

СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ

В.В. Новожилов

•

ОСНОВЫ
НЕЛИНЕЙНОЙ
ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИИ
проф. А. И. ЛУРЬЕ
и проф. Л. Г. ЛОЙЦЯНСКОГО

О Г И З
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1948 МОСКВА

В. В. НОВОЖИЛОВ

**ОСНОВЫ
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ**

**ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1948 МОСКВА**

Редактор *А. И. Чекмарев*

Техн. редактор *К. М. Волчок*

Подписано к печати 25/X 1948 г. 13,25 печ. л. 36 676 тип. зн. в печ. л. М-19510.
Тираж 6 000 экз. Цена книги 7 р. 25 к. 12,12 уч.-изд. л. Заказ № 3175.

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗ
при Совете Министров СССР, Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Глава I. Геометрия деформации	
§ 1. Координаты	11
§ 2. Углы, определяющие направления координатных линий	14
§ 3. Компоненты деформации	21
§ 4. Преобразование компонентов деформации при пе- реходе от одних осей к другим	24
§ 5. Главные направления деформации	26
§ 6. Преобразование параметров e_{ij} и ω_j при переходе от одних осей к другим	31
§ 7. Геометрический смысл параметров ω_j	34
§ 8. Волокна, сохраняющие свое направление после деформации	39
§ 9. Инварианты деформации и поворота	41
§ 10. Общая картина деформации в окрестности про- извольной точки тела	43
§ 11. Изменение объема	46
§ 12. О величине удлинений и сдвигов	48
§ 13. Теория малых деформаций	50
§ 14. Случай, когда малы не только деформации, но и углы поворота	51
§ 15. Переход к формулам классической теории	56
§ 16. О переходе к криволинейным координатам	59
Глава II. Равновесие объемного элемента тела	
§ 17. Напряжения	63
§ 18. Формулы для пересчета компонентов напряжения при переходе от одной системы координат к дру- гой	66

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 19. Условия равновесия элементарного параллелепипеда, выделенного из деформированного тела . . .	70
§ 20. Преобразование уравнений равновесия объемного элемента к декартовым координатам точек тела до его деформации	74
§ 21. Упрощение уравнений равновесия при малых удлинениях и сдвигах	81
§ 22. Упрощение уравнений равновесия при малых поворотах	83
§ 23. Переход к уравнениям равновесия классической теории упругости	84
§ 24. Переход к криволинейным координатам	86

Глава III. Работа деформации, граничные условия, упругий закон

§ 25. Работа деформации	93
§ 26. Начало возможных перемещений	96
§ 27. Вывод дифференциальных уравнений равновесия деформированного изотропного тела из принципа возможных перемещений	99
§ 28. Связь между напряжениями и компонентами деформации	107
§ 29. Граничные условия	112
§ 30. Упрощение полученных формул в случае малой деформации	113
§ 31. Закон Гука	113
§ 32. О возможности применения формул (III. 38) к упругопластическим деформациям	118
§ 33. О наиболее простых вариантах нелинейной связи между напряжениями и деформациями	121
§ 34. Заключение	125

Глава IV. О постановке задач теории упругости в напряжениях

§ 35. Еще две формы написания уравнений равновесия объемного элемента	128
§ 36. Упрощение уравнений (IV. 7), (IV. 8) применительно к малой деформации	133
§ 37. Еще одна форма граничных условий	134

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 38. Упрощение уравнений (IV. 7), (IV. 8) применительно к случаю, когда углы поворота малы	137
§ 39. Обобщение соотношений Сен-Венана на случай больших поворотов и деформаций	139
§ 40. Упрощение соотношений (IV. 26) для малых деформаций	143
§ 41. О возможности формулировки задач теории упругости в напряжениях и деформациях	145
Глава V. Проблема упругой устойчивости	
§ 42. Неоднозначность решения задачи теории упругости	147
§ 43. Дифференциальные уравнения для определения критических нагрузок	149
§ 44. Краевые условия проблемы упругой устойчивости	157
§ 45. Энергетический критерий определения критических нагрузок	162
Глава VI. О деформации гибких тел	
§ 46. Деформация пластин	170
§ 47. Двухмерная деформация бесконечно длинной полосы	175
§ 48. Деформация оболочек	178
§ 49. О сущности допущений Кирхгофа	185
§ 50. Деформация стержней (первое приближение) . . .	189
§ 51. Деформация стержней (второе приближение) . . .	199
§ 52. Чистое кручение	202
§ 53. Окончательные выражения для деформаций тонкого стержня	204
§ 54. Заключение	205
Библиография	207

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана на основе курса лекций, прочтенных автором в 1947 г. на Математико-механическом факультете Ленинградского Государственного ордена Ленина университета.

Она посвящена изложению теории упругости свободной от предположений, ограничивающих величину удлинений, сдвигов и углов поворота. В ней рассматривается также в общей постановке вопрос о связи между напряжениями и деформациями в изотропном упругом теле.

Уравнения классической (линейной) теории упругости получаются из уравнений излагаемой ниже общей теории, если предположить, что

- а) удлинения и сдвиги пренебрежимо малы по сравнению с единицей;
- б) квадраты углов поворота пренебрежимо малы по сравнению с удлинениями и сдвигами;
- в) связь между напряжениями и деформациями выражается законом Гука.

Будучи существенным обобщением классической теории, нелинейная теория упругости позволяет подойти к решению ряда важных задач, которые из первой теории, в силу ее ограниченности, выпадают.

Подобными задачами в частности являются:

1. Проблема устойчивости упругого равновесия.
2. Проблема деформации тел, имеющих начальные напряжения.
3. Проблема сильного изгиба стержней.
4. Проблемы кручения и изгиба, осложненные наличием осевых сил.
5. Проблемы изгиба пластин и оболочек, при прогибах сравнимых с толщиной.

6. Проблема деформации упругих тел, не следующих закону Гука.

Наконец, в последнее время было доказано, что равновесие упруго-пластических тел (при соблюдении некоторых ограничений) может рассматриваться на основании общих принципов теории упругости. Тем самым и проблема равновесия упруго-пластической среды в известной мере включается в круг задач нелинейной теории упругости.

Перечисленные выше задачи весьма актуальны, чем и объясняется все возрастающее внимание к нелинейной теории упругости со стороны ученых Советского Союза и других стран (см. библиографию).

Чтобы сделать книгу доступной возможно более широкому кругу читателей, автор стремился проводить все выводы наиболее наглядно и просто, избегая в частности тензорного исчисления и соответствующей ему сложной символики (или, точнее говоря, применяя их лишь в том небольшом объеме, который присущ курсам классической теории упругости).

В заключение автор приносит благодарность проф. А. И. Лурье, доценту ЛГУ Л. М. Качанову и редактору книги А. И. Чекмареву за ряд ценных, высказанных ими при чтении рукописи критических замечаний.

Ленинград,
ноябрь 1947 г.

ГЛАВА I

ГЕОМЕТРИЯ ДЕФОРМАЦИИ

§ 1. Координаты

В этой главе будут рассмотрены основные геометрические свойства деформации.

Вопрос ставится так — даны положения точек тела в первоначальном его состоянии (то есть до деформации) и даны их положения в окончательном его состоянии (то есть после деформации). Нужно определить изменение расстояния между двумя произвольными бесконечно близкими точками этого тела, обусловленное переходом из первого состояния во второе. Вопрос этот чисто геометрический и при его рассмотрении совершенно не важны ни причины, вызывающие деформацию, ни закон, по которому тело ей сопротивляется.

Пусть положения точек тела в первоначальном состоянии определяются их проекциями x, y, z на оси некоторой прямоугольной системы декартовых координат X, Y, Z .

Пусть, далее, точки тела получают перемещения с компонентами, по тем же осям u, v, w , которые будем считать заданными функциями x, y и z . Тогда окончательное положение произвольной точки тела определится декартовыми координатами:

$$\begin{aligned}\xi &= x + u(x, y, z), \\ \eta &= y + v(x, y, z), \\ \zeta &= z + w(x, y, z).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Функции u, v, w , а также их частные производные по x, y и z будем считать непрерывными. Это ограничение может быть названо условием непрерывности деформации.

Из формул (I.1) следует, что окончательное положение точек тела можно задавать двояким образом: во-первых — декартовыми координатами ξ, η, ζ и, во-вторых, — координатами начального состояния x, y, z . Последние, являясь для исходного состояния декартовыми, для окончательного состояния будут криволинейными координатами. Действительно, полагая (I.1) $x = x_0, y = y_0$, мы получим три уравнения

$$\begin{aligned}\xi &= x_0 + u(x_0, y_0, z), \\ \eta &= y_0 + v(x_0, y_0, z), \\ \zeta &= z + w(x_0, y_0, z),\end{aligned}\tag{I.2}$$

определяющие в совокупности кривую, на которой расположатся (после деформации) те точки тела (M_1, M_2, \dots),

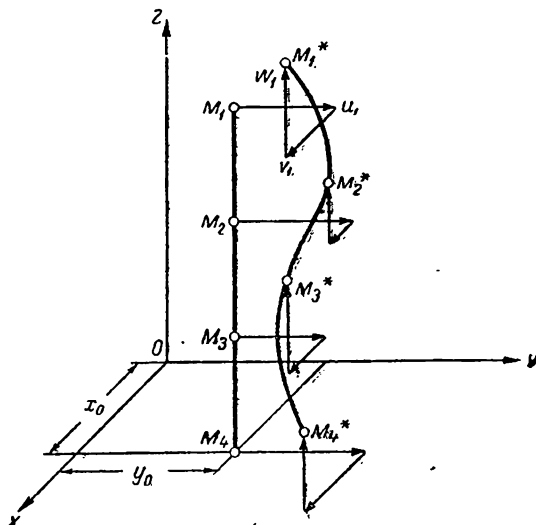


Рис. I.

которые до деформации находились на прямой ($x = x_0, y = y_0$), параллельной оси z (рис. 1). Отсюда ясно, что координатные линии $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ *) в деформированном теле являются теми

*) Здесь и в дальнейшем, говоря о x, y, z как о криволинейных координатах деформированного тела, отмечаем их „тильдой“.

(вообще говоря, кривыми) линиями, на которых размещаются точки, бывшие до деформации на прямых параллельных соответствующим координатным осям.

Таков физический смысл преобразования координат, заключающегося в формулах (I.1).

Исследование деформации в окрестности произвольной точки $M(x, y, z)$ сводится к изучению геометрических свойств координат x, y, z , трактуемых как криволинейные координаты деформированного тела.

Отметим далее, что ξ, η, ζ , будучи декартовыми координатами для деформированного тела, являются криволинейными координатами по отношению к телу до деформации. В самом деле, полагая в (I.1) $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$, мы получим три уравнения

$$\begin{aligned}\xi_0 &= x + u(x, y, z), \\ \eta_0 &= y + v(x, y, z), \\ \zeta &= z + w(x, y, z),\end{aligned}\tag{I.3}$$

которые, после решения их относительно x, y, z , принимают вид

$$\begin{aligned}x &= f_1(\xi_0, \eta_0, \zeta), \\ y &= f_2(\xi_0, \eta_0, \zeta), \\ z &= f_3(\xi_0, \eta_0, \zeta)\end{aligned}\tag{I.4}$$

и определяют в системе X, Y, Z кривую, на которой находились до деформации точки тела, располагающиеся после деформации на прямой $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$, параллельной оси Z .

Таким образом линии $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}^*)$ являются в теле до деформации теми кривыми, которые в результате деформации превращаются в прямые, параллельные соответствующим координатным осям. Условимся в дальнейшем называть „волокном тела“ совокупность его точек, расположенных вдоль некоторой линии, а „линейным элементом тела“ — дифференциально-малый отрезок какого-либо волокна.

*) Здесь и в дальнейшем, говоря о ξ, η, ζ как о криволинейных координатах точек тела до его деформации, отмечаем их „тильдой“.

Кроме того, условимся называть „слоем тела“ совокупность его точек, располагающихся на некоторой поверхности, а „элементарной площадкой тела“ — бесконечно малый элемент какого либо слоя.

§ 2. Углы, определяющие направления координатных линий

В результате деформации точка $M(x, y, z)$ переместится в положение M^* с декартовыми координатами ξ, η, ζ , а бесконечно близкая к ней точка $N(x+dx, y+dy, z+dz)$ — в положение N^* с координатами $\xi+d\xi, \eta+d\eta, \zeta+d\zeta$.

Вектор $\overrightarrow{M^*N^*}$ (с проекциями $d\xi, d\eta, d\zeta$) определяет величину и направление линейного элемента тела, величина и направление которого до деформации были заданы вектором \overrightarrow{MN} (с проекциями dx, dy, dz).

Применив формулы (I.1) к точке $(x+dx, y+dy, z+dz)$ и разлагая их правые части в ряды Тэйлора в точке x, y, z (при сохранении малых только первого порядка), будем иметь:

$$\begin{aligned} d\xi &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ d\eta &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ d\zeta &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz. \end{aligned} \quad (I.5)$$

Выражения (I.5) определяют проекции произвольного линейного элемента тела после деформации, через его проекции до деформации.

Если ввести обозначения:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (I.6)$$

и

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (I.7)$$

то формулы (1.5) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} d\xi &= (1 + e_{xx}) dx + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z\right) dy + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y\right) dz, \\ d\eta &= \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z\right) dx + (1 + e_{yy}) dy + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x\right) dz, \\ d\zeta &= \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y\right) dx + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x\right) dy + (1 + e_{zz}) dz. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Пусть линейный элемент до деформации параллелен оси X , имея проекции $(MN)_x = dx$, $(MN)_y = 0$, $(MN)_z = 0$. Тогда согласно (1.8) его проекции после деформации будут равны

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= (1 + e_{xx}) dx, & d\eta &= \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z\right) dx, \\ d\zeta &= \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y\right) dx, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

а его длина после деформации

$$\begin{aligned} |M^*N^*| &= \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2} = \\ &= \sqrt{(1 + e_{xx})^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z\right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y\right)^2} \cdot dx = \\ &= (1 + E_x) dx, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$E_x = \frac{|M^*N^*| - |MN|}{|MN|} \quad (1.11)$$

есть относительное удлинение элемента dx при деформации.

Отсюда косинусы углов, образуемых вектором $\overrightarrow{M^*N^*}$ с осями X, Y, Z (в том частном случае, когда \overrightarrow{MN} параллелен оси X), определяются формулами

$$\begin{aligned} \cos(MN, X) &= \frac{1 + e_{xx}}{1 + E_x}, & \cos(MN, Y) &= \frac{\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z}{1 + E_x}, \\ \cos(MN, Z) &= \frac{\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y}{1 + E_x}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Линейный элемент dx в результате деформации превращается в элемент дуги линии \tilde{x} в деформированном теле. Ввиду этого формулы (1.12) дают направляющие косинусы касательной к этой линии в точке M^* . Путем аналогичных рассуждений, но применяя их к линейным элементам dy и

dz , можно вывести выражения и для направляющих косинусов касательных к линиям \tilde{y} и \tilde{z} в той же точке. Обозначим единичные векторы, направленные по вышеуказанным

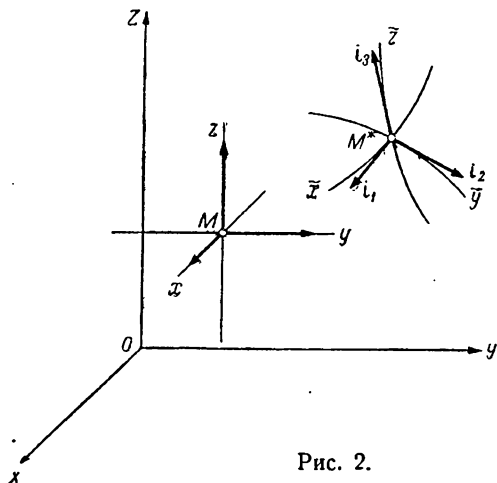


Рис. 2.

трем касательным, через i_1, i_2, i_3 (рис. 2). Тогда, в соответствии с полученными выше результатами, можно составить следующую таблицу проекций данных векторов на оси X, Y, Z .

Таблица 1

	i_1	i_2	i_3
X	$\frac{1 + e_{xx}}{1 + E_x}$	$\frac{\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z}{1 + E_y}$	$\frac{\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y}{1 + E_z}$
Y	$\frac{\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z}{1 + E_x}$	$\frac{1 + e_{yy}}{1 + E_y}$	$\frac{\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x}{1 + E_z}$
Z	$\frac{\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y}{1 + E_x}$	$\frac{\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x}{1 + E_y}$	$\frac{1 + e_{zz}}{1 + E_z}$

Здесь, кроме уже введенных обозначений:

$$\begin{aligned} 1 + E_y &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z\right)^2 + (1 + e_{yy})^2 + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x\right)^2}, \\ 1 + E_z &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y\right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x\right)^2 + (1 + e_{zz})^2}. \end{aligned} \quad (I.13)$$

Таблица 1, как ясно из вышеизложенного, определяет направляющие косинусы касательных к линиям \tilde{x} , \tilde{y} и \tilde{z} в точке M^* .

Решая далее (I.8 или I.5) относительно dx , dy , dz , находим:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{D} (\alpha_{11} d\xi + \alpha_{12} d\eta + \alpha_{13} d\zeta), \\ dy &= \frac{1}{D} (\alpha_{21} d\xi + \alpha_{22} d\eta + \alpha_{23} d\zeta), \\ dz &= \frac{1}{D} (\alpha_{31} d\xi + \alpha_{32} d\eta + \alpha_{33} d\zeta), \end{aligned} \quad (I.14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} = \\ &= (1 + e_{yy}) (1 + e_{zz}) - \frac{1}{4} e_{yz}^2 + \omega_z^2, \\ \alpha_{12} &= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y\right) \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x\right) - \\ &- (1 + e_{zz}) \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z\right), \\ \alpha_{13} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z\right) \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x\right) - \\ &- (1 + e_{yy}) \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y\right), \\ \alpha_{21} &= \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x\right) \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y\right) - \\ &- (1 + e_{zz}) \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z\right), \\ \alpha_{22} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} = (1 + e_{xx}) (1 + e_{zz}) - \\ &- \frac{1}{4} e_{xz}^2 + \omega_y^2, \end{aligned} \quad (I.15)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{23} &= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial v}{\partial z} = \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_z\right) \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_x\right) - \\
&\quad - (1 + e_{xx}) \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_y\right), \\
\alpha_{31} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_x\right) \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_y\right) - \\
&\quad - (1 + e_{yy}) \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_z\right), \\
\alpha_{32} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_x\right) \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_z\right) - \\
&\quad - (1 + e_{xx}) \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_y\right), \\
\alpha_{33} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = (1 + e_{xx})(1 + e_{yy}) - \\
&\quad - \frac{1}{4} e_{xy}^2 + \omega_z^2,
\end{aligned}$$

и

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + e_{xx} & \frac{1}{2} e_{xy} - \omega_x & \frac{1}{2} e_{xz} + \omega_z \\ \frac{1}{2} e_{xy} + \omega_x & 1 + e_{yy} & \frac{1}{2} e_{yz} - \omega_y \\ \frac{1}{2} e_{xz} - \omega_z & \frac{1}{2} e_{yz} + \omega_y & 1 + e_{zz} \end{vmatrix} \quad (I.16)$$

Формулы (I.14) выражают проекции произвольного линейного элемента тела до деформации, через его же проекции после деформации.*

Рассмотрим теперь линейный элемент $d\xi$, то есть линейный элемент, параллельный после деформации оси X .

Согласно (I.14) его проекции до деформации равны:

$$dx = \frac{\alpha_{11}}{D} d\xi, \quad dy = \frac{\alpha_{21}}{D} d\xi, \quad dz = \frac{\alpha_{31}}{D} d\xi; \quad (I.17)$$

а его длина до деформации

$$|MN| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{1}{D} \sqrt{\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2} d\xi = \frac{d\xi}{1 + E\xi}, \quad (I.18)$$

* Определитель D , между прочим, в рассматриваемой задаче всегда отличен от нуля, поскольку равенство его нулю означало бы бесконечное уплотнение тела в соответствующей точке (§ 11).

где

$$E_{\xi} = \frac{|M^*N^*| - |MN|}{|MN|} = \frac{D}{\sqrt{\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2}} - 1 \quad (1.19)$$

есть относительное удлинение элемента MN , параллельного после деформации оси X .

Отсюда косинусы углов, образуемых вектором \overrightarrow{MN} , будут в рассматриваемом случае равны

$$\begin{aligned} \cos(MN, X) &= \frac{1 + E_{\xi}}{D} \alpha_{11}, & \cos(MN, Y) &= \frac{1 + E_{\xi}}{D} \alpha_{21}, \\ \cos(MN, Z) &= \frac{1 + E_{\xi}}{D} \alpha_{31}. \end{aligned}$$

Эти косинусы определяют направление (до деформации) того линейного элемента, проходящего через точку M , который

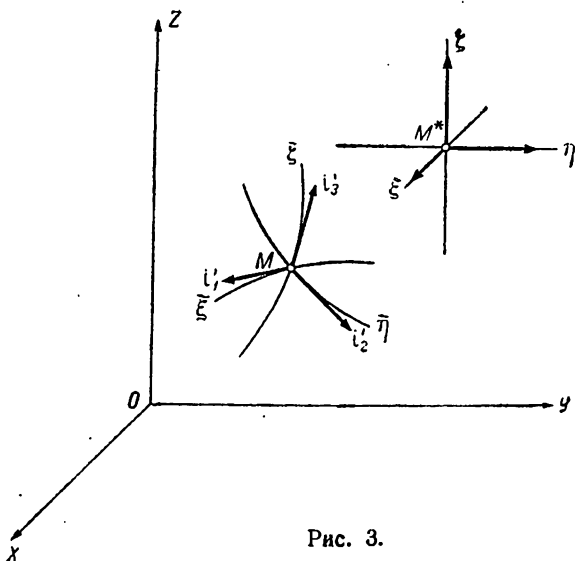


Рис. 3.

в результате деформации становится параллелен оси X , или, иначе говоря, они определяют направление касательной к линии $\tilde{\xi}$ в точке M (см. предыдущий параграф).

Путем аналогичных рассуждений, но, применяя их к линейным элементам $d\eta$ и $d\zeta$, можно получить и косинусы углов, задающих направления касательных к линиям $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\zeta}$ в точке M .

Обозначим единичные векторы, направленные по вышеуказанным трем касательным, через i'_1, i'_2, i'_3 (рис. 3). Тогда, для проекций этих единичных векторов, на основании выше изложенного, может быть составлена таблица.

Таблица 2

	i'_1	i'_2	i'_3
X	$\frac{1+E_\xi}{D} a_{11}$	$\frac{1+E_\eta}{D} a_{12}$	$\frac{1+E_\zeta}{D} a_{13}$
Y	$\frac{1+E_\xi}{D} a_{21}$	$\frac{1+E_\eta}{D} a_{22}$	$\frac{1+E_\zeta}{D} a_{23}$
Z	$\frac{1+E_\xi}{D} a_{31}$	$\frac{1+E_\eta}{D} a_{32}$	$\frac{1+E_\zeta}{D} a_{33}$

в ней, кроме уже введенных обозначений:

$$E_\eta = \frac{D}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2}} - 1, \quad E_\zeta = \frac{D}{\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2}} - 1.$$

Таблица 2, определяет направляющие косинусы касательных

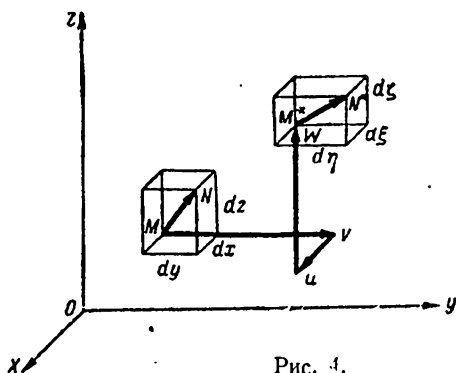


Рис. 4.

к линиям $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$ в точке $M(x, y, z)$ или, иначе говоря, определяет направляющие косинусы тех волокон, проходящих через точку M , которые после деформации становятся параллельными осям X, Y, Z .

В дальнейшем мы будем рассматривать встречающиеся тензоры и векторы либо в декартовой системе X, Y, Z , либо в неортогональной криволинейной системе $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, локаль-

ными ортами которой являются i_1, i_2, i_3 . При этом условимся в первом случае отмечать составляющие индексами ξ, η, ζ , а во втором — x, y, z (без „тильдошек“ — во избежание пестроты формул).

§ 3. Компоненты деформации

Квадрат расстояния между точками M и N (рис. 4) равен до деформации

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.20)$$

после деформации

$$ds_*^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Составляя разность этих квадратов и подставляя при этом во вторую из формул (I. 20) вместо $d\xi, d\eta, d\zeta$ их значения согласно формулам (I.5 или I.8), будем иметь:

$$ds_*^2 - ds^2 = 2(e_{xx}dx^2 + e_{yy}dy^2 + e_{zz}dz^2 + e_{xy}dx dy + e_{xz}dx dz + e_{yz}dy dz). \quad (1.21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = \\ &= e_{xx} + \frac{1}{2} \left[e_{xx}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right)^2 \right]; \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] = \\ &= e_{yy} + \frac{1}{2} \left[e_{yy}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right)^2 \right]; \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] = \\ &= e_{zz} + \frac{1}{2} \left[e_{zz}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right)^2 \right]; \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \\ &= e_{xy} + e_{xx} \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) + e_{yy} \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right); \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} = \\
 &= e_{xz} + e_{xx} \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) + e_{zz} \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right); \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} = \\
 &= e_{yz} + e_{yy} \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) + e_{zz} \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right).
 \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$E_{MN} = \frac{ds_* - ds}{ds}. \quad (1.23)$$

E_{MN} — есть увеличение расстояния между точками M и N (обусловленное деформацией), отнесенное к расстоянию между ними до деформации. Данную величину назовем относительным удлинением в точке M в направлении точки N .

При использовании обозначения (1.23) формула (1.21) приводится к виду:

$$\begin{aligned}
 E_{MN} \left(1 + \frac{1}{2} E_{MN} \right) ds^2 &= \varepsilon_{xx} dx^2 + \varepsilon_{yy} dy^2 + \varepsilon_{zz} dz^2 + \\
 &\quad + \varepsilon_{xy} dx dy + \varepsilon_{xz} dx dz + \varepsilon_{yz} dy dz
 \end{aligned} \quad (1.24)$$

или еще

$$\begin{aligned}
 E_{MN} \left(1 + \frac{1}{2} E_{MN} \right) &= \varepsilon_{xx} \lambda^2 + \varepsilon_{yy} \mu^2 + \varepsilon_{zz} \nu^2 + \\
 &\quad + \varepsilon_{xy} \lambda \mu + \varepsilon_{xz} \lambda \nu + \varepsilon_{yz} \mu \nu,
 \end{aligned} \quad (1.25)$$

где λ , μ и ν — суть косинусы, определяющие направление вектора \overrightarrow{MN} (то есть направление линейного элемента до деформации)

$$\lambda = \frac{dx}{ds}, \quad \mu = \frac{dy}{ds}, \quad \nu = \frac{dz}{ds}. \quad (1.26)$$

Из формулы (1.25) видно, что для вычисления относительного удлинения в произвольной точке M в любом направлении (λ, μ, ν) достаточно знать шесть величин ε_{xx} ,

$\epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$, выражающихся через перемещения формулами (1.22). Данные шесть величин, будучи известными в каждой точке тела, полностью характеризуют его деформацию. Равенство их нулю во всех точках тела означает неизменность расстояний между любыми его двумя точками, что равносильно отсутствию деформации. Отсюда ясно, что перемещения u, v, w , удовлетворяющие уравнениям

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0, \quad (1.27)$$

могут быть лишь перемещениями тела как абсолютно твердого целого.

Выясним физическое значение параметров $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$, которые в дальнейшем будем называть компонентами деформации.

Полагая в формуле (1.25) $\mu = 0, \nu = 0, \lambda = 1$, то есть считая, что до деформации рассматриваемый элемент параллелен оси X , будем иметь:

$$E_x \left(1 + \frac{1}{2} E_x\right) = \epsilon_{xx}. \quad (1.28)$$

Откуда

$$E_x = \sqrt{1 + 2\epsilon_{xx}} - 1, \quad (1.29)$$

где E_x — относительное удлинение в точке M в направлении оси X .

Аналогично

$$\begin{aligned} E_y &= \sqrt{1 + 2\epsilon_{yy}} - 1, \\ E_z &= \sqrt{1 + 2\epsilon_{zz}} - 1, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где E_y, E_z — суть относительные удлинения в точке M в направлениях осей Y и Z .

Таким образом компоненты деформации $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ характеризуют удлинения тех линейных элементов, которые до деформации параллельны координатным осям.

Для выяснения физического смысла компонентов деформации $\epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$ найдем косинусы углов, образуемых векторами i_1, i_2, i_3 друг с другом (то есть косинусы углов между касательными к линиям $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, проходящим через точку M^*).

По известной формуле аналитической геометрии

$$\cos(i_1, i_2) = \cos(i_1, X) \cos(i_2, X) + \cos(i_1, Y) \cos(i_2, Y) + \cos(i_1, Z) \cos(i_2, Z). \quad (1.30)$$

Подставляя сюда значения косинусов из таблицы 1, получаем:

$$\cos(i_1, i_2) = \frac{\epsilon_{xy}}{(1 + E_x)(1 + E_y)}, \quad (1.31)$$

До деформации угол между линейными элементами dx , dy является прямым. Обозначим его уменьшение, обусловленное деформацией, через φ_{xy} . Тогда:

$$\begin{aligned} \cos(i_1, i_2) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{xy}\right) = \\ &= \sin \varphi_{xy} = \frac{\epsilon_{xy}}{(1 + E_x)(1 + E_y)}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Обозначив, далее, уменьшения углов между линейными элементами dx , dz и dy , dz (получающиеся при деформации) через φ_{xz} , φ_{yz} , можно написать еще две формулы (по аналогии с предыдущей)

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{xz} &= \frac{\epsilon_{xz}}{(1 + E_x)(1 + E_z)}, \\ \sin \varphi_{yz} &= \frac{\epsilon_{yz}}{(1 + E_y)(1 + E_z)}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Углы φ_{xy} , φ_{xz} , φ_{yz} назовем сдвигами.

Из вышеизложенного следует, что компоненты деформации ϵ_{xy} , ϵ_{xz} , ϵ_{yz} характеризуют сдвиги, и если эти три компонента деформации равны нулю, то углы между линейными элементами dx , dy , dz остаются прямыми и после деформации.

§ 4. Преобразование компонентов деформации при переходе от одних осей к другим

Одна и та же деформация может быть рассмотрена в различных системах декартовых координат. Во всех случаях она будет полностью характеризоваться установленными выше

шестью компонентами деформации, значение которых, однако, будет зависеть от выбора направления координатных осей.

Дадим формулы пересчета этих параметров, при переходе от одной системы координат к другой. Рассмотрим для этого, наряду с основной нашей системой X, Y, Z , другую систему X', Y', Z' , направления осей которой по отношению к осям первой системы пусть задаются следующей таблицей косинусов (табл. 3).

Таблица 3

	X	Y	Z
X'	λ_1	μ_1	ν_1
Y'	λ_2	μ_2	ν_2
Z'	λ_3	μ_3	ν_3

Так как обе системы являются прямоугольными, то между этими косинусами существуют зависимости:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= 1, & \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 &= 0, \\ \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 &= 1, & \lambda_1\lambda_3 + \mu_1\mu_3 + \nu_1\nu_3 &= 0, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, & \lambda_2\lambda_3 + \mu_2\mu_3 + \nu_2\nu_3 &= 0, \end{aligned} \quad (I.33)$$

или, записанные в другом виде,

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 &= 1, & \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 &= 0, \\ \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 &= 1, & \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3 &= 0, \\ \lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 &= 1, & \mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \mu_3\nu_3 &= 0. \end{aligned}$$

Проекции на оси первой системы линейного элемента, имеющего по осям второй системы компоненты dx', dy', dz' , будут равны:

$$\begin{aligned} dx &= \lambda_1 dx' + \lambda_2 dy' + \lambda_3 dz', \\ dy &= \mu_1 dx' + \mu_2 dy' + \mu_3 dz', \\ dz &= \nu_1 dx' + \nu_2 dy' + \nu_3 dz'. \end{aligned} \quad (I.34)$$

Возвратимся к формуле (I.21). В левой ее части стоит изменение квадрата расстояния между точками M и N , обусловленное деформацией. Поскольку выбор этих точек не зависит от выбора системы координат, постольку левая часть

формулы (I. 21) также от него не зависит, оставаясь инвариантной при переходе от одних осей к другим.

Подставляя в правую часть формулы (I. 24) вместо dx , dy , dz их выражения через проекции вектора MN на новые оси координат, то есть через dx' , dy' , dz' [см. формулы (I. 34)] будем иметь:

$$\begin{aligned} E_{MN} (1 + \frac{1}{2} E_{MN}) ds^2 = & \epsilon'_{xx} (dx')^2 + \epsilon'_{yy} (dy')^2 + \\ & + \epsilon'_{zz} (dz')^2 + \epsilon'_{xy} dx' dy' + \\ & + \epsilon'_{xz} dx' dz' + \epsilon'_{yz} dy' dz', \quad (I. 35) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon'_{xx} = & \epsilon_{xx} \lambda_1^2 + \epsilon_{yy} \mu_1^2 + \epsilon_{zz} \nu_1^2 + \epsilon_{xy} \lambda_1 \mu_1 + \epsilon_{xz} \lambda_1 \nu_1 + \epsilon_{yz} \mu_1 \nu_1, \\ \epsilon'_{yy} = & \epsilon_{xx} \lambda_2^2 + \epsilon_{yy} \mu_2^2 + \epsilon_{zz} \nu_2^2 + \epsilon_{xy} \lambda_2 \mu_2 + \epsilon_{xz} \lambda_2 \nu_2 + \\ & + \epsilon_{yz} \mu_2 \nu_2, \\ \epsilon'_{zz} = & \epsilon_{xx} \lambda_3^2 + \epsilon_{yy} \mu_3^2 + \epsilon_{zz} \nu_3^2 + \epsilon_{xy} \lambda_3 \mu_3 + \epsilon_{xz} \lambda_3 \nu_3 + \epsilon_{yz} \mu_3 \nu_3, \\ \epsilon'_{xy} = & 2 (\epsilon_{xx} \lambda_1 \lambda_2 + \epsilon_{yy} \mu_1 \mu_2 + \epsilon_{zz} \nu_1 \nu_2) + \epsilon_{xy} (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + \\ & + \epsilon_{xz} (\lambda_1 \nu_2 + \lambda_2 \nu_1) + \epsilon_{yz} (\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1), \\ \epsilon'_{xz} = & 2 (\epsilon_{xx} \lambda_1 \lambda_3 + \epsilon_{yy} \mu_1 \mu_3 + \epsilon_{zz} \nu_1 \nu_3) + \epsilon_{xy} (\lambda_1 \mu_3 + \lambda_3 \mu_1) + \\ & + \epsilon_{xz} (\lambda_1 \nu_3 + \lambda_3 \nu_1) + \epsilon_{yz} (\mu_1 \nu_3 + \mu_3 \nu_1), \\ \epsilon'_{yz} = & 2 (\epsilon_{xx} \lambda_2 \lambda_3 + \epsilon_{yy} \mu_2 \mu_3 + \epsilon_{zz} \nu_2 \nu_3) + \epsilon_{xy} (\lambda_2 \mu_3 + \lambda_3 \mu_2) + \\ & + \epsilon_{xz} (\lambda_2 \nu_3 + \lambda_3 \nu_2) + \epsilon_{yz} (\mu_2 \nu_3 + \mu_3 \nu_2). \end{aligned} \quad (I. 36)$$

Формула (I. 35) имеет вид, подобный формуле (I. 24) и очевидно, что входящие в нее коэффициенты ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ..., ϵ_{yz} имеют по отношению к системе осей X' , Y' , Z' тот же смысл, какой имеют коэффициенты ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ..., ϵ_{yz} по отношению к системе X , Y , Z .

Отсюда ясно, что формулы (I. 36) дают искомый закон преобразования компонентов деформации при переходе от одной системы координат к другой.

§ 5. Главные направления деформации

Будем искать такое направление, в котором относительное удлинение E_{MN} принимает экстремальное значение.

Если взять ось X' параллельной этому направлению, то, согласно формуле (1.35), будем иметь:

$$E_{x'} \left(1 + \frac{1}{2} E_{x'} \right) = \epsilon'_{xx} \quad (1.37)$$

или

$$E_{x'} = \sqrt{1 + 2\epsilon'_{xx}} - 1.$$

Из этого выражения видно, что вопрос отыскания экстремума удлинения $E_{x'}$ сводится к отысканию экстремума компонента деформации ϵ_{xx} , то есть к определению таких значений λ_1 , μ_1 и ν_1 , при которых первое из выражений (1.36) становится экстремальным. При этом речь идет об относительном экстремуме, поскольку между λ_1 , μ_1 , ν_1 существует связь

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 - 1 = 0. \quad (1.38)$$

Составляя функцию

$$L = \epsilon'_{xx} - \epsilon (\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 - 1), \quad (1.39)$$

где ϵ — лагранжев постоянный множитель и, приравняв нулю ее частные производные по λ_1 , μ_1 и ν_1 , получим следующие три линейных однородных уравнения:

$$\begin{aligned} 2(\epsilon_{xx} - \epsilon) \lambda_1 + \epsilon_{xy} \mu_1 + \epsilon_{xz} \nu_1 &= 0, \\ \epsilon_{xy} \lambda_1 + 2(\epsilon_{yy} - \epsilon) \mu_1 + \epsilon_{yz} \nu_1 &= 0, \\ \epsilon_{xz} \lambda_1 + \epsilon_{yz} \mu_1 + 2(\epsilon_{zz} - \epsilon) \nu_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Нулевое решение этой системы нас не устраивает в силу существования условия (1.38), и следовательно определитель, составленный из ее коэффициентов, должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} 2(\epsilon_{xx} - \epsilon) & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & 2(\epsilon_{yy} - \epsilon) & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & 2(\epsilon_{zz} - \epsilon) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.41)$$

Данное уравнение является кубическим по отношению к множителю Лагранжа и, следовательно, оно имеет, по крайней мере, один вещественный корень, который обозначим через ϵ_1 .

Заметим, что формула для ϵ'_{xx} может быть приведена к виду:

$$\epsilon'_{xx} = (\epsilon_{xx} \lambda_1 + \frac{1}{2} \epsilon_{xy} \mu_1 + \frac{1}{2} \epsilon_{xz} \nu_1) \lambda_1 + \left(\frac{1}{2} \epsilon_{xy} \lambda_1 + \epsilon_{yy} \mu_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \epsilon_{yz} \nu_1 \right) \mu_1 + \left(\frac{1}{2} \epsilon_{xz} \lambda_1 + \frac{1}{2} \epsilon_{yz} \mu_1 + \epsilon_{zz} \nu_1 \right) \nu_1. \quad (I.42)$$

Подставляя сюда вместо выражений, стоящих в скобках, их значения согласно (I.40) и учитывая (I.38), находим, что параметр ϵ_1 равен экстремальному значению ϵ_{xx}

$$\epsilon_1 = \text{Ext. } \epsilon'_{xx}. \quad (I.43)$$

Обратим далее внимание на то, что компоненты деформации ϵ'_{xy} , ϵ'_{xz} могут быть представлены в форме:

$$\epsilon'_{xy} = 2 \left[\left(\epsilon_{xx} \lambda_1 + \frac{1}{2} \epsilon_{xy} \mu_1 + \frac{1}{2} \epsilon_{xz} \nu_1 \right) \lambda_2 + \left(\frac{1}{2} \epsilon_{xy} \lambda_1 + \epsilon_{yy} \mu_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \epsilon_{yz} \nu_1 \right) \mu_2 + \left(\frac{1}{2} \epsilon_{xz} \lambda_1 + \frac{1}{2} \epsilon_{yz} \mu_1 + \epsilon_{zz} \nu_1 \right) \nu_2 \right]; \quad (I.44)$$

$$\epsilon'_{xz} = 2 \left[\left(\epsilon_{xx} \lambda_1 + \frac{1}{2} \epsilon_{xy} \mu_1 + \frac{1}{2} \epsilon_{xz} \nu_1 \right) \lambda_3 + \left(\frac{1}{2} \epsilon_{xy} \lambda_1 + \epsilon_{yy} \mu_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \epsilon_{yz} \nu_1 \right) \mu_3 + \left(\frac{1}{2} \epsilon_{xz} \lambda_1 + \frac{1}{2} \epsilon_{yz} \mu_1 + \epsilon_{zz} \nu_1 \right) \nu_3 \right].$$

Подставив сюда вместо выражений, стоящих в круглых скобках, их значения согласно (I.40), будем иметь:

$$\epsilon'_{xy} = 2\epsilon_1 (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2), \\ \epsilon'_{xz} = 2\epsilon_1 (\lambda_1 \lambda_3 + \mu_1 \mu_3 + \nu_1 \nu_3), \quad (I.45)$$

но тогда, ввиду соотношений (I.33), $\epsilon'_{xy} = \epsilon'_{xz} = 0$. Таким образом, если удлинение по оси X' является экстремальным, то компоненты деформации ϵ'_{xy} , ϵ'_{xz} равны нулю, то есть деформация происходит без изменения прямых углов между направлениями X' , Y' и X' , Z' .

Рассмотрим теперь еще одну систему осей X'' , Y'' , Z'' , отличающуюся от X' , Y' , Z' поворотом вокруг оси X' на угол θ .

Таблица косинусов углов между осями этих двух систем имеет вид, ясный из рис. 5.

Тогда, в силу формул перехода (I.36), а также установленных выше следствий, вытекающих из предположения,

Таблица 4

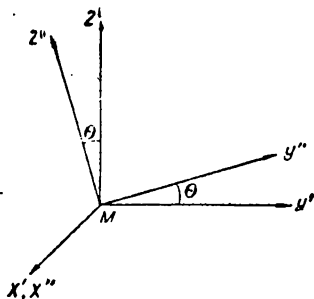


Рис. 5.

	X'	Y'	Z'
X''	1	0	0
Y''	0	$\cos \theta$	$\sin \theta$
Z''	0	$-\sin \theta$	$\cos \theta$

что ось X' является экстремальным направлением для компонента деформации ϵ'_{xx} , будем иметь:

$$\epsilon''_{xx} = \epsilon'_{xx} = \epsilon_1,$$

$$\epsilon''_{yy} = \epsilon'_{yy} \cos^2 \theta + \epsilon'_{zz} \sin^2 \theta + \epsilon_{yz} \cos \theta \sin \theta,$$

$$\epsilon''_{zz} = \epsilon'_{yy} \sin^2 \theta + \epsilon'_{zz} \cos^2 \theta - \epsilon_{yz} \cos \theta \sin \theta, \quad (\text{I.43})$$

$$\epsilon''_{xz} = \epsilon''_{xy} = 0,$$

$$\epsilon''_{yz} = (\epsilon'_{zz} - \epsilon'_{yy}) \sin^2 \theta + \epsilon'_{yz} \cos^2 \theta.$$

Определим угол θ так, чтобы удлинение ϵ''_{yy} было экстремальным, условие чего получим, дифференцируя ϵ''_{yy} по θ и приравнявая производную нулю. Эта операция дает:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon'_{yz}}{\epsilon'_{yy} - \epsilon'_{zz}}. \quad (\text{I.47})$$

Отсюда следует, что каковы бы ни были значения ϵ'_{yz} , ϵ'_{yy} , ϵ'_{zz} , всегда можно найти такой угол θ , при котором ϵ''_{yy} будет экстремальным. Для этого же угла экстремальным будет и ϵ''_{zz} , что легко установить, повторив применительно к нему описанные выше действия. Подставляя далее результат (I.47) в последнюю из формул (I.46), мы видим, что при выборе направлений Y'' , Z'' из условия экстремальности ϵ''_{yy} , ϵ''_{zz} , компонент деформации ϵ''_{yz} получается равным нулю.

Вышеизложенным доказано, что для всякой точки тела можно выбрать такие три взаимно перпендикулярных направления X'', Y'', Z'' , для которых компоненты деформации $\varepsilon''_{xx}, \varepsilon''_{yy}, \varepsilon''_{zz}$ (а следовательно, и относительные удлинения $E_{x''}, E_{y''}, E_{z''}$) будут иметь экстремальные значения, а компоненты деформации $\varepsilon''_{xy}, \varepsilon''_{xz}, \varepsilon''_{yz}$ (а следовательно, и сдвиги $\varphi''_{xy}, \varphi''_{xz}, \varphi''_{yz}$) будут равны нулю.

Отсюда вытекает, что какова бы ни была деформация тела во всякой его точке, можно указать такие три проходящие через нее волокна, которые, будучи взаимно перпендикулярны до деформации, остаются таковыми и после нее.

Эти три направления назовем главными направлениями деформации в точке $M(x, y, z)$ и обозначим соответствующие им экстремальные значения компонентов деформации $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Таким образом, отправляясь от несомненного факта существования одного экстремального направления, который является следствием наличия у кубического уравнения (I.41) хотя бы одного вещественного корня, мы доказали затем существование трех таких направлений. Тем самым доказано, что все три корня уравнения (I.41) всегда вещественны. Единичные векторы, соответствующие главным направлениям деформации, будем обозначать через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Удлинения волокон, имеющих до деформации эти направления, будут равны:

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - 1, \\ E_2 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_2} - 1, \\ E_3 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} - 1. \end{aligned} \quad (\text{I.48})$$

Косинусы углов, образуемых вектором ε_1 с осями X, Y, Z , (λ_1, μ_1, ν_1), могут быть определены из уравнений:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_1)\lambda_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{xy}\mu_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{xz}\nu_1 &= 0, \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy}\lambda_1 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_1)\mu_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{yz}\nu_1 &= 0, \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz}\lambda_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{yz}\mu_1 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_1)\nu_1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.49})$$

и равенства

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1.$$

Аналогично определяются и направляющие косинусы в к-торов e_2, e_3 (λ_2, μ_2, ν_2 и λ_3, μ_3, ν_3).

Так как в результате деформации волокна, направленные по e_1, e_2, e_3 , оставаясь взаимно перпендикулярными, могут получить некоторый поворот, то нужно различать главные направления деформации для исходного и для окончательного положения тела.

Единичные векторы главных направлений после деформации (то есть направления, которые будут иметь после деформации волокна, имеющие до деформации направления e_1, e_2, e_3) будем обозначать e_1^*, e_2^*, e_3^* .

Углы между взаимно перпендикулярными векторами e_1, e_2, e_3 и взаимно перпендикулярными векторами e_1^*, e_2^*, e_3^* характеризуют поворот, который в результате деформации получает бесконечно малый элемент тела, выделенный вокруг точки M . Несколько ниже этот вопрос будет освещен более подробно.

§ 6. Преобразование параметров $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yz}$ и $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ при переходе от одних координатных осей к другим

Установим закон преобразования параметров (I. 6) и (I. 7) при переходе от системы X, Y, Z к другой декартовой системе X', Y', Z' , направление осей которой, по отношению к осям первой системы, задано таблицей 3 (§ 4).

Составляющие перемещения произвольной точки тела по новым осям будут выражаться через его составляющие по старым осям очевидными формулами:

$$\begin{aligned} u' &= u\lambda_1 + v\mu_1 + w\nu_1, \\ v' &= u\lambda_2 + v\mu_2 + w\nu_2, \\ w' &= u\lambda_3 + v\mu_3 + w\nu_3. \end{aligned} \quad (I.50)$$

Подставляя первую из них в выражение

$$e'_{xx} = \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} \quad (I.51)$$

и учитывая, что согласно (I.34)

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \lambda_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = \mu_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x'} = \nu_1, \quad (I.52)$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} e_{xx} = e_{xx}\lambda_1^2 + e_{yy}\mu_1^2 + e_{zz}\nu_1^2 + e_{xy}\lambda_1\mu_1 + \\ + e_{xz}\lambda_1\nu_1 + e_{yz}\mu_1\nu_1. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Выполняя аналогичные выкладки по отношению к остальным параметрам (1.6), приходим к заключению, что данные параметры (e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , e_{xy} , e_{xz} , e_{yz}) преобразуются при переходе от одних декартовых координат к другим по такому же закону, по какому преобразуются компоненты деформации.

Этот результат позволяет доказать, что в каждой точке тела существуют такие три взаимно перпендикулярных волокна, для которых параметры e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , принимают экстремальные значения, а параметры e_{xy} , e_{xz} , e_{yz} равны нулю.

Позволим себе, однако, не останавливаться на этом вопросе, поскольку ход рассуждений в данном случае ничем не отличается от рассуждений, изложенных в предыдущем параграфе. Существенно только отметить, что три волокна, обладающие указанным свойством, вообще говоря, не будут совпадать с главными направлениями деформации в рассматриваемой точке и, следовательно, углы между ними не будут после деформации оставаться прямыми.

Параметры e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} имеют простой геометрический смысл, для выяснения которого рассмотрим линейный элемент тела dx , параллельный (до деформации) оси x . Проекция этого элемента (после деформации) на ту же ось, согласно первой из формул (1.8), будет равна:

$$d\xi = (1 + e_{xx}) dx.$$

Отсюда

$$e_{xx} = \frac{d\xi - dx}{dx}, \quad (1.54)$$

то есть e_{xx} есть относительное удлинение проекции на ось X линейного элемента, направление которого до деформации было параллельно этой оси.

Аналогичный геометрический смысл имеют и параметры e_{yy} , e_{zz} (но для элементов dy , dz). Что касается e_{xy} , e_{xz} , e_{yz} , то в общем случае произвольно большой деформации они наглядного геометрического смысла, повидимому, не имеют.

Остановимся в заключение параграфа на формулах пересчета ω_x , ω_y , ω_z при переходе от одних координатных осей к другим.

В системе X', Y', Z' параметр $\omega_{x'}$ будет определяться формулой:

$$2\omega_{x'} = \frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}. \quad (1.55)$$

Подставляя сюда вместо w' и v' их значения, согласно формулам (1.50), и, переходя от дифференцирования по y' и z' к дифференцированию по x, y, z , что можно сделать на основании формул (1.34), будем иметь:

$$\omega_{x'} = \omega_x(\mu_2\nu_3 - \nu_2\mu_3) + \omega_y(\nu_2\lambda_3 - \lambda_2\nu_3) + \omega_z(\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3). \quad (1.56)$$

По аналогии с этим результатом

$$\begin{aligned} \omega_{y'} &= \omega_x(\nu_1\mu_3 - \mu_1\nu_3) + \omega_y(\lambda_1\nu_3 - \lambda_3\nu_1) + \omega_z(\mu_1\lambda_3 - \mu_3\lambda_1) \\ \omega_{z'} &= \omega_x(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) + \omega_y(\nu_1\lambda_2 - \lambda_1\nu_2) + \omega_z(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Полученные три формулы могут быть упрощены, если учесть, что единичные векторы, определяющие направления X', Y', Z' , связаны между собою (ввиду ортогональности осей) равенствами

$$\dot{i}'_x = \dot{i}'_y \times \dot{i}'_z, \quad \dot{i}'_y = \dot{i}'_z \times \dot{i}'_x, \quad \dot{i}'_z = \dot{i}'_x \times \dot{i}'_y, \quad (1.58)$$

где символ \times означает операцию векторного умножения.

Проектируя (1.58) на направления X, Y, Z и принимая при этом во внимание таблицу косинусов 3, находим:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_2\nu_3 - \nu_2\mu_3, \quad \mu_1 = \nu_2\lambda_3 - \lambda_2\nu_3, \quad \nu_1 = \lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3, \\ \lambda_2 &= \mu_3\nu_1 - \mu_1\nu_3, \quad \mu_2 = \nu_3\lambda_1 - \nu_1\lambda_3, \quad \nu_2 = \mu_1\lambda_3 - \lambda_1\mu_3, \\ \lambda_3 &= \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1, \quad \mu_3 = \nu_1\lambda_2 - \lambda_1\nu_2, \quad \nu_3 = \lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Это — известные соотношения между направляющими косинусами двух систем декартовых прямоугольных координат, написанные в предположении, что обе системы имеют одинаковую ориентацию осей. Если бы одна система была правой, а другая левой, то в формулах (1.59) нужно было бы переписать члены, стоящие в их правых частях.

На основании (1.59) и сделанного выше замечания, формулы (1.56, 1.57) принимают вид:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \pm (\omega_x\lambda_1 + \omega_y\mu_1 + \omega_z\nu_1), \\ \omega_{y'} &= \pm (\omega_x\lambda_2 + \omega_y\mu_2 + \omega_z\nu_2), \\ \omega_{z'} &= \pm (\omega_x\lambda_3 + \omega_y\mu_3 + \omega_z\nu_3), \end{aligned} \quad (1.60)$$

причем верхний знак должен быть взят, если системы X, Y, Z и X', Y', Z имеют одинаковую ориентацию, а нижний — если их ориентация различна.

Отсюда видно, что параметры $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ при переходе от одних осей к другим преобразовываются как проекции аксиального вектора ω , длина которого равна

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}, \quad (1.61)$$

а направление задается косинусами:

$$\cos(\omega, X) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos(\omega, Y) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos(\omega, Z) = \frac{\omega_z}{\omega}. \quad (1.62)$$

§ 7. Геометрический смысл параметров $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Совместим мысленно точку M с точкой M^* и перенесем начало координат системы X, Y, Z в эту общую точку (не изменяя направления осей). При

этом векторы \vec{MN} , $\vec{M^*N^*}$ будут исходить из начала координат, имея проекции:

$$\vec{MN} \sim dx, dy, dz.$$

$$\vec{M^*N^*} \sim d\xi, d\eta, d\zeta.$$

Такое изображение (рис. 6) устраняет несущественное поступательное перемещение окрестности точки M , позволяя сосредоточить внимание на сравнении величины и направления векторов \vec{MN} и $\vec{M^*N^*}$, характеризующих относительное расположение

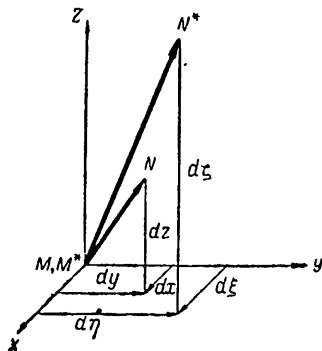


Рис. 6.

точек M и N до и после деформации.

Величины, определяющие изменение размеров линейных элементов тела и изменение углов между ними, обусловленные деформацией, уже были изучены в предыдущих параграфах. Однако при деформации меняются не только относительные, но и абсолютные направления волокон, ввиду чего бесконечно малый объемный элемент, выделенный из тела

в исходном его положении, получает в окончательном положении кроме деформаций также и некоторый поворот. Употребляя этот термин применительно к элементу объема, изменяющему в процессе перемещения не только положение, но также размеры и форму, будем подразумевать под ним среднее значение поворота, получаемого всем множеством линейных элементов, принадлежащих данному объемному элементу.

При этом условимся называть углом поворота волокна вокруг оси Ξ , к которой оно до деформации перпендикулярно, угол ψ между этим волокном (в положении до деформации) и его проекцией (после деформации) на плоскость, перпендикулярную указанной оси (рис. 7).

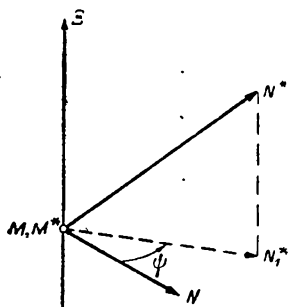


Рис. 7.

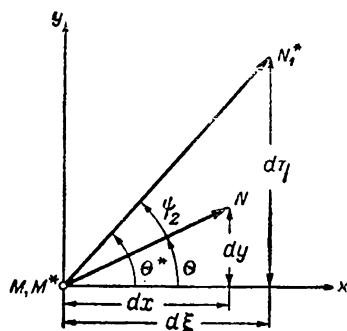


Рис. 8.

Чтобы выяснить величины, характеризующие поворот, получаемый окрестностью точки M в результате перемещений u, v, w , обратимся к формулам (I.8) и применим их к частному случаю, когда линейный элемент MN перпендикулярен оси Z . Тогда $dz = 0$ и формулы (I.8) принимают вид:

$$\begin{aligned} d\xi &= (1 + e_{xx}) dx + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z\right) dy, \\ d\eta &= \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z\right) dx + (1 + e_{yy}) dy, \\ d\zeta &= \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y\right) dx + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x\right) dy. \end{aligned} \quad (\text{I.63})$$

На рис. 8 показана плоскость X, Y , причем отрезок MN представляет собою линейный элемент до деформации (в на-

туральную его величину), а отрезок MN_1^* — проекцию M^*N^* на рассматриваемую плоскость.

Как ясно из рисунка

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}, \quad \operatorname{tg} \theta^* = \frac{d\eta}{d\xi}. \quad (1.64)$$

Вводя во вторую из этих формул значения $d\xi$ и $d\eta$, согласно (1.63), будем иметь:

$$\operatorname{tg} \theta^* = \frac{\frac{1}{2}(e_{xy} + \omega_z) \cos \theta + (1 + e_{yy}) \sin \theta}{(1 + e_{xx}) \cos \theta + \left(\frac{1}{2}e_{xy} - \omega_z\right) \sin \theta}. \quad (1.65)$$

Рассмотрим угол

$$\psi_z = \theta^* - \theta, \quad (1.66)$$

то есть угол поворота волокна MN вокруг оси Z , получающийся в результате деформации. Согласно формулам (1.65) и (1.66)

$$\frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \psi_z}{1 - \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \psi_z} = \frac{\left(\frac{1}{2}e_{xy} + \omega_z\right) \cos \theta + (1 + e_{yy}) \sin \theta}{(1 + e_{xx}) \cos \theta + \left(\frac{1}{2}e_{xy} - \omega_z\right) \sin \theta}. \quad (1.67)$$

Откуда

$$\operatorname{tg} \psi_z = \frac{\omega_z + \frac{1}{2}e_{xy} \cos 2\theta + \frac{1}{2}(e_{yy} - e_{xx}) \sin 2\theta}{1 + e_{xx} \cos^2 \theta + e_{yy} \sin^2 \theta + \frac{1}{2}e_{xy} \sin 2\theta} \quad (1.68)$$

Среднее значение $\operatorname{tg} \psi_z$ в интервале от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$ (то есть среднее его значение для всех волокон, перпендикулярных до деформации оси Z) определяется выражением:

$$\overline{\operatorname{tg} \psi_z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{tg} \psi_z d\theta = I_1 + I_2. \quad (1.69)$$

Здесь

$$I_1 = -\frac{\omega_z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + e_{xx} \cos^2 \theta + e_{yy} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} e_{xy} \sin 2\theta},$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e_{xy} \cos 2\theta + (e_{yy} - e_{xx}) \sin 2\theta}{1 + e_{xx} \cos^2 \theta + e_{yy} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} e_{xy} \sin 2\theta} d\theta. \quad (I.70)$$

Интеграл I_2 может быть взят путем подстановки

$$f = 1 + e_{xx} \cos^2 \theta + e_{yy} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} e_{xy} \sin 2\theta, \quad (I.71)$$

которая дает

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{df}{f} = \frac{1}{4} \left| \ln f \right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0. \quad (I.72)$$

Что касается интеграла I_1 , то он приводится к виду:

$$I_1 = \frac{\omega_z}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + e_{xx} + e_{yy} + \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{xy}^2} \sin(2\theta + \beta)} =$$

$$= \frac{\omega_z}{2\pi} \int_{\beta}^{4\pi + \beta} \frac{d\gamma}{2 + e_{xx} + e_{yy} + \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{xy}^2} \sin \gamma}, \quad (I.73)$$

где

$$\beta = \arcsin \left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{\sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{xy}^2}} \right) =$$

$$= \arccos \left(\frac{e_{xy}}{\sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{xy}^2}} \right). \quad (I.74)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \psi_z = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_z}{\sqrt{1 + e_{xx} + e_{yy} + e_{xx} e_{yy} - \frac{1}{4} e_{xy}^2}} \times$$

$$\times \left| \operatorname{arctg} \frac{(2 + e_{xx} + e_{yy}) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{xy}^2}}{2 \sqrt{1 + e_{xx} + e_{yy} + e_{xx} e_{yy} - \frac{1}{4} e_{xy}^2}} \right|_{\beta}^{4\pi + \beta}.$$

Ввиду многозначности функции $\arctg (\quad)$ полученный результат неопределен.

Однако эта неопределенность может быть раскрыта, если учесть, что при стремлении e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} к нулю, интеграл I , (а следовательно и $\overline{\lg \psi_z}$), как видно из формулы (1.73), должен стремиться к ω_z .

На этом основании в формуле (1.75) надо положить:

$$\left| \arctg \frac{(2 + e_{xx} + e_{yy}) \lg \frac{\gamma}{2} + \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{xy}^2}}{2\sqrt{1 + e_{xx} + e_{yy} + e_{xx}e_{yy} - \frac{1}{4}e_{xy}^2}} \right|_{\beta}^{4\pi + \beta} = 2\pi, \quad (1.76)$$

что приводит к следующему выражению для $\overline{\lg \psi_z}$:

$$\overline{\lg \psi_z} = \frac{\omega_z}{\sqrt{(1 + e_{xx})(1 + e_{yy}) - \frac{1}{4}e_{xy}^2}}. \quad (1.77)$$

По аналогии с полученным результатом можно написать еще две формулы:

$$\begin{aligned} \overline{\lg \psi_x} &= \frac{\omega_x}{\sqrt{(1 + e_{yy})(1 + e_{zz}) - \frac{1}{4}e_{yz}^2}}, \\ \overline{\lg \psi_y} &= \frac{\omega_y}{\sqrt{(1 + e_{xx})(1 + e_{zz}) - \frac{1}{4}e_{xz}^2}}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

определяющие средние значения тангенсов углов поворота вокруг осей X и Y линейных элементов тела, перпендикулярных до деформации этим осям.

Три параметра $\overline{\lg \psi_x}$, $\overline{\lg \psi_y}$, $\overline{\lg \psi_z}$ характеризуют поворот бесконечно малого объема, окружающего точку M . Они пропорциональны ω_x , ω_y и ω_z и равны нулю, коль скоро равны нулю эти последние параметры.

Но, как ясно из формул (1.60), если ω_x , ω_y , ω_z равны нулю в какой-либо системе координат X , Y , Z , то они будут равны нулю и в любой другой системе координат.

Отсюда следует, что при существовании в какой-либо точке тела равенств

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0, \quad (1.78)$$

линейные элементы, проходящие через эту точку, в среднем не будут получать поворота, относительно любой, проходящей через эту точку, оси.

Таким образом равенства (I.78) являются условиями отсутствия поворота произвольного бесконечно малого объемного элемента тела, окружающего точку M .

§ 8. Волокна, сохраняющие свое направление после деформации

Подойдем теперь иным путем к выяснению условий отсутствия поворота, установив попутно принципиально интересный факт существования в каждой точке тела по крайней мере одного волокна, сохраняющего свое направление при деформации. Для такого волокна векторы \vec{MN} и $\vec{M^*N^*}$ (рис. 6) будут одинаковы по направлению, в силу чего их проекции должны подчиняться соотношениям:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = \chi = \text{const.}, \quad (\text{I.79})$$

причем

$$\chi = \frac{|M^*N^*|}{|MN|} = 1 + E', \quad (\text{I.80})$$

где E' — удлинение в направлении MN .

Подставляя в (I.79) значения $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, согласно формулам (I.8), приходим к следующей линейной алгебраической системе:

$$\begin{aligned} (e_{xx} - E')\lambda + \left(\frac{1}{2}e_{xy} - \omega_x\right)\mu + \left(\frac{1}{2}e_{xz} + \omega_y\right)\nu &= 0, \\ \left(\frac{1}{2}e_{xy} + \omega_x\right)\lambda + (e_{yy} - E')\mu + \left(\frac{1}{2}e_{yz} - \omega_x\right)\nu &= 0, \\ \left(\frac{1}{2}e_{xz} - \omega_y\right)\lambda + \left(\frac{1}{2}e_{yz} + \omega_x\right)\mu + (e_{zz} - E')\nu &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.81})$$

в которой

$$\lambda = \frac{dx}{|MN|}, \quad \mu = \frac{dy}{|MN|}, \quad \nu = \frac{dz}{|MN|} \quad (\text{I.82})$$

суть направляющие косинусы искомого, не поворачивающегося при деформации, волокна.

Так как эти косинусы подчиняются равенству

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad (1.83)$$

то нулевое решение системы (1.81) не будет решением задачи. Поэтому нужно приравнять нулю определитель, составленный из коэффициентов системы (1.81), что приводит к уравнению:

$$\begin{vmatrix} e_{xx} - E', & \frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z, & \frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \\ \frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z, & e_{yy} - E', & \frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \\ \frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y, & \frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x, & e_{zz} - E' \end{vmatrix} = 0. \quad (1.84)$$

Как доказывается в высшей алгебре, достаточным условием вещественности всех трех корней уравнений вида (1.84) является симметрия элементов определителя относительно его главной диагонали. Именно это обеспечивало вещественность корней уравнения (1.41).

В отличие от (1.41), определитель (1.84) не симметричен, ввиду чего уравнение (1.84) будет иметь в общем случае всего один вещественный корень E'_1 . Подставив этот корень в уравнения (1.81) и присовокупив к ним соотношение (1.83), можно определить λ_1, μ_1, ν_1 — косинусы, задающие направление не поворачивающегося волокна.

При соблюдении некоторых соотношений между элементами определителя, уравнение (1.84) может иметь и три вещественных корня. Не вдаваясь в подробное исследование данного вопроса, укажем (в качестве приблизительной оценки), что это может иметь место только, если максимальные повороты не превосходят максимальных сдвигов.

Коль скоро поворот в некоторой точке тела удовлетворяет этому ограничению, то в этой точке могут иметься три волокна, не повертывающиеся при деформации, причем, в общем случае, они не будут взаимно перпендикулярны. Их направления определяются из уравнений (1.81) и соотношений вида (1.83), подобно тому, как это было изложено выше.

Остановимся в заключении на частном случае, когда

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0. \quad (1.85)$$

При этом определитель (1.84) становится еимметричен и все три его корня — вещественны. Аналогия, существующая в данном случае между уравнениями (1.41) и (1.84), а также установленная в § 6 тождественность закона преобразования параметров $e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xz}$ с законом преобразования компонентов деформации, позволяет утверждать, что если в рассматриваемой точке тела имеют место равенства (1.85), то в ней существуют три и *притом взаимно перпендикулярных* волокна, не изменяющих своего направления при деформации. Поскольку эти волокна остаются взаимно перпендикулярными и после деформации, то они неизбежно должны совпадать с главными направлениями деформации в рассматриваемой точке.

В свою очередь векторы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (совпадая с направлениями не повертывающихся волокон) будут равны векторам $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*$, то есть главные направления в деформированном теле будут совпадать в данном случае с главными направлениями в теле до деформации.

Мы пришли таким образом еще раз к заключению, что равенства (1.85) являются условиями отсутствия поворота в окрестности той точки, где они соблюдаются. Деформацию без поворота принято называть чистой деформацией. При такой деформации волокна, направленные по векторам $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, удлинятся, сохраняя свое первоначальное направление.

§ 9. Инварианты деформации и поворота

Развёртывая определитель (1.41) в строку, приходим к уравнению

$$\varepsilon^3 - a_2 \varepsilon^2 + a_1 \varepsilon - a_0 = 0, \quad (1.86)$$

в котором

$$\begin{aligned} a_2 &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}, \\ a_1 &= e_{xx}e_{yy} + e_{xx}e_{zz} + e_{yy}e_{zz} - \frac{1}{4}(e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2), \\ a_0 &= \begin{vmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}e_{xy} & \frac{1}{2}e_{xz} \\ \frac{1}{2}e_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2}e_{yz} \\ \frac{1}{2}e_{xz} & \frac{1}{2}e_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix} = e_{xx}e_{yy}e_{zz} - \frac{1}{4}(e_{xx}e_{yz}^2 + \\ &\quad + e_{yy}e_{xz}^2 + e_{zz}e_{xy}^2 - e_{xy}e_{xz}e_{yz}). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Так как корни этого уравнения ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) не зависят от выбора направлений X, Y, Z , то не должны зависеть от этого выбора и коэффициенты a_0, a_1, a_2 , являющиеся, следовательно, инвариантами деформации.

В силу известных соотношений, существующих между коэффициентами и корнями алгебраических уравнений, данные коэффициенты будут равны:

$$\begin{aligned} a_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ a_1 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3, \\ a_0 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (I.88)$$

Развертывая, далее, в строку уравнение (I.84), будем иметь:

$$(E')^3 - b_2 (E')^2 + b_1 E' - b_0 = 0, \quad (I.89)$$

где

$$\begin{aligned} b_2 &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}, \\ b_1 &= e_{xx}e_{yy} + e_{xx}e_{zz} + e_{yy}e_{zz} - \frac{1}{4}(e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2) + \\ &\quad + \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2, \\ b_0 &= \begin{vmatrix} e_{xx}, \frac{1}{2}e_{xy} - \omega_z, \frac{1}{2}e_{xz} + \omega_y \\ \frac{1}{2}e_{xy} + \omega_z, e_{yy}, \frac{1}{2}e_{yz} - \omega_x \\ \frac{1}{2}e_{xz} - \omega_y, \frac{1}{2}e_{yz} + \omega_x, e_{zz} \end{vmatrix} = e_{xx}e_{yy}e_{zz} + \\ &\quad + \frac{1}{4}(e_{xy}e_{yz}e_{xz} - e_{yy}e_{xz}^2 - e_{zz}e_{xy}^2 - e_{xx}e_{yz}^2) + \omega_x^2 e_{xx} + \omega_y^2 e_{yy} + \\ &\quad + e_{zz}\omega_x^2 + \omega_x\omega_y e_{xy} + \omega_x\omega_z e_{xz} + \omega_y\omega_z e_{yz}. \end{aligned} \quad (I.90)$$

Эти величины, так же как и величины (I.87), остаются неизменными при преобразовании координат. Вспомнив аналогию, существующую между законом преобразования компонентов деформации и законом преобразования параметров

$e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{yz}$, можно утверждать, что эти последние параметры должны иметь инварианты:

$$\begin{aligned} b'_2 &= b_2 = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}, \\ b'_1 &= e_{xx} e_{yy} + e_{xx} e_{zz} + e_{yy} e_{zz} - \frac{1}{4} (e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2), \\ b'_0 &= e_{xx} e_{yy} e_{zz} + \frac{1}{4} (e_{xy} e_{xz} e_{yz} - e_{xx} e_{yz}^2 - e_{yy} e_{xz}^2 - \\ &\quad - e_{zz} e_{xy}^2), \end{aligned} \quad (I.91)$$

но тогда инвариантами должны быть и выражения

$$\begin{aligned} b''_1 &= b_1 - b'_1 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2, \\ b''_0 &= b_0 - b'_0 = \omega_x^2 e_{xx} + \omega_y^2 e_{yy} + \omega_z^2 e_{zz} + \\ &\quad + \omega_x \omega_y e_{xy} + \omega_x \omega_z e_{xz} + \omega_y \omega_z e_{yz}. \end{aligned} \quad (I.92)$$

По отношению к первому из них это было уже доказано в (§ 6).

§ 10. Общая картина деформации в окрестности произвольной точки тела

Из формул (I.8) следует, что проекции вектора $\overrightarrow{M^* N^*}$ (то есть проекции произвольного линейного элемента тела после деформации) связаны с проекциями вектора \overrightarrow{MN} (то есть с проекциями того же элемента до деформации) линейными зависимостями. В соответствии с этим и обратные зависимости, выражаемые формулами (I.14), также будут линейными. Коэффициенты формул (I.8) и (I.14) нужно считать постоянными и равными их значениями в точке M , так как учет их изменчивости равносильен учету в формулах (I.8) и (I.14) малых высшего порядка.

Таким образом деформация бесконечно малой области, окружающей точку M , описывается линейным преобразованием с постоянными коэффициентами.

Но при таком преобразовании, как известно из аналитической геометрии, прямые превращаются в прямые, а плоскости — в плоскости, при сохранении параллельности тех и других, если таковая имела место до преобразования.

Кроме того, при таком преобразовании поверхности второго порядка превращаются в другие поверхности второго порядка—в частности сфера превращается в эллипсоид (вообще говоря, трехосный).

Отсюда следует, что всякий бесконечно малый параллелепипед, выделенный в теле до деформации, превращается в результате деформации в параллелепипед с другими (вообще говоря) размерами ребер и углами между ребрами.

В частности, прямоугольный параллелепипед с ребрами dx , dy , dz , параллельными координатным осям, [после дефор-

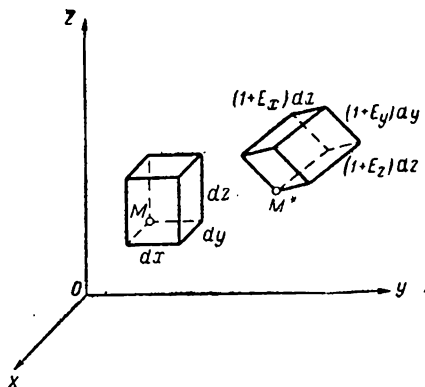


Рис. 9.

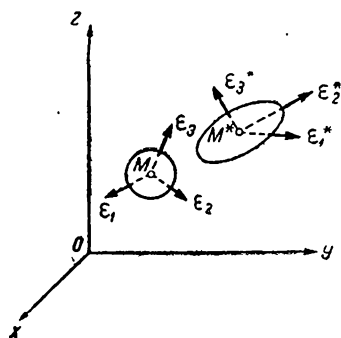


Рис. 10.

мации превращается в косоугольный параллелепипед с ребрами $(1 + E_x) dx$, $(1 + E_y) dy$, $(1 + E_z) dz$ и с углами между ними $\frac{\pi}{2} - \varphi_{xy}$, $\frac{\pi}{2} - \varphi_{xz}$, $\frac{\pi}{2} - \varphi_{yz}$ (рис. 9). Параллелепипед, ребра которого до деформации совпадают с главными направлениями в рассматриваемой точке, после деформации остается прямоугольным, имея ребра $(1 + E_1) da$, $(1 + E_2) db$, $(1 + E_3) dc$, где da , db , dc —размеры ребер до деформации.

Точки, расположенные до деформации на сфере радиуса ds , в результате деформации размещаются на эллипсоиде с полуосями $(1 + E_1) ds$, $(1 + E_2) ds$, $(1 + E_3) ds$, причем направления осей этого эллипсоида будут совпадать с e_1^* , e_2^* , e_3^* , то есть с главными направлениями в деформированном

теле. Последнее ясно из того, что полуосям эллипсоида будут, очевидно, соответствовать экстремальные значения удлинений (рис. 10).

Вышеизложенное дает некоторое представление о характере деформации бесконечно малой области, окружающей точку M . Можно сказать, что эта область при деформации, во-первых, получает поступательное перемещение, в результате которого точка M совмещается с точкой M^* , во-вторых, получает поворот, при котором волокна, направленные по $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, становятся направленными по $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*$, и, наконец, получает чистую деформацию, при которой волокна, имеющие направления $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*$, получают удлинения E_1, E_2, E_3 .

В предыдущих параграфах были изложены все сведения, необходимые для фактического определения (по заданным перемещениям u, v, w) перечисленных выше трех факторов, определяющих окончательное положение и форму бесконечно малого объемного элемента, мысленно выделенного из тела.

Заметим, что поступательное перемещение и поворот объемного элемента не являются характеристиками его деформации. Последняя будет определяться только компонентами $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$.

Однако, если говорить о деформации тела в целом, то более характерными будут именно перемещения его точек и углы поворота его волокон.

Так, например, говоря о деформации балки, обычно подразумевают под этим термином стрелку ее прогиба (то есть перемещение), а говоря о деформации вала — подразумевают закручивание одного его торца относительно другого (то есть угол поворота).

С этой точки зрения перемещения и повороты могут быть названы характеристиками деформации тела в целом, а удлинения и сдвиги — характеристиками деформации бесконечно малого объемного элемента тела.

Отмеченная двойственность понятия деформации, заключающаяся в необходимости различать ее микро- и макро-характеристики, приводит к возможности двух различных толкований термина „малая деформация“. Под ним, согласно вышеизложенному, можно понимать либо малость удлинений

и сдвигов (по сравнению с единицею), либо малость перемещений (по сравнению с линейными размерами тела) и углов поворота (по сравнению с единицею).

Упомянутые два определения нельзя смешивать. Между тем, некоторые курсы теории упругости дают к этому повод. Дело в том, что классическая теория малых деформаций фактически покоится на допущении, что *перемещения и повороты малы*. Однако это обстоятельство редко оговаривают с должной четкостью, ввиду чего у читателя, привыкшего ассоциировать понятие деформации с ее компонентами, легко создается впечатление, что речь идет о малости удлинений и сдвигов. Следует подчеркнуть, что предположение о малости перемещений и поворотов в большей степени ограничивает общность рассуждений, нежели предположение о малости компонентов деформации, причем первое предположение влечет за собою, как следствие, соблюдение и второго, тогда как обратное утверждение несправедливо. Подробнее это выяснится из дальнейшего. Следует далее отметить, что в тех случаях, когда необходимость малости перемещений указывается, обычно, не оговаривают по сравнению с чем должны быть они малы. Между тем, такая оговорка совершенно необходима, так как перемещения суть размерные величины.

Для выхода из положения некоторые авторы прибегают к понятию бесконечно малого перемещения, полагая его в основу рассуждений. Однако это решение вопроса представляется неудовлетворительным, так как совершенно неясно, в каких же пределах можно пользоваться теорией упругости, покоящейся на таком чисто формальном основании.

Перечисленные методологические неточности (свойственные многим курсам теории упругости) заслуживают быть отмеченными, поскольку они касаются основ рассматриваемой дисциплины.

Со своей стороны, употребляя в дальнейшем термин „малая деформация“, мы будем под ним всегда подразумевать малость удлинений и сдвигов по сравнению с единицею. Если, кроме того, в рассматриваемых задачах будут так же малы перемещения и повороты, то это всегда будет специально оговорено.

§ 11. Изменение объема

Бесконечно малый параллелепипед с ребрами dx , dy , dz после деформации превращается в косоугольный параллелепипед, проекции ребер которого на оси X , Y , Z будут в силу формул (1.5) равны:

$$\text{на ось } X \quad \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx, \quad \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

$$\text{на ось } Y \quad \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy, \quad \frac{\partial v}{\partial z} dz,$$

$$\text{на ось } Z \quad \frac{\partial w}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial w}{\partial y} dy, \quad \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz.$$

Отсюда, воспользовавшись известной формулой аналитической геометрии, находим

$$V^* = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} dx dy dz = D dx dy dz, \quad (1.93)$$

где V^* — объем элемента после деформации.

Разделив V^* на $V = dx dy dz$ (то есть на объем элемента до деформации) и обозначив через Δ относительное приращение объема, обусловленное деформацией, будем иметь:

$$1 + \Delta = D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (1.94)$$

Чтобы выразить Δ через компоненты деформации, возведем полученный результат в квадрат. Тогда, учитывая правило перемножения определителей, а также формулы (1.22), получим:

$$(1 + \Delta)^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & 1 + 2\varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 1 + 2\varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \quad (1.95)$$

Отсюда, после раскрытия определителя, имеем:

$$\begin{aligned}(1 + \Delta^2) &= (1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy})(1 + 2\varepsilon_{zz}) + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} - \\ &\quad - (1 + 2\varepsilon_{xx})\varepsilon_{yz}^2 - (1 + 2\varepsilon_{yy})\varepsilon_{xz}^2 - (1 + 2\varepsilon_{zz})\varepsilon_{xy}^2 = \\ &= 1 + 2a_2 + 4a_1 + 8a_0,\end{aligned}\quad (1.96)$$

где a_0, a_1, a_2 суть инварианты (1.87).

Таким образом окончательно

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{1 + 2a_2 + 4a_1 + 8a_0} - 1 = \\ &= \sqrt{(1 + 2\varepsilon_1)(1 + 2\varepsilon_2)(1 + 2\varepsilon_3)} - 1 = \\ &= (1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3) - 1\end{aligned}\quad (1.97)$$

где E_1, E_2, E_3 — суть главные удлинения в той точке, где вычисляется приращение объема.

Заметим, что полученный результат не зависит от того, какой формы элемент выделяется из тела. В этом можно убедиться, рассмотрев сферу радиуса dS . После деформации данная сфера превратится в эллипсоид с полуосями $(1 + E_1)dS, (1 + E_2)dS, (1 + E_3)dS$. Вычтя из объема этого эллипсоида объем сферы и разделив разность на объем элемента до деформации (то есть на объем сферы), будем иметь:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\frac{4}{3}\pi[(1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3) - 1]dS^3}{\frac{4}{3}\pi dS^3} = \\ &= (1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3) - 1\end{aligned}\quad (1.98)$$

Полученный результат идентичен (1.97).

§ 12. О величине удлинений и сдвигов

До сих пор мы не налагали никаких ограничений на величину удлинений и сдвигов. Однако такая общность рассуждений в теории упругости, как правило, не нужна, ибо только немногие материалы (как например резина) сохраняют свои упругие свойства при значительных относительных деформациях. Подавляющее большинство применяемых в технике материалов (как, например, все металлы и их сплавы) упруги только при весьма малых (по сравнению с единицей) удлинениях и сдвигах.

В качестве характерного примера рассмотрим сталь — наиболее употребительный в настоящее время материал, идущий

на изготовление конструкций, подвергающихся значительным нагрузкам. На рис. 11 приводятся результаты испытания на растяжение образца, изготовленного из стали одной из марок, применяемых в судостроении. По оси абсцисс, как обычно, отложены относительные удлинения, а по оси ординат — напряжения.

На этом графике участок *OB* соответствует упругой стадии работы стали, участок *BC* — пластической стадии (пло-

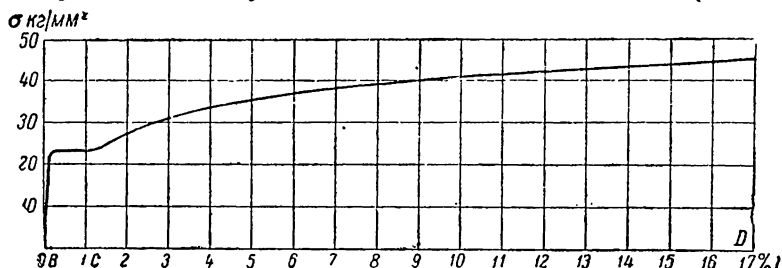


Рис. 11.

щадка текучести) и наиболее длинный участок *CD* — стадии упрочнения. Длина упругого участка в данном частном случае равна $1,15 \cdot 10^{-3}$, длина площадки текучести 10^{-2} , а длина участка упрочнения (до максимума кривой) $0,17^*$.

Эти цифры достаточно типичны и можно сказать, что для сталей вообще область упругих деформаций ограничивается относительными удлинениями, имеющими величину порядка $10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-3}$. Аналогичный порядок имеет для стали и предельная величина упругих сдвигов.

Для цветных металлов (и их сплавов) цифры будут несколько иными, однако и для них область упругих деформаций ограничивается весьма малыми удлинениями и сдвигами.

Из вышеизложенного следует, что, применяя теорию упругости к металлическим конструкциям, естественно и разумно упрощать формулы путем пренебрежения удлинениями и сдвигами по сравнению с единицей. Отсюда наибольший практический интерес представляет теория малых деформаций, к рассмотрению которой мы и переходим.

*) Фактически длина участка упрочнения еще больше ввиду образования на образце шейки. Мы не вдаемся здесь, однако, в эти детали, поскольку для дальнейшего они не нужны.

§ 13. Теория малых деформаций

Упростим выведенные ранее формулы, исходя из допустимости пренебрежения удлинениями и сдвигами по сравнению с единицей. Вводя это упрощение в формулы (1.29), находим

$$E_x = \varepsilon_{xx}, \quad E_y = \varepsilon_{yy}, \quad E_z = \varepsilon_{zz}. \quad (1.99)$$

Пренебрегая далее E_x , E_y , E_z по сравнению с единицей в формулах (1.32) и считая, что сдвиги φ_{xy} , φ_{xz} , φ_{yz} , малы, получаем:

$$\varphi_{xy} \approx \varepsilon_{xy}, \quad \varphi_{xz} \approx \varepsilon_{xz}, \quad \varphi_{yz} \approx \varepsilon_{yz}. \quad (1.100)$$

Таким образом при малых относительных деформациях компоненты ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} могут быть отождествлены с соответствующими удлинениями, а компоненты ε_{xy} , ε_{xz} , ε_{yz} — с соответствующими сдвигами.

Формула для изменения объема (1.97), после пренебрежения в ней произведениями удлинений по сравнению с их первыми степенями, принимает вид

$$\Delta \approx E_1 + E_2 + E_3, \quad (1.101)$$

или, если учесть (1.99),

$$\Delta \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = a_2 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \quad (1.102)$$

Отсюда следует, что при малых деформациях инвариант a_2 можно отождествлять с объемным расширением. И, наконец, вводя аналогичные упрощения в табл. 1 и 2, будем иметь табл. 5 и 6.

Таблица 5

	i_1	i_2	i_3
X	$1 + \varepsilon_{xx}$	$\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} - \omega_x$	$\frac{1}{2} \varepsilon_{xz} + \omega_y$
Y	$\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} + \omega_x$	$1 + \varepsilon_{yy}$	$\frac{1}{2} \varepsilon_{yz} - \omega_x$
Z	$\frac{1}{2} \varepsilon_{xz} - \omega_y$	$\frac{1}{2} \varepsilon_{yz} + \omega_x$	$1 + \varepsilon_{zz}$

В последней из них величины α_{ij} определяются формулами (I.15). Возможность замены при малых деформациях таблицы (2) таблицей (6) следует из того, что параметры E_ξ , E_η , E_ζ являются величинами одного порядка с удлинениями, а определитель D , согласно формулам (I.94) и (98), равен:

$$D = 1 + \Delta = (1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3), \quad (\text{I.103})$$

то есть равен единице, коль скоро удлинения по сравнению с единицей можно отбрасывать.

Таблица 6

	i'_1	i'_2	i'_3
X	α_{11}	α_{12}	α_{13}
Y	α_{21}	α_{22}	α_{23}
Z	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Из вышеизложенного ясно, что таблицы (5) и (6) определяют косинусы углов между i_1, i_2, i_3 (i'_1, i'_2, i'_3) и осями X, Y, Z с погрешностью, которая может быть оценена путем сравнения компонентов деформации с единицей; с этой степенью точности диагональные члены таблиц 5 и 6 могут единицу превышать.

Заметим, что если повороты велики, а сдвиги малы, то, при определении направлений волокон тела после деформации, вторыми можно пренебрегать по сравнению с первыми (разумеется это не означает возможности пренебрежения в данном случае сдвигами вообще; в тех формулах, куда они будут входить не наряду с поворотами, их надо будет учитывать). Примерами такого упрощенного подхода к определению направления волокон деформированного тела являются гипотезы плоских сечений в теории балок и гипотезы Кирхгофа в теории пластин. И в том и в другом случае суть допущений заключается в пренебрежении сдвигами по сравнению с поворотами.

§ 14. Случай, когда малы не только деформации, но и углы поворота

Пусть малы по сравнению с единицей не только компоненты деформации, но и углы поворота. При этом направления векторов i_1, i_2, i_3 и i'_1, i'_2, i'_3 будут, очевидно, мало

отличаться от направлений X , Y и Z , в соответствии с чем диагональные члены таблиц 1 и 2 будут отличаться от единицы только величинами второго порядка, а остальные члены этих таблиц будут величинами первого порядка (если считать величиной первого порядка малости максимальное значение угла поворота).

Рассмотрим формулу (I.77), дающую среднее значение тангенса угла поворота элементарного объема тела вокруг оси Z . Эта формула, если учесть последнее из выражений (I.15), может быть приведена к виду:

$$\overline{\operatorname{tg} \psi_z} = \frac{\omega_z}{\sqrt{\alpha_{33} - \omega_z^2}} = \frac{\omega_z}{\sqrt{\alpha_{33}} \sqrt{1 - \frac{\omega_z^2}{\alpha_{33}}}}, \quad (\text{I.104})$$

откуда

$$\overline{\sin \psi_z} = \frac{\omega_z}{\sqrt{\alpha_{33}}}. \quad (\text{I.105})$$

Но согласно табл. 6 при малой деформации $\alpha_{33} \approx \cos(i'_3, Z)$ и, следовательно,

$$\overline{\sin \psi_z} \approx \frac{\omega_z}{\sqrt{\cos(i'_3, Z)}}. \quad (\text{I.106})$$

Выше было отмечено, что косинус угла между осью Z и вектором i'_3 в рассматриваемом случае отличается от единицы только на величину второго порядка малости. Кроме того, поскольку поворот мал, $\overline{\psi_z}$ будет отличаться от $\overline{\sin \psi_z}$ только величинами третьего порядка. Отсюда, пренебрегая в формуле (I.106) квадратами угла поворота по сравнению с единицей, получаем:

$$\overline{\psi_z} \approx \omega_z. \quad (\text{I.107})$$

По аналогии с этим результатом можно написать еще две формулы:

$$\overline{\psi_y} \approx \omega_y, \quad \overline{\psi_x} \approx \omega_x. \quad (\text{I.107})$$

Таким образом пренебрежение квадратами углов поворота по сравнению с единицей приводит к отождествлению параметров ω_x , ω_y , ω_z со средними поворотами элементарного объема вокруг направлений X , Y , Z .

А так как малые повороты суммируются как векторы, то можно сказать, что в данном случае объемный элемент поворачивается на угол ω вокруг оси, направление которой определяется косинусами (I.62).

Исследуем далее возможности упрощения формул для компонентов деформации, вытекающие из предположения, что углы поворота и деформации малы по сравнению с единицей.

Первая из формул (I.22) может быть приведена к виду

$$1 + 2\varepsilon_{xx} = (1 + e_{xx})^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z\right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y\right)^2, \quad (\text{I.108})$$

откуда следует, что она тождественно удовлетворяется, если положить:

$$\begin{aligned} \frac{1 + e_{xx}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}} &= \cos \varphi_1, \quad \frac{\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}} = \sin \varphi_1 \cos \chi_1, \\ \frac{\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}}} &= \sin \varphi_1 \sin \chi_1. \end{aligned} \quad (\text{I.109})$$

Аналогично, вторая и третья из формул (I.22) тождественно удовлетворяются подстановкой:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}} &= \sin \varphi_2 \sin \chi_2, \quad \frac{1 + e_{yy}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}} = \cos \varphi_2, \\ \frac{\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}} &= \sin \varphi_2 \cos \chi_2 \\ \frac{\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}}} &= \sin \varphi_3 \cos \chi_3, \quad \frac{\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}}} = \sin \varphi_3 \sin \chi_3, \\ \frac{1 + e_{zz}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}}} &= \cos \varphi_3, \end{aligned} \quad (\text{I.109})$$

но, согласно табл. 2, φ_1 является углом между i_1 и осью X , φ_2 — между i_2 и осью Y , φ_3 — между i_3 и осью Z .

Все эти углы имеют величину порядка угла поворота и, следовательно, в рассматриваемом случае, будут малы. На этом основании можем написать:

$$\begin{aligned}\frac{1+e_{xx}}{\sqrt{1+2e_{xx}}} &\approx 1 - \frac{\varphi_1^2}{2}, \\ \frac{1+e_{yy}}{\sqrt{1+2e_{yy}}} &\approx 1 - \frac{\varphi_2^2}{2}, \\ \frac{1+e_{zz}}{\sqrt{1+2e_{zz}}} &\approx 1 - \frac{\varphi_3^2}{2}.\end{aligned}\quad (I.110)$$

Отсюда, поскольку компоненты деформации предполагаются малыми, имеем:

$$\begin{aligned}e_{xx} - e_{xx} &\approx \frac{\varphi_1^2}{2}, \quad e_{yy} - e_{yy} \approx \frac{\varphi_2^2}{2}, \\ e_{zz} - e_{zz} &\approx \frac{\varphi_3^2}{2}.\end{aligned}\quad (I.111)$$

Из этих формул следует, что в рассматриваемом случае e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} будут отличаться от соответствующих компонентов деформации только на величины порядка квадратов углов поворота.

Подставляя затем (I.109) в три последних выражения из формул (I.22), будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{e_{xy}}{\sqrt{(1+2e_{xx})(1+2e_{yy})}} &= \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \chi_2 + \\ &+ \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \cos \chi_1 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \chi_1 \cos \chi_2, \\ \frac{e_{xz}}{\sqrt{(1+2e_{xx})(1+2e_{zz})}} &= \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 \cos \chi_3 + \\ &+ \cos \varphi_3 \sin \varphi_1 \sin \chi_1 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 \cos \chi_1 \sin \chi_3, \\ \frac{e_{yz}}{\sqrt{(1+2e_{yy})(1+2e_{zz})}} &= \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \chi_3 + \\ &+ \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 \cos \chi_2 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \chi_2 \cos \chi_3.\end{aligned}\quad (I.112)$$

Пренебрежем здесь компонентами деформации по сравнению с единицей и отбросим все члены, содержащие φ , выше чем во второй степени.

Тогда получим:

$$\begin{aligned} e_{xy} &\approx \varphi_2 \sin \chi_2 + \varphi_1 \cos \chi_1 + \varphi_1 \varphi_2 \sin \chi_1 \cos \chi_2, \\ e_{xz} &\approx \varphi_3 \cos \chi_3 + \varphi_1 \sin \chi_1 + \varphi_1 \varphi_3 \cos \chi_1 \sin \chi_3, \\ e_{yz} &\approx \varphi_3 \sin \chi_3 + \varphi_2 \cos \chi_2 + \varphi_2 \varphi_3 \sin \chi_2 \cos \chi_3. \end{aligned} \quad (I.113)$$

Производя аналогичные упрощения в формулах (I.109), находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z &\approx \varphi_1 \cos \chi_1, \quad \frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \approx \varphi_2 \sin \chi_2, \\ \frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y &\approx \varphi_3 \cos \chi_3, \quad \frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \approx \varphi_1 \sin \chi_1, \\ \frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x &\approx \varphi_2 \cos \chi_2, \quad \frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \approx \varphi_3 \sin \chi_3. \end{aligned} \quad (I.114)$$

Используя эти приближенные выражения, можно привести формулы (I.113) к виду:

$$\begin{aligned} e_{xy} - e_{xy} &\approx \varphi_1 \varphi_2 \sin \chi_1 \cos \chi_2, \\ e_{xz} - e_{xz} &\approx \varphi_1 \varphi_3 \cos \chi_1 \sin \chi_3, \\ e_{yz} - e_{yz} &\approx \varphi_2 \varphi_3 \sin \chi_2 \cos \chi_3, \end{aligned} \quad (I.115)$$

откуда вытекает, что параметры e_{xy} , e_{xz} , e_{yz} отличаются от соответствующих компонентов деформаций только величинами порядка квадратов углов поворота.

Полученные результаты позволяют перейти к непосредственной цели исследования — упрощению формул для компонентов деформации. В основу упрощения положим при этом возможность пренебрежения углами поворота и компонентами деформации по сравнению с единицей.

Рассматривая первую из формул (I.22)

$$e_{xx} = e_{xx} + \frac{1}{2} \left[e_{xx}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right)^2 \right], \quad (I.116)$$

видим, что в ней можно отбросить квадраты параметров e_{xx} , e_{xy} , e_{xz} , так как, согласно доказанному выше, учет этих членов равносильно удержанию в формуле наряду с первыми степенями деформаций и вторыми степенями поворотов так же вторых степеней деформаций и четвертых степеней поворотов, что находилось бы в противоречии с намеченной системой упрощений.

Отбрасывая указанные члены, приходим к формуле:

$$\varepsilon_{xx} = e_{xx} + \frac{1}{2} [e_{xy} \omega_z - e_{xz} \omega_y + \omega_y^2 + \omega_z^2]. \quad (I.117)$$

Если подставить сюда вместо e_{xy} , e_{xz} их выражения через компоненты деформации и углы поворота, то появятся квадраты деформаций и кубы поворотов, из чего следует, что первые два члена квадратной скобки формулы (I.117) существенно меньше двух последних ее членов. Это позволяет написать:

$$\varepsilon_{xx} \approx e_{xx} + \frac{1}{2} (\omega_y^2 + \omega_z^2). \quad (I.118)$$

Аналогичным образом могут быть упрощены и остальные из формул (I.22). В итоге получаются следующие приближенные выражения для компонентов деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &\approx e_{xx} + \frac{1}{2} (\omega_y^2 + \omega_z^2), & \varepsilon_{xy} &\approx e_{xy} - \omega_x \omega_y, \\ \varepsilon_{yy} &\approx e_{yy} + \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_z^2), & \varepsilon_{xz} &\approx e_{xz} - \omega_x \omega_z, \\ \varepsilon_{zz} &\approx e_{zz} + \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2), & \varepsilon_{yz} &\approx e_{yz} - \omega_y \omega_z, \end{aligned} \quad (I.119)$$

справедливые с точностью до пренебрежения углами поворота и компонентами деформации по сравнению с единицей.

Следует отметить, что в частных случаях эти формулы могут поддаваться дальнейшим упрощениям. Так, например, может оказаться, что из составляющих угла поворота одна или две будут весьма малы. Тогда их можно будет отбросить, сохраняя лишь ту (или те) составляющие поворота, которые существенны.

В заключение подчеркнем как важный момент вышеизложенных рассуждений, что из малости поворотов и деформаций по сравнению с единицей отнюдь еще не следует, что они являются величинами одного порядка. Именно поэтому в формулах (I.119), наряду с членами, содержащими параметры e_{xx} , ..., e_{yz} в первой степени, приходится удерживать также члены, содержащие повороты во второй степени.

§ 15. Переход к формулам классической теории

Предположим теперь, что квадратами и произведениями углов поворота в формулах (I.119) можно пренебречь.

В этом частном случае мы приходим к следующим выражениям для компонентов деформации.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &\approx e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_{xy} &\approx e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \epsilon_{yy} &\approx e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_{xz} &\approx e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \epsilon_{zz} &\approx e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, & \epsilon_{yz} &\approx e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (\text{I.120})$$

то-есть приходим к формулам классической теории упругости.

Из содержания двух предыдущих параграфов видно, что использование линейных выражений для компонентов деформации [формул (I.120)] возможно лишь при соблюдении следующих двух условий:

а) удлинения, сдвиги и углы поворота должны быть малы по сравнению с единицей,

б) квадратичные комбинации углов поворота, входящие в формулы (I.119), должны быть малы по сравнению с соответствующими компонентами деформации.

Последнее условие, *грубо говоря*, может быть сформулировано как требование, чтобы квадраты углов поворота были пренебрежимо малы по сравнению с удлинениями и сдвигами. Если тело *массивно*, то-есть имеет одинакового порядка протяженность во всех своих трех измерениях, то соблюдение условия *а* влечет за собою и соблюдение условия *б*.

Иначе будет, если тело является *гибким*, то-есть имеет в одном или двух направлениях существенно малые размеры (стержень, пластина, оболочка). В этом последнем случае углы поворота могут значительно превосходить удлинения и сдвиги, и применение формул (I.120) становится, вообще говоря, необоснованным.

Из вышеизложенного следует, что областью применения линейных формул (I.120) является по преимуществу деформация массивных тел, а областью применения нелинейных формул (I.22 и I.119) — деформация гибких тел.

Однако, формулы (I.120) применимы и к некоторым задачам о деформации гибких тел. В частности ими можно

пользоваться при рассмотрении изгиба и кручения тонких стержней (при условии, что стержень не подвергается одновременно действию осевых сил, а углы поворота его сечений, хотя и велики по сравнению с деформациями, но малы по сравнению с единицей).

Нетрудно объяснить, почему, например, кручение остается задачей классической теории упругости. Дело в том, что в этой задаче большим по сравнению со сдвигами является только один из углов поворота (ω_x — если считать, что ось X направлена вдоль стержня), два же других угла поворота — суть величины одного порядка с деформациями.

В то же время существенную роль в кручении играют лишь два компонента деформации:

$$\begin{aligned} e_{xy} &\approx e_{xy} - \omega_x \omega_y, \\ e_{xz} &\approx e_{xz} - \omega_x \omega_z, \end{aligned}$$

причем последние члены в данных выражениях могут быть отброшены (несмотря на то, что ω_x значительно превосходит e_{xy} и e_{xz}), поскольку, как было выше отмечено, ω_y и ω_z — весьма малы.

Этот пример показывает, что определение круга применимости формул (I.120) требованием, чтобы квадраты углов поворота были пренебрежимо малы по сравнению с деформациями, как уже указывалось, не всегда является точным.

Фактически область применения линейных формул оказывается несколько более широкой.

В заключение параграфа следует обратить особое внимание на установившуюся в большинстве курсов теории упругости традицию называть формулы (I.22) „компонентами конечной деформации“. Тем самым неизбежно (даже если это явно и не говорится) выражения классической теории упругости (I.120) воспринимаются как „компоненты бесконечно малой деформации“.

Между тем, из содержания этой главы совершенно ясно, что степень малости удлинений и сдвигов по сравнению с единицей вовсе не является достаточным критерием для перехода от формул (I.22) или (I.119) к формулам (I.120). Существенную роль при решении данного вопроса играет так же и величина углов поворота.

В некоторых задачах определение деформаций линейными

формулами оказывается недопустимым даже при весьма малых удлинениях и сдвигах (сжатие тонкого стержня, изгиб тонкой пластины). В других задачах эти формулы будут пригодны при гораздо более значительных удлинениях и сдвигах (растяжение стержня, изгиб толстой пластины).

Таким образом и нелинейная теория упругости и классическая теория упругости занимаются конечными деформациями и притом, как правило, деформациями одного порядка малости.

Будь иначе — классическая теория упругости не имела бы никакого практического значения.

Разница между подходом этих двух теорий к определению деформаций заключается лишь в том, что линейная теория пренебрегает влиянием поворотов на удлинения и сдвиги, а нелинейная теория его учитывает, в соответствии с чем нелинейная теория охватывает все задачи о деформации тел, а линейная — только определенный круг задач.

Последними словами мы отнюдь не хотим умалить значение классической теории, которая дает вполне согласующиеся с истиной решения многих практически важных проблем. Естественно, что нет никакой нужды трактовать эти проблемы, как нелинейные.

Однако, в то же время далеко не все задачи о деформации тел охватываются классической теорией: ряд проблем из нее выпадает (см. предисловие) и должны рассматриваться в духе нелинейной теории.

Сказанное представляется достаточным для отказа от наименования нелинейной теории деформаций теорией конечных деформаций.

§ 16. О переходе к криволинейным координатам

До сих пор предполагалось, что положения точек тела задаются в декартовой системе координат XYZ . Иногда, при решении конкретных задач, выгоднее пользоваться для этой цели криволинейными координатами. В связи с этим выясним правила преобразования выведенных выше формул к произвольным ортогональным криволинейным координатам.

Пусть криволинейные координаты связаны с декартовыми посредством формул

$$x = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad y = f_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad z = f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (I.121)$$

Данные формулы определяют три семейства кривых — координатные линии α_1 , α_2 , и α_3 , причем каждой точке пространства соответствует пересечение трех линий, принадлежащих различным семействам.

Обозначим единичные векторы, касательные к координатным линиям, соответственно через \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 . В силу предполагаемой ортогональности криволинейных координат, эти векторы будут взаимно перпендикулярными и будут образовывать в каждой точке триедр локальных координатных осей (локальными их называем потому, что их направления, в отличие от декартовых осей, изменяются при переходе от одной точки к другой).

Проекции перемещения какой-либо точки тела на направления \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 , построенные в той же точке, будем обозначать через u , v , w .

Как доказывается в курсах линейной теории упругости (см., например [28] или [43]), параметрам e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , e_{xy} , e_{xz} , e_{yz} соответствуют в ортогональных криволинейных координатах выражения

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} w, \\ e_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} w + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u, \\ e_{33} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial w}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} u + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} v, \\ e_{12} &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{v}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u}{H_1} \right), \\ e_{13} &= \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{u}{H_1} \right) + \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{w}{H_3} \right), \\ e_{23} &= \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{w}{H_3} \right) + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{v}{H_2} \right), \end{aligned} \quad (\text{I.122})$$

где H_1 , H_2 , H_3 — суть коэффициенты Ляме.

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \right)^2}, \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \right)^2}, \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_3} \right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{I.123})$$

Соответственно параметры $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, будучи отнесены к произвольным ортогональным криволинейным координатам, выражаются формулами

$$\begin{aligned} 2\omega_1 &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial a_2} (H_3 w) - \frac{\partial}{\partial a_3} (H_2 v) \right], \\ 2\omega_2 &= \frac{1}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial a_3} (H_1 u) - \frac{\partial}{\partial a_1} (H_3 w) \right], \\ 2\omega_3 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial a_1} (H_2 v) - \frac{\partial}{\partial a_2} (H_1 u) \right], \end{aligned} \quad (I.124)$$

которые представляют собою известные формулы для компонентов вихря.

В линейной теории упругости, основанной на предположении, что деформации и повороты малы и сравнимы по величине, параметры e_{11}, e_{22}, e_{33} будут удлинениями линейных элементов, имеющих направления k_1, k_2, k_3 , параметры e_{12}, e_{13}, e_{23} — будут сдвигами между этими элементами, а $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — углами поворота объемного элемента тела вокруг k_1, k_2, k_3 .

В общем случае при произвольной деформации перечисленные параметры не будут уже иметь столь простого геометрического смысла и не могут быть отождествляемы с компонентами деформации и углами поворота. Для компонентов деформации мы вывели (в декартовой системе координат) формулы (I.22). Данные формулы конструируются из параметров e и ω , правила преобразования которых выше были выяснены.

Это позволяет сразу же написать следующие общие выражения для компонентов деформации в произвольной ортогональной системе координат:

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} \left[e_{11}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right)^2 \right], \\ e_{22} &= e_{22} + \frac{1}{2} \left[e_{22}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right)^2 \right], \\ e_{33} &= e_{33} + \frac{1}{2} \left[e_{33}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right)^2 \right], \\ e_{12} &= e_{12} + e_{11} \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right) + e_{22} \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right), \end{aligned} \quad (I.125)$$

$$\begin{aligned}
e_{13} &= e_{13} + e_{11} \left(\frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right) + e_{33} \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) \left(\frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right), \\
e_{23} &= e_{23} + e_{22} \left(\frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right) + e_{33} \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right) + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right) \left(\frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right).
\end{aligned}$$

Здесь параметры e и ω определяются формулами (I.122) и (I.124).

Относительные удлинения линейных элементов, имеющих до деформации направления k_1, k_2, k_3 , будут равны

$$\begin{aligned}
E_1 &= \sqrt{1 + 2e_{11}} - 1, \\
E_2 &= \sqrt{1 + 2e_{22}} - 1, \\
E_3 &= \sqrt{1 + 2e_{33}} - 1.
\end{aligned}$$

Соответственно сдвиги между теми же линейными элементами определяются формулами:

$$\begin{aligned}
\sin \varphi_{12} &= \frac{e_{12}}{(1 + E_1)(1 + E_2)}, \\
\sin \varphi_{13} &= \frac{e_{13}}{(1 + E_1)(1 + E_3)}, \\
\sin \varphi_{23} &= \frac{e_{23}}{(1 + E_2)(1 + E_3)}.
\end{aligned} \tag{I.126}$$

При малых удлинениях и сдвигах эти формулы могут быть упрощены подобно тому, как это было сделано (§ 13). Соответственно, к этим формулам применимы и другие упрощения из числа тех, которые рассматривались в предыдущих параграфах.

ГЛАВА II

РАВНОВЕСИЕ ОБЪЕМНОГО ЭЛЕМЕНТА ТЕЛА

§ 17. Напряжения

В этой главе будут исследованы условия равновесия произвольного, бесконечно малого объемного элемента деформированного тела.

Выделяя мысленно такой элемент, нужно приложить к нему силы, распределенные по ограничивающей его поверхности, которые будут представлять собой воздействие на объемный элемент окружающей его среды. Рассмотрим на данной поверхности элементарную площадку dQ . Ее ориентация может быть задана единичным вектором нормали \mathbf{n} , который будем считать положительным, если он направлен во внешнюю сторону по отношению к выделенному объему. Приходящуюся на рассматриваемую площадку силу обозначим через σdQ . Вектор σ является интенсивностью поверхностной нагрузки на площадке dQ . Его величина и направление будут зависеть как от положения площадки (которое может быть задано координатами ее центра тяжести ξ, η, ζ), так и от ориентации площадки (то есть от \mathbf{n}). Но совокупность ξ, η, ζ определяет радиус-вектор \mathbf{r} , проведенный из начала координат к центру тяжести площадки, в соответствии с чем

$$\sigma = \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{n}). \quad (\text{I.1})$$

Таким образом интенсивность поверхностной нагрузки является функцией двух векторов. Заметим, что по отношению к \mathbf{n} эта функция будет нечетной

$$\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -\sigma(\mathbf{r}, -\mathbf{n}). \quad (\text{I.2})$$

Последнее обусловлено тем, что действие среды на площадку dQ объемного элемента должно быть равно по ве-

личине и обратно по направлению действию этой площадки на прилегающую к ней площадку среды, ориентация которой определяется единичным вектором — \mathbf{n} .

Вектор σ будем называть напряжением, отмечая его в дальнейшем нижним индексом, указывающим направление нормали к той площадке, на которой оно действует.

Покажем, что достаточно знать значения напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку M^* деформированного тела, чтобы иметь возможность найти его значения и на любой другой площадке, проходящей через ту же точку.

С этой целью рассмотрим объемный элемент, представляющий собою тетраэдр, три ребра которого пусть будут параллельны координатным осям XYZ и равны соответственно $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$.

Для того, чтобы данный элемент находился в равновесии, необходимо, прежде всего, чтобы сумма всех сил, на него действующих, была равна нулю. Следует помнить при этом, что, кроме поверхностных сил, на элемент будут действовать также и массовые силы, распределенные по его объему (например силы веса или инерционные силы), значение которых ввиду малости элемента можно считать постоянным во всех его точках.

С учетом этого замечания условие равенства нулю суммы всех сил, действующих на тетраэдр, запишется следующим образом:

$$\sigma_n d\Omega + \sigma_{-\xi} \frac{d\eta d\zeta}{2} + \sigma_{-\eta} \frac{d\xi d\zeta}{2} + \sigma_{-\zeta} \frac{d\xi d\eta}{2} + F \frac{d\xi d\eta d\zeta}{6} = 0. \quad (\text{II.3})$$

Здесь

$d\Omega$ — площадь наклонной грани тетраэдра;

\mathbf{n} — единичный вектор ее внешней нормали

F — среднее значение удельной объемной силы, приходящейся на тетраэдр (например среднее значение удельного веса или среднее значение инерционной силы, отнесенной к единице объема);

$\sigma_{-\xi}$ — напряжение на площадке, перпендикулярной оси X ;

$\sigma_{-\eta}$ — напряжение на площадке, перпендикулярной оси Y ;

$\sigma_{-\zeta}$ — напряжение на площадке, перпендикулярной оси Z .

Индексы трех последних напряжений отрицательны, потому что внешние нормали к соответствующим площадкам обратны по направлению координатным осям (рис. 12).

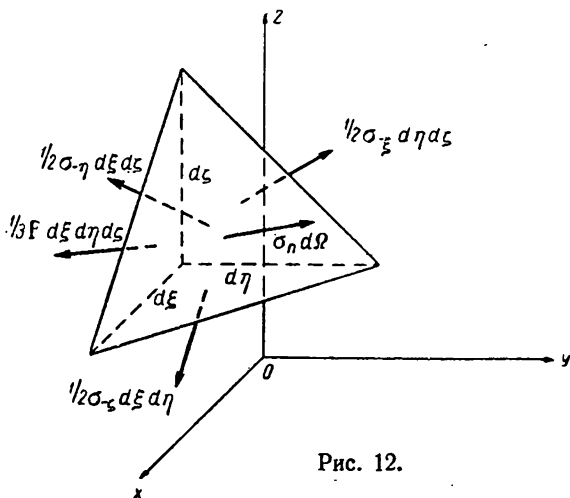


Рис. 12.

Разделив (II.3) на $d\Omega$ и принимая во внимание формулу (II. 2), будем иметь:

$$\sigma_n = \sigma_x \frac{d\eta d\zeta}{2d\Omega} + \sigma_y \frac{d\xi d\zeta}{2d\Omega} + \sigma_z \frac{d\xi d\eta}{2d\Omega} - F \frac{d\xi d\eta d\zeta}{6d\Omega}, \quad (\text{II.4})$$

но $\frac{d\eta d\zeta}{2}$, $\frac{d\xi d\zeta}{2}$, $\frac{d\xi d\eta}{2}$ суть проекции наклонной грани тетраэдра на плоскости YZ , XZ и XY , в соответствии с чем:

$$\frac{d\eta d\zeta}{2d\Omega} = \cos(n, X), \quad \frac{d\xi d\zeta}{2d\Omega} = \cos(n, Y), \quad \frac{d\xi d\eta}{2d\Omega} = \cos(n, Z). \quad (\text{II.5})$$

Кроме того, дробь $\frac{d\xi d\eta d\zeta}{6d\Omega}$ представляет собою отношение объема тетраэдра к площади его наклонной грани и, следовательно, будет величиною порядка линейного размера тетраэдра (то есть бесконечно малой величиной). Отсюда вытекает, что последний член формулы (II.4) будет так же бесконечно мал и может быть отброшен, поскольку осталь-

ные члены формулы конечны. В результате вышеизложенного приходим к векторному равенству

$$\sigma_n = \sigma_\xi \cos(n, X) + \sigma_\eta \cos(n, Y) + \sigma_z \cos(n, Z), \quad (II.6)$$

выражающему напряжение в точке M^* на площадке, внешняя нормаль которой задана единичным вектором n , через три напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям.

Таким образом напряженное состояние тела в окрестности произвольной точки M^* полностью характеризуется векторами σ_ξ , σ_η , σ_z , величины и направления которых, разумеется, зависят от выбора направлений осей X , Y , Z .

§ 18. Формулы для пересчета компонентов напряжения при переходе от одной системы координат к другой

Обозначим через

$\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\xi\eta}$, $\sigma_{\xi z}$ — проекции σ_ξ на X , Y , Z ,

$\sigma_{\eta\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$, $\sigma_{\eta z}$ — проекции σ_η на X , Y , Z ,

$\sigma_{z\xi}$, $\sigma_{z\eta}$, σ_{zz} — проекции σ_z на X , Y , Z .

Совокупность девяти величин σ_{ij} назовем компонентами напряженного состояния в системе X , Y , Z .

Таблица 7

	X	Y	Z
X'	l_1	m_1	n_1
Y'	l_2	m_2	n_2
Z'	l_3	m_3	n_3

Выясним, как будут выражаться эти величины, если вместо системы X , Y , Z взять другую прямоугольную систему X' , Y' , Z' , направления осей которой по отношению к осям предыдущей системы задаются таблицей косинусов (7).

Косинусами нормали к площадке, параллельной плоскости $Z'Y'$, будут, очевидно, l_1 , m_1 , n_1 (поскольку нормалью к этой плоскости является X').

Отсюда, согласно формуле (II,6),

$$\sigma_{\xi} = \sigma_{\xi l_1} + \sigma_{\eta m_1} + \sigma_z n_1, \quad (II.7)$$

проектируя это выражение на оси X' , Y' , Z' , будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi'} &= (\sigma_{\xi})_{\xi'} l_1 = (\sigma_{\eta})_{\xi'} m_1 + (\sigma_{\zeta})_{\xi'} n_1, \\ \sigma_{\xi'\eta'} &= (\sigma_{\xi})_{\eta'} l_1 + (\sigma_{\eta})_{\eta'} m_1 + (\sigma_{\zeta})_{\eta'} n_1, \\ \sigma_{\xi'\zeta'} &= (\sigma_{\xi})_{\zeta'} l_1 + (\sigma_{\eta})_{\zeta'} m_1 + (\sigma_{\zeta})_{\zeta'} n_1,\end{aligned}\quad (\text{II.8})$$

но проекции векторов σ_{ξ} , σ_{η} , σ_{ζ} на оси X' , Y' , Z' могут быть выражены через их проекции на оси X , Y , Z , а именно:

$$\begin{aligned}(\sigma_{\xi})_{\xi'} &= \sigma_{\xi\xi} \cos(X, X') + \sigma_{\xi\eta} \cos(Y, X') + \\ &\quad + \sigma_{\xi\zeta} \cos(Z, X') = \sigma_{\xi\xi} l_1 + \sigma_{\xi\eta} m_1 + \sigma_{\xi\zeta} n_1, \\ (\sigma_{\eta})_{\xi'} &= \sigma_{\eta\xi} l_1 + \sigma_{\eta\eta} m_1 + \sigma_{\eta\zeta} n_1, \\ (\sigma_{\zeta})_{\xi'} &= \sigma_{\zeta\xi} l_1 + \sigma_{\zeta\eta} m_1 + \sigma_{\zeta\zeta} n_1, \\ (\sigma_{\xi})_{\eta'} &= \sigma_{\xi\xi} l_2 + \sigma_{\xi\eta} m_2 + \sigma_{\xi\zeta} n_2, \\ (\sigma_{\eta})_{\eta'} &= \sigma_{\eta\xi} l_2 + \sigma_{\eta\eta} m_2 + \sigma_{\eta\zeta} n_2, \\ (\sigma_{\zeta})_{\eta'} &= \sigma_{\zeta\xi} l_2 + \sigma_{\zeta\eta} m_2 + \sigma_{\zeta\zeta} n_2, \\ (\sigma_{\xi})_{\zeta'} &= \sigma_{\xi\xi} l_3 + \sigma_{\xi\eta} m_3 + \sigma_{\xi\zeta} n_3, \\ (\sigma_{\eta})_{\zeta'} &= \sigma_{\eta\xi} l_3 + \sigma_{\eta\eta} m_3 + \sigma_{\eta\zeta} n_3, \\ (\sigma_{\zeta})_{\zeta'} &= \sigma_{\zeta\xi} l_3 + \sigma_{\zeta\eta} m_3 + \sigma_{\zeta\zeta} n_3.\end{aligned}\quad (\text{II.9})$$

Подставляя эти выражения в (II.8), находим:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi}' &= \sigma_{\xi\xi'} = \sigma_{\xi\xi} l_1^2 + \sigma_{\eta\eta} m_1^2 + \sigma_{\zeta\zeta} n_1^2 + (\sigma_{\xi\eta} + \sigma_{\eta\xi}) m_1 l_1 + \\ &\quad + (\sigma_{\xi\zeta} + \sigma_{\zeta\xi}) l_1 n_1 + (\sigma_{\eta\zeta} + \sigma_{\zeta\eta}) m_1 n_1, \\ \sigma_{\xi\eta}' &= \sigma_{\xi'\eta'} = \sigma_{\xi\xi} l_1 l_2 + \sigma_{\eta\eta} m_1 m_2 + \sigma_{\zeta\zeta} n_1 n_2 + \\ &\quad + \sigma_{\zeta\eta} l_1 m_2 + \sigma_{\eta\xi} l_2 m_1 + \sigma_{\xi\zeta} l_1 n_2 + \sigma_{\zeta\xi} l_2 n_1 + \\ &\quad + \sigma_{\eta\zeta} m_1 n_2 + \sigma_{\zeta\eta} n_1 m_2, \\ \sigma_{\xi\zeta}' &= \sigma_{\xi'\zeta'} = \sigma_{\xi\xi} l_1 l_3 + \sigma_{\eta\eta} m_1 m_3 + \sigma_{\zeta\zeta} l_1 m_3 + \sigma_{\eta\xi} l_3 m_1 + \\ &\quad + \sigma_{\xi\zeta} l_1 n_3 + \sigma_{\zeta\xi} l_3 n_1 + \sigma_{\eta\zeta} m_1 n_3 + \sigma_{\zeta\eta} n_1 m_3.\end{aligned}\quad (\text{II.10})$$

Теперь по аналогии могут быть написаны и выражения для остальных компонентов напряжения. Заметим при этом, что, как будет показано в одном из следующих параграфов, в любой системе координат:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (\text{II.11})$$

то-есть при перестановке индексов величина компонента напряжения не изменяется.

Учитывая этот доказываемый в дальнейшем факт, будем окончательно иметь:

$$\begin{aligned}\sigma'_{\xi\xi} &= \sigma_{\xi\xi} l_1^2 + \sigma'_{\eta\eta} m_1^2 + \sigma_{\zeta\zeta} n_1^2 + 2\sigma_{\xi\eta} l_1 m_1 + 2\sigma_{\xi\zeta} l_1 n_1 + 2\sigma_{\eta\zeta} m_1 n_1, \\ \sigma'_{\eta\eta} &= \sigma_{\xi\xi} l_2^2 + \sigma_{\eta\eta} m_2^2 + \sigma_{\zeta\zeta} n_2^2 + 2\sigma_{\xi\eta} l_2 m_2 + 2\sigma_{\xi\zeta} l_2 n_2 + \\ &\quad + 2\sigma_{\eta\zeta} m_2 n_2, \quad (II.12)\end{aligned}$$

$$\sigma'_{\zeta\zeta} = \sigma_{\xi\xi} l_3^2 + \sigma_{\eta\eta} m_3^2 + \sigma_{\zeta\zeta} n_3^2 + 2\sigma_{\xi\eta} l_3 m_3 + 2\sigma_{\xi\zeta} l_3 n_3 + 2\sigma_{\eta\zeta} m_3 n_3,$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{\xi\eta} = \sigma'_{\eta\xi} &= \sigma_{\xi\xi} l_1 l_2 + \sigma_{\eta\eta} m_1 m_2 + \sigma_{\zeta\zeta} n_1 n_2 + \sigma_{\xi\eta} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \\ &\quad + \sigma_{\xi\zeta} (l_1 n_2 + l_2 n_1) + \sigma_{\eta\zeta} (m_1 n_2 + m_2 n_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{\xi\zeta} = \sigma'_{\zeta\xi} &= \sigma_{\xi\xi} l_1 l_3 + \sigma_{\eta\eta} m_1 m_3 + \sigma_{\zeta\zeta} n_1 n_3 + \sigma_{\xi\eta} (l_1 m_3 + l_3 m_1) + \\ &\quad + \sigma_{\xi\zeta} (l_1 n_3 + l_3 n_1) + \sigma_{\eta\zeta} (m_1 n_3 + m_3 n_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{\eta\zeta} = \sigma'_{\zeta\eta} &= \sigma_{\xi\xi} l_2 l_3 + \sigma_{\eta\eta} m_2 m_3 + \sigma_{\zeta\zeta} n_2 n_3 + \sigma_{\xi\eta} (l_2 m_3 + l_3 m_2) + \\ &\quad + \sigma_{\xi\zeta} (l_2 n_3 + l_3 n_2) + \sigma_{\eta\zeta} (m_2 n_3 + m_3 n_2).\end{aligned}$$

Сопоставляя формулы (II.12) с формулами (I.36), видим, что компоненты напряжения преобразовываются при переходе от одних осей к другим, подобно тому, как преобразовываются величины

$$\left. \begin{aligned} e_{xx}, \quad \frac{1}{2} e_{xy}, \quad \frac{1}{2} e_{xz}, \\ \frac{1}{2} e_{yx}, \quad e_{yy}, \quad \frac{1}{2} e_{yz}, \\ \frac{1}{2} e_{zx}, \quad \frac{1}{2} e_{zy}, \quad e_{zz} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

На основании этого ряд положений, доказанных в предыдущей главе применительно к компонентам деформации, могут быть немедленно высказаны и для компонентов напряжения. В частности, можно утверждать, что в каждой точке деформированного тела существует три таких взаимно перпендикулярных направления, для которых $\sigma'_{\xi\eta}$, $\sigma'_{\xi\zeta}$, $\sigma'_{\eta\zeta}$ будут равны нулю.

Косинусы l , m , n , определяющие одно из этих направлений, могут быть найдены из уравнений:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\xi\xi} - \sigma)l + \sigma_{\xi\eta}m + \sigma_{\xi\zeta}n &= 0, \\ \sigma_{\xi\eta}l + (\sigma_{\eta\eta} - \sigma)m + \sigma_{\eta\zeta}n &= 0, \\ \sigma_{\xi\zeta}l + \sigma_{\eta\zeta}m + (\sigma_{\zeta\zeta} - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

и равенства

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (\text{II.14})$$

причем входящий в систему (II.13) параметр σ является одним из трех корней кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} \sigma_{\xi\xi} - \sigma & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\eta\eta} - \sigma & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\xi\zeta} & \sigma_{\eta\zeta} & \sigma_{\zeta\zeta} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{II.15})$$

Ввиду того, что элементы этого определителя симметричны относительно его главной диагонали, все корни уравнения (II.15) будут вещественными, в соответствии с чем можно написать три системы вида (II.13) и найти из них затем все три направления, соответствующие экстремальным значениям $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$, $\sigma_{\zeta\zeta}$ и нулевым значениям $\sigma_{\xi\eta}$, $\sigma_{\xi\zeta}$, $\sigma_{\eta\zeta}$. При этом экстремальные значения $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$, $\sigma_{\zeta\zeta}$ (обозначаемые в дальнейшем σ_1 , σ_2 , σ_3) будут равны корням уравнения (II.15).

Условимся называть $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$, $\sigma_{\zeta\zeta}$ нормальными напряжениями на площадках, перпендикулярных координатным осям, а $\sigma_{\xi\eta}$, $\sigma_{\xi\zeta}$, $\sigma_{\eta\zeta}$ — касательными напряжениями на тех же площадках.

Соответственно экстремальные значения нормальных напряжений в точке M^* : σ_1 , σ_2 , σ_3 будем называть главными нормальными напряжениями в этой точке, а направления нормалей к тем площадкам, на коих они действуют, будем называть главными направлениями напряженного состояния.

Формулы (II.13), (II.14) и (II.15) позволяют определить в каждой точке тела величину главных напряжений и ориентацию площадок, на которых они действуют, коль скоро известны во всех этих точках компоненты напряжения, отнесенные к произвольной системе осей X , Y , Z .

Развертывая определитель (II.15) в строку, приходим к уравнению

$$\sigma^3 - c_2\sigma^2 + c_1\sigma - c_0 = 0, \quad (\text{II.16})$$

коэффициенты которого

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\
 c_1 &= \sigma_{\xi\xi}\sigma_{\eta\eta} + \sigma_{\xi\xi}\sigma_{\zeta\zeta} + \sigma_{\eta\eta}\sigma_{\zeta\zeta} - \sigma_{\xi\eta}^2 - \\
 &\quad - \sigma_{\xi\zeta}^2 - \sigma_{\eta\zeta}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3, \\
 c_0 &= \sigma_{\xi\xi}\sigma_{\eta\eta}\sigma_{\zeta\zeta} + 2\sigma_{\xi\eta}\sigma_{\xi\zeta}\sigma_{\eta\zeta} - \sigma_{\xi\xi}\sigma_{\eta\zeta}^2 - \sigma_{\eta\eta}\sigma_{\xi\zeta}^2 - \sigma_{\zeta\zeta}\sigma_{\xi\eta}^2 = \\
 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3
 \end{aligned} \tag{II.17}$$

не изменяются при переходе от одних осей к другим и представляют собой инварианты напряженного состояния в каждой точке деформированного тела.

§ 19. Условия равновесия элементарного параллелепипеда, выделенного из деформированного тела

Выделим из деформированного тела элементарный прямоугольный параллелепипед, ребра которого пусть будут

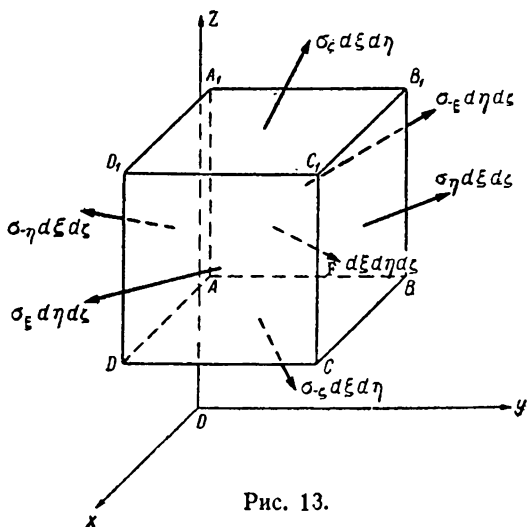


Рис. 13.

параллельны осям X , Y , Z и равны соответственно $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ (рис. 13).

Грани этого элемента характеризуются таблицей 8.

Таблица 8

Наименование грани	Координаты центра тяжести ее площади	Площадь грани	Ориентация грани
AA_1B_1B	$\xi, \eta + \frac{d\eta}{2}, \zeta + \frac{d\zeta}{2}$	$d\eta d\zeta$	$-i_x$
DD_1C_1C	$\xi + d\xi, \eta + \frac{d\eta}{2}, \zeta + \frac{d\zeta}{2}$	$d\eta d\zeta$	$+i_x$
DD_1A_1A	$\xi + \frac{d\xi}{2}, \eta, \zeta + \frac{d\zeta}{2}$	$d\xi d\zeta$	$-i_y$
BB_1C_1C	$\xi + \frac{d\xi}{2}, \eta + d\eta, \zeta + \frac{d\zeta}{2}$	$d\xi d\zeta$	$+i_y$
$ADCB$	$\xi + \frac{d\xi}{2}, \eta + \frac{d\eta}{2}, \zeta$	$d\xi d\eta$	$-i_z$
$A_1D_1C_1B_1$	$\xi + \frac{d\xi}{2}, \eta + \frac{d\eta}{2}, \zeta + d\zeta$	$d\xi d\eta$	$+i_z$

В соответствии с этим на них будут действовать следующие поверхностные силы (которые определяем с точностью до величин третьего порядка малости)

$$\begin{aligned}
 AA_1B_1B &\sim \sigma_{-x}(\xi, \eta + \frac{1}{2} d\eta, \zeta + \frac{1}{2} d\zeta) d\eta d\zeta = \\
 &= -[\sigma_x(\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \eta} d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \zeta} d\zeta] d\eta d\zeta, \\
 DD_1C_1C &\sim \sigma_x(\xi + d\xi, \eta + \frac{1}{2} d\eta, \zeta + \frac{1}{2} d\zeta) d\eta d\zeta = \\
 &= [\sigma_x(\xi, \eta, \zeta) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \eta} d\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \eta} d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \zeta} d\zeta] d\eta d\zeta, \\
 DD_1A_1A &\sim \sigma_{-y}(\xi + \frac{1}{2} d\xi, \eta, \zeta + \frac{1}{2} d\zeta) d\xi d\zeta = \\
 &= -[\sigma_y(\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \xi} d\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \zeta} d\zeta] d\xi d\zeta, \\
 BB_1C_1C &\sim \sigma_y(\xi + \frac{1}{2} d\xi, \eta + d\eta, \zeta + \frac{1}{2} d\zeta) d\xi d\zeta = \\
 &= [\sigma_y(\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \eta} d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \zeta} d\zeta] d\xi d\zeta, \quad (\text{II. } 18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ADCB &\sim \sigma_{\zeta} \left(\xi + \frac{1}{2} d\xi, \eta + \frac{1}{2} d\eta, \zeta \right) d\xi d\eta = \\ &= - \left[\sigma_{\zeta} (\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial \xi} d\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial \eta} d\eta \right] d\xi d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 D_1 C_1 B_1 &\sim \sigma_{\zeta} \left(\xi + \frac{1}{2} d\xi, \eta + \frac{1}{2} d\eta, \zeta + d\zeta \right) d\xi d\zeta = \\ &= \left[\sigma_{\zeta} (\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial \xi} d\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial \zeta} d\zeta \right] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Кроме поверхностных сил, на элемент будут действовать также объемные силы. Их равнодействующая [при той же точности ее определения, какая принята в формулах (II. 18)] будет равна:

$$\begin{aligned} F^* \left(\xi + \frac{1}{2} d\xi, \eta + \frac{1}{2} d\eta, \zeta + \frac{1}{2} d\zeta \right) d\xi d\eta d\zeta = \\ = \left[F (\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \zeta} d\zeta \right] d\xi d\eta d\zeta \approx \\ \approx F^* (\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (\text{II. 19})$$

где $F^* (\xi, \eta, \zeta)$ — удельная объемная сила в точке $M^* (\xi, \eta, \zeta)$.

Суммируя все поверхностные и объемные силы и приравнявая результат нулю, приходим (после сокращения на общий множитель $d\xi d\eta d\zeta$) к соотношению

$$\frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial \zeta} + F^* = 0, \quad (\text{II. 20})$$

являющемуся условием равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на выделенный из деформированного тела объемный элемент.

Векторное уравнение (II. 20) эквивалентно трем скалярным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\xi\zeta}}{\partial \zeta} + F_{\xi}^* &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\zeta\eta}}{\partial \zeta} + F_{\eta}^* &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\xi\zeta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta\zeta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\zeta\zeta}}{\partial \zeta} + F_{\zeta}^* &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II. 21})$$

Для полного решения вопроса о равновесии параллелепипеда нужно дополнить уравнения (II. 21) условиями ра-

венства нулю главного момента всех сил, действующих на параллелепипед.

Относительно прямой, параллельной оси X и проходящей через центр объема параллелепипеда, эти силы будут давать момент

$$M_x = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i), \quad (\text{II. 22})$$

где Z_i и Y_i — проекции какой-либо силы на направления Z и Y , а y_i и z_i плечи этой силы относительно указанной выше оси.

Применяя данную формулу ко всем силам (II. 18) и (II. 19) и сохраняя при этом только величины до третьего порядка малости (включительно), будем иметь:

$$M_x = (\sigma_{\eta\zeta} - \sigma_{\zeta\eta}) d\xi d\eta d\zeta. \quad (\text{II. 23})$$

Приравнивая этот момент нулю, приходим к равенству:

$$\sigma_{\eta\zeta} = \sigma_{\zeta\eta}. \quad (\text{II. 24})$$

Подобным же образом, но исходя из рассмотрения моментов сил относительно осей, параллельных Y и Z , могут быть получены еще два аналогичных равенства:

$$\sigma_{\xi\eta} = \sigma_{\eta\xi}, \quad \sigma_{\xi\zeta} = \sigma_{\zeta\xi}. \quad (\text{II. 25})$$

Таким образом условие равенства нулю главного момента сил, действующих на элементарный параллелепипед, сводятся к требованию, чтобы касательные напряжения допускали перестановку индексов. При этом данное условие должно соблюдаться независимо от выбора направления осей X , Y , Z , то-есть им должны обладать компоненты напряжений в любой системе декартовых координат. Несмотря на то, что в § 18, мы уже пользовались этим свойством компонент напряжений.

Результаты (II. 21) и (II. 25) по виду не отличаются от условий равновесия параллелепипеда, выводимых в классической линейной теории упругости. По существу, однако, они от них отличны, так как в линейной теории упругости при выводе формул (II. 21, II. 25) отождествляют ξ , η , ζ с x , y и z , пренебрегая, следовательно, при проектировании сил изменениями положения точек тела, обусловленными его деформацией.

Отсюда в линейной теории не делают различия между величиною и положением до и после деформации тех площадок, на коих действуют напряжения, или, иначе говоря, пренебрегают, при проектировании сил, тем поворотом, который получает объемный элемент тела в результате деформации. Однако, это допустимо далеко не во всех задачах и в общем случае надо считать, что в уравнениях (II. 21) дифференцирование выполняется не по x, y, z (координатам точек до деформации), а по ξ, η, ζ (координатам окончательного положения точек).

Хотя, как уже было отмечено, по внешнему виду уравнения (II. 21) не сложнее аналогичных уравнений линейной теории, тем не менее фактически они значительно более сложны. Дело в том, что в задачу теории упругости входит определение напряжений и перемещений по заданной нагрузке на тело и условиям его закрепления.

Между тем [согласно формулам (I.1)] u, v, w входят в ξ, η, ζ и следовательно дифференцирование в уравнениях (II. 21) выполняется по параметрам, зависящим от искоемых функций, в отличие от уравнений равновесия элемента в линейной теории упругости, в которых дифференцирование выполняется по параметрам, не содержащим неизвестных величин. В связи с вышеизложенным целесообразно преобразовать уравнение (II. 21) таким образом, чтобы выявить наружу все скрытые в них неизвестные функции.

Иначе говоря, целесообразно перейти в этих уравнениях от дифференцирования по ξ, η, ζ к дифференцированию по x, y, z , что и будет выполнено (§ 20).

§ 20. Преобразование уравнений равновесия объемного элемента к декартовым координатам точек тела до его деформации

Переходя в уравнении (II. 20) от дифференцирования по ξ, η, ζ к дифференцированию по x, y, z , будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \\ & + \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + F^* = 0. \quad (\text{II.26}) \end{aligned}$$

Входящие сюда частные производные $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial z}{\partial \zeta}$ определяются формулами (I.14), согласно которым:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\alpha_{11}}{D}, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_{12}}{D}, & \frac{\partial x}{\partial \zeta} &= \frac{\alpha_{13}}{D}, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\alpha_{21}}{D}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_{22}}{D}, & \frac{\partial y}{\partial \zeta} &= \frac{\alpha_{23}}{D}, \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{\alpha_{31}}{D}, & \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \frac{\alpha_{32}}{D}, & \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= \frac{\alpha_{33}}{D}. \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Подставляя эти выражения (II.26), находим:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial x} + \alpha_{21} \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial y} + \alpha_{31} \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial z} + \alpha_{12} \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial x} + \alpha_{22} \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial y} + \\ &+ \alpha_{32} \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial z} + \alpha_{13} \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial x} + \alpha_{23} \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial y} + \alpha_{33} \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial z} + DF = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Данное уравнение может быть записано также в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial (\alpha_{11}\sigma_{\xi} + \alpha_{12}\sigma_{\eta} + \alpha_{13}\sigma_{\zeta})}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha_{21}\sigma_{\xi} + \alpha_{22}\sigma_{\eta} + \alpha_{23}\sigma_{\zeta})}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial (\alpha_{31}\sigma_{\xi} + \alpha_{32}\sigma_{\eta} + \alpha_{33}\sigma_{\zeta})}{\partial z} - \left[\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_{31}}{\partial z} \right] \sigma_{\xi} - \\ &- \left[\frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_{32}}{\partial z} \right] \sigma_{\eta} - \\ &- \left[\frac{\partial \alpha_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_{33}}{\partial z} \right] \sigma_{\zeta} + DF^* = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Но, как нетрудно убедиться, путем замены параметров α_{ij} их выражениями через u, v, w [согласно формулам (I.15)], величины, заключенные в квадратные скобки (II.29), тождественно равны нулю.

На этом основании

$$\begin{aligned} &\frac{\partial (\alpha_{11}\sigma_{\xi} + \alpha_{12}\sigma_{\eta} + \alpha_{13}\sigma_{\zeta})}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha_{21}\sigma_{\xi} + \alpha_{22}\sigma_{\eta} + \alpha_{23}\sigma_{\zeta})}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial (\alpha_{31}\sigma_{\xi} + \alpha_{32}\sigma_{\eta} + \alpha_{33}\sigma_{\zeta})}{\partial z} + DF^* = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Входящие сюда, заключенные в круглые скобки, комбинации напряжений имеют определенный физический смысл, который может быть выяснен путем следующих рассуждений.

Предположим, что в теле до деформации выделена прямоугольная площадка, перпендикулярная оси Z и имеющая стороны dx , dy . В результате деформации эта площадка превратится в параллелограм, направления сторон которого будут определяться единичными векторами i_1 , i_2 (§ 2). Отсюда вектор единичной нормали к данной площадке может быть найден из равенства

$$n_3 \sin(i_1, i_2) = i_1 \times i_2, \quad (\text{II.31})$$

проектируя которое на оси X , Y , Z , будем иметь:

$$\begin{aligned} \cos(X, n_3) &= \frac{1}{\sin(i_1, i_2)} \left[\cos(Y, i_1) \cos(Z, i_2) - \right. \\ &\quad \left. - \cos(Z, i_1) \cos(Y, i_2) \right], \\ \cos(Y, n_3) &= \frac{1}{\sin(i_1, i_2)} \left[\cos(Z, i_1) \cos(X, i_2) - \right. \\ &\quad \left. - \cos(X, i_1) \cos(Z, i_2) \right], \\ \cos(Z, n_3) &= \frac{1}{\sin(i_1, i_2)} \left[\cos(X, i_1) \cos(Y, i_2) - \right. \\ &\quad \left. - \cos(Y, i_1) \cos(X, i_2) \right], \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

но, согласно (I.32) и (I.29),

$$\begin{aligned} \sin(i_1, i_2) &= \cos \varphi_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{xy}^2}{(1 + E_x)^2 (1 + E_y)^2}} = \\ &= \frac{1}{(1 + E_x)(1 + E_y)} \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy}) - \varepsilon_{xy}^2}, \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

а косинусы, входящие в квадратные скобки формул (II.32), даются таблицей 1 (стр. 16).

На этом основании получаем:

$$\begin{aligned} \cos(X, n_3) &= \frac{1}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy}) - \varepsilon_{xy}^2}} \times \\ &\times \left[\left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} + \omega_z \right) \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{yz} + \omega_x \right) - (1 + \varepsilon_{yy}) \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xz} - \omega_y \right) \right] = \\ &= \frac{\alpha_{31}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy}) - \varepsilon_{xy}^2}}, \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

$$\cos(Y, n_3) = \frac{\alpha_{32}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{yy}) - \epsilon_{xy}^2}}.$$

$$\cos(Z, n_3) = \frac{\alpha_{33}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{yy}) - \epsilon_{xy}^2}},$$

Подобным же образом можно установить, что

$$\cos(n_1, X) = \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{zz})(1+2\epsilon_{yy}) - \epsilon_{yz}^2}},$$

$$\cos(n_1, Y) = \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{zz})(1+2\epsilon_{yy}) - \epsilon_{yz}^2}},$$

$$\cos(n_1, Z) = \frac{\alpha_{13}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{zz})(1+2\epsilon_{yy}) - \epsilon_{yz}^2}}, \quad (\text{II.35})$$

$$\cos(X, n_2) = \frac{\alpha_{21}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{zz}) - \epsilon_{xz}^2}},$$

$$\cos(Y, n_2) = \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{zz}) - \epsilon_{xz}^2}},$$

$$\cos(Z, n_2) = \frac{\alpha_{23}}{\sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{zz}) - \epsilon_{xz}^2}},$$

где n_1 и n_2 — суть векторы единичных нормалей к тем площадкам деформированного тела, которые по деформации были перпендикулярны оси X и оси Y .

Заметим далее, что поскольку площадка $dx dy$ в результате деформации превращается в параллелограм со сторонами $i_1(1+E_x)dx$, $i_2(1+E_y)dy$, то отношение ее площади после деформации к ее площади до деформации будет равно:

$$\begin{aligned} \frac{S_z^*}{S_z} &= (1+E_x)(1+E_y) \sin(i_1, i_2) = \\ &= \sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{yy}) - \epsilon_{xy}^2}, \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

аналогично

$$\begin{aligned} \frac{S_y^*}{S_y} &= \sqrt{(1+2\epsilon_{xx})(1+2\epsilon_{zz}) - \epsilon_{xz}^2}, \\ \frac{S_x^*}{S_x} &= \sqrt{(1+2\epsilon_{yy})(1+2\epsilon_{zz}) - \epsilon_{yz}^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

Таким образом корни, входящие в знаменатели формул (II.34, II.35), равны отношениям площадей элементарных площадок тела, перпендикулярных до деформации осям X, Y, Z , к их площадям после деформации.

Что касается определителя D , то он, в силу формулы (I.94) представляет собою отношение объема элемента тела после деформации к его объему до деформации.

$$D = \frac{V^*}{V}. \quad (\text{II.38})$$

Учитывая теперь все полученные результаты, а также формулу (II.6), определяющую напряжение на произвольной площадке через напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям, можем записать уравнение (II.30) в следующей окончательной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_x^*}{S_x} \sigma_{n1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_y^*}{S_y} \sigma_{n1} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S_z^*}{S_z} \sigma_{n1} \right) + \frac{V^*}{V} F^* = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Такой вид принимает уравнение (II.20), если определять положение точек деформированного тела не декартовыми координатами ξ, η, ζ , а криволинейными координатами $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ (которые являются декартовыми координатами для тела в исходном его положении).

Величина и направление удельной объемной силы в общем случае могут зависеть от перемещений u, v, w , так что

$$F^* = F^*(x, y, z, u, v, w). \quad (\text{II.40})$$

Действительно, если, например, объемные силы имеют инерционный характер, происходя, скажем, от вращения тела вокруг некоторой оси, то величина их явно должна более или менее существенно изменяться вследствие деформации.

Разложим вектора $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$ по направлениям i_1, i_2, i_3 и примем следующие обозначения для их составляющих:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}. \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Тогда уравнение (II. 39) может быть записано в форме

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{S_x^*}{S_x} (\sigma_{xx} i_1 + \sigma_{xy} i_2 + \sigma_{xz} i_3) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{S_y^*}{S_y} (\sigma_{yx} i_1 + \sigma_{yy} i_2 + \sigma_{yz} i_3) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{S_z^*}{S_z} (\sigma_{zx} i_1 + \sigma_{zy} i_2 + \sigma_{zz} i_3) \right] + \frac{V^*}{V} F^* = 0. \quad (\text{II. 42}) \end{aligned}$$

Проектируя последнее векторное равенство на оси X, Y, Z и учитывая при этом, что проекции ортов i_1, i_2, i_3 на указанные оси даются табл. 1 предыдущей главы, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + e_{xx}) \sigma_{xx}^* + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_x \right) \sigma_{xy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \sigma_{xz}^* \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + e_{xx}) \sigma_{yx}^* + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_x \right) \sigma_{yy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \sigma_{yz}^* \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + e_{xx}) \sigma_{zx}^* + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_x \right) \sigma_{zy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \sigma_{zz}^* \right] + \\ & + \frac{V^*}{V} F_{\xi}^* = 0, \quad (\text{II. 43}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \sigma_{xx}^* + (1 + e_{yy}) \sigma_{xy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \sigma_{xz}^* \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \sigma_{yx}^* + (1 + e_{yy}) \sigma_{yy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \sigma_{yz}^* \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \sigma_{zx}^* + (1 + e_{yy}) \sigma_{zy}^* + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \sigma_{zz}^* \right] + \\ & + \frac{V^*}{V} F_{\eta}^* = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \sigma_{xx}^* + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \sigma_{xy}^* + (1 + e_{zz}) \sigma_{xz}^* \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \sigma_{yx}^* + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \sigma_{yy}^* + (1 + e_{zz}) \sigma_{yz}^* \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \sigma_{zx}^* + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \sigma_{zy}^* + (1 + e_{zz}) \sigma_{zz}^* \right] + \\ & + \frac{V^*}{V} F_{\zeta}^* = 0, \end{aligned}$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^* &= \frac{S_x^*}{S_x} \frac{\sigma_{xx}}{1+E_x}, & \sigma_{xy}^* &= \frac{S_x^*}{S_x} \frac{\sigma_{xy}}{1+E_y}, & \sigma_{xz}^* &= \frac{S_x^*}{S_x} \frac{\sigma_{xz}}{1+E_z}, \\ \sigma_{yy}^* &= \frac{S_y^*}{S_y} \frac{\sigma_{yy}}{1+E_y}, & \sigma_{yz}^* &= \frac{S_y^*}{S_y} \frac{\sigma_{yz}}{1+E_z}, & \sigma_{yx}^* &= \frac{S_y^*}{S_y} \frac{\sigma_{yx}}{1+E_x}, \\ \sigma_{zx}^* &= \frac{S_z^*}{S_z} \frac{\sigma_{zx}}{1+E_x}, & \sigma_{zy}^* &= \frac{S_z^*}{S_z} \frac{\sigma_{zy}}{1+E_y}, & \sigma_{zz}^* &= \frac{S_z^*}{S_z} \frac{\sigma_{zz}}{1+E_z}.\end{aligned}\quad (\text{II. 44})$$

Три уравнения (II. 43) эквивалентны векторному уравнению (II. 39) и являются скалярной формой его написания.

Величины σ_{ij}^* , определяемые формулами (II. 44), не будут напряжениями в точном смысле этого слова. Их можно назвать напряжениями, отнесенными к размерам объемного элемента не после, а до деформации.

Если деформации малы, то отношения

$$\frac{S_j^*}{S_j} \frac{1}{1+E_i} \approx 1 \quad (\text{II. 45})$$

и σ_{ij}^* можно отождествлять с σ_{ij} — то-есть с составляющими напряжений по направлениям i_1, i_2, i_3 . Таким образом разница между σ_{ij}^* и σ_{ij} проявляет себя только при больших деформациях — когда сдвигами и удлинениями нельзя пренебрегать по сравнению с единицею.

В следующей главе будет доказано, что

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ji}^*, \quad (\text{II. 46})$$

то есть, что индексы при σ^* допускают перестановку. Но тогда, как ясно из формул (II. 44), напряжения σ_{ij} такой перестановки допускать в общем случае (при больших деформациях) не будут. Это не находится в противоречии с доказанным в предыдущем параграфе свойством симметрии матрицы напряжений, ибо данное свойство было там доказано только для напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках, разложенных по направлениям нормалей к этим площадкам.

§ 21. Упрощение уравнений равновесия при малых удлинениях и сдвигах

Отношения $\frac{S_x^*}{S_x}$, $\frac{S_y^*}{S_y}$, $\frac{S_z^*}{S_z}$, $\frac{V^*}{V}$ отличаются от единицы только на величины одного порядка с удлинениями и сдвигами. Отсюда, при малой деформации их можно полагать равными единице, после чего уравнение (II. 39) принимает вид:

$$\frac{\partial \sigma_{n_1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{n_2}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{n_3}}{\partial z} + F^* = 0. \quad (\text{II.47})$$

Выполняя это упрощение также в скалярных уравнениях (II.43) и пренебрегая в них сверх того относительными удлинениями E_x , E_y , E_z по сравнению с единицей, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + e_{xx}) \sigma_{xx} + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \sigma_{xy} + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \sigma_{xz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + e_{xy}) \sigma_{yx} + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \sigma_{yy} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \sigma_{yz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + e_{xz}) \sigma_{zx} + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \sigma_{zy} + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \sigma_{zz} \right] + F_x^* = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \sigma_{xx} + (1 + e_{yy}) \sigma_{xy} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \sigma_{xz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \sigma_{yx} + (1 + e_{yy}) \sigma_{yy} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \sigma_{yz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \sigma_{zx} + (1 + e_{yy}) \sigma_{xy} + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \sigma_{zz} \right] + F_y^* = 0, \quad (\text{II.48}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \sigma_{xx} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \sigma_{xy} + (1 + e_{zz}) \sigma_{xz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \sigma_{yz} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \sigma_{yy} + (1 + e_{zz}) \sigma_{yz} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \sigma_{zx} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sigma_{zy} + (1 + e_{zz}) \sigma_{zz} \right] + F_z^* = 0. \end{aligned}$$

Поясним рисунком геометрическую сущность упрощений, с помощью которых эти уравнения были получены. Выделим из тела до его деформации прямоугольный параллелепипед с ребрами dx , dy , dz , параллельными осям X , Y , Z (рис. 14).

В результате деформации этот прямоугольный параллелепипед превратится в косоугольный с ребрами $(1 + E_x) dx$, $(1 + E_y) dy$, $(1 + E_z) dz$ и углами между ними $\frac{\pi}{2} - \varphi_{xy}$,

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_{xz}, \quad \frac{\pi}{2} - \varphi_{yz}.$$

Если, однако, углы поворота велики по сравнению со сдвигами φ_{xy} , φ_{xz} , φ_{yz} , то (как было отмечено еще в § 13 I главы) при проектировании сил можно пренебрегать вторыми по сравнению с первыми. Последнее равносильно тому, что можно изобразить рассматриваемый параллелепипед прямоугольным и после деформации (рис. 14). Кроме того, малость удлинений и сдвигов позволяет (при рассмотрении равновесия параллелепипеда) не делать различия между его размерами до и после деформации, относя напряжения и объемные силы соответственно к первоначальным размерам площадок и первоначальному объему элемента. Это позволяет изобразить параллелепипед после деформации равным параллелепипеду до деформации и отличающимся от него (геометрически) только своим положением в пространстве (рис. 14).

На основании сделанных замечаний единичные векторы i_1 , i_2 , i_3 следует считать взаимоперпендикулярными (рис. 14). Их совокупность образует (при принятой точности рассуждений) триедр декартовых осей, повернутый по отношению к осям X , Y , Z в соответствии с поворотом, получаемым в результате деформации окрестностью рассматриваемой точки тела.

Физический закон, о котором будет идти речь в следующей главе, устанавливает связь между деформациями и составляющими напряжений по направлениям i_1 , i_2 , i_3 .

Учитывая это, изобразим напряжения разложенными по этим направлениям (рис. 14), после чего данный рисунок будет в точности соответствовать системе (II.48).

Подводя итог вышеприведенным рассуждениям, можно сказать, что данная система выведена в предположении, что

при рассмотрении условий равновесия бесконечно малого элемента, выделенного из тела, допустимо пренебрегать деформацией элемента, учитывая только его поворот. В соот-

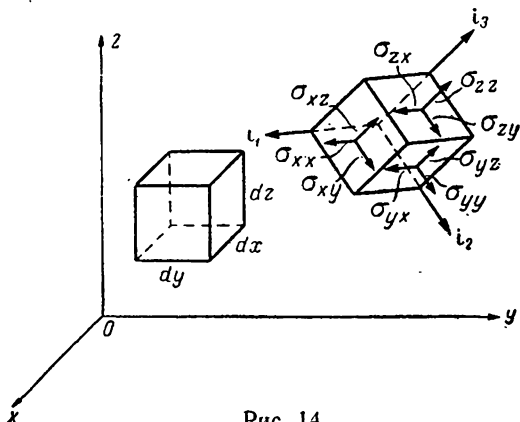


Рис. 14.

ветствии с этим система (II. 48) может быть названа условием равновесия бесконечно малого элемента, справедливым при малых относительных деформациях и произвольных поворотах.

§ 22. Упрощение уравнений равновесия при малых поворотах

Если углы поворота малы по сравнению с единицей, то, как было показано (§ 14), параметры e_{xx}, \dots, e_{zz} будут отличаться от компонентов деформации только на величины порядка квадратов углов поворота. Это позволяет упростить в данном частном случае систему (II. 48), пренебрегая в ней деформациями и квадратами углов поворота по сравнению с первыми степенями последних.

В результате такого упрощения получим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_{xx} - \omega_x \sigma_{xy} + \omega_y \sigma_{xz}] + \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_{yx} - \omega_x \sigma_{yy} + \omega_y \sigma_{yz}] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} [\sigma_{zx} - \omega_x \sigma_{zy} + \omega_y \sigma_{zz}] + F_x^* = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} [\omega_z \sigma_{xx} + \sigma_{xy} - \omega_x \sigma_{xz}] + \frac{\partial}{\partial y} [\omega_z \sigma_{yx} + \sigma_{yy} - \omega_x \sigma_{yz}] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} [\omega_z \sigma_{zx} + \sigma_{zy} - \omega_x \sigma_{zz}] + F_\eta^* = 0, \quad (\text{II.49}) \\
& \frac{\partial}{\partial x} [-\omega_y \sigma_{xx} + \omega_x \sigma_{xy} + \sigma_{xz}] + \frac{\partial}{\partial y} [-\omega_y \sigma_{yx} + \omega_x \sigma_{yy} + \sigma_{yz}] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} [-\omega_y \sigma_{zx} + \omega_x \sigma_{zy} + \sigma_{zz}] + F_\zeta^* = 0.
\end{aligned}$$

В данных уравнениях ω_x , ω_y и ω_z можно считать углами поворота элемента тела вокруг осей X , Y и Z .

С учетом этого замечания систему (II. 49) нетрудно вывести независимо от предыдущих рассуждений, воспользовавшись для этой цели рис. 14 и проектируя все действующие на параллелепипед, выделенный из деформированного тела, поверхностные и объемные силы на направления X , Y , Z .

§ 23. Переход к уравнениям равновесия классической теории упругости

Следующий шаг в направлении упрощения уравнений равновесия элемента может быть сделан, если предположить, что все углы поворота настолько малы, что в системе (II.49) можно отбросить члены, которые на них умножены, по сравнению с членами, которые их не содержат.

После этого упрощения уравнения (II.49) принимают вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_\xi = 0, \\
& \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_\eta = 0, \quad (\text{II.50}) \\
& \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_\zeta = 0.
\end{aligned}$$

Очевидно, что написание уравнений равновесия в такой форме равносильно пренебрежению поворотом объемного элемента при проектировании всех сил, на него действующих, то-есть равносильно отождествлению направлений i_1 , i_2 , i_3 с направлениями X , Y , Z . Но если так, то исчезает разница

между $\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{yz}$ и $\sigma_{\xi\xi}, \dots, \sigma_{\eta\zeta}$, то-есть разниця между компонентами напряжения по направлениям локального триедра криволинейной системы координат i_1, i_2, i_3 и компонентами напряжения по направлениям декартовых осей X, Y, Z .

Отсюда система (II.50) может быть записана также в форме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{\xi\xi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\eta\xi}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\zeta\xi}}{\partial z} + F_{\xi} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\xi\eta}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\eta\eta}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\zeta\eta}}{\partial z} + F_{\eta} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\xi\zeta}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\eta\zeta}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\zeta\zeta}}{\partial z} + F_{\zeta} &= 0.\end{aligned}\quad (\text{II.51})$$

Три уравнения (II.51) могут быть заменены одним векторным

$$\frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\zeta}}{\partial z} + F = 0, \quad (\text{II.52})$$

которое в совокупности с равенствами вида

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

является формулировкой условий равновесия элемента классической теории упругости. Уравнение (II.52) получается из уравнения (II.20), если в последнем дифференцирование по ξ, η, ζ заменить дифференцированием по x, y, z .

Мы пришли к уравнению (II.52) путем цепи последовательных упрощений точного уравнения (II.39). Из характера этих упрощений видно, что критерием их допустимости является малость удлинений и сдвигов и малость углов поворота. Существенно обратить внимание на то обстоятельство, что встречаются задачи, в которых даже при малых по сравнению с единицею поворотах переход от уравнений (II.49) к уравнениям (II.50) оказывается невозможен. Чтобы это показать, рассмотрим, например, выражения

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \omega_y \sigma_{xx} + \omega_x \sigma_{xy}, \\ \sigma_{yz} &= \omega_y \sigma_{yx} + \omega_x \sigma_{yy}, \\ \sigma_{zx} &= \omega_y \sigma_{zx} + \omega_x \sigma_{zy},\end{aligned}\quad (\text{II.53})$$

входящие в третье из уравнений (II.49).

Очевидно, что возможность пренебрежения в этих выражениях нелинейными членами зависит не только от величины ω_j , но и от сравнительной величины σ_{ij} .

Достаточно предположить, что напряжения σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} значительно меньше напряжений σ_{xy} , σ_{yx} , σ_{yz} , чтобы линеализация формул (II.53) была поставлена под сомнение, несмотря на малость всех ω_j по сравнению с единицей.

Тем самым становится невозможной и линеализация третьего из уравнений системы (II.49).

Таким образом малость углов поворота по сравнению с единицей еще не является достаточным критерием для линеализации уравнений равновесия элемента, выделенного из деформированного тела. При выполнении данного упрощения существенно обращать внимание на то, не являются ли напряжения, умножаемые на повороты, большими по сравнению с теми напряжениями, которые входят в уравнения линейно. Проблемы упругой устойчивости, изгиба тонких пластин и др. являются примерами, когда указанное выше обстоятельство играет существенную роль.

§ 24. Переход к криволинейным координатам

Предыдущие рассуждения соответствовали случаю, когда положения точек тела задавалось в декартовой системе координат. Данная система удобна для тел, ограниченных взаимно перпендикулярными плоскостями, и гораздо менее удобна для тел, ограниченных кривыми поверхностями, так как, если в первом случае уравнения границ тела записываются в декартовых координатах весьма просто, то во втором случае они будут более сложны, чем затрудняется подчинение решения краевым условиям.

Поэтому во многих случаях вместо декартовых целесообразней пользоваться криволинейными координатами, причем всегда надо стремиться выбирать их такими, чтобы поверхности, ограничивающие тело, принадлежали к числу координатных поверхностей, поскольку именно тогда краевые условия формулируются особенно просто. В связи с вышеизложенным дополним полученные в настоящей главе результаты рассмотрением условий равновесия элемента тела, точки

которого заданы в произвольной ортогональной системе криволинейных координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Для сокращения связанных с этим преобразованием выкладок уместно воспользоваться тем, что уравнения равновесия элемента тела в нелинейной теории, как уже отмечалось, сходны по виду с соответствующими уравнениями классической теории упругости.

Именно — в нелинейной теории условия равновесия элемента, при использовании декартовых координат, сводятся к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_x^*}{S_x} \sigma_{n_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_y^*}{S_y} \sigma_{n_2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S_z^*}{S_z} \sigma_{n_3} \right) + \frac{V^*}{V} F^* = 0, \quad (\text{II.54})$$

которое в линейной теории принимает вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F^* = 0 \quad (\text{II.55})$$

и получается при замене в уравнении (II.54) векторов

$$\frac{S_x^*}{S_x} \sigma_{n_1}, \quad \frac{S_y^*}{S_y} \sigma_{n_2}, \quad \frac{S_z^*}{S_z} \sigma_{n_3} \quad \text{векторами} \\ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z.$$

Отсюда ясно, что если преобразование уравнения (II.55) к произвольным ортогональным криволинейным координатам известно, то соответствующее преобразование уравнения (II.54) может быть написано по аналогии.

Коль скоро положение точек тела задается криволинейными координатами (§ 16, I глава), то и бесконечно малый объемный элемент нужно выделить, ограничивая его шестью координатными поверхностями избранной криволинейной системы. В итоге деформации этот элемент изменит свое положение в пространстве (за счет смещения и поворота) и, кроме того, изменит свои размеры и форму (рис. 15). Его ребра, первоначально равные: $k_1 H_1 d\alpha_1$, $k_2 H_2 d\alpha_2$, $k_3 H_3 d\alpha_3$, станут равны:

$$k'_1 H_1 (1 + E_{\alpha_1}) d\alpha_1, \quad k'_2 H_2 (1 + E_{\alpha_2}) d\alpha_2, \quad k'_3 H_3 (1 + E_{\alpha_3}) d\alpha_3,$$

где под k'_1 , k'_2 , k'_3 подразумеваются единичные векторы, соответствующие направлению линейных элементов, совпадавших

до деформации с векторами k_1, k_2, k_3 . Косинусы углов между ортами k_1, k_2, k_3 и ортами k'_1, k'_2, k'_3 даются таблицей 1 (I глава), в которой под параметрами ϵ и ω надо понимать их значения согласно формулам (I.122), и (I.124).

Напряжения, действующие на грани выделенного указанным образом элемента, будем разлагать по направлениям

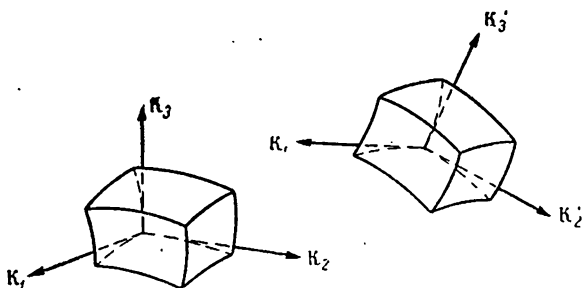


Рис. 15.

k'_1, k'_2, k'_3 , что аналогично разложению по направлениям i_1, i_2, i_3 , которым мы пользовались, применяя декартовы координаты.

В курсах классической теории упругости (см. например „Математическую теорию упругости“ А. Лява, стр. 101) доказывается, что при использовании ортогональных криволинейных координат, уравнение (II.55) заменится следующими тремя скалярными уравнениями:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 H_3 \widehat{\alpha_1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 H_1 \widehat{\alpha_2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \widehat{\alpha_3}) \right\} + \\ & + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \widehat{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \widehat{\alpha_1 \alpha_3} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \widehat{\alpha_2 \alpha_2} - \\ & - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \widehat{\alpha_3 \alpha_3} + F_{\alpha_1}^* = 0 \\ & \frac{1}{H_1 H_3 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 H_3 \widehat{\alpha_1 \alpha_2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 H_1 \widehat{\alpha_2 \alpha_2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \widehat{\alpha_3 \alpha_2}) \right\} + \\ & + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \widehat{\alpha_2 \alpha_3} + \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \widehat{\alpha_2 \alpha_1} - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \widehat{\alpha_3 \alpha_3} - \\ & - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \widehat{\alpha_1 \alpha_1} + F_{\alpha_2}^* = 0, \end{aligned} \quad (II.56)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 H_3 \widehat{\alpha_1 \alpha_3}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 H_1 \widehat{\alpha_2 \alpha_3}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \widehat{\alpha_3 \alpha_1}) \right\} + \\ & + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \widehat{\alpha_3 \alpha_1} + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} \widehat{\alpha_3 \alpha_2} - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \widehat{\alpha_1 \alpha_1} - \\ & - \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \widehat{\alpha_2 \alpha_2} + F_{\alpha_3} = 0. \end{aligned}$$

Здесь: H_1, H_2, H_3 — коэффициенты Ляме (§ 16, I глава);

$F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, F_{\alpha_3}$ — проекции удельной объемной силы на направления $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;

$\widehat{\alpha_1 \alpha_1}, \widehat{\alpha_1 \alpha_2}, \widehat{\alpha_1 \alpha_3}$ — составляющие напряжения σ_{α_1} по k_1, k_2, k_3 ;

$\widehat{\alpha_2 \alpha_1}, \widehat{\alpha_2 \alpha_2}, \widehat{\alpha_2 \alpha_3}$ — составляющие напряжения σ_{α_2} по k_1, k_2, k_3 ;

$\widehat{\alpha_3 \alpha_1}, \widehat{\alpha_3 \alpha_2}, \widehat{\alpha_3 \alpha_3}$ — составляющие напряжения σ_{α_3} по k_1, k_2, k_3 ;

$\sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_3}$ — напряжения на площадках, перпендикулярных ортам $[k'_2, k'_3], [k'_3, k'_1], [k'_1, k'_2]$,

причем в линейной теории упругости не делают различия между k_1, k_2, k_3 и k'_1, k'_2, k'_3 .

Переходя к нелинейной теории упругости и принимая во внимание сходство уравнений (II.54) и (II.55), можно заключить, что в координатах $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ уравнению (II.54) будут соответствовать уравнения, идентичные по виду системе (II.56), причем, однако, в этих уравнениях под

$$\begin{aligned} & \widehat{\alpha_1 \alpha_1}, \widehat{\alpha_1 \alpha_2}, \widehat{\alpha_1 \alpha_3}, \\ & \widehat{\alpha_2 \alpha_1}, \widehat{\alpha_2 \alpha_2}, \widehat{\alpha_2 \alpha_3}, \\ & \widehat{\alpha_3 \alpha_1}, \widehat{\alpha_3 \alpha_2}, \widehat{\alpha_3 \alpha_3} \end{aligned}$$

надо будет подразумевать составляющие векторов $\frac{S_1^*}{S_1} \sigma_{n_1}$,

$\frac{S_2^*}{S_2} \sigma_{n_2}, \frac{S_3^*}{S_3} \sigma_{n_3}$, где $n_1 = [k'_2, k'_3]$, $n_2 = [k'_3, k'_1]$, $n_3 = [k'_1, k'_2]$

по направлениям осей локального триедра k_1, k_2, k_3 . Принимая для составляющих $\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \sigma_{n_3}$ по направлениям k'_1, k'_2, k'_3 обозначения

$$\begin{aligned}\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13} & \text{— для составляющих } \sigma_{n_1}, \\ \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23} & \text{— для составляющих } \sigma_{n_2}, \\ \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33} & \text{— для составляющих } \sigma_{n_3},\end{aligned}$$

можем написать:

$$\begin{aligned}\frac{S_1^*}{S_1} \sigma_{n_1} &= \frac{S_1^*}{S_1} (\sigma_{11} k'_1 + \sigma_{12} k'_2 + \sigma_{13} k'_3), \\ \frac{S_2^*}{S_2} \sigma_{n_2} &= \frac{S_2^*}{S_2} (\sigma_{21} k'_1 + \sigma_{22} k'_2 + \sigma_{23} k'_3), \\ \frac{S_3^*}{S_3} \sigma_{n_3} &= \frac{S_3^*}{S_3} (\sigma_{31} k'_1 + \sigma_{32} k'_2 + \sigma_{33} k'_3).\end{aligned}\quad (II.57)$$

Учитывая далее сказанное выше, а также правило проектирования ортов k'_1, k'_2, k'_3 на направления k_1, k_2, k_3 , выражаемое таблицей 1 (I глава), приходим к заключению, что скалярная система уравнений, соответствующая векторному уравнению (II.54), при отнесении его к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ может быть получена при замене в системе (II.56) $\widehat{\alpha_1 \alpha_1}, \dots, \widehat{\alpha_3 \alpha_3}$ следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha_1 \alpha_1} &= (1 + e_{11}) \sigma_{11}^* + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_3\right) \sigma_{12}^* + \left(\frac{1}{2} e_{13} + \omega_2\right) \sigma_{13}^*, \\ \widehat{\alpha_1 \alpha_2} &= \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3\right) \sigma_{11}^* + (1 + e_{22}) \sigma_{12}^* + \left(\frac{1}{2} e_{23} - \omega_1\right) \sigma_{13}^*, \\ \widehat{\alpha_1 \alpha_3} &= \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2\right) \sigma_{11}^* + \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1\right) \sigma_{12}^* + (1 + e_{33}) \sigma_{13}^*, \\ \widehat{\alpha_2 \alpha_1} &= (1 + e_{11}) \sigma_{21}^* + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_3\right) \sigma_{22}^* + \left(\frac{1}{2} e_{13} + \omega_2\right) \sigma_{23}^*, \\ \widehat{\alpha_2 \alpha_2} &= \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3\right) \sigma_{21}^* + (1 + e_{22}) \sigma_{22}^* + \left(\frac{1}{2} e_{23} - \omega_1\right) \sigma_{23}^*, \\ \widehat{\alpha_2 \alpha_3} &= \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2\right) \sigma_{21}^* + \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1\right) \sigma_{22}^* + (1 + e_{33}) \sigma_{23}^*,\end{aligned}\quad (II.58)$$

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha_3 \alpha_1} &= (1 + e_{11}) \sigma_{31}^* + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_3\right) \sigma_{32}^* + \left(\frac{1}{2} e_{13} + \omega_2\right) \sigma_{33}^*, \\ \widehat{\alpha_3 \alpha_2} &= \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3\right) \sigma_{31}^* + (1 + e_{22}) \sigma_{32}^* + \left(\frac{1}{2} e_{23} - \omega_1\right) \sigma_{33}^*, \\ \widehat{\alpha_3 \alpha_3} &= \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2\right) \sigma_{31}^* + \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1\right) \sigma_{32}^* + (1 + e_{33}) \sigma_{33}^*,\end{aligned}$$

где $\sigma_{11}^*, \dots, \sigma_{33}^*$ связаны с $\sigma_{11}, \dots, \sigma_{33}$ формулами вида (II.44), причем в данном случае:

$$\begin{aligned}\frac{S_1^*}{S_1} &= \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{22})(1 + 2\varepsilon_{33}) - \varepsilon_{23}^2}, \\ \frac{S_2^*}{S_2} &= \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{11})(1 + 2\varepsilon_{33}) - \varepsilon_{13}^2}, \\ \frac{S_3^*}{S_3} &= \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{11})(1 + 2\varepsilon_{22}) - \varepsilon_{12}^2},\end{aligned}\quad (\text{II.59})$$

а параметры $e_{11}, \dots, \omega_1, \dots, \varepsilon_{11}, \dots$ выражаются через составляющие перемещений по направлениям $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ (u, v, w) формулами (I.122), (I.124), (I.125).

Кроме указанной замены напряжений, для превращения уравнений (II.56) в уравнения нелинейной теории нужно подставить в них вместо $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, F_{\alpha_3}$ соответственно

$$\frac{V^*}{V} F_{\alpha_1}^*, \frac{V^*}{V} F_{\alpha_2}^*, \frac{V^*}{V} F_{\alpha_3}^*, \text{ где } F_{\alpha_1}^*, F_{\alpha_2}^*, F_{\alpha_3}^*$$

проекции на $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ удельных объемных сил, отнесенных к деформированному телу, а

$$\frac{V^*}{V} = D = (1 + \Delta), \quad (\text{II.60})$$

где Δ — объемное расширение (§ 11, I глава).

Рассмотренные выше правила преобразования системы (II.43) к ортогональным криволинейным координатам были установлены без пренебрежения какими-либо членами, так что система (II.56), после подстановки в нее формул (II.58), будет точно соответствовать системе (II.43).

Если удлинения и сдвиги пренебрежимо малы по сравнению с единицей, то формулы (II.58) могут быть упрощены путем отождествления в них σ_{11}^* , σ_{12}^* , ..., σ_{33}^* с составляющими напряжения σ_{11} , σ_{12} , ..., σ_{33} (§ 21).

Если, кроме того, малы по сравнению с единицей углы поворота, то эти формулы допускают дальнейшее упрощение и могут быть заменены выражениями:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\alpha_1 \alpha_1} &= \sigma_{11} - \omega_3 \sigma_{12} + \omega_2 \sigma_{13}, \\
 \widehat{\alpha_1 \alpha_2} &= \sigma_{12} + \omega_3 \sigma_{11} - \omega_1 \sigma_{13}, \\
 \widehat{\alpha_1 \alpha_3} &= \sigma_{13} + \omega_1 \sigma_{12} - \omega_2 \sigma_{11}, \\
 \widehat{\alpha_2 \alpha_1} &= \sigma_{21} - \omega_3 \sigma_{22} + \omega_2 \sigma_{23}, \\
 \widehat{\alpha_2 \alpha_2} &= \sigma_{22} + \omega_3 \sigma_{21} - \omega_1 \sigma_{23}, \\
 \widehat{\alpha_2 \alpha_3} &= \sigma_{23} + \omega_1 \sigma_{22} - \omega_2 \sigma_{21}, \\
 \widehat{\alpha_3 \alpha_1} &= \sigma_{31} - \omega_3 \sigma_{32} + \omega_2 \sigma_{33}, \\
 \widehat{\alpha_3 \alpha_2} &= \sigma_{32} + \omega_3 \sigma_{31} - \omega_1 \sigma_{33}, \\
 \widehat{\alpha_3 \alpha_3} &= \sigma_{33} + \omega_1 \sigma_{32} - \omega_2 \sigma_{31}.
 \end{aligned} \tag{II.61}$$

И, наконец, если углы поворота являются малыми величинами одного порядка с компонентами деформации, то в формулах (II.61) можно пренебречь произведениями напряжений на углы поворота, что приводит к равенствам:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\alpha_1 \alpha_1} &= \sigma_{11}, & \widehat{\alpha_1 \alpha_2} &= \sigma_{12}, & \widehat{\alpha_1 \alpha_3} &= \sigma_{13}, \\
 \widehat{\alpha_2 \alpha_1} &= \sigma_{21}, & \widehat{\alpha_2 \alpha_2} &= \sigma_{22}, & \widehat{\alpha_2 \alpha_3} &= \sigma_{23}, \\
 \widehat{\alpha_3 \alpha_1} &= \sigma_{31}, & \widehat{\alpha_3 \alpha_2} &= \sigma_{32}, & \widehat{\alpha_3 \alpha_3} &= \sigma_{33}.
 \end{aligned} \tag{II.62}$$

При этом уравнения (II.56) становятся идентичными уравнениям равновесия линейной теории упругости, отнесенным к ортогональным криволинейным координатам α_1 , α_2 , α_3 .

ГЛАВА III

РАБОТА ДЕФОРМАЦИИ, ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, УПРУГИЙ ЗАКОН

§ 25. Работа деформации

Полученная в предыдущей главе система дифференциальных уравнений, выражающая условия равновесия объемного элемента, выделенного из деформированного твердого тела, содержит более неизвестных, чем в ней имеется уравнений. Именно — налицо шесть уравнений (II.43 и II.46), содержащих двенадцать неизвестных (девять составляющих напряжения и три компонента перемещения).

Ввиду этого задача о равновесии деформированного твердого тела остается неопределенной до тех пор, пока не установлено еще шесть дополнительных соотношений, связывающих составляющие напряжения с компонентами перемещения и выражающих тот закон, по которому материал рассматриваемого тела сопротивляется всевозможным видам деформации. Теоретическое выяснение этого закона неизбежно требует проникновения в природу междумолекулярных сил, стремящихся удержать частицы твердого тела на определенных расстояниях друг от друга, причем на современном этапе развития науки данная трудная задача не может быть достаточно достоверно решена. Поэтому в настоящее время связь между деформациями и напряжениями (которая не одинакова для различных материалов) устанавливается главным образом экспериментальным путем. Однако, некоторые общие свойства, присущие этой связи, могут быть выяснены и теоретически.

Будем исходить из предположений, что процесс деформации изотермичен и что работа, затрачиваемая на изменение объема и формы произвольного бесконечно малого прямо-

угольного параллелепипеда, выделенного из тела, не зависит от того, каким путем осуществляется переход от начального положения этого элемента в деформированное.

Иначе говоря, будем считать, что роль диссипативных сил, в процессе взаимодействия частиц тела при его деформации, пренебрежимо мала по сравнению с ролью консервативных сил.

Тело, удовлетворяющее данному предположению, после снятия с него нагрузки должно возвращаться к исходным своим размерам и форме, в соответствии с чем оно может быть названо идеально упругим.

Работа, необходимая для деформации элементарного параллелепипеда, выделенного из упругого тела, может быть представлена в виде

$$dA = \mathfrak{J}(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}) dx dy dz, \quad (\text{III.1})$$

то-есть будет равна произведению первоначального объема параллелепипеда на некоторую функцию шести компонентов деформации, вид которой зависит от физических свойств рассматриваемого материала (и не зависит от размеров и формы тела). Но компоненты деформации могут быть всегда выражены через три главных компонента деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и косинусы углов между главными направлениями деформации $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$ и осями X, Y, Z (§ 4, 5, I глава). При этом последние косинусы можно рассматривать как функции трех независимых величин — например эйлеровых углов θ, φ, ψ , определяющих ориентацию триедра $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ по отношению к триедру X, Y, Z .

Отсюда формула (III.1) может быть записана также следующим образом:

$$dA = \mathfrak{J}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta, \varphi, \psi) dx dy dz. \quad (\text{III.2})$$

Данный вид формулы (III.1) подчеркивает зависимость работы, затрачиваемой на деформацию элементарного параллелепипеда как от величины главных компонентов деформации, так и от направления волокон тела, получающих эти деформации.

Таким образом формула (III.2), как и эквивалентная ей формула (III.1), предполагает, что тело неодинаково реаги-

рует на деформацию в различных направлениях, или, иначе говоря, эта формула предполагает материал тела анизотропным. Если физические свойства тела одинаковы во всех направлениях, то элементарная работа деформации не может зависеть от величин, изменяющихся с поворотом координатных осей, и должна быть функцией только инвариантных величин.

Поэтому для изотропного тела:

$$dA = \mathfrak{F}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) dxdydz. \quad (\text{III.3})$$

Три независимых инварианта $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ хороши в том отношении, что имеют простой физический смысл (особенно при малой деформации). Математически они, однако, неудобны, так как выражение их через компоненты деформации связано с необходимостью решения кубического уравнения (I.86).

Ввиду этого целесообразнее рассматривать работу деформации элемента изотропного тела не как функцию корней уравнения (I.86), а как функцию его трех коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_2 &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ a_1 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \frac{1}{4}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \\ &\quad + \varepsilon_{yz}^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3, \\ a_0 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \frac{1}{4}(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz}^2 + \\ &\quad + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}), \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

которые имеют перед $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ то преимущество, что являются рациональными функциями компонентов деформации.

В соответствии с этим замечанием работу, необходимую для деформации элементарного параллелепипеда, выделенного из изотропного тела, удобнее всего записывать в следующем общем виде:

$$dA = \Phi(a_2, a_1, a_0) dxdydz. \quad (\text{III.5})$$

Отсюда работа, затраченная на деформацию тела в целом, будет равна

$$A = \iiint \Phi(a_2, a_1, a_0) dxdydz, \quad (\text{III.6})$$

где интегрирование должно быть распространено по всему объему тела *до его деформации* (поскольку $dxdydz$ есть объем элементарного параллелепипеда, выделенного из тела в исходном его положении).

Функцию $\Phi(a_2, a_1, a_0)$ можно назвать работой деформации, отнесенной к единице объема недеформированного тела, или короче — удельной работой деформации.

§ 26. Начало возможных перемещений

Применим начало возможных перемещений к деформированному телу, находящемуся в равновесии. Для этого сообщим перемещениям $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ виртуальные приращения δu , δv , δw , которые будем считать произвольными непрерывными функциями x, y, z , равными нулю в тех точках, где значения перемещений заданы.

Тогда работа деформации получит приращение δA , которое должно быть равно работе на указанных виртуальных перемещениях всех внешних сил, приложенных к телу.

Отсюда приходим к равенству

$$\delta A = \delta R_1 + \delta R_2, \quad (\text{III.7})$$

где δR_1 — приращение работы объемных сил, δR_2 — приращение работы поверхностных сил.

Приращение работы объемных сил будет равно

$$\delta R_1 = \iiint [F_x^* \delta u + F_y^* \delta v + F_z^* \delta w] D dx dy dz, \quad (\text{III.8})$$

где (как и раньше) F_x^* , F_y^* , F_z^* суть компоненты по направлениям X, Y, Z силы, отнесенной к единице объема деформированного тела, $dxdydz$ — объем элемента, выделенного из тела до его деформации, $D dx dy dz = \frac{V^*}{V} dxdydz$ — объем соответствующего элемента деформированного тела.

При этом, принимая за независимые переменные x, y, z , интегрирование в формуле (III.8) нужно распространить по первоначальному объему тела.

Что касается приращения работы поверхностных сил, то оно определяется выражением:

$$\delta R_2 = \iint [f_x^* \delta u + f_y^* \delta v + f_z^* \delta w] d\Omega', \quad (\text{III.9})$$

где f_{ξ}^* , f_{η}^* , f_{ζ}^* — составляющие (по осям X , Y , Z) силы действующей на единицу площади поверхности деформированного тела, а $d\Omega'$ — дифференциал этой площади.

Чтобы получить возможность выполнять интегрирование в формуле (III.9) не по поверхности деформированного тела, а по поверхности тела в исходном его положении, выразим $d\Omega'$ через $d\Omega$ (дифференциал площади поверхности недеформированного тела).

Рассмотрим с этой целью на поверхности, ограничивающей тело до его деформации, элементарную прямоугольную площадку со сторонами da , db , площадь которой будет равна

$$d\Omega = dadb,$$

а ориентация которой определяется направлением вектора единичной нормали:

$$i_n = \frac{da \times db}{d\Omega}. \quad (\text{III.10})$$

В результате деформации указанная прямоугольная площадка превратится в элемент поверхности деформированного тела, который будет иметь вид параллелограмма со сторонами $(1 + E_a)da$, $(1 + E_b)db$, причем косинус угла между этими сторонами будет равен

$$\begin{aligned} \cos(da', db') &= \frac{\varepsilon_{ab}}{(1 + E_a)(1 + E_b)} = \\ &= \frac{\varepsilon_{ab}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{aa})(1 + 2\varepsilon_{bb})}}, \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

где E_a и E_b — относительные удлинения в направлениях da , db , а ε_{aa} , ε_{bb} , ε_{ab} — соответствующие компоненты деформации.

Отсюда площадь элемента поверхности, ограничивающей деформированное тело

$$d\Omega' = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{aa})(1 + 2\varepsilon_{bb}) - \varepsilon_{ab}^2} \cdot d\Omega = \frac{S_n^*}{S_n} d\Omega. \quad (\text{III.12})$$

Коэффициент $\frac{S_n^*}{S_n}$, равный отношению элементарных площадок после и до деформации, может быть выражен через

компоненты деформации в системе X, Y, Z и три косинуса, задающих направление нормали к поверхности, ограничивающей тело до деформации.

Для этого надо подставить в формулу

$$\frac{S_n^*}{S_n} = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{aa})(1 + 2\varepsilon_{bb}) - \varepsilon_{ab}^2} \quad (\text{III.13})$$

вместо компонентов деформации $\varepsilon_{aa}, \varepsilon_{bb}, \varepsilon_{ab}$ их выражения через $\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{yz}$ и косинусы углов между направлениями X, Y, Z и da, db, n .

Тогда, после элементарных (хотя и громоздких) преобразований (с учетом формул I.36, I.33 и I.59), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{S_n^*}{S_n} = & \sqrt{\gamma_{xx} \cos^2(n, x) + \gamma_{yy} \cos^2(n, y) + \gamma_{zz} \cos^2(n, z) +} \rightarrow \\ & \rightarrow + \gamma_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y) + \rightarrow \\ & \rightarrow + \gamma_{xz} \cos(n, x) \cos(n, z) + \gamma_{yz} \cos(n, y) \cos(n, z), \quad (\text{III.14}) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= \left(\frac{S_x^*}{S_x}\right)^2, \quad \gamma_{yy} = \left(\frac{S_y^*}{S_y}\right)^2, \quad \gamma_{zz} = \left(\frac{S_z^*}{S_z}\right)^2, \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} &= -\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} - 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{zz}, \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} &= -\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz} - 2\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yy}, \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} &= -\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{xz}\varepsilon_{xy} - 2\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xx} \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

а $n\hat{x}, n\hat{y}, n\hat{z}$ суть углы между нормалью к поверхности, ограничивающей тело до деформации, и осями X, Y, Z .

Таким образом приращение работы приложенных к телу поверхностных сил на виртуальных перемещениях $\delta u, \delta v, \delta w$ может быть записано в виде:

$$\delta R_2 = \iint [f_x^* \delta u + f_y^* \delta v + f_z^* \delta w] \frac{S_n^*}{S_n} d\Omega, \quad (\text{III.16})$$

где $d\Omega$ — площадь элемента поверхности, ограничивающей тело до деформации, в соответствии с чем интегрирование

в выражении (III.16) должно быть распространено по всей этой поверхности, а не по поверхности деформированного тела, как это требовало выражение (III.9).

То что теперь все объемные и поверхностные интегралы, входящие в равенство (I.1.7), распространены в пределах тела до (а не после) деформации, представляет неоспоримое удобство, так как пределы интегрирования оказываются при этом независимыми от неизвестных величин (перемещений).

§ 27. Вывод дифференциальных уравнений равновесия деформированного изотропного тела из принципа возможных перемещений

Сформулированный в предыдущем параграфе принцип позволяет получить дифференциальные уравнения, описывающие равновесие деформированного тела. Выведем эти уравнения, предполагая, что работа деформации определяется формулой (III. 6), то-есть считая, что тело однородно и изотропно и что роль диссипативных сил в его деформации незначительна.

Тогда

$$\begin{aligned}\delta A &= \delta \iiint \Phi(a_2, a_1, a_0) dx dy dz = \\ &= \iiint \delta [\Phi(a_2, a_1, a_0)] dx dy dz, \quad (\text{III.17})\end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned}\delta [\Phi(a_2, a_1, a_0)] &= \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xx}} \delta \epsilon_{xx} + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yy}} \delta \epsilon_{yy} + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{zz}} \delta \epsilon_{zz} + \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} \delta \epsilon_{xy} + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} \delta \epsilon_{xz} + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} \delta \epsilon_{yz}, \quad (\text{III.18})\end{aligned}$$

где [в силу формул (III. 4)]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xx}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \epsilon_{xx}} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial \epsilon_{xx}} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \frac{\partial a_0}{\partial \epsilon_{xx}} = \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} (\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} (\epsilon_{yy} \epsilon_{zz} - \frac{1}{4} \epsilon_{yz}^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{yy}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \frac{1}{4} \varepsilon_{xz}^2), \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{zz}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} - \frac{1}{4} \varepsilon_{yx}^2), \quad (\text{III.19}) \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xy}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \varepsilon_{xy}} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial \varepsilon_{xy}} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \frac{\partial a_0}{\partial \varepsilon_{xy}} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{xy} \varepsilon_{zz} \right), \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xz}} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \varepsilon_{xz} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yy} \right), \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{yz}} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \varepsilon_{yz} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} - \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xx} \right).
\end{aligned}$$

Учитывая далее, что, согласно формулам (I.22),

$$\begin{aligned}
\delta(\varepsilon_{xx}) &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial x} \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial x} \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \\
&= (1 + \varepsilon_{xx}) \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} + \omega_z\right) \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xz} - \omega_y\right) \frac{\partial(\delta w)}{\partial x}, \\
\delta(\varepsilon_{yy}) &= \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} - \omega_z\right) \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + (1 + \varepsilon_{yy}) \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{yz} + \omega_x\right) \frac{\partial(\delta w)}{\partial y}, \\
\delta(\varepsilon_{zz}) &= \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xz} + \omega_y\right) \frac{\partial(\delta u)}{\partial z} + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{yz} - \omega_x\right) \frac{\partial(\delta v)}{\partial z} + \\
&\quad + (1 + \varepsilon_{zz}) \frac{\partial(\delta w)}{\partial z}, \quad (\text{III.20}) \\
\delta(\varepsilon_{xy}) &= \frac{\partial u}{\partial y} \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \\
&\quad + \frac{\partial w}{\partial y} \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial v}{\partial x} \delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} + \\
& + (1 + e_{yy}) \frac{\partial (\delta v)}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + \\
& + (1 + e_{xx}) \frac{\partial (\delta u)}{\partial y} + \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \frac{\partial (\delta v)}{\partial y} + \\
& + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \frac{\partial (\delta w)}{\partial y}, \\
\delta (e_{xz}) = & \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \frac{\partial (\delta v)}{\partial x} + \\
& + (1 + e_{zz}) \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + (1 + e_{xx}) \frac{\partial (\delta u)}{\partial z} + \\
& + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \frac{\partial (\delta v)}{\partial z} + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \frac{\partial (\delta w)}{\partial z}, \\
\delta (e_{yz}) = & \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \frac{\partial (\delta u)}{\partial y} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \frac{\partial (\delta v)}{\partial y} + \\
& + (1 + e_{zz}) \frac{\partial (\delta w)}{\partial y} + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \frac{\partial (\delta u)}{\partial z} + \\
& + (1 + e_{yy}) \frac{\partial (\delta v)}{\partial z} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \frac{\partial (\delta w)}{\partial z},
\end{aligned}$$

и подставляя эти значения $\delta (e_{xx})$, \dots , $\delta (e_{yz})$ в (III.18), находим:

$$\begin{aligned}
\delta [\Phi (a_2, a_1, a_0)] = & \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_y} \frac{\partial (\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_z} \frac{\partial (\delta u)}{\partial z} + \\
& + \frac{\partial \Phi}{\partial v_x} \frac{\partial (\delta v)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_y} \frac{\partial (\delta v)}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_z} \frac{\partial (\delta v)}{\partial z} + \\
& + \frac{\partial \Phi}{\partial w_x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial w_y} \frac{\partial (\delta w)}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial w_z} \frac{\partial (\delta w)}{\partial z}, \quad (\text{III.21})
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial u_x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} = (1 + e_{xx}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xx}} + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} ; \\
\frac{\partial \Phi}{\partial u_y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} = (1 + e_{xx}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yy}} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} , \\
\frac{\partial \Phi}{\partial u_z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} = (1 + e_{xx}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{zz}} , \\
\frac{\partial \Phi}{\partial v_x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} = \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xx}} + (1 + e_{yy}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} , \quad (\text{III.22}) \\
\frac{\partial \Phi}{\partial v_y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)} = \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + (1 + e_{yy}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yy}} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} , \\
\frac{\partial \Phi}{\partial v_z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)} = \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} + (1 + e_{yy}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{zz}} , \\
\frac{\partial \Phi}{\partial w_x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} = \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xx}} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + \\
&\quad + (1 + e_{zz}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} ,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)} = \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yy}} + \\ + (1 + e_{zz}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)} = \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} + \\ + (1 + e_{zz}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{zz}},$$

причем $\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xx}}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{zz}}$ определяются формулами (III.19).

Если теперь обозначить через (III.23)

\mathbf{U} — вектор с проекциями на оси X, Y, Z : $\frac{\partial \Phi}{\partial u_x}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_y}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_z}$,

\mathbf{V} — „ „ „ X, Y, Z : $\frac{\partial \Phi}{\partial v_x}, \frac{\partial \Phi}{\partial v_y}, \frac{\partial \Phi}{\partial v_z}$,

\mathbf{W} — „ „ „ X, Y, Z : $\frac{\partial \Phi}{\partial w_x}, \frac{\partial \Phi}{\partial w_y}, \frac{\partial \Phi}{\partial w_z}$,

то формулу (III.21) можно записать следующим, более кратким, образом

$$\delta [\Phi(a_2, a_1, a_0)] = \mathbf{U} \cdot \text{grad}(\delta u) + \mathbf{V} \cdot \text{grad}(\delta v) + \\ + \mathbf{W} \cdot \text{grad}(\delta w), \quad (\text{III.24})$$

где символ \cdot означает операцию скалярного умножения двух векторов, а символ grad означает градиент.

Подставляя этот результат в выражение (III.17), имеем:

$$\delta A = \iiint [\mathbf{U} \cdot \text{grad}(\delta u) + \mathbf{V} \cdot \text{grad}(\delta v) + \\ + \mathbf{W} \cdot \text{grad}(\delta w)] dx dy dz. \quad (\text{III.25})$$

Учтем далее, что для любой скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ и векторной функции $\psi(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi \psi) &= \frac{\partial(\varphi \psi_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi \psi_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi \psi_z)}{\partial z} = \\ &= \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) \varphi + \psi_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ &+ \psi_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \psi_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi \operatorname{div} \psi + \psi \cdot \operatorname{grad} \varphi. \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

На основании этого тождества можем написать

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \operatorname{grad}(\delta u) &= \operatorname{div}(\mathbf{U} \delta u) - \delta u \operatorname{div} \mathbf{U}, \\ \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad}(\delta v) &= \operatorname{div}(\mathbf{V} \delta v) - \delta v \operatorname{div} \mathbf{V}, \\ \mathbf{W} \cdot \operatorname{grad}(\delta w) &= \operatorname{div}(\mathbf{W} \delta w) - \delta w \operatorname{div} \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

После чего формула (III.25) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \delta A &= \iiint [\operatorname{div}(\mathbf{U} \delta u + \mathbf{V} \delta v + \mathbf{W} \delta w)] dx dy dz - \\ &- \iiint [\delta u \operatorname{div} \mathbf{U} + \delta v \operatorname{div} \mathbf{V} + \delta w \operatorname{div} \mathbf{W}] dx dy dz. \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Но объемный интеграл от расхождения вектора может быть по теореме Гаусса приведен к поверхностному интегралу. Именно

$$\iiint [\operatorname{div} \mathbf{Q}] dx dy dz = \int \int Q_n d\Omega, \quad (\text{III.29})$$

где Q_n — проекция вектора \mathbf{Q} на внешнюю нормаль к поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем (см., например, „Векторное исчисление“ Н. Е. Кочина, стр. 144, или „Курс теоретической механики“ Я. И. Френкеля, стр. 85).

Ввиду этого формула для вариации работы (III.25) может быть записана следующим окончательным образом,

$$\begin{aligned} \delta A &= - \iiint [\delta u \operatorname{div} \mathbf{U} + \delta v \operatorname{div} \mathbf{V} + \delta w \operatorname{div} \mathbf{W}] dx dy dz + \\ &+ \int \int [U_n \delta u + V_n \delta v + W_n \delta w] dx dy dz. \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Здесь первый интеграл взят по всему первоначальному объему тела, а второй — по всей поверхности тела (до его деформации).

ции), причем U_n , V_n , W_n суть проекции векторов U , V , W на внешнюю нормаль к этой поверхности.

Подставим данное выражение, а также формулы (III.8) и (III.16) в равенство (III.7).

Перенеся все члены этого равенства в правую часть, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \int \int \int \{ (\operatorname{div} U + F_\xi^* D) \delta u + (\operatorname{div} V + DF_\eta^*) \delta v + \\ & + (\operatorname{div} W + DF_\zeta^*) \delta w \} dx dy dz + \\ & + \int \int \left\{ \left(\frac{S_n^*}{S_n} f_\xi^* - U_n \right) \delta u + \left(\frac{S_n^*}{S_n} f_\eta^* - V_n \right) \delta v + \right. \\ & \left. + \left(\frac{S_n^*}{S_n} f_\zeta^* - W_n \right) \delta w \right\} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad \text{(III.31)}$$

Так как, в силу принципа возможных перемещений, это равенство должно соблюдаться при любых значениях δu , δv , δw , то отсюда следуют три уравнения, которые должны выполняться во всех точках внутри тела

$$\begin{aligned} \operatorname{div} U + F_\xi^* D &= 0, \\ \operatorname{div} V + F_\eta^* D &= 0, \\ \operatorname{div} W + F_\zeta^* D &= 0 \end{aligned} \quad \text{(III.32)}$$

и три равенства

$$U_n = \frac{S_n^*}{S_n} f_\xi^*, \quad V_n = \frac{S_n^*}{S_n} f_\eta^*, \quad W_n = \frac{S_n^*}{S_n} f_\zeta^*, \quad \text{(III.33)}$$

которые должны выполняться во всех точках поверхности тела, где заданы не перемещения, а силы (в тех точках, где заданы перемещения, как было выше оговорено, вариации δu , δv , δw считаются равными нулю и поэтому на данных участках поверхности тела члены, входящие во второй из

интегралов формулы (III.31), будут также равны нулю). Учитывая, что проекции векторов U , V , W суть величины (III.23), можем переписать уравнения (III.32) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_z} \right) + DF_{\xi}^* &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_z} \right) + DF_{\eta}^* &= 0, \quad (\text{III.34}) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_z} \right) + DF_{\zeta}^* &= 0.\end{aligned}$$

Или, если подставить сюда вместо $\frac{\partial \Phi}{\partial u_x} \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial w_z}$ их значения по формулам (III.22), то будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + e_{xx}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xx}} + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + e_{xx}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yy}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + e_{xx}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{zz}} \right] + \frac{V^*}{V} F_{\xi}^* = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xx}} + (1 + e_{yy}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + (1 + e_{yy}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yy}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} + (1 + e_{yy}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{zz}} \right] + \frac{V^*}{V} F_{\eta}^* = 0, \quad (\text{III.35})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xx}} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + (1 + e_{zz}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yy}} + \right. \\ & + (1 + e_{zz}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} \left. \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}} + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}} + \right. \\ & \left. + (1 + e_{zz}) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{zz}} \right] + \frac{V^*}{V} F_{\zeta}^* = 0. \end{aligned}$$

Коль скоро вид входящей сюда функции $\Phi(a_2, a_1, a_0)$ известен, то три уравнения (III.35) будут образовывать систему с тремя неизвестными — перемещениями точек тела u, v, w , к решению которой и сводится исследование равновесия деформированного твердого тела.

§ 28. Связь между напряжениями и компонентами деформации

Сравним уравнения (III.35) с уравнениями (II.43), выражающими условия равновесия того, выделенного из деформированного тела, объемного элемента, который до деформации являлся прямоугольным параллелепипедом с ребрами dx, dy, dz , параллельными осям X, Y, Z .

Из сопоставления этих двух систем видно, что одна пре-
вращается в другую, если положить, что:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xx}}, & \sigma_{xy}^* &= \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xy}}, & \sigma_{xz}^* &= \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{xz}}, \\ \sigma_{yx}^* &= \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yx}}, & \sigma_{yy}^* &= \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yy}}, & \sigma_{yz}^* &= \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{yz}}, \\ \sigma_{zx}^* &= \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{zx}}, & \sigma_{zy}^* &= \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{zy}}, & \sigma_{zz}^* &= \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{zz}}. \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Таким образом для того, чтобы выведенные в этой главе из принципа возможных перемещений дифференциальные

уравнения, описывающие равновесие деформированного тела, были согласованными с полученными в предыдущей главе уравнениями, выражающими условия равновесия бесконечно малого элемента, выделенного из тела, необходимо предположить, что между производными функции Φ (удельной работы деформации, отнесенной к единице первоначального объема тела) по компонентам деформации и величинами σ_{ij}^* имеет место связь, выражаемая формулами (III.36).

Из этих формул сразу же следует, что

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^* &= \sigma_{yx}^*, \\ \sigma_{xz}^* &= \sigma_{zx}^*, \\ \sigma_{yz}^* &= \sigma_{zy}^*.\end{aligned}\tag{III.37}$$

О существовании данных равенств было уже сказано (§ 20, глава II). Теперь они подтверждены. Подставляя в формулы (III.36) вместо σ_{ij}^* их выражения через составляющие напряжений по направлениям i_1, i_2, i_3 [согласно формулам (II.44)], а вместо производных функции $\Phi(a_2, a_1, a_0)$ по компонентам деформации их выражения [согласно формулам (III.19)], будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^* &= \frac{S_x^*}{S_x} \frac{\sigma_{xx}}{1+E_x} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \left(\varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - \frac{1}{4} \varepsilon_{yy}^2 \right), \\ \sigma_{yy}^* &= \frac{S_y^*}{S_y} \frac{\sigma_{yy}}{1+E_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \left(\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \frac{1}{4} \varepsilon_{xx}^2 \right), \\ \sigma_{zz}^* &= \frac{S_z^*}{S_z} \frac{\sigma_{zz}}{1+E_z} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \left(\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} - \frac{1}{4} \varepsilon_{xy}^2 \right),\end{aligned}\tag{III.38}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^* = \sigma_{yx}^* &= \frac{S_x^*}{S_x} \frac{\sigma_{xy}}{1+E_y} = \frac{S_y^*}{S_y} \frac{\sigma_{yx}}{1+E_x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \varepsilon_{xy} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xy} \right), \\ \sigma_{xz}^* = \sigma_{zx}^* &= \frac{S_x^*}{S_x} \frac{\sigma_{xz}}{1+E_z} = \frac{S_z^*}{S_z} \frac{\sigma_{zx}}{1+E_x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \varepsilon_{xz} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xz} \right), \\ \sigma_{yz}^* = \sigma_{zy}^* &= \frac{S_y^*}{S_y} \frac{\sigma_{yz}}{1+E_z} = \frac{S_z^*}{S_z} \frac{\sigma_{zy}}{1+E_y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \varepsilon_{yz} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yz} \right).\end{aligned}$$

Здесь $\frac{S_x^*}{S_x}$, $\frac{S_y^*}{S_y}$, $\frac{S_z^*}{S_z}$ определяются через компоненты деформации формулами (II.36) и (II.37), а удлинения E_x , E_y , E_z — формулами (I.29).

Выражения (III.38) являются общей формой связи, которая должна существовать между составляющими напряжения и компонентами деформации. При их выводе были использованы только два допущения, а именно предполагалось, что тело изотропно и что значение диссипативных сил в процессе взаимодействия частиц тела настолько мало, что ими (по сравнению с консервативными силами) можно пренебречь.

Правые части формул (III.38) являются линейными функциями компонентов трех симметричных тензоров второго ранга

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \text{ (единичный тензор)} \\ \Pi_1 &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} - \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} - \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ -\frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz} - \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ -\frac{1}{2} \varepsilon_{xz} - \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (\text{III.39})$$

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy}\varepsilon'_{zz} - \frac{1}{4}\varepsilon_{yz}^2, & \frac{1}{4}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} - \frac{1}{2}\varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}, & \frac{1}{4}\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz} - \frac{1}{2}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{4}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} - \frac{1}{2}\varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}, & \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} - \frac{1}{4}\varepsilon_{xz}^2, & \frac{1}{4}\varepsilon_{yx}\varepsilon_{xz} - \frac{1}{2}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{4}\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz} - \frac{1}{2}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz}, & \frac{1}{4}\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz} - \frac{1}{2}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}, & \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \frac{1}{4}\varepsilon_{xy}^2 \end{pmatrix}$$

причем коэффициентами при компонентах этих тензоров являются три инварианта $\frac{\partial\Phi}{\partial a_2}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial a_0}$.

В соответствии со сделанным замечанием, формулы (III.38) могут быть объединены следующей символической записью

$$S = \frac{\partial\Phi}{\partial a_2} \Pi_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial a_1} \Pi_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial a_0} \Pi_2, \quad (\text{III.40})$$

где под S подразумевается симметричный тензор

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^*, & \sigma_{yx}^*, & \sigma_{zx}^* \\ \sigma_{xy}^*, & \sigma_{yy}^*, & \sigma_{zy}^* \\ \sigma_{xz}^*, & \sigma_{yz}^*, & \sigma_{zz}^* \end{pmatrix}, \quad (\text{III.41})$$

который можно назвать тензором напряжения, обобщенным на случай произвольной деформации. Укажем далее, что если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \frac{\partial\Phi}{\partial a_2} + a_2 \frac{\partial\Phi}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial\Phi}{\partial a_0}, \\ \Psi_1 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial a_1} - a_2 \frac{\partial\Phi}{\partial a_0}, \\ \Psi_0 &= \frac{\partial\Phi}{\partial a_0}, \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

то формулы (III.38) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= \Psi_2 + \Psi_1 \varepsilon_{xx} + \Psi_0 \left(\varepsilon_{xx}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{xz}^2 \right), \\ \sigma_{yy}^* &= \Psi_2 + \Psi_1 \varepsilon_{yy} + \Psi_0 \left(\varepsilon_{yy}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{yz}^2 \right), \\ \sigma_{zz}^* &= \Psi_2 + \Psi_1 \varepsilon_{zz} + \Psi_0 \left(\varepsilon_{zz}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{xz}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{yz}^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yx}^* &= \frac{1}{2} \left\{ \Psi_1 \varepsilon_{xy} + \Psi_0 \left[(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} \right] \right\}, \\ \sigma_{xz}^* &= \frac{1}{2} \left\{ \Psi_1 \varepsilon_{xz} + \Psi_0 \left[(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \varepsilon_{xz} + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \right] \right\}, \\ \sigma_{yz}^* &= \frac{1}{2} \left\{ \Psi_1 \varepsilon_{yz} + \Psi_0 \left[(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \varepsilon_{yz} + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Таким образом установленные выше зависимости между напряжениями и деформациями, путем замены одних инвариантных коэффициентов другими, можно несколько видоизменять.

Существенно отметить, что при всех подобных преобразованиях эти зависимости всегда будут сохранять структуру, выражаемую формулой

$$S = \Psi_2 \Pi_0 + \Psi_1 \Pi_1 + \Psi_0 \Pi_2, \quad (\text{III.44})$$

где Ψ_2, Ψ_1, Ψ_0 — функции инвариантов деформации Π_0 — единичный тензор, Π_1 — тензор, компоненты которого суть линейные комбинации компонентов деформации, Π_2 — тензор, компоненты которого суть квадратичные комбинации компонентов деформации.

Хотя соотношения (III.38) и (III.43) в достаточной степени неопределенны, поскольку в них входит неизвестная функция $\Phi(a_2, a_1, a_0)$, тем не менее они проливают некоторый свет на те общие свойства, которые присущи формулам, связывающим напряжения с деформациями.

В частности данными соотношениями вполне выясняются варианты (то-есть изменяющиеся при переходе от одной системы координат к другой) элементы этой связи. Неопределенными остаются только три инвариантных коэффициента: $\frac{\partial \Phi}{\partial a_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial a_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial a_0}$, которые будут неодинаковыми для различных материалов и для нахождения которых необходимо проведение соответствующих опытов.

В заключение отметим, что из выражений (III.18) и (III.36) вытекает возможность написания формулы для приращения работы деформации (III.17) в виде

$$\begin{aligned}\delta A = \iiint (\sigma_{xx}^* \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^* \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}^* \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}^* \delta \varepsilon_{xy} + \\ + \sigma_{xz}^* \delta \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz}^* \delta \varepsilon_{yz}) dx dy dz. \quad (\text{III.45})\end{aligned}$$

Это выражение является обобщением аналогичной формулы классической теории упругости на случай деформаций произвольной величины.

§ 29. Граничные условия

Формулы (III.33) выражают условия, которые должны соблюдаться в тех точках поверхностей, ограничивающих деформированное тело, в которых заданы не перемещения, а поверхностная нагрузка.

С учетом (III.23) они принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial u_x} \cos(n, X) + \frac{\partial \Phi}{\partial u_y} \cos(n, Y) + \frac{\partial \Phi}{\partial u_z} \cos(n, Z) &= \frac{S_n^*}{S_n} f^* \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_x} \cos(n, X) + \frac{\partial \Phi}{\partial v_y} \cos(n, Y) + \frac{\partial \Phi}{\partial v_z} \cos(n, Z) &= \frac{S_n^*}{S_n} f_\eta^* \quad (\text{III.46}) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w_x} \cos(n, X) + \frac{\partial \Phi}{\partial w_y} \cos(n, Y) + \frac{\partial \Phi}{\partial w_z} \cos(n, Z) &= \frac{S_n^*}{S_n} f_\zeta^*.\end{aligned}$$

Здесь $n\hat{X}$, $n\hat{Y}$, $n\hat{Z}$ суть углы, образуемые осями X , Y , Z с нормалью к поверхности, ограничивающей тело до деформации, а f_ξ^* , f_η^* , f_ζ^* суть проекции на те же оси удельной поверхностной силы, действующей в соответствующей точке поверхности деформированного тела.

На основании сравнения уравнений (III.34) с тремя уравнениями, получающимися после проектирования на X , Y , Z векторного равенства (II.39), имеем:

$$\begin{aligned}\frac{S_x^*}{S_x} \sigma_{n1,\xi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_x}, \quad \frac{S_y^*}{S_y} \sigma_{n2,\xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_y}, \quad \frac{S_z^*}{S_z} \sigma_{n3,\xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_z}, \\ \frac{S_x^*}{S_x} \sigma_{n1,\eta} &= \frac{\partial \Phi}{\partial v_x}, \quad \frac{S_y^*}{S_y} \sigma_{n2,\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_y}, \quad \frac{S_z^*}{S_z} \sigma_{n3,\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_z}, \quad (\text{III.47}) \\ \frac{S_x^*}{S_x} \sigma_{n1,\zeta} &= \frac{\partial \Phi}{\partial w_x}, \quad \frac{S_y^*}{S_y} \sigma_{n2,\zeta} = \frac{\partial \Phi}{\partial w_y}, \quad \frac{S_z^*}{S_z} \sigma_{n3,\zeta} = \frac{\partial \Phi}{\partial w_z},\end{aligned}$$

где $\sigma_{n_1, \xi}, \sigma_{n_1, \eta}, \sigma_{n_1, \zeta}$ — проекции напряжения σ_{n_1} на X, Y, Z
 $\sigma_{n_2, \xi}, \sigma_{n_2, \eta}, \sigma_{n_2, \zeta}$ — проекции напряжения σ_{n_2} на X, Y, Z
 $\sigma_{n_3, \xi}, \sigma_{n_3, \eta}, \sigma_{n_3, \zeta}$ — проекции напряжения σ_{n_3} на X, Y, Z .

Теперь формулы могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{S_x^*}{S_x} \sigma_{n_1, \xi} \cos(n, X) + \frac{S_y^*}{S_y} \sigma_{n_2, \xi} \cos(n, Y) + \\ + \frac{S_z^*}{S_z} \sigma_{n_3, \xi} \cos(n, Z) = \frac{S_n^*}{S_n} f_{\xi}^*, \\ \frac{S_x^*}{S_x} \sigma_{n_1, \eta} \cos(n, X) + \frac{S_y^*}{S_y} \sigma_{n_2, \eta} \cos(n, Y) + \\ + \frac{S_z^*}{S_z} \sigma_{n_3, \eta} \cos(n, Z) = \frac{S_n^*}{S_n} f_{\eta}^*, \\ \frac{S_x^*}{S_x} \sigma_{n_1, \zeta} \cos(n, X) + \frac{S_y^*}{S_y} \sigma_{n_2, \zeta} \cos(n, Y) + \\ + \frac{S_z^*}{S_z} \sigma_{n_3, \zeta} \cos(n, Z) = \frac{S_n^*}{S_n} f_{\zeta}^*, \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

причем входящие сюда проекции напряжений $\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \sigma_{n_3}$ можно выразить [с помощью формул (II.12), (III.36)] через компоненты деформации, что позволяет рассматривать левые части выражений (III.48), как функции перемещений u, v, w .

При такой замене данные выражения будут математической формулировкой условий, которые должны быть наложены на перемещения в тех точках ограничивающей тело поверхности, где u, v, w не заданы непосредственно.

§ 30. Упрощение полученных формул в случае малой деформации

Если деформация мала, то ее компонентами можно пренебрегать в тех формулах, куда они входят наряду с членами порядка единицы. Последнее позволяет не делать различия (при определении напряжений) между размерами площадок до и после деформации, что равносильно отождествлению обобщенных напряжений, σ_{ij}^* с истинными напряжениями σ_{ij} .

Соответствующее упрощение может быть введено в формулы (III.38), (III.43) и (III.48).

Коль скоро малы по сравнению с единицей не только компоненты деформации, но и углы поворота, то (как было показано во II главе) уравнения (III.35) можно упростить, пренебрегая e_{ij} по сравнению с единицей и ω_j .

Дальнейшее мыслимое упрощение заключается в пренебрежении в уравнениях (III.35) как e_{ij} , так и ω_j , после чего они принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xx}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xy}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xz}} \right] + F_x &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xy}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{yy}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{yz}} \right] + F_y &= 0, \quad (\text{III.49}) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xz}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{yz}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{zz}} \right] + F_z &= 0.\end{aligned}$$

Последнее упрощение равносильно принятию равенств:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xx}} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xy}} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xz}} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_z} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_x}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{yy}} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{yz}} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_z} = \frac{\partial \Phi}{\partial w_y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{zz}} = \frac{\partial \Phi}{\partial w_z}, \quad (\text{III.50})\end{aligned}$$

чему отвечает определение компонентов деформации формулами (I.120), то-есть формулами классической теории упругости.

При этой точности рассуждений граничные условия (III.48) могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} \cos(n, X) + \sigma_{\xi\eta} \cos(n, Y) + \sigma_{\xi z} \cos(n, Z) &= f_\xi, \\ \sigma_{\eta\xi} \cos(n, X) + \sigma_{\eta\eta} \cos(n, Y) + \sigma_{\eta z} \cos(n, Z) &= f_\eta \quad (\text{III.51}) \\ \sigma_{z\xi} \cos(n, X) + \sigma_{z\eta} \cos(n, Y) + \sigma_{zz} \cos(n, Z) &= f_z,\end{aligned}$$

где $\sigma_{\xi\xi}, \dots, \sigma_{zz}$ суть компоненты напряжения на площадках перпендикулярных осям X, Y, Z .

Формулы (III.51) соответствуют подчинению решения граничным условиям без учета деформации тела. (Так и поступают, как известно, в классической теории упругости.)

Все описанные выше упрощения по своему характеру аналогичны тем, которые неоднократно рассматривались в главах I и II. Они могут быть объединены под названием „геометрических“ упрощений, так как основываются либо на пренебрежении изменениями некоторых размеров, либо на пренебрежении изменениями некоторых углов. Теперь нам предстоит рассмотреть возможности упрощения соотношений между напряжениями и компонентами деформации [то-есть формул (III.38) или (III.43)]. *Хотя данные упрощения, как и предыдущие, будут зависеть от величины деформаций, однако сравнивать последние придется уж не с единицей, а с некоторыми, характерными для каждого конкретного материала, физическими константами.*

Представим функцию $\Phi(a_2, a_1, a_0)$ в виде ряда по степеням трех параметров, от которых она зависит. Отрицательные степени в этом ряду не могут принять участия, поскольку тогда удельная работа деформации стремилась бы к бесконечности, при бесконечно малых смещениях точек тела от исходного их положения, что абсурдно.

Кроме того, если считать что в начальном положении энергия деформации тела равна нулю и тело свободно от каких-либо напряжений, то суммирование в указанном ряду нужно начать с членов, содержащих компоненты деформации во *второй* степени.

Учитывая все эти замечания, можем написать

$$\begin{aligned} \Phi_8(a_2, a_1, a_0) = & A_1 a_2^2 + A_2 a_1 + \\ & + B_1 a_2^3 + B_2 a_2 a_1 + B_3 a_0 + \\ & + C_1 a_2^4 + C_2 a_2^2 a_1 + C_3 a_2 a_0 + C_4 a_1^2 + \\ & + D_1 a_2^5 + D_2 a_2^3 a_1 + D_3 a_2^2 a_0 + D_4 a_2 a_1^2 + D_5 a_1 a_0 + \\ & + \dots \dots \dots \quad (\text{III.52}) \end{aligned}$$

Здесь постоянным A_j соответствуют члены, содержащие компоненты деформации во второй степени, B_j — компоненты деформации в третьей степени, C_j — компоненты деформации в четвертой степени и т. д.

Этот ряд можно рассматривать как общее выражение для удельной работы деформации изотропного тела, свободного в начальном своем положении от каких-либо внутренних сил. Его сходимость зависит как от величины параметров a_2, a_1, a_0 (причем очевидно, что с их уменьшением она улучшается), так и от значения коэффициентов $A_j, B_j, C_j, D_j, \dots$, являющихся физическими константами.

Поэтому а priori невозможно указать, на каком члене ряд (III.52) следует оборвать, даже если известно, что a_2, a_1, a_0 заведомо весьма малы по сравнению с единицей. Вопрос этот должен решаться путем опытов.

§ 31. Закон Гука

Чтобы получить отправную точку для дальнейших рассуждений, предположим, что компоненты деформации бесконечно малы.

Тогда, какова бы ни была сравнительная величина физических констант A_j, B_j, C_j, \dots (все они имеют, между прочим, одинаковую размерность $= \frac{\text{работа}}{\text{объем}}$, или если силы выражать в кг, а длины в см — $\text{кг}/\text{см}^2$), их влияние будет побеждено бесконечно малостью деформаций, и в ряду (III.52) можно будет сохранить только члены, содержащие компоненты деформаций в наименьшей (то-есть второй) степени.

Таким образом для бесконечно малых деформаций выражение удельной работы упрощается до вида

$$\Phi(a_2, a_1, a_0) = A_1 a_2^2 + A_2 a_1. \quad (\text{III.53})$$

Подставляя этот результат в формулы (III.38), приходим к следующим соотношениям между напряжениями и деформациями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2A_1 a_2 + A_2 (\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}), & \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = -\frac{1}{2} A_2 \epsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= 2A_1 a_2 + A_2 (\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}), & \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = -\frac{1}{2} A_2 \epsilon_{xz}, \\ \sigma_{zz} &= 2A_1 a_2 + A_2 (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}), & \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = -\frac{1}{2} A_2 \epsilon_{yz}. \end{aligned} \quad (\text{III.54})$$

Если ввести сюда вместо A_1 и A_2 новые постоянные E и μ , связанные с предыдущими равенствами:

$$A_2 = -\frac{E}{1+\mu}, \quad 2A_1 + A_2 = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad (\text{III.55})$$

то вместо формул (III.54) будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_{xx} + \frac{\mu}{1-2\mu} a_2 \right), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_{yy} + \frac{\mu}{1-2\mu} a_2 \right), \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{xz}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_{zz} + \frac{\mu}{1-2\mu} a_2 \right), \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{yz}. \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

Таким образом при бесконечно малых удлинениях и сдвигах (но не перемещениях и углах поворота, величина которых предыдущими рассуждениями никак не ограничивается) существует линейная связь между напряжениями и деформациями.

Формулы (III. 56) выражают хорошо известный закон Гука (обобщенный на случай пространственной деформации), причем константы E и μ суть модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Из вышеизложенного следует, что для всякого материала можно указать такую область малых деформаций, в которой закон Гука будет приближенно справедлив. При этом, как показывает опыт, данная область для различных материалов будет не одинакова.

Если обратиться к наиболее интересному для техники материалу — стали, то оказывается, что для нее (глава I, § 11 и рисунок к нему) линейная связь между деформациями и напряжениями наблюдается до удлинений порядка $10^{-3} \sim 5 \cdot 10^{-3}$ (в зависимости от марки металла) и до сдвигов, примерно вдвое меньших. При дальнейшем увеличении деформаций характер зависимости между ними и напряжениями резко изменяется и для достаточно точного математического ее описания в этой области в ряду (III. 52) приходится удерживать много членов (хотя удлинения и сдвиги все еще остаются весьма малыми по сравнению с единицей).

Таким образом сразу, как только закон Гука теряет свою силу, задача установления связи между напряжениями и дефор-

мациями резко усложняется. Она усложняется, кроме того, еще и потому, что вскоре после перехода за предел пропорциональности существенно возрастает роль диссипативных сил, в связи с чем только часть сообщенной телу работы, возвращается при снятии с него нагрузки. Последнее ставит под сомнение возможность применения в указанной выше области деформаций формул (III. 38), поскольку их вывод основан на предположении, что деформация вполне обратима.

§ 32. О возможности применения формул (III. 38) к упруго-пластическим деформациям

Тем не менее не трудно показать, что все основные зависимости теории пластичности Генки могут быть получены из формул (III. 38) если ввести в них соответствующие предположения относительно характера зависимости производных $\frac{\partial \Phi}{\partial a_2}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial a_0}$ от компонентов деформации. Чтобы это показать, установим предварительно на основании данных формул связь между двумя инвариантами тензора напряжения:

$$\begin{aligned} c_2^* &= \sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^* + \sigma_{zz}^* \\ c_2^* - 3c_1^* &= \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_{xx}^* - \sigma_{yy}^*)^2 + (\sigma_{xx}^* - \sigma_{zz}^*)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\sigma_{yy}^* - \sigma_{zz}^*)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.57})$$

и инвариантами деформации a_2 , a_1 , a_0 .

Подставив сюда σ_{xx}^* , ..., σ_{yz}^* , согласно формулам (III.38); (что удобно сделать, отнеся последние формулы к главным напряжениям и деформациям), после несложных выкладок будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} c_2^* &= \frac{1}{3} (\sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^* + \sigma_{zz}^*) = \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \frac{2}{3} a_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} + \\ &\quad + \frac{1}{3} a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial a_0}, \quad (\text{III.58}) \\ c_2^{*2} - 3c_1^* &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \right)^2 (a_2^2 - 3a_1) + \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} (a_2 a_1 - 9a_0) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} \right)^2 (a_1^2 - 3a_2 a_0). \end{aligned}$$

Опыты показывают, что при переходе от упругих деформаций к пластическим резко изменяется только характер второй из двух написанных зависимостей, первая же (представляющая связь между средним значением трех главных напряжений и инвариантами деформации) изменяется настолько мало, что ее без особой погрешности можно принять такой же, как и в упругой области. Но, как следует из формул (III.56), в упругой области

$$\frac{1}{3}(\sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^* + \sigma_{zz}^*) = \frac{1}{3} \frac{E}{1-2\mu} a_2. \quad (\text{III.59})$$

Отсюда, обобщая эту зависимость и на пластическую область деформаций, можем написать:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \frac{2}{3} a_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} + \frac{1}{3} a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = \frac{1}{3} \frac{E}{1-2\mu} a_2 \quad (\text{III.60})$$

Далее, как показывают опять-таки результаты опытов, инвариант напряжений $c_2^2 - 3c_1$ можно считать зависящим только от аналогичной комбинации инвариантов деформации a_2 и a_1 , то-есть от величины $a_2^2 - 3a_1$. Чтобы привести вторую из формул (III.58) в соответствие с этим фактом, в ней достаточно положить $\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0$ и считать кроме того $\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}$ функцией только $a_2^2 - 3a_1$. С учетом этих двух предположений, а также формулы (III.59), выражения (III.58) принимают вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_2} - \frac{2}{3} a_2 \Psi(T) = \frac{E}{3(1-2\mu)} a_2, \quad (\text{III.61})$$

$$S = T \cdot \Psi(T),$$

где

$$S = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(c_2^2 - 3c_1)},$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(a_2^2 - 3a_1)}, \quad (\text{III.62})$$

$$\Psi(T) = - \frac{\partial \Phi}{\partial a_1}.$$

Инвариант S в теории пластичности принято называть интенсивностью касательных напряжений, а инвариант T — ин-

тенсивностью деформаций сдвига. Здесь нет нужды пояснять происхождение этих наименований, поскольку в наши цели отнюдь не входит полное изложение теории пластичности. Возвращаясь теперь к формулам (III.38) и подставляя в них определенные указанным выше образом значения производных функций Φ по инвариантам деформации, будем иметь:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{xx} - \frac{1}{3} c_2 \right) &= \Psi(T) \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} a_2 \right), \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \frac{1}{2} \Psi(T) \varepsilon_{xy}, \\ \left(\sigma_{yy} - \frac{1}{3} c_2 \right) &= \Psi(T) \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} a_2 \right), \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \frac{1}{2} \Psi(T) \varepsilon_{xz}, \\ \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{3} c_2 \right) &= \Psi(T) \left(\varepsilon_{zz} - \frac{1}{3} a_2 \right), \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = \frac{1}{2} \Psi(T) \varepsilon_{yz}. \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

Полученные формулы суть не что иное, как предложенные Генки для упругопластических тел соотношения между компонентами деформации и компонентами напряжения.

Таким образом данные формулы теории пластичности заключаются в формулах (III.38), как частный случай. Иными словами, несмотря на необратимость пластической деформации, она может быть описана с помощью формул, выведенных исходя из явного предположения обратимости деформации, что на первый взгляд парадоксально. Следует отметить, однако, что использование формул (III.38) в теории пластичности допустимо лишь в том случае, когда процесс деформации активен, то-есть когда на всех своих промежуточных этапах деформация идет монотонно в сторону возрастания параметра T . При наличии в процессе деформации разгрузки формулы (III.63) теряют силу.

Л. М. Качанов [18], [19] на основе термодинамического анализа активной пластической деформации доказал, что в этом случае упругопластическое тело должно быть практически неотличимо от идеально упругого тела с идентичной диаграммой растяжения. Упомянутое исследование внесло физическую

ясность в вопрос и показало, что никакого парадокса в возможности рассматривать активную пластическую деформацию с помощью формул, выведенных для обратимых деформаций, — по существу нет.

§ 33. О наиболее простых вариантах нелинейной связи между напряжениями и деформациями

Предположим, что деформации настолько велики, что закон Гука оказывается недостаточно точным. Тогда в качестве второго приближения можно удерживать в ряду (III.52) кроме членов, содержащих компоненты деформации во второй степени, также члены, содержащие их в третьей степени. При этом в ряду (III.52) будет сохранено пять первых членов, откуда ясно, что упругие свойства материала в данном случае будут требовать для своего описания знания пяти физических констант. Из них первые две будут константами закона Гука, поскольку в пределе (при бесконечно малых деформациях) этот закон должен получаться из рассматриваемого.

Подставляя выражение

$$\Phi(a_2, a_1, a_0) = A_1 a_2^2 + A_2 a_1 + B_1 a_2^3 + B_2 a_2 a_1 + B_3 a_0 \quad (\text{III.64})$$

в формулы (III.38), будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= (2A_1 + A_2)a_2 + (3B_1 + B_2)a_2^2 + (B_2 + B_3)a_1 - \\ &- [A_2 + (B_2 + B_3)a_2]\varepsilon_{xx} + B_3[\varepsilon_{xx}^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{xz}^2], \\ \sigma_{yy}^* &= (2A_1 + A_2)a_2 + (3B_1 + B_2)a_2^2 + (B_2 + B_3)a_1 - \\ &- [A_2 + (B_2 + B_3)a_2]\varepsilon_{yy} + B_3[\varepsilon_{yy}^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{yz}^2], \\ \sigma_{zz}^* &= (2A_1 + A_2)a_2 + (3B_1 + B_2)a_2^2 + (B_2 + B_3)a_1 - \\ &- [A_2 + (B_2 + B_3)a_2]\varepsilon_{zz} + B_3[\varepsilon_{zz}^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{xz}^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{yz}^2], \\ \sigma_{xy}^* &= -\frac{1}{2}\left\{[A_2 + (B_2 + B_3)a_2]\varepsilon_{xy} - B_3[(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\varepsilon_{xy} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}]\right\}, \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

$$\sigma_{xz}^* = -\frac{1}{2} \left\{ [A_2 + (B_2 + B_3) a_2] \varepsilon_{xz} - B_3 [(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \varepsilon_{xz} + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz}] \right\},$$

$$\sigma_{yz}^* = -\frac{1}{2} \left\{ [A_2 + (B_2 + B_3) a_2] \varepsilon_{yz} - B_3 [(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \varepsilon_{yz} + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz}] \right\}.$$

Полученные формулы можно записать также в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= \frac{E}{1+\mu} \left\{ (1 + \beta_1 a_2) \varepsilon_{xx} + \frac{\mu}{1-2\mu} a_2 + \beta_2 a_2^2 - \beta_1 a_1 + \right. \\ &\quad \left. + \beta_3 (\varepsilon_{xx}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{xz}^2) \right\}, \\ \sigma_{yy}^* &= \frac{E}{1+\mu} \left\{ (1 + \beta_1 a_2) \varepsilon_{yy} + \frac{\mu}{1-2\mu} a_2 + \beta_2 a_2^2 - \beta_1 a_1 + \right. \\ &\quad \left. + \beta_3 (\varepsilon_{yy}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{xy}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{yz}^2) \right\}, \\ \sigma_{zz}^* &= \frac{E}{1+\mu} \left\{ (1 + \beta_1 a_2) \varepsilon_{zz} + \frac{\mu}{1-2\mu} a_2 + \beta_2 a_2^2 - \beta_1 a_1 + \right. \\ &\quad \left. + \beta_3 (\varepsilon_{zz}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{xz}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{yz}^2) \right\}, \quad (\text{III.66}) \\ \sigma_{xy}^* &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ (1 + \beta_1 a_2) \varepsilon_{xy} + \beta_3 [(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \varepsilon_{xy} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz}] \right\}, \\ \sigma_{xz}^* &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ (1 + \beta_1 a_2) \varepsilon_{xz} + \beta_3 [(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \varepsilon_{xz} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz}] \right\}, \\ \sigma_{yz}^* &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ (1 + \beta_1 a_2) \varepsilon_{yz} + \beta_3 [(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \varepsilon_{yz} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz}] \right\}, \end{aligned}$$

где E , μ , β_1 , β_2 , β_3 суть новые константы, введенные вместо A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , и B_3 и связанные с ними равенствами, следующими из сравнения формул (III.65) с формулами (III.66).

Сопоставляя формулы (III.66) с законом Гука (III.56), видим, что уже во втором приближении зависимости между напряжениями и деформациями оказываются гораздо более громоздкими, чем в первом.

Существенно отметить, что второе приближение отличается от первого лишь членами, являющимися четными функциями от компонентов деформации. При изменении знака всех деформаций на обратный эти члены будут оставаться неизменными.

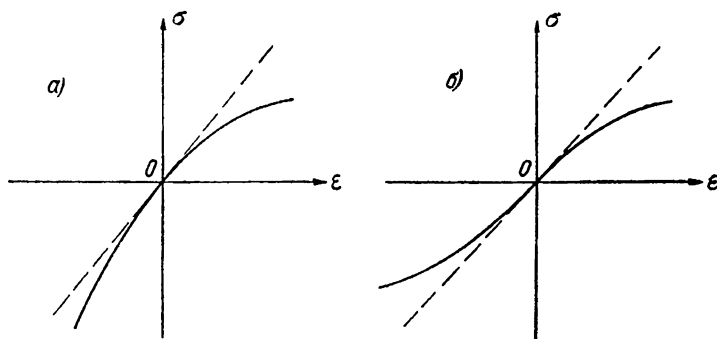


Рис. 16.

Кривая растяжения — сжатия для такого материала будет вся лежать по одну сторону от своей касательной в начале координат (рис. 16 *a*). Между тем, для большинства материалов кривые растяжения — сжатия имеют вид, показанный на рис. 16 *б* из чего следует, что отклонения от закона Гука обуславливаются обыкновенно не столько членами, содержащими деформации в четных степенях, сколько членами, содержащими их в нечетных степенях. Ввиду этого формулы (III. 66) далеко не полно охватывают возможные варианты кривых растяжения — сжатия.

Несмотря на это, пятиконстантная теория упругости, основанная на принятии удельной потенциальной энергии в форме (III. 64), пользуется в настоящее время значительным вниманием и рассматривалась во многих работах. Упругий закон, ей соответствующий, обычно называют законом Мурна-

гана [67], хотя фактически впервые его предложил, и притом много ранее, Фойгт [42]. Первая же попытка рассмотрения связи между напряжениями и деформациями, в форме, отличной от закона Гука, была сделана Бюльфингером в работе [1], опубликованной в трудах Российской Академии Наук в 1729 г.

В свете сделанных выше замечаний небезынтересно наряду с пятиконстантной теорией упругости Фойгта исследовать и такие формы нелинейной связи между напряжениями и деформациями, в которых первые являются нечетными функциями последних.

Для самого грубого учета такой нелинейности удельную работу деформации нужно принять в виде:

$$\Phi(a_2, a_1, a_0) = A_1 a_2^2 + A_2 a_1 + C_1 a_2^4 + C_2 a_2^2 a_1 + \\ + C_3 a_2 a_0 + C_4 a_1^2, \quad (\text{III.67})$$

удерживая в ряду (III.52) все члены с четными степенями деформации (до четвертой включительно). Тогда после подстановки (III.67) в (III.38) или (III.43) и рассуждений, подобных предыдущим, будем иметь следующие выражения, связывающие напряжения с деформациями:

$$\sigma_{xx}^* = \frac{E}{1+\mu} \left\{ [1 + \gamma_1 a_2^2 + \gamma_2 a_1] \varepsilon_{xx} + \frac{\mu}{1-2\mu} a_2 + \gamma_3 a_2^3 - \right. \\ \left. - (2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4) a_1 a_2 + \gamma_4 a_0 + \gamma_4 a_2 [\varepsilon_{xx}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{xy}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \varepsilon_{xz}^2] \right\}, \\ \sigma_{xy}^* = \frac{E}{2(1+\mu)} \left\{ [1 + \gamma_1 a_2^2 + \gamma_2 a_1] \varepsilon_{xy} + \gamma_4 a_2 [\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}] \varepsilon_{xy} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} \right\}. \quad (\text{III.68})$$

Здесь E , μ , γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_4 суть шесть физических констант, из коих пять последних безразмерны, а первая имеет размерность напряжения. Эти формулы еще более громоздки, чем формулы (III.66), и следовательно учет нелинейности связи между напряжениями и деформациями (даже в самых грубых приближениях) может доставить много математических неприятностей при решении конкретных задач.

Данное заключение остается в силе даже, если учесть, что некоторые из шести физических констант, входящих в формулы (III.68), видимо могут быть пренебрежены или выражены друг через друга (что можно установить опытным путем).

§ 34. Заключение

В этой главе было установлено, что нелинейность проникает в теорию упругости по трем путям, а именно через формулы для деформаций (I.22), через уравнения равновесия объемного элемента тела (II.43) и через формулы связи между напряжениями и деформациями (III.38).

При этом в первых двух из перечисленных совокупностей формул учет нелинейных членов обуславливается геометрическими соображениями (необходимостью считаться с углами поворота при определении изменений размеров линейных элементов и формулировке условий равновесия объемного элемента).

Что касается третьей совокупности формул, то в ней нелинейные члены появляются, если деформации превосходят по величине некоторые характерные для рассматриваемого материала физические константы (именуемые пределами пропорциональности).

Таким образом в рассматриваемой задаче можно говорить о нелинейностях двух типов — геометрической и физической. Их можно считать не связанными друг с другом, поскольку, как неоднократно подчеркивалось еще в I главе, малость углов поворота не влечет за собою малости удлинений и сдвигов (и наоборот).

Отсюда в теории упругости могут встречаться задачи следующих четырех типов:

- 1) линейные физически и геометрически;
- 2) нелинейные физически, линейные геометрически;
- 3) линейные физически, нелинейные геометрически;
- 4) нелинейные физически и геометрически.

В задачах первого типа углы поворота будут величинами одного порядка с удлинениями и сдвигами, а удлинения будут менее предела пропорциональности для рассматриваемого материала. Простейшим примером задач этого типа является растяжение прямого стержня силами, вызывающими

в нем напряжения, не превосходящие предела пропорциональности.

В задачах второго типа углы поворота также будут не существенными при проектировании сил, действующих на объемный элемент и при определении деформаций, однако удлинения будут превосходить предел пропорциональности, что потребует написания зависимостей между напряжениями и деформациями в нелинейной форме. Пример задач такого типа можно получить из рассмотренного выше примера, осложнив его предположением, что напряжения в стержне превосходят предел пропорциональности.

В задачах третьего типа углы поворота будут существенно велики (при деформациях, не выходящих за пределы пропорциональности).

В качестве примера на этот тип задач можно указать изгиб тонкой стальной полосы. Известно, что полосы из хорошей стали допускают сведение своих концов и потом выпрямляются без следов остаточных деформаций, что свидетельствует о том, что в них, даже при весьма больших перемещениях и углах поворота, напряжения не выходят за предел текучести (который для стали близок к пределу пропорциональности).

Наконец, в задачах четвертого типа деформации будут выше предела пропорциональности, а углы поворота настолько велики, что потребуют учета нелинейных членов как в формулах, связывающих напряжения с деформациями, так и в уравнениях равновесия элемента и выражениях для деформаций. Пример для этого случая можно получить, осложнив предыдущий пример предположением, что напряжения в изгибаемой полосе превосходят предел пропорциональности.

Как уже сказано, для стали предел пропорциональности близок к пределу текучести, так что физически нелинейные задачи для этого материала по существу входят в компетенцию уже не теории упругости, а теории пластичности. Поэтому задачи второго и четвертого типа рассматриваться в дальнейшем не будут. Не будут также рассматриваться и задачи первого типа, поскольку они являются предметом классической (линейной) теории упругости.

Таким образом, имея в виду применение выведенных формул к металлам (и притом главным образом к стали) и придержи-

ваясь темы „нелинейная теория *упругости*“, мы должны в дальнейшем сосредоточить свое внимание только на задачах третьего типа (линейных физически, нелинейных геометрически). Иными словами, мы будем предполагать в дальнейшем, что связь между напряжениями и деформациями соответствует закону Гука (что равносильно предположению, что удлинения и сдвиги весьма малы по сравнению с единицей), а углы поворота настолько велики, что ими нельзя пренебрегать ни при определении деформаций, ни при написании уравнений равновесия объемного элемента, выделенного из деформированного тела.

ГЛАВА IV

О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

§ 35. Еще две формы написания уравнений равновесия объемного элемента

Возвратимся к системе (II.43) и попытаемся преобразовать ее таким образом, чтобы коэффициенты в ней стали функциями не параметров e_{ij} , ω_j , а компонентов деформации.

Учитывая, что упомянутые параметры выражаются через перемещения u , v , w формулами (I.6), (I.7) и выполняя в системе (II.43) дифференцирование произведений, получаем следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial z}\bigg) + \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma_{xx}^* + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sigma_{yy}^* + \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \sigma_{zz}^* + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sigma_{xy}^* + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \sigma_{xz}^* + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \sigma_{yz}^* + \\ & + \frac{V^*}{V} F_{\xi}^* = 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z}\right) + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y} + \right. \\ & + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial z}\bigg) + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sigma_{xx}^* + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sigma_{yy}^* + \\ & + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \sigma_{zz}^* + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \sigma_{xy}^* + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \sigma_{xz}^* + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \sigma_{yz}^* + \frac{V^*}{V} F_{\eta}^* = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial z} \right) + \\ & + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sigma_{xx}^* + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sigma_{yy}^* + \\ & + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \sigma_{zz}^* + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sigma_{xy}^* + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \sigma_{yz}^* + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \sigma_{xz}^* + \frac{V^*}{V} F_z^* = 0. \end{aligned}$$

Умножим первое из них на $1 + \frac{\partial u}{\partial x}$, второе на $\frac{\partial v}{\partial x}$, третье на $\frac{\partial w}{\partial x}$ и затем сложим все три равенства. Результатом указанной операции, если принять во внимание, что

$$\begin{aligned} 1 + 2e_{xx} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ e_{xy} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ e_{xz} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial e_{xx}}{\partial x} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial e_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yx}}{\partial x} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial e_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial x} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial e_{xx}}{\partial y} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial e_{xx}}{\partial z} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} &= 2 \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right], \end{aligned} \quad (IV.2)$$

будет уравнение

$$\begin{aligned} & (1 + 2e_{xx}) \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z} \right) + e_{xy} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial z} \right) + \\ & + e_{xz} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z} \right) + L_x + \frac{V^*}{V} (1 + E_x) F_x^* = 0, \quad (IV.3) \end{aligned}$$

в котором

$$L_x = \sigma_{xx}^* \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + \sigma_{yy}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right) + \sigma_{zz}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x} \right) + \\ + 2\sigma_{xy}^* \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} + 2\sigma_{xz}^* \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} + \sigma_{yz}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} \right), \quad (\text{IV.4})$$

$$F_x^* = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F_\xi^* + \frac{\partial v}{\partial x} F_\eta + \frac{\partial w}{\partial x} F_\zeta^* \right] \frac{1}{1 + E_x}. \quad (\text{IV.5})$$

Установим тут же физический смысл полученного дифференциального соотношения. Как видно из II главы, три уравнения системы (II.43), а следовательно, и системы (IV.1) выражают равенство нулю сумм проекций на оси X , Y , Z всех сил, действующих на элемент, выделенный из деформированного тела.

С другой стороны (согласно таблице, приведенной в § 2),

$$\begin{aligned} \cos(X, i_1) &= \frac{1 + \epsilon_{xx}}{1 + E_x} = \frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{1 + E_x}, \\ \cos(Y, i_1) &= \frac{\frac{1}{2} \epsilon_{xy} + \omega_z}{1 + E_x} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + E_x}, \\ \cos(Z, i_1) &= \frac{\frac{1}{2} \epsilon_{xz} - \omega_y}{1 + E_x} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + E_x}. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Отсюда, ясно что уравнение (IV.3) выражает равенство нулю проекции на направление i_1 главного вектора всех сил, действующих на элемент деформированного тела (рис. 14).

Соответственно F_x^* есть проекция на то же направление удельной объемной силы, действующей в рассматриваемой точке.

Подобным же образом (а именно путем сложения равенств (IV.1), после предварительного их умножения сначала на $\frac{\partial u}{\partial y}$, $1 + \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ и затем на $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$ можно вывести еще два уравнения, аналогичные (IV.3), выражающие

равенство нулю сумм *проекций* на направления \mathbf{i}_2 и \mathbf{i}_3 всех сил, действующих на объемный элемент тела.

Эти два уравнения получаются из уравнений (IV.3), (IV.4), (IV.5) путем циклической перестановки букв x, y, z и соответственно u, v, w .

В итоге приходим к следующей совокупности дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & (1 + 2\varepsilon_{xx}) \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z} \right) + \varepsilon_{xy} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial z} \right) + \\
 & + \varepsilon_{xz} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z} \right) + L_x + \frac{V^*}{V} (1 + E_x) F_x^* = 0. \\
 & \varepsilon_{xy} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z} \right) + (1 + 2\varepsilon_{yy}) \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial z} \right) + \\
 & + \varepsilon_{yz} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z} \right) + L_y + \frac{V^*}{V} (1 + E_y) F_y^* = 0. \quad (IV.7) \\
 & \varepsilon_{xz} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z} \right) + \varepsilon_{yz} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial z} \right) + \\
 & + (1 + 2\varepsilon_{zz}) \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z} \right) + L_z + \frac{V^*}{V} (1 + E_z) F_z^* = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь L_y и L_z определяются по формуле (IV.4) путем циклической перестановки x, y, z .

Рассматривая уравнение (IV.7) как алгебраическую систему с тремя неизвестными (выражениями, стоящими в круглых скобках) и решая ее, находим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z} + g^{xx} \left(L_x + \frac{V^*}{V} F_x^* \right) + g^{xy} \left(L_y + \frac{V^*}{V} F_y^* \right) + \\
 & + g^{xz} \left(L_z + \frac{V^*}{V} F_z^* \right) = 0, \\
 & \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial z} + g^{xy} \left(L_x + \frac{V^*}{V} F_x^* \right) + g^{yy} \left(L_y + \frac{V^*}{V} F_y^* \right) + \\
 & + g^{yz} \left(L_z + \frac{V^*}{V} F_z^* \right) = 0, \quad (IV.8)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z} + g^{xz} \left(L_x + \frac{V^*}{V} F_x^* \right) + g^{yz} \left(L_y + \frac{V^*}{V} F_y^* \right) + g^{zz} \left(L_z + \frac{V^*}{V} F_z^* \right) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} g^{xx} &= \frac{\left| \begin{array}{cc} 1 + 2\varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{yz} & 1 + 2\varepsilon_{zz} \end{array} \right|}{D^2} = \\ &= \frac{1}{D^2} [(1 + 2\varepsilon_{yy})(1 + 2\varepsilon_{zz}) - \varepsilon_{yz}^2] = \frac{1}{D^2} \gamma_{xx}, \\ g^{yy} &= \frac{1}{D^2} [(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{zz}) - \varepsilon_{xz}^2] = \frac{1}{D^2} \gamma_{yy}, \quad (\text{IV.9}) \\ g^{zz} &= \frac{1}{D^2} [(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy}) - \varepsilon_{xy}^2] = \frac{1}{D^2} \gamma_{zz}, \\ g^{xy} &= -\frac{1}{D^2} [\varepsilon_{xy}(1 + 2\varepsilon_{zz}) - \varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}] = \frac{1}{2D^2} \gamma_{xy}, \\ g^{xz} &= -\frac{1}{D^2} [\varepsilon_{xz}(1 + 2\varepsilon_{yy}) - \varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}] = \frac{1}{2D^2} \gamma_{xz}, \quad (\text{IV.10}) \\ g^{yz} &= -\frac{1}{D^2} [\varepsilon_{yz}(1 + 2\varepsilon_{xx}) - \varepsilon_{yx}\varepsilon_{zx}] = \frac{1}{2D^2} \gamma_{yz}. \end{aligned}$$

Примеч. D — известный по I главе определитель формулы [I.94; I.95], а γ_{il} — см. формулы (III.15). Система (IV.8), подобно системе (IV.7), имеет определенный физический смысл, который поясним без доказательства. Именно — если система (IV.7), как было выше указано, формулирует условие равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на элемент тела путем приравнивания нулю сумм их *проекций* на направления i_1, i_2, i_3 , то система (IV.8) формулирует тоже условие путем приравнивания нулю сумм их *составляющих* по тем же направлениям.

Поскольку векторы i_1, i_2, i_3 не ортогональны, постольку уравнения (IV.7) и (IV.8) не тождественны, хотя констатируют один и тот же физический факт.

Таким образом мы теперь имеем три варианта написания уравнений равновесия элемента, выделенного из деформированного тела:

а) систему (II.43), выражающую условие равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на элемент тела, путем проектирования этих сил на неподвижные оси X, Y, Z ;

б) систему (IV.7), выражающую то же условие, путем проектирования этих сил на направления i_1, i_2, i_3 ;

в) систему (IV.8), выражающую то же условие, путем разложения этих сил по направлениям i_1, i_2, i_3 .

§ 36. Упрощение уравнений (IV.7), (IV.8) применительно к малой деформации

Если удлинения и сдвиги весьма малы по сравнению с единицей, то (как было указано еще во II главе) допустимо пренебрегать деформацией элемента тела при формулировке условий его равновесия. В этом случае важно учесть при проектировании сил только поворот элемента.

Иначе говоря, при составлении уравнений статики можно считать i_1, i_2, i_3 ортогональными, не делая, следовательно, различия между проекциями и составляющими какой-либо силы по направлениям этих единичных векторов. Из сказанного ясно, что при малой деформации разница между системами (IV.7) и (IV.8) должна исчезать, и они должны становиться тождественными

Чтобы достигнуть этого, надо в первой системе пренебречь $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ по сравнению с единицей (отбросив кроме того члены, содержащие множителями $\epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$), а во второй системе надо положить:

$$\begin{aligned} g^{xx} &\approx 1 - 2\epsilon_{xx} \approx 1, & g^{xy} &\approx -\epsilon_{xy} \approx 0, \\ g^{xz} &\approx -\epsilon_{xz} \approx 0, \\ g^{yy} &\approx 1 - 2\epsilon_{yy} \approx 1, & g^{yz} &\approx -\epsilon_{yz} \approx 0, \\ g^{zz} &\approx 1 - 2\epsilon_{zz} \approx 1. \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

В итоге указанных упрощений уравнения (IV.7) и (IV.8) превращаются в систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z} + \sigma_{yy}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right) + \\ + \sigma_{zz}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x} \right) + \sigma_{xy}^* \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} + \sigma_{xz}^* \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} + \\ + \sigma_{yz}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} \right) + F_x^* = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial z} + \sigma_{xx}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \right) + \\
& + \sigma_{zz}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial y} \right) + \sigma_{xy}^* \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} + \\
& + \sigma_{xz}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} \right) + \sigma_{yz}^* \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} + F_y^* = 0, \\
& \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z} + \sigma_{xx}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} \right) + \\
& + \sigma_{yy}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} \right) + \sigma_{xy}^* \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right) + \\
& + \sigma_{xz}^* \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x} + \sigma_{yz}^* \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial y} + F_z^* = 0.
\end{aligned} \tag{IV.12}$$

Первое из написанных уравнений есть условие равенства нулю суммы проекций (составляющих) на направление i_1 , всех сил, действующих на объемный элемент тела. Соответственно два других уравнения выражают аналогичные условия, но для проекций (составляющих) сил на направления i_2 и i_3 .

Напомним, что речь идет об элементе тела, выделенном в окрестности точки x, y, z и представляющем до деформации прямоугольный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz , параллельными осям X, Y, Z .

§ 37. Еще одна форма граничных условий

В предыдущей главе (§ 29) было установлено, что в тех точках поверхности, ограничивающей деформированное тело, где заданы не перемещения, а силы, должны соблюдаться равенства (III.46).

Данные равенства имеют следующий развернутый вид:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy}^* + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{xz}^* \right] \cos(n, X) + \\
& + \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xy}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yy}^* + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{yz}^* \right] \cos(n, Y) + \\
& + \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xz}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yz}^* + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{zz}^* \right] \cos(n, Z) = \frac{S_n^*}{S_n} f \epsilon^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{xy}^* + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{xz}^* \right] \cos(n, X) + \\
& + \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xy}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{yy}^* + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{yz}^* \right] \cos(n, Y) + \\
& + \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xz}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{yz}^* + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{zz}^* \right] \cos(n, Z) = \frac{S_n^*}{S_n} f_\eta^*, \\
& \left[\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{xy}^* + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{xz}^* \right] \cos(n, X) + \\
& + \left[\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{xy}^* + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{yy}^* + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{yz}^* \right] \cos(n, Y) + \\
& + \left[\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{xz}^* + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{yz}^* + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{zz}^* \right] \cos(n, Z) = \frac{S_n^*}{S_n} f_\zeta^*
\end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

и выражают условия, что проекции на направления X , Y , Z напряжения, действующего на поверхности, ограничивающей тело, должны быть равны соответствующим проекциям удельной поверхностной нагрузки.

Но равенство вектора напряжения вектору удельной поверхностной нагрузки может быть сформулировано также и путем приравнивания проекций данных двух векторов на направления i_1 , i_2 , i_3 .

Для получения граничных условий в такой форме умножим первое из выражений (IV.13) на $\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, второе на $\frac{\partial v}{\partial x}$, третье на $\frac{\partial w}{\partial x}$ и сложим затем все три выражения.

В итоге (§ 35) придем к равенству:

$$\begin{aligned}
& [(1 + 2\varepsilon_{xx}) \sigma_{xx}^* + \varepsilon_{xy} \sigma_{xy}^* + \varepsilon_{xz} \sigma_{xz}^*] \cos(n, X) + \\
& + [(1 + 2\varepsilon_{xx}) \sigma_{xy}^* + \varepsilon_{xy} \sigma_{yy}^* + \varepsilon_{xz} \sigma_{yz}^*] \cos(n, Y) + \\
& + [(1 + 2\varepsilon_{xx}) \sigma_{xz}^* + \varepsilon_{xy} \sigma_{yz}^* + \varepsilon_{xz} \sigma_{zz}^*] \cos(n, Z) = (\text{IV.14}) \\
& = \frac{S_n^*}{S_n} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) f_\xi^* + \frac{\partial v}{\partial x} f_\eta^* + \frac{\partial w}{\partial x} f_\zeta^* \right].
\end{aligned}$$

Но в силу (IV.6)

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) f_{\xi}^* + \frac{\partial v}{\partial x} f_{\eta}^* + \frac{\partial w}{\partial x} f_{\zeta}^* = (1 + E_x) f_x^*, \quad (\text{IV.15})$$

где f_x^* — проекция удельной поверхностной нагрузки на направление i_1 .

Таким образом

$$\begin{aligned} & [(1 + 2\varepsilon_{xx}) \sigma_{xx}^* + \varepsilon_{xy} \sigma_{xy}^* + \varepsilon_{xz} \sigma_{xz}^*] \cos(n, X) + \\ & + [(1 + 2\varepsilon_{xx}) \sigma_{xy}^* + \varepsilon_{xy} \sigma_{yy}^* + \varepsilon_{xz} \sigma_{yz}^*] \cos(n, Y) + \\ & + [(1 + 2\varepsilon_{xx}) \sigma_{xz}^* + \varepsilon_{xy} \sigma_{yz}^* + \varepsilon_{xz} \sigma_{zz}^*] \cos(n, Z) = \\ & = \frac{S_n}{S_n} (1 + E_x) f_x^*. \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Отсюда путем циклической перестановки букв x, y, z можно получить еще две формулы, выражающие равенство проекций на направления i_1, i_2, i_3 вектора напряжения на поверхности, ограничивающей тело, соответствующим проекциям удельной поверхностной нагрузки. Если удлинения и сдвиги пренебрежимо малы по сравнению с единицей, то в формулах вида (IV.16) можно пренебречь всеми членами, содержащими множителями компоненты деформации, в результате чего придем к следующей упрощенной формулировке граничных условий:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} \cos(n, X) + \sigma_{xy} \cos(n, Y) + \sigma_{xz} \cos(n, Z) &= f_x^*, \\ \sigma_{yx} \cos(n, X) + \sigma_{yy} \cos(n, Y) + \sigma_{yz} \cos(n, Z) &= f_y^*, \\ \sigma_{zx} \cos(n, X) + \sigma_{zy} \cos(n, Y) + \sigma_{zz} \cos(n, Z) &= f_z^*. \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

Заслуживает быть отмеченным лишний раз тот факт, что $\hat{nX}, \hat{nY}, \hat{nZ}$ суть углы, образуемые нормалью к поверхности, ограничивающей тело в положении до деформации. Что касается σ_{ij} — то это составляющие (проекции) напряжения по направлениям i_1, i_2, i_3, \dots , а f_x^*, f_y^*, f_z^* — проекции на эти же направления удельной поверхностной нагрузки.

§ 38. Упрощение уравнений (IV.7), (IV.8) применительно к случаю, когда углы поворота малы

Если углы поворота малы по сравнению с единицей, превышая в то же время существенно удлинения и сдвиги, то (как было установлено в § 22) уравнения равновесия (II.43) могут быть приближенно заменены уравнениями (II.49). Данному упрощению соответствует замена системы (IV.12) системой:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - \sigma_{yy} \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \sigma_{xy} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \\ & + \sigma_{xz} \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + \sigma_{yz} \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial y} - \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) = -F_x^*, \\ & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} - \sigma_{zz} \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \sigma_{xx} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \sigma_{yz} \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \\ & + \sigma_{xy} \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + \sigma_{xz} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \right) = -F_y^*, \quad (IV.18) \\ & \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \sigma_{xx} \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \sigma_{xz} \frac{\partial \omega_y}{\partial z} + \\ & + \sigma_{yz} \frac{\partial \omega_x}{\partial z} + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} - \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) = -F_z^*, \end{aligned}$$

из которой следует, что при пренебрежимо малых по сравнению с единицей углах поворота должны существовать приближенные равенства:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \approx \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} \approx \frac{\partial \omega_z}{\partial y}, \\ & - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \approx \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \approx \frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \\ & \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} \approx \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} \approx \frac{\partial \omega_y}{\partial x}, \quad (IV.19) \\ & - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} \approx \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x} \approx \frac{\partial \omega_y}{\partial z}, \\ & \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial y} \approx \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial z} \approx \frac{\partial \omega_x}{\partial z}, \\ & - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} \approx \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} \approx \frac{\partial \omega_x}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \omega_y}{\partial y} - \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &\approx \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}, \\
 \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \frac{\partial \omega_x}{\partial x} &\approx \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y}, \\
 \frac{\partial \omega_x}{\partial x} - \frac{\partial \omega_y}{\partial y} &\approx \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z},
 \end{aligned} \quad (IV.20)$$

формулы (IV.19) будут непротиворечивы только при условии, что производные

$$\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y}, \quad (IV.21)$$

пренебрежимо малы по сравнению с производными

$$\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \quad (IV.21')$$

(соответственно).

Противоречия не будет и в том случае, когда все (или некоторые) из производных (IV.21') окажутся пренебрежимо малыми вместе с соответствующими производными (IV.21).

Кроме вышеуказанного требования необходимо еще соблюдение какого-либо одного из следующих трех соотношений

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} &\approx - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}, \\
 \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} &\approx - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y}, \\
 \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} &\approx - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z},
 \end{aligned} \quad (IV.22)$$

что вытекает из (IV. 20).

Таким образом предположение, что все углы поворота малы по сравнению с единицей, налагает определенные ограничения на величину производных от компонентов деформации.

Формулы (IV.19), (IV.20) устанавливают связь между производными от компонентов деформации и производными от компонентов поворота, имеющую место в рассматриваемом частном случае. Из данных формул следует, что те и другие производные являются, вообще говоря, величинами одинакового порядка. Отсюда (поскольку повороты считаются значительно

превосходящими удлинения и сдвиги) можно сделать заключение, что компоненты деформации должны быть существенно более быстро изменяющимися функциями координат, чем углы поворота (по крайней мере в некоторых направлениях). Чтобы данный вывод не противоречил предположению о малости деформаций, приходится допустить, что размеры тела в указанных выше направлениях малы, так как в этом случае нарастание деформаций, за счет большого их градиента будет ограничиваться малостью области изменения соответствующей координаты. Последнее остается справедливым и при углах поворота, сравнимых с единицей.

Таким образом геометрически нелинейные задачи (то-есть задачи, в которых удлинения и сдвиги считаются не выходящими за пределы справедливости закона Гука, а относительные повороты волокон считаются большими по сравнению с деформациями) могут встречаться только при исследовании деформации таких тел, которые имеют в некоторых направлениях существенно малые размеры. Подобными телами являются тонкие стержни (тела имеющие малые размеры в плоскости их поперечного сечения), тонкие пластины и тонкие оболочки (тела имеющие малые размеры в направлении, перпендикулярном их срединной поверхности).

Лишь для таких тел геометрически нелинейные задачи имеют реальное значение.

§ 39. Обобщение соотношений Сен-Венана на случай больших поворотов и деформаций

В классической теории упругости существенную роль играют дифференциальные соотношения, выведенные Сен-Венаном и называемые либо условиями совместности деформаций, либо условиями интегрируемости уравнений, связывающих перемещения с деформациями. С помощью данных соотношений задачи теории упругости можно решать непосредственно в напряжениях, не прибегая к предварительному определению перемещений. Аналогичные, но соответственно более громоздкие соотношения (тождественно удовлетворяющиеся при подстановке в них компонентов деформации, выраженных через перемещения) могут быть установлены и в нелинейной теории упругости.

Следуя обычному принципу изложения этой книги, мы получим их сначала без каких-либо пренебрежений (то-есть применительно к произвольной деформации) и затем упростим применительно к случаю, когда удлинения и сдвиги малы (но повороты какие угодно). Путь вывода искомых соотношений весьма прост, если воспользоваться сведениями из тензорного исчисления и, наоборот, весьма затруднителен, если эти сведения не принимать во внимание. Поскольку данный вывод относится скорее к области дифференциальной геометрии, чем к теории упругости, мы проведем его в тензорной форме, рекомендуя читателю, для которого он окажется труден, пропустить приводимые ниже выкладки, ознакомившись лишь с их окончательным результатом.

В самом начале книги была допущена возможность построения декартовой системы координат X, Y, Z . Это равносильно утверждению, что рассматриваемое пространство является эвклидовым. Но если так, то компоненты тензора Римана — Кристоффеля (тензора кривизны пространства) должны быть равны нулю, какой бы криволинейной системой координат в этом пространстве мы ни пользовались. В частности они должны быть равны нулю и в системе $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, которая принята нами для определения положения точек деформированного тела.

Для ковариантных компонентов тензора Римана — Кристоффеля существуют следующие выражения (см. „Векторное исчисление и начала тензорного исчисления“ Н. Е. Кочина, изд. 1938 г., стр. 445).

$$R_{i\lambda\mu} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{i\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{i\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{x\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{x\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\mu} \right\} - g^{\rho\sigma} [\Gamma_{\sigma, \lambda\mu} \cdot \Gamma_{\rho, \mu\lambda} - \Gamma_{\sigma, \lambda\lambda} \cdot \Gamma_{\rho, \mu\mu}], \quad (IV.23)$$

где: g_{jk} — суть ковариантные составляющие фундаментального тензора криволинейной системы координат x^1, x^2, x^3 ,
 g^{jk} — контравариантные составляющие этого тензора,
 $\Gamma_{i,jk}$ — символы Кристоффеля, выражающиеся через ковариантные составляющие фундаментального тензора посредством формул:

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right). \quad (IV.24)$$

Отметим, что (по установившемуся в тензорном исчислении обычаю) в правой части формулы (IV.23) опущен знак двойной суммы по индексам σ и ρ . Применим формулу (IV.23) к криволинейной системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ (установив для определенности соответствие $\tilde{x} \rightarrow x^1, \tilde{y} \rightarrow x^2, \tilde{z} \rightarrow x^3$). Ковариантные составляющие ее фундаментального тензора будут равны:

$$\begin{aligned} g_{xx} &= 1 + 2\varepsilon_{xx}, & g_{yy} &= 1 + 2\varepsilon_{yy}, & g_{zz} &= 1 + 2\varepsilon_{zz}, \\ g_{xy} &= \varepsilon_{xy}, & g_{yx} &= \varepsilon_{yx}, & g_{yz} &= \varepsilon_{yz}, \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

в чем можно убедиться, составив на основании формул (I.21) и (I.5) выражение для квадрата расстояния между двумя произвольными точками деформированного тела. Что касается контравариантных составляющих фундаментального тензора, то они (см. цитированный курс Н. Е. Кочкина, стр. 390) будут определяться формулами (IV.9), (IV.10).

Подставляя (IV.9), (IV.25) и (IV.24) в (IV.23), получим все ковариантные компоненты тензора Римана-Кристоффеля в системе $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$.

Из них различными будут только шесть (поскольку речь идет о пространстве трех измерений — см. курс Н. Е. Кочкина, стр. 445). Приравнивание их нулю даст искомые шесть дифференциальных соотношений между компонентами деформации (ибо только через них выражаются в данном случае как g_{kl} , так и g^{kl}).

Ниже приводятся два из этих шести дифференциальных соотношений.

Остальные четыре могут быть получены из них путем циклической перестановки букв x, y, z .

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) = \\ & = g^{xx} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right] + \\ & + g^{xy} \left[\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + g^{zz} \left[\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g^{xy} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} - \right. \\
& - \left. \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} \right] + g^{xz} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} - \right. \\
& - \left. \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x} \right] + g^{yz} \left[\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial y} \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x} - \right. \\
& - \left. \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} \right) \right]; \quad (\text{IV.26})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \\
& = g^{xx} \left[\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
& + g^{yy} \left[\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
& + g^{zz} \left[\left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right)^2 \right] + g^{xy} \left[\left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right] + \\
& + g^{xz} \left[\left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right) \right] + \\
& + g^{yz} \left[\left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} \right) \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial y} - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right) - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right) \right].
\end{aligned}$$

Выведенные шесть дифференциальных соотношений должны оставаться в силе при любых значениях перемещений u , v , w .

Отсюда следует, что они должны удовлетворяться тождественно при подстановке в них вместо компонентов деформации их выражений согласно формулам (I.22).

§ 40. Упрощение соотношений (IV.26) для малых деформаций

Если удлинения и сдвиги весьма малы по сравнению с единицею, то разница между контра- и ковариантными составляющими тензора Римана—Кристоффеля в криволинейной системе координат \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} будет несущественной, происходя лишь за счет членов порядка компонентов деформации. Чтобы устранить соответствующие члены в формулах (IV.26), надо принять упрощение, заключающееся в формулах (IV.10), то-есть надо отбросить в (IV.26) все члены, имеющие множителями компоненты деформации (но не их производные!).

В итоге этого пренебрежения получатся следующие шесть приближенных соотношений

$$\begin{aligned} \text{I. } \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} \right) - \\ &- \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right), \\ \text{II. } \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= + \left(\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \epsilon_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x} \right) - \\ &- \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial z} \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial y} \right), \\ \text{III. } \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial z} &= \left(\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \right) - \\ &- \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial z} \left(\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV. } \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} + \\
 + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \right. \\
 + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \Big) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) - \\
 - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \right), &\quad (\text{IV.27})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{V. } \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} + \\
 + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \right. \\
 + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \Big) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) - \\
 - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right), &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{VI. } \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} + \\
 + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \right. \\
 + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \Big) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \\
 - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} \right). &
 \end{aligned}$$

Само собой разумеется, что эти последние соотношения уже не будут тождественно удовлетворяться при подстановке в них формул (I. 22). Однако, это будет происходить лишь за счет членов, имеющих множителями компоненты деформации, то есть за счет членов, пренебрежимо малых по сравнению с членами формул (IV. 27). Поэтому формулы (IV. 27) можно рассматривать как условия совместности деформаций при малых удлинениях и сдвигах, считая их обобщением сен-венановых соотношений на этот случай.

Наличие в (IV. 27) дополнительных членов по сравнению с соотношениями Сен-Венана обусловливается тем, что последние соотношения выводятся в предположении, что углы

поворота и деформации малы по сравнению с единицей и являются величинами одинакового порядка малости, тогда как формулы (IV. 27) заключают в себе только предположение о малости деформаций, но не налагают никаких ограничений на углы поворота.

§ 41. О возможности формулировки задач теории упругости в напряжениях и деформациях

Сведения, изложенные в трех первых главах этой книги, позволяют написать дифференциальные уравнения нелинейной теории упругости в перемещениях и поставить для данных уравнений надлежащее число краевых условий.

Настоящая глава дает принципиальную возможность решать некоторые задачи нелинейной теории упругости и непосредственно в напряжениях.

Действительно — уравнения равновесия в форме (IV. 7) или (IV. 8), при отсутствии объемных сил, не содержат перемещений в явном виде: в них входят лишь компоненты напряжения и компоненты деформации. Соответственно не входят (явно) перемещения и в граничные условия (IV. 16). Отсюда, дополнив уравнения (IV. 7) или (IV. 8) формулами (III. 38) и (IV. 27), мы можем решать задачи нелинейной теории упругости без необходимости выражения деформаций через перемещения. Тем самым задача нелинейной теории упругости сформулирована в напряжениях и деформациях (при условии отсутствия объемных сил и независимости f_x^* , f_y^* , f_z^* от перемещений).

Не исключена возможность, что этот второй путь решения в некоторых конкретных случаях будет более удобен, чем первый (то-есть чем путь решения задач в перемещениях). Однако и независимо от этого результаты настоящей главы представляют интерес, так как изложенные в ней формы уравнений равновесия и граничных условий часто оказываются удобными и при решении задач в перемещениях.

Что касается соотношений (IV. 27), то они могут быть полезными при проверке степени точности тех или иных упрощенных формул, обычно принимаемых при определении деформаций в геометрически нелинейных задачах.

В связи с последним замечанием следует вспомнить, что, как было указано (§ 38), областью применения геометри-

чески нелинейной теории упругости является исследование упругого равновесия гибких тел (тонких стержней, пластин и оболочек). Для всех подобных тел задача о их деформации может быть упрощена путем некоторых вполне обоснованных пренебрежений. Так, например, при исследовании плоского изгиба стержней, можно считать, что по высоте профиля стержня перемещения изменяются линейно. Последнее равносильно пренебрежению углами сдвига по сравнению с углами поворота. Аналогичный прием может быть использован также и в теории пластин и оболочек. Кроме перечисленных упрощений, отражающихся лишь на формулах для деформаций, используются также и упрощения уравнений равновесия, основанные на том, что при деформации гибких тел некоторые из возникающих в них напряжений всегда оказываются существенно малыми по сравнению с другими напряжениями.

Все упомянутые упрощения, хорошо известные по линейной теории пластин, оболочек и стержней, полностью переносятся и в нелинейную теорию, где они являются еще в большей мере обоснованными, поскольку разница между углами поворота и углами сдвига в нелинейной теории оказывается еще более значительной, чем в линейной теории. Соответственно еще более значительной оказывается разница между большими и малыми напряжениями. Применимость геометрически нелинейной теории упругости к гибким телам и вытекающие из этого указанные выше упрощения формул в значительной мере облегчают решение геометрически нелинейных задач. В конечном счете данные упрощения сводят любую трехмерную геометрически нелинейную задачу к двумерной или даже одномерной. Однако, несмотря на все эти упрощения, геометрически нелинейные задачи (ввиду нелинейности соответствующих дифференциальных уравнений) остаются достаточно трудными. Точное их решение — как правило, невозможно, а приближенное — связано с весьма громоздкими вычислениями.

Тем не менее значительное число геометрически нелинейных задач в настоящее время уже нашли свое решение, а проявляемый к ним повсеместно интерес позволяет надеяться, что в ближайшем будущем круг решенных задач будет продолжаться расширяться.

ГЛАВА V

ПРОБЛЕМА УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 42. Неоднозначность решения задачи теории упругости

Известно, что дифференциальные уравнения линеализированной теории упругости, основывающейся на принятии закона Гука и пренебрежении нелинейными членами как в формулах для компонентов деформации, так и в уравнениях равновесия объемного элемента, имеют в каждом конкретном случае единственное решение. Иными словами, классическая теория упругости дает для каждого тела, при заданных для него нагрузке и условиях закрепления, единственное положение упругого равновесия.

На самом же деле решение рассматриваемой физической задачи не всегда однозначно. Фактически одно и то же упругое тело при одних и тех же нагрузке и условиях закрепления может иметь и несколько возможных положений равновесия. Неправильный вывод, к которому приходит в данном случае классическая теория упругости, объясняется недостаточной точностью ее формул, при выводе которых отбрасывается влияние поворотов на выражения для компонентов деформации и на уравнения равновесия. Между тем, при исследовании неоднозначных форм равновесия упругих тел учет этого влияния совершенно необходим.

Когда тело имеет несколько возможных положений упругого равновесия, то обычно не все они бывают устойчивы и, следовательно, не все они являются равновероятными. Отсюда в задачу теории упругости входит не только отыскание форм упругого равновесия, но и выяснение их устойчивости. Существенно при этом отметить, что в случае на-

личия нескольких возможных форм равновесия, та форма, которую дает классическая теория упругости, обычно является *неустойчивой*. Из этого замечания ясно, что использование классической теории упругости при расчете прочности и деформации реальных конструкций может привести к катастрофическим последствиям, ввиду того, что иногда в действительности конструкция будет деформироваться совершенно иначе, чем предусматривает расчет.

В настоящей главе будет изложена теория устойчивости упругого равновесия тела произвольной формы в области деформаций, не выходящих за пределы справедливости закона Гука. Чтобы получить отправной пункт для дальнейших рассуждений, предположим сначала, что составляющие поверхностных и объемных сил, действующих на тело, бесконечно малы. Тогда (при конечной жесткости тела) перемещения всех его точек будут также бесконечно малыми. Соответственно бесконечно малыми будут удлинения, сдвиги и повороты. Но бесконечно малая деформация подчиняется уравнениям классической теории упругости и, следовательно (в силу указанной выше теоремы единственности), при бесконечно малых нагрузках всякое тело будет иметь только одну форму упругого равновесия и притом такую, какая может быть получена из уравнений классической теории.

Примем далее, что нагрузка на тело зависит только от одного параметра и начнем этот параметр постепенно увеличивать. В некоторых пределах данного изменения решение будет продолжать оставаться единственным и только по достижении параметром нагрузки некоторого определенного значения (которое назовем критическим) появится возможность еще одной, не предусматриваемой классической теорией, формы упругого равновесия.

Поскольку критической нагрузке соответствует момент наступления возможности раздвоения решения задачи, постольку два положения равновесия, ей соответствующие, будут лишь бесконечно мало отличаться друг от друга.

Последнее обстоятельство и будет положено в дальнейшем в основу теории определения критических нагрузок.

Из вышеизложенного видно, что в случае, когда внешняя нагрузка на тело зависит всего от одного параметра

условие устойчивости упругого равновесия выражается неравенством:

$$p < p_{кр.},$$

причем $p_{кр.}$ будет функцией формы и размеров тела, его упругих свойств, условий его закрепления и характера нагрузки.

Так как во многих задачах нагрузка действительно характеризуется всего одним параметром, рассмотренный выше случай представляет наибольший практический интерес.

Тем не менее, встречаются и такие задачи, в которых нагрузка зависит от двух или даже большего числа параметров (p, q, r, \dots).

Задавшись тогда какими-либо значениями отношений

$$k_1 = q/p, \quad k_2 = r/p, \dots$$

и увеличивая затем параметр p , мы придем опять к формулировке условия упругой устойчивости конструкции в виде неравенства

$$p < p_{кр.}$$

Однако в данном случае $p_{кр.}$ будет функцией не только перечисленных ранее факторов, но и функцией отношений k_1, k_2, \dots . Отсюда ясно, что при зависимости нагрузки на тело от нескольких параметров, условие его упругой устойчивости будет выражаться неравенством вида

$$f(p, q, r, \dots) < K,$$

где f — некоторая функция параметров нагрузки, а K — число, от нагрузки не зависящее.

§ 43. Дифференциальные уравнения для определения критических нагрузок

Пусть нагрузка на тело равна критической. Тогда для него будут возможны два и притом бесконечно близких положения равновесия.

Перемещения, соответствующие одному из них (тому, которое в рассматриваемый момент теряет свою устой-

чивость), будем обозначать u_0, v_0, w_0 , а перемещения, соответствующие другому, будут:

$$u = u_0 + \alpha u_1, \quad v = v_0 + \alpha v_1, \quad w = w_0 + \alpha w_1. \quad (V.1)$$

Здесь: $\alpha u_1(x, y, z)$, $\alpha v_1(x, y, z)$, $\alpha w_1(x, y, z)$ суть те дополнительные перемещения, которые нужно сообщить точкам тела, находящимся в первом (исходном) положении равновесия, чтобы перевести их во второе (новое) положение равновесия. При этом функции u_1, v_1, w_1 будем считать конечными, а коэффициент α бесконечно малой, независимой от x, y, z величиной.

Выразим компоненты деформации, соответствующие второму положению равновесия, через компоненты деформации, отвечающие исходному положению равновесия и дополнительные перемещения. Подставляя (V.1) в (I.22), находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + \alpha \varepsilon'_{xx} + \alpha^2 \varepsilon''_{xx} & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 + \alpha \varepsilon'_{xy} + \alpha^2 \varepsilon''_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}^0 + \alpha \varepsilon'_{yy} + \alpha^2 \varepsilon''_{yy} & \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{xz}^0 + \alpha \varepsilon'_{xz} + \alpha^2 \varepsilon''_{xz}, \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz}^0 + \alpha \varepsilon'_{zz} + \alpha^2 \varepsilon''_{zz} & \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{yz}^0 + \alpha \varepsilon'_{yz} + \alpha^2 \varepsilon''_{yz}, \end{aligned} \quad (V.2)$$

где:

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (V.3)$$

$$\varepsilon_{xy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

суть значения компонентов деформации в первом положении равновесия;

$$\varepsilon'_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad (V.4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xy} &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \end{aligned}$$

весия объемного элемента (которые будем принимать в форме написания (II.48), так как, допуская применимость закона Гука, мы должны считать компоненты деформации пренебрежимо малыми по сравнению с единицей). Вводя перемещения (V.1) и напряжения (V.6) в данные уравнения и отбрасывая при этом члены, содержащие множитель α в степенях выше первой, находим

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + \dot{e}_{xx} + \alpha \dot{e}_{xx}) \dot{\sigma}_{xx} + \alpha (1 + \dot{e}_{xx}) \dot{\sigma}'_{xx} + \right. \\
 & + \left[\frac{1}{2} (\dot{e}_{xy} + \alpha \dot{e}'_{xy}) - \dot{\omega}_z - \alpha \dot{\omega}'_z \right] \dot{\sigma}_{xy} + \alpha \left(\frac{1}{2} \dot{e}_{xy} - \dot{\omega}_z \right) \dot{\sigma}'_{xy} + \\
 & + \left[\frac{1}{2} (\dot{e}_{xz} + \alpha \dot{e}'_{xz}) + \dot{\omega}_y + \alpha \dot{\omega}'_y \right] \dot{\sigma}_{xz} + \alpha \left(\frac{1}{2} \dot{e}_{xz} + \dot{\omega}_y \right) \dot{\sigma}'_{xz} \Big\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (1 + \dot{e}_{xx} + \alpha \dot{e}'_{xx}) \dot{\sigma}_{xy} + \alpha (1 + \dot{e}_{xx}) \dot{\sigma}'_{xy} + \right. \\
 & + \left[\frac{1}{2} (\dot{e}_{xy} + \alpha \dot{e}'_{xy}) - \dot{\omega}_z - \alpha \dot{\omega}'_z \right] \dot{\sigma}_{yy} + \alpha \left(\frac{1}{2} \dot{e}_{xy} - \dot{\omega}_z \right) \dot{\sigma}'_{yy} + \\
 & + \left[\frac{1}{2} (\dot{e}_{xz} + \alpha \dot{e}'_{xz}) + \dot{\omega}_y + \alpha \dot{\omega}'_y \right] \dot{\sigma}_{yz} + \alpha \left(\frac{1}{2} \dot{e}_{xz} + \dot{\omega}_y \right) \dot{\sigma}'_{yz} \Big\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (1 + \dot{e}_{xx} + \alpha \dot{e}'_{xx}) \dot{\sigma}_{xz} + \alpha (1 + \dot{e}_{xx}) \dot{\sigma}'_{xz} + \left[\frac{1}{2} (\dot{e}_{xy} + \alpha \dot{e}'_{xy}) - \right. \right. \\
 & - \dot{\omega}_z - \alpha \dot{\omega}'_z \Big] \dot{\sigma}_{yz} + \alpha \left(\frac{1}{2} \dot{e}_{xy} - \dot{\omega}_z \right) \dot{\sigma}'_{yz} + \left[\frac{1}{2} (\dot{e}_{xz} + \alpha \dot{e}'_{xz}) + \right. \\
 & + \dot{\omega}_y + \alpha \dot{\omega}'_y \Big] \dot{\sigma}_{zz} + \alpha \left(\frac{1}{2} \dot{e}_{xz} + \dot{\omega}_y \right) \dot{\sigma}'_{zz} \Big\} + F_x^* = 0. \quad (V.8)
 \end{aligned}$$

Два других уравнения этой системы могут быть получены из написанного путем циклической перестановки индексов x, y, z .

При этом в уравнении (V.8), кроме ранее принятых обозначений, e_{ij} , ω_j суть значения e_{ij} и ω_j при $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$, и e_{ij} , ω_j при $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$.

Поскольку перемещения u_0 , v_0 , w_0 , так же как и u , v , w , соответствуют равновесному положению точек тела, по-

стольку, кроме уравнений вида (V.8), должны существовать и уравнения вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + e_{xx}^{\circ}) \sigma_{xx}^{\circ} + \left(\frac{1}{2} e_{xy}^{\circ} - \omega_z^{\circ} \right) \sigma_{xy}^{\circ} + \left(\frac{1}{2} e_{xz}^{\circ} + \omega_y^{\circ} \right) \sigma_{xz}^{\circ} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (1 + e_{xx}^{\circ}) \sigma_{xy}^{\circ} + \left(\frac{1}{2} e_{xy}^{\circ} - \omega_z^{\circ} \right) \sigma_{yy}^{\circ} + \left(\frac{1}{2} e_{xz}^{\circ} + \omega_y^{\circ} \right) \sigma_{yz}^{\circ} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (1 + e_{xx}^{\circ}) \sigma_{xz}^{\circ} + \left(\frac{1}{2} e_{xy}^{\circ} - \omega_z^{\circ} \right) \sigma_{yz}^{\circ} + \left(\frac{1}{2} e_{xz}^{\circ} + \omega_y^{\circ} \right) \sigma_{zz}^{\circ} \right\} + \\ & + F_{\xi,0}^* = 0, \end{aligned} \quad (V.9)$$

(два других уравнения — циклической перестановкой x, y, z), получающиеся при отнесении системы (II.48) к исходному положению равновесия. Заметим, что компоненты объемной силы F_{ξ} , F_{η} , F_{ζ} можно считать независимыми от перемещений, то-есть одинаковыми как в первом, так и во втором положениях равновесия. Это вытекает из того, что единственной объемной силой, с которой приходится считаться в статических задачах теории упругости, является удельный вес тела, компоненты которого на независимые от деформации направления будут постоянными величинами (если не считаться с изменением объема тела при деформации). Учитывая это замечание и вычитая затем из уравнения (V.8) уравнение (V.9), приходим (после возможного сокращения на α) к следующей системе однородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ e'_{xx} \sigma_{xx}^{\circ} + (1 + e_{xx}^{\circ}) \sigma'_{xx} + \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{xy}^{\circ} + \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma'_{xy} + \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{xz}^{\circ} + \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma'_{xz} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ e'_{xx} \sigma_{xy}^{\circ} + (1 + e_{xx}^{\circ}) \sigma'_{xy} + \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{yy}^{\circ} + \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma'_{yy} + \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{yz}^{\circ} + \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma'_{yz} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ e'_{xx} \sigma_{xz}^{\circ} + (1 + e_{xx}^{\circ}) \sigma'_{xz} + \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{yz}^{\circ} + \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma'_{yz} + \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{zz}^{\circ} + \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma'_{zz} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (V.10)$$

(два других уравнения — циклической перестановкой x, y, z).

Существенно отметить, что система (V.10) будет *линейной* относительно производных от u_1, v_1, w_1 по x, y, z . Последнее явствует из того, что $\sigma_{ij}, e_{ij}, \omega_j$ входят в (V.10) линейно, а сами они (в силу формул (I.6), (I.7) и (III.54)) являются линейными функциями упомянутых производных. Что касается системы уравнений (V.9), соответствующей исходному положению равновесия, то она, вообще говоря, будет нелинейной относительно производных от u_0, v_0, w_0 .

Однако, в большинстве практических задач углы поворота, отвечающие начальной форме равновесия тела, бывают либо равными нулю, либо величинами одного порядка с удлинениями и сдвигами. Иными словами, к исходному положению равновесия обычно можно применять формулы классической теории упругости. В этом, наиболее важном по своему практическому значению частном случае уравнения (V.9) принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z &= 0,\end{aligned}\quad (\text{V.11})$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\mu} (e_{xx} + \frac{\mu}{1-2\mu} b_2), & \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} e_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\mu} (e_{yy} + \frac{\mu}{1-2\mu} b_2), & \sigma_{xz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} e_{xz}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\mu} (e_{zz} + \frac{\mu}{1-2\mu} b_2), & \sigma_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} e_{yz}, \\ b_2 &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}.\end{aligned}\quad (\text{V.12})$$

Решив линейную систему (V.11) при заданных граничных условиях, которые могут быть удовлетворены без учета деформации поверхностей, ограничивающих тело, мы полу-

чим перемещения u_0, v_0, w_0 и напряжения, соответствующие исходному положению равновесия. При этом указанные величины станут известными функциями координат x, y, z и неопределенного пока что параметра (или параметров) внешней нагрузки.

Вводя затем данные функции в уравнения (V.10), мы придем к линейной, однородной дифференциальной системе относительно u_1, v_1, w_1 .

Эта система (при задании для нее однородных граничных условий, которые выяснятся несколько ниже) будет иметь отличные от нуля решения лишь при вполне определенных (являющихся ее характеристическими числами) значениях параметра нагрузки. Каждому такому его значению будет соответствовать точка разветвления решения уравнений теории упругости.

Таков путь исследования упругой устойчивости.

Заметим, что из предположения о допустимости применения к исходному положению равновесия классической теории упругости вытекают некоторые возможности упрощения также и уравнений (V.10). В самом деле — для перехода от системы (V.9) к системе (V.11) нужно было пренебречь в первой системе всеми членами, имеющими в качестве коэффициентов e'_{ij}, ω'_j , что, как известно (§ 23), равносильно пренебрежению углами поворота линейных элементов тела, при проектировании сил, действующих на его объемный элемент.

Но если так, то нет основания сохранять аналогичные члены и в системе (V.10).

Отсюда эта система может быть написана следующим образом:

(V.13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sigma'_{xx} + e'_{xx} \sigma_{xx} + \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{xy} + \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{xz} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sigma'_{xy} + e'_{xy} \sigma_{xy} + \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{yy} + \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{yz} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \sigma'_{xz} + e'_{xz} \sigma_{xz} + \left(\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{yz} + \left(\frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{zz} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Cycl.

Рассмотрим далее выражения (V.4), записав их предварительно в виде:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{xx} &= (1 + e^{\circ}_{xx}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} e^{\circ}_{xy} + \omega^{\circ}_z \right) \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} e^{\circ}_{xz} - \omega^{\circ}_y \right) \frac{\partial w_1}{\partial x}, \\ &\dots \dots \dots \\ \epsilon'_{xy} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + e^{\circ}_{xx} \frac{\partial u_1}{\partial y} + e^{\circ}_{yy} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} e^{\circ}_{xy} - \omega^{\circ}_z \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} e^{\circ}_{xy} + \omega^{\circ}_z \right) \frac{\partial v_1}{\partial y} + \left(\frac{1}{2} e^{\circ}_{yz} - \omega^{\circ}_x \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} e^{\circ}_{xz} + \omega^{\circ}_y \right) \frac{\partial w_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (V.14)$$

\dots \dots \dots

В соответствии с намеченной выше системой упрощений и здесь следует пренебречь всеми членами, умноженными на e°_{ij} , ω°_j . Тогда для параметров ϵ'_{ij} получим (вместо формул (V.4) гораздо более простые выражения:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{xx} &= \epsilon'_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, & \epsilon'_{xy} &= \epsilon'_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}, \\ \epsilon'_{yy} &= \epsilon'_{yy} = \frac{\partial v_1}{\partial y}, & \epsilon'_{xz} &= \epsilon'_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}, \\ \epsilon'_{zz} &= \epsilon'_{zz} = \frac{\partial w_1}{\partial z}, & \epsilon'_{yz} &= \epsilon'_{yz} = \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (V.15)$$

Возвращаясь теперь вновь к уравнениям (V.13), заметим, что в них параметры ω'_j пропорциональны дополнительным углам поворота, которые получает объемный элемент тела при переходе от первого положения равновесия во второе. Что касается до ϵ'_{ij} , то они, как только что было установлено, пропорциональны (с тем же коэффициентом пропорциональности α) дополнительным компонентам деформации.

Для задач на потерю устойчивости упругого равновесия обычно характерно превращение форм равновесия с малыми углами поворота в формы равновесия с углами поворота, существенно превосходящими компоненты деформации. Это дает основание пренебречь в уравнениях (V.13) всеми членами, умноженными на $\epsilon'_{ij} = \epsilon'_{ij}$, по сравнению с членами,

умноженными на ω'_j . Учитывая данную возможность, приведем систему (V.13) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma'_{xx} - \omega'_z \sigma'_{xy} + \omega'_y \sigma'_{xz} \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma'_{xy} - \omega'_z \sigma'_{yy} + \omega'_y \sigma'_{yz} \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma'_{xz} - \omega'_z \sigma'_{yz} + \omega'_y \sigma'_{zz} \right] = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma'_{xy} - \omega'_x \sigma'_{xz} + \omega'_z \sigma'_{xx} \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma'_{yy} - \omega'_x \sigma'_{yz} + \omega'_z \sigma'_{yx} \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma'_{zy} - \omega'_x \sigma'_{zz} + \omega'_z \sigma'_{zx} \right] = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma'_{xz} - \omega'_y \sigma'_{xx} + \omega'_x \sigma'_{xy} \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma'_{yz} - \omega'_y \sigma'_{yx} + \omega'_x \sigma'_{yy} \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma'_{zz} - \omega'_y \sigma'_{zx} + \omega'_x \sigma'_{zy} \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{V.16}$$

который и будем считать окончательным.

После подстановки сюда вместо σ'_{ij} , ω'_j их выражений, уравнения (V.16) превратятся в систему из трех линейных однородных дифференциальных уравнений с тремя неизвестными u_1 , v_1 , w_1 , к определению характеристических чисел которой (при заданных краевых условиях) и сводится вопрос нахождения критических нагрузок, если исходное напряженное состояние относится к числу задач классической теории упругости.

§ 44. Краевые условия проблемы упругой устойчивости

Сформулируем, воспользовавшись для этого результатами предыдущей главы, краевые условия для системы (V.16).

Они могут быть получены путем сравнения краевых условий для первого положения равновесия с краевыми условиями для второго положения равновесия.

Пусть на некоторой части поверхности, ограничивающей тело, заданы геометрические граничные условия, то-есть явно заданы перемещения. На остальной части этой поверхности пусть заданы компоненты внешней нагрузки f_x^* , f_y^* , f_z^* . Общий вид геометрических граничных условий может быть записан в форме:

$$u = \varphi_1(x, y, z), \quad v = \varphi_2(x, y, z), \quad w = \varphi_3(x, y, z), \quad (V.17)$$

где: $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$, $\varphi_3(x, y, z)$ — заданные функции.

Эти равенства должны соблюдаться как в первом, так и во втором положениях равновесия. Отсюда (на соответствующих участках поверхности, ограничивающей тело) имеем:

$$\begin{aligned} u_0 &= \varphi_1, \quad v_0 = \varphi_2, \quad w_0 = \varphi_3, \\ u_0 + \alpha u_1 &= \varphi_1, \quad v_0 + \alpha v_1 = \varphi_2, \quad w_0 + \alpha w_1 = \varphi_3. \end{aligned} \quad (V.18)$$

Вычитая верхние равенства из нижних, приходим к следующим краевым условиям для u_1 , v_1 , w_1 :

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0, \quad (V.19)$$

которые должны соблюдаться в тех точках границ тела, где перемещения явно заданы. * Выпишем далее для первого и второго положений равновесия краевые условия в тех точках, где задана внешняя поверхностная нагрузка.

Для исходного положения равновесия (если учесть, что оно считается относящимся к числу задач линейной теории упругости) условия равенства сил на поверхности тела будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{\circ} \cos(n, X) + \sigma_{xy}^{\circ} \cos(n, Y) + \sigma_{xz}^{\circ} \cos(n, Z) &= \\ &= f_x(u_0, v_0, w_0) = f_x^{\circ}, \\ \sigma_{xy}^{\circ} \cos(n, X) + \sigma_{yy}^{\circ} \cos(n, Y) + \sigma_{yz}^{\circ} \cos(n, Z) &= \\ &= f_y(u_0, v_0, w_0) = f_y^{\circ}, \\ \sigma_{xz}^{\circ} \cos(n, X) + \sigma_{yz}^{\circ} \cos(n, Y) + \sigma_{zz}^{\circ} \cos(n, Z) &= \\ &= f_z(u_0, v_0, w_0) = f_z^{\circ}, \end{aligned} \quad (V.20)$$

* Отметим, что u_1 , v_1 , w_1 в точках тела, где перемещения заданы, должны подчиняться тем же условиям, какие там же налагались на вариации перемещений. Данное обстоятельство будет использовано в следующем §.

где $f_\xi(u_0, v_0, w_0)$, $f_\eta(u_0, v_0, w_0)$, $f_\zeta(u_0, v_0, w_0)$ суть значения проекций удельной поверхности нагрузки на оси X , Y , Z в первом положении равновесия. Для второго положения равновесия (смежного с предыдущим) аналогичные условия напишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{n,\xi} \cos(n, X) + \sigma_{n,\xi} \cos(n, Y) + \sigma_{n,\xi} \cos(n, Z) &= \\ &= f_\xi(u_0 + \alpha u_1, v_0 + \alpha v_1, w_0 + \alpha w_1), \\ \sigma_{n,\eta} \cos(n, X) + \sigma_{n,\eta} \cos(n, Y) + \sigma_{n,\eta} \cos(n, Z) &= \\ &= f_\eta(u_0 + \alpha u_1, v_0 + \alpha v_1, w_0 + \alpha w_1), \\ \sigma_{n,\zeta} \cos(n, X) + \sigma_{n,\zeta} \cos(n, Y) + \sigma_{n,\zeta} \cos(n, Z) &= \\ &= f_\zeta(u_0 + \alpha u_1, v_0 + \alpha v_1, w_0 + \alpha w_1), \end{aligned} \quad (V.21)$$

или, если учесть формулы (II.39), (II.42) и (V.6), а также те упрощения, которые были приняты в предыдущем параграфе, имеем:

$$\begin{aligned} [\sigma'_{xx} + \alpha(\sigma'_{xx} - \omega'_z \sigma'_{xy} + \omega'_y \sigma'_{xz})] \cos(nX) + \\ + [\sigma'_{xy} + \alpha(\sigma'_{xy} - \omega'_z \sigma'_{yy} + \omega'_y \sigma'_{yz})] \cos(nY) + \\ + [\sigma'_{xz} + \alpha(\sigma'_{xz} - \omega'_z \sigma'_{yz} + \omega'_y \sigma'_{zz})] \cos(nZ) = \\ = f_\xi(u_0 + \alpha u_1, v_0 + \alpha v_1, w_0 + \alpha w_1). \end{aligned} \quad (V.22)$$

Вычитая формулы (V.20) из формул вида (V.22), приходим к следующей формулировке граничных условий, которые должны быть наложены на функции u_1 , v_1 , w_1 в тех точках поверхности тела, в которых заданы внешние силы.

$$\begin{aligned} (\sigma'_{xx} - \omega'_z \sigma'_{xy} + \omega'_y \sigma'_{xz}) \cos(nX) + \\ + (\sigma'_{xy} - \omega'_z \sigma'_{yy} + \omega'_y \sigma'_{yz}) \cos(nY) + \\ + (\sigma'_{xz} - \omega'_z \sigma'_{yz} + \omega'_y \sigma'_{zz}) \cos(nZ) = \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\alpha} [f_\xi(u_0 + \alpha u_1, v_0 + \alpha v_1, w_0 + \alpha w_1) - f_\xi] \right\}. \end{aligned} \quad (V.23)$$

Два других граничных условия могут быть получены путем циклической перестановки x , y , z .

Заметим, что если в предыдущем параграфе объемные силы можно было считать независимыми от перемещений, то в отношении поверхностных сил такой возможности, вообще говоря, нет. В частности, если поверхность тела находится под действием гидростатического давления (давления жидкости или газа), то удельная поверхностная нагрузка хотя и будет при деформации сохранять свою величину, однако, ее направление будет изменяться (поскольку гидростатическое давление всегда направлено по нормали к поверхности, на которую оно действует). Отсюда будут изменяться при деформации и ее компоненты f_x , f_y , f_z . Таким образом, правые части формул вида (V.23) считать равными нулю нельзя.

Для тел, поверхность коих находится под действием гидростатического давления

$$\begin{aligned} f_x(u_0, v_0, w_0) &= -p \cos(n^\circ, X), \\ f_y(u_0, v_0, w_0) &= -p \cos(n^\circ, Y), \\ f_z(u_0, v_0, w_0) &= -p \cos(n^\circ, Z), \end{aligned} \quad (\text{V.24})$$

$$\begin{aligned} f_x(u_0 + \alpha u_1, v_0 + \alpha v_1, w_0 + \alpha w_1) &= -p \cos(n^1, X), \\ f_y(u_0 + \alpha u_1, v_0 + \alpha v_1, w_0 + \alpha w_1) &= -p \cos(n^1, Y), \\ f_z(u_0 + \alpha u_1, v_0 + \alpha v_1, w_0 + \alpha w_1) &= -p \cos(n^1, Z), \end{aligned} \quad (\text{V.25})$$

где p — внешнее давление, а под n° и n^1 подразумеваются направления нормалей к поверхностям, ограничивающим тело в первом и втором положениях равновесия.

На основании формул (§ 2) имеем:

$$\begin{aligned} \cos(n^\circ, X) &= \frac{1}{1 + E_n^\circ} \left[\left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \cos(n, X) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u_0}{\partial y} \cos(n, Y) + \frac{\partial u_0}{\partial z} \cos(n, Z) \right], \\ \cos(n^\circ, Y) &= \frac{1}{1 + E_n^\circ} \left[\frac{\partial v_0}{\partial x} \cos(n, X) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) \cos(n, Y) + \frac{\partial v_0}{\partial z} \cos(n, Z) \right], \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

$$\begin{aligned}
\cos(n^0, Z) &= \frac{1}{1+E_n^0} \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} \cos(n, X) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial w_0}{\partial y} \cos(n, Y) + \left(1 + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) \cos(n, Z) \right], \\
\cos(n^1, X) &= \frac{1}{1+E_n^1} \left[\left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) \cos(n, X) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \cos(n, Y) + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) \cos(n, Z) \right], \\
\cos(n^1, Y) &= \frac{1}{1+E_n^1} \left[\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) \cos(n, X) + \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \alpha \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \cos(n, Y) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} + \alpha \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) \cos(n, Z) \right], \\
\cos(n^1, Z) &= \frac{1}{1+E_n^1} \left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \alpha \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) \cos(n, X) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \alpha \frac{\partial w_1}{\partial y}\right) \cos(n, Y) + \left(1 + \frac{\partial w_0}{\partial z} + \alpha \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) \cos(n, Z) \right],
\end{aligned} \tag{V.27}$$

где n означает направление нормали к поверхности, ограничивающей тело до деформации, а E_n^0 , E_n^1 суть относительные удлинения в этом направлении, соответствующие первому и второму положениям равновесия.

Предположение о малости деформаций позволяет упростить эти формулы путем пренебрежения E_n^0 , E_n^1 по сравнению с единицей.

Подставив после этого (V.26) в (V.24), а (V.27) в (V.25), получаем граничные условия задачи упругой устойчивости для тела, нагруженного гидростатическим давлением в виде:

$$\begin{aligned}
&(\sigma'_{xx} - \omega'_z \sigma'_{xy} + \omega'_y \sigma'_{xz}) \cos(n, X) + (\sigma'_{xy} - \omega'_z \sigma'_{yy} + \\
&+ \omega'_y \sigma'_{yz}) \cos(n, Y) + (\sigma'_{xz} - \omega'_z \sigma'_{yz} + \omega'_y \sigma'_{zz}) \cos(n, Z) = \\
&= -p \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \cos(n, X) + \frac{\partial u_1}{\partial y} \cos(n, Y) + \frac{\partial u_1}{\partial z} \cos(n, Z) \right],
\end{aligned} \tag{V.28}$$

учитывая далее формулы:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x} &= e'_{xx} & \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z, \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} &= \frac{1}{2} e'_{xz} + \omega'_y,\end{aligned}\quad (V.29)$$

а также принимая во внимание, что в предыдущем параграфе была установлена возможность пренебрежения параметрами e'_{ij} по сравнению с ω'_j , приходим к следующей окончательной формулировке граничных условий (V.28).

$$\begin{aligned}(\sigma'_{xx} - \omega'_z \sigma^0_{xy} + \omega'_y \sigma^0_{xz}) \cos(n, X) + \\ + (\sigma'_{xy} - \omega'_z \sigma^0_{yy} + \omega'_y \sigma^0_{yz}) \cos(n, Y) + \\ + (\sigma'_{xz} - \omega'_z \sigma^0_{yz} + \omega'_y \sigma^0_{zz}) \cos(n, Z) = \\ = p [\omega'_z \cos(n, Y) - \omega'_y \cos(n, Z)], \\ \dots\dots\dots\end{aligned}\quad (V.30)$$

§ 45. Энергетический критерий определения критических нагрузок

Указанный выше путь отыскания критических нагрузок сводит эту задачу к определению характеристических чисел системы линейных однородных дифференциальных уравнений (V.16) при граничных условиях (V.19) или (V.23). Этот путь выгоден, если ставить себе целью получение возможно более точного решения. Однако, во многих конкретных случаях последнее оказывается недостижимым и тогда более удобно решать проблему упругой устойчивости, исходя из иного критерия, который может быть получен путем следующих рассуждений.

Из формулы (III.45) и закона Гука вытекает возможность написания выражения для работы деформации упругого тела в виде:

$$\begin{aligned}A = \frac{1}{2} \int \int \int (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \\ + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dx dy dz\end{aligned}\quad (V.31)$$

(имея в виду использование этой формулы в дальнейшем лишь для случая малых деформаций, мы не делаем здесь различия между обобщенными напряжениями σ_{ij}^* и истинными напряжениями σ_{ij}). Применим (V.31) ко второму из двух смежных положений равновесия тела, то-есть к положению, которому соответствуют перемещения (V.I). При этом в отличие от предыдущих параграфов будем удерживать не только члены первого порядка малости (то-есть умноженные на α), но и члены второго порядка (то-есть умноженные на α^2).

Придерживаясь этой степени точности рассуждений (необходимость которой выяснится из дальнейшего), будем иметь:

$$A = A^0 + \alpha A^{(1)} + \alpha^2 A^{(2)}, \quad (\text{V.32})$$

где

$$\begin{aligned} A^0 &= \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx}^0 \varepsilon_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0 \varepsilon_{yy}^0 + \sigma_{zz}^0 \varepsilon_{zz}^0 + \sigma_{xy}^0 \varepsilon_{xy}^0 + \\ &\quad + \sigma_{xz}^0 \varepsilon_{xz}^0 + \sigma_{yz}^0 \varepsilon_{yz}^0) dx dy dz, \\ A^{(1)} &= \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx}^0 \varepsilon'_{xx} + \sigma_{yy}^0 \varepsilon'_{yy} + \sigma_{zz}^0 \varepsilon'_{zz} + \sigma_{xy}^0 \varepsilon'_{xy} + \\ &\quad + \sigma_{xz}^0 \varepsilon'_{xz} + \sigma_{yz}^0 \varepsilon'_{yz} + \sigma'_{xx} \varepsilon_{xx}^0 + \sigma'_{yy} \varepsilon_{yy}^0 + \\ &\quad + \sigma'_{zz} \varepsilon_{zz}^0 + \sigma'_{xy} \varepsilon_{xy}^0 + \sigma'_{xz} \varepsilon_{xz}^0 + \sigma'_{yz} \varepsilon_{yz}^0) dx dy dz, \\ A^{(2)} &= \frac{1}{2} \iiint (\sigma'_{xx} \varepsilon'_{xx} + \sigma'_{yy} \varepsilon'_{yy} + \sigma'_{zz} \varepsilon'_{zz} + \sigma'_{xy} \varepsilon'_{xy} + \\ &\quad + \sigma'_{xz} \varepsilon'_{xz} + \sigma'_{yz} \varepsilon'_{yz} + \sigma_{xx}^0 \varepsilon''_{xx} + \sigma_{yy}^0 \varepsilon''_{yy} + \\ &\quad + \sigma_{zz}^0 \varepsilon''_{zz} + \sigma_{xy}^0 \varepsilon''_{xy} + \sigma_{xz}^0 \varepsilon''_{xz} + \sigma_{yz}^0 \varepsilon''_{yz} + \sigma''_{xx} \varepsilon_{xx}^0 + \sigma''_{yy} \varepsilon_{yy}^0 + \\ &\quad + \sigma''_{zz} \varepsilon_{zz}^0 + \sigma''_{xy} \varepsilon_{xy}^0 + \sigma''_{xz} \varepsilon_{xz}^0 + \sigma''_{yz} \varepsilon_{yz}^0) dx dy dz, \quad (\text{V.33}) \end{aligned}$$

причем параметры ε_{ij}^0 , ε'_{ij} , ε''_{ij} определяются формулами (V.3), (V.4), (V.5), а параметры σ_{ij}^0 , σ'_{ij} , σ''_{ij} связаны с ними формулами вида (V.7).

Заметим, что, на основании упомянутых формул (V.7), выражения для $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ могут быть записаны следующим более простым образом:

$$\begin{aligned}
 A^{(1)} = & \int \int \int (\sigma_{xx}^0 \epsilon'_{xx} + \sigma_{yy}^0 \epsilon'_{yy} + \sigma_{zz}^0 \epsilon'_{zz} + \sigma_{xy}^0 \epsilon'_{xy} + \\
 & + \sigma_{xz}^0 \epsilon'_{xz} + \sigma_{yz}^0 \epsilon'_{yz}) dx dy dz, \\
 A^{(2)} = & \frac{1}{2} \int \int \int [\sigma'_{xx} \epsilon'_{xx} + \sigma'_{yy} \epsilon'_{yy} + \sigma'_{zz} \epsilon'_{zz} + \sigma'_{xy} \epsilon'_{xy} + \\
 & + \sigma'_{xz} \epsilon'_{xz} + \sigma'_{yz} \epsilon'_{yz} + 2 (\sigma_{xx}^0 \epsilon''_{xx} + \sigma_{yy}^0 \epsilon''_{yy} + \\
 & + \sigma_{zz}^0 \epsilon''_{zz} + \sigma_{xy}^0 \epsilon''_{xy} + \sigma_{xz}^0 \epsilon''_{xz} + \sigma_{yz}^0 \epsilon''_{yz})] dx dy dz, \quad (V.34)
 \end{aligned}$$

что нетрудно проверить, если выразить в двух последних формулах (V.33) σ'_{ij} через ϵ'_{ij} , а ϵ''_{ij} через σ''_{ij} .

Воспользуемся теперь началом возможных перемещений, причем виртуальные приращения будем давать не суммарным перемещениям (V.1), а *лишь дополнительным перемещениям* $\alpha u_1, \alpha v_1, \alpha w_1$, то-есть будем рассматривать возможные перемещения вида: $\alpha \delta u_1, \alpha \delta v_1, \alpha \delta w_1$. При этом $\delta u_1, \delta v_1, \delta w_1$ надо будет считать равными нулю в тех точках ограничивающей тело поверхности, где перемещения заданы.

В такой постановке начало возможных перемещений для второго из двух рассматриваемых положений равновесия выразится равенством:

$$\delta A = \alpha [\delta (A^{(1)}) + \alpha \delta (A^{(2)})] = \alpha [\delta (R_1) + \delta (R_2)], \quad (V.35)$$

где: $\alpha \delta R_1$ — работа объемных сил, $\alpha \delta R_2$ — работа поверхностных сил на виртуальных перемещениях $\alpha \delta u_1, \alpha \delta v_1, \alpha \delta w_1$.

(Вариация $\delta (A^0) = 0$, поскольку A^0 от u_1, v_1, w_1 не зависит.)

Работа объемных сил будет равна:

$$\alpha \delta R_1 = \alpha \int \int \int [F_x \delta u_1 + F_y \delta v_1 + F_z \delta w_1] dx dy dz,$$

где под F_x, F_y, F_z следует подразумевать значения проекций удельной объемной силы для второго положения равновесия. Однако, как было указано (§ 43), величины и направления объемных сил можно считать независимыми от де-

формации, что позволяет отождествлять F_ξ , F_η , F_ζ в формуле (V.36) с их значениями для исходного положения равновесия.

Что касается работы поверхностных сил, то она определяется выражением:

$$\alpha \delta R_2 = \alpha \iint [f_\xi \delta u_1 + f_\eta \delta v_1 + f_\zeta \delta w_1] d\Omega, \quad (\text{V.37})$$

где f_ξ , f_η , f_ζ суть составляющие удельной поверхностной нагрузки во втором положении равновесия. Их нельзя отождествлять с аналогичными составляющими для исходного положения равновесия (как уже было отмечено в предыдущем параграфе).

Вследствие этого представим формулу (V.37) в виде:

$$\delta R_2 = \delta R_2^{(1)} + \alpha \delta R_2^{(2)}, \quad (\text{V.38})$$

где:

$$\begin{aligned} \delta R_2^{(1)} = & \iint [f_\xi(u_0, v_0, w_0) \delta u_1 + f_\eta(u_0, v_0, w_0) \delta v_1 + \\ & + f_\zeta(u_0, v_0, w_0) \delta w_1] d\Omega = \iint [f_\xi^0 \delta u_1 + f_\eta^0 \delta v_1 + \\ & + f_\zeta^0 \delta w_1] d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{V.39})$$

$$\begin{aligned} \delta R_2^{(2)} = & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\alpha} \iint [(f_\xi - f_\xi^0) \delta u_1 + (f_\eta - f_\eta^0) \delta v_1 + (f_\zeta - \right. \\ & \left. - f_\zeta^0) \delta w_1] d\Omega \right\}. \end{aligned}$$

На основании вышеизложенного формула (V.35), после сокращения ее на бесконечно малый, но отличный от нуля множитель α , принимает вид:

$$\delta [A^{(1)}] + \alpha \delta [A^{(2)}] = \delta R_1 + \delta R_2^{(1)} + \alpha \delta R_2^{(2)}. \quad (\text{V.40})$$

Обратим теперь внимание на то, что

$\delta A^{(1)}$ — в силу первой из формул (V.34) есть приращение работы деформации тела, находящегося в *исходном* положении равновесия при сообщении его точкам виртуальных перемещений δu_1 , δv_1 , δw_1 ;

δR_1 — есть работа объемных сил, соответствующих *исходному* положению равновесия (на тех же возможных перемещениях);

$\delta R_2^{(1)}$ — есть работа поверхностных сил, отвечающих *исходному* положению равновесия (на тех же возможных перемещениях).

Отсюда (поскольку положение тела, характеризующееся перемещениями u_0, v_0, w_0 , является равновесным его положением) имеем равенство:

$$\delta [A^{(1)}] = \delta R_1 + \delta R_2^{(1)}, \quad (V.41)$$

которое есть не что иное, как математическая формулировка начала возможных перемещений для первого из двух рассматриваемых положений равновесия.

Но тогда из (V.40), после сокращения на α , следует, что

$$\delta [A^{(2)}] = \delta R_2^{(2)}. \quad (V.42)$$

Это последнее равенство и является вариационной формулировкой проблемы упругой устойчивости. Из него путем операций аналогичных тем, которые были использованы в III главе, могут быть выведены дифференциальные уравнения вида (V.10) и краевые условия для них. Соответственно из (V.41) может быть получена система (V.9). Мы представляем читателю самостоятельно во всем этом убедиться.

Вышеизложенные рассуждения проводились при сохранении всех встречавшихся членов за исключением тех, которые могли быть отброшены ввиду малости удлинений и сдвигов. Но в двух предыдущих параграфах было установлено, что в большинстве практических задач исходное напряженное состояние тела можно рассматривать как задачу классической теории упругости. Это позволило заменить уравнения (V.9) системой (V.11), а уравнения (V.10) системой (V.16), что равносильно принятию равенств (V.15) и пренебрежению параметрами ϵ'_{ij} по сравнению с ω'_j .

Но тогда во второй из формул (V.34) под ϵ_{ij} можно подразумевать ϵ'_{ij} , введя соответствующее изменение в формулы вида (V.7), выражающие σ'_{ij} через ϵ'_{ij} .

каковой и следует пользоваться во всех тех случаях, когда исходное напряженное состояние может рассматриваться, как задача классической теории упругости.

Формулировка проблемы упругой устойчивости, выражаемая равенством (V.42), позволяет использовать для решения конкретных задач прямые методы вариационного исчисления. Для этого надо задаться функциями u_1 , v_1 , w_1 в виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 u^I + \alpha_2 u^{II} + \alpha_3 u^{III} + \dots, \\ v_1 &= \beta_1 v^I + \beta_2 v^{II} + \beta_3 v^{III} + \dots, \\ w_1 &= \gamma_1 w^I + \gamma_2 w^{II} + \gamma_3 w^{III} + \dots, \end{aligned} \quad (V.46)$$

где: α_j , β_j , γ_j независимые от x , y , z неизвестные коэффициенты, а u^j , v^j , w^j известные функции x , y , z , равные нулю в тех точках поверхности, ограничивающей тело, где перемещения явно заданы. Выбор этих функций в значительной мере произволен: важно только, чтобы первые из членов рядов (V.46), то-есть функции u^I , v^I , w^I по виду примерно соответствовали ожидаемому характеру решения (каковой при некотором навыке всегда можно качественно предвидеть). Тогда остальные члены рядов (V.46) будут носить характер поправок.

Поскольку функции u^j , v^j , w^j известны, постольку варьирование выражений (V.46) сводится к варьированию входящих в них неопределенных коэффициентов α_j , β_j , γ_j . Подставляя (V.46) в (V.42) и требуя, чтобы это равенство выполнялось при любых значениях $\delta(\alpha_j)$, $\delta(\beta_j)$, $\delta(\gamma_j)$, мы получим систему из $3n$ -линейных однородных алгебраических уравнений (где n — число членов, удержанных в каждом из рядов (V.46) с неизвестными α_j , β_j , γ_j). Данная система будет иметь решение, отличное от нуля, лишь в том случае, если определитель, составленный из ее коэффициентов, равен нулю. Эти коэффициенты являются функциями, во-первых, от параметров, характеризующих размеры тела, во-вторых, от параметров, характеризующих его упругие вещества, и, в-третьих, от параметра внешней нагрузки.

Последний будет единственной неизвестной характеристического определителя, причем его значения, обращающие

определитель в нуль, будут соответствовать (как ясно из вышеизложенного) критическим значениям нагрузки.

Намеченный путь приближенного решения задач теории упругой устойчивости принадлежит к числу наиболее эффективных, поскольку во многих случаях удержание в рядах (V.46 только их первых членов уже дает близкий к истине результат. В то же время этот путь требует от лиц, им пользующихся, некоторого навыка, а главное понимания физической сущности решаемой задачи, так как точность рассматриваемого метода в значительной степени зависит от удачного интуитивного выбора основных аппроксимирующих функций u^I , v^I , w^I .

ГЛАВА VI О ДЕФОРМАЦИИ ГИБКИХ ТЕЛ .

§ 46. Деформация пластин

В настоящей главе будут изложены специфические упрощения, возможные при изучении деформации гибких тел. Мы начнем при этом с исследования деформации пластин, поскольку именно эта задача наиболее проста.

Рассмотрим тонкую пластину постоянной толщины δ , ограниченную контуром произвольного вида. Начало декартовой

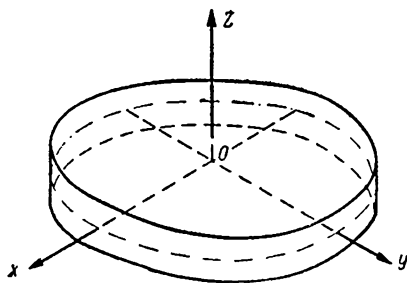


Рис. 17.

системы координат расположим в одной из точек срединного слоя пластины, направив ось Z перпендикулярно этому слою, а в качестве осей X и Y приняв две любые лежащие в его плоскости перпендикулярные прямые (рис. 17).

При построении теории деформации тонких пластин, изгибаемых поперечной нагрузкой, обычно полагают, что всякая точка пластины остается и после деформации на том же перпендикуляре к срединному слою и на таком же от него расстоянии, на каких она находилась до деформации.

Данное утверждение записывается аналитически в виде следующих трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xz} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \\ \epsilon_{yz} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right] = 0\end{aligned}\quad (\text{VI.1})$$

(причем равенство нулю ϵ_{xz} и ϵ_{yz} означает перпендикулярность к срединному слою после деформации тех волокон пластины, которые были к нему перпендикулярны до деформации, а равенство нулю ϵ_{zz} означает сохранение расстояния между произвольной точкою, лежащей на одном из таких волокон, и срединным слоем).

Попытаемся удовлетворить уравнения (VI.1) выражениями вида:

$$\begin{aligned}u &= \hat{u}(x, y) + z \vartheta(x, y), \\ v &= \hat{v}(x, y) + z \psi(x, y), \\ w &= \hat{w}(x, y) + z \chi(x, y),\end{aligned}\quad (\text{VI.2})$$

где \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} — суть перемещения точек срединного слоя (что становится ясно, если в (VI.2) положить $z=0$).

Подставляя (VI.2) в (VI.1), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right) \vartheta + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \psi + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} (1 + \chi) &= 0, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \vartheta + \left(1 + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}\right) \psi + \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} (1 + \chi) &= 0, \\ \vartheta^2 + \psi^2 + (1 + \chi)^2 &= 1,\end{aligned}\quad (\text{VI.3})$$

которые позволяют выразить ϑ , ψ и χ через перемещения срединного слоя \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} .

Рассматривая первые две из формул (VI.3) как алгебраическую систему с неизвестными ϑ и ψ , находим:

$$\vartheta = \frac{\hat{\alpha}_{31}}{\hat{\alpha}_{33}} (1 + \chi), \quad \psi = \frac{\hat{\alpha}_{32}}{\hat{\alpha}_{33}} (1 + \chi).\quad (\text{VI.4})$$

Здесь $\hat{\alpha}_{31}$, $\hat{\alpha}_{32}$, $\hat{\alpha}_{33}$ определяются из формул (I.15) при замене в них u , v , w через \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} .

Введя (VI.4) в последнее из соотношений (VI.3), будем иметь:

$$\chi = \frac{\hat{\alpha}_{33}}{\sqrt{\hat{\alpha}_{31}^2 + \hat{\alpha}_{32}^2 + \hat{\alpha}_{33}^2}} - 1, \quad (\text{VI.5})$$

но в силу таблицы II (§ 2)

$$\sqrt{\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2} = \frac{D}{1 + E_\zeta}, \quad (\text{VI.6})$$

где $D = 1 + \Delta$, а E_ζ — относительное удлинение линейного элемента пластины, который после деформации параллелен оси z . Замена в (VI.6) α_{ij} на $\hat{\alpha}_{ij}$, означающая замену u , v , w на \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} , равносильна рассмотрению D и E_ζ у срединного слоя.

Отсюда видно, что с точностью до пренебрежения удлинениями и сдвигами по сравнению с единицей

$$\sqrt{\hat{\alpha}_{31}^2 + \hat{\alpha}_{32}^2 + \hat{\alpha}_{33}^2} \approx 1 \quad (\text{VI.7})$$

и, следовательно (с той же степенью точности),

$$\begin{aligned} \vartheta &\approx \hat{\alpha}_{31} = -\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}\right) + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}, \\ \psi &\approx \hat{\alpha}_{32} = -\frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}, \\ \chi &\approx \hat{\alpha}_{33} - 1 = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

Подставив данные значения ϑ , ψ и χ в (VI.2), мы получим перемещения произвольной точки пластины, выраженные через перемещения соответствующей ей точки срединного слоя \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} (функции только x и y).

Закон изменения перемещений по толщине пластины оказывается при этом линейным.

Заметим, что предполагая удлинения и сдвиги пренебрежимо-малыми по сравнению с единицей, мы не налагали в то же время никаких ограничений на величину поворотов.

Отсюда перемещения, определяемые формулами (VI.2), (VI.8), могут быть названы перемещениями, соответствующими сильному изгибу пластины.

Подставляя эти значения перемещений в общие выражения для компонентов деформации ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} , находим:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \hat{\epsilon}_{xx} + z \chi_{xx} + z^2 \nu_{xx}, \\ \epsilon_{yy} &= \hat{\epsilon}_{yy} + z \chi_{yy} + z^2 \nu_{yy}, \\ \epsilon_{xy} &= \hat{\epsilon}_{xy} + z \chi_{xy} + z^2 \nu_{xy},\end{aligned}\quad (\text{VI.9})$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \hat{\epsilon}_{yy} &= \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \hat{\epsilon}_{xy} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}, \\ \chi_{xx} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ \chi_{yy} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \chi_{xy} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial x},\end{aligned}\quad (\text{VI.10})$$

$$\begin{aligned}\nu_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \nu_{yy} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \nu_{xy} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y}.\end{aligned}\quad (\text{VI.11})$$

При $z=0$ формулы (VI.9) дают:

$$\epsilon_{xx} = \hat{\epsilon}_{xx}, \quad \epsilon_{yy} = \hat{\epsilon}_{yy}, \quad \epsilon_{xy} = \hat{\epsilon}_{xy},$$

откуда видно, что $\hat{\epsilon}_{xx}$, $\hat{\epsilon}_{yy}$, $\hat{\epsilon}_{xy}$ — суть удлинения и сдвиг срединного слоя пластины.

Члены же $z\kappa_{xx}$, $z\kappa_{yy}$, $z\kappa_{xy}$ в формулах (VI.9) соответствуют удлинениям и сдвигам, линейно изменяющимся по толщине пластины, то-есть соответствуют изгибу и кручению пластины. Наконец, в (VI.9) присутствуют и члены, содержащие z^2 . Их наличие говорит о том, что линейному закону изменения перемещений по толщине пластины отвечает, вообще говоря, нелинейное изменение по толщине деформаций. Однако, при малых удлинениях и сдвигах поправки, вносимые в (VI.9) членами $\nu_{xx}z^2$, $\nu_{yy}z^2$, $\nu_{xy}z^2$, являются незначительными, что будет показано ниже на примере.

Учитывая это, можем написать:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \hat{\epsilon}_{xx} + z\kappa_{xx}, \\ \epsilon_{yy} &= \hat{\epsilon}_{yy} + z\kappa_{yy}, \\ \epsilon_{xy} &= \hat{\epsilon}_{xy} + z\kappa_{xy}.\end{aligned}\tag{VI.12}$$

Параметры κ_{xx} , κ_{yy} , κ_{xy} характеризуют кривизну деформированного срединного слоя пластины.

Когда углы поворота элементов пластины пренебрежимо малы по сравнению с единицей, выведенные формулы допускают существенное упрощение. Именно — в этом частном случае производные $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}$ следует считать (по соображениям, изложенным в § 14) величинами одного порядка с удлинениями срединной поверхности $\hat{\epsilon}_{xx}$, $\hat{\epsilon}_{yy}$. Кроме того, в этом случае следует считать, что производные $\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}$, $\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}$ являются величинами одного порядка со сдвигом $\hat{\epsilon}_{xy}$. Последнее вытекает из того, что при слабых искривлениях пластина, будучи в своей плоскости массивным телом, не допускает относительных поворотов своих элементов вокруг оси z , значительных по сравнению со сдвигами.

По перечисленным соображениям в формулах (VI.10) можно отбросить (имея ввиду частный случай, когда углы поворота элементов пластины малы по сравнению с единицей) все нелинейные члены, содержащие производные перемещений \hat{u} и \hat{v} .

Выполняя намеченное упрощение, приходим к выражениям:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \right)^2, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}, \\ \kappa_{xx} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \approx - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2}, & \kappa_{yy} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \approx - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2}, \\ \kappa_{xy} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \approx - 2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (\text{VI.13})$$

Подстановка (VI.13) в (VI.12) дает формулы для деформаций пластины, предложенные Т. Карманом. Этой степени точности рассуждений соответствует определение перемещений точек пластины выражениями:

$$u = \hat{u} - z \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}, \quad v = \hat{v} - z \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}, \quad w = \hat{w}. \quad (\text{VI.14})$$

Дальнейшее мыслимое упрощение формул (VI.13) заключается в пренебрежении в них всеми их нелинейными членами. В итоге этой операции получаются формулы классической теории пластин. Из вышеизложенного видно, что для возможности использования последней теории необходимо, вообще говоря, чтобы квадраты поворотов

$$\omega_x \approx \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}, \quad \omega_y \approx - \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}$$

были пренебрежимо малы по сравнению с удлинениями и сдвигами. Таким образом классическая теория пригодна только для описания деформации слабо изогнутых пластин. Сильный изгиб пластин, как уже упоминалось, описывается формулами (VI. 10), (VI.8), (VI.12). Формулы Кармана (VI.13) относятся к промежуточному случаю.

§ 47. Двухмерная деформация бесконечно длинной полосы

Предположим, что пластина имеет вид бесконечно длинной полосы с параллельными прямыми краями, причем деформацию ее будем считать независимой от координаты y , принимая, кроме того, что перемещение $v = 0$.

Сформулированная таким образом плоская задача по сути дела эквивалентна задаче о изгибе балки. Применительно к ней формулы предыдущего параграфа дают:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0, \\ \varepsilon_{xx} = \hat{\varepsilon}_{xx} + z \kappa_{xx} + z^2 \nu_{xx}, \quad (\text{VI.15})$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{xx} = \frac{d\hat{u}}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\hat{u}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{w}}{dx} \right)^2 \right], \\ \kappa_{xx} = \left(1 + \frac{d\hat{u}}{dx} \right) \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{d\hat{w}}{dx} \frac{d\chi}{dx}, \\ \nu_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 \right], \quad (\text{VI.16}) \\ \vartheta = -\frac{d\hat{w}}{dx}, \quad \chi = \frac{d\hat{u}}{dx}.$$

Так как производные $\frac{d\hat{u}}{dz}$, $\frac{d\hat{w}}{dz}$ считаются величинами существенно большими по сравнению с удлинением $\hat{\varepsilon}_{xx}$, то правая часть первой из формул (VI.16) должна неизбежно являться малой разностью входящих в нее членов. Отсюда при определении зависимости между $\frac{d\hat{u}}{dz}$ и $\frac{d\hat{w}}{dz}$ можно приближенно положить $\hat{\varepsilon}_{xx} = 0$.

Тогда

$$1 + \frac{d\hat{u}}{dx} = \sqrt{1 - \left(\frac{d\hat{w}}{dx} \right)^2}, \quad (\text{VI.17})$$

откуда

$$\chi = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\hat{w}}{dx} \right)^2}} \frac{d\hat{w}}{dx} \frac{d^2\hat{w}}{dx^2}, \\ \kappa_{xx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\hat{w}}{dx} \right)^2}} \frac{d^2\hat{w}}{dx^2}, \quad (\text{VI.18}) \\ \nu_{xx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\hat{w}}{dx} \right)^2}} \frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{w}}{dx} \right)^2.$$

Подставляя эти значения χ_{xx} , ν_{xx} в последнюю из формул (VI. 15), находим:

$$\varepsilon_{xx} = \hat{\varepsilon}_{xx} + z \chi_{xx} (1 - \frac{1}{2} z \chi_{xx}). \quad (\text{VI.19})$$

Поскольку $z\chi_{xx}$ есть величина порядка удлинений, которые предполагаются пренебрежимо малыми по сравнению с единицей, постольку

$$\varepsilon_{xx} \approx \hat{\varepsilon}_{xx} + z \chi_{xx} = \hat{\varepsilon}_{xx} - \frac{z}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\hat{w}}{dx}\right)^2}} \frac{d^2\hat{w}}{dx^2}. \quad (\text{VI.20})$$

Остается выяснить смысл параметра χ_{xx} .

Обратимся с этой целью к рис. 18.

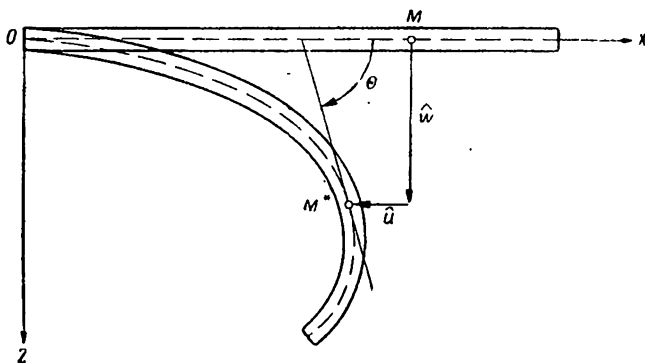


Рис. 18.

Декартова координата x , определяющая положение точки на срединном слое пластины до деформации, после деформации становится длиной дуги той цилиндрической поверхности, в которую превращается срединный слой после деформации. Отсюда ясно, что

$$\frac{d\hat{w}}{dx} = \sin \theta,$$

но тогда

$$\chi_{xx} = - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\hat{w}}{dx}\right)^2}} \frac{d^2\hat{w}}{dx^2} = - \frac{d\theta}{dx} = - \frac{d\theta}{ds}, \quad (\text{VI.21})$$

то-есть χ_{xx} суть кривизна деформированного в цилиндрическую поверхность срединного слоя пластины. Сопоставляя полученный результат с (VI.20), видим, что наши выводы вполне совпадают с обычной теорией плоской деформации гибких, первоначально прямых стержней.

В заключение параграфа следует обратить внимание читателя на тот факт, что, принимая равенство $\hat{\epsilon}_{xx} = 0$ при упрощении формул для χ_{xx} , мы тем не менее сохранили $\hat{\epsilon}_{xx}$ в формуле (VI. 20), поскольку первый член упомянутой формулы может быть в некоторых случаях не менее существенным, чем второй. На первый взгляд здесь допускается противоречие. Фактически, однако, его нет, если понимать равенство $\hat{\epsilon}_{xx} = 0$ лишь как использование того обстоятельства, что члены, входящие в $\hat{\epsilon}_{xx}$, образуют малую разность больших величин, а члены входящие в χ_{xx} , не являются малой разностью. Таким образом равенство $\epsilon_{xx} = 0$ не следует понимать буквально. В дальнейшем, при изложении общей теории деформации стержней, мы не раз столкнемся с подобным приемом.

§ 48. Деформация оболочек

Теория деформации тонких оболочек может быть построена по аналогии с теорией деформации пластин, поскольку оболочки суть пластины, срединный слой которых в недеформированном положении является не плоскостью, а кривой поверхностью.

Будем определять положение точек на срединной поверхности оболочки гауссовыми криволинейными координатами этой поверхности α_1 и α_2 (то есть такими криволинейными координатами, линии которых являются линиями главной кривизны срединной поверхности). Соответствующие этой криволинейной системе коэффициенты Ляме обозначим через A_1 и A_2 , а главные радиусы кривизны — через R_1 и R_2 .

Исходя из данной двумерной ортогональной системы криволинейных координат, построим трехмерную систему. Для этого опустим из произвольной точки M , не лежащей на срединной поверхности, перпендикуляр на эту поверхность. Тогда положение рассматриваемой точки в пространстве бу-

дет фиксировано тремя параметрами: координатами α_1 и α_2 основания упомянутого перпендикуляра и его длиной z . При этом z условимся считать положительным, если точка лежит со стороны центров отрицательной кривизны срединной поверхности (со стороны выпуклости срединной поверхности, если ее точки суть эллиптического типа). Если наоборот, то z будем считать отрицательным. Пространственная система криволинейных координат α_1, α_2, z , как ясно из способа ее построения, ортогональна. Ее коэффициенты Ляме будут равны:

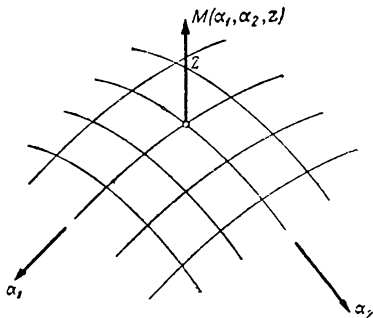


Рис. 19.

$$H_1 = A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right), \quad H_2 = A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right), \quad H_3 = 1, \quad (\text{VI.22})$$

причем A_1, A_2, R_1, R_2 (являющиеся функциями только α_1 и α_2) должны подчиняться известным из теории поверхностей соотношениям Гаусса — Кодаци.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) &= - \frac{A_1 A_2}{R_1^2 R_2}. \end{aligned} \quad (\text{VI.23})$$

Подставляя в формулы (I.122) указанные выше значения коэффициентов Ляме и учитывая при этом соотношения (VI.23), будем иметь:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1} \right), \\ e_{22} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{w}{R_2} \right), \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{VI.24})$$

$$\begin{aligned}
e_{12} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \right) + \\
&\quad + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \right) \\
e_{1z} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right), \\
e_{2z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right).
\end{aligned}$$

Здесь u, v, w — суть перемещения произвольной точки по направлениям линий α_1 и α_2 и по нормали к срединному слою.

Введя далее коэффициенты Ляме (VI.22) в (I.124), приходим к следующим выражениям для составляющих вектора $\vec{\omega}$ по тем же направлениям.

$$\begin{aligned}
2\omega_1 &= -\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right), \\
2\omega_2 &= +\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right), \\
2\omega_z &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \right) - \\
&\quad - \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \right).
\end{aligned} \tag{VI.25}$$

Теперь формулы (I.125) дают возможность написать развернутые выражения для компонентов деформации оболочки в криволинейной системе α_1, α_2, z . При этом следует учесть, что аналогия, существующая между пластинами и оболочками, позволяет, при определении перемещений последних, воспользоваться такими же упрощениями, какие были использованы при исследовании деформации пластин (§ 46).

Предположение о том, что прямые волокна, нормальные к срединному слою оболочки до деформации, остаются прямыми и нормальными к срединному слою и после де-

формации, аналитически записывается в виде следующих двух равенств:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1z} = & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \right) \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.26})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2z} = & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{v}{R_2} \right) + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{w}{R_2} \right) \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

а предположение, что эти нормальные волокна не получают удлинений, сводится к равенству:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] = 0. \quad (\text{VI.27})$$

Попытаемся удовлетворить систему из трех уравнений (VI.26), (VI.27), взяв перемещения u , v , w в виде:

$$\begin{aligned} u &= \hat{u}(\alpha_1, \alpha_2) + z\vartheta(\alpha_1, \alpha_2), \\ v &= \hat{v}(\alpha_1, \alpha_2) + z\psi(\alpha_1, \alpha_2), \\ w &= \hat{w}(\alpha_1, \alpha_2) + z\chi(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (\text{VI.28})$$

Здесь \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} суть перемещения срединной поверхности оболочки (что вытекает из формул (VI.28) при $z=0$).

Подстановка (VI.28) в (VI.27), (VI.26) приводит к пяти равенствам, два из коих будут, однако, следствием одного

из трех остальных. Поэтому независимы будут только три равенства, а именно:

$$\begin{aligned} \vartheta^2 + \psi^2 + (1 + \chi)^2 &= 1, & (VI.29) \\ (1 + \chi) \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \alpha_1} - \frac{\hat{u}}{R_1} \right) + \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \hat{v} \right) \psi + \\ + \left(1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \hat{v} + \frac{\hat{w}}{R_1} \right) \vartheta &= 0, \\ (1 + \chi) \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \alpha_2} - \frac{\hat{v}}{R_2} \right) + \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \hat{u} \right) \vartheta + \\ + \left(1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \hat{u} + \frac{\hat{w}}{R_2} \right) \psi &= 0. \end{aligned}$$

На основании двух последних из этих трех уравнений имеем:

$$\vartheta = \frac{\hat{\alpha}_{31}}{\hat{\alpha}_{33}} (1 + \chi), \quad \psi = \frac{\hat{\alpha}_{32}}{\hat{\alpha}_{33}} (1 + \chi), \quad (VI.30)$$

где в данном случае

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{31} &= -\hat{e}_{13} (1 + \hat{e}_{22}) + \hat{e}_{23} \hat{e}_{12}, \\ \hat{\alpha}_{32} &= -\hat{e}_{23} (1 + \hat{e}_{11}) + \hat{e}_{13} \hat{e}_{21}, \\ \hat{\alpha}_{33} &= (1 + \hat{e}_{11}) (1 + \hat{e}_{22}) - \hat{e}_{12} \hat{e}_{21}, \end{aligned} \quad (VI.31)$$

причем

$$\begin{aligned} \hat{e}_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \hat{v} + \frac{\hat{w}}{R_1}, \\ \hat{e}_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \hat{u} + \frac{\hat{w}}{R_2}, \\ \hat{e}_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \hat{u}, \\ \hat{e}_{13} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \alpha_1} - \frac{\hat{u}}{R_1}, \\ \hat{e}_{21} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \hat{v}, \\ \hat{e}_{23} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \alpha_2} - \frac{\hat{v}}{R_2}. \end{aligned} \quad (VI.32)$$

Подставляя (VI.30) в первое из равенств (VI.29), приходим к следующему выражению для χ

$$\chi = \frac{\hat{\alpha}_{33}}{\sqrt{\hat{\alpha}_{31}^2 + \hat{\alpha}_{32}^2 + \hat{\alpha}_{33}^2}} - 1. \quad (\text{VI.33})$$

Здесь (по соображениям, аналогичным § 46)

$$\hat{\alpha}_{31}^2 + \hat{\alpha}_{32}^2 + \hat{\alpha}_{33}^2 \approx 1 \quad (\text{VI.34})$$

с точностью до пренебрежения удлинениями по сравнению с единицей.

Отсюда:

$$\chi \approx \hat{\alpha}_{33} - 1 = \hat{e}_{11} + \hat{e}_{22} + e_{11}\hat{e}_{22} - \hat{e}_{12}\hat{e}_{21}. \quad (\text{VI.35})$$

Вводя это значение χ в (VI.30), находим:

$$\begin{aligned} \vartheta &= -\hat{e}_{13}(1 + \hat{e}_{22}) + \hat{e}_{23}\hat{e}_{12}, \\ \psi &= -\hat{e}_{23}(1 + \hat{e}_{11}) + \hat{e}_{13}\hat{e}_{21}. \end{aligned} \quad (\text{VI.36})$$

Формулы (VI.35), (VI.36) и (VI.28) определяют перемещения произвольной точки оболочки через перемещения соответствующей ей точки срединной поверхности. Поскольку выше не было сделано никаких пренебрежений, кроме тех, которые следуют из предположения о малости удлинений и сдвигов, постольку полученный результат действителен при произвольных относительных поворотах оболочки, лишь бы они были совместны с предположением о малости деформаций. Иначе говоря, выведенные формулы относятся к случаю сильного изгиба оболочек.

Остановимся далее на определении удлинений и сдвигов в слое оболочки, удаленном от срединного на расстояние z . Соответствующие компоненты деформации, после подстановки в формулы (I.125) коэффициентов Ляме (VI.22), принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)^2} \left[\left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \right)^2 + \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{w}{R_2} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)^2} \left[\left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \right)^2 + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{w}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right)^2 \right], \quad (\text{VI.37}) \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \right) + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \right. \\
&- \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \left. \right) + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left[\left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \right. \right. \\
&+ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1} \left. \right) \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v \right) + \\
&+ \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u \right) \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u + \right. \\
&+ \left. \frac{w}{R_2} \right) + \left. \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u}{R_1} \right) \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{v}{R_2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Так как $-\delta/2 \leq z \leq \delta/2$, то для *тонких* оболочек можно в написанных формулах полагать:

$$1 + \frac{z}{R_1} \approx 1 + \frac{z}{R_2} \approx 1. \quad (\text{VI.38})$$

Используя это упрощение и подставляя затем в (VI.37) перемещения u , v , w в виде (VI.28), будем иметь:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \hat{\varepsilon}_{11} + z\kappa_{11} + z^2\nu_{11}, \\
\varepsilon_{22} &= \hat{\varepsilon}_{22} + z\kappa_{22} + z^2\nu_{22}, \\
\varepsilon_{12} &= \hat{\varepsilon}_{12} + z\kappa_{12} + z^2\nu_{12}.
\end{aligned} \quad (\text{VI.39})$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_{11}$, $\hat{\varepsilon}_{22}$, $\hat{\varepsilon}_{12}$ суть удлинения и сдвиг срединной поверхности оболочки.

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{11} &= \hat{\varepsilon}_{11} + 1/2 [\hat{\varepsilon}_{11}^2 + \hat{\varepsilon}_{12}^2 + \hat{\varepsilon}_{13}^2], \\
\hat{\varepsilon}_{22} &= \hat{\varepsilon}_{22} + 1/2 [\hat{\varepsilon}_{21}^2 + \hat{\varepsilon}_{22}^2 + \hat{\varepsilon}_{23}^2], \\
\hat{\varepsilon}_{12} &= \hat{\varepsilon}_{12} + \hat{\varepsilon}_{21} + \hat{\varepsilon}_{11}\hat{\varepsilon}_{21} + \hat{\varepsilon}_{22}\hat{\varepsilon}_{12} + \hat{\varepsilon}_{13}\hat{\varepsilon}_{23},
\end{aligned} \quad (\text{VI.40})$$

а κ_{11} , κ_{22} , κ_{12} суть параметры, характеризующие изменение кривизны срединной поверхности, обусловленное деформацией:

$$\begin{aligned}\kappa_{11} &= (1 + \hat{\epsilon}_{11}) k_{11} + \hat{\epsilon}_{12} k_{12} + \hat{\epsilon}_{13} k_{13}, \\ \kappa_{22} &= (1 + \hat{\epsilon}_{22}) k_{22} + \hat{\epsilon}_{21} k_{21} + \hat{\epsilon}_{23} k_{23}, \\ \kappa_{12} &= k_{21} (1 + \hat{\epsilon}_{11}) + k_{12} (1 + \hat{\epsilon}_{22}) + k_{11} \hat{\epsilon}_{21} + \\ &\quad + k_{22} \hat{\epsilon}_{12} + k_{13} \hat{\epsilon}_{23} + k_{23} \hat{\epsilon}_{13},\end{aligned}\quad (\text{VI.41})$$

причем

$$\begin{aligned}k_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi + \frac{\chi}{R_1}, \\ k_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \vartheta + \frac{\chi}{R_2}, \\ k_{21} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi, \quad k_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \vartheta, \\ k_{13} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} - \frac{\vartheta}{R_1}, \quad k_{23} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_2} - \frac{\psi}{R_2}.\end{aligned}\quad (\text{VI.42})$$

Что касается выражений для ν_{11} , ν_{22} , ν_{12} , то нет необходимости их приводить, так как соответствующие члены формул (VI.39) при малых удлинениях и сдвигах всегда оказываются несущественными (аналогично тому, как это было в теории деформации пластин).

Изложенное выше исчерпывает теорию деформации тонких оболочек при малых деформациях и произвольных поворотах. Удерживая в полученных формулах только члены линейные относительно перемещений и их производных, мы приходим к обычной теории деформации тонких оболочек. Соответственно из вышеприведенных формул может быть выведена и теория деформации оболочек, аналогичная (по своей точности) теории пластин Т. Кармана.

§ 49. О сущности допущений Кирхгофа

Выясним более подробно математический фундамент допущений, которые были положены выше в основу построения теории деформации пластин и оболочек,

В связи с этим будем искать точное решение задачи о деформации пластины, разлагая компоненты перемещения в степенные ряды:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, 0) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 z^2 + \dots, \\ v &= v(x, y, 0) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_0 z^2 + \dots, \quad (\text{VI.43}) \\ w &= w(x, y, 0) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_0 z^2 + \dots \end{aligned}$$

Если в каждом из данных рядов удерживать только два первых члена и ввести кроме того обозначения:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \hat{u}, \quad v(x, y, 0) = \hat{v}, \quad w(x, y, 0) = \hat{w} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 &= \vartheta, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = \psi, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 = \chi, \end{aligned} \quad (\text{VI.44})$$

то получатся формулы (VI.2).

Таким образом, можно констатировать, что допущения Кирхгофа прежде всего утверждают достаточность сохранения в рядах (VI.43) только двух первых членов (при решении задачи о деформации тонкой пластины). Однако, кроме этого, упомянутые допущения устанавливают связь между перемещениями срединного слоя пластины \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} и параметрами ϑ , ψ , χ , позволяющую выразить вторые через первые.

Чтобы выяснить природу данной связи, вспомним, что согласно таблице 1 (§ 2),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon_{zz}}} \frac{\partial u}{\partial z} &= \cos(X, i_3), \quad \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon_{zz}}} \frac{\partial v}{\partial z} = \cos(Y, i_3), \\ \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon_{zz}}} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \cos(Z, i_3). \end{aligned} \quad (\text{VI.45})$$

Здесь в рассматриваемом случае i_3 есть единичный вектор, касательный к волокну пластины, которое до деформации было прямым и перпендикулярным к срединному слою.

Из (VI.44) и (VI.45) следует, что:

$$\begin{aligned}\vartheta &= \sqrt{1 + 2\hat{\epsilon}_{zz}} \cos(X, \hat{i}_3), \quad \psi = \sqrt{1 + 2\hat{\epsilon}_{zz}} \cos(Y, \hat{i}_3), \\ 1 + \chi &= \sqrt{1 + 2\hat{\epsilon}_{zz}} \cos(Z, \hat{i}_3),\end{aligned}\quad (\text{VI.46})$$

где \hat{i}_3 — направление касательной к упомянутому волокну в точке его пересечения со срединным слоем ϵ_{zz} — удлинение данного волокна в той же точке.

Формулы (VI.46) говорят, что если пренебречь удлинением по сравнению с единицей, то параметры ϑ , ψ , $1 + \chi$ могут быть отождествлены с косинусами углов, образуемых после деформации волокном пластины, которое до деформации было перпендикулярно срединному слою. Но в задаче об изгибе пластины углы поворота всегда велики по сравнению со сдвигами.

Это позволяет при определении единичного вектора \hat{i}_3 (то есть при определении параметров ϑ , ψ , χ) пренебрегать величиной тех сдвигов, которые влияют на направление вышеуказанного вектора.

Иначе говоря, при отыскании ϑ , ψ , χ можно пользоваться уравнениями:

$$\epsilon_{xy} \approx \epsilon_{yz} \approx 0. \quad (\text{VI.47})$$

Пренебрегая далее в (VI.46) $\hat{\epsilon}_{zz}$ по сравнению с единицей, и складывая эти три равенства (после предварительного возведения их в квадрат), будем иметь:

$$\vartheta^2 + \psi^2 + (1 + \chi)^2 = 1,$$

что, как известно (§ 46), эквивалентно равенству

$$\hat{\epsilon}_{zz} = 0. \quad (\text{VI.48})$$

Таким образом последнее равенство может быть истолковано как пренебрежение удлинением волокна, перпендикулярного к срединному слою пластины, при определении его направления после деформации.

Вышеизложенные рассуждения подразделяются на два этапа.

В первом была установлена связь между основными допущениями теории пластин и разложениями перемещений в ряды по степеням расстояния точки пластины от ее срединного слоя. Это позволило выяснить зависимость между ϑ , ψ , χ и производными от перемещений u , v , w по z . При этом оказалось, что ϑ , ψ , χ характеризуют направление после деформации волокна пластины, первоначально перпендикулярного срединному слою.

Вторым этапом явилось пренебрежение деформациями, влияющими на направление упомянутого волокна, по сравнению с поворотами, что привело нас к равенствам (VI.47), (VI.48).

В § 46 мы шли обратным путем, а именно постулировали уравнения (VI.47), (VI.48), из чего немедленно вытекало все остальное. Этот путь более краток, но менее ясен, так как написав сразу (VI.47), (VI.48), мы не получаем представления, что и по сравнению с чем в данном случае пренебрегается.

Будучи поняты как математически точные равенства (VI.47), (VI.48) — абсурдны, ибо приводят, вообще говоря, к противоречиям при формулировке условий равновесия элемента пластины.

Будучи же истолкованы лишь как пренебрежение некоторыми из компонентов деформаций при определении направления орта \hat{i}_3 , равенства (VI.47), (VI.48) становятся на свое место, причем сразу же оказываются более ясными и те условия, при соблюдении которых этими равенствами можно пользоваться.

Разумеется, вышеизложенные рассуждения, проведенные применительно к пластинам, могут быть полностью перенесены и на оболочки.

Из сказанного вытекают следующие выводы.

а) Гипотеза Кирхгофа в теории деформации пластин и оболочек покоится на упрощениях типа пренебрежения удлинениями и сдвигами по сравнению с поворотами при определении направления волокон деформированного тела.

Поскольку тонкие пластины и оболочки суть гибкие тела, при деформации коих углы поворота обычно велики по

сравнению с удлинениями и сдвигами, принятие этой гипотезы обычно вносит в расчет оболочек и пластин лишь незначительную погрешность. Отсюда ясно, что упрощение теории пластин, предложенное Кирхгофом и затем перенесенное Лявом на оболочки, вряд ли правильно называть (как это обычно делают) гипотезой, ибо по существу речь идет о чисто геометрических пренебрежениях, всегда допускающих оценку своей погрешности.

б) „Гипотеза“ Кирхгофа не включает в себя никаких предположений о свойствах материалов, из коих изготовлены пластины и оболочки. Поэтому использование теории, основанной на данной „гипотезе“, с равным успехом возможно как для тел, следующих закону Гука, так и для тел, ему не следующих. Важно только, чтобы выполнялось основное условие применимости рассматриваемых допущений, а именно — малость соответствующих деформаций по сравнению с углами поворота.

Отмеченное обстоятельство еще более подчеркивает негипотетический характер упрощений, принимаемых при построении теории пластин и оболочек.

Кстати, когда говорят о применении „гипотезы“ плоских сечений к балкам, работающим в упруго-пластической области деформаций, обычно считают необходимым сослаться на опыт, который эту „гипотезу“ в данном случае подтверждает. Из вышеизложенного видно, что постановку специальных опытов для проверки „гипотезы“ плоских сечений в области упруго-пластического изгиба следует отнести за счет недостаточно ясного понимания существа данной гипотезы.

§ 50. Деформация стержней (первое приближение)

Разобравшись в теории деформации тонких пластин и оболочек, используем теперь аналогичные приемы для построения теории деформации тонких стержней. Как выяснится, эта задача несколько сложнее, чем две предыдущие, почему и рассматривается после них.

Пусть имеется тонкий призматический стержень произвольного поперечного сечения (рис. 20).

В центре тяжести площади одного из его торцов расположим начало системы XYZ , направив при этом ось Z вдоль

стержня, а в качестве осей X и Y взяв главные оси инерции площади поперечного сечения стержня. *

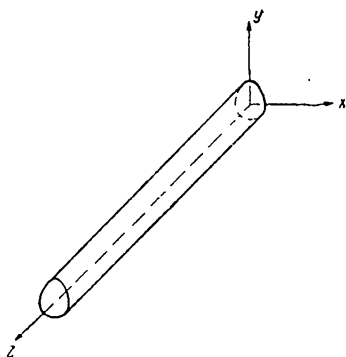


Рис. 20.

В результате деформации произвольная точка стержня получит перемещения $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$. При этом поскольку в рассматриваемой задаче область изменения координат x и y существенно мала по сравнению с областью изменения координаты z , постольку можно предположить, что, разложив перемещения в ряды по степеням x и y , мы получим ряды, достаточно хорошо сходящиеся в интересующих нас пределах.

Эту мысль, ценность которой выше была показана при рассмотрении деформации пластин и оболочек, мы положим в основу теории деформации стержней.

Итак — запишем перемещения произвольной точки стержня в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \hat{u}(z) + x\vartheta_1(z) + \\ &\quad + y\vartheta_2(z) + \bar{u}(x, y, z), \\ v(x, y, z) &= \hat{v}(z) + x\psi_1(z) + \\ &\quad + y\psi_2(z) + \bar{v}(x, y, z), \\ w(x, y, z) &= \hat{w}(z) + x\chi_1(z) + \\ &\quad + y\chi_2(z) + \bar{w}(x, y, z), \end{aligned} \quad (\text{VI.49})$$

* Заметим, что в пределах настоящей главы мы могли бы направлять оси и иначе, чем указано выше. Соответственно не было бы обязательным и расположение начала декартовой системы именно в центре тяжести площади торца стержня. Однако, поскольку при рассмотрении условий равновесия объемного элемента стержня принятое выше направление осей X и Y и положение начала координат обладают определенными преимуществами — мы вводим их уже в этой главе.

Здесь

$$\begin{aligned}\hat{u} &= u(0, 0, z), \quad \hat{v} = v(0, 0, z), \\ \hat{w} &= w(0, 0, z)\end{aligned}\quad (\text{VI.50})$$

$$\vartheta_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0, \quad \psi_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0, \quad \chi_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0, \quad (\text{VI.51})$$

$$\vartheta_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0, \quad \psi_2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0, \quad \chi_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0,$$

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 + xy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_0 + \dots, \\ \bar{v} &= \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_0 + xy \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)_0 + \dots, \\ \bar{w} &= \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 + xy \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 + \dots,\end{aligned}\quad (\text{VI.52})$$

Из последних формул видно, что

а) \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} суть перемещения точек, лежащих на оси стержня.

б) $1 + \vartheta_1$, ϑ_2 , ψ_1 , $1 + \psi_2$, χ_1 , χ_2 суть величины порядка косинусов тех углов, которые после деформации образуют с осями X , Y , Z волокна стержня, первоначально параллельные осям X и Y (табл. 1, § 2).

Эти параметры (все или хотя бы некоторые из них) считаются в дальнейшем существенно превосходящими удлинения и сдвиги.

в) \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} объединяют в себе все члены степенных рядов для перемещений, начиная с четвертых.

Отсюда ясно, что при $x = 0$, $y = 0$

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = 0. \quad (\text{VI.53})$$

В дальнейшем \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} будут рассматриваться как поправочные члены формул (VI.49), весьма малые по сравнению

с остальными членами этих формул. Если данными членами пренебречь, то выражения (VI.49) напишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= \hat{u} + x\vartheta_1 + y\vartheta_2, \\ v &= \hat{v} + x\psi_1 + y\psi_2, \\ w &= \hat{w} + x\chi_1 + y\chi_2, \end{aligned} \quad (\text{VI.54})$$

причем очевидно, что принятие перемещений стержня в такой форме соответствует той степени точности рассуждений, какая принималась выше при построении теории деформаций пластин и оболочек.

Разница между (VI.2) и (VI.54) состоит лишь в том, что в первом случае разложения в ряды ведутся по одной координате, а во втором — по двум координатам, поскольку у пластин лишь координата z меняется в узких пределах, тогда как у стержней этим свойством обладают две координаты (x и y). Что касается качества удержанных членов, то в этом отношении формулы (VI.2) и (VI.54) вполне аналогичны, так как в обоих случаях ряды обрываются на членах, линейно зависящих от тех координат, по которым выполняются разложения.

Но если для пластин и оболочек точность формул (VI.2) и является вполне достаточной, то для стержней формулы (VI.54) оказываются, вообще говоря, неприемлемыми, так как, основываясь на них, нельзя подчинить решение существенному граничному условию. Поэтому при исследовании деформации стержней приходится принимать перемещения не в форме (VI.54), а в более сложном виде (VI.49), в чем и заключается принципиальное отличие теории деформации стержней от теории деформации оболочек и пластин. Однако, в целях достижения большей ясности, мы начнем с того, что предположим формулы (VI.54) достаточными. Проведя затем все выкладки до конца, мы убедимся, что сохранили не все необходимое для решения задачи. После этого будут введены нужные поправки, что не составит особых затруднений, поскольку читатель будет уже вполне в курсе основной канвы рассуждений.

Принимая формулы (VI.54) и подставляя их в выражения для компонентов деформации [то есть в формулы (I.22)],

будем иметь:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \hat{\varepsilon}_{xx}, \quad \varepsilon_{yy} = \hat{\varepsilon}_{yy}, \quad \varepsilon_{xy} = \hat{\varepsilon}_{xy}, \\ \varepsilon_{xz} &= \hat{\varepsilon}_{xz} + x \frac{d\hat{\varepsilon}_{xx}}{dz} + y k_{xy}, \\ \varepsilon_{yz} &= \hat{\varepsilon}_{yz} + y \frac{d\hat{\varepsilon}_{yy}}{dz} + x \left(\frac{d\hat{\varepsilon}_{xy}}{dz} - k_{xy} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \hat{\varepsilon}_{zz} + x k_{xx} + y k_{yy} + x^2 v_{xx} + y^2 v_{yy} + xy v_{xy}, \end{aligned} \quad (\text{VI.55})$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{xx} &= \vartheta_1 + \frac{1}{2} (\vartheta_1^2 + \psi_1^2 + \chi_1^2), \\ \hat{\varepsilon}_{yy} &= \psi_2 + \frac{1}{2} (\vartheta_2^2 + \psi_2^2 + \chi_2^2), \\ \hat{\varepsilon}_{xy} &= \vartheta_2 (1 + \vartheta_1) + \psi_1 (1 + \psi_2) + \chi_1 \chi_2, \\ \hat{\varepsilon}_{xz} &= (1 + \vartheta_1) \frac{d\hat{u}}{dz} + \psi_1 \frac{d\hat{v}}{dz} + \chi_1 \left(1 + \frac{d\hat{w}}{dz} \right), \\ \hat{\varepsilon}_{yz} &= \vartheta_2 \frac{d\hat{u}}{dz} + (1 + \psi_2) \frac{d\hat{v}}{dz} + \chi_2 \left(1 + \frac{d\hat{w}}{dz} \right), \\ \hat{\varepsilon}_{zz} &= \frac{d\hat{w}}{dz} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\hat{u}}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{v}}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{w}}{dz} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.56})$$

суть значения компонентов деформации на оси стержня, являющиеся функциями только координаты z .

Величины k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} также зависят лишь от z , определяясь при этом выражениями:

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \frac{d\hat{u}}{dz} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z} + \frac{d\hat{v}}{dz} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \left(1 + \frac{d\hat{w}}{dz} \right) \frac{d\chi_1}{dz}, \\ k_{yy} &= \frac{d\hat{u}}{dz} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial z} + \frac{d\hat{v}}{dz} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \left(1 + \frac{d\hat{w}}{dz} \right) \frac{d\chi_2}{dz}, \\ k_{xy} &= (1 + \vartheta_1) \frac{d\vartheta_2}{dz} + \psi_1 \frac{d\psi_2}{dz} + \chi_1 \frac{d\chi_2}{dz}. \end{aligned} \quad (\text{VI.57})$$

Что касается коэффициентов ν_{xx} , ν_{yy} , ν_{xy} , то они будут равны

$$\begin{aligned}\nu_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\vartheta_1}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\psi_1}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\chi_1}{dz} \right)^2 \right], \\ \nu_{yy} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\vartheta_2}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\psi_2}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\chi_2}{dz} \right)^2 \right], \\ \nu_{xy} &= \frac{d\vartheta_1}{dz} \frac{d\vartheta_2}{dz} + \frac{d\psi_1}{dz} \frac{d\psi_2}{dz} + \frac{d\chi_1}{dz} \frac{d\chi_2}{dz}.\end{aligned}\quad (\text{VI.58})$$

Как уже было указано, параметры ϑ_1 , ϑ_2 , ψ_1 , ψ_2 , χ_1 , χ_2 все (или, по крайней мере, некоторые из них) надо считать величинами, существенно превосходящими компоненты деформации, поскольку в задаче о изгибе тонкого стержня все, или хотя бы некоторые из углов поворота, велики по сравнению с удлинениями и сдвигами. Этим же свойством и по той же причине будут обладать и $\frac{d\hat{u}}{dz}$, $\frac{d\hat{v}}{dz}$, $\frac{d\hat{w}}{dz}$ (таблица 1, § 2).

Отсюда вытекает, что правые части формул (VI. 56) должны представлять собою малые разности входящих в них членов. Тем самым, при определении девяти перечисленных выше параметров допустимо пользоваться шестью равенствами:

$$\hat{\epsilon}_{xx} = \hat{\epsilon}_{yy} = \hat{\epsilon}_{xy} = \hat{\epsilon}_{xz} = \hat{\epsilon}_{yz} = \hat{\epsilon}_{zz} = 0, \quad (\text{VI.59})$$

которые, разумеется, отнюдь не следует истолковывать как пренебрежение всеми деформациями стержня на его оси, а нужно понимать лишь в том смысле, какой был выше указан.

Все шесть равенств (VI.59) тождественно удовлетворяются, если положить:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta - 1, & \vartheta_2 &= \cos \beta \sin \gamma, \\ \psi_1 &= -\cos \alpha \sin \gamma, & \psi_2 &= \cos \gamma - 1,\end{aligned}\quad (\text{VI.60})$$

$$\chi_1 = \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta, \quad \chi_2 = \sin \beta \sin \gamma,$$

$$\frac{d\hat{u}}{dz} = -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma, \quad (\text{VI.61})$$

$$\frac{d\hat{v}}{dz} = \sin \alpha \sin \gamma, \quad \frac{d\hat{w}}{dz} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - 1.$$

Здесь α , β , γ — три произвольных угла, являющиеся функциями только z (поскольку \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} — функции только этой координаты).

Нетрудно выяснить геометрический смысл формул (VI.60), (VI.61). Преследуя эту цель, рассмотрим на оси стержня произвольную точку M и три линейных элемента dx , dy , dz , из нее исходящих (рис. 21).

В результате деформации точка M получит перемещения \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} и займет положение M^* , причем упомянутые линей-

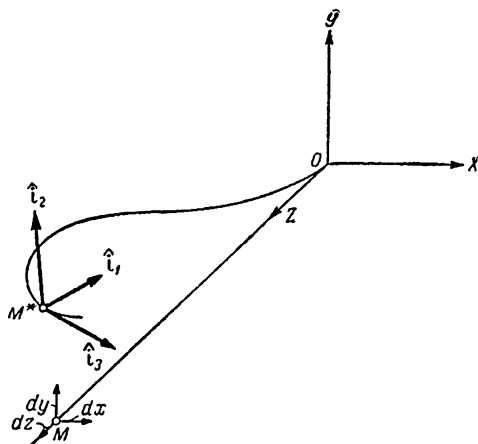


Рис. 21.

ные элементы окажутся направленными по ортам \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 , \mathbf{i}_3 . Если углы поворота элементов стержня велики по сравнению со сдвигами, то последними, при определении направлений \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 , \mathbf{i}_3 , можно пренебречь. При такой точности рассуждений триедр \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 , \mathbf{i}_3 трактуется как ортогональный, причем параметры

$$1 + \frac{\partial \hat{u}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \hat{v}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial z}, \quad 1 + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial z}, \quad 1 + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z},$$

будут (если пренебречь удлинениями по сравнению с единицей) равны косинусам углов, образуемых направлениями \mathbf{i}_1 ,

i_2, i_3 , с осями X, Y, Z . Последнее ясно из формул (VI.54) и таблиц 1 и 5 (I глава).

Но, как известно, одна система трех взаимно перпендикулярных направлений может быть фиксирована по отношению к другой с помощью трех эйлеровых углов. Вводя последние в соответствии с рис. 22 и учитывая сказанное выше, получаем формулы (VI.60); (VI.61).

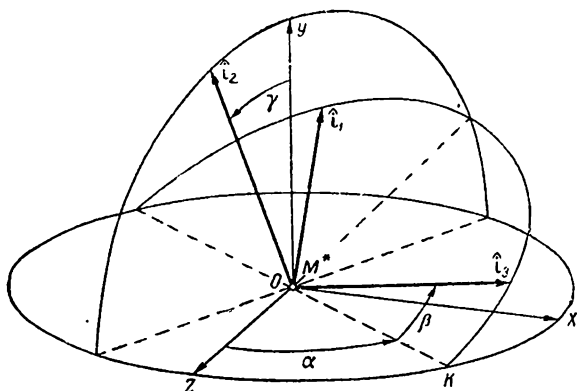


Рис. 22.

Таким образом в последних формулах α, β, γ суть эйлеровы углы, определяющие направления i_1, i_2, i_3 по отношению к осям X, Y, Z (с точностью до углов сдвига).

Подставляя (VI.60) и (VI.61) в (VI.57) и (VI.58), получаем:

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\beta}{dz} \cos \gamma, \\ k_{yy} &= \cos \alpha \sin \gamma \frac{d\beta}{dz} - \sin \alpha \frac{d\gamma}{dz}, \\ k_{xy} &= \cos \alpha \frac{d\gamma}{dz} + \sin \alpha \sin \gamma \frac{d\beta}{dz} \end{aligned} \quad (\text{VI.62})$$

и

$$v_{xx} = \frac{1}{2}(k_{xx}^2 + k_{xy}^2), \quad v_{yy} = \frac{1}{2}(k_{yy}^2 + k_{xy}^2), \quad v_{xy} = k_{xx}k_{yy}. \quad (\text{VI.63})$$

Вводя эти значения коэффициентов ν_{xx} , ν_{yy} , ν_{xy} в последнюю из формул (VI.55), имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = \hat{\varepsilon}_{zz} + xk_{xx} + yk_{yy} + \frac{1}{2}(k_{xx}^2 + k_{xy}^2)x^2 + \\ + \frac{1}{2}(k_{yy}^2 + k_{xy}^2)y^2 + k_{xx}k_{yy}xy, \end{aligned} \quad (\text{VI.64})$$

видим, что члены, соответствующие данным коэффициентам, могут быть отброшены, как величины порядка квадратов удлинений и сдвигов.

С учетом этого упрощения формулы (VI.55) принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \hat{\varepsilon}_{xx}, \quad \varepsilon_{yy} = \hat{\varepsilon}_{yy}, \quad \varepsilon_{xy} = \hat{\varepsilon}_{xy} \\ \varepsilon_{xz} = \hat{\varepsilon}_{xz} + x \frac{d\hat{\varepsilon}_{xx}}{dz} + yk_{xy} \\ \varepsilon_{yz} = \hat{\varepsilon}_{yz} + y \frac{d\hat{\varepsilon}_{yy}}{dz} + x \left(\frac{d\hat{\varepsilon}_{xy}}{dz} - k_{xy} \right) \\ \varepsilon_{zz} = \hat{\varepsilon}_{zz} + xk_{xx} + yk_{yy}. \end{aligned} \quad (\text{VI.65})$$

Здесь k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} определяются выражениями (VI.62).

Так как производные $\frac{d\hat{\varepsilon}_{xx}}{dz}$, $\frac{d\hat{\varepsilon}_{yy}}{dz}$, $\frac{d\hat{\varepsilon}_{xy}}{dz}$ обычно малы по сравнению с параметрами k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} , характеризующими кривизну оси стержня после деформации, то в формулах (VI.65) члены, содержащие упомянутые производные, могут быть пренебрежены, после чего окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \hat{\varepsilon}_{xx}, \quad \varepsilon_{yy} = \hat{\varepsilon}_{yy}, \quad \varepsilon_{xy} = \hat{\varepsilon}_{xy}, \\ \varepsilon_{xz} = \hat{\varepsilon}_{xz} + yk_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \hat{\varepsilon}_{yz} - xk_{xy}, \quad \varepsilon_{zz} = \hat{\varepsilon}_{zz} + xk_{xx} + yk_{yy}. \end{aligned} \quad (\text{VI.66})$$

Последние формулы основываются на предположении, что удлинения и сдвиги пренебрежимо малы по сравнению с единицей и по сравнению с углами поворота элементов стержня. Однако, помимо этого при выводе формул (VI.66) была постулирована достаточность формул (VI.54), то-есть достаточность сохранения в рядах Тейлора для перемещений только их трех первых членов. Это утверждение не очевидно и более того — оно неправильно, в чем можно убе-

даться, применив формулы (VI.66) к частному случаю, когда стержень не изгибается, а только скручивается, и притом равномерно по всей длине.

При этом:

$$\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = \tau z, \quad (\text{VI.67})$$

где τ — постоянный коэффициент.

Вводя эти значения эйлеровых углов в формулы (VI.60), (VI.61), находим

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= -(1 - \cos \tau z), \quad \vartheta_2 = \sin \tau z, \\ \psi_1 &= -\sin \tau z, \quad \psi_2 = -(1 - \cos \tau z), \quad (\text{VI.68}) \\ \chi_1 &= \chi_2 = \frac{d\hat{u}}{dz} = \frac{d\hat{v}}{dz} = \frac{d\hat{w}}{dz} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующие формулы для перемещений:

$$\begin{aligned} u &= -x(1 - \cos \tau z) - y \sin \tau z, \\ v &= +x \sin \tau z - y(1 - \cos \tau z), \quad (\text{VI.69}) \\ w &= 0 \end{aligned}$$

и для деформаций

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{yy} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{zz} = 0, \\ \epsilon_{xz} &= y\tau \quad \epsilon_{yz} = -x\tau. \quad (\text{VI.70}) \end{aligned}$$

Последние выражения совпадают не с теорией кручения по Сен-Венану, а со „старой“ теорией кручения, которая, как известно, несостоятельна, так как не позволяет освободить боковую поверхность стержня от напряжений, что в данной задаче является существенным. Отсюда ясно, что и общие формулы (VI.66) недостаточны, причем уже понятно, что они нуждаются в таком уточнении, которое позволило бы получать из них, как частный случай, теорию кручения Сен-Венана. Чтобы уточнить достигнутые в этом параграфе результаты, приходится отказаться от формул (VI.54) и перейти к формулам (VI.49), учитывающим остаточные члены степенных рядов, объединенные в обозначениях: \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} .

§ 51. Деформация стержней (второе приближение)

Повторим предыдущие выкладки, исходя, однако, уже не из формул (VI.54), а из формул (VI.49).

Добавочные перемещения \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , которые до сих пор не учитывались, будем считать малыми, пренебрегая членами, содержащими их произведения или произведения их производных.

Подставляя (VI.49) в формулы для компонентов деформации (I.22), получаем:

$$\varepsilon_{xx} = \hat{\varepsilon}_{xx} + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \hat{\varepsilon}_{yy} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \hat{\varepsilon}_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{xz} = \hat{\varepsilon}_{xz} + x \frac{d\hat{\varepsilon}_{xx}}{dz} + y k_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} -$$

$$- 2 \left(\bar{u} \frac{d\vartheta_1}{dz} + \bar{v} \frac{d\psi_1}{dz} + \bar{w} \frac{d\chi_1}{dz} \right),$$

$$\varepsilon_{yz} = \hat{\varepsilon}_{yz} + y \frac{d\hat{\varepsilon}_{yy}}{dz} + x \left(\frac{d\hat{\varepsilon}_{xy}}{dz} - k_{xy} \right) + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} -$$

$$- 2 \left(\bar{u} \frac{d\vartheta_2}{dz} + \bar{v} \frac{d\psi_2}{dz} + \bar{w} \frac{d\chi_2}{dz} \right),$$

$$\varepsilon_{zz} = \hat{\varepsilon}_{zz} + x k_{xx} + y k_{yy} + x^2 \nu_{xx} + y^2 \nu_{yy} + xy \nu_{xy} + \frac{dw}{dz} -$$

$$- \bar{u} \left(\frac{d^2 \hat{u}}{dz^2} + x \frac{d^2 \vartheta_1}{dz^2} + y \frac{d^2 \vartheta_2}{dz^2} \right) - \bar{v} \left(\frac{d^2 \hat{v}}{dz^2} + x \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} + \right. \quad (VI.71)$$

$$\left. + y \frac{d^2 \psi_2}{dz^2} \right) - \bar{w} \left(\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + x \frac{d^2 \chi_1}{dz^2} + y \frac{d^2 \chi_2}{dz^2} \right).$$

Здесь, как и раньше, ε_{xx} , ..., $\hat{\varepsilon}_{zz}$ определяются формулами (VI.56), k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} , ν_{xx} , ν_{yy} , ν_{xy} — формулами (VI.57) и (VI.58), а \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} — формулами (VI.52).

Что касается новых обозначений u , v , w , то они объединяют в себе следующие члены:

$$\begin{aligned} u &= (1 + \vartheta_1) \bar{u} + \psi_1 \bar{v} + \chi_1 \bar{w}, \\ v &= \vartheta_2 \bar{u} + (1 + \psi_2) \bar{v} + \chi_2 \bar{w}, \\ w &= \left(\frac{d\hat{u}}{dz} + x \frac{d\vartheta_1}{dz} + y \frac{d\vartheta_2}{dz} \right) \bar{u} + \left(\frac{d\hat{v}}{dz} + x \frac{d\psi_1}{dz} + y \frac{d\psi_2}{dz} \right) \bar{v} + \\ &\quad + \left(\frac{d\hat{w}}{dz} + x \frac{d\chi_1}{dz} + y \frac{d\chi_2}{dz} \right) \bar{w}. \end{aligned} \quad (\text{VI.72})$$

По соображениям, аналогичным предыдущему параграфу, можно ввести три угла α , β , γ , через которые ϑ_1 , ϑ_2 , ψ_1 , ψ_2 , χ_1 , χ_2 выразятся формулами (VI.60), а производные $\frac{d\hat{u}}{dz}$, $\frac{d\hat{v}}{dz}$, $\frac{d\hat{w}}{dz}$ — формулами (VI.61). После этого для k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} получатся формулы (VI.62), а для v_{xx} , v_{yy} , v_{xy} — формулы (VI.63).

Отсюда вытекает возможность пренебрежения в последней из формул (VI.71) всеми членами, содержащими три последних коэффициента.

Кроме того, по аналогии с предыдущим параграфом, можно отбросить в формулах (VI.71) и члены, содержащие произ-

водные $\frac{d\hat{\epsilon}_{xx}}{dz}$, $\frac{d\hat{\epsilon}_{yy}}{dz}$, $\frac{d\hat{\epsilon}_{xy}}{dz}$.

Мы хотим далее показать, что кроме перечисленных выше упрощений, возможность коих была обоснована в § 50, в формулах (VI. 71), можно пренебречь также и совокупностью тех членов, которые подчеркнуты.

Подставляя в выражения

$$\begin{aligned} X &= \bar{u} \frac{d\vartheta_1}{dz} + \bar{v} \frac{d\psi_1}{dz} + \bar{w} \frac{d\chi_1}{dz}, \\ Y &= \bar{u} \frac{d\vartheta_2}{dz} + \bar{v} \frac{d\psi_2}{dz} + \bar{w} \frac{d\chi_2}{dz}, \end{aligned} \quad (\text{VI. 73})$$

вместо $\vartheta_1, \vartheta_2, \psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ их значения, согласно формулам (VI. 60), и заменяя далее производные $\frac{d\alpha}{dz}, \frac{d\beta}{dz}, \frac{d\beta}{dz}$, на основании формул (VI. 62), будем иметь:

$$X = \left[\bar{u} \frac{d\hat{u}}{dz} + \bar{v} \frac{d\hat{v}}{dz} + \bar{w} \left(1 + \frac{d\hat{w}}{dz} \right) \right] k_{xx} - k_{xy} v, \quad (\text{VI. 74})$$

$$Y = \left[\bar{u} \frac{d\hat{u}}{dz} + \bar{v} \frac{d\hat{v}}{dz} + \bar{w} \left(1 + \frac{d\hat{w}}{dz} \right) \right] k_{yy} + k_{xy} u.$$

Учитывая далее (VI. 72) и (VI. 73), можем записать (VI. 74) следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= (w - xX - yY) k_{xx} - v k_{xy}, \\ Y &= (w - xX - yY) k_{yy} + u k_{xy}. \end{aligned} \quad (\text{VI. 75})$$

Отсюда

$$\begin{aligned} X &= \frac{w k_{xx} - v (1 + y k_{yy}) k_{xy} - u y k_{xx} k_{xy}}{1 + x k_{xx} + y k_{yy}}, \\ Y &= \frac{w k_{yy} + u (1 + x k_{xx}) k_{xy} + v x k_{yy} k_{xy}}{1 + x k_{xx} + y k_{yy}}. \end{aligned} \quad (\text{VI. 76})$$

Так как $x k_{xx}, y k_{yy}$ суть величины порядка компонентов деформации, то

$$\begin{aligned} X &\approx w k_{xx} - v k_{xy}, \\ Y &\approx w k_{yy} + u k_{xy}. \end{aligned} \quad (\text{VI. 77})$$

Таким образом подчеркнутые члены третьей и четвертой из формул (VI. 71) являются величинами порядка произведений u, v, w на параметры кривизны оси стержня после деформации. Но дополнительные перемещения u, v, w всегда получаются весьма малыми по сравнению с поперечными размерами стержней. Отсюда (поскольку произведения параметров кривизны оси стержня k_{xx}, k_{yy}, k_{xy} на его поперечные размеры суть величины порядка компонентов деформации) можно сделать заключение, что X и Y весьма малы по сравнению с удлинениями и сдвигами, на основании чего подчеркнутые члены четвертый и пятый из формул (VI. 71) могут быть пренебрежены. Путем аналогичных рас-

суждений можно выяснить несущественность и подчеркнутых членов последней из формул (VI. 71).

Выполняя все намеченные выше упрощения, приходим к следующим выражениям для компонентов деформации тонкого, первоначально призматического стержня:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \hat{\epsilon}_{xx} + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \hat{\epsilon}_{yy} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \epsilon_{xy} &= \hat{\epsilon}_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \epsilon_{xz} &= \hat{\epsilon}_{xz} + yk_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \epsilon_{yz} &= \hat{\epsilon}_{yz} - xk_{xy} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \epsilon_{zz} &= \hat{\epsilon}_{zz} + xk_{xz} + yk_{yz} + \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\tag{VI. 78}$$

Здесь u , v , w — функции всех трех координат x , y , z , которые обладают следующими свойствами:

а) они весьма малы по сравнению с поперечными размерами стержня, а их производные суть величины порядка компонентов деформации. В силу этого произведениями их производных друг на друга и на величины порядка компонентов деформации можно пренебрегать;

б) при $x = 0$, $y = 0$:

$$u = v = w = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

что следует из (VI. 49) и (VI. 72).

Распоряжаясь дополнительными перемещениями u , v , w , можно согласовать формулы (VI. 78) с граничными условиями на боковой поверхности стержня.

§ 52. Чистое кручение

Пусть стержень подвергается равномерному кручению по всей своей длине.

Тогда

$$\alpha = \beta = \chi_{xx} = \chi_{yy} = 0; \quad \gamma = \tau_z,\tag{VI.79}$$

где

$$\tau = k_{xy} \quad (\text{VI.80})$$

является в данном случае постоянной величиною.

Предположим кроме того, что

$$\hat{\varepsilon}_{xx} = \hat{\varepsilon}_{yy} = \hat{\varepsilon}_{xy} = \hat{\varepsilon}_{xz} = \hat{\varepsilon}_{yz} = \hat{\varepsilon}_{zz} = 0, \quad (\text{VI.81})$$

то-есть пренебрежем деформациями, равномерно распределенными по площади поперечного сечения стержня.

Далее, на основании (VI. 79) и (VI. 81):

$$\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0. \quad (\text{VI.82})$$

Учитывая все это, будем иметь:

$$\begin{aligned} u &= -x(1 - \cos \tau z) - y \sin \tau z + \bar{u}, \\ v &= +x \sin \tau z - y(1 - \cos \tau z) + \bar{v}, \\ w &= \bar{w} \end{aligned} \quad (\text{VI.83})$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_{xz} &= y\tau + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yz} &= -x\tau + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{VI.84})$$

Если теперь положить

$$u = v = 0, \quad w = \tau \varphi(x, y), \quad (\text{VI.85})$$

то выражения (VI.84) примут вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{zz} = 0, \\ \varepsilon_{xz} &= \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right), \quad \varepsilon_{yz} = \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \right), \end{aligned} \quad (\text{VI.86})$$

превращаясь в формулы теории кручения Сен-Венана. Таким образом эта последняя теория заключается в общих формулах (VI.78) как частный случай.

Заметим, что в наших рассуждениях перемещения точек скрученного стержня определяются выражениями (VI.83), а не выражениями классической теории.

$$u = -yz\tau, \quad v = xz\tau, \quad w = \tau\varphi(x, y). \quad (\text{VI.87})$$

Последние формулы могут быть получены из (VI.83), если считать $\tau z \ll 1$, то-есть если считать, что углы поворота при кручении пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Из вышеизложенного ясно, что данное ограничение для теории Сен-Венана не является обязательным.

§ 53. Окончательные выражения для деформаций тонкого стержня

Можно предвидеть, что при рассмотрении общего случая деформации стержня (когда, кроме кручения он подвергается также изгибу), формулы (VI.66) будут недостаточными, поскольку они (как было показано в конце § 49) недостаточны уже для случая чистого кручения. Можно, далее, предвидеть, что поправки, которые нужно ввести в упомянутые формулы, и в общем случае будут иметь такой же характер, как и в задаче о чистом кручении. Именно — эти поправки должны позволить устранить скручивающие стержень напряжения, действующие на его поверхности, каковые неизбежно появляются при использовании формул (VI.66) (если только поперечное сечение стержня отлично от кругового).

Отсюда следует попытаться построить общую теорию деформации тонких стержней, полагая (по аналогии с предыдущим параграфом) что:

$$u = v = 0, \quad w = k_{xy}(z) \cdot \varphi(x, y). \quad (\text{VI.88})$$

Тогда формулы (VI.78) принимают вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \hat{\epsilon}_{xx}, \quad \epsilon_{yy} = \hat{\epsilon}_{yy}, \quad \epsilon_{xy} = \hat{\epsilon}_{xy}, \\ \epsilon_{xz} &= \hat{\epsilon}_{xz} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right) k_{xy}, \quad \epsilon_{yz} = \hat{\epsilon}_{yz} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \right) k_{xy}, \\ \epsilon_{zz} &= \hat{\epsilon}_{zz} + x k_{xx} + y k_{yy} + \varphi \cdot \frac{dk_{xy}}{dz}. \end{aligned} \quad (\text{VI.89})$$

Последние выражения действительно достаточны для рассматриваемой задачи. Отправляясь от них, можно построить последовательную теорию деформации гибких стержней, ограниченную лишь предположением, что удлинения и сдвиги пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Погрешность этой теории может быть оценена сравнением удлинений и сдвигов с углами поворота, поскольку при выводе (VI.78) мы систематически пренебрегали первыми по сравнению со вторыми.

§ 54. Заключение

Обычно теория деформации гибких тел (пластин, оболочек, стержней) строится путем постулирования некоторых допущений, принятие каковых сразу сводит рассматриваемую задачу к двумерной (в случае пластин и оболочек) или одномерной (в случае стержней). Однако, при таком способе рассуждений неизбежно утрачивается ощущение связи между теориями пластин, оболочек и стержней и общей теорией упругости. Ввиду этого многие рассматривают теорию гибких тел как своего рода гипотетическую надстройку над общей теорией упругости, как инородное в нее включение.

Только таким образом, вероятно, может быть объяснен тот факт, что большинство современных курсов теории упругости обходят молчанием проблему деформации гибких тел, столь важную по своему практическому значению. Уже в курсе Лява были предприняты шаги по увязке „гипотез“ теории деформации гибких тел с общей теорией деформации.

Но особенную работу в этом направлении проделал Б. Г. Галеркин, в трудах которого классическая теория оболочек и пластин стала поистине отделом общей теории упругости.

Основная мысль, которую пропагандировал Б. Г. Галеркин, заключалась в том, что проблемы изгиба пластин и оболочек надо всегда рассматривать в контакте с общей теорией. Эта столь же простая, сколь и глубокая идея в значительной мере обеспечила успехи развития теории пластин и оболочек в Советском Союзе и оказалась плодотворной не только для толстых пластин и оболочек, но и для тонких.

Естественно продолжить данную мысль и в сторону нелинейной теории упругости, поскольку можно ожидать, что и здесь многие результаты удастся привести в систему, отпавляясь от общих формул. Настоящая глава и является попыткой дать единообразный метод исследования деформации гибких тел, исходя из общей нелинейной теории деформаций. В нашу цель входило осветить с помощью формул общей теории те „гипотезы“, на которых основывают, обычно, теорию деформации пластин, стержней и оболочек и рассмотреть с одной точки зрения все эти задачи, которые обычно рассматриваются разрозненно, несмотря на их общие черты.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Bulfingeri G. De solidorum resistantia specimen. Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae vol 4., 1729, стр. 164.
2. Ясинский Ф. О сопротивлении продольному изгибу, 1902.
3. Тимошенко С. Устойчивость упругих систем, Киев 1910.
4. Бубнов И. Строительная механика корабля, 1912.
5. Галеркин Б. Стержни и пластинки. „Вестник инженеров“, № 19, 1915.
6. Николаи Е. Об упругой линии двойкой кривизны, 1916.
7. Соколов П. О напряжениях в сжатых пластинках после потери устойчивости. Труды НИСС, вып. 7, 1932.
8. Динник А. Устойчивость упругих систем, ОНТИ, 1935.
9. Штаерман И., Пиковский А. Методы расчета конструкций на устойчивость, Укргизместпром, 1939.
10. Зволинский Н., Риз П. Закон Гука при конечных перемещениях. Изв. СХТ Акад. Наук СССР, 1938, стр. 17—20.
11. Панов Д. Применение метода акад. Б. Г. Галеркина для решения некоторых нелинейных задач теории упругости. „Прикл. мат. мех.“, т. III, вып. 2, стр. 139—141, 1939.
12. Панов Д. Вторичные эффекты при кручении эллиптического цилиндра. Труды ЦАГИ, вып. 459, 1939.
13. Муштары Х. Некоторое обобщение теории тонких оболочек. Изв. Физ. мат. общества при Казанском университете, т. XI, сер. 8, 1938.
14. Риз П. О некоторых явлениях при кручении круглого цилиндра. Труды ЦАГИ, вып. 408, 1939.
15. Зволинский Н. и Риз П. О некоторых задачах нелинейной теории упругости. „Прикл. мат. мех.“, т. II, вып. 4, стр. 417—426. 1939.

16. З в о л н и с к и й Н. Кручение бруса, растянутого постоянными массовыми силами, „Прикл. мат. мех.“, т. III, вып. 3, стр. 3—31, 1939.
17. Б л о х В. О конечных деформациях. Научн. зап. Харьк. мех. маш. инст., т. V, стр. 3—26, 1940.
18. К а ч а н о в Л. К механике пластических средин. „Прикл. мат. мех.“, т. 12, вып. 3, стр. 37—42, 1940.
19. К а ч а н о в Л. Упруго-пластическое состояние твердых тел. „Прикл. мат. мех.“, т. V, вып. 3, стр. 431—437, 1941.
20. П а п к о в и ч П. Строительная механика корабля, ч. II, Оборонгиз, 1941.
21. Н о в о ж и л о в В. Общая теория устойчивости оболочек. Докл. Акад. Наук СССР, т. XXXII, № 5, стр. 316—319, 1941.
22. П а н о в Д. О больших прогибах круглой мембраны со слабым гофром. „Прикл. мат. мех.“, т. V, вып. 2, 1941.
23. Р у х а д з е А. Изгиб силой растянутого призматического стержня. Сообщение Акад. Наук Груз. ССР, т. II, № 7, стр. 609—617, 1941.
24. Г о р и д з е А., Р у х а д з е А. Изгиб парой закрученного стержня. Сообщения Акад. Наук. Груз. ССР, т. V, № 3, стр. 253—262, 1944.
25. Ф е о д о с ь е в В. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой. „Прикл. мат. мех.“, т. IX, стр. 389, 1945.
26. Ф е о д о с ь е в В. К расчету хлопающей мембраны. „Прикл. мат. мех.“, т. X, вып. 2, стр. 295—300, 1946.
27. Л а н д а у Л., Л и ф ш и ц Е. Механика сплошных сред, 1944.
28. Л е й б е н з о н Л. Курс теории упругости, Гостехиздат, 1947.
29. З в о л н и с к и й Н., Р и з П. Общее решение задачи кручения в нелинейной теории упругости. „Прикл. мат. мех.“, т. VII, стр. 149—154, 1943.
30. Л у р ь е А. Обобщение теоремы Кастильяно. Труды Ленингр. Политехн. инст. № 1, 1946.
31. Б л и н н и к С., М а л и н и н Н., П о н о м а р е в С., Ф е о д о с ь е в В. Новые методы расчета пружин, Машгиз, 1946.
32. К р ы л о в В. Большие перемещения в плоской задаче. „Прикл. мат. мех.“, 1946, вып. 5—6.
33. Р и з П. Об упругих константах в нелинейной теории упругости. „Прикл. мат. мех.“, т. XI, 1947.
34. П о п о в Е. Теория и расчет гибких упругих деталей. Изд. ЛКВВИА, 1947.

35. Рухадзе А. Влияние на изгиб стержня парой изгиба от поперечной силы. „Прикл. мат. мех.“, т. XI, 351—356, 1947.
36. Кутилин Д. Теория конечных деформаций. Гостехиздат, стр. 1—275, 1947.
37. Риз П. Теория упругости при больших деформациях, превосходящих предел пропорциональности. Докл. Акад. Наук СССР, т. IX, № 2, 223—225, 1948.
38. Saint-Venant B., Memoire sur l'équilibre des corps solides dans les limites de leur élasticité, et sur les conditions de leur resistance, quand les déplacements éprouvés par leurs points ne sont pas très petits. Compte rendus, vol. XXIV, 1847.
39. Kirchhoff G. Ueber die Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Teile. Sitzgsber. der Mathnaturwiss. Klasse der K. Ak. Wiss., IX, 1852, стр. 762.
40. Kirchhoff G. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung. eines unendlich dünnen elastischen Stabes, Borchardts Journ. Bd. 56, 1858.
41. Brillouin, Deformation homogènes finies, énergie d'un corps isotrope. C. R. Acad. Sci. Paris, CXII, 1891.
42. Voigt W., Ueber eine anscheinend nothwendige Erweiterung der Elastizitätstheorie. Götting. Nachr., 1894, № 1, стр. 33—43.
43. Love A., A treatise on the mathematical theory of elasticity (имеется русский перевод: А. Ляв „Математическая теория упругости“, ОНТИ, (1935).
44. Cosserat E. et F., Sur la théorie de l'élasticité. Ann. de Toulouse, X, 1896.
45. Duhamel, Recherches sur l'élasticité, Ann. de l'école Norm. Sup. 3^{re} serie, V. XXI, XXII, XXIII, (1904—1906),
46. Marcolongo, Le formole de Saint-Venant per le deformazioni finite. Rend. del circ. mat. di Palermo, XIX, 1905, стр. 151.
47. Crudelelli. Sopra le deformazioni finite. Le equazioni de Saint-Venant. Rendic. Lincei, 2^o sem., 1911, стр. 300.
48. Burgatti, Sulle deformazioni finite dei corpi continui. Mem. dell. Ac. di Bologna, ser. 7^a, 1 (1913—1914), стр. 3.
49. Almansi E., L'ordinaria teoria dell elasticità e la teoria delle deformazioni finite., Rend. Lincei, 2^o sem., 1917.
50. Biezeno C. and Hencky H., On the general theory of elastic stability. Proc. Acad. Sci. Amsterdam, vol. XXXI, № 6, 1928.

51. Biezeno C. and Hencky H., On the general theory of elastic stability. Proc. Acad. Sci. Amsterdam, vol. XXXII, № 4, 1929.
52. Trefftz E., Handbuch der Physik, Bd. VI. „Mechanik der elastischen Körper“, 1928. (Имеется русский перевод под редакцией А. Лурье: Э. Трефц, „Математическая теория упругости“, ОНТИ, (1934.))
53. Trefftz E., Zur Theorie, der Stabilität des elastischen Gleichgewichts, Zeltschr. für angew. Math. und Mech. (Z. a. M. M.), 13, 1933, стр. 160 — 165.
54. Ceruti G. Sopra un' estensione della teoria elastica, alla seconda approssimazione. Rend. reale Ist. Lombardo. II, s. 65. 1932, стр. 997 — 1012.
55. Bonvincini D. Sulle deformazioni non infinitesime. Atti Accad. Lincei, Rend. VI, s. 16, 1932, стр. 617 — 612.
56. Arianò R. L'isotropia nelle deformazioni finite. I. L'isotropia in „senso largo“, II. L'isotropia in „senso ristretto“. Ist. Lombardo, Rend. II, s. 66, 1933, стр. 92 — 104 и 207 — 220.
57. Arianò R., Sulla resistenza a tensione della gomma elastica e ebonite, Politecnico, 1933.
58. Signorini A., Sulle deformazioni finite dei sistemi a transformationi reversibili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI, s. 18, 1933, стр. 388 — 394.
59. Kappus R., Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen Z. a. M. M., Bd. 19, 1939, стр. 271 — 285 и 344 — 361.
60. Biot M., Increase of torsional stiffness of a prismatical bar due to axial tension, J. appl. Physics, 10, 1939, стр. 860 — 864.
61. Locatelli P., Sopra il teorema del minimo lavoro per corpi non perfettamente elastici. Ferie Acad., 1939, стр. 10 — 18.
62. Marguerre K., Über die Anwendung der energetischen Methode auf Stabilitätsprobleme. J. b. dtsh, Luftf. Forschg. 1., Flugwerk, 1938, стр. 433 — 443.
63. Biot M., Theory of elasticity with large displacements and rotations. Proc. 5 intern. Congr. appl. Mech., 1939, стр. 117 — 122.
64. Arianò R., La deformazioni finite. R. Scuola d'ingegn. Milano. Atti ricerche studi, Fasc. 18, 1935.
65. Seth B., Finite strain in elastic problems. Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 234 A, 1935, 231 — 264.
66. Biezeno C., Über die Bestimmung der „Durchschlagkraft“ einer schwachgekrümmten kreisförmigen Platte. Z. a. M. M., Bd. 15, H. 1/2, 1935, стр. 10 — 22.

67. Mournaghan F., Finite deformation of an elastic solid. Amer. Journ. of Math., Vol. 59, 1937, стр. 235 — 260.
68. Marguerre K., Zur Theorie der gekrümmten Platte grösser Formänderung. Proc. 5 int. congr. for appl. Mech., 1939, стр. 93 — 101.
69. Newing S. and Shepherd W. Finite strain: dislocation solutions. Phil. Mag. s. 26, 1938, стр. 557 — 559.
70. Birch F., The effect of pressure upon the elastic parameters of isotropic solids, according to Mournaghan's theory of finite strain. J. appl. Phys. 9, 1938, стр. 279 — 288.
71. Shepherd W. and Seth B., Finite strain in elastic problems. Proc. Roy. Soc. London, 156 A, 1936, стр. 171 — 192.
72. Biot M., Elastizitätstheorie zweiter Ordnung mit Anwendungen. Z. a. M. M., Vol. 20, 1940, стр. 89 — 99.
73. Karman Th. and Shen Tsien H., The buckling of spherical shells by external pressure. J. Aeron. Sci. 7, 1939, стр. 43 — 50.
74. Latshaw E., An elastic theory for rubber. J. Franklin inst. 234, 1942, стр. 63 — 73.
75. Bergeot P., On the formula for the energy of deformation in the case of finite deformations. C. R. Acad. Sci. Paris, 218, 1944, стр. 824 — 825.
76. Chien W., The intrinsic theory of thin plates and shells. I. General theory. II. Application to thin plates. III. Application to thin shells. Quart. Appl. Math., 1944 (1. стр. 297 — 327, 2. стр. 43 — 59, 3. стр. 120 — 135).
77. Mournaghan F., On the theory of tension of an elastic cylinder. Proc. Nat. Acad. Sci. Wasch., 30, 1944, стр. 382 — 384.
78. James H. and Guth E., Wave equations for finite elastic strains. J. appl. Physics. 16, 1945, стр. 643 — 644.
79. Seth B., Finite strains in anisotropic elastic bodies. Bull. Calcutt, math. Soc., 37, 1945, стр. 62 — 68.
80. Bromberg E. and Stoker J., Nonlinear theory of curved elastic sheets. Quart. appl. math., 3, 1945, стр. 246 — 265.
81. Sadowsky M., Nonlinear springs. J. Franklin inst., Dec. 1945, стр. 469 — 476.
82. Sokolnikoff I., Mathematical theory of elasticity, 1946.
83. Sternberg E., Nonlinear theory of elasticity with small deformations. J. appl. mech., 13, 1946, A 53 — 60.

Б И Б Л И О Т Е

ИНСТИТУТА
ИМЕНИ И. В. СТАЛИ

О п е ч а т к и

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
29	13 снизу	$\epsilon''_{yz} = (\epsilon'_{zz} - \epsilon'_{yy}) \sin^2 \theta + \epsilon'_{yz} \cos^2 \theta$	$\epsilon''_{yz} = (\epsilon'_{zz} - \epsilon'_{yy}) \sin 2\theta + \epsilon'_{yz} \cos 2\theta$	Корр.
29	9 снизу	$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon'_{yz}}{\epsilon'_{yy} - \epsilon'_{zz}}$	$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\epsilon'_{yz}}{\epsilon'_{yy} - \epsilon'_{zz}}$	Авт.
37	8 снизу	$\sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{xy}^2} \sin (2\theta + \beta)$	$\sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{xy}^2} \cdot \sin (2\theta + \beta)$	Ред.
37	7 снизу	$\sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{xy}^2} \sin \gamma$	$\sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + e_{xy}^2} \cdot \sin \gamma$	"
118	11 снизу	$c_2^* - 3c_1^*$	$c_2^{*2} - 3c_1^*$	Корр.

ОГИЗ СССР
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
„ГОСТЕХИЗДАТ“

Москва, Орликов пер., 3
Ленинград, Невский пр., 28

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ КНИГИ:

- Александров В. Л.**, Техническая гидромеханика. Изд. 3-е, перераб. Допущено Министерством Высшего Образования СССР в качестве учебного пособия для высших учебных заведений. 1946. Стр. 432. Цена 9 р. 50 к.
- Ананьев И. В.**, Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. Стр. 224. Цена 9 р. 50 к.
- Динник А. Н.**, Устойчивость арок. Стр. 128. Цена 5 р.
- Зауэр Р.**, Введение в газовую динамику. Пер. с немецкого. Стр. 228. Цена 7 р. 50 к.
- Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В.**, Теоретическая гидромеханика. Т. I. Изд. 4-е, перераб. Допущено Министерством Высшего Образования СССР в качестве учебника для университетов. Стр. 535. Цена 16 р.
- Лейбензон Л. С.**, Курс теории упругости. Изд. 2-е, испр. и дополн. Допущено Министерством Высшего Образования в качестве учебника для университета. Стр. 404. Цена 12 р.
- Лейбензон Л. С.**, Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Стр. 244. Цена 8 р.
- Лехницкий С. Г.**, Анизотропные пластинки. Стр. 355. Цена 14 р. 50 к.
- Нейбер Г.**, Концентрация напряжений. Пер. с немецкого под ред. проф. А. И. Лурье. Стр. 204. Цена 9 р. 75 к.
- Попов С. Г.**, Измерение воздушных потоков. Стр. 296. Цена 9 р.
- Филоненко-Бородич М. М.**, Теория упругости. Изд. 3-е, перераб. и значительно дополненное. Допущено Министерством Высшего Образования СССР в качестве учебника для высших технических учебных заведений. Стр. 300. Цена 8 р. 50 к.

Книги продаются в книжных магазинах КОГИЗа и других книготорговых организаций, а также высылаются наложенным платежом без задатка. Заказы шлите по адресу:

Москва, центр, Куйбышевский проезд, 8, МОГИЗ

„Книга — почтой“.

Ленинград „88“, Невский пр., 28, „Дом Книги“.

Отдел „Книга — почтой“ Ленокогиза.