам известен знак разности $\sigma'_\varphi - \sigma'_r$. При дальнейшем увеличении λ область пластических деформаций будет расти, но знак $\sigma_\varphi - \sigma_r$ в ней останется тот же. Этот способ выбора знака основывается на знании „истории“ возникновения пластической зоны и применим, конечно, и в других задачах.

Ограничимся рассмотрением случая, когда шар испытывает внешнее растяжение, т. е. $P \geq 0$, и внутреннее давление $-p$ ($p \geq 0$).

Для такого случая всегда $\sigma'_\varphi \geq 0$, $\sigma'_r = -p \leq 0$, и условие текучести необходимо писать в форме

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = +\sigma_s \quad (26.03)$$

С помощью этого условия приводим уравнение равновесия к виду

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - 2 \frac{\sigma_s}{r} = 0,$$

откуда сразу получаем

$$\sigma_r = 2\sigma_s \ln r + C_1, \quad (26.04)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Здесь мы встречаемся с примером „статически определимой“ задачи, когда напряжения в зоне текучести вполне определяются уравнениями равновесия и условием текучести (без рассмотрения деформаций). Статически определимые задачи составляют важный класс задач, характерный для состояния текучести.

Из граничного условия

$$\sigma_r = -p \quad \text{при} \quad r = a$$

находим, что $C_1 = -p - 2\sigma_s \ln a$; таким образом, в зоне текучести

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2\sigma_s \ln \frac{r}{a} - p \\ \sigma_\varphi &= \sigma_r + \sigma_s \end{aligned} \quad (26.05)$$

II. *Деформации и смещения в зоне текучести.* Для определения смещений воспользуемся зависимостями Генки (§ 18)

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du_r}{dr} = \psi \left(\sigma_r - \frac{\psi - k}{\psi} \sigma \right) \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u_r}{r} = \psi \left(\sigma_\varphi - \frac{\psi - k}{\psi} \sigma \right) \end{aligned} \quad (26.06)$$

Так как компоненты деформации должны удовлетворять условию сплошности

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dr} + \frac{\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r}{r} = 0, \quad (26.07)$$

то, подставляя сюда ϵ_r , ϵ_φ из (26.06), σ_r , σ_φ из (26.05), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\psi}{dr} + \frac{3}{r}\psi - \frac{6k}{r} = 0, \quad (26.08)$$

решение которого имеет вид

$$\psi = 2k + \frac{C_2}{r^3}, \quad (26.09)$$

где C_2 — произвольная постоянная.

III. В области упругих деформаций ($c \leq r \leq b$) имеем известные формулы теории упругости [38]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Pb^3 - qc^3}{b^3 - c^3} + \frac{(q - P)b^3}{b^3 - c^3} \frac{c^3}{r^3}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{Pb^3 - qc^3}{b^3 - c^3} - \frac{1}{2} \frac{(q - P)b^3}{b^3 - c^3} \frac{c^3}{r^3}, \end{aligned} \quad (26.10)$$

где q означает напряжение на границе областей упругости и текучести

$$q = \sigma_r|_{r=c} \quad (26.11)$$

Согласно закону Гука получаем

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dr} = \epsilon_r &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_r - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right) \\ \frac{u_r}{r} = \varphi &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_\varphi - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right) \end{aligned} \quad (26.12)$$

Из (26.12) и (26.10) находим радиальное смещение

$$u_r = r \left[k \frac{Pb^3 - qc^3}{b^3 - c^3} - \frac{1}{4G} \frac{b^3 (q - P)}{b^3 - c^3} \frac{c^3}{r^3} \right] \quad (26.13)$$

Для определения неизвестных постоянных c , q и C_2 имеем условие непрерывности состояния

$$\psi = \frac{1}{2G} \quad \text{при } r = c, \quad (26.14)$$

условие непрерывности радиального напряжения

$$\sigma_r|_{r=c-0} = \sigma_r|_{r=c+0} \quad (26.15)$$

и условие непрерывности смещения

$$u_r|_{r=c-0} = u_r|_{r=c+0} \quad (26.16)$$

Согласно первому из этих условий находим

$$\psi = 2k + \left(\frac{1}{2G} - 2k\right)\left(\frac{c}{r}\right)^3 \quad (26.17)$$

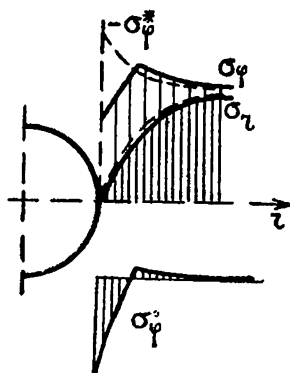
Остальные условия приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} q &= 2\sigma_s \ln \frac{c}{a} - p \\ \ln \frac{c}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right)^3 &= \frac{P-p}{2\sigma_s} - \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (26.18)$$

IV. Пластическая деформация вокруг сферической полости в неограниченном теле. В качестве примера рассмотрим случай сферической полости в равномерно растягиваемом неограниченном теле; здесь

$$p = 0$$

$$b = \infty$$



Напряжения в зоне текучести ($a \leq r \leq c$) даны формулами (26.05). В упругой части пространства ($r \geq c$)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= P + (q - P) \frac{c^3}{r^3} \\ \sigma_\varphi &= P - \frac{1}{2}(q - P) \frac{c^3}{r^3} \end{aligned} \quad (26.19)$$

Фиг. 19.

Согласно (26.18), получаем¹

$$q = P - \frac{2}{3}\sigma_s; \quad c = a \exp\left(\frac{P}{2\sigma_s} - \frac{1}{3}\right) \quad (26.20)$$

Так как $c \gg a$, то условие возникновения зоны текучести будет

$$P \gg \frac{2\sigma_s}{3} \quad (26.21)$$

Распределение напряжений σ_r , σ_φ показано на фиг. 19 для частного случая $P = \frac{3}{2}\sigma_s$.

¹ В книге принято обозначение $e^\lambda \equiv \exp(\lambda)$.

V. Представим себе, что усилия на бесконечности удалены; тогда возникнут *остаточные напряжения и деформации*. Для их определения находим напряжения σ_r^* , σ_φ^* (§ 24) вокруг сферической полости в упругом пространстве, испытывающем на бесконечности напряжения сжатия — P

$$\sigma_r^* = -P \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right); \quad \sigma_\varphi^* = -P \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

На основании формул (24.01) получаем остаточные напряжения (фиг. 19)

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 &= 2\sigma_s \ln \frac{r}{a} - P \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \\ \sigma_\varphi^0 &= 2\sigma_s \ln \frac{r}{a} - P \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) + \sigma_s \end{aligned} \quad \text{при } (a \leq r \leq c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 &= 2 \left(\frac{1}{2} P a^3 - \frac{1}{3} \sigma_s c^3 \right) \frac{1}{r^3} \\ \sigma_\varphi^0 &= - \left(\frac{1}{2} P a^3 - \frac{1}{3} \sigma_s c^3 \right) \frac{1}{r^3} \end{aligned} \quad \text{при } (r \geq c)$$

Эти формулы справедливы до тех пор, пока везде

$$|\sigma_\varphi^0 - \sigma_r^0| \leq \sigma_s$$

VI. *Решение задачи в смещениях*. Рассмотрим решение этой же задачи в смещениях. Согласно (18.30) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{3k} (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi) \mp \frac{2}{3} \sigma_s \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{3k} (\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi) \pm \frac{1}{3} \sigma_s, \end{aligned}$$

или, так как

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r},$$

то

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{3k} \left(\frac{du_r}{dr} + 2 \frac{u_r}{r} \right) \mp \frac{2}{3} \sigma_s \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{3k} \left(\frac{du_r}{dr} + 2 \frac{u_r}{r} \right) \pm \frac{1}{3} \sigma_s \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение равновесия (26.02), получаем дифференциальное уравнение

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + 2r \frac{du_r}{dr} - 2u_r \mp 6k\sigma_s r = 0;$$

его решение

$$u_r = C'_1 r + C'_2 \frac{1}{r^2} \pm 2k\sigma_s r \ln r,$$

где C'_1 , C'_2 — произвольные постоянные. Дальнейшие выкладки сводятся к определению произвольных постоянных из условий непрерывности при $r=c$ и граничного условия при $r=a$ и приводят к прежним результатам.

§ 27. Температурные напряжения в шаре при наличии текучести и упрочнения

I. В качестве примера приложения общих уравнений (18.37) рассмотрим задачу о температурных напряжениях в толстостенном сферическом сосуде, находящемся под действием объемных сил и равномерного внутреннего давления; распределение температуры θ и объемных сил X_r будем считать зависящим только от радиального расстояния. Решение этой задачи, представляющей интерес для геофизики и некоторых технических приложений, приводится к квадратурам. Случай равномерной температуры и отсутствия объемных сил подробно исследован В. В. Соколовским [37].

Решение строится в перемещениях. Воспользуемся уравнениями Генки, разрешенными относительно напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{k} - 4g(\Gamma^2) \right] \varepsilon + 4g(\Gamma^2) \varepsilon_r - \frac{\alpha}{k} \theta \\ &\quad \text{и т. п.} \\ \tau_{r\varphi} &= 2g(\Gamma^2) \gamma_{r\varphi} \\ &\quad \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (27.01)$$

Вследствие центральной симметрии

$$\sigma_\varphi = \sigma_\chi; \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\chi; \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi\chi} = \tau_{\chi r} = 0; \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi\chi} = \gamma_{\chi r} = 0.$$

$$\Gamma^2 = \frac{4}{3} (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)^2,$$

и уравнения (27.01) принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{3k} \varepsilon - \frac{8}{3} g(\Gamma^2) (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) - \frac{\alpha}{k} \theta \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{3k} \varepsilon - \frac{4}{3} g(\Gamma^2) (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) - \frac{\alpha}{k} \theta\end{aligned}\quad (27.02)$$

Напряжения должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + X_r(r) = 0 \quad (27.03)$$

и граничным условиям

$$\sigma_r = -p \text{ при } r = a; \quad \sigma_r = 0 \text{ при } r = b \quad (27.04)$$

На границе областей различного состояния среды смещения и все компоненты деформации и напряжения непрерывны. При этом на границе областей упругости и текучести $\Gamma = \gamma_e$, а на границе областей текучести и упрочнения $\Gamma = \gamma_s$, где γ_e, γ_s — константы вещества (фиг. 11); функция $g(\Gamma^2)$ должна, кроме того, удовлетворять условию

$$g(\gamma_s^2) = \frac{\tau_s}{2\gamma_s} \quad (27.05)$$

II. Введем новую неизвестную функцию $\Phi = \Phi(r)$ посредством соотношения

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi = \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} = \Phi(r)$$

Отсюда

$$u_r = r \left(C_1 + \int \frac{\Phi}{r} dr \right), \quad (27.06)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Тогда

$$\Gamma^2 = \frac{4}{3} \Phi^2; \quad \varepsilon = \Phi + 3 \left(C_1 + \int \frac{\Phi}{r} dr \right) \quad (27.07)$$

Положим

$$\left[\frac{1}{k} + 8g\left(\frac{4}{3} \Phi^2\right) \right] \Phi = \Psi, \quad (27.08)$$

где $\Psi = \Psi(r)$ — также неизвестная функция. Если теперь, воспользовавшись (27.07), (27.08), внести (27.02) в урав-

нение равновесия, то получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Psi}{dr} + \frac{3\Psi}{r} + \tilde{X}(r) = 0,$$

где обозначено

$$\tilde{X}(r) = 3X_r - \frac{3\alpha}{k} \frac{d\theta}{dr}$$

Общий интеграл этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\Psi(r) = \frac{1}{r^3} \left(C_2 + \int \tilde{X}(r) r^3 dr \right) \quad (27.09)$$

Напряжения σ_r и σ_φ можно представить с помощью функций u_r , Φ , Ψ следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{3} \Phi + \frac{1}{k} \frac{u_r}{r} - \frac{\alpha}{k} \theta \\ \sigma_\varphi &= \sigma_r + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \Phi - \Psi \right) \end{aligned} \quad (27.10)$$

Задавая выражение $g(\Gamma^2)$ в каждой из областей, получим соответствующие решения со своими произвольными постоянными. Для определения произвольных постоянных и радиусов сферических поверхностей, разграничивающих области различного состояния, имеем граничные условия (27.04) и условия непрерывности. На составлении вытекающей из них системы уравнений мы не останавливаемся.

§ 28. Распространение ударной волны в упруго-пластической среде

I. В последнее время проявляется значительный интерес к динамическим задачам теории пластичности. Ряд вопросов, связанных с продольными колебаниями стержней, исследовали Х. А. Рахматулин¹ и Г. С. Шапиро². Задачу о распространении ударной сферической волны, влекущей за собой пластическое течение среды, недавно рассмотрел Л. В. Альтшуллер [1]. Обратимся к основным уравнениям этой задачи.

¹ Прикладная математика и механика, т. IX.

² Прикладная математика и механика, т. X.

В случае центральной симметрии имеем дифференциальное уравнение движения (см. § 2)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (28.01)$$

В возмущаемой области материал приходит в состояние текучести, следовательно, напряжения в ней удовлетворяют условию текучести Мизеса, принимающему благодаря центральной симметрии вид (см. § 27)

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma_s \quad (28.02)$$

В теории текучести Генки относительное изменение объема считается пропорциональным среднему давлению, т. е.

$$\varepsilon = 3k\sigma \quad (28.03)$$

Но

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_r + 2\sigma_\varphi) \quad (28.04)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} \quad (28.05)$$

В силу условия текучести (28.02),

$$\sigma = \sigma_r + \frac{2}{3}\sigma_s \quad (28.06)$$

Внося (28.06) и (28.05) в уравнение (28.03) и дифференцируя по времени, получаем

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} = \frac{1}{3k} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) \quad (28.07)$$

Так как $\frac{\partial u_r}{\partial t} = v_r$, то система уравнений (28.01) и (28.07) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - 2 \frac{\sigma_s}{r} &= \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2 \frac{v_r}{r} &= 3k \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} \end{aligned}$$

Первое уравнение обращается в тождество, если положить

$$\sigma_r = \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + 2\sigma_s \ln \frac{r}{a}; \quad v_r = \frac{\partial \Phi^*}{\partial r}, \quad (28.08)$$

где Φ^* — новая неизвестная функция. Подставляя (28.08) во второе уравнение, приходим к волновому уравнению для $r\Phi^*$

$$\frac{\partial^2(r\Phi^*)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\Phi^*)}{\partial t^2}, \quad (28.09)$$

где введено обозначение

$$c^2 = \frac{1}{3k\rho}$$

Возьмем решение этого уравнения в форме Даламбера

$$r\Phi^* = \Phi(ct - r) + \Psi(ct + r), \quad (28.10)$$

где Φ и Ψ — произвольные функции.

Это решение представляет сферические волны, распространяющиеся со скоростью c . При $\sigma_s = 0$ рассматриваемая задача переходит в задачу об излучении звуковых колебаний в идеальной сжимаемой жидкости. Полное исследование общего случая пока не проведено.

Заметим, в заключение, что в динамических задачах этого рода скорости деформации очень велики, и, следовательно, пренебрегать их влиянием (как это принято в теории малых упруго-пластических деформаций) нельзя (см. § 9). Это обстоятельство подчеркнул В. В. Соколовский.

§ 29. Плоская деформация

I. Основные положения. Рассмотрим вкратце задачу о плоской деформации пластической среды. Решение этой задачи было сильно продвинуто исследованиями С. А. Христиановича и В. В. Соколовского. Подробное изложение этого вопроса содержится в монографиях С. Г. Михлина [25, 26] и В. В. Соколовского [34, 37].

В случае плоской деформации

$$u_x = u_x(x, y); \quad u_y = u_y(x, y); \quad u_z = 0$$

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

В силу уравнений Генки (§ 18)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \psi \left(\sigma_x - \frac{\psi - k}{\psi} \sigma \right) \\ \varepsilon_y &= \psi \left(\sigma_y - \frac{\psi - k}{\psi} \sigma \right) \\ 0 &= \psi \left(\sigma_z - \frac{\psi - k}{\psi} \sigma \right) \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\psi \tau_{xy} \\ \tau_{yz} &= 0 \\ \tau_{xz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29.01)$$

Будем считать материал несжимаемым¹ ($k = 0$); тогда

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0 \quad (29.02)$$

$$\sigma_z = \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (29.03)$$

Используя эти формулы, находим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \Gamma &= \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \end{aligned} \quad (29.04)$$

Таким образом, в случае плоской деформации интенсивность касательных напряжений есть не что иное, как максимальное касательное напряжение; интенсивность же деформаций сдвига представляет собою максимальный сдвиг. Угол между осью x и касательной к одной из площадок в данной точке, на которых действует максимальное касательное напряжение, определяется известной формулой

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \quad (29.05)$$

В силу уравнений Генки последнее соотношение приводится к виду

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}}, \quad (29.06)$$

т. е. площадки, подверженные действию максимального касательного напряжения, испытывают одновременно и максимальную деформацию сдвига. Кривая, касающаяся в каждой своей точке площадки максимального касательного напряжения, называется линией скольжения; очевидно, что имеются два ортогональных семейства линий скольжения.

¹ Это допущение приемлемо, если пластические деформации значительно превосходят упругие.

II. *Характеристики уравнений текучести.* Ниже мы будем рассматривать лишь состояние текучести, характеризующее условием Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\tau_s^2 \quad (29.07)$$

Присоединяя сюда уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (29.08)$$

мы вновь сталкиваемся с случаем статически определимой задачи. Преобразуем систему уравнений (29.07) и (29.08) полагая

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma + \tau_s \sin 2\varphi \\ \sigma_y &= \sigma - \tau_s \sin 2\varphi \\ \tau_{xy} &= -\tau_s \cos 2\varphi \end{aligned} \right\}, \quad (29.09)$$

где σ и φ — неизвестные функции; при такой замене переменных условие Мизеса удовлетворяется тождественно, а уравнения равновесия принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2\tau_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos 2\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin 2\varphi \right) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\tau_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin 2\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos 2\varphi \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29.10)$$

Рассмотрим в четырехмерном пространстве x, y, σ, φ некоторую кривую (L) $x = x(s)$, $y = y(s)$, $\sigma = \sigma(s)$, $\varphi = \varphi(s)$, где s — параметр, лежащую на решении уравнений (29.10)

$$\sigma = \sigma(x, y); \quad \varphi = \varphi(x, y)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy \\ d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \end{aligned} \right\} \quad (29.11)$$

Решая систему уравнений (29.10) и (29.11) относительно производных $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, находим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\Delta_3}{\Delta}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad (29.12)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}\Delta &= -2\tau_s \sin 2\varphi (dy - \operatorname{tg} \varphi dx) (dy + \operatorname{ctg} \varphi dx) \\ \Delta_1 &= 2\tau_s (2\varphi d\varphi dy + \sin 2\varphi dx d\sigma - \cos 2\varphi dy d\sigma) \quad (29.13) \\ &\text{и т. п.}\end{aligned}$$

Следует различать три случая:

1. Если определитель системы Δ отличен от нуля, то производные определены вдоль кривой (L) единственным образом.

2. Если определитель Δ обращается в нуль, а числители выражений (29.12) не равны нулю, то (L) называется линией разрыва.

3. Если в (29.12) числители обращаются в нуль одновременно со знаменателем, то кривая (L) называется характеристикой и вдоль нее значения производных не единственны. Определитель Δ обращается в нуль, если

$$1. \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{или} \quad 2. \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi$$

Внося в числители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ значение $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$, а затем $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi$, легко находим, что все числители обращаются одновременно в нуль, если соответственно

$$1. \frac{\sigma}{2\tau_s} + \varphi \equiv \xi = \text{const} \quad \text{или} \quad 2. \frac{\sigma}{2\tau_s} - \varphi \equiv \eta = \text{const}$$

Таким образом, имеем два ортогональных семейства характеристик

$$1. \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \frac{\sigma}{2\tau_s} + \varphi \equiv \xi = \text{const} \quad (29.14)$$

$$2. \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi; \quad \frac{\sigma}{2\tau_s} - \varphi \equiv \eta = \text{const} \quad (29.15)$$

Можно доказать, что характеристики совпадают с линиями скольжения.

III. *Преобразование М. Леви.* Если за неизвестные функции принять ξ и η , то дифференциальные уравнения (29.10) приводятся к более простому виду

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \xi}{\partial y} \sin \varphi = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} \sin \varphi - \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos \varphi = 0 \quad (29.16)$$

Эта система линеаризируется, если совершить обращение переменных; внося в (29.16) значения производных

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \delta; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial \eta} \delta; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial \xi} \delta; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \delta,$$

где

$$\delta = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (29.17)$$

получаем систему линейных уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \cos \varphi - \frac{\partial x}{\partial \eta} \sin \varphi = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} \sin \varphi + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cos \varphi = 0, \quad (29.18)$$

(если якобиан δ не обращается тождественно в нуль). Система уравнений (29.18) иногда называется канонической.

IV. *Интегралы уравнений пластичности.* В том случае, когда $\delta \equiv 0$ решения системы (29.16) находятся, как показал С. А. Христианович, непосредственно. Якобиан δ обращается тождественно в нуль в следующих случаях:

$$1. \xi = \text{const} = \xi_0; \quad \eta = \text{const} = \eta_0$$

Здесь $\sigma = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, и мы имеем равномерное напряженное состояние. Интегрирование уравнений характеристик (29.14), (29.15) приводит к двум взаимно ортогональным семействам параллельных прямых

$$y = x \operatorname{tg} \varphi_0 + C_1; \quad y = -x \operatorname{ctg} \varphi_0 + C_2 \quad (29.19)$$

$$2. \eta = \text{const} = \eta_0$$

В этом случае $\xi = 2\varphi + \eta_0$, и система (29.16) приводится к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \varphi = 0 \quad (29.20)$$

Интегралы равносильной этому уравнению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{dy}{\sin \varphi} = \frac{d\varphi}{0}$$

находятся сразу

$$\varphi = \text{const}; \quad y - x \operatorname{tg} \varphi = \text{const}$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (29.20) можно представить в виде

$$y - x \operatorname{tg} \varphi = \Phi(\varphi),$$

где Φ — произвольная функция; таким образом, имеем интеграл уравнений пластичности

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2\tau_s} - \varphi &= \text{const} = \eta_0 \\ y - x \operatorname{tg} \varphi &= \Phi(\varphi) \end{aligned} \quad (29.21)$$

Сравнение с (29.15) показывает, что первое семейство характеристик состоит из прямых

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + \Phi(\varphi), \quad \varphi = \text{const} \quad (29.22)$$

Второе семейство характеристик находится как семейство кривых, ортогональное к семейству прямых (29.22).

$$3. \xi = \text{const} = \xi_0$$

Этот случай рассматривается подобно предыдущему.

V. Граничные условия. Преобразуем граничные условия соответственно преобразованию дифференциальных уравнений. Пусть C — участок границы пластически деформированной области, заданный уравнениями

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (29.23)$$

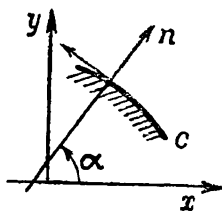
где $x(s)$, $y(s)$ — непрерывные и дифференцируемые функции. Будем считать для простоты, что на контуре отлично от нуля только нормальное напряжение, т. е.

$$\sigma_n = \sigma_n(s); \quad \tau_n = 0 \quad \text{на } C. \quad (29.24)$$

По формулам (1.02), (1.03), (1.04)

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_n &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Так как контур C ограничивает пластически деформированную область, то напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} удовлетворяют



Фиг. 20.

формулам М. Леви (29.09) и, следовательно,

$$\sigma_n = \sigma + \tau_s \sin 2(\varphi - \alpha); \quad \tau_n = -\tau_s \cos 2(\varphi - \alpha)$$

Согласно (29.24) можно определить (неоднозначно) контурные значения $\sigma = \sigma(s)$, $\varphi = \varphi(s)$:

$$\begin{aligned} \text{либо 1. } \varphi(s) &= \alpha(s) + \frac{\pi}{4} + m\pi; & \sigma(s) &= \sigma_n(s) - \tau_s; \\ \text{либо 2. } \varphi(s) &= \alpha(s) - \frac{\pi}{4} + m\pi; & \sigma(s) &= \sigma_n(s) + \tau_s, \end{aligned} \quad (29.25)$$

где m — произвольное целое число, которое выбирается (так же, как и знак) при решении каждой конкретной задачи. Таким образом на контуре

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\sigma_n(s)}{2\tau_s} + \alpha(s) \mp \frac{1}{2} \pm \frac{\pi}{4} + m\pi; \\ \eta &= \frac{\sigma_n(s)}{2\tau_s} - \alpha(s) \mp \frac{1}{2} \mp \frac{\pi}{4} - m\pi \end{aligned} \quad (29.26)$$

При этом могут встретиться случаи:

$$\begin{aligned} 1. \xi &= \text{const} = \xi_0; & \eta &= \text{const} = \eta_0 \\ 2. \xi &= \xi(s); & \eta &= \text{const} = \eta_0 \\ 3. \xi &= \text{const} = \xi_0; & \eta &= \eta(s) \\ 4. \xi &= \xi(s); & \eta &= \eta(s) \end{aligned} \quad (29.27)$$

VI. *Решение граничных задач.* Не имея возможности подробно остановиться на построении решений плоской задачи (см. С. Г. Михлин [26], В. В. Соколовский [34,37]), ограничимся кратким замечанием. В первых трех случаях (29.27) задачи решаются при помощи интегралов уравнений пластичности; при этом угловым точкам контура и точкам, в которых внешние силы испытывают скачок, соответствуют специальные решения, для которых одно семейство характеристик представляет собой пучок характеристик, исходящий из рассматриваемой особой точки. В следующем параграфе излагается пример подобной задачи.

Более сложным является общий случай (29.27—4); здесь ставятся краевые задачи для канонических уравнений (29.18) по данным значениям

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

вдоль кривой

$$\xi = \xi(s), \quad \eta = \eta(s)$$

в плоскости характеристик ξ, η . Получаемое решение обращается. В задачах этого типа результаты достигаются применением приближенного метода Массо, заключающегося в последовательном построении сетки характеристик и вычислении в ее узлах ξ, η значений x, y .

Большие трудности представляет решение смешанных упруго-пластических задач, так как кривая, разделяющая области различного состояния, заранее неизвестна. Недавно Л. А. Галин¹ дал решение интересной упруго-пластической задачи о растяжении плоскости с круговым вырезом.

VII. *Смещения и деформации.* Для определения смещений мы имеем уравнение несжимаемости (29.02) и уравнение (29.06); первому из этих уравнений мы удовлетворим, введя потенциал смещений

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Тогда второе уравнение преобразуется в линейное уравнение гиперболического типа

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \operatorname{tg} 2\varphi - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (29.28)$$

с характеристиками, совпадающими с рассмотренными выше характеристиками

$$\xi = \text{const}, \quad \eta = \text{const}$$

Уравнение (29.28) может быть приведено к более простому виду (см. С. Г. Михлин [26]).

§ 30. Вдавливание жесткого тела в пластическую среду

I. Пусть при вдавливании жесткого тела (штампа) в деформируемую среду появляется текучесть в окрестности контакта. Решение этой задачи для плоского случая дано В. В. Соколовским (см. [37]) в предположении симметричности штампа и малости смещений. Последнее ограничение позволяет пре-

¹ Прикладная математика и механика, т. X, вып. 3.

небольшим изменением формы свободной поверхности среды вблизи штампа, вызванным проникновением штампа в среду. Мы рассмотрим здесь простой случай, когда среда ограничена плоскостью, а трение на поверхности контакта отсутствует. Пусть штамп имеет симметричный выпуклый профиль, заданный уравнениями

$$x = x(\alpha) - x^*; \quad y = y(\alpha)$$

и обладающий переломом в точке M^* (фиг. 21); за исключением этой точки функции допускают непрерывные вторые производные. Поставленная задача легко решается с помощью интегралов уравнений пластичности. Пусть в окрестности точки M возникло состояние текучести. На свободной поверхности среды $\alpha = 0$; $\sigma_n = \tau_n = 0$. Следовательно

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{4} + m\pi; \quad \sigma = \mp \tau_s$$

На поверхности контакта $\tau_n = 0$ и

$$\varphi = \alpha \pm \frac{\pi}{4} + m\pi; \quad \sigma = \sigma_n \mp \tau_s,$$

причем σ_n неизвестно. Линии скольжения подходят к свободной поверхности и к поверхности контакта под углом $\frac{\pi}{4}$. Вблизи свободной поверхности следует ожидать отрицательных значений среднего давления. Поэтому возьмем для свободной поверхности

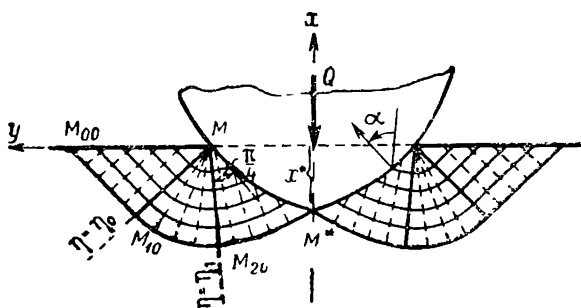
$$\varphi = \frac{\pi}{4}; \quad \sigma = -\tau_s \quad (m = 0)$$

Вдоль MM_{00}

$$\xi = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \equiv \xi_0; \quad \eta = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \equiv \eta_0 \quad (30.01)$$

Следовательно, вблизи свободной поверхности слева от характеристики MM_{00} осуществляется равномерное напряженное состояние. Справа от нее различаем две области; в области $MM_{10}M_{20}$ решение обладает особой точкой;

здесь $\xi = \text{const} = \xi_0$, и одно семейство характеристик представляет собой пучок прямых линий, проходящих через точку M ; вдоль MM_{10} $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$; вдоль MM_{20} $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_1$. В области $MM_{20}M^*$ ξ также сохраняет прежнее значение ξ_0 , одно семейство характеристик — прямые линии (пунктир на фиг. 21); другое семейство, рассматриваемое



Фиг. 21.

как продолжение одноименных семейств в областях $MM_{00}M_{10}$ и $MM_{10}M_{20}$ при подходе к контактной линии образует с осью x угол $\alpha + \frac{3}{4}\pi$. Следовательно, для контактной поверхности необходимо взять

$$\varphi = \alpha + \frac{3}{4}\pi; \quad \sigma = \sigma_n + \tau_s \quad (m=1)$$

Тогда вдоль MM^* имеем

$$\xi = \frac{\sigma_n}{2\tau_s} + \frac{1}{2} + \alpha + \frac{3}{4}\pi \quad (30.02)$$

Но везде в области MM^*M_{20} $\xi = \text{const} = \xi_0$; сопоставляя (30.01) и (30.02), находим нормальное давление

$$\sigma_n = -\tau_s(2 + \pi + 2\alpha) \quad (30.03)$$

Вследствие выпуклости профиля штампа $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, и абсолютная величина давления возрастает при движении

от M к M^* . Решение определено в области $MM_{00}M_{10}M_{20}M^*$. Полное давление штампа на среду

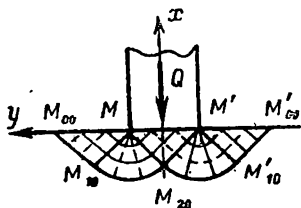
$$Q = 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha_2} \sigma_n R \cos \alpha d\alpha,$$

где R — радиус кривизны профиля.

II. Плоский штамп был рассмотрен значительно ранее Прандтлем [78]; в этом случае $\alpha = 0$, и нормальное давление на поверхности штампа равно

$$\sigma_n = -\tau_s (2 + \pi) \quad (30.04)$$

Сетка линий скольжений изображена на фиг. 22; в треугольниках $MM_{00}M_{10}$; $MM_{20}M'$; $M'M'_{00}M'_{10}$ равномерное напряженное состояние. Связывая подобные задачи с резанием материала, Прандтль называл величину $\sigma_n = -\tau_s(2 + \pi)$ сопротивлением резанию.



Фиг. 22.

III. Изложенные решения дают распределение напряжений вблизи поверхности штампа в предположении, что материал, прилегающий к поверхности штампа, находится в состоянии текучести.

Полное решение задачи о внедрении штампа в упруго-пластическую среду с определением зон упругой и пластической деформации представляет большие трудности.

В заключение отметим, что А. Ю. Ишлинский [14] исследовал осесимметричную задачу о вдавливании жесткого шара в пластическую среду.

§ 31. Полный цилиндр под внутренним давлением

I. Рассмотрим задачу о полом круговом цилиндре, находящемся в состоянии текучести под действием внутреннего давления p ; предполагаем, что осевое удлинение трубы отсутствует, а материал несжимаем. Напряжения σ_r , σ_ϕ

должны удовлетворять уравнению равновесия (§ 2)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (31.01)$$

и условию текучести Мизеса

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = 2\tau_s \quad (31.02)$$

В правой части этого уравнения взят знак плюс, так как мы ограничиваемся рассмотрением случая внутреннего давления, когда $\sigma_r < 0$, $\sigma_\varphi > 0$. Внося (31.02) в (31.01) и интегрируя при условии

$$\sigma_r = -p \quad \text{при} \quad r = a,$$

находим

$$\sigma_r = 2\tau_s \ln \frac{r}{a} - p$$

Предельному состоянию равновесия трубы соответствует давление

$$p = 2\tau_s \ln \frac{b}{a} \quad (31.03)$$

С увеличением отношения $\frac{b}{a}$ давление p возрастает. Нетрудно сообразить, что линии скольжения представляют собой два ортогональных семейства логарифмических спиралей. Такие линии хорошо наблюдаются на опыте (А. Надаи [2]).

II. Вследствие чрезмерного упрощения приведенное решение неудовлетворительно с прикладной точки зрения. Важная в техническом отношении задача упруго-пластического равновесия цилиндра была предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований. Укажем здесь на книгу Г. А. Смирнова-Аляева, посвященную теории автоскрепления цилиндров, работы Н. М. Беляева и В. В. Соколовского; задачу упруго-пластического равновесия цилиндра при наличии температурных напряжений рассмотрел автор [19]. С. Л. Соболев исследовал осесимметричную задачу о распространении пластического состояния в первоначально упругой среде [33].

§ 32. Плоское напряженное состояние

I. В случае тонкой пластинки, пластически деформируемой силами, лежащими в ее средней плоскости x, y , можно приближенно считать, что средние значения составляющих напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (32.01)$$

и условию текучести Мизеса

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \quad (32.02)$$

II. Подстановка Надаи [28]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_s \cos \varphi_1 + \tau_s \sin \varphi_1 \cos 2\varphi_2 \\ \sigma_y &= \sigma_s \cos \varphi_1 - \tau_s \sin \varphi_1 \cos 2\varphi_2 \\ \tau_{xy} &= \tau_s \sin \varphi_1 \sin 2\varphi_2, \end{aligned} \quad (32.03)$$

где φ_1, φ_2 — неизвестные функции, обращает условие Мизеса в тождество. Внося выражения (32.03) в уравнения равновесия, получаем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Эта система была исследована В. В. Соколовским [37]; при $0 < |\sigma_x + \sigma_y| < \sqrt{3}\sigma_s$ она гиперболического типа, при $\sqrt{3}\sigma_s < |\sigma_x + \sigma_y| < 2\sigma_s$ — эллиптического типа.

III. Задача решается значительно проще, как показал В. В. Соколовский [37], если вместо условия текучести Мизеса взять близкое к последнему условие текучести Сен-Венана

$$2|\tau|_{\max} = \sigma_s \quad (32.04)$$

Одно главное напряжение в пластинке есть $\sigma_z = 0$, другие главные напряжения обозначаем через σ_1, σ_2 , причем $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Выражение $|\tau|_{\max}$ будет иметь различный вид в зависимости от знаков σ_1 и σ_2 . Если σ_1 и σ_2 разных знаков, то $|\tau|_{\max}$ действует по площадкам, перпендикулярным к плоскости x, y и

$$2|\tau|_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2$$

Если σ_1 и σ_2 одинаковых знаков, то максимальное касательное напряжение развивается по площадкам, наклоненным к плоскости x, y под углом $\frac{\pi}{4}$ и

$$4 |\tau|_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2 + |\sigma_1 + \sigma_2|$$

Следовательно, имеем условие текучести

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s \quad \text{при } \sigma_1 \sigma_2 \leq 0,$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \sigma_s - |\sigma_1 + \sigma_2| \quad \text{при } \sigma_1 \sigma_2 \geq 0,$$

или

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \quad \text{при } \sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2 \quad (32.05_1)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (2\sigma_s - |\sigma_x + \sigma_y|)^2 \quad \text{при } \sigma_x \sigma_y \geq \tau_{xy}^2 \quad (32.05_2)$$

В области, где выполняется условие (32.05₁) система уравнений (32.01) и (32.05₁) совпадает с рассмотренной в § 29 системой уравнений плоского деформированного состояния, хорошо изученной. В области, где выполняется условие (32.05₂), система уравнений (32.01) и (32.05₂) интегрируется в замкнутом виде [37].

IV. Задача о пластинке с круговым вырезом радиуса a , равномерно растягиваемой в бесконечности, разобрана А. Надаи [28] на основе условия текучести Мизеса. Рассмотрим, следуя В. В. Соколовскому, этот же простой пример с помощью условия текучести Сен-Венана. Пусть по контуру выреза действует давление — p . Необходимо различать две кольцевые области; первая из них ($a \leq r \leq b$) характеризуется знаками напряжений

$$\sigma_r \leq 0; \quad \sigma_\varphi > 0,$$

и здесь условие текучести имеет вид

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma_s, \quad (32.06)$$

а решение дается формулами (см. § 31)

$$\sigma_r = -p + \sigma_s \ln \frac{r}{a}; \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + \sigma_s \quad (32.07)$$

Во внешней области ($r \gg b$) знаки напряжений одинаковы, максимальное касательное напряжение действует по площад-

кам, наклоненным к плоскости xu под углом $\frac{\pi}{4}$, и условие текучести таково

$$\sigma_\varphi = \sigma_s \quad (32.08)$$

Из уравнения равновесия (31.01) теперь находим

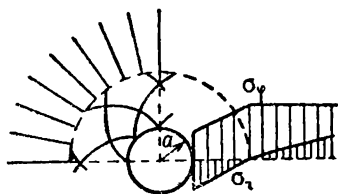
$$\sigma_r = \sigma_s - \frac{C}{r},$$

где C — произвольная постоянная; так как $\sigma_r = 0$ при $r = b$, то

$$\sigma_r = \sigma_s \left(1 - \frac{b}{r}\right), \quad (32.09)$$

причем согласно (32.07)

$$b = a \exp\left(\frac{p}{\sigma_s}\right) \quad (32.10)$$



Фиг. 23.

Во внутренней области линии скольжения представляют собой два ортогональных семейства логарифмических спиралей; вне этого кольца линии скольжения — радиальные прямые (фиг. 23).

В заключение заметим, что вопросы упруго-пластического изгиба пластинок (и оболочек) рассматривали А. А. Ильюшин, В. В. Соколовский и др. Важные результаты получены А. А. Ильюшиным [11] в теории устойчивости оболочек за пределом упругости.

ГЛАВА IV

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИ- ЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 33. Работа внешних сил (обобщение теоремы Клапейрона)

1. Пусть деформируемое тело занимает объем V , ограниченный поверхностью S ; на тело действуют массовые силы (X, Y, Z) , на части поверхности S_1 заданы поверхностные силы (X_n, Y_n, Z_n) , на другой части S_2 , заданы перемещения; состоянию равновесия тела отвечают перемещения u_x, u_y, u_z .

Рассмотрим работу приложенных к телу внешних сил на статически соответствующих им перемещениях

$$A = \iiint_V (Xu_x + Yu_y + Zu_z) \rho dV + \\ + \iint_S X_n u_x + Y_n u_y + Z_n u_z dS \quad (33.01)$$

С помощью соотношений Коши (1.02) интеграл по поверхности можно представить в виде

$$\iint_S [(\sigma_x u_x + \tau_{xy} u_y + \tau_{xz} u_z) \cos(n, x) + \\ + (\tau_{xy} u_x + \sigma_y u_y + \tau_{yz} u_z) \cos(n, y) + \\ + (\tau_{xz} u_x + \tau_{yz} u_y + \sigma_z u_z) \cos(n, z)] dS,$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S ; преобразуя этот интеграл в объемный, находим

$$\begin{aligned} \int_S (X_n u_x + Y_n u_y + Z_n u_z) dS = \int_V \int \left[u_x \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + u_y \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dots \right) + u_z \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dots \right) + \right. \\ \left. + \sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \dots + \tau_{zx} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] dV \end{aligned}$$

Так как компоненты напряжения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (см. (2.01) при отсутствии сил инерции), то из (33.01) легко получаем соотношение

$$A = \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV, \quad (33.02)$$

справедливое для всякой сплошной среды, находящейся в равновесии.

II. В этой главе мы рассматриваем преимущественно изотермический процесс деформации ($\theta = 0$); вместо формул (18.08) имеем зависимости

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \psi \left(\sigma_x - \frac{\psi - k}{\psi} \sigma \right) \\ &\quad \text{и т. п.} \\ \gamma_{xy} &= 2\psi \tau_{xy} \\ &\quad \text{и т. п.} \end{aligned} \right\},$$

пользуясь которыми, находим

$$\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \gamma_{zx} = 2(U + \psi T^2) \quad (33.03)$$

Так как $\varepsilon = 3k\sigma$, то

$$U = \frac{3}{2} k \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (33.04)$$

В силу соотношения $\Gamma = 2\psi T$ можно писать

$$\psi T^2 = \frac{1}{2} T\Gamma$$

Таким образом

$$\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \gamma_{zx} = \sigma\varepsilon + T\Gamma, \quad (33.05)$$

и работа внешних сил на статически соответствующих им перемещениях равна

$$A = \iiint_V (\sigma\varepsilon + T\Gamma) dV \quad (33.06)$$

Очевидно, что $\sigma\varepsilon$ представляет собой удвоенную работу деформации объема (фиг. 24, а), равную удвоенной упругой энергии объемного сжатия.

Рассмотрим кривую $T = 2g(\Gamma^2)\Gamma$ (фиг. 24, б); работа деформации формы

$$W = \int T d\Gamma$$

изображается заштрихованной площадью. Если кривую „Т; Γ “ представим степенной функцией вида

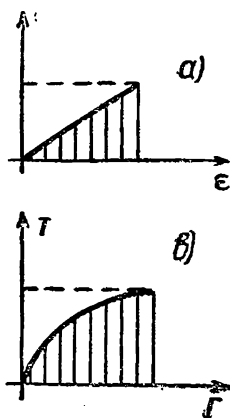
$$T = B\Gamma^{\beta-1}, \quad (33.07)$$

где B, β — константы¹, то нетрудно видеть, что

$$T\Gamma = \beta W$$

Теперь формула (33.06) принимает вид

$$A = \iiint_V (2U + \beta W) dV \quad (33.08)$$



Фиг. 24.

III. *Теорема Клапейрона.* Рассмотрим упругую среду Гука; для нее $\beta = 2$, следовательно,

$$A = 2 \iiint_V (U + W) dV \quad (33.09)$$

¹ Для упругой среды Гука $\beta = 2$, $B = G$; кривая „Т; Γ “ обычно обращена выпуклостью вверх; тогда

$$1 \leq \beta \leq 2 \quad (33.07')$$

т. е. работа внешних сил на статически соответствующих им перемещениях равна удвоенной потенциальной энергии тела (так как здесь $U + W$ равняется плотности упругой потенциальной энергии).

Мы получили хорошо известную теорему Клапейрона, которая часто оказывается полезной при вычислении упругого потенциала.

IV. В состоянии текучести $T = \tau_s$, поэтому $\beta = 1$, $W = \tau_s \Gamma$, и формула (33.08) получает вид

$$A = \iiint_V (2U + \tau_s \Gamma) dV, \quad (33.10)$$

т. е. работа внешних сил на статически соответствующих им перемещениях равна сумме работы деформации формы тела и удвоенной упругой энергии объемного сжатия.

V. В состоянии упрочнения для A имеется формула (33.06) или (33.08); зная β , можно использовать эту формулу для вычисления работы деформации подобно теореме Клапейрона.

Изложенное обобщение теоремы Клапейрона указано автором [15].

§ 34. Начало возможных изменений деформированного состояния

I. Сообщим точкам тела, находящегося в равновесии под действием заданных сил и перемещений, бесконечно малые и непрерывные смещения δu_x , δu_y , δu_z , совместимые с граничными условиями. Согласно началу возможных перемещений сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях около состояния равновесия равна нулю. Работа внешних сил

$$\begin{aligned} \delta A = \iiint_V (X \delta u_x + Y \delta u_y + Z \delta u_z) \rho dV + \\ + \iint_{S_1} (X_n \delta u_x + Y_n \delta u_y + Z_n \delta u_z) dS, \end{aligned} \quad (34.01)$$

где S_1 — та часть поверхности S , на которой заданы силы X_n, Y_n, Z_n . Работа внутренних сил равна

$$- \int \int \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV$$

Следовательно, для всякого сплошного тела

$$\int \int \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV - \delta A = 0 \quad (34.02)$$

Для рассматриваемых нами сред выражение в круглых скобках представляет собой приращение потенциала работы деформации (§ 18)

$$\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} = \delta \Pi$$

Так как внешние силы не варьируются, то уравнение (34.02) приводится к виду

$$\delta \left(\int \int \int_V \Pi dV - A \right) = 0 \quad (34.03)$$

Величина внутри круглых скобок называется полной энергией системы; обозначим ее через \mathcal{E} ; тогда

$$\delta \mathcal{E} = 0 \quad (34.03')$$

Таким образом, действительная форма равновесия тела отличается от всех возможных форм тем, что сообщает полной энергии системы \mathcal{E} экстремальное значение (см. ниже).

II. Вариационное уравнение (34.03) заменяет собой граничные условия и дифференциальные уравнения равновесия в смещениях (25.02), обобщающие уравнения Ламе в теории упругости (§ 25). Действительно

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx}$$

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} \delta u_x; \quad \delta \varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} \delta u_y; \quad \dots; \quad \delta \gamma_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \delta u_x + \frac{\partial}{\partial x} \delta u_z$$

По формуле Гаусса-Остроградского находим

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x dV &= \iint_S \frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_x} \delta u_x \cos(n, x) dS - \iiint_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_x} \right) \delta u_x dV \\ &\dots \dots \dots \\ \iiint_V \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} dV &= \iint_S \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{zx}} \delta u_x \cos(n, z) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{zx}} \delta u_z \cos(n, x) \right] dS - \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{zx}} \right) \delta u_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{zx}} \right) \delta u_z \right] dV \end{aligned}$$

Внося эти выражения в уравнение (34.03), получаем

$$\begin{aligned} & - \iiint_V \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{xz}} \right) + \rho X \right] \delta u_x + \right. \\ & \quad \left. + \left[\dots \right] \delta u_y + \left[\dots \right] \delta u_z \right\} dV + \iint_S \left\{ \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon_x} \cos(n, x) + \right. \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{xy}} \cos(n, y) + \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{xz}} \cos(n, z) - X_n \right] \delta u_x + \left[\dots \right] \delta u_y + \\ & \quad \left. + \left[\dots \right] \delta u_z \right\} dS = 0 \quad (34.04) \end{aligned}$$

На части поверхности S_2 перемещения заданы, поэтому на S_2 $\delta u_x = \delta u_y = \delta u_z = 0$; внутри тела и на поверхности S_1 вариации δu_x , δu_y , δu_z произвольны, и из (34.04) вытекают дифференциальные уравнения равновесия в смещениях (25.02) и соответствующие граничные условия.

III. Упругая среда Гука характеризуется тем, что

$$\Pi = U + \frac{G}{2} \Gamma^2,$$

где $U = \frac{\epsilon^2}{6\kappa}$. При условии независимости внешних сил от перемещений полная энергия упругой системы получает минимальное значение (равновесие тела будет устойчивым). Это нетрудно показать, вычисляя вторую вариацию потенциальной энергии: $\delta^2 \Pi$ будет положительно определенной квадратичной формой

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 U + \delta^2 \frac{G}{2} \Gamma^2 > 0,$$

причем

$$\begin{aligned} \delta^2 U &= \frac{1}{3k} (\delta \varepsilon)^2 \geq 0, \\ \delta^2 \frac{G}{2} \Gamma^2 &= G \frac{2}{3} \left\{ (\delta \varepsilon_x - \delta \varepsilon_y)^2 + (\delta \varepsilon_y - \delta \varepsilon_z)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\delta \varepsilon_z - \delta \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} [(\delta \gamma_{xy})^2 + (\delta \gamma_{yz})^2 + (\delta \gamma_{zx})^2] \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

Неотрицательную квадратичную форму внутри фигурных скобок будем обозначать через $\frac{3}{2} \Gamma^2 (\delta \varepsilon_x, \dots, \delta \gamma_{zx})$.

IV. В состоянии текучести приращение потенциала работы деформации

$$\delta \Pi = \delta \left(\frac{\varepsilon^2}{6k} + \tau_s \Gamma \right),$$

и основное вариационное уравнение принимает вид

$$\delta \left[\iiint_V \left(\frac{\varepsilon^2}{6k} + \tau_s \Gamma \right) dV - A \right] = 0 \quad (34.05)$$

При прежнем условии независимости внешних сил от перемещений в этом случае выполняется необходимое условие минимума для действительной формы равновесия; в самом деле

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 U + \tau_s \delta^2 \Gamma,$$

причем $\delta^2 U \geq 0$; с другой стороны $\delta \Gamma = \frac{1}{2\Gamma} \delta (\Gamma^2)$ и

$$\tau_s \delta^2 \Gamma = \frac{\tau_s}{\Gamma} \left\{ \Gamma^2 (\delta \varepsilon_x, \dots, \delta \gamma_{zx}) - \frac{1}{4\Gamma^2} [\delta (\Gamma^2)]^2 \right\}$$

Величина внутри фигурных скобок не отрицательна; действительно

$$\Gamma^2 = \frac{2}{3} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)$$

и после простых преобразований находим

$$\{\dots\} = \frac{2}{3} \frac{(\gamma_1 \delta \gamma_2 - \gamma_2 \delta \gamma_1) + (\gamma_2 \delta \gamma_3 - \gamma_3 \delta \gamma_2) + (\gamma_3 \delta \gamma_1 - \gamma_1 \delta \gamma_3)^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \geq 0 \quad (34.06)$$

Так как $\tau_s > 0$, $\Gamma > 0$, то $\delta^2 \Pi \geq 0$, ибо выражение внутри фигурных скобок может обратиться в нуль при $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$, отличных от нуля.¹

V. Для упрочняющейся среды приращение потенциала деформации

$$\delta \Pi = \delta \left(\frac{e^2}{6k} + \int_{\Gamma^2} g(\zeta) d\zeta \right). \quad (34.07)$$

Начало возможных изменений деформированного состояния может быть записано в форме, указанной автором [46, 47]

$$\delta \left\{ \iiint_V \left(U + \int_{\Gamma^2} g(\zeta) d\zeta \right) dV - A \right\} = 0 \quad (34.08)$$

Нетрудно видеть, что при том же условии независимости внешних сил от перемещений энергия системы в состоянии действительного равновесия достигает минимума. Вторая вариация

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 U + \delta^2 \left[\int_{\Gamma^2} g(\zeta) d\zeta \right]$$

Далее

$$\delta^2 \left[\int_{\Gamma^2} g(\zeta) d\zeta \right] = 2g(\Gamma^2) \Gamma^2 (\delta\epsilon_{\alpha\alpha} \dots, \delta\gamma_{\alpha\alpha}) + \frac{dg(\Gamma^2)}{d(\Gamma^2)} [\delta(\Gamma^2)]^2$$

Согласно уравнению $T = 2g(\Gamma^2)\Gamma$ находим

$$\frac{dg(\Gamma^2)}{d(\Gamma^2)} = \frac{1}{4\Gamma^2} \left(\frac{dT}{d\Gamma} - \frac{T}{\Gamma} \right) \quad (34.09)$$

¹ Этот случай требует, таким образом, дополнительного рассмотрения. Заметим, что А. А. Марков недавно опубликовал работу [24], посвященную вариационным принципам теории пластичности Мизеса. Результаты этой работы могут быть перенесены на рассматриваемое нами состояние текучести, если считать среду несжимаемой ($\epsilon = 0$), пренебрегать массовыми силами и вместо скоростей v_x, v_y, v_z рассматривать смещения u_x, u_y, u_z . В частности, если на поверхности тела S заданы смещения, то справедливы некоторые теоремы относительно абсолютного минимума функционала $\bar{\Pi} \equiv \tau_s \iiint_V \Gamma dV$ и однозначности напряженного состояния, вполне аналогичные теоремам, доказанным в [24].

Следовательно,

$$\delta^2 \left[\int_{\Gamma^2} \mathcal{L}(\zeta) d\zeta \right] = \frac{[\delta(\Gamma^2)]^2}{4\Gamma^2} \frac{dT}{d\Gamma} + \left\{ \Gamma^2 (\delta\varepsilon_x, \dots, \delta\gamma_{z,r}) - \frac{[\delta(\Gamma^2)]^2}{4\Gamma^2} \right\} \frac{T}{\Gamma} \quad (34.10)$$

Второе слагаемое в правой части не может быть отрицательным; предположим теперь, что при нарастании деформации сдвига напряжение сдвига увеличивается (фиг. 25). Это условие, характеризующее „устойчивость“ материала, выполняется, повидимому, для всех твердых тел. Тогда

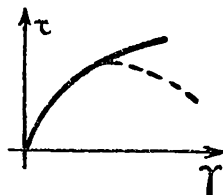
$$\frac{dT}{d\Gamma} > 0, \quad (34.11)$$

и $\delta^2 \Pi$ является положительно определенной квадратичной формой вариаций $\delta\varepsilon_x, \dots, \delta\gamma_{z,r}$. В этом нетрудно убедиться, анализируя условия одновременного обращения в нуль величин $\delta^2 U = \frac{1}{3}(\delta\varepsilon)^2$, $\delta(\Gamma^2) = \frac{4}{3}(\gamma_1\delta\gamma_1 + \gamma_2\delta\gamma_2 + \gamma_3\delta\gamma_3)$ и $\{\dots\}$.

VI. Рассмотрим начало возможных изменений деформированного состояния для смешанной задачи. Пусть в состоянии равновесия объем V состоит из разделенных поверхностью Σ частей V_1 и V_2 , в каждой из которых деформация следует своему закону, характерному для состояния материала этой части тела; соответствующие выражения потенциала работы деформации будут Π_1 и Π_2 . На поверхности Σ состояния непрерывно переходят друг в друга, а величины T и Γ постоянны (§ 22). При варьировании деформированного состояния поверхность Σ перейдет, вообще говоря, в бесконечно близкую поверхность Σ' , которая будет разделять близкие к прежним объемы V'_1 и V'_2 . Изменение поверхности раздела Σ зависит лишь от приращения величины Γ ; на Σ и на Σ' Γ должно иметь одно и то же постоянное значение.

Рассмотрим тройной интеграл

$$I(\lambda) = \iiint_D F(x, y, z; \lambda) dx dy dz,$$



Фиг. 25.

распространенный на область D , ограниченную некоторой поверхностью Σ , изменяющейся вместе с параметром λ . Вариация этого интеграла (см. Гурса „Курс математического анализа“, т. I)

$$\delta I(\lambda) = \iiint_D \delta F dx dy dz + \iint_{\Sigma} F \delta n dS, \quad (34.12)$$

где δn — бесконечно малое смещение точки поверхности Σ в направлении ее внешней нормали при варьировании λ .

В нашем случае потенциал работы деформации тела имеет вид

$$\bar{\Pi} = \iiint_V \Pi_1 dV + \iiint_V \Pi_2 dV,$$

и предыдущую формулу необходимо применять дважды — к объему V_1 и к объему V_2 . Вследствие непрерывности $\bar{\Pi}$ во всем объеме тела соответствующие интегралы по поверхности Σ сократятся, будучи равными по величине и обратными по знаку. Поэтому для смешанной задачи при условии непрерывности на Σ смещений, компонентов деформации и напряжения получаем

$$\delta \left\{ \iiint_{V_1} \Pi_1 dV + \iiint_{V_2} \Pi_2 dV - A \right\} = 0, \quad (34.13)$$

т. е. действительная форма равновесия тела, различные части которого находятся в различных состояниях, так же, как и в простом случае, характеризуется экстремумом полной энергии тела.

§ 35. Задача о пластическом изгибе балки

I. Рассмотрим в качестве примера изгиб балки из „упрочняющегося“ материала. Пусть поперечное сечение балки имеет плоскость симметрии xu , причем x — ось балки, лежащая в нейтральной плоскости; будем считать, что справедлива гипотеза плоских сечений и что влиянием касательных напряжений на изгиб балки можно пренебречь. Соответ-

ственно этому все составляющие тензора напряжения, кроме σ_x , будем полагать равными нулю.

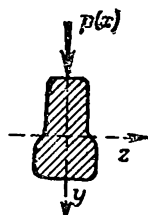
Уравнение изгиба нетрудно получить из общего вариационного уравнения (34.06), если считать материал балки несжимаемым. Чтобы избежать этого стеснительного ограничения, мы выведем уравнение изгиба непосредственным путем, правда, за счет некоторого изменения закона, представляемого уравнениями Генки. Пусть напряжение растяжения (сжатия) σ_x связано с деформацией ε_x зависимостью

$$\sigma_x = B^* |\varepsilon_x|^{m-1} \varepsilon_x, \quad (35.01)$$

определенной из опытов на растяжение и сжатие. Заметим, что обычно $0 < m \leq 1$; если $B^* = E$, $m = 1$, то мы приходим к закону Гука.

Изгибающий момент M уравнивается моментом внутренних сил, т. е.

$$M + \int \int \sigma_x y dy dz = 0, \quad (35.02)$$



Фиг. 26.

где интегрирование распространяется на площадь поперечного сечения. В силу гипотезы плоских сечений (справедливой и в области пластической деформации) и малости прогиба $v = v(x)$ имеем

$$\varepsilon_x \approx -y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (35.03)$$

Используя (35.01), (35.03), находим из (35.02)

$$D^m \left| \frac{d^2 v}{dx^2} \right|^m = \pm M, \quad (35.04)$$

где жесткость балки $D = \sqrt[m]{B^* I_m}$, причём коэффициент

$$I_m = \int \int |y|^{m+1} dy dz \quad (35.05)$$

зависит только от формы поперечного сечения и показателя m . В случае закона Гука приходим к обычному моменту инерции. Таким образом

$$D \frac{d^2 v}{dx^2} = \pm |M|^{\frac{1}{m}} \quad (35.06)$$

II. Выведем теперь вариационное уравнение изгиба балки. Работа внутренних сил на возможном смещении линии прогибов балки равна

$$-\int_0^l M \delta \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

или вследствие (35.04)

$$-\delta \int_0^l \frac{D^m}{m+1} \left| \frac{d^2 v}{dx^2} \right|^{m+1} dx.$$

Если $p(x)$ — вертикальная нагрузка на единицу длины балки, действующая в плоскости симметрии xu , то работа внешних сил на тех же возможных смещениях равна

$$\int_0^l p(x) \delta v dx.$$

Таким образом

$$\delta \int_0^l \left\{ \frac{D^m}{m+1} \left| \frac{d^2 v}{dx^2} \right|^{m+1} - p(x) v \right\} dx = 0 \quad (35.07)$$

При $m=1$, $B^*=E$ приходим к хорошо известному уравнению изгиба упругой балки

$$\delta \int_0^l \left\{ \frac{D}{2} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 - p(x) v \right\} dx = 0 \quad (35.08)$$

III. Вариационное уравнение (35.03) равносильно дифференциальному уравнению равновесия балки и статическим условиям на ее концах. В самом деле, выполняя в (35.03) варьирование, получаем $\left(\frac{d^2 v}{dx^2} > 0 \right)$

$$\int_0^l \left\{ D^m \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^m \frac{d}{dx} \delta \frac{dv}{dx} - p(x) \delta v \right\} dx = 0 \quad (35.09)$$

Интегрируя по частям, находим ($D = \text{const}$)

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^m \frac{d}{dx} \left(\delta \frac{dv}{dx} \right) dx &= \\ &= \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^m \delta \frac{dv}{dx} \Big|_0^l - m \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^{m-1} \frac{d^3 v}{dx^3} \frac{d}{dx} \delta v dx = \\ &= \left[\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^m \delta \frac{dv}{dx} - m \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^{m-1} \frac{d^3 v}{dx^3} \delta v \right]_0^l + \\ &+ m \int_0^l \left[\frac{d^4 v}{dx^4} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^{m-1} + (m-1) \left(\frac{d^3 v}{dx^3} \right)^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^{m-2} \right] \delta v dx \end{aligned}$$

Теперь уравнение (35.09) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ m D^m \left[\frac{d^4 v}{dx^4} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^{m-1} + (m-1) \left(\frac{d^3 v}{dx^3} \right)^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^{m-2} \right] - \right. \\ \left. - p(x) \right\} \delta v dx + D^m \left[\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^m \delta \frac{dv}{dx} - m \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^{m-1} \frac{d^3 v}{dx^3} \delta v \right]_0^l = 0 \end{aligned}$$

Отсюда, вследствие произвольности δv внутри интеграла $(0, l)$ вытекает, что

$$m D^m \left[\frac{d^4 v}{dx^4} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^{m-1} + (m-1) \left(\frac{d^3 v}{dx^3} \right)^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^{m-2} \right] - p(x) = 0 \quad (35.10)$$

$$\left[\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^m \delta \frac{dv}{dx} - m \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^{m-1} \frac{d^3 v}{dx^3} \delta v \right]_0^l = 0 \quad (35.11)$$

Рассмотрим частные случаи закрепления концов балки:

1. Концы балки заделаны; здесь

$$v = 0; \quad \frac{dv}{dx} = 0,$$

и условие (35.11) удовлетворяется тождественно, так как на конце балки

$$\delta v = \delta \frac{dv}{dx} = 0$$

2. Конец балки оперт; в этом случае $v = 0$, следовательно и $\delta v = 0$ на конце балки; для выполнения условия (35.11) необходимо, чтобы $\frac{d^2v}{dx^2} = 0$, что означает равенство нулю изгибающего момента на опоре.

3. Конец балки свободен; на таком конце вариация прогиба произвольна, поэтому должны выполняться условия

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3v}{dx^3} = 0,$$

означающие равенство нулю изгибающего момента и перерезывающей силы.

Заметим, что при решении вариационного уравнения (35.07) прямыми методами нужно удовлетворять лишь геометрическим условиям на концах балки; статические условия будут выполнены в силу самого уравнения (35.07).

IV. Интегрирование уравнения (35.06) (легко выполняемое) при соответствующих граничных условиях приводит к уравнению линии прогибов балки. Можно непосредственно искать решение вариационного уравнения (35.07) по методу Ритца, подобно тому как это сделал С. П. Тимошенко для классического уравнения (35.08). Заметим, наконец, что прогибы в отдельных точках балки проще находить, основываясь на излагаемом ниже обобщении теоремы Кастильяно (§ 41).

V. Приведем, в заключение, коэффициенты J_m для простейших форм сечения.

Прямоугольник
высота h , основание b

$$J_m = \frac{bh^{2+m}}{2^{1+m}(2+m)}$$

Круг радиуса a

$$J_m = ka^{m+3}$$

Круговое кольцо

внутренний радиус a ,
внешний — b

$$J_m = k(b^{m+3} - a^{m+3})$$

В последних двух формулах

$$k = \frac{2^{m+2} [\Gamma(1 + \frac{m}{2})]^2}{(m+1)(m+3)\Gamma(m+1)}, \quad (0 < m \leq 1)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма функция; коэффициент k монотонно убывает от значения $\frac{4}{3}$ к значению $\frac{\pi}{4}$, соответствующему $m=1$. В первом приближении

$$k = \frac{4}{3} - 0,55 m.$$

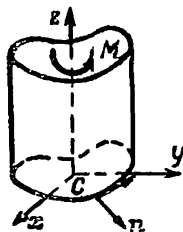
§ 36. Кручение стержней

I. Применим начало возможных изменений деформированного состояния к задаче кручения призмы произвольного поперечного сечения, материал которой подчиняется обобщенным уравнениям Генки (18.37). Пусть нижний конец стержня закреплен, а ось z параллельна оси стержня (фиг. 27). Следуя предположениям Сен-Венана, примем, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0; \quad (36.01)$$

$$u_x = -\omega zy; \quad u_y = \omega zx;$$

$$u_z = \omega \varphi(x, y), \quad (36.02)$$



Фиг. 27.

где ω — кручение на единицу длины стержня, а $\varphi(x, y)$ — неизвестная функция. Тогда мы получаем

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right); \quad \gamma_{yz} = \omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right). \quad (36.03)$$

В силу уравнений (18.37)

$$\tau_{xz} = 2g(\Gamma^2)\gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = 2g(\Gamma^2)\gamma_{yz} \quad (36.04)$$

причем

$$\Gamma^2 = \omega^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2 \right], \quad T^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \quad (36.05)$$

II. Воспользуемся теперь началом возможных изменений деформированного состояния; в нашем случае

$$\delta u_x = \delta u_y = 0; \quad \delta u_z = \omega \delta \varphi.$$

Так как объемные силы отсутствуют, боковая поверхность призмы свободна от усилий, а на концевых сечениях призмы $Z_n = 0$, то $\delta A = 0$. Следовательно, мы имеем вариационное уравнение

$$\delta \tilde{\Pi} \equiv \delta \iint \left\{ \int_{\Gamma^2} g(\zeta) d\zeta \right\} dx dy = 0, \quad (36.06)$$

причем интегрирование по x, y распространяется на площадь поперечного сечения.

III. Нетрудно из (36.06) вывести дифференциальное уравнение и граничное условие для функции $\varphi(x, y)$. В самом деле

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi} = 2\omega^2 \iint g(\Gamma^2) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \delta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] dx dy = 0 \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и применяя формулу Гаусса-Остроградского, получаем

$$\begin{aligned} \iint g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = \\ = \iint \frac{\partial}{\partial x} \left[g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \delta \varphi \right] dx dy - \\ - \iint \delta \varphi \frac{\partial}{\partial x} \left[g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] dx dy = \\ = \oint g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \delta \varphi dy - \iint \delta \varphi \frac{\partial}{\partial x} \left[g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

Аналогично этому

$$\begin{aligned} \iint g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \delta \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = \\ = - \oint g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \delta \varphi dx - \iint \delta \varphi \frac{\partial}{\partial y} \left[g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

Складывая, находим

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi} = & -2\omega^2 \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] \right\} \delta \varphi \, dx \, dy + \\ & + 2\omega^2 \oint_C g(\Gamma^2) \left(\frac{d\varphi}{dn} + mx - ly \right) \delta \varphi \, dC = 0, \end{aligned}$$

где криволинейный интеграл берется по контуру поперечного сечения C , а l, m — косинусы углов внешней нормали n к контуру C с осями x, y ¹.

Вследствие произвольности вариации $\delta \varphi$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g(\Gamma^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] = 0 \quad (36.07)$$

и „естественное“ граничное условие

$$\frac{d\varphi}{dn} + mx - ly = 0 \quad (36.08)$$

Уравнение (36.07) — линейное относительно производных второго порядка; для упругой среды Гука оно переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

найденное Сен-Венаном.

IV. Если исходить из зависимости

$$T = B\Gamma^{\beta-1} \quad \text{или} \quad 2g(\Gamma^2) = B\Gamma^{\beta-2}, \quad (36.09)$$

где B, β — константы (см. § 33), то вариационное уравнение

¹ Напомним, что $\frac{dx}{dC} = -m$; $\frac{dy}{dC} = l$, а производные по нормали и касательной равны

$$\frac{d\varphi}{dn} = l \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \frac{d\varphi}{dC} = -m \frac{\partial \varphi}{\partial x} + l \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

(36.06) принимает вид

$$\delta \tilde{\Pi} = \frac{B}{\beta} \omega^{\beta} \delta \iint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2 \right]^{\beta/2} dx dy = 0 \quad (36.10)$$

V. Нетрудно, опираясь на (36.03) и (36.04), получить формулу для скручивающего момента

$$\begin{aligned} M &= \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy = \\ &= 2\omega \iint g(\Gamma^2) \left[x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dy \quad (36.11) \end{aligned}$$

Вариационное уравнение кручения полезно для построения приближенных решений, так как непосредственное интегрирование дифференциального уравнения (36.07) затруднительно.

Покажем, что всякое приближенное решение, основанное на вариационном уравнении (36.10), дает *верхнюю оценку величины крутящего момента* M . Это утверждение вытекает из соотношения

$$M = \frac{\beta}{\omega} \tilde{\Pi}, \quad (36.12)$$

так как по доказанному $\tilde{\Pi}$ получает минимальное значение только для действительной формы равновесия (§ 34).

Для вывода зависимости (36.12) рассмотрим величину $\tilde{\Pi}$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} &= \frac{B}{\beta} \iint \Gamma^{\beta} dx dy = B\omega^{2\beta-1} \iint \Gamma^{\beta-2} \left[x^2 + \right. \\ &\quad \left. + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dy + B\omega^{2\beta-1} \iint \Gamma^{\beta-2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dy \equiv \frac{\omega}{\beta} M + I, \end{aligned}$$

где через I обозначен второй интеграл в правой части равен-

ства; легко видеть, что этот интеграл равен нулю:

$$\begin{aligned}
 I &= B\omega^2\beta^{-1} \iint \Gamma^{\beta-2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] dx dy = \\
 &= B\omega^2\beta^{-1} \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma^{\beta-2} \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma^{\beta-2} \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] \right\} dx dy - \\
 &- B\omega^2\beta^{-1} \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma^{\beta-2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma^{\beta-2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] \right\} \varphi dx dy
 \end{aligned}$$

Второй интеграл в правой части равенства есть нуль в силу дифференциального уравнения (36.07); первый же интеграл преобразуется по формуле Гаусса-Остроградского к виду

$$B\omega^2\beta^{-1} \oint \Gamma^{\beta-2} \left[\frac{d\varphi}{dn} - yl + mx \right] \varphi dC$$

и также равен нулю в силу граничного условия (36.08). Таким образом $I = 0$.

VI. Рассмотрим вкратце задачу о кручении круглого вала переменного диаметра; пусть нижний конец вала закреплен, а верхний испытывает действие пары сил. Направим ось z цилиндрических координат r, φ, z по оси стержня, плоскость $z=0$ совместим с нижним сечением стержня (верхнее сечение $z=l$). Пусть так же, как и при упругом кручении

$$u_r = u_z = 0; \quad u_\varphi = u_\varphi(r, z) \equiv v(r, z) \quad (36.13)$$

Тогда

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z = \gamma_{rz} = 0; \quad \gamma_{r\varphi} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right); \quad \gamma_{\varphi z} = r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) \quad (36.14)$$

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{rz} = 0; \quad \tau_{r\varphi} = 2g(\Gamma^2) \gamma_{r\varphi}; \quad \tau_{\varphi z} = 2g(\Gamma^2) \gamma_{\varphi z} \quad (36.15)$$

Уравнениям равновесия можно удовлетворить, введя функцию напряжений $\Phi = \Phi(r, z)$

$$r^2 \tau_{r\varphi} = - \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad r^2 \tau_{\varphi z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (36.16)$$

причем на боковой поверхности

$$\Phi = \text{const} \quad (36.17)$$

Скручивающий момент $M = 2\pi\Phi|_{r=0}^{r=r_{\text{наруж.}}}$. Нетрудно показать, исходя из (34.03), что $v(r, z)$ удовлетворяет вариационному уравнению

$$\delta \int \int \left[\int_{\Gamma^2} g(\zeta) d\zeta \right] r dr dz = \int_{z=l} \bar{\tau}_{\varphi z} \delta v r dr - \int_{z=0} \bar{\tau}_{\varphi z} \delta v r dr, \quad (36.18)$$

где $\bar{\tau}_{\varphi z}$ — заданные касательные напряжения в сечениях $z=l$, $z=0$, а вариация δv вполне произвольна. Варьируя функционал в левой части (36.18) и применяя формулу Гаусса-Остроградского, найдем, что смещение $v(r, z)$ должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[g(\Gamma^2) r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[g(\Gamma^2) r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) \right] = 0 \quad (36.19)$$

и естественному граничному условию на боковой поверхности (n — нормаль)

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{v}{r} \right) = 0 \quad (36.20)$$

В сечениях $z=l$, $z=0$

$$2g(\Gamma^2) r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) = \bar{\tau}_{\varphi z} \quad (36.21)$$

В силу принципа Сен-Венана нет необходимости в точном выполнении условий (36.21).

§ 37. Начало возможных изменений напряженного состояния

I. Выше мы изучали экстремальные свойства действительных перемещений (u_x, u_y, u_z). Сравним теперь действительное напряженное состояние $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$, возникающее в теле под действием заданных сил и перемещений, со всеми смежными мыслимыми напряженными состояниями

$$\sigma_x + \delta\sigma_x; \sigma_y + \delta\sigma_y; \dots; \tau_{zx} + \delta\tau_{zx},$$

удовлетворяющими уравнениям статики

$$\frac{\partial(\sigma_x + \delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} + \delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{xz} + \delta\tau_{xz})}{\partial z} + \rho(X + \delta X) = 0 \quad \text{и т. п.} \quad (37.01)$$

и условиям на поверхности S ,

$$(\sigma_x + \delta\sigma_x) \cos(n, x) + (\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}) \cos(n, y) + (\tau_{xz} + \delta\tau_{xz}) \cos(n, z) = X_n + \delta X_n \quad \text{и т. п.} \quad (37.01')$$

Ясно, что вариации напряжений $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{xz}$ и вариации внешних сил $\delta X, \delta Y, \delta Z; \delta X_n, \delta Y_n, \delta Z_n$ образуют уравновешивающуюся систему, т. е.

$$\frac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{xz}}{\partial z} + \rho\delta X = 0 \quad \text{и т. п.} \quad (37.02)$$

$$\delta\sigma_x \cos(n, x) + \delta\tau_{xy} \cos(n, y) + \delta\tau_{xz} \cos(n, z) = \delta X_n \quad \text{и т. п.} \quad (37.02')$$

Рассмотрим работу вариаций напряжений на истинных смещениях

$$\iiint_V (\epsilon_x \delta\sigma_x + \epsilon_y \delta\sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \delta\tau_{zx}) dV$$

Внося сюда соотношения (3.05), интегрируя по частям и применяя формулу Гаусса-Остроградского, находим, что вследствие уравнений равновесия (37.02) и (37.02'), справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\epsilon_x \delta\sigma_x + \epsilon_y \delta\sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \delta\tau_{zx}) dV = \\ & = \iint_S (u_x \delta X_n + u_y \delta Y_n + u_z \delta Z_n) dS + \\ & + \iiint_V (u_x \delta X + u_y \delta Y + u_z \delta Z) \rho dV \quad (37.03) \end{aligned}$$

Важное значение имеет более узкий класс вариаций напряженного состояния, характеризуемый отсутствием работы

вариаций внешних сил на действительных перемещениях тела

$$\int \int_S (u_x \delta X_n + u_y \delta Y_n + u_z \delta Z_n) dS + \\ + \int \int \int_V (u_x \delta X + u_y \delta Y + u_z \delta Z) \rho dV = 0 \quad (37.04)$$

При этом условии

$$\int \int \int_V (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) dV = 0 \quad (37.05)$$

Условие (37.04) выполняется, например, если внешние силы остаются неизменными при варьировании напряженного состояния, т. е.

$$\delta X_n = \delta Y_n = \delta Z_n = 0; \quad \delta X = \delta Y = \delta Z = 0 \quad (37.06)$$

II. При выводе вариационного уравнения (37.05) совершенно не затрагивались механические свойства сплошной среды. Действительному напряженному состоянию соответствуют деформации, для которых выполняются условия совместности Сен-Венана. Поэтому в уравнении (37.05) отражено это отличительное свойство действительного напряженного состояния в отношении к мыслимым статически возможным напряженным состояниям. Это обстоятельство подметили Хаар и Карман в цитированной нами работе [56], но лишь недавно Саутвелл показал, что условия совместности Сен-Венана вытекают из уравнения (37.05). Следовательно, вариационное уравнение (37.05) является энергетической формулировкой условия неразрывности деформаций. Доказательство Саутвелла изложено в монографии Л. С. Лейбензона [21]. Заметим, в заключение, что вариационное уравнение (37.05) может быть получено из начала возможных изменений деформированного состояния формальным путем с помощью преобразования, указанного недавно Фридрихсом. Однако, упомянутые начала весьма различны как по механическому смыслу, так и по их приложениям. Поэтому второе начало мы рассмотрим независимо от первого,

§ 38. Начало Кастильяно и теорема Кастильяно

I. Обратимся к случаю упругой среды Гука, для которой

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right) \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (38.01)$$

Пользуясь этими соотношениями, находим

$$\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx} = \delta \Pi, \quad (38.02)$$

где $\Pi = \frac{3}{2} k \sigma^2 + \frac{1}{2G} T^2$ есть упругая потенциальная энергия, выраженная в функции напряжений. Вариационное уравнение (37.05) получает вид

$$\delta \iiint_V \left(U + \frac{1}{2G} T^2 \right) dV = 0, \quad (38.03)$$

известный под именем начала Кастильяно. Действительное напряженное состояние упругого тела в отличие от статически возможных напряженных состояний, отвечающих той же внешней нагрузке, сообщает упругой потенциальной энергии тела *минимальное* значение. В том, что достигается минимум потенциальной энергии, нетрудно убедиться, исследуя знак ее второй вариации

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 U + \delta^2 \left(\frac{1}{2G} T^2 \right) > 0,$$

причем

$$\delta^2 U = 3k (\delta \sigma)^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \delta^2 \left(\frac{1}{2G} T^2 \right) &= \frac{1}{6G} \left\{ (\delta \tau_x - \delta \sigma_y)^2 + (\delta \sigma_y - \delta \sigma_z)^2 + (\delta \sigma_z - \delta \sigma_x)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 6[(\delta \tau_{xy})^2 + (\delta \tau_{yz})^2 + (\delta \tau_{zx})^2] \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

Неотрицательную квадратичную форму внутри фигурных скобок будем обозначать через $6T^2(\delta \sigma_x, \dots, \delta \tau_{zx})$.

II. *Формулы Кастильяно*. Сравним соотношение (38.02) с очевидным равенством

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_{zx}} \delta \tau_{zx}, \quad (38.04)$$

получаем формулы Кастильяно

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_y}; \quad \dots; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_{zx}}, \quad (38.05)$$

справедливые для упругой среды Гука.

III. *Теорема Кастильяно.* Вернемся к уравнению (37.03) и напомним его для случая упругой среды Гука и отсутствия массовых сил

$$\delta \iiint_V \Pi dV - \iint_S (u_x \delta X_n + u_y \delta Y_n + u_z \delta Z_n) dS = 0 \quad (38.06)$$

Пусть к телу приложены сосредоточенные силы P_i ($i = 1, 2, \dots$); обозначим через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ соответствующие направляющие косинусы векторов этих сил, через u_{xi}, u_{yi}, u_{zi} — компоненты смещения точки приложения силы P_i . Будем сравнивать статически возможные напряженные состояния при условии, что только одна сила P_i получает бесконечно малое приращение δP_i . Тогда из (38.06) находим (смещения опор тела предполагаются равными нулю)

$$\delta \bar{\Pi} = (u_{xi} \alpha_i + u_{yi} \beta_i + u_{zi} \gamma_i) \delta P_i,$$

где $\bar{\Pi}$ — упругая потенциальная энергия всего тела.

Выражение внутри скобок есть перемещение Δ_i точки приложения силы P_i по линии действия этой силы. Следовательно

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial P_i} = \Delta_i, \quad (38.07)$$

т. е. частная производная потенциальной энергии по величине любой приложенной силы P_i равна перемещению точки приложения этой силы по направлению ее действия.

Эта важная теорема справедлива также и в отношении обобщенных сил и перемещений. В самом деле, если приложенные к телу силы пропорциональны некоторой величине K , то ясно, что

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial K} = \sum (u_{xi} \alpha_i + u_{yi} \beta_i + u_{zi} \gamma_i) = \Delta_K \quad (38.08)$$

Величины K и Δ_k и есть, собственно говоря, обобщенные сила и перемещение.

§ 39. Приложение начала возможных изменений напряженного состояния к простейшим механическим системам за пределом упругости

I. Другое развитие вариационного уравнения (37.05), дающее возможность рассматривать простейшие механические системы уже за пределом упругости, принадлежит Колоннетти [43].

Пусть деформация состоит из упругой и пластической частей

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x \Big\{ \begin{array}{c} \text{и т. п.} \end{array} \Big\}, \quad \gamma_{xy} = \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy} \Big\{ \begin{array}{c} \text{и т. п.} \end{array} \Big\}, \quad (39.01)$$

где $\varepsilon''_x, \varepsilon''_y, \dots, \gamma''_{zx}$ — компоненты пластической деформации, а

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial \Pi'}{\partial \sigma_x}; \quad \varepsilon'_y = \frac{\partial \Pi'}{\partial \sigma_y}; \dots; \gamma'_{zx} = \frac{\partial \Pi'}{\partial \tau_{zx}}, \quad (39.02)$$

где Π' — упругая потенциальная энергия, соответствующая напряженному состоянию системы. Вариационное уравнение (37.05) принимает вид

$$\delta \int \int \int_V \Pi' dV + \int \int \int_V (\varepsilon''_x \delta \sigma_x + \varepsilon''_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma''_{zx} \delta \tau_{zx}) dv = 0$$

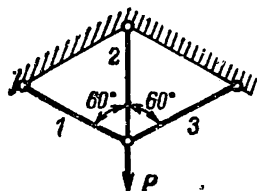
Но компоненты деформации $\varepsilon''_x, \varepsilon''_y, \dots, \gamma''_{zx}$ не варьируются, следовательно

$$\delta \left\{ \int \int \int_V \Pi' dV + \int \int \int_V (\varepsilon''_x \tau_x + \dots + \gamma''_{zx} \tau_{zx}) dv \right\} = 0 \quad (39.03)$$

Эта формула, найденная Колоннетти несколько иначе, применена им для изучения напряжений и деформаций в стержневой решетке, отдельные части которой находятся в состоянии текучести. Для такой механической системы

Полагая $s_i'' = 0$, приходим к классической упругой задаче. Если некоторые стержни находятся в состоянии текучести, то усилия в них неизменны и равны $\sigma_s F_i$. В этом случае уравнения (31.05) служат для определения соответствующих пластических деформаций s_i'' и оставшихся лишних неизвестных.

III. Как простейший пример, рассмотрим решетку, состоящую из трех стержней одинаковой длины l и одинаковой площади поперечного сечения F (фиг. 28). Будем считать вертикальный стержень лишним, пусть X — усилие в нем. Легко находим



Фиг. 28.

$$S_1 = S_3 = P - X; \quad S_2 = X \quad (39.06)$$

$$s_1' = s_3' = \frac{(P - X)l}{EF}; \quad s_2' = \frac{Xl}{EF}$$

Пусть решетка деформируется упруго; тогда

$$s_1' = s_3' = s_2' = 0; \quad (39.07)$$

подставляя (39.06) в (39.05), получаем уравнение

$$-\frac{(P - X)l}{EF} + \frac{Xl}{EF} - \frac{(P - X)l}{EF} = 0,$$

из которого вытекает, что $X = \frac{2}{3}P$. Максимальное напряжение наблюдается в вертикальном стержне; с возрастанием нагрузки в нем возникнут пластические деформации и постоянное усилие $\sigma_s F$. При этом $s_1'' = s_3'' = 0$, $s_2'' \neq 0$, и уравнение (39.05) принимает вид

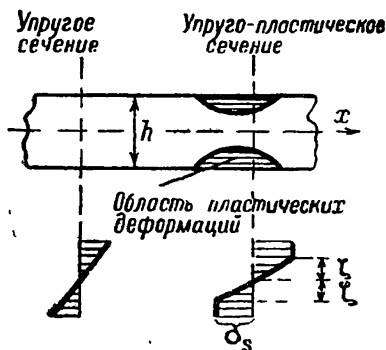
$$-\frac{(P - X)l}{EF} + \frac{Xl}{EF} - \frac{(P - X)l}{EF} + s_2'' = 0$$

Внося сюда вместо X его значение $\sigma_s F$, находим величину пластического удлинения вертикального стержня

$$s_2'' = \frac{2P - 3\sigma_s F}{EF} l$$

§ 40. Приложение к задачам упруго-пластического изгиба балок

I. Можно указать на другое применение уравнения Колонетти, именно — приложение его к задачам упруго-пластического изгиба балок.



Фиг. 29.

Рассмотрим балку прямоугольного профиля (ширина b , высота h); направим ось x по оси балки, ось y — по вертикали (фиг. 29).

В сечениях балки, деформируемых упруго,

$$\sigma_x = \frac{My}{I}, \quad (40.01)$$

где M — изгибающий момент, а $I = \frac{bh^3}{12}$ — момент инерции.

Для сечений балки, испытывающих упруго-пластические деформации,

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_s \frac{y}{\zeta} & \text{при } |y| \leq \zeta, \\ \sigma_s & \text{при } |y| \geq \zeta, \end{cases} \quad (40.02)$$

где ζ — расстояние в данном сечении от нейтральной линии балки до зоны текучести.

Пользуясь понятием изгибающего момента

$$M_s = \frac{2I}{h} \sigma_s, \quad (40.03)$$

соответствующего появлению текучести в наиболее удаленных слоях балки, легко находим

$$\zeta = \frac{h}{2} \sqrt{3 - \frac{2|M|}{M_s}} \quad (40.04)$$

При сделанных предположениях вариационное уравнение (39.03) получает вид (l — длина балки)

$$\delta \int_0^l \left(\iint \Pi' dy dz \right) dx = 0, \quad (40.05)$$

причем

$$\Pi' = \frac{\sigma_x^2}{2E} \quad (40.06)$$

С помощью этой формулы и закона распределения напряжений (40.02) вычисляем интеграл

$$\iint \Pi' dy dz = \begin{cases} \frac{M^2}{2EI} & \text{в „упругом сечении“} \\ \frac{bh\sigma_s^2}{6E} \left[\frac{1}{3} - 2\sqrt{3 - \frac{2|M|}{M_s}} \right] & \text{„в упруго-пластическом сечении“} \end{cases}$$

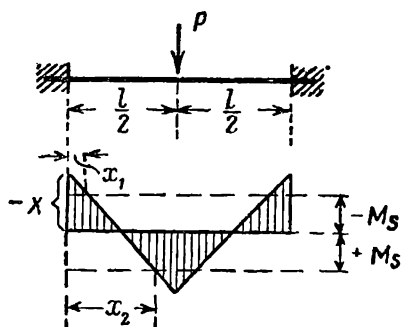
Следовательно,

$$\frac{1}{l} \int M \delta M dx + \frac{2\sigma_s}{h} (\text{sign } M) \int \frac{\delta M}{\sqrt{3 - \frac{2|M|}{M_s}}} dx = 0, \quad (40.07)$$

(1) (2)

где первый интеграл распространяется на упругие отрезки балки, второй — на упруго-пластические (фиг. 29).

II. Рассмотрим в качестве примера изгиб балки с заделанными концами (фиг. 30); эта задача, наряду с другими, была решена Фриче [50] с помощью установленных им теорем работы при упруго-пластическом изгибе балок¹. Примем за лишнюю неизвестную опорный момент



Фиг. 30.

¹ Заметим, что уравнение (40.07) по существу содержится в работах Фриче.

X ; тогда изгибающий момент

$$M = \frac{P}{2}x - X \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right)$$

Если балка находится в упругом состоянии, то изгибающий момент достигает максимальной величины $\frac{Pl}{8}$ в среднем сечении балки $(x = \frac{l}{2})$ и в местах ее заделки. Поэтому с возрастанием нагрузки возникают пластические деформации в отрезках балки: $0 \leq x \leq x_1$; $x_2 \leq x \leq l - x_2$; $l - x_1 \leq x \leq l$. Следовательно, согласно (40.07) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} M dx - \frac{2\sigma_s}{h} \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{3 + \frac{2M}{M_s}}} + \\ + \frac{2\sigma_s}{h} \int_{x_2}^{l/2} \frac{dx}{\sqrt{3 - \frac{2M}{M_s}}} = 0 \end{aligned} \quad (40.08)$$

Подставляя сюда значение M и интегрируя при условиях

$$M|_{x=0} = -X; \quad M|_{x=x_1} = -M_s; \quad M|_{x=x_2} = M_s;$$

$$M_{x=l/2} = \frac{Pl}{4} - X,$$

получаем уравнение

$$-\sqrt{3 - \frac{2X}{M_s}} + \sqrt{3 - \frac{Pl}{2M_s} + \frac{2X}{M_s}} = 0,$$

из которого вытекает, что $X = \frac{Pl}{8}$, т. е. в настоящей задаче для величины момента защемления при упруго-пластическом изгибе сохраняется та же формула, какая справедлива при упругом изгибе.

§ 41. Понятие дополнительной работы. Обобщение формул Кастильяно. Обобщение теоремы Кастильяно

1. *Понятие дополнительной работы.* Вернемся к общему уравнению начала возможных изменений напряженного со-

стояния

$$\begin{aligned} & \int \int \int_V (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) dV - \\ & - \int \int_S (u_x \delta X_n + \dots) dS - \int \int \int_V (u_x \delta X + \dots) \rho dV = 0 \quad (41.01) \end{aligned}$$

и рассмотрим подробнее выражение элементарной работы вариаций напряжений на действительных перемещениях; заменяя компоненты деформации по формулам Генки (18.08) при $\theta=0$, находим после ряда простых преобразований

$$\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx} = \psi \delta T^2 + \delta U \quad (41.02)$$

Так как для рассматриваемых нами сред выполняется одно из условий

$$\begin{aligned} \psi &= \text{const} = \frac{1}{2G} && \text{упругая среда Гука,} \\ \psi &= f(T^2) && \text{состояние „упрочнения“,} \\ T &= \text{const} = \tau_s && \text{состояние текучести,} \end{aligned}$$

то выражение (41.02) является полным дифференциалом некоторой функции напряжений $R = R(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx})$

$$\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx} = \delta R \quad (41.03)$$

Условимся называть R плотностью дополнительной работы или просто дополнительной работой¹. Для выяснения этого понятия отбросим на время в (41.02) слагаемое δU , относящееся к изменению объема, протекающему во всех случаях по одному и тому же закону; тогда в силу соотношения $\Gamma = 2\psi T$ имеем²

$$\delta R' = \Gamma \delta T; \quad R' = \int \Gamma dT \quad (41.04)$$

Рассмотрим разные случаи кривой $T = 2g(\Gamma^2)$ Γ (фиг. 31). Работа деформации изображается площадью, заштрихован-

¹ Этот термин известен в механике, см. например [39].

² Напомним (§ 33), что работа деформации формы $W = \int T d\Gamma$.

ной вертикальными линиями, дополнительная работа — площадью, заштрихованной горизонтальными линиями.

В случае упругой среды Гука эти площади равны по величине, $R' = W$, и здесь можно не различать понятий работы деформации и дополнительной работы; в других случаях это недопустимо. Этим объясняется, почему многочисленные попытки обобщения начала Кастильяно на нелинейно-упругие среды, исходившие из классической формулировки последнего, приводили к отрицательному результату.

Если кривая „ $T; \Gamma$ “ представима степенной функцией вида (§ 33)

$$T = B\Gamma^{\beta-1}, \quad (41.05)$$

где B, β — константы, то дополнительная работа легко выражается через работу деформации

$$R' = W(\beta - 1) \quad (41.06)$$

Вследствие выпуклости вверх кривой „ $T; \Gamma$ “ (§ 33)

$$1 \leq \beta \leq 2 \quad (41.07)$$

Для упругой среды Гука $\beta = 2$; для состояния текучести $\beta = 1$ и $R' = 0$.

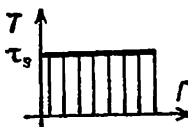
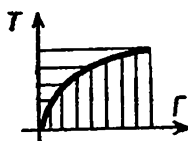
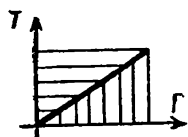
II. Обобщение формул Кастильяно. Так как

$$\delta R = \frac{\partial R}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial R}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \dots + \frac{\partial R}{\partial \tau_{zx}} \delta \tau_{zx},$$

то, сравнивая это соотношение с формулой (41.03), находим зависимости (см. [18])

$$\epsilon_x = \frac{\partial R}{\partial \sigma_x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial R}{\partial \sigma_y}; \dots; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial R}{\partial \tau_{zx}}, \quad (41.08)$$

заменяющие в случае рассматриваемых нелинейных связей между напряжениями и деформациями известные формулы



Фиг. 31.

Кастильяно (§ 38). Очевидно, что формулы Генки

$$\varepsilon_x = \psi \left(\sigma_x - \frac{\psi - k}{\psi} \sigma \right) \Bigg|_{\text{и т. п.}}, \quad \gamma_{xy} = 2\psi \tau_{xy} \Bigg|_{\text{и т. п.}}$$

могут быть представлены в форме (41.08). При этом для упругой среды Гука

$$R = U + \frac{1}{2G} T^2 = \Pi,$$

для состояния упрочнения

$$R = U + \int^{T^2} f(\zeta) d\zeta, \quad (41.09)$$

для состояния текучести

$$\delta R = \delta \left(U + \frac{\Gamma}{2\tau_s} T^2 \right)$$

III. *Начало взаимности.* Из соотношений (41.08) вытекает необходимость выполнения 15 условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \sigma_y} &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \sigma_x}; \dots; \quad \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \sigma_x}; \dots; \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \tau_{yz}} &= \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial \tau_{xy}}; \dots \end{aligned} \quad (41.10)$$

А. И. Лурье [23] указал на эти формулы как на естественное обобщение теоремы взаимности на случай рассматриваемых нелинейных зависимостей между напряжениями и деформациями.

IV. *Обобщение теоремы Кастильяно.* Распространим изложенную выше (§ 38) теорему Кастильяно на случай нелинейных зависимостей между напряжениями и деформациями. Пусть P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) — приложенные к телу сосредоточенные силы, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — соответствующие направляющие косинусы векторов этих сил, u_{xi}, u_{yi}, u_{zi} — составляющие смещения точки приложения силы P_i . Тогда, исходя из

общего вариационного уравнения

$$\delta \int \int \int_V (\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) dV - \int \int_S (u_x \delta X_n + \\ + u_y \delta Y_n + u_z \delta Z_n) dS = 0$$

и полагая, что только одна сила P_i получает бесконечно малое приращение δP_i , а опоры неподвижны, находим

$$\bar{R} - (u_{xi} \alpha_i + u_{yi} \beta_i + u_{zi} \gamma_i) \delta P_i = 0, \quad (41.11)$$

где через \bar{R} обозначена дополнительная работа всего тела

$$\bar{R} = \int \int \int_V R dV$$

Выражение внутри круглых скобок в (41.11) есть перемещение точки приложения силы по линии действия этой силы. Таким образом

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial P_i} = \Delta_i, \quad (41.12)$$

т. е. частная производная дополнительной работы по величине любой приложенной силы P_i равна перемещению точки приложения этой силы по направлению действия последней. Этот результат справедлив и в отношении обобщенных сил и перемещений; доказательство проводится обычным способом (§ 38). В случае упругой среды Гука $R = \Pi$, и формула (41.12) приводит к известной теореме Кастильяно

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_i} = \Delta_i$$

V. Пусть напряженное состояние тела выражается в функции m лишних неизвестных X_1, X_2, \dots, X_m . С подобными механическими системами мы сталкиваемся при расчете балок, стержневых решеток и т. д. В этом случае условие экстремальности дополнительной работы \bar{R} приводит к системе m уравнений

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial X_2} = 0; \dots; \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial X_m} = 0 \quad (41.13)$$

VI. Вернемся к рассмотренной (§ 39) решетке (фиг. 28) и положим, что при растяжении ($\sigma_w > 0$)

$$\varepsilon_w = \frac{B_1}{3\sqrt{3}} \sigma_x^2, \quad (41.14)$$

где B_1 — константа. Сравнивая (41.14) с формулами Генки (18.08), находим

$$h = 0; \quad T = \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}}; \quad f(\zeta) = \frac{B_1}{2} \zeta^{1/2};$$

$$R = \frac{B_1}{9\sqrt{3}} \sigma_x^3$$

Дополнительная работа всей решетки

$$\bar{R} = IF \left[\frac{2B_1}{9\sqrt{3}} \left(\frac{P-X}{F} \right)^3 + \frac{B_1}{9\sqrt{3}} \left(\frac{X}{F} \right)^3 \right] \quad (41.15)$$

Решая уравнение $\frac{\partial \bar{R}}{\partial X} = 0$, получаем

$$\sqrt{2}(P-X) = \pm X. \quad (41.16)$$

Действительному состоянию равновесия соответствует минимум дополнительной работы всего тела (см. § 43); легко видеть, что минимуму \bar{R} отвечает знак плюс. Следовательно,

$$X = \frac{P}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (41.17)$$

Смещение нижнего шарнира Δ определяется по формуле (41.12) или, что в настоящей задаче проще, исходя из (41.14).

VII. В качестве другого примера рассмотрим *изгиб балки*. Обозначим через $\varepsilon^* = \frac{d^2 v}{dx^2}$ кривизну изогнутой линии балки (см. § 35). Приращение дополнительной работы

$$\delta \bar{R} = \int_0^l \varepsilon^* \delta M dx.$$

В силу (35.06) имеем

$$\delta \bar{R} = \delta \frac{m}{m+1} \int_0^l \frac{|M|^{1+\frac{1}{m}}}{D} dx$$

Таким образом с точностью до аддитивной постоянной

$$\bar{R} = \frac{m}{m+1} \int_0^l \frac{|M|^{1+\frac{1}{m}}}{D} dx \quad (41.18)$$

Прогиб под силой P (или угол поворота сечения φ в точке приложения момента M_0) равен

$$\Delta = \frac{\partial \bar{R}}{\partial P} \quad \left(\varphi = \frac{\partial \bar{R}}{\partial M_0} \right). \quad (41.19)$$

Этой формулой удобно пользоваться для нахождения прогибов и поворотов, а также для определения лишних неизвестных X_1, X_2, \dots в статически неопределимых балках. В последнем случае

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial X_2} = 0, \dots$$

Пусть, например, консольная балка постоянного поперечного сечения изгибается силой P , приложенной на свободном конце балки $x=l$. Тогда

$$M = P(l-x) \quad (41.20)$$

Легко находим

$$\bar{R} = \frac{m^2}{(m+1)(2m+1)} \frac{P^{1+\frac{1}{m}} l^{2+\frac{1}{m}}}{D}$$

Согласно (41.19) прогиб под силой равен

$$\Delta = \frac{\partial \bar{R}}{\partial P} = \frac{m}{2m+1} \frac{P^{\frac{1}{m}} l^{2+\frac{1}{m}}}{D}. \quad (41.21)$$

VIII. При помощи той же теоремы просто определяются *пластические деформации тонкого кривого стержня*. Пред-

полагая, что радиус кривизны стержня велик сравнительно с размерами поперечного сечения стержня, можно исходить из выражения дополнительной работы, полученной выше для прямого стержня. Вместо формулы (41.18) будем иметь

$$\bar{R} = \frac{m}{m+1} \int_0^l \frac{|M|^{1+\frac{1}{m}}}{D} ds, \quad (41.22)$$

где ds — дифференциал дуги, а l — длина оси стержня.

Рассмотрим в качестве примера стержень, изогнутый по дуге круга (радиус a , центр в начале координат), с заделанным нижним концом ($\varphi = 0$, $x = a$, $y = 0$) и свободным верхним ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = a$). На свободный конец действует сила P , направленная вниз. Тогда ($D = \text{const}$)

$$M = Pa \cos \varphi, \quad ds = a d\varphi$$

$$\bar{R} = \frac{a^{2+\frac{1}{m}} P^{1+\frac{1}{m}}}{\left(1 + \frac{1}{m}\right) D} \int_0^{\pi/2} \cos^{1+\frac{1}{m}} \varphi d\varphi.$$

Обозначив величину интеграла в последней формуле через K и пользуясь теоремой (41.19), находим вертикальное смещение верхнего конца стержня

$$\Delta = \frac{\partial \bar{R}}{\partial P} = \frac{K}{D} P^{\frac{1}{m}} a^{2+\frac{1}{m}}. \quad (41.23)$$

§ 42. Начало возможных изменений напряженного состояния для фазы текучести

I. В состоянии текучести $T = \text{const}$, следовательно,

$$\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx} = \delta U, \quad (42.01)$$

и вариационное уравнение (37.05) принимает вид

$$\delta \int \int \int_V U dV = 0, \quad (42.02)$$

т. е. действительное напряженное состояние отличается от всех смежных статически возможных напряженных состояний, находящихся в фазе текучести, тем, что только оно сообщает *стационарное* значение упругой потенциальной энергии изменения объема тела (напомним, что $\delta^2 U \geq 0$).

Допустим, что материал несжимаем; тогда $U = 0$, и мы приходим к выводу: действительные смещения точек несжимаемой среды в состоянии текучести таковы, что бесконечно малые вариации напряжений, лежащие внутри фазы текучести, не производят на этих смещениях никакой дополнительной работы.

II. Для упругой среды Гука имеет место начало Кастильяно (§ 38)

$$\delta \iiint_V \left(U + \frac{1}{2G} T^2 \right) dV = 0. \quad (42.03)$$

Хаар и Карман [56], а позднее и Генки [57], постулировали справедливость этого вариационного принципа и в постоянном текучести, если сравниваемые напряженные состояния удовлетворяют условию текучести. Легко видеть, что принцип, постулированный Генки (уравнение (42.03) при условии текучести Мизеса) и вызвавший ряд возражений, совпадает по существу с полученным выше началом (42.02).

Свойства континуума, изученного Хааром и Карманом, отличны от свойств рассматриваемых нами сред, и поэтому основные положения теории Хаара и Кармана не могут быть оправданы подобным же способом.

§ 43. Начало возможных изменений напряженного состояния для упрочняющейся среды. Смешанные задачи

I. Выше было найдено, что для состояния упрочнения

$$R = U + \int^T f(\zeta) d\zeta$$

Следовательно, вариационное уравнение (37.05) принимает вид

$$\delta \iiint_V \left(U + \int^T f(\zeta) d\zeta \right) dV = 0, \quad (43.01)$$

т. е. напряжения, отвечающие состоянию равновесия таковы, что дополнительная работа всего тела

$$\bar{R} = \int \int \int_V R dV$$

получает экстремальное значение по сравнению со всеми ее соседними значениями, совместимыми с условиями равновесия.

II. Покажем, что, как правило, достигается *минимум* \bar{R} . Вторая вариация

$$\delta^2 R = \delta^2 U + \delta^2 \int_{T^2} f(\zeta) d\zeta$$

Мы знаем, что $\delta^2 U \geq 0$; с другой стороны,

$$\delta^2 \int_{T^2} f(\zeta) d\zeta = f(T^2) \delta^2(T^2) + \frac{df(T^2)}{dT^2} [\delta(T^2)]^2$$

$$\delta^2(T^2) = 2T^2(\delta\sigma_x, \dots, \delta\tau_{zx}); \frac{df(T^2)}{dT^2} = \frac{1}{4T^2} \left(\frac{d\Gamma}{dT} - \frac{\Gamma}{T} \right)$$

Следовательно,

$$\delta \int_{T^2} f(\zeta) d\zeta = \frac{[\delta(T^2)]^2}{4T^2} \frac{d\Gamma}{dT} + \left\{ T^2(\delta\sigma_x, \dots, \delta\tau_{zx}) - \frac{[\delta(T^2)]^2}{4T^2} \right\} \frac{\Gamma}{T}$$

Выражение внутри фигурных скобок не может быть отрицательным; далее $\frac{\Gamma}{T} > 0$; таким образом, если

$$\frac{d\Gamma}{dT} > 0, \quad (43.02)$$

то $\delta^2 R > 0$ (см. § 34). Условие (43.02), так же, как и условие (34.11), выполняется, повидимому, для реальных материалов всегда.

III. Если части тела V_1, V_2, \dots находятся в различных состояниях, то приращения дополнительной работы имеют соответственно выражения $\delta R_1, \delta R_2, \dots$. Так как R изменяется непрерывно при переходе через поверхности $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$, разделяющие области различного состояния, причем на каждой

из поверхностей $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ интенсивность касательных напряжений постоянна, то, так же, как и раньше (§ 34), нетрудно убедиться в том, что для смешанной задачи

$$\delta \left\{ \iiint_{V_1} R_1 dV + \iiint_{V_2} R_2 dV + \dots \right\} = 0 \quad (43.03)$$

при условии непрерывности напряжений и деформаций на $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ и неизменных внешних силах. Аналогично устанавливается обобщение формулы (41.12) в случае приложенных к телу сосредоточенных сил

$$\iiint_{V_1} \frac{\partial R}{\partial P_i} dV + \iiint_{V_2} \frac{\partial R}{\partial P_i} dV + \dots = \Delta_i \quad (43.04)$$

Начало возможных изменений напряженного состояния для нелинейных зависимостей между напряжениями и деформациями указано автором [15, 18] в 1940 г.¹ Некоторые результаты опубликованы Вебером [89] в 1941 г.

§ 44. Приложение начала возможных изменений напряженного состояния к задаче кручения

1. *Вариационное уравнение.* Вернемся к рассмотренной ранее задаче кручения призмы произвольного сечения. Начало возможных изменений напряженного состояния при отсутствии массовых сил представляется уравнением

$$\delta \int \int \int_V (U + \int_{T^a} f(\zeta) d\zeta) dV - \int \int_S (u_\omega \delta X_n + \dots) dS = 0 \quad (44.01)$$

Как и прежде, считаем

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad (44.02)$$

$$u_\omega = -\omega z; \quad u_y = \omega x; \quad u_z = \omega \varphi(x, y) \quad (44.03)$$

Уравнения равновесия удовлетворяются, если положить

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad (44.04)$$

¹ Заметим, что рассмотренное начало обобщается также и на случай медленного движения нелинейно-вязкой среды, где оно имеет столь же обширные приложения при малых деформациях (§ 56)

где F — функция напряжений; следовательно,

$$\delta\tau_{xz} = \frac{\partial}{\partial y}\delta F; \quad \delta\tau_{yz} = -\frac{\partial}{\partial x}\delta F \quad (44.05)$$

Функция F должна удовлетворять условию отсутствия сил на боковой поверхности призмы. В силу (44.02) первые два уравнения Коши (1.02) удовлетворяются тождественно, третье же приводится к виду

$$\cos(n, x) \frac{\partial F}{\partial y} - \cos(n, y) \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

т. е. на контуре сечения

$$F = \text{const} \quad (44.06)$$

Следовательно, вариация δF произвольна внутри контура и обращается в нуль на самом контуре. Подсчитаем теперь работу внешних сил на основаниях призмы. На нижнем закреплённом основании ($z=0$)

$$\cos(n, x) = 0; \quad \cos(n, y) = 0; \quad \cos(n, z) = -1$$

$$\delta X_n = -\frac{\partial}{\partial y}\delta F; \quad \delta Y_n = \frac{\partial}{\partial x}\delta F; \quad \delta Z_n = 0$$

$$u_x = 0; \quad u_y = 0; \quad u_z = \omega\varphi(x, y),$$

и, очевидно, работа поверхностных сил закреплённого основания равна нулю. На свободном основании ($z=l$)

$$\cos(n, x) = 0; \quad \cos(n, y) = 0; \quad \cos(n, z) = 1$$

$$\delta X_n = \frac{\partial}{\partial y}\delta F; \quad \delta Y_n = -\frac{\partial}{\partial x}\delta F; \quad \delta Z_n = 0$$

$$u_x = -\omega l y; \quad u_y = \omega l x; \quad u_z = \omega\varphi(x, y)$$

Следовательно, работа внешних сил

$$\begin{aligned} \iint (u_x \delta X_n + u_y \delta Y_n + u_z \delta Z_n) dx dy &= \\ &= \omega l \iint \left(-y \frac{\partial}{\partial y} \delta F - x \frac{\partial}{\partial x} \delta F \right) dx dy = \\ &= -\omega l \iint \left(\frac{\partial}{\partial x} x \delta F + \frac{\partial}{\partial y} y \delta F \right) dx dy + 2\omega l \iint \delta F dx dy \end{aligned}$$

Преобразуя первый интеграл в контурный, находим, что он равен нулю в силу условия (44.06). Итак, вариационное уравнение (44.01) принимает вид

$$\delta R^* \equiv \delta \iint \left\{ \int \overline{\nabla F} f(\zeta) d\zeta - 2\omega F \right\} dx dy = 0, \quad (44.07)$$

где введено обозначение

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 = \overline{\nabla F}$$

II. Дифференциальное уравнение. Из (44.07) находим

$$\iint \left\{ f(\overline{\nabla F}) \left[\frac{\partial F}{\partial x} \delta \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \delta \frac{\partial F}{\partial y} \right] - \omega \delta F \right\} dx dy = 0$$

Применяя формулу Гаусса-Остроградского, получаем

$$\oint_{\partial} f(\overline{\nabla F}) \frac{dF}{dn} \delta F dC - \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[f(\overline{\nabla F}) \frac{\partial F}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[f(\overline{\nabla F}) \frac{\partial F}{\partial y} \right] + \omega \right\} \delta F dx dy = 0$$

Так как вариация δF равна нулю на контуре, а внутри его произвольна, то функция напряжений должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[f(\overline{\nabla F}) \frac{\partial F}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[f(\overline{\nabla F}) \frac{\partial F}{\partial y} \right] + \omega = 0 \quad (44.08)$$

и контурному условию

$$F = \text{const} \quad (44.09)$$

Уравнение (44.08) линейно относительно производных второго порядка.

Рассмотрим случай, когда

$$\Gamma = B_1 T^{\beta_1 - 1}, \text{ т. е. } f(\zeta) = \frac{B_1}{2} \zeta^{\frac{\beta_1}{2} - 1}, \quad (44.10)$$

где B_1, β_1 — константы; вследствие выпуклости вверх кривой „T”; Γ^* (§ 33)

$$\beta_1 \geq 2 \quad (44.11)$$

Уравнение (44.08) принимает вид ¹

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\nabla F)^{\beta_1-1} \frac{\partial F}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nabla F)^{\beta_1-1} \frac{\partial F}{\partial y} \right] + \frac{2\omega}{B_1} = 0 \quad (44.12)$$

Для упругой среды Гука $B_1 = \frac{1}{G}$, $\beta_1 = 2$, и мы получаем известное уравнение кручения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2G\omega = 0 \quad (44.13)$$

III. В состоянии текучести напряжения удовлетворяют условию текучести Мизеса. Внося в последнее напряжения по (44.02) и (44.04), приходим к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 = \tau_s^2, \quad (44.14)$$

найденному А. Надаи [28]. Поверхность напряжений $F = F(x, y)$ есть поверхность с постоянным углом ската, построенная на контуре поперечного сечения; представление о ней легко получить, наблюдая поверхность естественного откоса кучи песка, насыпанного на кусок горизонтально положенного картона, вырезанного по форме поперечного сечения призмы. Если не все сечение находится в состоянии текучести, то поверхность напряжений состоит частично из поверхности естественного откоса (в области текучести), частично — из поверхности мембраны (в упругой области).

Интересные примеры построения таких поверхностей напряжения приведены в книге А. Надаи [28].

Теоретическое решение некоторых задач упруго-пластического кручения нашли В. В. Соколовский и Л. А. Галин (см. [35]).

IV. О минимуме R^* . Вернемся к уравнению (44.07); нетрудно показать, что действительное состояние равновесия

¹) Аналогичное уравнение иным путем получили Надаи [69] и Г. Ю. Джанелидзе.

характеризуется минимумом R^* . В самом деле

$$\begin{aligned} \delta^2 R^* = & 2 \iint \left\{ f(\nabla F) \left[\left(\delta \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\delta \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ & + 2 \frac{df(\nabla F)}{d(\nabla F)} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \delta \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \delta \frac{\partial F}{\partial y} \right]^2 \left. \right\} dx dy + \\ & + 2 \iint \left\{ f(\nabla F) \left[\frac{\partial F}{\partial x} \delta^2 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \delta^2 \frac{\partial F}{\partial y} \right] - \omega \delta^2 F \right\} dx dy \end{aligned}$$

Второй из этих интегралов приводится к форме

$$\begin{aligned} 2 \oint_C f(\nabla F) \frac{dF}{dn} \delta^2 F dC - 2 \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[f(\nabla F) \frac{\partial F}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[f(\nabla F) \frac{\partial F}{\partial y} \right] + \omega \right\} \delta^2 F dx dy, \end{aligned}$$

из которой ясно, что он равен нулю. Считая

$$\frac{df(T^2)}{dT^2} \geq 0,$$

что соответствует обычно наблюдаемому более сильному приросту деформаций, чем напряжений, при возрастании нагрузки, мы приходим к высказанному утверждению

V. Крутящий момент M равен

$$\begin{aligned} M = \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy = - \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} (xF) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} (yF) - 2F \right] dx dy = - \oint_C \left[x \cos(n, y) + \right. \\ \left. + y \cos(n, x) \right] F dC + 2 \iint F dx dy \end{aligned}$$

Для односвязного контура можно принять $F=0$ на контуре; следовательно,

$$M = 2 \iint F dx dy \quad (44.16)$$

Если же контур многосвязный, то функция напряжений F может иметь различные постоянные значения $F_0, F_1, F_2, \dots, F_p$ на разных контурах — внешнем C_0 и внутренних $C_1, C_2,$

..., C_p . При этом скручивающий момент

$$M = -2 F_0 \Omega_0 + 2 \sum_{i=1}^p F_i \Omega_i + 2 \iint F dx dy, \quad (44.17)$$

где Ω_i ($i=0, 1, 2, \dots, p$) — площадь, ограниченная контуром C_i . Одна из постоянных F_i может быть задана произвольно.

VI. Выведем другую формулу для величины крутящего момента. При зависимости (44.10) и односвязном контуре

$$\begin{aligned} R^* &= \iint \left[\frac{B_1}{\beta_1} (\nabla F)^{\frac{\beta_1}{2}} - 2\omega F \right] dx dy = -\omega M + \\ &+ \iint \left\{ \frac{B_1}{\beta_1} (\nabla F)^{\frac{\beta_1}{2}-1} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} \right] \right\} dx dy = \\ &= -\omega M + \frac{B_1}{\beta_1} \oint_{\sigma} F (\nabla F)^{\frac{\beta_1}{2}-1} \frac{dF}{dn} dC - \\ &- \frac{2}{\beta_1} \iint F \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{B_1}{2} (\nabla F)^{\frac{\beta_1}{2}-1} \frac{\partial F}{\partial x} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{B_1}{2} (\nabla F)^{\frac{\beta_1}{2}-1} \frac{\partial F}{\partial y} \right] + \omega \right\} dx dy + \frac{2\omega}{\beta_1} \iint F dx dy, \end{aligned}$$

откуда вытекает в силу (44.12) и (44.16), что

$$M = - \frac{R^*}{\left(1 - \frac{1}{\beta_1}\right) \omega} \quad (44.18)$$

Таким образом, можно утверждать, что всякое приближенное решение, опирающееся на вариационное уравнение (44.07), дает, в отличие от начала (36.06), *нижнюю границу крутящего момента* ($R^* < 0$). В теории упругости аналогичные результаты указаны Л. С. Лейбензоном.

VII. *Обобщение теоремы Бредта.* Пользуясь (44.03) и условием однозначности смещений, находим

$$I \equiv \oint_{C^*} \gamma_{\omega z} dx + \gamma_{y z} dy = 2 \omega \Omega^*,$$

где Ω^* — площадь, ограниченная некоторой замкнутой кри-

вой C^* , лежащей в сечении стержня. Так как

$$\gamma_{xz} = 2f(T^2)\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = -2f(T^2)\frac{\partial F}{\partial x},$$

то с другой стороны

$$I = -2 \oint_{C^*} f(T^2) \frac{dF}{dn} dC^*$$

Получаем, таким образом, формулу

$$\oint_{C^*} f(T^2) \frac{dF}{dn} dC^* = -\omega \Omega^*, \quad (44.19)$$

являющуюся обобщением известной теоремы Бредта о циркуляции касательного напряжения.

Применяя (44.19) к каждому из внутренних контуров C_1, C_2, \dots, C_p , можно составить необходимое число уравнений для определения постоянных F_1, F_2, \dots, F_p в случае многосвязного контура.

VIII. *Кручение тонкостенных труб.* Пусть $F_0 = 0, p = 1$. Основываясь на малости толщины трубы Δ , принимаем, что F меняется линейно от $F = F_1$ — на внутреннем контуре до $F = F_0 = 0$ — на внешнем. Тогда

$$M \approx 2 \Omega F_1, \quad (44.20)$$

где Ω — площадь, ограниченная кривой C , проходящей посередине между C_0 и C_1 . Далее, мы имеем

$$\frac{dF}{dn} \approx -\frac{F_1}{\Delta}; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \approx \left(\frac{F_1}{\Delta}\right)^2$$

Следовательно, согласно (44.19)

$$F_1 \oint_C f\left(\frac{F_1^2}{\Delta^2}\right) \frac{dC}{\Delta} = \omega \Omega, \quad (44.21)$$

откуда находится F_1 . Для величины тангенциальной слагающей напряжения, как и в случае упругой среды Гука, получаем

$$\tau = \frac{M}{2\Delta\Omega} \quad (44.22)$$

IX. *Кручение круглого стержня переменного диаметра.* Вернемся к этой задаче, уже кратко затронутой (§ 36), и рассмотрим экстремальные свойства напряженного состояния. Исходя из общего вариационного уравнения (43.01) и помня, что

$$\delta \dot{\sigma}_r = \delta \sigma_\varphi = \delta \sigma_z = \delta \tau_{rz} = 0,$$

а

$$\delta \tau_{r\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} \delta \Phi, \quad \delta \tau_{z\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \delta \Phi,$$

найдем после ряда преобразований, на которых мы не останавливаемся, вариационное уравнение для функции напряжений

$$\delta \int \int \left[\int_{T^2}^{\tau^2} f(\zeta) d\zeta \right] r dr dz = 0, \quad (41.23)$$

где вариация $\delta \Phi$ произвольна внутри стержня и обращается в нуль на боковой поверхности в силу условия (36.17). Варьируя функционал в левой части (44.23) и применяя формулу Гаусса-Остроградского, найдем, что функция напряжений должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[f(T^2) \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[f(T^2) \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = 0 \quad (44.24)$$

при условии (36.17) на боковой поверхности.

В случае упругой среды Гука $f(T^2) = \text{const}$, и уравнение (44.24) значительно упрощается

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (44.25)$$

В случае идеальной текучести, изученном В. В. Соколовским [37], функция напряжений удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 = \tau_s^2 r^4 \quad (44.26)$$

В заключение отметим, что уравнение (44.24), так же, как и уравнения (36.19), (36.07), (44.08), при выполнении условия $\frac{dT}{d\Gamma} > 0$ принадлежит к эллиптическому типу.

§ 45. Случай конечного числа обобщенных координат

I. Деформированное состояние тела часто можно характеризовать конечным числом обобщенных перемещений. Так, например, обстоит дело в строительной механике, где рассматриваются упругие системы, состоящие из простых элементов (стержни), о деформации которых сложились вполне определенные представления. Рассмотрим подобные системы, следуя А. И. Лурье [23].

Пусть обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_m характеризуют конфигурацию системы в положении равновесия. Внешним нагрузкам соответствуют обобщенные силы Q_1, Q_2, \dots, Q_m , отнесенные к координатам q_1, \dots, q_m . На возможном перемещении системы эти обобщенные силы производят работу

$$\sum_{i=1}^m Q_i \delta q_i$$

Пусть существует потенциал работы деформации тела

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}(q_1, q_2, \dots, q_m);$$

тогда

$$\sum_{i=1}^m Q_i \delta q_i = \delta \bar{\Pi} \text{ или } Q_i = \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (45.01)$$

Последние соотношения являются, в сущности, условиями равновесия системы. В классическом случае закона Гука

$$q_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} Q_i, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (45.02)$$

где α_{ij} — постоянные коэффициенты, справедливы теорема взаимности

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (45.03)$$

и теорема Кастильяно

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial Q_i} = q_i \quad (45.04)$$

Рассмотрим зависимости между обобщенными силами и координатами более общие, чем (45.02)

$$q_j = q_j(Q_1, Q_2, \dots, Q_m) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (45.05)$$

II. *Теорема взаимности.* Вследствие условий (45.01) функции (45.05) не могут быть вполне произвольными; если

$$Q_j = Q_j(q_1, q_2, \dots, q_m) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (45.06)$$

суть решения (45.05), то

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \quad (45.07)$$

Обозначим эти производные через $a_{ij} = a_{ji}$. Докажем, что

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \quad (45.08)$$

В самом деле

$$\frac{\partial Q_i}{\partial Q_j} = \sum_{\mu=1}^m a_{i\mu} \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Если при фиксированном j придавать i значения $1, 2, \dots$, то мы получаем систему m уравнений, из которой находим производные

$$\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_j} = \frac{A_{j\mu}}{A},$$

где A — определитель, составленный из коэффициентов a_{ij} (гессиан функции $\bar{\Pi}$)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix},$$

а $A_{j\mu}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{j\mu}$. Вследствие симметричности определителя A имеем $A_{j\mu} = A_{\mu j}$, что и доказывает (45.08). В случае закона Гука соотношения (45.08) — лишь иная формулировка теоремы взаимности (45.03), поэтому (45.08) — естественное обобщение теоремы взаимности на случай нелинейных зависимостей.

III. *Обобщение теоремы Кастильяно.* В силу (45.08) существует такая функция $\bar{R} = \bar{R}(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$ (*дополнительная работа*), для которой

$$\delta \bar{R} = \sum_{i=1}^m q_i \delta Q_i \quad (45.09)$$

Отсюда вытекает обобщение теоремы Кастильяно

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial Q_i} = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (45.10)$$

Складывая (44.01) и (44.09), получаем

$$\delta \bar{R} + \delta \bar{\Pi} = \delta \sum_{i=1}^m Q_i q_i,$$

т. е.

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^m q_i Q_i - \bar{\Pi},$$

что объясняет выбранное название \bar{R} (§ 40).

В случае линейных однородных соотношений между координатами и силами потенциал $\bar{\Pi}$ является квадратичной однородной формой координат q_1, q_2, \dots, q_m и

$$\sum_i^m q_i Q_i = \sum_i^m q_i \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial q_i} = 2\bar{\Pi},$$

следовательно, $\bar{R} = \bar{\Pi}$, т. е. как и ранее (§ 40), приходим к классической формулировке теоремы Кастильяно.

IV. В случае статически неопределимой системы мы придем к прежней задаче, удалив избыточные связи и заменив их реакциями (так называемые лишние неизвестные) X_1, X_2, \dots, X_n , где n — число избыточных связей. Так как обобщенные перемещения, соответствующие силам X_1, X_2, \dots, X_n , равны нулю, то лишние неизвестные определяются из совокупности уравнений, вытекающих из (45.10)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}}{\partial X_1} &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial X_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45.11)$$

V. Если в некоторой части тела возникло состояние текучести, то

$$R = \frac{3}{2} k \sigma^2 + \begin{cases} \frac{1}{2G} T^2 & \text{в упругой части } V_1, \text{ где } T < \tau_s \\ \frac{1}{2G} \tau_s^2 & \text{в пластическом объеме } V_2, \text{ где } T = \tau_s \end{cases}$$

Дополнительная работа R во всем объеме тела

$$\overline{R} = \frac{3}{2} k \int \int \int_V \sigma^2 dV + \frac{1}{2G} \int \int \int_{V_1} T^2 dV + \frac{\tau_s^2}{2G} V_2$$

зависит от обобщенных сил Q_1, Q_2, \dots, Q_m .

Рассмотрим тройной интеграл

$$I(\lambda) = \int \int \int_D F(x, y, z, \lambda) dx dy dz,$$

распространенный на область D , ограниченную некоторой поверхностью S , изменяющейся вместе с параметром λ . Производная этого интеграла по λ (Гурса „Курс математического анализа“, т. I)

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int \int \int_D \frac{\partial F}{\partial \lambda} dx dy dz + \int \int_S F \frac{dn}{d\lambda} dS,$$

где dn — бесконечно малое смещение точки поверхности S в направлении ее внешней нормали. Если на S функция F постоянна, то

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int \int \int_D \frac{\partial F}{\partial \lambda} dx dy dz + F \int \int_S \frac{dn}{d\lambda} dS$$

Если функция F постоянна во всем объеме D , то $I = FD$ и

$$\frac{dI}{d\lambda} = F \frac{dD}{d\lambda} = F \int \int_S \frac{dn}{d\lambda} dS$$

Воспользовавшись этими формулами, находим по (45.10)

$$q_i = \frac{\partial \overline{R}}{\partial Q_i} = 3k \int \int \int_V \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial Q_i} dV + \frac{1}{G} \int \int \int_{V_1} T \frac{\partial T}{\partial Q_i} dV \quad (45.12)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

§ 46. Упруго-пластический изгиб балок

1. Рассмотрим, следуя А. И. Лурье, приложение формул (45.12) к случаю изгиба стержня. Направим ось x по оси балки, а оси y, z по главным осям инерции поперечного сечения Ω и будем считать, что балка изгибается в плоскости x, y . Как и ранее (§ 39)

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_s \frac{y}{\zeta}, & \text{при } |y| \leq \zeta, \\ \sigma_s, & \text{при } |y| \geq \zeta, \end{cases} \quad (46.01)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0,$$

где ζ — расстояние в данном сечении от нейтральной линии балки до зоны текучести. Так как в нашей задаче

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{3}; T = \frac{|\sigma_x|}{\sqrt{3}}; |\sigma_x| = \text{const в } V_2,$$

то формулы (45.12) приводятся к виду

$$q_i = \frac{1}{E} \int \int \int_{V_1} \sigma_x \frac{d\sigma_x}{dM} \frac{\partial M}{\partial Q_i} dV, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (46.02)$$

где $M = M(x; Q_1, \dots, Q_m; X_1, \dots, X_n)$ — изгибающий момент.

Пусть (1) — совокупность отрезков интервала $(0 \leq x \leq l)$, в которых все волокна балки деформируются упруго, т. е. (§ 39) $|M| < M_s = \frac{2I}{h^*} \sigma_s$, где I — момент инерции сечения, а h^* — расстояние в данном сечении от нейтральной линии балки до наиболее удаленного волокна; совокупность отрезков, в которых $|M| \geq M_s$, обозначим через (2). Тогда

$$q_i = \frac{1}{E} \int_{(1)} dx \int_{\Omega} \sigma_x \frac{d\sigma_x}{dM} \frac{\partial M}{\partial Q_i} dydz + \frac{1}{E} \int_{(2)} dx \int_{\Omega} \sigma_x \frac{d\sigma_x}{dM} \frac{\partial M}{\partial Q_i} dydz, \quad (46.03)$$

где Ω_1 — упруго деформированная часть Ω . Так как в (1) $\sigma_x = \frac{M}{I} y$, то

$$\frac{1}{E} \int_{\Omega} \sigma_x \frac{d\sigma_x}{dM} \frac{\partial M}{\partial Q_i} dydz = \frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial Q_i} \quad (46.04)$$

В (2) согласно (46.01) имеем

$$\frac{1}{E} \int_{\Omega_1} \sigma_x \frac{d\sigma_x}{dM} \frac{\partial M}{\partial Q_i} dydz = -\frac{I_1 \sigma_s^2}{E} \frac{1}{\zeta^3} \frac{d\zeta}{dM}, \quad (46.05)$$

$$|M| = \int_{\Omega_1} \sigma_x y dydz + \int_{\Omega_2} \sigma_x |y| dydz = \frac{\sigma_s}{\zeta} I_1 + \sigma_s K_2, \quad (46.06)$$

где I_1 — момент инерции площади Ω_1 относительно оси z , а K_2 — сумма абсолютных величин статических моментов площадок, образующих область Ω_2 , относительно той же оси z . Пусть $b = b(y)$ — ширина поперечного сечения балки; тогда приращения величин I_1 и K_2 равны

$$dI_1 = [b(\zeta) + b(-\zeta)] \zeta^2 d\zeta; \quad dK_2 = -[b(\zeta) + b(-\zeta)] \zeta d\zeta,$$

вследствие чего из (46.06) находим

$$d|M| = -\frac{\sigma_s}{\zeta^2} I_1 d\zeta$$

Следовательно,

$$\frac{1}{E} \int_{\Omega_1} \sigma_x \frac{d\sigma_x}{dM} \frac{\partial M}{\partial Q_i} dydz = (\text{sign } M) \frac{\sigma_s}{E\zeta} \frac{\partial M}{\partial Q_i},$$

и окончательно получаем

$$q_i = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial Q_i} dx + (\text{sign } M) \frac{\sigma_s}{E} \int_{(2)}^1 \frac{\partial M}{\zeta \partial Q_i} dx \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (46.07)$$

Величина ζ находится из уравнения (46.06), которое легко приводится к виду

$$\frac{|M|}{M_s} = \frac{I_1}{I} \frac{h^*}{\zeta} + \frac{K_2 h^*}{I} \quad (46.08)$$

Здесь справа стоит величина, зависящая только от формы сечения. Так, для прямоугольного сечения высотой h получаем прежнюю формулу (39.10)

$$\frac{|M|}{M_s} = \frac{3}{2} - 2 \left(\frac{\zeta}{h} \right)^2,$$

для круглого сечения радиуса a

$$\frac{|M|}{M_s} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\beta - \frac{1}{2} \sin 4\beta}{\sin \beta} + \frac{16}{3} \cos^3 \beta \right),$$

где $\sin \beta = \frac{\zeta}{a}$ и т. д.

Остается составить выражение изгибающего момента M в функции от x , внешних обобщенных сил Q_1, Q_2, \dots, Q_m , лишних неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n , и определить отрезки балки (2), в которых сечения испытывают упруго-пластическую деформацию.

Формула (46.01) дает обобщенные перемещения — прогибы, повороты и т. п.; лишние неизвестные находятся из уравнений

$$\frac{1}{EI} \int_{(1)} M \frac{\partial M}{\partial X_i} dx + \left(\text{sign } M \right) \frac{\sigma_s}{E} \int_{(2)} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial M}{\partial X_i} dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (46.09)$$

II. С примером приложения подобных уравнений мы встретились в § 39, где была найдена величина момента защемления $\left(X = \frac{Pl}{8} \right)$ при упруго-пластическом изгибе балки с заделанными концами силой P , приложенной посередине.

Определим теперь по формуле (46.07) для этой же балки прогиб под силой P ; изгибающий момент (§ 39)

$$M = \frac{P}{2} \left(x - \frac{l}{4} \right) \quad (46.10)$$

В рассматриваемом случае формула (46.07) при переменной M (вместо x) имеет вид

$$\Delta = \frac{4}{P^2 EI} \int_{-M_s}^{M_s} M^2 dM - \frac{8\sigma_s}{P^2 E h} \int_{-\frac{Pl}{8}}^{-M_s} \frac{MdM}{\sqrt{3 + \frac{2M}{M_s}}} +$$

$$+ \frac{8\sigma_s}{P^2 E h} \int_{M_s}^{\frac{Pl}{8}} \frac{MdM}{\sqrt{3 - \frac{2M}{M_s}}} \quad (46.11)$$

Вычисляя интегралы, находим после простых преобразований,

$$\Delta = \frac{16M_s^2 \sigma_s}{P^2 E h} \left[\frac{5}{3} - \sqrt{3 - \frac{Pl}{4M_s}} \left(1 + \frac{Pl}{24M_s} \right) \right] \quad (46.12)$$

Максимальный изгибающий момент равен $\frac{Pl}{8}$; при появлении пластической деформации $\frac{Pl}{8} = M_s$, т. е. $P = \frac{8M_s}{l}$. Тогда из (46.12) получаем

$$\Delta = \frac{\sigma_s}{12E} \frac{l^2}{h},$$

что легко найти и из выражения для прогиба подобной же упругой балки.

В заключение заметим, что А. И. Лурье применил общее соотношение (46.07) также и к вопросу упруго-пластического кручения круглого вала.

§ 47. Вариационные начала для неравномерно нагретого тела. Влияние неравномерности нагрева тела

1. *Начало возможных изменений деформированного состояния.* Согласно (18.17) и (18.34) в случае неравномерного нагрева приращение работы деформации

$$\delta A^* = \delta \Phi - \delta Q = \delta \left[\frac{\epsilon^2}{6k} + \int_{\Gamma^*} g(\zeta) d\zeta \right] - \frac{\alpha}{k} \theta \delta z, \quad (47.01)$$

и вариационное уравнение (34.02) принимает вид

$$\begin{aligned} & \delta \iiint_V \left[\frac{\varepsilon^2}{6k} + \int g(\zeta) d\zeta \right] dV - \frac{\alpha}{k} \iiint_V \theta \delta \varepsilon dV - \\ & - \int_{S_1} (X_n \delta u_x + Y_n \delta u_y + Z_n \delta u_z) dS - \iiint_V (X \delta u_x + Y \delta u_y + \\ & + Z \delta u_z) \rho dV = 0 \end{aligned} \quad (47.02)$$

Но

$$\theta \delta \varepsilon = \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \delta u_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta u_y + \frac{\partial}{\partial z} \delta u_z \right)$$

и, пользуясь формулой Гаусса-Остроградского, находим

$$\begin{aligned} \iiint_V \theta \delta \varepsilon dV &= \int_{S_1} \theta [\delta u_x \cos(n, x) + \delta u_y \cos(n, y) + \\ &+ \delta u_z \cos(n, z)] dS - \iiint_V \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \delta u_x + \frac{\partial \theta}{\partial y} \delta u_y + \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta u_z \right) dV. \end{aligned}$$

Теперь из (47.02) получаем вариационное уравнение

$$\begin{aligned} & \delta \iiint_V \left[\frac{\varepsilon^2}{6k} + \int g(\zeta) d\zeta \right] dV - \int_{S_1} \left\{ \left[X_n + \frac{\alpha}{k} \theta \cos(n, x) \right] \delta u_x + \right. \\ & + \left[Y_n + \frac{\alpha}{k} \theta \cos(n, y) \right] \delta u_y + \left[Z_n + \frac{\alpha}{k} \theta \cos(n, z) \right] \delta u_z \Big\} dS - \\ & - \iiint_V \left\{ \left(\rho X - \frac{\alpha}{k} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \delta u_x + \left(\rho Y - \frac{\alpha}{k} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \delta u_y + \right. \\ & \left. + \left(\rho Z - \frac{\alpha}{k} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \delta u_z \right\} dV = 0 \end{aligned} \quad (47.03)$$

Итак, в случае неравномерного нагрева задача определения перемещений u_x , u_y , u_z сводится к „обычной“ изотермической задаче путем добавления к фактическим объемным силам ρX , ρY , ρZ фиктивной объемной силы $-\frac{\alpha}{k} \text{grad } \theta$, а к заданным поверхностным нагрузкам X_n , Y_n , Z_n — фиктивного нормального растяжения $\frac{\alpha}{k} \theta$ (на части поверхности S_1).

II. *Начало возможных изменений напряженного состояния.* Рассматривая, как и выше, состояние упрочнения и пользуясь формулами (18.32), находим (температура θ не варьируется):

$$\varepsilon_{\alpha} \delta \sigma_{\alpha} + \dots + \gamma_{\alpha\alpha} \delta \tau_{\alpha\alpha} = \delta \left[\frac{3}{2} k \sigma^2 + \int_0^{\tau} f(\zeta) d\zeta + 3\alpha \theta \varepsilon \right] \quad (47.04)$$

Следовательно, вместо уравнения (43.01) получаем уравнение

$$\delta \int \int \int_V \left[\frac{3}{2} k \sigma^2 + \int_0^{\tau} f(\zeta) d\zeta \right] dV + 3\alpha \delta \int \int \int_V \theta \varepsilon dV = 0, \quad (47.05)$$

справедливое при выполнении условия (37.04).

§ 48. Приближенные методы решения, основанные на вариационных принципах

I. Установленные в теории малых упруго-пластических деформаций вариационные начала полезны, в частности, для построения приближенных решений. Мы не будем здесь касаться различных вопросов, связанных с применением прямых методов вариационного исчисления¹; ограничимся кратким рассмотрением двух схем построения приближенных решений; первая из них исходит из начала возможных изменений деформированного состояния, вторая — из начала возможных изменений напряженного состояния.

II. *Применение начала возможных изменений деформированного состояния.* Исходим из вариационного уравнения (§ 34)

$$\delta \left\{ \int \int \int_V P dV - A \right\} = 0, \quad (48.01)$$

где A — работа внешних сил; на части поверхности тела S_2 заданы перемещения, на остальной части S_1 — нагрузка. Пусть u_{x0} , u_{y0} , u_{z0} — функции, принимающие заданные значения на S_2 , а u_{xi} , u_{yi} , u_{zi} — функции, обращающиеся в нуль

¹ См., например, Л. В. Канторович и В. И. Крылов „Приближенные методы анализа“. ОНТИ, 1941; см. также [21].

на S_2 . Тогда функции

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x0} + \sum_i a_i u_{xi} \\ u_y &= u_{y0} + \sum_i b_i u_{yi} \\ u_z &= u_{z0} + \sum_i c_i u_{zi}, \end{aligned} \quad (48.02)$$

где u_i , b_i , c_i — произвольные постоянные, удовлетворяют граничным условиям на S_2 ; варьируя их, получаем

$$\begin{aligned} \delta u_x &= \sum u_{xi} \delta a_i \\ \delta u_y &= \sum u_{yi} \delta b_i \\ \delta u_z &= \sum u_{zi} \delta c_i, \end{aligned} \quad (48.03)$$

причем вариации δa_i , δb_i , δc_i вполне произвольны; подставляя (48.03) в выражение работы внешних сил (34.01) и выполняя интегрирование, находим (для простоты письма массовые силы опущены)

$$\begin{aligned} \delta A = \int_{S_1} (X_n \delta u_x + Y_n \delta u_y + Z_n \delta u_z) dS &\equiv \sum_i (A_i \delta a_i + \\ &+ B_i \delta b_i + C_i \delta c_i), \end{aligned} \quad (48.04)$$

где A_i , B_i , C_i — известные постоянные. Вычисляем теперь компоненты деформации по смещениям (48.02), вносим их в выражение для Π и выполняем интегрирование по объему; в результате находим, что потенциал работы деформации всего тела $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}(a_i, b_i, c_i)$. Следовательно,

$$\delta \bar{\Pi} = \sum_i \left(\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_i} \delta a_i + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial b_i} \delta b_i + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial c_i} \delta c_i \right) \quad (48.05)$$

В силу произвольности вариаций δa_i , δb_i , δc_i из уравнения (48.01) вытекает система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_i} - A_i &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial b_i} - B_i &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial c_i} - C_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (48.06)$$

В отличие от теории упругости, здесь $\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_i}$, $\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial b_i}$, $\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial c_i}$ уже не являются линейными функциями параметров a_i , b_i , c_i ; поэтому решение системы (48.06) затруднительно. Однако первое приближение в ряде задач можно получить без труда. Этот вопрос рассматривал А. А. Ильюшин [10].

III. *Применение начала возможных изменений напряженного состояния.* Ограничиваясь рассмотрением случая, когда заданы поверхностные силы, исходим из вариационного уравнения (§ 43)

$$\delta \bar{R} = 0 \quad (48.07)$$

Пусть σ_{x0} , σ_{y0} , ..., τ_{zx0} — частные решения уравнений равновесия (2.01), удовлетворяющие граничным условиям, а σ_{xi} , σ_{yi} , ..., τ_{zxi} ($i=1, 2, 3, \dots$) — частные решения однородных уравнений равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\},$$

удовлетворяющие однородным же граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) &= 0 \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\}$$

Следуя П. Ф. Папковичу [31], ищем решение в форме

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{x0} + \sum_i A_i \sigma_{xi} \\ \sigma_y &= \sigma_{y0} + \sum_i A_i \sigma_{yi} \\ &\dots \dots \dots \\ \tau_{zx} &= \tau_{zx0} + \sum_i A_i \tau_{zxi} \end{aligned} \quad (48.08)$$

где A_i — произвольные константы, при изменении которых изменяется и статически возможное напряженное состояние (48.08); эти постоянные надлежит выбрать наилучшим образом, именно — чтобы при подстановке (48.08) в выражение дополнительной работы, последняя получила минимальное значение. Внося (48.08) в $R = R(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx})$ и интегрируя по объему тела, находим, что

$$\bar{R} = \bar{R}(A_1, A_2, \dots)$$

Условие минимальности приводит к системе уравнений относительно A_1, A_2, \dots

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial A_1} = 0; \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial A_2} = 0; \dots \quad (48.09)$$

В отличие от теории упругости эта система уравнений нелинейная и решение ее, как и в предыдущем случае, вообще говоря, затруднительно. Первое приближение, однако, вполне доступно во многих частных задачах; успех его в значительной мере зависит от удачного выбора решений $\sigma_{x0}, \sigma_{y0}, \dots, \tau_{zx0}; \sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \dots, \tau_{zx1}$. Пример приложения этого метода содержится в § 71.

Можно иным способом варьировать возможные напряженные состояния, например — варьированием функций напряжения. Этот способ применялся в настоящей главе в задаче кручения (§ 45). Покажем, как легко получить первое приближение в решении этой задачи. Выберем, следуя методу Ритца, некоторую функцию $\Delta F(x, y)$, удовлетворяющую на контуре сечения стержня условию $F = 0$, где Δ — подлежащий определению параметр. Тогда из (45.07) при зависимости (46.13) находим

$$\Lambda^{31-1} = \frac{2\omega}{B_1} \frac{\iint F dx dy}{\iint \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{B_1}{2} dx dy} \quad (48.10)$$

§ 49. Вариационное уравнение движения. Теорема энергии

I. *Вариационное уравнение движения.* С помощью принципа Даламбера нетрудно вывести вариационное уравнение движения пластической среды. Сопоставим действительные перемещения u_x, u_y, u_z с бесконечно близкими перемещениями $u_x + \delta u_x, u_y + \delta u_y, u_z + \delta u_z$, совместимыми с граничными условиями; потребуем при этом, чтобы для начального и конечного моментов времени $t = t_0$ и $t = t_1$ вариации перемещений обращались в нуль

$$\delta u_x = \delta u_y = \delta u_z = 0 \text{ при } t = t_0, t = t_1 \quad (49.01)$$

Тогда вместо уравнения (34.03) получаем

$$\iiint_V \delta \Pi dV = \delta A - \iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \delta u_x + \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \delta u_y + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \delta u_z \right) dV \quad (49.02)$$

Интегрируя по времени в пределах от t_0 до t_1 , находим

$$\int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \delta \Pi dV dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt - \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \delta u_x + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \delta u_y + \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \delta u_z \right) dV dt \quad (49.03)$$

Интегрированием по частям второй интеграл справа приводится к виду

$$\int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \delta u_x + \dots \right) dV dt = \iiint_V \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \delta u_x + \right. \\ \left. + \dots \right) dV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u_x + \dots \right) dV dt$$

Здесь первое слагаемое в правой части равно нулю в силу условия (49.01); второй интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u_x + \dots \right) dV dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \int \int \int_V \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] dV dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \bar{K} dt,$$

где

$$\bar{K} = \int \int \int_V \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] dV,$$

есть кинетическая энергия тела. Полагая, что внешние силы имеют потенциал \bar{A} , получаем начало Гамильтона

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\bar{K} + \bar{A} - \bar{\Pi}) dt = 0, \quad (49.04)$$

т. е. для действительного движения тела в заданном промежутке времени интеграл $\int_{t_0}^{t_1} (\bar{K} + \bar{A} - \bar{\Pi}) dt$ принимает экстремальное значение.

II. *Теорема энергии.* Вернемся к основному уравнению (49.03) и сравним действительные перемещения точек тела в бесконечно близкие моменты времени t и $t + dt$. Тогда вместо вариаций $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z, \delta \bar{\Pi}$ мы имеем приращения

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} dt, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t} dt, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} dt, \quad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} dt$$

Точно так же

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \rho \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \dots \right) dV = \\ = \frac{d}{dt} \int \int \int_V \rho \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \dots \right] dV = \frac{d}{dt} \bar{K} \end{aligned}$$

Вспоминая выражение работы внешних сил δA (§ 34), получаем теорему энергии

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\bar{\Pi} + \bar{K}) = \int \int \int_V \left(X \frac{\partial u_x}{\partial t} + Y \frac{\partial u_y}{\partial t} + Z \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) \rho dV + \\ + \int \int_S \left(X_n \frac{\partial u_x}{\partial t} + Y_n \frac{\partial u_y}{\partial t} + Z_n \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) dS, \quad (49.05) \end{aligned}$$

т. е. приращение потенциала работы деформации и кинетической энергии за единицу времени равно мощности внешних сил.

§ 50 Эффект ударной нагрузки

1. Рассмотрим задачу о внезапном приложении нагрузки к стержню, масса которого незначительна в сравнении с массой груза. Классический результат — деформация в динамическом случае в два раза больше деформации при статической (медленной) нагрузке — справедлив только для

стержня, подчиняющегося закону Гука. Пусть внезапно приложенный груз веса P вызывает растяжение стержня длины l и площади поперечного сечения Ω . Обозначим через ε_d наибольшее относительное удлинение стержня при таком способе нагружения, через ε_s — статическое относительное удлинение стержня (при постепенном возрастании нагрузки от нуля до P). Пусть закон деформации имеет вид

$$\sigma_x = B^* \varepsilon_x^{\beta-1}, \quad (50.01)$$

где B^* и β — константы ($B^* = E$, $\beta = 2$ — случай закона Гука).

Работа груза при его опускании, равная $P\varepsilon_d l$, переходит, с достаточным в наших условиях приближением, в работу деформации

$$\Omega l \int_0^{\varepsilon_d} \sigma_x d\varepsilon_x = \Omega l \frac{B^*}{\beta} \varepsilon_d^\beta$$

Следовательно,

$$\varepsilon_d^{\beta-1} = \frac{P\beta}{B^*\Omega} \quad (50.02)$$

При статической же нагрузке согласно (50.01)

$$\varepsilon_s^{\beta-1} = \frac{P}{B^*\Omega} \quad (50.03)$$

Сопоставляя последние формулы, находим

$$\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_s} = \beta^{\frac{1}{\beta-1}} \quad (50.04)$$

Кривая „ $\sigma_x \varepsilon_x$ “ обращена выпуклостью вверх (§ 33); тогда $1 < \beta \leq 2$. Легко видеть, что отношение динамического удлинения к статическому $\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_s} \geq 2$ и монотонно возрастает, стремясь к неперову числу

$$e = 2,7182\dots$$

при $\beta \rightarrow 1$.

ГЛАВА V

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ СЕН-ВЕНАНА-МИЗЕСА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

§ 51. Основные положения

I. Многие исследователи (Мизес [67], Гейрингер [54] и др.) считают необходимым исходить из зависимостей между напряжениями и скоростями деформации для должного описания пластической деформации. Этот выбор определяется, прежде всего, стремлением математически отразить необратимость рассматриваемого процесса. Следует, однако, помнить, что выбор тех или иных механических переменных диктуется опытными фактами, необратимость же процесса пластической деформации может быть описана различными способами. Как мы знаем, скорость деформации не сказывается существенно на механических свойствах стали и вообще тугоплавких металлов, если испытания происходят в обычные промежутки времени при комнатной температуре; скорость деформации является основным фактором при опытах над тягучими веществами, длительных испытаниях стали при высоких температурах и, наконец, при больших скоростях деформации.

II. Ограничившись этим замечанием, перейдем к рассмотрению основных положений теории пластичности Сен-Венана-Мизеса.

1. Среда несжимаема, т. е. (обозначения см. § 4)

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 0 \quad (51.01)$$

Это допущение оправдывается для развитых процессов пластической деформации, когда, как правило, можно пренебрегать объемными деформациями.

2. Девиаторы напряжения и скоростей деформации коаксиальны и подобны, т. е.

$$D_{\sigma} = \varphi_* D_{\xi}, \quad (51.02)$$

где φ_* означает некоторую функцию инвариантов тензоров T_{σ} и D_{ξ} . Последнее уравнение можно представить в согласующих по главным осям

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma &= \varphi_* \xi_1 \\ \sigma_2 - \sigma &= \varphi_* \xi_2 \\ \sigma_3 - \sigma &= \varphi_* \xi_3 \end{aligned} \quad (51.03)$$

Отсюда легко получаем

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\xi_2 - \xi_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\xi_3 - \xi_1}, \quad (51.04)$$

т. е. главные касательные напряжения пропорциональны главным скоростям сдвига.

Положив $\varphi_* = \text{const} = 2\mu$, где μ — коэффициент трения, получим ньютонов закон вязкости. В общем случае φ_* определяется из дополнительного уравнения между тензорными инвариантами, доставляемого либо экспериментами, либо какими-нибудь специальными теоретическими соображениями. Из (51.03) вытекает соотношение

$$T = \frac{1}{2} \varphi_* H, \quad (51.05)$$

где H — интенсивность скоростей деформации сдвига (§ 4). Если принять, что интенсивность касательных напряжений есть некоторая функция интенсивности скоростей деформации сдвига

$$T = 2g_*(H^2)H, \quad (51.06)$$

то в этом случае

$$\varphi_* = 4g_*(H^2)$$

Уравнение (51.06) является обобщением закона вязкости Ньютона, поэтому среду, описываемую уравнениями (51.03) и (51.06), можно называть нелинейно-вязкой средой.

§ 52. Теория пластичности Мизеса

1. Помимо первой и второй гипотез (уравнения [51.01] и [51.03]), которыми в сущности пользовались уже давно (§ 54), Мизес [65] характеризует пластическую деформацию условием текучести

$$T^2 = \text{const} = \tau_s^2 \quad (52.01)$$

Тогда

$$\varphi^* = \frac{2\tau_s}{H}, \quad (52.02)$$

т. е. φ^* обратно пропорционально интенсивности скоростей деформации сдвига. Напишем уравнения (51.02) и (52.02) в составляющих:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \dot{\sigma} &= \frac{2\tau_s}{H} \xi_x \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{\tau_s}{H} \eta_{xy} \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (52.03)$$

Уравнения Мизеса в этой форме тождественно удовлетворяют условию текучести (52.01). Из (52.03) легко находим обратные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi_x}{H} &= \frac{\sigma_x - \sigma}{2\tau_s} \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \frac{\eta_{xy}}{H} &= \frac{\tau_{xy}}{\tau_s} \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (52.04)$$

Мизес считал, что в состоянии текучести твердое тело ведет себя в основном как вязкая, близкая к несжимаемой, жидкость. Однако, позднее Гогенемзер и Прагер [61] заметили, что свойства континуума, определяемого уравнениями Мизеса, принципиально отличны от свойств вязкой жидкости. Действительно, в случае малой деформации

$$\xi_x = \frac{d\varepsilon_x}{dt}, \dots, \quad \eta_{zx} = \frac{d\gamma_{zx}}{dt}$$

Благодаря зависимости (52.02) основное тензорное соотношение (51.02) приводится к виду

$$D_{ij} = \frac{2\tau_s}{d' t} dD_{ij} \quad (52.05)$$

где обозначено

$$dD_e = \sqrt{\frac{1}{2} d\varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} d\varepsilon_y^2 + \frac{1}{2} d\varepsilon_z^2 + d\varepsilon_{xy} d\varepsilon_{yz} + d\varepsilon_{yz} d\varepsilon_{zx} + d\varepsilon_{zx} d\varepsilon_{xy}},$$

$$d'\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2 + 3[(d\gamma_{xy})^2 + (d\gamma_{yz})^2 + (d\gamma_{zx})^2]}$$

Полученная формулировка теории Мизеса ясно показывает независимость последней от времени. Интенсивность формоизменения остаётся неопределённой при задании напряжений.

II. Остановимся несколько подробнее на случае „свободной деформации“; так иногда называют деформацию, протекающую при неизменных напряжениях. Благодаря последнему условию направления девиатора dD_e не изменяются, составляющие его растут пропорционально некоторому параметру, и вместо (52.05) можно писать

$$D_e = \frac{2\tau_s}{\Gamma} D_e \quad (52.06)$$

Этот результат сохраняется и в том случае, когда составляющие тензора напряжения меняются пропорционально некоторому параметру. Уравнение (52.06), формально совпадающее с уравнением Генки (§ 18), подтверждается многими опытами. Из (52.06) вытекает, что при неизменном девиаторе напряжений девиатор деформации сохраняет подобие и направления, а в остальном имеет любое значение.

Вернемся к уравнению (52.05); согласно ему при непрерывном изменении направлений девиатора dD_e равное изменение направлений получает также и девиатор напряжений D_e ; если, скажем, сначала пластически закрутить тонкостенную трубу, а затем, не отпуская трубы, растянуть её, то напряжения кручения в момент перемены деформаций согласно (52.05) исчезают, и сразу появляется только растягивающее напряжение.

Такой опыт ¹, проделанный Гогенемзером [59], показал, что напряжение кручения медленно снижается, а растягивающее напряжение постепенно растёт в соответствии с условием текучести (52.01). Можно считать поэтому, что теория Мизеса не передаёт правильно действительного поведения металлов в состоянии текучести, если во время деформации девиатор напряжений меняет направления.

§ 53. Случай плоской деформации

1. Плоская деформация характеризуется условиями

$$v_x = v_x(x, y, t); \quad v_y = v_y(x, y, t); \quad v_z = 0 \quad (53.01)$$

Следовательно,

$$\xi_z = \eta_{xz} = \eta_{yz} = 0; \quad \xi_x + \xi_y = 0 \quad (53.02)$$

Тогда из уравнений Мизеса (52.03) вытекает

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_z = \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (53.03)$$

$$\sigma_x - \sigma = \frac{2\tau_s}{H} \xi_x, \quad \sigma_y - \sigma = \frac{2\tau_s}{H} \xi_y, \quad \tau_{xy} = \frac{\tau_s}{H} \eta_{xy} \quad (53.04)$$

Для интенсивностей напряжений и деформаций сдвига получаем выражения

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad H = \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + \eta_{xy}^2} \quad (53.05)$$

Напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} должны удовлетворять уравнениям равновесия (считаем движение медленным)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (53.06)$$

и условию текучести

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\tau_s^2 \quad (53.07)$$

¹ Опыт Гогенемзера подробно излагается ниже (§ 58),

Если на контуре области заданы усилия, то напряжения находятся независимо от перемещений; как мы знаем, такие задачи теории пластичности называются статически определенными.

Заметим, что теория Генки в случае несжимаемой среды и плоской деформации приводит (§ 29) к той же системе уравнений (53.06), (53.07). Подобное совпадение, впрочем, относится и к другим статически определенным задачам.

§ 54. Теория пластичности Сен-Венана

1. Основы математической теории пластичности впервые были сформулированы Сен-Венаном [81] в 1870 г. для случая плоской деформации. Используя экспериментальные результаты Треска, Сен-Венан взял условие текучести в известной нам форме

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\tau_s^2, \quad (54.01)$$

означающей постоянство максимального касательного напряжения (считается, что $\sigma_z \equiv \sigma_3$ лежит между σ_1 и σ_2), и предполагал среду несжимаемой

$$\xi_x + \xi_y = 0 \quad (54.02)$$

Далее Сен-Венан принял, что направление максимального касательного напряжения (§ 29) совпадает в каждой точке с направлением максимальной скорости сдвига, т. е.

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} = \frac{\xi_y - \xi_x}{\eta_{xy}} \quad (54.03)$$

Напомним, что

$$\xi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \xi_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad \eta_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (54.04)$$

Присоединив сюда уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (54.05)$$

Сен-Венан пришел к системе пяти уравнений для пяти неизвестных функций $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}; v_x, v_y$. Как легко видеть, эта система уравнений совпадает с системой уравнений Мизеса в случае плоской деформации, поэтому нередко теорию Мизеса называют теорией Сен-Венана-Мизеса, рассматривая ее как непосредственное обобщение теории Сен-Венана на трехмерные задачи.

II. Заметим, что теорию Сен-Венана вскоре после ее появления пытался распространить на трехмерные задачи М. Леви, исходивший, как и Сен-Венан, из условия постоянства максимального касательного напряжения. М. Леви пришел к очень громоздким уравнениям, не нашедшим применения и представляющим ныне лишь исторический интерес. Подробнее о теории М. Леви см. [25, 26].

§ 55. Уравнения нелинейно-вязкой среды

I. Остановимся несколько подробнее на затронутом выше (§ 51) общем случае нелинейно-вязкой среды, характеризуемой уравнением

$$T = 2g_*(H^2) H \quad (55.01)$$

При этом условии тензорное уравнение (51.02) приводит к зависимостям

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma = 4g_*(H^2) \xi_x \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \tau_{xy} = 2g_*(H^2) \eta_{xy} \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (55.02)$$

Пусть, разрешив (55.01) относительно H , мы нашли

$$H = 2f_*(T^2) T \quad (55.03)$$

Тогда зависимости, обратные (55.02), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi_x = f_*(T^2) (\sigma_x - \sigma) \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \eta_{xy} = 2f_*(T^2) \tau_{xy} \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (55.04)$$

Внося (55.02) в уравнения движения и присоединяя к ним условие несжимаемости (51.01), получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными функциями

$$v_x, v_y, v_z; \sigma,$$

§ 56. Вариационные уравнения в теории вязкой среды и среды Сен-Венана-Мизеса. Обобщение принципа Кастильяно на вязкие тела.

1. Минимальные свойства истинных скоростей. Рассмотрим функционал

$$\iiint_V (\sigma_x \delta \xi_x + \sigma_y \delta \xi_y + \dots + \tau_{zx} \delta \eta_{zx}) dV, \quad (56.01)$$

где V — некоторый объем среды, окруженный поверхностью S , $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$ — напряжения, соответствующие истинному движению, а $\delta \xi_x, \delta \xi_y, \dots, \delta \eta_{zx}$ — приращения составляющих скорости деформации, обусловленные вариациями скоростей $\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z$, удовлетворяющими условию несжимаемости

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta v_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y + \frac{\partial}{\partial z} \delta v_z = 0 \quad (56.02)$$

Воспользовавшись соотношениями (4.02), интегрируя по частям и применяя формулу Гаусса-Остроградского, найдем, что в силу уравнений движения (2.01) и граничных условий (1.02)

$$\begin{aligned} \iiint_V (\sigma_x \delta \xi_x + \sigma_y \delta \xi_y + \dots + \tau_{zx} \delta \eta_{zx}) dV &= \\ &= \iiint_V [(X - w_x) \delta v_x + (Y - w_y) \delta v_y + \\ &+ (Z - w_z) \delta v_z] \rho dV + \iint_S (X_n \delta v_x + \\ &+ Y_n \delta v_y + Z_n \delta v_z) dS \end{aligned} \quad (56.03)$$

Это уравнение справедливо для любой сплошной среды; оно является, по существу, следствием известного в механике принципа Журдена (см. [22]). Для вязкой среды компоненты напряжения и скорости деформации связаны зависимостями (55.02); пользуясь ими, находим, что вследствие несжимаемости среды

$$\sigma_x \delta \xi_x + \sigma_y \delta \xi_y + \dots + \tau_{zx} \delta \eta_{zx} = g_*(H^2) \delta H^2 \equiv \delta L \quad (56.04)$$

Величина L представляет собой удельную работу пластической деформации в единицу времени и, по аналогии с функцией рассеяния в теории вязкой жидкости, может быть названа *рассеянием*. Очевидно, что соотношения (55.02) могут быть представлены формулами

$$\sigma_x = \frac{\partial L}{\partial \xi_x}, \quad \tau_y = \frac{\partial L}{\partial \xi_y}, \quad \dots, \quad \tau_{zx} = \frac{\partial L}{\partial \eta_{zx}}, \quad (56.05)$$

аналогичными формулам Грина (18.22). Пренебрежем массовыми силами и рассмотрим медленное движение, когда можно отбросить также и силы инерции. Пусть, наконец, на поверхности S заданы скорости. Тогда на S $\delta v_x = \delta v_y = \delta v_z = 0$ и из (56.03) получаем

$$\delta \bar{L} \equiv \delta \int \int \int_V L dV = 0 \quad (56.06)$$

Нетрудно показать, подобно тому как это было сделано в § 34, что действительное поле скоростей соответствует минимуму рассеяния \bar{L} (так как $\frac{d\bar{L}}{dH} > 0$, то $\delta^2 \bar{L} > 0$). Этот результат обобщает известную теорему Гельмгольца о том, что медленное стационарное движение вязкой жидкости характеризуется минимумом потерь на трение при заданных скоростях на границе жидкого объема.

Для состояния текучести (теория Сен-Венана-Мизеса)

$$g^*(H^2) = \frac{\tau_s}{2H}; \quad \delta L = \tau_s \delta H, \quad (56.07)$$

и уравнение (56.06) принимает вид

$$\delta \int \int \int_V H dV = 0 \quad (56.08)$$

В недавно опубликованной работе [24] А. А. Марков исследовал вопрос об абсолютном минимуме функционала в (56.08) и однозначности напряженного состояния среды при задании скорости на границе S ; в работе рассмотрены также и другие краевые задачи. Заметим, что результаты А. А. Маркова легко переносятся на соответствующие задачи теории малых упруго-пластических деформаций (см. § 34).

II. *Обобщение принципа Кастильяно на вязкие тела.* Рассмотрим теперь минимальные свойства истинного распределения напряжений. Пусть действительное движение среды характеризуется скоростями v_x, v_y, v_z и напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$; ограничимся случаем, когда можно пренебречь инерционными и массовыми силами; следовательно, компоненты напряжения должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия внутри объема V и условиям (1.02) на поверхности S . Рассмотрим бесконечно близкое распределение напряжений $\sigma_x + \delta\sigma_x, \sigma_y + \delta\sigma_y, \dots, \tau_{zx} + \delta\tau_{zx}$, удовлетворяющее условиям равновесия, т. е. уравнениям (37.01) и (37.01'). Очевидно, что вариации напряжений и внешних сил удовлетворяют уравнениям равновесия (37.02) и (37.02'). Используя (4.02), интегрируя по частям и применяя формулу Гаусса-Остроградского, найдем, что вследствие (37.02), (37.02') для любой сплошной среды справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \iiint_V (\xi_x \delta\sigma_x + \xi_y \delta\sigma_y + \dots + \eta_{zx} \delta\tau_{zx}) dV = \\ = \iint_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS \end{aligned} \quad (56.09)$$

Для нелинейно вязкой среды (§ 55) выражение под знаком объемного интеграла есть точный дифференциал

$$\xi_x \delta\sigma_x + \xi_y \delta\sigma_y + \dots + \eta_{zx} \delta\tau_{zx} = f_*(T^2) \delta T^2. \quad (56.10)$$

Если, по аналогии с дополнительной работой R (§ 41), ввести *дополнительное рассеяние*

$$\Delta = \int_{T^2}^{\tau^2} f_*(\zeta) d\zeta, \quad (56.11)$$

то соотношения (55.04) можно представить формулами

$$\xi_x = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma_x}, \quad \xi_y = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma_y}, \quad \dots, \quad \eta_{zx} = \frac{\partial \Delta}{\partial \tau_{zx}}, \quad (56.12)$$

аналогичными обобщенным формулам Кастильяно (41.08). Обозначим дополнительное рассеяние во всем объеме V через $\bar{\Delta}$; тогда (56.09) принимает вид

$$\delta \bar{\Delta} = \int \int_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS \quad (56.13)$$

Поверхностный интеграл представляет собой мощность вариаций внешних сил. Пусть (см. аналогичное условие в § 37) на части поверхности S_2 заданы скорости, а на остальной части $S_1 = S - S_2$ — нагрузки; следовательно, на S_1

$$\delta X_n = \delta Y_n = \delta Z_n = 0 \quad (56.14)$$

Тогда можно показать (так как обычно $\frac{dH}{dT} > 0$, см. § 43), что истинное распределение напряжений соответствует минимуму дополнительного рассеяния. Уравнение (56.13) обобщает на вязкие тела принцип Кастильяно; оно имеет важные применения в случае *малой деформации* (например, в задачах ползучести, см. § 70); тогда за V следует принять объем, занимаемый телом в начальный момент.

В случае малой деформации из (56.13) можно извлечь ряд следствий, аналогичных тем, которые были установлены в гл. IV.

Приводим некоторые из них без доказательств.

1. Из всех систем напряжений, уравнивающих с заданными силами внутри тела и на его границе, осуществляется только та, которая сообщает минимум дополнительному рассеянию $\bar{\Delta}$.

2. Пусть к телу приложены сосредоточенные силы P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$); тогда частная производная дополнительного рассеяния по величине P_i равна *скорости перемещения* точки приложения силы P_i по направлению действия последней

$$\frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial P_i} = v_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (56.15)$$

Этот результат справедлив и в отношении обобщенных сил и скоростей.

3. Пусть напряженное состояние тела выражается в функции m „лишних неизвестных“ X_1, X_2, \dots, X_m ; для определения последних имеем систему уравнений

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial X_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial X_m} = 0. \quad (56.16)$$

§ 57. Теория пластичности Рейса

1. Мы уже говорили о расхождении теории Сен-Венана-Мизеса с экспериментами в случае несвободной деформации тугоплавких металлов. Можно предположить, что отклонения от теории вызываются пренебрежением упругими деформациями, которые могут оказаться существенными при малом деформировании жестких материалов. Примем, что всякая малая деформация состоит из упругой и пластической частей; пластическая часть определяется соотношениями Мизеса

$$D_{\xi'} = \frac{\lambda}{2G} D_{\sigma}, \quad (57.01)$$

где λ — некоторый скалярный множитель (смысл λ — см. ниже).

Упругая деформация подчиняется закону Гука

$$D_{\xi''} = \frac{1}{2G} \frac{d}{dt} D_{\sigma}. \quad (57.02)$$

Суммарная скорость деформации

$$D_{\xi} = D_{\xi'} + D_{\xi''}$$

связана с напряжением зависимостью

$$2GD_{\xi} = \lambda D_{\sigma} + \frac{d}{dt} D_{\sigma} \quad (57.03)$$

К этой совокупности уравнений присоединим уравнение упругого объемного сжатия

$$\varepsilon = 3k\sigma \quad (57.04)$$

и условие текучести Мизеса

$$T^2 = \tau_s^2 \quad (57.05)$$

Эта теория пластичности, учитывающая упругие деформации наряду с пластическими и обобщающая теорию Мизеса, предложена Рейсом [79] в 1930 г. Заметим, что в 1924 г. Л. Прандтль [77] сформулировал подобную же теорию для плоского случая, правда, при другом условии пластичности; поэтому среду, описываемую совокупностью уравнений (57.03), (57.04), (57.05), иногда называют средой Прандтля-Рейса.

II. Найдем значение λ . Если для краткости положить

$$\begin{aligned} s_x &= \sigma_y - \sigma_z; & s_y &= \sigma_z - \sigma_x; & s_z &= \sigma_x - \sigma_y \\ \chi_x &= 2G(\xi_y - \xi_z) \Big\{ \quad \theta_x = G\eta_{yz} \Big\} \\ & \quad \text{и т. п.} \quad \quad \quad \text{и т. п.} \end{aligned}$$

то соотношения (57.03) нетрудно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \chi_x &= \frac{ds_x}{dt} + \lambda s_x \\ & \quad \text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \theta_x &= \frac{d\tau_{yz}}{dt} + \lambda \tau_{yz} \\ & \quad \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (57.06)$$

Умножим эти уравнения соответственно на

$$s_x, s_y, s_z; \quad 6\tau_{yz}, 6\tau_{zx}, 6\tau_{xy}$$

и сложим

$$\begin{aligned} s_x \chi_x + s_y \chi_y + s_z \chi_z + 6(\theta_x \tau_{yz} + \theta_y \tau_{zx} + \theta_z \tau_{xy}) = \\ = \left(\lambda + \frac{d}{dt} \right) [s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \end{aligned}$$

Благодаря условию текучести Мизеса выражение внутри квадратных скобок равно константе $6\tau_s^2$; следовательно,

$$\lambda = \frac{1}{6\tau_s^2} [s_x \chi_x + s_y \chi_y + s_z \chi_z + 6(\theta_x \tau_{yz} + \theta_y \tau_{zx} + \theta_z \tau_{xy})] \quad (57.07)$$

Гогенемзер и Прагер [61] подчеркнули то обстоятельство, что соотношения Рейса в сущности не содержат времени. Действительно, в рассматриваемом случае малой деформации

$$\xi_x = \frac{d}{dt} \varepsilon_x; \dots; \eta_{zx} = \frac{d}{dt} \gamma_{zx}$$

Следовательно, предыдущая формула может быть переписана в виде

$$\lambda = \frac{G}{\tau_s^2} \frac{1}{dt} \frac{1}{3} [(\sigma_y - \sigma_z)(de_y - de_z) + \dots + \\ + 3\tau_{yz}d\gamma_{yz} + \dots] \equiv \frac{G}{\tau_s^2} \frac{B^*}{dt}, \quad (57.08)$$

и соотношения Рейса (57.03) приобретают форму, не содержащую времени

$$2GdD_* = \frac{GB^*}{\tau_s^2} D_* + dD_* \quad (57.09)$$

В своей работе Рейс рассмотрел случай постоянных скоростей деформации, а также применил общие соотношения (57.03) к двум частным примерам, один из которых разбирается ниже.

III. *Растяжение закрученной тонкостенной трубы.* Закрутим круглую тонкостенную трубу до достижения предела текучести на внутренней ее поверхности; отношение толщины стенки трубы к диаметру мало, поэтому можно считать, с достаточным приближением, что напряжения в сечениях стенки трубы распределяются равномерно. По той же причине отлично от нуля только напряжение ¹ $\tau_{\varphi z}$; к концу закручивания оно, очевидно, равно пределу текучести τ_s . Прекратив закручивание, но не освобождая трубу от крутящего момента, подвергаем ее растяжению. Во время растяжения должно выполняться условие текучести Мизеса

$$\frac{1}{3} \sigma_z^2 + \tau_{\varphi z}^2 = \tau_s^2 \quad (57.10)$$

(от нуля отличны только σ_z и $\tau_{\varphi z}$). Воспользуемся соотношениями Рейса (57.09); во время растяжения $\gamma_{\varphi z} = \text{const}$ и

$$3B^* = \sigma_z (3de_z - de) \quad (57.11)$$

¹ В системе цилиндрических координат r, φ, z ; ось z совпадает с осью трубы.

Согласно (57.09)

$$0 = \frac{G}{3\tau_s^2} \sigma_z (3d\varepsilon_z - d\varepsilon) \tau_{\varphi z} + d\tau_{\varphi z} \quad (57.12)$$

$$2G \left(d\varepsilon_z - \frac{1}{3} d\varepsilon \right) = \frac{G}{3\tau_s^2} \sigma_z (3d\varepsilon_z - d\varepsilon) (\sigma_z - \sigma) + (d\sigma_z - d\sigma)$$

Так как

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_z; \quad d\varepsilon = k d\sigma_z; \quad \sqrt{3} \tau_s = \sigma_s,$$

то второе из уравнений (57.12) приводится к виду

$$d\varepsilon_z = \frac{k}{3} d\sigma_z + \frac{\sigma_s^2}{3G} \frac{d\sigma_z}{\sigma_s^2 - \sigma_z^2}, \quad (57.13)$$

откуда

$$\varepsilon_z = \frac{k}{3} \sigma_z + \frac{\sigma_s}{3G} \operatorname{arth} \frac{\sigma_z}{\sigma_s}, \quad (57.14)$$

так как

$$\varepsilon_z = 0 \text{ при } \sigma_z = 0$$

Введем безразмерные величины ζ , p , q посредством соотношений

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s} = p; \quad \frac{\tau_{\varphi z}}{\tau_s} = q; \quad \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}; \quad \zeta = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_s}$$

В этих переменных формулы (57.10) и (57.14) принимают вид

$$p^2 + q^2 = 1 \quad (57.15)$$

$$\zeta = \frac{2}{3} (1 + \nu) \left[\operatorname{arth} p + \frac{1 - 2\nu}{2(1 + \nu)} p \right] \quad (R)$$

§ 58. Опыты по растяжению закрученной трубы

I. Применение теории малых упруго-пластических деформаций к решению разобранный выше задачи приводит к другому результату. Напишем уравнения Генки

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r = \psi \left[\sigma_r - \frac{\psi - k}{\psi} \sigma \right] \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{r\varphi} = 2\psi \tau_{r\varphi} \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (58.01)$$

Отсюда, вследствие равенства нулю составляющих напряжения $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, получаем

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{3} (2\psi + k); \quad \gamma_{\varphi z} = 2\psi \tau_{\varphi z} \quad (58.02)$$

Так как закручивание доведено до предела текучести и затем не меняется, то $\gamma_{\varphi z} = \text{const} = \frac{\tau_s}{G}$ и при растягивании

$$\psi = \frac{\tau_s}{2G\tau_{\varphi z}} \quad (58.03)$$

С другой стороны, выполняется условие текучести Мизеса

$$\frac{1}{3} \sigma_z^2 + \tau_{\varphi z}^2 = \tau_s^2 \quad (58.04)$$

Отсюда и из (58.03) находим

$$\psi = \frac{\sigma_s}{2G} \frac{1}{\sqrt{\sigma_s^2 - \sigma_z^2}}$$

Внося значение ψ во вторую из формул (58.02), получаем

$$\epsilon_z = \frac{k}{3} \sigma_z + \frac{\sigma_s}{3G} \frac{\sigma_z}{\sqrt{\sigma_s^2 - \sigma_z^2}}$$

В безразмерных переменных ζ , p , q решение задачи по теории Генки имеет вид ¹

$$p^2 + q^2 = 1 \quad (58.05)$$

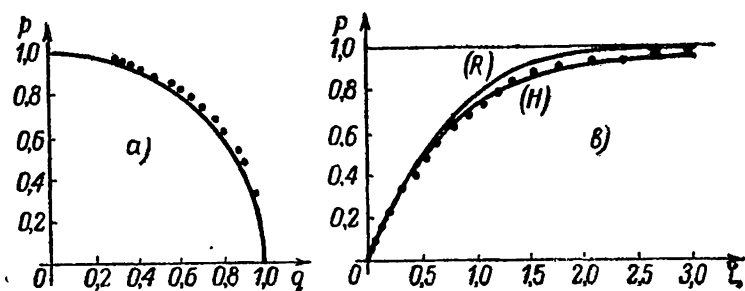
$$\zeta = \frac{2}{3} (1 + \nu) \left[\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{1 - 2\nu}{2(1 + \nu)} p \right] \quad (H)$$

В системе координат p , q условие текучести изображается окружностью (фиг. 32, а); в правой части этого же рисунка нанесены кривые зависимости p от ζ по теории Рейса (кривая R) и по теории Генки (кривая H).

II. Для выяснения того, которая из этих теорий правильна Гогенемзер [59] провел в 1931 г. эксперимент, соответство-

¹ Обращаем внимание читателя на различие методов решения этой элементарной задачи: теория Рейса привела к дифференциальному уравнению (57.13); по теории же Генки задача решается непосредственно с помощью условия текучести и соотношений Генки (58.01).

вавший рассмотренной выше задаче. Испытывались стальные трубы с наружным диаметром от 25 до 36,3 мм и толщиной стенки от 2,8 до 3,31 мм. Измеренные значения напряжений и деформаций нанесены на фиг. 32 точками.



Фиг. 32.

Из графиков видно, что опытные данные подтверждают теорию Генки; теория Рейса дает худшие результаты; условие текучести Мизеса выполняется хорошо.

§ 59. Теория Прагера

В этом параграфе мы рассмотрим теорию пластичности Прагера, близко примыкающую к теории Рейса.

I. Условимся говорить, что материал нагружается или разгружается, если соответственно

$$B^* \equiv \frac{1}{3}[(\sigma_x - \sigma_y)(d\epsilon_x - d\epsilon_y) + (\sigma_y - \sigma_z)(d\epsilon_y - d\epsilon_z) + \dots + 3\tau_{zx}d\gamma_{zx}] \geq 0, \quad (59.01)$$

и будем различать поведение материала при упругой и пластической деформации, а также при нагрузке и разгрузке. Тогда, опираясь на соотношения Рейса (57.09), полагаем

$$dD_q = \begin{cases} 2GdD_s, & \text{если } T^2 < \tau_s^2, \\ \text{или если } T^2 = \tau_s^2, & \text{но } B^* < 0 \\ 2GdD_s - \frac{GB^*}{\tau_s^2} D_s, & \text{если } T^2 = \tau_s^2 \text{ и } B^* \geq 0 \end{cases} \quad (59.02)$$

Решение конкретных задач с помощью этих зависимостей затруднительно; с другой стороны для многих материалов кривая деформации характеризуется отсутствием выраженной площадки текучести (например для меди, фиг. 5). Исходя из этих соображений, Прагер [75] предложил следующим образом изменить соотношения (59.02)

$$dD_{\sigma} = \begin{cases} 2GdD_{\epsilon}, & \text{если } B^* < 0 \\ 2GdD_{\epsilon} - \frac{GB^*}{\tau_s^2} D_{\sigma}, & \text{если } B^* > 0 \end{cases} \quad (59.03)$$

Кроме того, материал считается несжимаемым. Для лучшего приближения к экспериментальным данным Прагер рекомендует зависимости

$$dD_{\sigma} = \begin{cases} 2GdD_{\epsilon}, & \text{если } B^* < 0, \\ 2GdD_{\epsilon} - \frac{GB^*}{\tau_s^2} \left(\frac{T}{\tau_s}\right)^m D_{\sigma}, & \text{если } B^* > 0, \end{cases} \quad (59.04)$$

где m — константа, характерная для данного вещества.

II. Рассмотрим, исходя из соотношений Прагера (59.03), случай чистого сдвига, когда

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xy} = \tau$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad \gamma_{xy} = \gamma$$

Нетрудно видеть, что

$$B^* = \tau d\gamma \quad (59.05)$$

Следовательно,

$$d\tau = \begin{cases} Gd\gamma, & \text{если } \tau d\gamma < 0 \\ G\left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_s^2}\right) d\gamma, & \text{если } \tau d\gamma > 0 \end{cases} \quad (59.06)$$

Если деформация сдвига возрастает от нулевого значения, т. е. $\tau = 0$ при $\gamma = 0$, то, интегрируя второе из уравнений (59.06), находим

$$\tau = \tau_s \operatorname{th} \frac{G\gamma}{\tau_s} \quad (59.07)$$

Для малых величин сдвига приближенно выполняется закон Гука

$$\tau \approx G\gamma,$$

при большом сдвиге касательное напряжение приближается к τ_s

$$\tau \rightarrow \tau_s$$

При разгрузке выполняется закон Гука

$$\tau = G\gamma + \text{const},$$

причем произвольная постоянная определяется значениями напряжения и сдвига в момент начала разгрузки.

III. Рассмотрим этот же случай чистого сдвига, исходя из обобщенной теории Генки. По известным формулам находим

$$T = |\tau|, \quad \Gamma = |\gamma|$$

Согласно (20.01) имеем

$$d\tau = \frac{1}{2} (1 + \text{sign } d|\gamma|) d[h(\gamma^2) \frac{1}{2} \gamma] + Gd\gamma \quad (59.08)$$

При нагрузке $d|\gamma| > 0$ и, если $\tau = 0$ при $\gamma = 0$, то

$$\tau = h(\gamma^2) \gamma + G\gamma, \quad (59.09)$$

при разгрузке $d|\gamma| < 0$ и

$$\tau = G\gamma + \text{const}$$

Полагая

$$h(\gamma^2) = -G + \frac{\tau_s}{\gamma} \text{th } \frac{G\gamma}{\tau_s},$$

приходим к уравнению Прагера (59.07). Если взять

$$h(\Gamma^2) = -G + \frac{\tau_s}{\Gamma} \text{th } \frac{G\Gamma}{\tau_s}, \quad (59.10)$$

то обобщенные уравнения Генки будут описывать среду, близкую по своим свойствам к среде Прагера (59.03). Следует отметить, что уравнения Генки представляют собой *конечные зависимости* на всяком участке монотонной нагрузки (разгрузки), в то время как уравнения Рейса-Прагера суть дифференциальные соотношения, повышающие порядок уравнений¹, что сильно затрудняет решение даже

¹ См. примечание в § 58.

сравнительно простых задач. В пределах малых деформаций и в условиях, когда возможно пренебречь влиянием времени, теория Генки имеет, как мы знаем, простое термодинамическое обоснование. Поэтому в указанных условиях можно говорить об определенных теоретических и практических преимуществах обобщенной теории Генки перед теорией Сен-Венана-Мизеса и конструктивно к ней близкой теорией Рейса-Прагера.

§ 60. Теория пластичности Мизеса для анизотропной среды

Остановимся кратко на основных положениях теории пластичности анизотропного тела, предложенной Мизесом [66] в 1928 г.

1. Мизес считает среду несжимаемой. Это ограничение надо рассматривать как условие малости упругих изменений объема в сравнении с прочими деформациями. В качестве условия текучести Мизес принимает условие постоянства квадратичной функции напряжений (инвариантной относительно замены данной координатной системы кристаллографически равнозначной системой и относительно наложения равного всестороннего давления), содержащей в общем случае 15 независимых констант

$$\begin{aligned}
 F = & -\frac{1}{2} [k_{12} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + k_{23} (\sigma_y - \sigma_z)^2 + k_{31} (\sigma_z - \sigma_x)^2] - \\
 & - \tau_{yz} [k_{24} (\sigma_x - \sigma_y) + k_{34} (\sigma_x - \sigma_z)] - \\
 & - \tau_{xz} [k_{35} (\sigma_y - \sigma_z) + k_{15} (\sigma_y - \sigma_x)] - \tau_{xy} [k_{16} (\sigma_z - \sigma_x) + \\
 & + k_{26} (\sigma_z - \sigma_y)] + k_{45} \tau_{xz} \tau_{yz} + k_{56} \tau_{xz} \tau_{xy} + k_{64} \tau_{xy} \tau_{yz} + \\
 & + \frac{1}{2} (k_{44} \tau_{yz}^2 + k_{55} \tau_{xz}^2 + k_{66} \tau_{xy}^2) = \text{const} \quad (60.01)
 \end{aligned}$$

Это условие значительно упрощается для частных видов анизотропии; так, для кубической системы (медь, железо и т. д.) квадратичная форма F имеет вид

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \tau_1 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2),$$

где κ_1 — константа вещества; для гексагональной системы (цинк и т. д.)

$$F = (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \kappa_2 (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ + \kappa_3 (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) + (2 + 4\kappa_2) \tau_{xy}^2$$

Для изотропной среды из (60.01) получается хорошо известное условие текучести Мизеса

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \text{const}$$

Аналогично случаю изотропной среды, Мизес связывает напряжения со скоростями деформации следующими зависимостями¹

$$\xi_x = \psi_* \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \Bigg|_{\text{и т. п.}}, \quad \eta_{xy} = \psi_* \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \Bigg|_{\text{и т. п.}}, \quad (60.02)$$

где ψ_* — некоторый множитель пропорциональности. Этим соотношениям нетрудно дать энергетическое истолкование и заменить их некоторым принципом работы. Вследствие соотношений (60.02) приращение дополнительного рассеяния

$$\delta \Delta = \xi_x \delta \sigma_x + \xi_y \delta \sigma_y + \dots + \eta_{zx} \delta \tau_{zx} = \psi_* \delta F \quad (60.03)$$

Но в состоянии текучести $F = \text{const}$, следовательно,

$$\delta \Delta = 0, \quad (60.04)$$

т. е. скорости деформации в пластической среде Мизеса таковы, что бесконечно малые вариации напряжений, не

¹ Функцию F можно трактовать как „потенциал текучести“. Этим понятием широко пользуются Гейрингер [54], Прагер [74] и другие. Пусть условие пластичности дано уравнением $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ и пусть $\Xi = \Xi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — потенциал текучести, тогда

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{\partial \Xi}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial \Xi}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial \Xi}{\partial \sigma_3}$$

Потенциал текучести Ξ и функция F в общем случае отличны друг от друга и подбираются согласно экспериментальным данным в теории Мизеса $\Xi \equiv F$.

выводящие среду из фазы текучести, не производят никакого дополнительного рассеяния.

II. Интересным в теории Мизеса является условие текучести (60.01). Мизес указывает на удовлетворительное согласие этого условия с некоторыми опытными данными; весьма желательна его всесторонняя экспериментальная проверка. Скорости деформации введены в зависимости (60.02) по тем же соображениям, что и в теории изотропной среды (§ 51). Вероятно, во многих задачах правильнее пользоваться соотношениями, содержащими компоненты деформации и обобщающими теорию малых упруго-пластических деформаций на случай анизотропной среды.

III. Исходя из теории Мизеса, Е. В. Маховер¹ недавно рассмотрела пластическое кручение анизотропной призмы и задачу о плоской деформации. При некоторых соотношениях между коэффициентами анизотропии K_{ij} эти виды деформации осуществимы при сохранении классических представлений о характере деформации.

¹ Доклады Акад. Наук СССР, т. VIИИ, № 2, 1947.

ГЛАВА VI

СЛОЖНЫЕ СРЕДЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 61. Введение

I. Стремление наиболее полно описать механические свойства реальных тел приводит к рассмотрению сложных сред, одновременно обладающих свойствами упругости, вязкости и т. д. В предыдущей главе мы уже столкнулись с примером такой сложной среды при изучении теории Рейса, объединявшей свойства упругой среды Гука и пластической среды Сен-Венана-Мизеса.

Число подобных теоретических схем велико; большинство их пока не находит применения, частично вследствие их односторонности, частично вследствие математических трудностей, возникающих при попытках решения конкретных задач. В этой главе рассматриваются лишь некоторые из таких схем, наиболее интересные в теоретическом и прикладном отношениях. Эти схемы имеют в виду описание различных *неравновесных процессов деформации*, когда нужно учитывать развитие деформации во времени¹.

В заключение отметим, что подробный обзор предложенных теорий и различные обобщения содержатся в монографиях Прагера [74], Фромма [51] и в статьях Ишлинского (ссылки см. в [13, 35]), Прагера и Гогенемзера [61], Фромма [52] и Мизеса [67].

¹ В отличие от *равновесных* процессов деформации, для описания которых нам служила теория малых упруго-пластических деформаций (гл. III).

§ 62. Упруго-вязкая среда

1. Если тело находится в движении (например, вибрирует), то отклонения от закона Гука будут вызываться, в частности, внутренним трением (вязкостью). Девиатору деформации D_e соответствуют некоторые упругие силы $D_{e'}$, девиатору скоростей деформации — некоторые силы вязкости $D_{e''}$. Эти силы независимы друг от друга и в случае малых смещений аддитивны. Сумма девиаторов $D_{e'}$ и $D_{e''}$ образует девиатор напряжений

$$D_\sigma = D_{e'} + D_{e''} \quad (62.01)$$

Пусть

$$D_{e'} = \varphi D_e; \quad D_{e''} = \varphi_* D_{\dot{e}}, \quad (62.02)$$

где φ и φ_* — функции интенсивностей Γ и H , именно

$$\varphi = 4g(\Gamma^2); \quad \varphi_* = 4g_*(H^2) \quad (62.03)$$

Предполагая существование и объемной вязкости, можем теперь написать общие „механические уравнения состояния“ среды

$$D_\sigma = \varphi D_e + \varphi_* D_{\dot{e}} \quad (62.04)$$

$$\sigma = \chi(e) + \chi_*(\dot{e}) \quad (62.05)$$

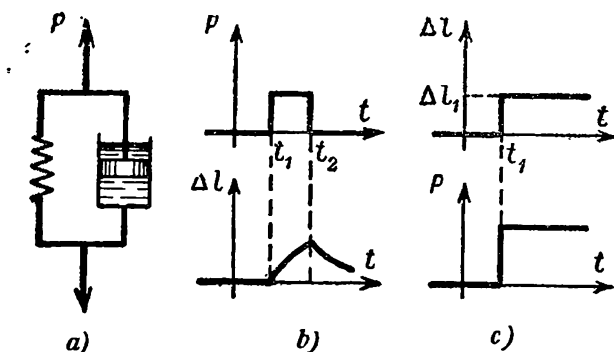
где $\chi(e)$ и $\chi_*(\dot{e})$ — некоторые функции, определяемые, например, экспериментально и удовлетворяющие условиям

$$\chi(0) = 0; \quad \chi_*(0) = 0 \quad (62.06)$$

Отметим важное свойство этой среды: в равновесии она ведет себя как упругая¹; смещения, однако, требуют усилий, растущих со скоростями деформации; от вязкой жидкости рассматриваемая среда отличается учетом упругих деформаций. Конструкция элемента среды иллюстрируется моделью (фиг. 33,а), состоящей из пружины, параллельно соединенной с поршнем с отверстиями, движущимся в цилиндре, напол-

¹ Точнее — как среда Генки (гл. III); соотношения (62.02) можно трактовать и как закон пластической деформации, протекающей в одном направлении; в этом смысле уравнения (62.04) охватывают и случай вязко-пластической среды.

ненном вязкой жидкостью. На фиг. 33, *b* показана зависимость удлинения Δl от времени в случае постоянного напряжения, действовавшего в интервале времени (t_1, t_2) , а на фиг. 33, *c*—



Фиг. 33.

зависимость напряжения от времени, если стержень получил в момент $t=t_1$ постоянное удлинение Δl_1 .

II. *Среда Фойхта*. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{const} = 2G; & \varphi_* &= \text{const} = 2\mu'; \\ \chi(\varepsilon) &= \frac{1}{3\kappa} \varepsilon; & \chi_*(\xi) &= \frac{1}{3\kappa_*} \xi, \end{aligned} \quad (62.07)$$

где μ' и $\frac{1}{3\kappa_*}$ — коэффициенты вязкости; в этом случае мы имеем упругую среду Гука, сопровождаемую внутренним трением по закону Ньютона. В отличие от классического представления о вязкой жидкости здесь предполагается существование также и объемной вязкости ($\chi_*(\xi) \neq 0$).

Вводя коэффициенты Ламе

$$\lambda = \frac{1}{3\kappa} - \frac{2}{3} G; \quad \mu = G \quad (62.08)$$

и коэффициенты вязкости

$$\lambda' = \frac{1}{3\kappa_*} - \frac{2}{3} \mu'; \quad \mu',$$

приходим к следующим зависимостям для упруго-вязкой изотропной среды:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda' \dot{\varepsilon} + 2\mu' \dot{\varepsilon}_{xx} \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy} + \mu' \dot{\gamma}_{xy} \\ \text{и т. п.} \end{aligned} \right\} \quad (62.09)$$

Эта среда, рассмотренная Фойхтом [87] в 1889 г., интересна в связи с проблемой затухания колебаний и изучалась Томпсоном [86], Герасимовым [5] и многими другими.

Фойхт и Томпсон подробно изучили общий случай анизотропной упруго-вязкой среды; Томпсон показал, что такая среда характеризуется 21 различным коэффициентом вязкости. Томпсон строит уравнения упруго-вязкой среды весьма общим образом, исходя из начал термодинамики и рассматривая виртуальное изменение конфигурации среды за промежуток времени δt .

Упруго-вязкая среда характеризуется тем, что в предельном случае бесконечно медленного изменения конфигурации среды это изменение обратимо и рассеяние механической энергии отсутствует; в случае же конечных скоростей изменения конфигурации — оно необратимо и сопровождается рассеянием механической энергии; последнее характеризуется диссипативной функцией, имеющей ту же самую форму, что и для вязкой жидкости и подобной диссипативной функции Релея в теории механических систем с силами сопротивления, прямо-пропорциональными скоростям.

Из условия положительности диссипативной функции¹ вытекают ограничения

$$\lambda' + \frac{2}{3}\mu' \geq 0; \quad \mu' \geq 0,$$

аналогичные хорошо известным неравенствам для постоянных Ламе

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0; \quad \mu \geq 0$$

¹ Следствие второго закона термодинамики.

Если ввести линейные операторы

$$\Delta = \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}; \quad M = \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}, \quad (62.10)$$

то соотношения (62.09) переписываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \Delta \varepsilon + 2M \varepsilon_x \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= M \gamma_{xy} \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad (62.11)$$

аналогичном форме зависимостей Ламе (18.25). Основываясь на этом соображении и исходя из дифференциальных уравнений Ламе, нетрудно получить дифференциальные уравнения движения упруго-вязкой среды в случае малой деформации

$$\begin{aligned} (\Delta + M) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + M \nabla^2 u_x &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ (\Delta + M) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + M \nabla^2 u_y &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ (\Delta + M) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + M \nabla^2 u_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (62.12)$$

где ρ — плотность, ∇^2 — оператор Лапласа. Эти уравнения линейны; решения ряда частных задач могут быть получены обычными методами. Томпсон доказал несколько общих теорем, относящихся к движению упруго-вязкой среды, в том числе теорему единственности решения уравнений (62.12) при заданных граничных условиях на поверхности тела и начальном распределении смещений и скоростей внутри тела; на этом мы не останавливаемся.

III. Внутреннее трение обычно привлекается для объяснения затухания колебаний и используется для решения задач этого рода.

В связи с этим следует заметить, что диссипация в упруго-вязкой среде растет вместе со скоростями деформации и затухание зависит от частоты колебаний. Опыты, однако, показывают, что для металлов в значительном интервале частот (от 0 до 40 герц) затухание не зависит от частоты и скорости деформации [40]; затухание, повидимому, определяется упругим гистерезисом, характеризующимся такими же свойствами (§ 8).

Недавно Д. Ю. Панов [29], исходя из наблюдаемой при экспериментах зависимости касательного напряжения τ от сдвига γ ¹

$$\tau = G\gamma + \begin{cases} A \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_m} \right)^2 \right] & \text{при } \frac{d\gamma}{dt} > 0, \\ -A \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_m} \right)^2 \right] & \text{при } \frac{d\gamma}{dt} < 0, \end{cases} \quad (62.13)$$

где A — константа, а γ_m — максимальный сдвиг, дал хорошо согласующееся с опытами решение задачи о затухании малых крутильных колебаний круглого стержня. Правда, эти опыты относились к колебаниям с заметными амплитудами. Возможно, что при колебаниях твердых тел с весьма малыми амплитудами (звуковые колебания) уравнения упруго-вязкой среды достаточно точно описывают процесс затухания колебаний. Экспериментальные данные по этому вопросу, насколько нам известно, отсутствуют.

§ 63. Крутильные колебания упруго-вязкого стержня

I. Рассмотрим, следуя Томпсону, задачу о свободных крутильных колебаниях упруго-вязкого круглого цилиндра, дающую представление о характерных особенностях колебаний, совершаемых упруго-вязкими телами.

Направим ось z по оси цилиндра и предположим, что так же, как и в упругом теле, поперечные сечения цилиндра поворачиваются целиком, не искривляясь, т. е.

$$u_x = -y\theta(z, t), \quad u_y = x\theta(z, t); \quad u_z = 0, \quad (63.01)$$

где $\theta(z, t)$ — угол поворота сечения. Тогда

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{yz} = x \frac{\partial \theta}{\partial z}; \quad \gamma_{xz} = -y \frac{\partial \theta}{\partial z}, \end{aligned} \quad (63.02)$$

¹ Любопытно отметить, что в 1896 г. Дюгем [46] построил теорию упругого гистерезиса как равновесного, но необратимого процесса и пришел к соотношению, содержащему, в частности, уравнение (62.13).

и из основных соотношений (62.11) находим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{yz} &= xM \frac{\partial \theta}{\partial z}; \quad \tau_{xz} = -yM \frac{\partial \theta}{\partial z}\end{aligned}\quad (63.03)$$

Боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений

$$\left. \begin{aligned}X_n &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) = 0 \\ &\text{и т. п.}\end{aligned} \right\} \quad (63.04)$$

Если вспомнить, что здесь $\cos(n, z) = 0$, а $\frac{\cos(n, x)}{\cos(n, y)} = \frac{x}{y}$, то легко видеть, что составляющие напряжения (63.03) удовлетворяют граничным условиям (63.04). Подставляя (63.02) в уравнение движения (62.12), получаем дифференциальное уравнение крутильных колебаний цилиндра

$$c^2(1 + \kappa \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (63.05)$$

где положено

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}; \quad \kappa = \frac{\mu'}{\mu}$$

Заметим, что подобное же дифференциальное уравнение описывает распространение плоских звуковых волн при наличии внутреннего трения.

Функция $\theta(z, t) = \exp(isz) \exp(pt)$ является частным решением уравнения (63.05), если p — корень уравнения (s — произвольное число)

$$p^2 + c^2 s^2 (1 + \kappa p) = 0 \quad (63.06)$$

Так как в это уравнение входит s^2 , то $\theta(z, t) = \exp(-isz) \exp(pt)$ также является решением (63.05). Следовательно, решением уравнения (63.05) будет и функция

$$\theta(z, t) = (\cos sz + C \sin sz) [A \exp(p't) + B \exp(p''t)],$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а p', p'' — корни квадратного уравнения (63.06).

Рассмотрим случай цилиндра, свободного от напряжений на обоих торцах $z = 0, z = l$.

Здесь $\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0$, $\cos(n, z) = \pm 1$, и граничные условия приводят к уравнениям

$$\left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0,$$

$$\left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = l,$$

из которых вытекают условия

$$C = 0; \quad \sin sl = 0.$$

Отсюда

$$s = \frac{m\pi}{4} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Сумма частных решений¹ имеет вид

$$\theta(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \exp(p'_m t) + B_m \exp(p''_m t) \right] \cos \frac{m\pi z}{l}, \quad (63.07)$$

где p'_m , p''_m — корни уравнения

$$p^2 + b_m p + c_m = 0, \quad (63.08)$$

причем

$$b_m = \frac{c^2 \kappa^2 \chi}{l^2} m^2; \quad c_m = \frac{c_m \pi^2}{l^2} m^2$$

Вводя понятие критической длины

$$l_0^2 = \frac{1}{4} c^2 \pi^2 \chi^2,$$

находим, что дискриминант уравнения (63.08) представляется в форме

$$\Delta_m = \frac{b_m^2}{4} \left(1 - \frac{l^2}{m^2 l_0^2} \right) \quad (63.09)$$

Если $l \leq l_0$, то уравнение (63.08) имеет действительные корни и колебания невозможны.

¹ Значению $s = 0$ соответствует вращение цилиндра как целого

Если $l > l_0$, то уравнение (63,08) имеет комплексные корни

$$\dot{p}_m \cdot p_m'' = -\frac{c^2 \pi^2 \kappa}{2l^2} m^2 \pm \frac{c^2 \pi^2 \kappa}{2l^2} m^2 i \sqrt{\frac{l^2}{m^2 l_0^2} - 1} \quad (63.10)$$

для конечного числа индексов $m < \frac{l}{l_0}$; в этом случае свободные крутильные колебания складываются из аperiодических движений и конечного числа затухающих гармонических колебаний. При этом отдельные гармоники затухают неравномерно, именно — чем выше гармоника, тем быстрее она затухает. Таким образом, можно считать, что через некоторое время стержень будет колебаться в основном тоне (или совершать основное аperiодическое движение, если $l < l_0$). Это замечательное свойство характерно для процесса затухания колебаний упруго-вязкого тела; напомним, что внешнее сопротивление, пропорциональное скорости $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ (в упруго-вязком стержне внутреннее сопротивление пропорционально $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$), вызывает равномерное затухание всей последовательности гармоник, всегда бесконечной в этом случае.

Выше было отмечено, что уравнение, аналогичное уравнению (63,05), встречается в акустике; там явление очищения основного тона подтверждается хорошо известными фактами смягчения звуков на расстоянии и сильного поглощения свиста.

Вернемся к решению (63,07) и удовлетворим начальным условиям; при $t = 0$ и $(0 < z < l)$

$$\theta(z, 0) = \theta_0(z); \quad \frac{\partial \theta(z, 0)}{\partial t} = \dot{\theta}_0(z), \quad (63.11)$$

где $\theta_0(z)$ и $\dot{\theta}_0(z)$ — заданные функции; разлагая их в ряды Фурье

$$\theta_0(z) = \sum_1^{\infty} \alpha_m \cos \frac{m\pi z}{l}; \quad \dot{\theta}_0(z) = \sum_1^{\infty} \beta_m \cos \frac{m\pi z}{l}$$

и подставляя вместе с решением (63,07) в начальные условия,

получаем систему уравнений для определения постоянных A_m, B_m

$$A_m + B_m = \alpha_m$$

$$p'_m A_m + p''_m B_m = \beta_m,$$

откуда

$$A_m = \frac{\alpha_m p''_m - \beta_m}{p''_m - p'_m}; \quad B_m = \frac{-\alpha_m p'_m + \beta_m}{p''_m - p'_m}$$

Пусть $l \gg l_0$; через некоторое время, в течение которого старшие члены разложения практически исчезнут, движение можно представить первой парой слагаемых, отвечающих индексу 1. В этом случае

$$p'_1, p''_1 \approx -\frac{c^2 \pi^2 \kappa}{2l^3} \pm \frac{c\pi}{l} i$$

и кручение при $z=0$

$$\theta(0, t) = \left[\alpha_1 \cos \frac{c\pi}{l} t + \left(\frac{\beta_1 l}{c\pi} + \frac{c\pi \kappa}{2l} \alpha_1 \right) \sin \frac{c\pi}{l} t \right] \exp \left(-\frac{c^2 \pi^2 \kappa}{2l^3} t \right)$$

Отсюда вытекает, что в первом приближении вязкость не влияет на период колебаний $T_* = \frac{2l}{c}$, а логарифмический декремент затухания равен

$$\frac{c^2 \pi^2 \kappa}{2l^3} = \frac{\pi^2 \kappa}{2T_*^3}, \quad (63.12)$$

т. е. обратно пропорционален квадрату периода колебаний.

§ 64. Релаксирующая среда

I. В § 62 мы пришли к общим уравнениям упруго-вязкого тела путем суперпозиции усилий, соответствовавших простым средам — упругой и вязкой. Будем теперь складывать не усилия, а скорости деформации, отвечающие одному и тому же напряжению. Моделью такой сложной среды является пружина, последовательно соединенная с поршнем, движущимся в цилиндре с вязкой жидкостью (фиг. 34, а). Для простоты, полагаем, что „упругий“ элемент среды

следует закону Гука, т. е.

$$D_{\epsilon'} = \frac{1}{2\mu'} D_{\sigma}, \quad (64.01)$$

а „вязкий“ — закону Ньютона

$$D_{\epsilon''} = \frac{1}{2\mu''} D_{\sigma}, \quad (64.02)$$

где μ' — коэффициент вязкости. В отношении объемных деформаций примем, что ¹

$$\epsilon = 3k\sigma \quad (64.03)$$

Считая деформации малыми и дифференцируя уравнение (64.01) по времени, получаем

$$D_{\epsilon'} = \frac{1}{2\mu'} \frac{d}{dt} D_{\sigma} \quad (64.04)$$

По определению скорость деформации в каждой точке среды состоит из упругой составляющей и составляющей, вызванной вязкостью. Вводя девиатор скоростей деформации

$$D_{\xi} = D_{\epsilon'} + D_{\epsilon''},$$

получаем основное соотношение

$$D_{\xi} = \frac{1}{2\mu'} D_{\sigma} + \frac{1}{2\mu''} \frac{d}{dt} D_{\sigma}. \quad (64.05)$$

II. Простейший случай такой среды был изучен в 1867 г. Максвеллом [64], рассмотревшим задачу о растяжении стержня. В этом случае из (64.03) и (64.05) находим

$$\xi = 3k \frac{d\sigma}{dt},$$

$$\xi_{\sigma} - \frac{1}{3} \xi = \frac{1}{2\mu'} (\sigma_{\sigma} - \sigma) + \frac{1}{2\mu''} \frac{d}{dt} (\sigma_{\sigma} - \sigma),$$

причем $\sigma = \frac{\sigma_{\sigma}}{3}$; исключая из этих уравнений ξ и σ и вводя

¹ Здесь объемной вязкостью, повидимому, можно пренебречь; точных данных относительно объемной релаксации и объемного последствия нет.

обозначение $t_0 = \frac{E}{3\mu'}$, получаем уравнение Максвелла

$$E \frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{\sigma_x}{t_0} + \frac{d\sigma_x}{dt} \quad (64.06)$$

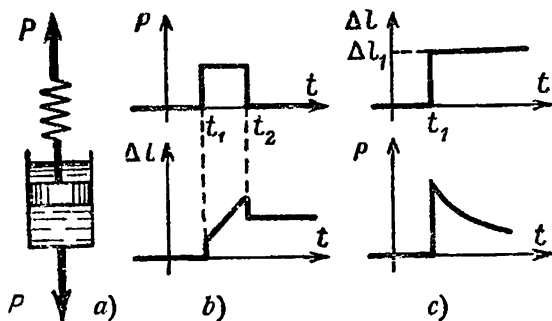
Постоянная t_0 , имеющая размерность времени, обычно называется временем релаксации. Решая уравнение Максвелла относительно напряжения, находим

$$\sigma_x = \left[C - E \int \frac{d\varepsilon_x}{dt} \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) dt \right] \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right), \quad (64.07)$$

где C — произвольная постоянная. Пусть $\varepsilon_x = \text{const} = \varepsilon_x^0$; тогда из (64.07) вытекает, что

$$\sigma_x = \sigma_x^0 \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right), \quad (64.08)$$

где через σ_x^0 обозначено начальное напряжение при $t=0$. Таким образом, напряжение спадает со временем по экспоненциальному закону и стремится к нулю. Уравнение Максвел-



Фиг. 34.

ла описывает с качественной стороны важное свойство реальных тел, заключающееся в ослаблении со временем напряженного состояния при неизменной деформации (так называемая релаксация напряжений). На фиг. 34 схематически изображены свойства среды Максвелла; в центре рисунка показана зависимость удлинения Δl от времени в случае постоянного напряжения, действовавшего в интервале времени

(t_1, t_2); в правой части рисунка иллюстрирован случай релаксации, начавшейся в момент $t=t_1$. Если время релаксации t_0 очень велико, то уравнение Максвелла переходит в закон Гука; если действует постоянное напряжение, то среда Максвелла ведет себя как вязкая жидкость.

Уравнение Максвелла часто привлекается для качественного описания релаксационных явлений; количественные результаты плохо согласуются с наблюдениями.

Уравнение (64.05) можно формально получить из уравнений Рейса, если отбросить условие текучести, а λ полагать постоянным.

III. Гогенемзер и Прагер [61] предложили более общее соотношение

$$D_e + a \frac{d}{dt} D_e = b D_e + c \frac{d}{dt} D_e, \quad (64.09)$$

(a, b, c — константы), охватывающее как среду Максвелла, так и среду упруго-вязкую. Исходя из подобной же зависимости (a', b', c' — константы)

$$\frac{d\sigma_x}{dt} + a' \sigma_x = c' \frac{d\epsilon_x}{dt} + c' b' \epsilon_x, \quad (64.10)$$

А. Ю. Ишлинский [13] исследовал задачу о продольных колебаниях стержня.

§ 65. Крутильные колебания релаксирующего стержня

Рассмотрим в качестве примера задачу о крутильных колебаниях круглого стержня длины l с концами, свободными от напряжений; материал стержня подчиняется уравнениям (64.05).

Направим ось z по оси стержня и примем

$$v_x = -y\theta_*(z, t); \quad v_y = x\theta_*(z, t); \quad v_z = 0, \quad (65.01)$$

где $\theta_*(z, t)$ — угловая скорость поворота сечения. Тогда

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0; \quad \gamma_{yz} = x \frac{\partial \theta_*}{\partial z};$$

$$\gamma_{xz} = -y \frac{\partial \theta_*}{\partial z} \quad (65.02)$$

Нулевые значения составляющих скорости деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z; \gamma_{xy}$ и составляющих напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_{xy}$

удовлетворяют первым четырем из соотношений (64.05); оставшиеся два уравнения таковы

$$\eta_{yz} = \frac{1}{\mu'} \tau_{yz} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t}, \quad \eta_{xz} = \frac{1}{\mu'} \tau_{xz} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} \quad (65.03)$$

Уравнения движения (2.01) принимают вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} \quad (65.04)$$

Исключая из уравнений (65.03) и (65.04) напряжения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{xz}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{1}{\mu'} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial \eta_{yz}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{1}{\mu'} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

Внося сюда значения v_x , v_y ; η_{xz} , η_{yz} , находим дифференциальное уравнение крутильных колебаний

$$\frac{\partial^2 \theta_*}{\partial z^2} - \rho \left(\frac{1}{\mu'} \frac{\partial \theta_*}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (65.05)$$

Возьмем частное решение этого уравнения в форме

$$\theta_*(z, t) = (\cos sz + C \sin sz) [A \exp(p't) + B \exp(p''t)],$$

где A , B , C , s — произвольные постоянные, а p' , p'' — корни квадратного уравнения

$$p^2 + \frac{\mu}{\mu'} p + \frac{s^2 \mu}{\rho} = 0, \quad (65.06)$$

соответственно равные

$$p', p'' = -\frac{\mu}{2\mu'} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4s^2 \mu'^2}{\rho \mu}} \right) \quad (65.07)$$

Рассмотрим случай цилиндра, свободного от напряжений на обоих торцах $z=0$, $z=l$; здесь $\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0$, $\cos(n, z) = \pm 1$, и граничные условия приводят к уравнениям:

$$\text{при } z=0 \quad \tau_{xz}=0; \quad \text{при } z=l \quad \tau_{xz}=0$$

Следовательно,

$$\text{при } z=0 \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \eta_{xz} = 0,$$

$$\text{при } z=l \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \eta_{xz} = 0$$

Отсюда находим

$$\text{при } z=0, \frac{\partial \theta_*}{\partial z}=0; \text{ при } z=l, \frac{\partial \theta_*}{\partial z}=0 \quad (65.08)$$

Согласно этим условиям получаем:

$$C=0; \quad \sin sl=0.$$

Откуда

$$s = \frac{m\pi}{l} \quad (m=1,2,3,\dots)$$

Сумма частных решений

$$\theta_*(z, t) = \sum_1^{\infty} [A_m \exp(p'_m t) + B_m \exp(p''_m t)] \cos \frac{m\pi z}{l}, \quad (65.09)$$

где p'_m, p''_m — корни уравнения

$$p^2 + \frac{\mu}{\mu'} p + \frac{m^2 \pi^2 \mu}{\rho l^2} = 0, \quad (65.10)$$

также будет решением дифференциального уравнения (65.05).
Корни уравнения (65.10) будут

$$p'_m, p''_m = -\frac{\mu}{2\mu'} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2 \pi^2 \mu'^2}{\rho l^2 \mu}} \right) \quad (65.11)$$

Если $\frac{4\pi^2 \mu'^2}{\rho l^2 \mu} > 1$, то для любого индекса m уравнение (65.10) имеет комплексные корни с отрицательной вещественной частью, неизменной по величине. Тогда решение складывается из бесконечной суммы затухающих во времени гармонических колебаний; логарифмический декремент затухания одинаков для всех гармоник и равен $\frac{\mu}{2\mu'}$. Более своеобразным является другой случай, когда $\frac{4\pi^2 \mu'^2}{\rho l^2 \mu} < 1$; здесь конечное число первых слагаемых представляет собою сумму аperiодических затухающих движений, вся же остальная часть ряд (65.09), начиная с того значения m , для которого впервые $\frac{4m^2 \pi^2 \mu'^2}{\rho l^2 \mu} > 1$, состоит из затухающих гармонических колебаний с прежним декрементом затухания.

Определение постоянных A_m, B_m по начальным данным производится обычным способом.

§ 66. Вязко-пластическая среда

I. Рассмотрим схему вязко-пластической среды; сложим компоненты напряжения $\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \dots, \tau'_{xy}$, отвечающие среде Мизеса, т. е. связанные со скоростями деформации зависимостью

$$D_{\sigma} = \varphi_* D_{\xi} \quad (66.01)$$

и удовлетворяющие условию текучести

$$T' = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy})^2 + (\sigma'_{yy} - \sigma'_{zz})^2 + (\sigma'_{zz} - \sigma'_{xx})^2 + 6(\tau'^2_{xy} + \tau'^2_{yz} + \tau'^2_{zx})} = \tau_s, \quad (66.02)$$

с компонентами напряжения $\sigma''_{xx}, \sigma''_{yy}, \dots, \tau''_{zx}$, вызванными вязкостью среды, когда

$$D_{\sigma''} = 2\mu' D_{\xi}, \quad (66.03)$$

где μ' — коэффициент вязкости. Следовательно, девиатор полного напряжения

$$D_{\sigma} = (\varphi_* + 2\mu') D_{\xi} \quad (66.04)$$

В силу условия текучести (H — интенсивность скоростей деформаций сдвига, § 4)

$$\varphi_* = \frac{2\tau_s}{H} \quad (66.05)$$

Поэтому

$$D_{\sigma} = 2 \left(\frac{\tau_s}{H} + \mu' \right) D_{\xi} \quad (66.06)$$

Среда считается несжимаемой, т. е.

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 0 \quad (66.07)$$

Эта схема отражает тот факт, что для многих веществ заметное течение появляется лишь при определенной нагрузке. Свойства элемента среды представляются моделью (фиг. 35), состоящей из площадки с кулоновым трением σ_s , параллельно соединенной с поршнем, движущимся в цилиндре, наполненном вязкой жидкостью. Подобная среда впервые, повидимому, была рассмотрена Бингемом в 1916 г., позднее Генки [57], Фроммом [52], А. А. Ильюшиным [9], Финци [48] и другими.

II. Зависимости (66.06) вместе с условием несжимаемости и тремя уравнениями движения образуют систему десяти



Фиг. 35.

уравнений с десятью неизвестными функциями $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xz}; v_x, v_y, v_z; \sigma$. Подстановкой соотношений (66.06) в уравнения движения сплошной среды задача сводится к системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными функциями $v_x, v_y, v_z; \sigma$, которую мы здесь не выписываем. Из (66.06) вытекает, что ¹

$$T = \tau_s + \mu' H \quad (66.08)$$

Течение вязко-пластической среды обычно предполагается медленным, так что возможно пренебречь инерционными силами в сравнении с большими силами трения. Рассматриваемая теория, в частности, имеет приложения в вопросах холодной и горячей обработки металлов. Приведенные выше уравнения предложены Генки в 1925 г.

III. Остановимся несколько подробнее на случае *плоской деформации*. Здесь

$$\begin{aligned} \eta_{xz} = \eta_{yz} = \xi_z = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \xi_x + \xi_y = 0; \quad \sigma_z = \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (66.09)$$

$$T = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \quad H = \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + \eta_{xy}^2} \quad (66.10)$$

Из (66.06) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma &= 2 \left(\frac{\tau_s}{H} + \mu' \right) \xi_x \\ \sigma_y - \sigma &= 2 \left(\frac{\tau_s}{H} + \mu' \right) \xi_y \\ \tau_{xy} &= \left(\frac{\tau_s}{H} + \mu' \right) \eta_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (66.11)$$

Отсюда вытекает, что напряжения максимального касательного напряжения и максимальной скорости сдвига совпадают

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} = \frac{\xi_y - \xi_x}{\eta_{xy}} \quad (66.12)$$

¹ Вязко-пластическая среда является частным случаем нелинейно-вязкой среды (§ 55), когда

$$g_*(H^2) = \frac{1}{2} \left(\mu' + \frac{\tau_s}{H} \right) \quad \text{или} \quad f_*(T^2) = \frac{1}{2\mu'} \left(1 - \frac{\tau_s}{T} \right)$$

К этим же уравнениям пришел А. А. Ильюшин, рассматривая плоскую задачу и исходя из представлений теории текучести Сен-Венана.

Введем, следуя А. А. Ильюшину, функцию напряжений $\Phi(x, y)$ и функцию тока $\Psi(x, y)$:

$$\sigma_x = 2\mu' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = 2\mu' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -2\mu' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$v_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Тогда уравнения равновесия и условие несжимаемости тождественно удовлетворяются. Остается удовлетворить уравнениям связи между компонентами напряжения и скоростями деформации (66.11). Введя операторы

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad M = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

получаем

$$T = \mu' \sqrt{L^2(\Phi) + 4M^2(\Phi)}; \quad H = \sqrt{L^2(\Psi) + 4M^2(\Psi)}$$

Воспользовавшись теперь первым из уравнений (66.11) и условием вязко-пластического течения (66.08) [вытекающим из (66.11)], приходим к уравнениям А. А. Ильюшина

$$L(\Phi)L(\Psi) + 4M(\Phi)M(\Psi) = 0$$

$$\sqrt{L^2(\Phi) + 4M^2(\Phi)} - \sqrt{L^2(\Psi) + 4M^2(\Psi)} = x, \quad (66.13)$$

где введено обозначение $x = \frac{\tau_s}{\mu'}$.

Интегрирование этой системы дифференциальных уравнений второго порядка нетрудно свести к интегрированию одного дифференциального уравнения четвертого порядка. Дифференцируя первое из уравнений равновесия по y , второе—по x и вычитая затем одно из другого, получаем

$$L(\tau_{xy}) + M(\sigma_y - \sigma_x) = 0$$

Но в силу зависимостей (66.11) имеем

$$\sigma_y - \sigma_x = 4\mu' M(\Psi) \left[1 + \frac{x}{\sqrt{L^2(\Psi) + 4M^2(\Psi)}} \right]$$

$$\tau_{xy} = \mu' L(\Psi) \left[1 + \frac{x}{\sqrt{L^2(\Psi) + 4M^2(\Psi)}} \right]$$

Внося эти значения в предыдущее уравнение, приходим к искомому дифференциальному уравнению:

$$L \left\{ L(\Psi) \left[1 + \frac{\gamma}{\sqrt{L^2(\Psi) + 4M^2(\Psi)}} \right] \right\} + \\ + 4M \left\{ M(\Psi) \left[1 + \frac{\gamma}{\sqrt{L^2(\Psi) + 4M^2(\Psi)}} \right] \right\} = 0$$

А. А. Ильюшин подробно исследовал полученные им уравнения и дал решения ряда задач вязко-пластического течения ([9,35])¹.

IV. Простейшие решения (вязко-пластическое течение в трубе, плоский и пространственный источники в вязко-пластической среде, вихрь в вязко-пластической среде, растяжение стержня и т. д.) указаны Г. Генки [58], А. А. Ильюшиным [9], Б. Фияци [48] и Перетти [72].

§ 67. Течение вязко-пластической массы в трубе

Рассмотрим, следуя Г. Генки [58], задачу о продавливании вязко-пластической массы через круглую трубу; труба предполагается бесконечно длинной, а движение медленным, установившимся и осесимметричным. Направим ось z цилиндрических координат r, φ, z по оси трубы. При стационарном движении и отсутствии вращения массы

$$v_r = 0; \quad v_\varphi = 0$$

Следовательно,

$$\xi_r = \xi_\varphi = \eta_{r\varphi} = \eta_{\varphi z} = 0; \quad \xi_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad \eta_{rz} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

Из условия несжимаемости вытекает, что $\xi_z = 0$, т. е. $v_z = v_z(r)$. Согласно зависимостям (66.06) получаем

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \sigma; \quad \tau_{\varphi r} = \tau_{\varphi z} = 0; \quad \tau_{rz} = -\tau_s + \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (67.01)$$

Легко видеть, что

$$T = |\tau_{rz}|; \quad H = \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| \quad (67.02)$$

¹ Ряд задач рассмотрен А. Ю. Ишлинским (ссылки см. в [35]).

Из уравнений равновесия (2.02) находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial r} &= 0, \quad \text{т. е. } \sigma = \sigma(z) \\ \frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{d\sigma}{dz} &= 0\end{aligned}\quad (67.03)$$

Отсюда следует, что градиент давления $\frac{d\sigma}{dz}$ есть постоянная величина; будем считать ее известной. Подставляя в последнее уравнение τ_{rz} , согласно (67.01), и интегрируя получаемое дифференциальное уравнение при условиях, что вязко-пластическая масса прилипает к стенке трубы

$$\text{при } r = b \quad v_z = 0$$

и что скорость v_z ограничена, получаем

$$v_z = \frac{1}{4\mu'} \frac{d\sigma}{dz} (b^2 - r^2) - \frac{\tau_s}{\mu'} (b - r) \quad (67.04)$$

Так как внутри деформируемой вязко-пластической массы $|\tau_{rz}| \geq \tau_s$, то полученное решение имеет смысл лишь при

$$r \geq r_0 = \frac{2\tau_s}{\frac{d\sigma}{dz}} \quad (67.05)$$

Остальная часть массы не деформируется и движется внутри трубы как твердое тело; величина скорости возрастает по параболическому закону от нулевого значения на стенке трубы ($r = b$) до максимального значения при $r = r_0$. При $r = r_0$, $\frac{dv_z}{dr} = 0$; на стенке трубы величина касательного напряжения равна

$$\frac{b}{2} \frac{d\sigma}{dz}$$

и затем снижается до значения τ_s на границе недеформируемого ядра. Так как $r_0 \leq b$, то все движение осуществимо лишь при условии

$$\frac{d\sigma}{dz} \geq \frac{2\tau_s}{b} \quad (67.06)$$

Вычисляя количество протекающей в единицу времени массы, получаем

$$Q = 2\pi \int_{r_0}^b r v_z dr + 2\pi v_{z, \max} \int_0^{r_0} r dr =$$

$$= \frac{\pi}{\mu'} \left[\frac{1}{8} \frac{d\sigma}{dz} (b^4 - r_0^4) - \frac{\tau_s}{3} (b^3 - r_0^3) \right]$$

В случае вязкой жидкости $\tau_s = 0$, следовательно, $r_0 = 0$, и последняя формула расхода дает известный результат Пуазейля

$$Q = \frac{\pi b^4}{8\mu'} \frac{d\sigma}{dz}$$

§ 68. Вариационные уравнения вязко-пластического течения

I. Вернемся к *общему уравнению* (56.06) и применим его к вязко-пластическому течению; так как здесь

$$g^*(H^2) = \frac{\mu'}{2} \left(1 + \frac{\kappa}{H} \right), \quad (68.01)$$

то легко находим

$$L = \int g(\zeta) d\zeta = \frac{\mu'}{2} (H^2 + 2\kappa H) \quad (68.02)$$

Таким образом получаем

$$\delta \iiint_V \frac{\mu'}{2} (H^2 + 2\kappa H) dV = 0 \quad (68.03)$$

при условии, что на границе S области V заданы скорости (см. § 56); при этом реализуется минимум рассеяния \bar{L} , так как $\frac{d\bar{L}}{dH} = \mu' > 0$.

Приведенный результат установлен иным путем А. А. Ильюшиным [9] для рассмотренного им случая плоской деформации.

II. Обратимся теперь к *обобщению принципа Кастильяно*. Для вязко-пластической среды дополнительное рассеяние имеет вид (см. § 56).

$$\Lambda = \int_{T^*} f_*(\zeta) d\zeta = \frac{T^2}{2\mu'} - \kappa T \quad (68.04)$$

Следовательно, из (56.13) получаем вариационное уравнение

$$\begin{aligned} \delta \int \int \int_V \left(\frac{T^2}{2\mu'} - \kappa T \right) dV = \\ = \int \int_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS \end{aligned} \quad (68.05)$$

В случае малой деформации справедливы утверждения, приведенные в конце § 56.

§ 69. Теория наследственных сред

1. Многие реальные материалы (особенно — органического происхождения) не укладываются в рассмотренные выше схемы; для поведения таких материалов часто характерна сложная зависимость деформаций в данный момент времени от всей предыдущей истории деформирования материала; это свойство иногда называют наследственностью материала.

В 1874 г. Л. Больцман [42] предложил теорию, описывающую наследственные деформации. Пусть ко времени s относится деформация $\varepsilon_x(s)$, длившаяся в течение промежутка времени Δs . Больцман полагает, что при последующей нагрузке в момент времени t напряжение меньше чем по закону Гука на величину, зависящую от первичной деформации. Влияние этой первичной деформации убывает с течением времени и пропорционально ее величине и длительности. Исходя из таких соображений, Больцман пишет

$$\sigma_x(t) = E\varepsilon_x(t) - f(t-s)\varepsilon_x(s)\Delta s, \quad (69.01)$$

где под $f(t-s)$ понимается некоторая характерная для данного материала монотонно убывающая функция („коэффициент наследственности“). Далее Больцман предполагает,

что влияние деформации, происходившей в момент времени s , не нарушается процессами в другие моменты времени, т. е., что справедлив принцип суперпозиции влияний деформаций, испытанных телом в разные моменты времени. Если таких деформаций было m , то

$$\sigma_x(t) = E \varepsilon_x(t) - \sum_{j=1}^m f(t-s_j) \varepsilon_x(s_j) \Delta s_j \quad (69.02)$$

Наконец, при деформации непрерывной в прошлом

$$\sigma_x(t) = E \varepsilon_x(t) - \int_{-\infty}^t f(t-s) \varepsilon_x(s) ds \quad (69.03)$$

Нижний предел указывает на необходимость учета влияний всех деформаций, когда-либо испытанных материалом.

В общем случае сложного напряженного состояния Больцман вводит зависимости:

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) = \lambda \varepsilon(t) + 2\mu \varepsilon_x(t) - \int_{-\infty}^t \{ \varphi_1(t-s) \varepsilon(s) + \\ + 2\varphi_2(t-s) \varepsilon_x(s) \} ds \Big\} \\ \text{и т. п.} \end{aligned}$$

$$\tau_{xy}(t) = \mu \gamma_{xy}(t) - \int_{-\infty}^t \{ \varphi_2(t-s) \gamma_{xy}(s) \} ds \Big\} \quad (69.04)$$

и т. п.

Коэффициенты наследственности φ_1 и φ_2 — положительные убывающие функции; они определяются по опытам (например, на кручение и растяжение); предполагается, что убывание происходит достаточно быстро и обеспечивает существование несобственных интегралов. Как легко видеть, Больцман учитывает и изменение объема во времени. Этим изменением, повидимому, следует пренебрегать; тогда

$$\varphi_1 = -\frac{2}{3} \varphi_2 \quad (69.05)$$

II. В. Вольтерра [88] развил значительно более общую теорию наследственных сред, из которой уравнения Больц-

мана вытекают как простейший случай, характеризуемый упомянутым законом суперпозиции; такую наследственность Вольтерра называет линейной, а функции φ_1 и φ_2 — коэффициентами наследственности. Вольтерра доказал, что периодическое изменение одной из величин $\sigma_x(t)$, $\varepsilon_x(t)$ влечет за собой через некоторый промежуток времени периодическое изменение другой величины с тем же периодом.

Подстановка зависимостей Больцмана (69.04) в уравнение движения (2.01) приводит к системе интегро-дифференциальных уравнений сложного вида, указанной Вольтерра.

III. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением простейшего случая одноосного напряженного состояния, описываемого уравнением (69.03). Отсчитывая время от момента получения телом первой деформации, мы можем представить уравнение (69.03) в виде

$$\sigma_x(t) = E \varepsilon_x(t) - \int_0^t f(t-s) \varepsilon_x(s) ds \quad (69.06)$$

Разрешая это уравнение относительно деформации, получаем

$$\varepsilon_x(t) = \frac{1}{E} \sigma_x(t) + \int_0^t \Phi(t-s) \sigma_x(s) ds, \quad (69.07)$$

где $\Phi(t-s)$ — резольвента ядра $f(t-s)$.

Теория Больцмана имеет весьма общий характер и включает в себя, как частные случаи, ряд уже рассмотренных в этой главе континуумов. Возьмем ядро следующего вида

$$f(t-s) = \frac{E}{t_0} \exp\left(-\frac{t-s}{t_0}\right), \quad (69.08)$$

где t_0 — константа. Тогда

$$\sigma_x(t) = E \varepsilon_x(t) - \frac{E}{t_0} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{t_0}\right) \varepsilon_x(s) ds \quad (69.09)$$

Дифференцируя это уравнение по времени t , находим уравнение Максвелла

$$E \frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{\sigma_x}{t_0} + \frac{d\sigma_x}{dt}$$

Столь же простыми средствами легко обнаружить, что уравнение Больцмана с ядром

$$f(t-s) = c'(a' - b') \exp[-b'(t-s)] \quad (69.10)$$

эквивалентно [76] соотношению (64.10), более сложному, чем уравнение Максвелла.

IV. Выбор коэффициента наследственности $f(t-s)$ — ядра интегрального уравнения (69.06) представляет известные трудности. Больцман остановился на ядре

$$f(t-s) = \frac{A'}{t-s}, \quad (69.11)$$

где A' — константа; однако использование такой функции приводит к результатам, плохо согласующимся с наблюдениями. Г. Л. Слонимский [31] на основании анализа большого числа экспериментов рекомендует принимать

$$f(t-s) = B \beta \alpha (t-s)^{\beta-1} \exp[-\alpha(t-s)^\beta], \quad (69.12)$$

где α , β и B — положительные константы, причем $\beta < 1$. А. П. Бронский [3] считает возможным полагать

$$f(t-s) = B \beta (t-s)^{\beta-1} \exp[-(t-s)^\beta] \quad (69.13)$$

Это выражение — частный случай предыдущего; β и B здесь также положительны, причем $\beta < 1$. А. П. Бронский указывает, что с точностью, достаточной для многих прикладных вопросов, резольвента ядра (69.13) представима формулой

$$\Phi(t-s) = A \beta (t-s)^\beta \exp[-(t-s)^\beta], \quad (69.14)$$

где A — положительная постоянная.

Хороших результатов можно достигнуть использованием аппроксимации

$$f(t-s) = \sum_{j=1}^m \frac{E_j}{t_{0j}} \exp\left(-\frac{t-s}{t_{0j}}\right), \quad (69.15)$$

где E_j , t_{0j} — постоянные, подобранные надлежащим образом для данного материала. Такое представление ядра интересно тем, что при этом процесс деформации материала рассматривается как сумма процессов деформации m различных сред,

каждая из которых удовлетворяет простому уравнению Максвелла. Различные обобщения в этом направлении подробно изучались Е. Вьехертом [90].

V. Рассмотрим некоторые простейшие применения уравнения Больцмана.

Релаксация напряжений. В этом случае

$$\begin{aligned}\varepsilon_w(t) &= 0, & \text{при } -\infty < t \leq 0, \\ \varepsilon_w(t) &= \text{const} = \varepsilon_x^0, & \text{при } t > 0,\end{aligned}$$

и уравнение Больцмана (69.03) получает вид

$$\sigma_w(t) = \varepsilon_x^0 \left[E - \int_0^t f(t-s) ds \right]$$

Возьмем для ядра выражение (69.12); произведя вычисления, находим формулу

$$\sigma_w(t) = \varepsilon_x^0 [E + B \exp(-\alpha t^p)],$$

хорошо согласующуюся с опытами.

Влияние кратковременной деформации. Пусть

$$\begin{aligned}\varepsilon_w(t) &= 0 & \text{при } -\infty < t < 0 \\ \varepsilon_w(t) &= \text{const} = \varepsilon_x^0 & \text{при } 0 \leq t \leq t_1 \\ \varepsilon_w(t) &= 0 & \text{при } t > t_1\end{aligned}$$

Тогда при $t > t_1$ уравнение Больцмана имеет вид

$$\sigma_w(t) = -\varepsilon_x^0 \int_0^{t_1} f(t-s) ds$$

Предположим, что интервал $(0, t_1)$ мал; тогда

$$\sigma_w(t) = -\varepsilon_x^0 t_1 f(t)$$

VI. В заключение укажем, что ряд задач изучили Больцман и Вольтерра; А. П. Бронский [3] приводит решение задачи о резиновом катке (шине), В. Г. Гоголадзе [6] рассмотрел распространение волн в наследственной среде.

§ 70. Ползучесть

I. Введение. За последние десятилетия важное значение в технике приобрело явление ползучести металлов. В частях современных машин (котлы, паровые и газовые турбины и т. д.), работающих в условиях высокой температуры, обнаруживается заметная текучесть. В одних случаях происходит нарастание деформаций с течением времени при неизменной нагрузке, в других — спадание напряжений при постоянной деформации; часто эти процессы идут одновременно. Текучесть металлов при высоких температурах обладает рядом характерных свойств и обычно называется ползучестью или крипом (сгееp).

При высоких температурах ползучесть нередко определяет условия прочности и долговечности многих машин. Допустимая деформация ползучести иногда сравнима по величине с начальной упругой деформацией, иногда может ее превышать во много раз ¹.

Ползучесть — сложный физический процесс; несмотря на обширную, быстро растущую литературу и большую исследовательскую работу по ползучести — многое в этом процессе еще неясно.

II. Напряжения и деформации в начальный момент времени. В начальный момент времени, когда деформации ползучести ничтожны, распределение напряжений и деформаций удовлетворяет уравнениям теории упругости. Эксперименты [47] показывают, что с ростом температуры коэффициент Пуассона ν приближается к половине. Поэтому для тех высоких температур, когда ползучесть стали становится существенной, можно принимать $\nu = \frac{1}{2}$ и писать закон Гука в форме

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_{xx} &= \frac{1}{2G} (\sigma_{xx} - \sigma) \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \gamma'_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad (70.01)$$

где значок ' означает, что эти зависимости относятся лишь к упругой деформации.

¹ По Бауману (Engineering, 1930 г.) допустимая деформация ползучести не должна превышать: для турбинных дисков, насаженных на вал, 0,0001 за 100 000 час., для паропроводов — 0,01 за 100 000 час. и т. д.

являющихся, в сущности, обобщенными уравнениями Генки (гл. III), с тем отличием, что функция $F_*(T^2, t)$ в случае ползучести зависит также и от параметра t — времени. В первом приближении кривые ползучести (фиг. 12) можно считать геометрически подобными, что позволяет функцию $F_*(T^2, t)$ представить в виде произведения $F(T^2) \Delta(t)$. Функция $\Delta(t)$ обращается в нуль при $t=0$ и с течением времени приближается к линейной функции. Таким образом получаем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= f(T^2, t)(\sigma_x - \sigma) \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2f(T^2, t)\tau_{xy} \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad (70.05)$$

где положено

$$\frac{1}{2G} + F(T^2) \Delta(t) = f(T^2, t) \quad (70.06)$$

В дальнейшем мы будем принимать, что

$$F(T^2) = \frac{m}{2} T^{m-2} \quad (70.07)$$

V. *Теория ползучести как вязкого течения.* Некоторые исследователи устанавливают уравнения ползучести, основываясь на представлении о среде, одновременно обладающей свойствами упругости и вязкости, и пренебрегая первым периодом ползучести, вследствие его относительной кратковременности. Таковы соотношения Оджквиста [70]

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{1}{2G} \frac{d}{dt} (\sigma_x - \sigma) + B T^{m-2} (\sigma_x - \sigma) \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\}, \quad (70.08)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{1}{G} \frac{d}{dt} \tau_{xy} + 2B T^{m-2} \tau_{xy} \\ &\text{и т. п.} \end{aligned} \right\},$$

где B и m — константы. В этих зависимостях первое слагаемое определяет скорости упругой деформации $\dot{\varepsilon}'_x, \dot{\varepsilon}'_y, \dots, \dot{\gamma}'_{xy}$, второе — скорости деформации ползучести $\dot{\varepsilon}''_x, \dot{\varepsilon}''_y, \dots, \dot{\gamma}''_{xy}$.

К уравнениям Оджквиста близко примыкают соотношения Марина [7] и Надаи [69]. Следует отметить попытки создания уравнений ползучести, основанных на рассмотрении

структурных изменений металла, предпринятые Содербергом, Девисом, И. А. Одингом и другими.

VI. *Релаксация напряжений.* Уравнения ползучести строятся по данным опытов, проведенных при постоянных нагрузках. Однако, часто этим уравнениям приписывают более общий характер и применяют их и в тех случаях, когда напряжения со временем изменяются, например, в задаче о релаксации напряжений.

Пусть в растянутом стержне поддерживается постоянная начальная деформация ε_x° . Из соотношений (70.05) и (70.07) находим

$$\varepsilon_x^\circ = \left[\frac{1}{3G} + \frac{m}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{m}{2}} \Lambda(t) \sigma_x^{m-2} \right] \sigma_x$$

Так как $\Lambda(t)$ со временем неограниченно возрастает, то напряжение падает, стремясь к нулю.

Если исходить из теории Одквиста, то при $\xi_x = 0$ получаем

$$\frac{d\sigma_x}{dt} + 2BG \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{m-2}{2}} \sigma_x^{m-1} = 0$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии

$$\sigma_x = \sigma_0 \equiv 3G\varepsilon_x^\circ \quad \text{при } t=0,$$

находим зависимость

$$\sigma_x = \frac{\sigma_0}{\left[1 + 2BG \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{m-2}{2}} (m-2) \sigma_0^{m-2} t \right]^{\frac{1}{m-2}}},$$

согласно которой напряжение с возрастанием времени стремится к нулю.

Обе теории — обобщенная теория Генки и теория вязкого течения качественно, а в известной мере и количественно, описывают явление релаксации. Недостаток экспериментальных данных не позволяет судить о пределах справедливости этих теорий. Так как процессы релаксации, по крайней мере с качественной стороны, описываются

этим уравнениями, то кажется несомненной практическая пригодность уравнений (70.05) для решения задач, характеризующихся *постоянными внешними нагрузками*, когда с течением времени происходит некоторое перераспределение напряжений, но не их исчезновение. Использование теории Содерберга в подобных задачах позволяет судить о протекании процесса перераспределения напряжений от упругого к установившемуся. Обе указанные теории совпадают, очевидно, при рассмотрении установившейся ползучести и, в сущности, мало различаются при рассмотрении ползучести при постоянном напряженном состоянии. Неосмотрительное применение уравнений Содерберга в случае изменяющихся напряжений может привести к нелепым выводам.

VII. *Общие теоремы.* Уравнения ползучести (70.05) отличаются от уравнений Генки только присутствием в первых времени t в качестве параметра¹. Далее, если пренебрегать упругими деформациями в уравнениях (70.08), что допустимо во многих случаях, то уравнения (70.08) суть уравнения нелинейно вязкого тела (§ 55). Эти соображения позволяют сохранить в теории ползучести установленные ранее энергетические теоремы (гл. IV, гл. V, § 56). Приведем здесь уравнение начала наименьшей дополнительной работы. Исходя из (37.05) и пользуясь формулами (70.05), вычисляем

$$\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx} = \delta R' + \Delta(t) \delta R'',$$

где

$$\delta \zeta' = \delta \frac{T^2}{2G}, \quad \delta R'' = \delta \int_0^{T^2} F(s) ds$$

есть соответственно приращение плотности упругой потенциальной энергии и приращение плотности дополнительной работы ползучести. Следовательно, уравнение (37.05) получает вид

$$\delta \iiint_V [R' + \Delta(t) R''] dV = 0 \quad (70.09)$$

¹ Мы рассматриваем лишь статические задачи теории ползучести, когда скорости и ускорения чрезвычайно малы; относительно порядка этих величин см. примечание в начале этого параграфа.

В начальный момент, когда $\Delta(0) = 0$, уравнение (70.09) вырождается в принцип Кастильяно. Уравнение (70.09), достаточное для решения задач с заданными внешними нагрузками, позволяет высказать некоторые соображения по важному вопросу о наступлении установившейся ползучести, характеризуемой неизменностью напряжений и скоростей деформации во времени. Если установившееся состояние наступает быстро, то рассмотрение ползучести тела можно свести к изучению установившегося состояния, что сильно упрощает теорию и весьма заманчиво. Прежде всего ясно, что в случае статически определимых напряженных состояний, не зависящих от деформации (например, растяжение стержня, тонкостенная трубка под внутренним давлением и т. д.), с окончанием первого периода ползучести наступает установившееся состояние; вариации напряжений в таких задачах равны нулю, и (70.09) обращается в тождество. В общем случае можно полагать справедливым следующий результат: распределение напряжений и скоростей деформации приближается к установившемуся, если деформации ползучести превышают упругие; тогда упругой потенциальной энергией возможно пренебречь в сравнении с дополнительной работой ползучести, и функция времени $\Delta(t)$ не влияет на распределение напряжений. Этот вывод, основанный на уравнении (77.09), относится лишь к случаю ползучести тела под действием *заданных постоянных нагрузок*.

VIII. *Ползучесть тонкостенной трубы.* Пусть круглая тонкостенная длинная труба с доньшками испытывает ползучесть под действием внутреннего давления p . Распределение напряжений в трубе дается хорошо известными приближенными формулами

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\varphi = \frac{pa}{b-a}; \quad \sigma_z = \frac{pa}{2(b-a)};$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = \tau_{rz} = 0,$$

где a, b — соответственно внутренний и наружный радиусы трубы, а r, φ, z — цилиндрические координаты; предполагается, что $\frac{b-a}{a} \ll 1$. Легко находим

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{pa}{b-a}; \quad T^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{pa}{b-a} \right)^2$$

Согласно зависимостям (70.05), получаем

$$\epsilon_r = -f(T^2, t) \frac{1}{2} \frac{pa}{b-a}; \quad \epsilon_\varphi = f(T^2, t) \frac{1}{2} \frac{pa}{b-a}; \quad \epsilon_z = 0$$

Этот результат — отсутствие ползучести трубы в осевом направлении хорошо подтверждается экспериментальными исследованиями Бейли, Нортон, Левиса и других [7].

§ 71. Ползучесть сферического сосуда

I. Рассмотрим задачу о ползучести сферического сосуда, испытывающего внутреннее давление p ; пусть r, φ, χ — сферические координаты (§2), $2a, 2b$ — внутренний и наружный диаметры сосуда, u_r — радиальное смещение. Вследствие центральной симметрии нормальные напряжения $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\chi$ являются главными напряжениями, причем $\sigma_\varphi = \sigma_\chi$ и $\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_r + 2\sigma_\varphi)$.

Уравнения ползучести (70.05) принимают вид

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{G} + 2F(T^2) \Lambda(t) \right] (\sigma_r - \sigma_\varphi) \\ \epsilon_\varphi &= \epsilon_\chi = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{G} + 2F(T^2) \Lambda(t) \right] (\sigma_\varphi - \sigma_r), \end{aligned} \quad (71.01)$$

причем интенсивность касательных напряжений

$$T = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_\varphi - \sigma_r) \quad (71.02)$$

Напряжения должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{r} = 0 \quad (71.03)$$

и граничным условиям

$$\text{при } r=a \quad \sigma_r = -p; \quad \text{при } r=b \quad \sigma_r = 0$$

II. В начальный момент времени напряжения и деформации описываются хорошо известными формулами теории упругости

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^0 &= -p \frac{a^3}{r^3} \cdot \frac{b^3 - r^3}{b^3 - a^3} \\ \sigma_\varphi^0 &= p \frac{a^3}{2r^3} \cdot \frac{b^3 + 2r^3}{b^3 - a^3} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \epsilon_r^0 &= -\frac{p}{2G} \frac{a^3}{r^3} \frac{b^3}{b^3 - a^3} \\ \epsilon_\varphi^0 &= \frac{p}{4G} \frac{a^3}{r^3} \frac{b^3}{b^3 - a^3} \end{aligned} \right\}, \quad (71.04)$$

причем

$$T^0 = \sqrt{\frac{3}{2}} p \frac{a^3}{r^3} \frac{b^3}{b^3 - a^3}$$

III. При $t > 0$ необходимо исходить из уравнений ползучести (71.01), что сильно усложняет задачу. Будем строить приближенное решение с помощью начала наименьшей дополнительной работы (70.09). Это уравнение благодаря центральной симметрии приводится к виду

$$\delta \int_a^b \left[\frac{1}{G} T^2 + \Lambda(t) T^m \right] r^2 dr = 0 \quad (71.05)$$

Введем безразмерную переменную ζ посредством уравнения $r = c(1 + \zeta)$, где $c = \frac{1}{2}(a + b)$; очевидно, что $-\Delta \leq \zeta \leq \Delta$, где $\Delta = \frac{b-a}{2c}$. Перепишем уравнение (71.05) в новой переменной

$$\delta \int_{-\Delta}^{\Delta} \left[\frac{1}{G} T^2 + \Lambda(t) T^m \right] (1 + \zeta)^2 d\zeta = 0 \quad (71.06)$$

Следуя методу Ритца, ищем приближенное решение этого уравнения в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^0 + A(t)(\Delta^2 - \zeta^2) \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^0 + A(t)\Xi(\zeta), \end{aligned} \quad (71.07)$$

где $A(t)$ — коэффициент, который нужно выбрать наилучшим образом, а $\Xi(\zeta)$ — некоторая функция; подстановка напряжений (71.07) в уравнение равновесия (71.03) определяет $\Xi(\zeta)$; тогда

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^0 + A(t)(\Delta^2 - \zeta^2) \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^0 + A(t)(\Delta^2 - 2\zeta^2 - \zeta) \end{aligned} \quad (71.08)$$

Теперь напряжения σ_r и σ_φ удовлетворяют условиям равновесия внутри тела ($-\Delta < \zeta < \Delta$) и на его границах $\zeta = \pm\Delta$, т. е. являются статически возможными. Параметр $A(t)$ должен

сообщать дополнительной работе минимальное значение, т. е.

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \left[\frac{2}{G} T + m \Delta(t) T^{m-1} \right] \frac{\partial T}{\partial A} (1 + \zeta)^2 d\zeta = 0 \quad (71.09)$$

Нетрудно найти, что

$$T = \frac{x p}{(1 + \zeta)^3} - A(t) \sqrt{\frac{2}{3}} \zeta (1 + \zeta); \quad \frac{\partial T}{\partial A} = - \sqrt{\frac{2}{3}} \zeta (1 + \zeta),$$

где через x обозначена безразмерная величина $x = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(1 - \Delta^2)^3}{6\Delta}$. Уравнение (71.09) в развернутой форме имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{2xp}{G} \int_{-\Delta}^{\Delta} \zeta d\zeta - \frac{2A(t)}{G} \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{-\Delta}^{\Delta} \zeta^2 (1 + \zeta)^4 d\zeta + \\ & + m \Delta(t) (xp)^{m-1} \int_{-\Delta}^{\Delta} \left[1 - \frac{A(t)}{xp} \sqrt{\frac{2}{3}} \zeta (1 + \zeta)^4 \right]^{m-1} \frac{\zeta d\zeta}{(1 + \zeta)^{3m-6}} = 0 \end{aligned} \quad (71.10)$$

Первые два интеграла находятся легко, третий интеграл будем вычислять следующим образом; ограничимся рассмотрением не очень толстостенных сосудов, именно — будем полагать, что можно пренебречь квадратом Δ по сравнению с единицей. Тогда, считая

$$\left| \frac{A(t)}{xp} \sqrt{\frac{2}{3}} \zeta (1 + \zeta)^4 \right| < 1,$$

развертываем квадратную скобку в (71.10) в строку бинома Ньютона и интегрируем почленно получающийся бесконечный ряд

$$\begin{aligned} & \int_{-\Delta}^{\Delta} [\dots]^{m-1} \frac{\zeta d\zeta}{(1 + \zeta)^{3m-6}} = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\zeta d\zeta}{(1 + \zeta)^{3m-6}} - \\ & - \frac{(m-1)A(t)}{xp} \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\zeta^2 d\zeta}{(1 + \zeta)^{3m-10}} + \\ & + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \left(\frac{A(t)}{xp} \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\zeta^3 d\zeta}{(1 + \zeta)^{3m-14}} - \dots \end{aligned}$$

Вычисляя интегралы и разлагая их затем в бесконечные ряды, находим с точностью до Δ^2

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \zeta^2 (1 + \zeta)^4 d\zeta = \frac{2}{3} \Delta^3; \quad \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\zeta^2 d\zeta}{(1 + \zeta)^{3m-10}} = \frac{2}{3} \Delta^3;$$

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\zeta d\zeta}{(1 + \zeta)^{3m-6}} = 2\Delta^3(2-m); \quad \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\zeta^3 d\zeta}{(1 + \zeta)^{3m-14}} = \frac{2}{5} (14-3m) \Delta^5$$

Ограничиваясь в разложении выписанными слагаемыми и введя обозначения

$$M = \frac{m(m-1)}{2} G(\chi p)^{m-2}; \quad P = \frac{m-2}{5} (14-3m) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta^2}{\chi p};$$

$$N = \frac{2-m}{m-1} 3 \sqrt{\frac{3}{2}} \chi p; \quad \Omega(t) = \frac{M\Lambda(t)}{1+M\Lambda(t)}, \quad (71.11)$$

получаем из (71.10) уравнение

$$-A(t) + MN\Delta(t) - A(t)M\Delta(t) + A^2(t)MP\Delta(t) = 0,$$

решение которого имеет вид ($A(0) = 0$)

$$A(t) = \frac{1}{2P\Omega(t)} [1 - \sqrt{1 - 4PN\Omega^2(t)}] \quad (71.12)$$

Как правило $m > 2$, следовательно $M > 0$, и $0 \leq \Omega(t) \leq 1$ будем считать, что

$$|4PN| = \left| -\frac{18}{5} \frac{(2-m)^2}{m-1} (14-3m) \Delta^2 \right| < 1$$

Легко видеть, что

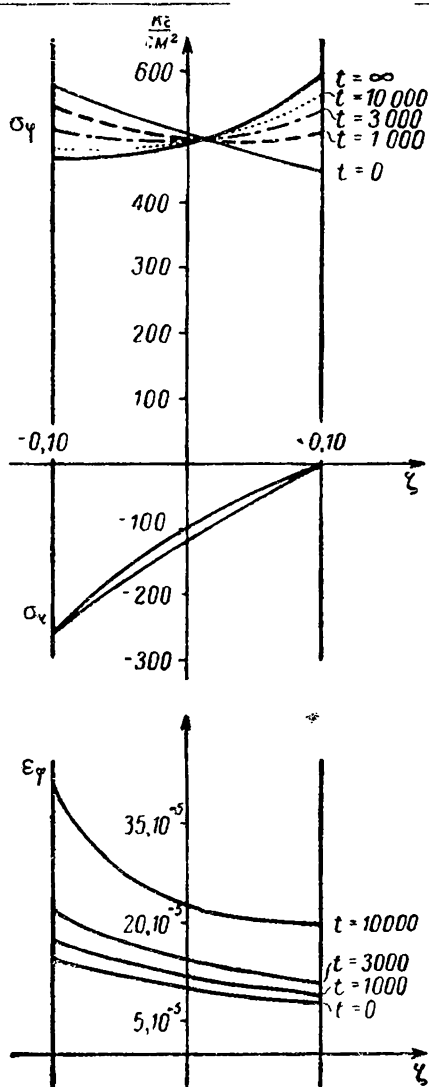
$$|A(t)| < 2\Omega(t)|N| < 2|N|$$

Следовательно,

$$\left| \frac{A(t)}{\chi p} \sqrt{\frac{2}{3}} \zeta (1 + \zeta)^4 \right| < 6\Delta(1 + \Delta)^4,$$

т. е. при достаточно малом Δ эта величина меньше единицы. Если $|4PN| \ll 1$, то в первом приближении

$$A(t) = N\Omega(t) \quad (71.13)$$



Фиг. 36.

При $m=2$, $A(t)=0$; распределение напряжений описывается формулами (71.04) и не меняется с временем. При $t=\infty$ наступает установившееся состояние, причем

$$A(\infty) = \frac{1}{2P}(1 - \sqrt{1-4PN}) \quad (71.14)$$

IV. На фиг. 36 показано распределение напряжений и деформаций в разные моменты времени, подсчитанное для следующего примера:

$$p = 250 \frac{\text{кгс}^2}{\text{см}}; m = 5,37; \Delta = 0,10; \Lambda(t) = a_1 t$$

$$a_1 = 11,5 \cdot 10^{-2} \left(\frac{\text{см}^2}{\text{кгс}} \right)^{m-1} \frac{1}{\text{час}}$$

Сопоставление графиков напряжения σ_φ и деформации ε_φ иллюстрирует вывод предыдущего параграфа о том, что состояние ползучести, близкое к установившемуся, наступает при деформациях ползучести, значительных в сравнении с упругими деформациями. Решение, подобное изложенному, легко строится и для цилиндрической трубы [20]; на этом мы не останавливаемся.

В заключение отметим, что важную задачу о ползучести вращающегося диска рассматривали Одквист [70] и Содерберг [84]; вопрос о кручении и ползучести винтовых пружин исследовал Надаи [69].

ЛИТЕРАТУРА

Список литературы не претендует на полноту; звездочками помечены работы, содержащие значительное число литературных ссылок по вопросам теории пластичности.

1. Альтшуллер Л. В. О взрыве в сжимаемой пластичной среде. Доклады Акад. Наук СССР, т. LII, № 3, 1946.
2. Беляев Н. М. Применение теории пластических деформаций к расчетам на ползучесть деталей при высоких температурах. Изв. Акад. Наук, ОТН, № 7, 1943.
3. Бронский А. П. Явление послейдействия в твердом теле. Прикл. матем. и механ., т. V, в. I, 1941. (*)
4. Генки Г. Пространственная задача упругого и пластического равновесия. Изв. Акад. Наук СССР, Отд. техн. наук № 2, 1937.
5. Герасимов А. В. Основания теории деформаций упруговязких тел. Прикл. матем. и механ., т. II, в. 3, 1938.
6. Гоголадзе В. Г. Некоторые задачи теории наследственной упругости. Труды Сейсмологического института Акад. Наук СССР, № 87, 1938.
7. Данюшевский А. Э. и Качанов Л. М. Ползучесть труб. Журн. „Советское котлотурбостроение“, № 10, 1940.
8. Дружинин С. И. Термический метод определения предела упругости нормальных напряжений. Журн. Русск. металлург. общ., 1913, стр. 230.
9. Ильюшин А. А. Деформация вязко-пластического тела. Ученые записки МГУ, в. 39, Москва, 1940.
10. Ильюшин А. А. Некоторые вопросы теории пластических деформаций. Прикл. матем. и механ., т. VII, в. 4, 1943.
11. Ильюшин А. А. Устойчивость пластинок и оболочек за пределом упругости. Прикл. матем. и механ., т. VIII, в. 5, 1944.
12. Ильюшин А. А. К теории малых упруго-пластических деформаций. Прикл. матем. и механ., т. X, в. 3, 1946.

13. Ишлинский А. Ю. Линейные законы деформирования не вполне упругих тел. Доклады Акад. Наук СССР, т. XXVI, № 1.
14. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бригелля. Прикл. матем. и механ., т. VIII, в. 3, 1944.
15. Качанов Л. М. К механике пластических средин. Прикл. матем. и механ., т. IV, в. 3, 1940.
16. Качанов Л. М. Упруго-пластическое состояние твердых тел. Прикл. матем. и механ., т. V, в. 3, 1941.
17. Качанов Л. М. Об уравнениях теории пластичности. Доклады Акад. Наук СССР, т. LIV, № 4, 1946.
18. Качанов Л. М. Вариационные принципы для упруго-пластических сред. Прикл. матем. и механ., т. VI, № 2—3, 1942.
19. Качанов Л. М. Упруго-пластическое равновесие неравномерно нагретых толстостенных цилиндров, находящихся под действием внутреннего давления. Журн. техн. физики, т. X, в. 14, 1940.
20. Качанов Л. М. Ползучесть при сложном напряженном состоянии, Журн. „Котлотурбостроение“, № 4, 1947.
21. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. Гостехиздат, 1943.
22. Лейбензон Л. С. Элементы математической теории пластичности. Гостехиздат, 1943. (*)
23. Лурье А. И. Обобщение теоремы Кастильяно. Труды Ленинградского политехнического института, № 1, 1946.
24. Марков А. А. О вариационных принципах в теории пластичности. Прикл. матем. и механ., т. XI, в. 3, 1947.
25. Михлин С. Г. Основные уравнения математической теории пластичности. Изд. Акад. Наук СССР, 1934. (*)
26. Михлин С. Г. Математическая теория пластичности. Статья в сб. „Некоторые новые вопросы механики сплошной среды“. Изд. Акад. Наук СССР, 1938. (*)
27. Михлин С. Г. Современное состояние математической теории пластичности. „Успехи матем. наук“, в. 3, 1937.
28. Надаи А. Пластичность. ОНТИ, 1934. (*)
29. Панов Д. Ю. О крутильных колебаниях стержня при наличии упругого гистерезиса. Прикл. матем. и механ., т. IV, в. 1, 1940.
30. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
31. Слонимский Г. Л. О законах деформации реальных материалов. Журн. техн. физики, т. IX, в. 20, 1939. (*)
32. Смирнов-Аляев Г. А. Теория автоскрепления цилиндров. Оборонгиз, 1940.

33. Соболев С. Л. Задача распространения пластического состояния. Труды Сейсм. инст. Акад. Наук СССР, №49, 1935.
34. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. Акад. Наук СССР, 1942.
35. Соколовский В. В. О некоторых работах по теории пластичности. Прикл. матем. и механ., т. IX, в. 6, 1945. (*)
36. Соколовский В. В. Уравнения пластического плоского напряженного состояния по Мизесу и их приближенное представление. Прикл. матем. и механ., т. X, в. 3, 1946.
37. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. Акад. Наук СССР, 1946. (*)
38. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, 1937.
39. Треффц Е. Математическая теория упругости. Изд. 2-е. ОНТИ, 1934.
40. Феппль А. Техническая механика. Т. 3, ОНТИ, 1937.
41. Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Матем. сб., новая серия, т. I (43), в. 4, 1936.
42. Boltzmann L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Wiener Ber., Bd. 70, 1874, S. 274.
43. Colonnetti G. De l'équilibre des systèmes élastiques dans lesquels se produisent des déformations plastiques. Journ. d. Math. pures e. appliq., ser. IX, T. 17, Paris, 1938.
44. Davis E. Yielding and Fracture of Medium-Carbon Steel Under Combined Stress. Journ. of Appl. Mech., V. 12, № 1, 1945.
45. Deutsch W. Plastizität. Handbuch d. Physikalischen u. technischen Mechanik. Bd. IV, 1 Hälfte, 2 Teil, 1931, SS. 551—633. (*)
46. Duhem P. Sur les déformations permanentes et l'hysteresis. Mém. Acad. Belg., T. LIV, 1896.
47. Everett F. a. Miklowitz I. Poisson's Ratio at High Temperatures. Journ. Appl. Phys., V. 15, № 8, 1944.
48. Finzi B. Rotazioni plastiche. Atti d. Reale Accad. Naz. d. Linc., Ser. 6, Rendiconti, V. XXIII, Fasc. 10, Roma, 1936.
49. Foigt W. Ueber die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Kristalle. Abhandl. d. Math. Klasse d. Königl. Gess. d. Wiss., Bd. 36, Göttingen, 1890, S. 1.
50. Fritzsche I. Arbeitsgesetze bei elastisch-plastischer Balkenbiegung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 11, S. 176, 1931.
51. Fromm H. Nachwirkung und Hysteresis, Handbuch d. physikalischen u. technischen Mechanik. Bd. IV, 1 Hälfte, 3 Teil, 1931, SS. 436—548. (*)

52. Fromm H. Stoffgesetze des isotropen Kontinuums, insbesondere bei zähplastischen Verhalten. Jng. Archiv, Bd. IV, H. 5, 1933.
53. Geiringer u. Prager W. Mechanik isotropen Körper im plastischen Zustand. Ergebn. d. exakten Naturwissensch., Bd. XIII, Berlin, 1934. (*)
54. Geiringer H. La théorie d. corps plastiques isotropes. Mem. sci. math., Fasc. 86, Paris, 1937. (*)
55. Guest J. On the Strength of Ductile Materials Under Combined Stresses. Philos. Magaz., Ser. 5, T. 50, 1900, P. 67.
56. Haar A u. Kármán T. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Zuständen. Götting. Nachrichten, 1909, S. 204.
57. Hencky H. Zur Theorie der plastischen Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 4, H. 4, 1924.
58. Hencky H. Über langsame stationäre Strömungen in plastischen Massen mit Rücksicht auf die Vorgänge beim Walzen, Pressen und Ziehen von Metallen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 5, H. 2, 1925.
59. Hohenemser K. Fließversuche an Rohren aus Stahl bei kombinierter Zug- und Torsionsbeanspruchung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 11, H. 1, 1931.
60. Hohenemser K. u. Prager W. Beitrag zur Mechanik der bildsamen Verhaltens von Flubstahl. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 12, H. 1, 1932.
61. Hohenemser K. u. Prager W. Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 12, H. 4, 1932. (*)
62. Lode W. Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. Zeitschr. f. Physik, Bd. 36, 1926, S. 913.
63. Mason W. Mild Steel Tubes in Compression and Under Combined Stresses. Proc. Inst. Mech. Eng., T. 4, 1909, P. 1205.
64. Maxwell J. On the Dynamical Theory of Gases. Philos. Trans., V. 157, 1867, P. 52.
65. Mises R. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Götting. Nachrichten, 1913, S. 582.
66. Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 8, H. 3, 1928.
67. Mises R. Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mecha-

- nik der Kontinua. Verhandl. d. III intern. Kongr. f. techn. Mechani., Teil 2, Stockholm, 1931. (*)
68. Nádaí A. Plastizität und Erddruck. Handbuch der Physik. Bd. 6 Berlin, 1928. (*)
 69. Nádaí A. The Creep of Metals Under Various Stress Conditions. Theodore von Kármán Anniversary Volume, Pasadena, California, 1941.
 70. Odqvist F. Creep Stresses in a Rotating Disc. Proc. Fourth Int. Congr. Appl. Mech., 1934.
 71. Odqvist F. Die Verfestigung von flußelsenähnlichen Körpern. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 13, S. 360, 1933.
 72. Peretti G. Sorgenti plastiche. Atti d. Reale Accad. Naz. d. Linc., Ser. 6, Rendiconti, V. XXV, Fasc. 8, Roma, 1937.
 73. Prager W. Der Einfluß der Verformung auf die Fließbedingung zähplastischer Körper. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 15, H. 1—2, 1935.
 74. Prager W. Méchanique d. solides isotropes au d. domaine élastique. Mém. sci. math., Fasc. 87, Paris, 1937. (*)
 75. Prager W. On Isotropic Materials With Continuous Transition From Elastic to Plastic State. Proc. of the Fifth Int. Congr. for Appl. Mech., London — N. Y., 1939.
 76. Prager W. Strain Hardening Under Combined Stresses, Journ. of Appl. Phys., V. 16, № 12, 1945.
 77. Prandtl L. Spannungsverteilung in plastischen Körpern. Proc. of the First Int. Congr. for Appl. Mech., Delft, 1924.
 78. Prandtl L. Ueber die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 1, H. 1, 1921.
 79. Reuss A. Berücksichtigung der elastischen Formänderungen in der Plastizitätstheorie. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., T. X, S. 263, 1930.
 80. Roš M. u. Eichinger A. Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Verhandl. d. II intern. Kongr. f. techn. Mechani., Zürich, 1926, S. 315.
 81. De Saint Venant B. Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au-delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. Compt. Rend., t. 70, Paris, 1870, pp. 473—480.
 82. Schleicher F. Der Spannungszustand an der Fließgrenze. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 6, 1926, S. 199.

83. Schmidt R. Über die Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet. Ing. Archiv, Bd. III, H. 3, 1932.
 84. Soderberg R. The Interpretation of Creep Tests for Machine Design. Trans. of ASME, V. 58, № 8, 1936, P. 733.
 85. Taylor G a. Quinney H. The Plastic Distortion of Metals. Philos. Trans. Roy. Soc. London, T. A-230, 1931, P. 323.
 86. Thompson J. On the Theory of Visco-Elasticity. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, V. 231, 1933, P. 339. (*)
 87. Voigt W. Ueber die Innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Kristalle. Abhandl. d. Math. Klasse d. Königl. Ges. d. Wiss., Göttingen, Bd. 36, 1890, S. 1.
 88. Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. London a. Glasgow, 1931.
 89. Weber C. Über die Minimalsätze der Elastizitätstheorie. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 21, H. 1, 1941.
 90. Wiechert E. Gesetze der elastischen Nachwirkung für konstante Temperatur. Ann. d. Phys., Bd. 50, 1893, SS. 335—348, 546—570.
-

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
18	2 снизу	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	Авт.
31	15 сверху	(10.06)	(1.07)	"
39	12 сверху	ϵ	ϵ_{α}	"
49	6 сверху	$\frac{a}{k} \epsilon \theta$	$\frac{a}{k} \epsilon \theta$	Тип.
100	4, 6, 7, 10 снизу	J_m	I_m	Авт.
139	6 сверху	$\pi_{\alpha} \gamma $	$\sigma_{\alpha} \gamma $	"

Заказ 3175