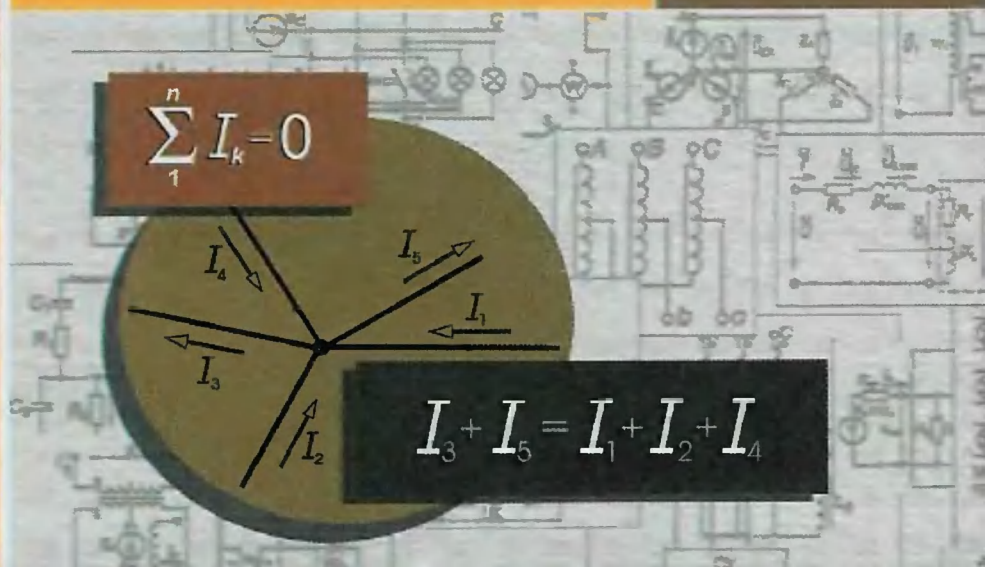


Ф.Е. Евдокимов

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

9-е издание

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА





УДК 621.3  
ББК 31.21  
Е 15

Рецензент —  
преподаватель Московского электромеханического техникума им. Л. Б. Красина  
*Е. А. Лоторейчук*

**Евдокимов Ф. Е.**

**Е 15** Теоретические основы электротехники: Учеб. для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования / Федор Евдокимович Евдокимов. — 9-е изд., стереотип. — М.: Издательский центр «Академия», 2004. — 560 с.

ISBN 5-7695-1869-3

В учебнике рассмотрены электрическое и магнитное поля, электрические линейные и нелинейные цепи постоянного и переменного токов, магнитные цепи, методы их расчета применительно к простым задачам.

Для студентов энергетических и радиотехнических специальностей образовательных учреждений среднего профессионального образования.

УДК 621.3  
ББК 31.21

*Учебное издание*

**Евдокимов Федор Евдокимович**

**Теоретические основы электротехники**

**Учебник**

Редактор *Л. В. Честная*

Технический редактор *О. С. Александрова*

Компьютерная верстка: *В. Н. Канивец*

Корректоры *Г. Н. Петрова, Н. А. Савельева*

Изд. № А-452-IX/2. Подписано в печать 22.04.2004. Формат 60 × 90/16.  
Гарнитура «Таймс». Бумага тип. № 2. Печать офсетная. Усл. печ. л. 35,0.  
Тираж 20 000 экз. (2-й завод 10 001—20 000 экз.). Заказ №13121.

Лицензия ИД № 02025 от 13.06.2000. Издательский центр «Академия».  
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Л.003903.06.03 от 05.06.2003.  
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17-Б, к. 223. Тел./факс: (095)330-1092, 334-8337.

Отпечатано на Саратовском полиграфическом комбинате.  
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ISBN 5-7695-1869-3

© Евдокимов Ф. Е., 2004  
© Издательский центр «Академия», 2004

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Девятое издание учебника по содержанию и структуре полностью соответствует действующей программе курса «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) для образовательных учреждений среднего профессионального образования по электроэнергетическим, электромашиностроительным, приборостроительным и радиотехническим специальностям. Программа предоставляет широкие возможности для выбора учебного материала и последовательности его изложения применительно к каждой специальности, что непосредственно отражается в календарно-тематическом плане курса.

Учебник может быть использован студентами и преподавателями разнообразных специальностей, в том числе в тех случаях, если в программу курса будут внесены некоторые изменения, обусловленные спецификой отрасли по принадлежности учебного заведения.



# ВВЕДЕНИЕ

Из всех видов энергии в настоящее время наиболее широко применяется электромагнитная энергия, которую в практике обычно называют *электрической*.

Энергия — это количественная мера движения и взаимодействия всех форм материи. Для любого вида энергии можно назвать материальный объект, который является ее носителем.

Механическую энергию несут, например, вода, падающая на лопасти гидротурбины, заведенная пружина; тепловую — нагретый газ, пар, горячая вода.

Носителем электрической энергии является особая форма материи — *электромагнитное поле, главная особенность которого состоит в том, что оно оказывает силовое воздействие на электрически заряженные частицы, зависящее от их скорости и величины заряда*. Это свойство электромагнитного поля является основой связанных между собой электрических и магнитных явлений, известных из курса физики, — взаимодействия электрически заряженных или намагниченных тел, электрического тока, электромагнитной индукции и др.

Использованием этих явлений для получения, передачи и преобразования электрической энергии занимается электротехника. Применение электромагнитного поля и его энергии для передачи информации без проводов — задача радиотехники.

## Применение электрической энергии

Широкое применение электрической энергии объясняется ее ценными свойствами, возможностью эффективного преобразования в другие виды энергии (механическую, тепловую, световую, химическую) с целью приведения в действие машин и механизмов, получения теплоты и света, изменения химического состава вещества, производства и обработки материалов и т. д.

Преобразование электрической энергии в механическую с помощью электродвигателей позволяет наиболее удобно, технически совершенно и экономически выгодно приводить в движение многочисленные и разнообразные рабочие машины и механизмы (металлорежущие станки, прокатные станы, подъемно-транспортные машины, насосы, вентиляторы, швейные машины, молотилки, зерноочистительные, мукомольные машины и т. д.).

Электродвигатели приводят в движение поезда, морские и речные суда, городской транспорт. С применением в промышленности электродвигателей стало возможным отказаться от неудобного и малоэффективного группового трансмиссионного привода, перевести рабочие машины на индивидуальный привод (у каждой рабочей машины — свой электродвигатель), а сложные машины (например, прокатный стан, бумагоделательная машина и т. п.) — на многодвигательный привод, когда каждый из группы электродвигателей выполняет в приводе свою определенную функцию.

Электрификация рабочих машин дает возможность не только механизировать, но и максимально автоматизировать силовые процессы, так как электродвигатель позволяет в широких диапазонах регулировать мощность и скорость привода.

Во многих технологических процессах используют преобразование электрической энергии в тепловую и химическую. Так, например, электронагрев и электролиз дают возможность получать высококачественные специальные стали, цветные металлы, обеспечивая наивысшую чистоту производимых материалов.

При электротермической обработке металлов, резиновых изделий, пластмасс, стекла, древесины получают продукцию высокого качества.

Электрохимические процессы, составляющие основу гальванотехники, позволяют получать антикоррозионные покрытия, идеальные поверхности для отражения лучей и т. д.

Большое развитие получила электросварка, обеспечивающая высокую производительность труда и другие технико-экономические показатели.

Электрические источники света дают высокое качество искусственного освещения. Благодаря применению электрической энергии получены выдающиеся результаты в технике связи, автоматике, электронике, в управлении и контроле технологических процессов и т. д.

В таких областях, как медицина, биология, астрономия, геология, математика и др., где еще недавно применялись только электрические устройства общего назначения (электролампы, электронагреватели, электродвигатели и т. п.), теперь все шире внедряются специализированные электрические приборы, аппараты, установки, которые обеспечивают дальнейшее развитие этих областей как в научном, так и в прикладном отношении.

Для развития науки и техники большое значение имеют электронные вычислительные машины, которые стали распространенным и высокоэффективным средством научных исследований, экономических расчетов, планирования, управления производственными процессами, диагностики болезней и т. д.

## Получение электрической энергии

Электрическую энергию можно получить из других видов энергии непосредственно или путем промежуточных преобразований.

Для этого используют природные энергетические ресурсы — реки и водопады, океанские приливы, органическое и ядерное топливо, солнечную радиацию, ветер, геотермальные источники.

В больших количествах электрическую энергию получают на электростанциях с помощью электромеханических генераторов — преобразователей механической энергии в электрическую.

На гидроэлектростанциях механическая энергия к электрогенераторам поступает от гидротурбин, которые воспринимают постоянно возобновляемую в природе энергию течения рек. На тепловых электростанциях используют энергию органического топлива. Тепловая энергия, полученная при сжигании топлива, поступает в тепловые турбины (паровые, газовые), превращается в них в механическую и передается электрогенераторам.

На атомных электростанциях тепловую энергию получают за счет энергии, содержащейся в ядрах атомов, а в остальном схема получения электрической энергии такая же, как на тепловой станции.

Прямое преобразование химической, тепловой, лучистой энергии в электрическую осуществляют с помощью электрохимических, термоэлектрических, термоэмиссионных, фотоэлектрических генераторов. Эти устройства имеют малую мощность и поэтому для большой энергетики непригодны, а применяются в радиотехнике, автоматике, космической технике.

Для получения электроэнергии в больших количествах более перспективны магнетогидродинамические генераторы и устройства для прямого преобразования термоядерной энергии в электрическую.

## Передача и распределение электрической энергии

Повсеместное использование электрической энергии при концентрации природных энергетических ресурсов в отдельных географических районах привело к необходимости передачи ее на большие расстояния, распределения между приемниками в большом диапазоне мощностей.

Электрическая энергия легко распределяется по приемникам любой мощности. В технике связи, в автоматике и измерительной технике используют устройства малой мощности (единицы и доли ватт). Вместе с тем имеются электрические устройства (двигатели, нагревательные установки) мощностью в тысячи киловатт.

Для линий передачи и распределительных сетей применяют металлические провода (из алюминия, стали, меди). Действием элек-

трогенератора в проводах и окружающем их диэлектрике устанавливается электромагнитное поле, несущее энергию.

При наличии проводов поле достигает высокой концентрации, поэтому передача осуществляется с высоким коэффициентом полезного действия и в количестве, достаточном для приведения в действие различных приемников, в том числе большой мощности.

В радиотехнике используется передача электромагнитного поля без соединительных проводов, поэтому поле, распространяясь в пространстве, рассеивается в большом объеме. Приемные устройства улавливают лишь небольшую часть энергии, которой недостаточно для приведения в действие машин, нагревательных устройств, источников света и т.п. Однако для передачи информации такой способ пригоден, так как для воспроизведения сигналов достаточно принять ничтожно малую часть энергии передатчика.

### **Некоторые памятные даты развития электротехники**

Ценные свойства электрической энергии были замечены еще тогда, когда наука и техника делали первые шаги с целью ее использования. Краткие исторические сведения о развитии электротехники приведены ниже.

- 1802—1803 гг. В. В. Петров открыл явление электрической дуги и указал на возможность ее использования для электроосвещения, электросварки и плавления металлов.
- 1825 г. Изобретен электромагнит с железным сердечником.
- 1827 г. Г. С. Ом сформулировал одно из основных положений для электрической цепи (закон Ома).
- 1831 г. М. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции.
- 1832 г. П. Л. Шиллинг построил первый в мире электромагнитный телеграф.
- 1833 г. Э. Х. Ленц сформулировал одно из основных положений, относящихся к явлению электромагнитной индукции (правило Ленца); теоретически установил (в 1838 г. показал экспериментально) обратимость генераторного и двигательного режимов электрических машин.
- 1834 г. Академик Б. С. Якоби построил электродвигатель с непосредственным вращением якоря.
- 1838 г. Началось испытание на Неве первого в мире судна, приводимого в движение электродвигателем (электрический бот Якоби). Б. С. Якоби изобрел гальванопластику.

- 1844 г. Э. Х. Ленц и независимо от него Д. П. Джоуль установили количественное соотношение при нагревании проводника электрическим током (закон Ленца — Джоуля).
- 1847 г. Г. Кирхгоф сформулировал два закона для разветвленных электрических цепей (законы Кирхгофа).
- 1859 г. Построен первый свинцовый аккумулятор.
- 1867 г. Построена первая электрическая машина с самовозбуждением.
- 1872 г. А. Г. Столетов провел исследования магнитных свойств железа.
- 1873 г. А. Н. Лодыгин демонстрировал опыты уличного освещения с помощью изобретенной им лампы накаливания.
- 1876 г. П. Н. Яблочков изобрел электрическую свечу, новую систему распределения электрического тока и трансформатор (с разомкнутым магнитным сердечником). Ф. А. Пироцкий проводил опыты по передаче электроэнергии по железнодорожным рельсам.
- 1880 г. Д. А. Лачинов опубликовал первое в мире исследование о передаче электрической энергии на дальние расстояния.
- 1888 г. А. Г. Столетов исследовал фотоэлектрические явления и построил первый фотоэлемент. М. О. Доливо-Добровольский изобрел трехфазную систему электрических цепей. Феррарис открыл явление вращающегося магнитного поля. Г. Р. Герц экспериментально доказал существование электромагнитных волн.
- 1891 г. Построена первая трехфазная линия электропередачи (Лауфен — Франкфурт-на-Майне, 175 км, 200 кВт, 15 кВ).
- 1895 г. А. С. Попов изобрел беспроволочный телеграф и построил первый радиоприемник (грозоотметчик).
- 1897 г. А. С. Попов установил возможность радиолокации с помощью беспроволочного телеграфа.
- 1900 г. А. С. Попов организовал радиосвязь острова Готланд с материком для руководства работами по снятию с камней броненосца.
- 1919 г. Принято решение о строительстве Каширской ГРЭС на подмосковном угле. Начала работать в Нижнем Новгороде первая в мире передающая радиотелефонная станция на генераторных лампах.

- 1920 г. Принято постановление ВЦИК о создании комиссии ГОЭЛРО. VIII Всероссийский съезд Советов утвердил план ГОЭЛРО.
- 1922 г. Вступила в эксплуатацию первая в России линия электропередачи на напряжение 110 кВ (Кашира — Москва, 120 км)
- 1932 г. Начала работать Днепровская ГЭС.
- 1933 г. Введена в эксплуатацию первая линия электропередачи на напряжение 220 кВ (Ленинград — Свирь).
- 1954 г. Построена первая в мире атомная электростанция в г. Обнинске.
- 1956 г. Введена в эксплуатацию линия электропередачи на напряжение 400 кВ (Волжская ГЭС, 891 км).
- 1959 г. Введена первая в мире линия электропередачи на напряжение 500 кВ.
- 1962 г. Сооружена передача постоянного тока на напряжение 800 кВ (Волгоград — Донбасс).
- 1967 г. Начата эксплуатация электропередачи переменного тока на напряжение 750 кВ (Конаково — Москва).
- 1973 г. Построена атомная электростанция на быстрых нейтронах (г. Шевченко).

# ГЛАВА 1

## НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Физическую основу электротехники составляют электрические и магнитные явления. Содержание же электротехники как отрасли науки заключается в техническом использовании этих явлений.

Прежде чем приступить к изучению теоретической части электротехники, необходимо возвратиться к курсу физики, в котором изучаются электрические и магнитные явления, вспомнить уже известные и столь необходимые в данном случае понятия и определения.

**Электропроводность** — это свойство вещества проводить под действием не изменяющегося во времени электрического поля не изменяющийся во времени электрический ток.

В данное определение входят еще два понятия: электрическое поле и электрический ток, которые рассмотрены далее.

### 1.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В современной науке утвердилось представление о поле как о физической реальности, существующей наряду с веществом.

Электромагнитное поле как вид материи характеризуется тем, что *оказывает силовое воздействие на заряженные частицы, степень которого зависит от скорости движения частиц и величины их электрического заряда.*

В зависимости от условий наблюдения электромагнитное поле проявляется в целом или как одна из двух его сторон: электрическое поле или магнитное поле.

#### **Элементарные частицы и их электромагнитное поле**

В структуру атомов вещества входят элементарные частицы. Некоторые из них обладают электрическим зарядом.

Элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом (например, электроны и протоны), окружены электромагнитным полем. Эти частицы не существуют отдельно от их электромагнит-

ного поля, т.е. между заряженной частицей и ее электромагнитным полем точной границы нет.

Однако полагают, что электрический заряд сосредоточен в весьма малой области пространства, и тогда говорят о частице, обладающей электрическим зарядом. Вне этой области существует электромагнитное поле, а объемная плотность электрического заряда равна нулю.

Электрон и протон имеют равный по величине ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл), но противоположный по знаку заряд, который считается элементарным (наименьшим известным).

**Элементарный электрический заряд — это свойство электрона или протона, характеризующее их взаимосвязь с собственным электрическим полем и их взаимодействие с внешним электрическим полем.**

Электромагнитное поле может существовать отдельно от электрически заряженных частиц. Подтверждением этому являются электромагнитные волны, которые распространяются в пространстве (радиоволны).

## Электростатическое поле

Как электромагнитное поле в целом, так и обе его стороны характеризуются силовым воздействием на заряженные частицы.

**Электрическое поле характеризуется воздействием на электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и не зависящей от ее скорости.**

Обычным состоянием окружающих нас тел является состояние электрически нейтральное, хотя они и состоят из частиц, имеющих электрический заряд. Это объясняется равенством общего положительного заряда ядер атомов общему отрицательному заряду электронов.

Тело может получить электрический заряд в результате какого-либо процесса, который приведет к неравенству в объеме тела или части его положительного и отрицательного зарядов. В обоих случаях заряженные частицы не пропадают, а передаются от одного тела другому или перемещаются в данном теле, т.е. происходит пространственное разделение положительно и отрицательно заряженных частиц.

*Поэтому электрический заряд тела (системы тел) всегда равен алгебраической сумме элементарных электрических зарядов.*

Электризация тел может быть осуществлена трением, электростатической индукцией или в результате других физических и химических процессов.



Неподвижное тело, обладающее электрическим зарядом, так же как и неподвижная элементарная заряженная частица, окружено электрическим полем. Электрическое поле неподвижных заряженных тел в отсутствие в них электрических токов называется *электростатическим*.

Силовой характеристикой электрического поля является его напряженность. С помощью величины напряженности можно оценивать интенсивность электрического поля и определять силу, действующую со стороны поля на заряженную частицу.

О напряженности электрического поля далее будет сказано подробнее. Но уже теперь можно отметить, что *напряженность электростатического поля не изменяется с течением времени*.

## Закон Кулона

Отмеченное ранее свойство электрического поля — силовое действие на заряженные частицы и тела — используется с целью его обнаружения и изучения. Для этого нужно поместить в пространство, окружающее тело с зарядом  $Q_1$ , другое тело с зарядом  $Q_2$  (рис. 1.1). Первое тело вместе с его полем будем называть *исследуемым*, а второе — *пробным*.

Опыт показывает, что на каждое из двух заряженных тел действуют одинаковые силы  $F_3$ , направленные так, что тела с зарядами одного знака отталкиваются, а тела с зарядами разных знаков притягиваются.

Электрическое поле пробного тела распределено в том же пространстве, что и исследуемое поле. Поэтому исследуемое поле при наличии в нем пробного заряженного тела должно отличаться от того поля, которое связано с уединенным исследуемым телом.

В соответствии с принципом наложения можно полагать, что два заряженных тела окружены общим электрическим полем, которое получается в результате наложения двух полей, каждое из которых связано со своим заряженным телом, когда последнее уединено.

В таком случае силу  $F_3$  можно рассматривать как результат силового действия общего электрического поля на каждое из заряженных тел. Количественно это действие определяется по формуле закона Кулона (1.1), которая справедлива для точечных заряженных тел.

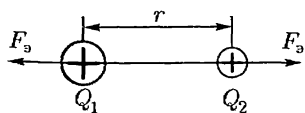


Рис. 1.1

Заряженное тело называется *точечным*, если его линейные размеры очень малы в сравнении с расстоянием от него до точек, в которых рассматривается его электрическое поле.

Величина силы, с которой на каждое из двух точечных заряженных тел, расположенных в среде, действует их общее электрическое поле, пропорциональна произведению зарядов этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F_{\text{э}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_a r^2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2}, \quad (1.1)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  — заряды точечных тел;  $r$  — расстояние между их центрами;  $\frac{1}{4\pi \epsilon_0}$  — коэффициент пропорциональности, определенный вы-

бором системы единиц;  $\epsilon_a(\epsilon_r)$  — абсолютная (относительная) диэлектрическая проницаемость среды.

Величина  $\epsilon_0$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума, которая называется электрической постоянной, имеющей в Международной системе единиц (СИ) численное значение:

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{фарад}}{\text{метр}} \left( \frac{\Phi}{\text{м}} \right).$$

Другие величины, входящие в формулу (1.1), имеют следующие единицы измерения: сила  $[F_{\text{э}}]$  — ньютон (Н); количество электричества (электрический заряд)  $[Q]$  — кулон (Кл).

Электрические и магнитные единицы в СИ установлены для рационализированной формы уравнений, предусматривающей отсутствие постоянного множителя  $4\pi$  в наиболее важных и часто используемых уравнениях электротехники. Наличие этого множителя в знаменателе формулы (1.1), которая тоже написана в рационализированной форме, обусловлено сферической симметрией электрического поля точечного заряженного тела.

Относительная диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_r = \epsilon_a / \epsilon_0$  — табличная величина (см. прил. 1). Откуда абсолютная диэлектрическая проницаемость среды (диэлектрика)  $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r$ .

## Напряженность электрического поля

Предположим, что размеры пробного тела и его заряд столь малы, что заряд  $Q_1$  исследуемого тела и его электрическое поле не изменяются, т. е. остаются такими же, как и в случае уединения. Пробное тело при этом можно рассматривать лишь как «инструмент» для регистрации электрической силы. Помещая пробное заряженное тело в различные точки, можно исследовать интенсивность электрического поля, пределы его распространения.

Согласно закону Кулона, сила пропорциональна величине пробного заряда. В связи с этим интенсивность электрического поля в

данной точке удобно оценивать величиной силы, приходящейся на единицу положительного заряда пробного тела, расположенного в той же точке, т.е. отношением  $F_3/Q_2$ .

**Напряженность электрического поля** — векторная величина, характеризующая электрическое поле и определяющая силу, действующую на заряженную частицу (тело) со стороны электрического поля.

В численном выражении напряженность электрического поля равна отношению силы, действующей на заряженную частицу (пробное тело), к ее заряду:

$$E = F_3 / Q. \quad (1.2)$$

Направление напряженности электрического поля совпадает с направлением силы, действующей на частицу (пробное тело) с положительным зарядом.

Единица напряженности электрического поля

$$[E] = \frac{\text{НЬЮТОН}}{\text{КУЛОН}} = \frac{\text{ВОЛЬТ}}{\text{МЕТР}} \text{ (В/м)}.$$

Эта единица напряженности электрического поля названия не имеет.

## Линии напряженности электрического поля

Для наглядного изображения электрического поля пользуются линиями напряженности или силовыми линиями. Линии напряженности электрического поля проводятся так, что вектор напряженности совпадает с касательной в каждой точке этой линии.

Силовые линии одиночного точечного заряженного тела представляют собой радиальные прямые, проведенные через точку, в которой находится это тело, так как в любой точке окружающего

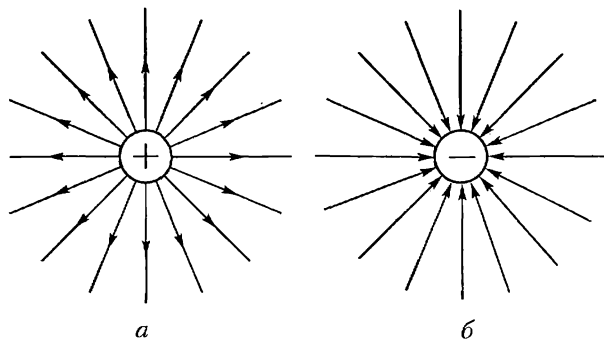


Рис. 1.2

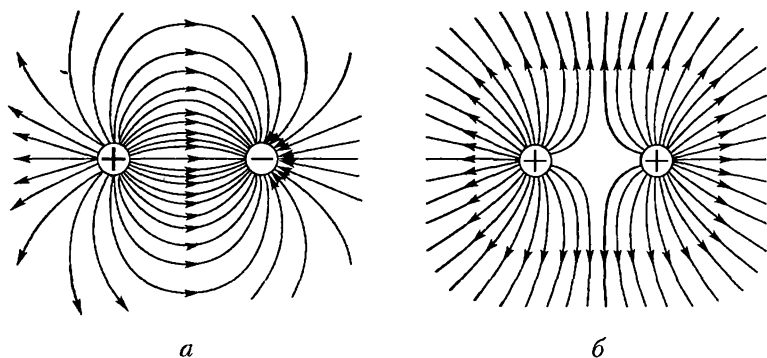


Рис. 1.3

пространства сила, действующая на пробное тело, направлена по прямой, соединяющей центры заряженных тел.

Если заряд тела положительный, силовые линии направлены от центра тела (рис. 1.2, а), если отрицательный — то к центру тела (рис. 1.2, б).

Рассмотрим электрическое поле группы заряженных точечных тел. Напряженность результирующего поля в каждой точке равна геометрической сумме напряженностей полей, обусловленных всеми зарядами. На рис. 1.3 представлено поле простейшей группы из двух точечных тел, обладающих одинаковыми по величине зарядами: а — разноименными; б — одноименными.

*Электрическое поле называется однородным (равномерным), если напряженность его во всех точках одинакова по величине и направлению.*

Равномерное поле получается между двумя параллельными пластинами, размеры которых велики по сравнению с расстоянием между ними (рис. 1.4).

### Задачи

**Задача 1.1.** Определить силу, действующую на каждое из двух точечных заряженных тел в воздухе, если электрические заряды тел  $Q_1 = 0,8 \cdot 10^{-6}$  Кл,  $Q_2 = 1,6 \cdot 10^{-6}$  Кл, расстояние между ними 20 см.

**Решение.** Для решения задачи используем формулу (1.1), подставив в нее численные значения величин:

$$F_3 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} = \frac{0,8 \cdot 10^{-6} \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot 36\pi}{4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 0,2^2} = 0,288 \text{ Н.}$$

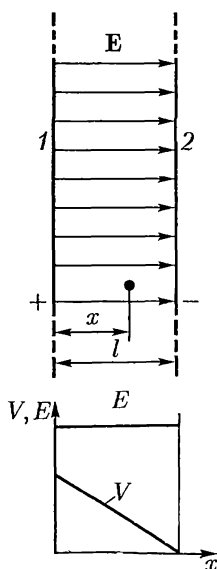


Рис. 1.4

**Задача 1.2.** Электрическое поле системы из двух точечных тел, обладающих одинаковым зарядом, действует на каждое из этих тел в вакууме с силой 0,144 Н. При расстоянии между телами 5 см определить величину заряда тел.

**Задача 1.3.** Три точечных заряженных тела расположены в вершинах воображаемого равностороннего треугольника, сторона которого равна 20 см. Определить силу, которую испытывает каждое тело, если заряд их одинаковый:  $Q = 8 \cdot 10^{-7}$  Кл.

**Задача 1.4.** Три точечных заряженных тела расположены в вершинах воображаемого прямоугольного треугольника, гипотенуза которого 20 см, а острые углы 30 и 60°. Определить силу, которую испытывают тела, если заряд их одинаковый:  $Q = 0,6 \cdot 10^{-6}$  Кл.

## 1.2. ЭНЕРГИЯ, ЗАТРАЧЕННАЯ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрим свободную частицу с положительным зарядом  $Q$  в равномерном электрическом поле (рис. 1.5). Эта частица будет перемещаться по направлению действующей на нее силы  $F_3$ . При перемещении частицы на пути  $l$  между точками 1 и 2 затрачивается энергия (совершается работа):  $W_{1,2} = A_{1,2} = F_3 l$ .

Учитывая формулу (1.2), выразим энергию через напряженность электрического поля  $E$ :  $W_{1,2} = A_{1,2} = Eq l$ .

Работа при перемещении заряженной частицы совершается в результате силового взаимодействия частицы с внешним полем. Численно она пропорциональна напряженности поля и величине заряда.

Работа считается положительной, если заряженная частица перемещается по направлению сил поля, и отрицательной, если перемещение вызывается действием посторонних сил против направления сил электрического поля.

Аналогичные выводы можно сделать и для неравномерного поля, определяя работу при перемещении заряженной частицы между точками 1 и 2 как сумму элементарных значений работы  $dA$ , совершаемой на каждом бесконечно малом отрезке пути  $dl$ , в пределах которого напряженность поля можно считать постоянной:

$$A_{1,2} = Q \int_1^2 E_n dl, \quad (1.3)$$

где  $E_n$  — проекция вектора напряженности поля на направление движения заряженной частицы.

Предположим теперь, что заряженная частица движется по замкнутому пути 1—4—2—5—1. Если частица движется по участку 1—4—2, то перемещение ее в направлении от точки 1 к точке 2 сов-

падает с направлением сил поля, т.е. совершается положительная работа  $A_{1,2}$ . При движении по участку пути 2—5—1 силы поля направлены против движения и работа  $A_{1,2}$  отрицательна.

Общая величина работы  $A$  на замкнутом пути 1—4—2—5—1 равна нулю:

$$A = Q \oint E_n dl = 0. \quad (1.4)$$

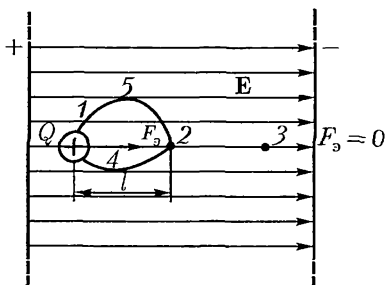


Рис. 1.5

Невыполнение этого условия означало бы, что имеется замкнутый путь, вдоль которого работа положительна.

В таком случае открылась бы возможность, не пополняя энергии электрического поля, получить неограниченную величину положительной работы, что противоречило бы закону сохранения энергии. Отсюда следует равенство  $A_{1,4,2} = -A_{2,5,1}$ .

Но работа на пути 2—5—1 численно равна и противоположна по знаку той работе, которая была бы совершена при движении заряженной частицы по тому же пути, но в обратную сторону, т.е.

$$A_{1,4,2} = A_{1,5,2}.$$

Оба пути (1—4—2 и 1—5—2) выбраны произвольно. Отсюда следует, что *работа, совершаемая силами поля при перемещении заряженной частицы между двумя точками, не зависит от выбранного пути, а определяется положением начальной и конечной точек пути (1 и 2), т.е. расстоянием  $l$ .*

## Электрическое напряжение. Потенциал

Количество работы зависит не только от величин, относящихся к полю  $E$ ,  $l$ , но и от заряда частицы  $Q$ . Поэтому с энергетической точки зрения поле вдоль рассматриваемого пути характеризуется работой, приходящейся на единицу заряда:  $U_{1,2} = A_{1,2} / Q$ . Это отношение называется **электрическим напряжением**.

Электрическое напряжение есть энергетическая характеристика поля вдоль рассматриваемого пути из одной точки в другую, которой оценивается возможность совершения работы при перемещении заряженных частиц между этими точками.

Нетрудно найти связь напряженности равномерного поля с напряжением между двумя любыми точками:

$$U = \frac{A}{Q} = \frac{EQl}{Q}; U = El. \quad (1.5)$$

$$[U] = [A/Q] = \frac{\text{джоуль}}{\text{кулон}} = \text{вольт (В)}.$$

Применяются также производные от вольта: 1 киловольт (кВ) =  $10^3$  В; 1 милливольт (мВ) =  $10^{-3}$  В; 1 микровольт (мкВ) =  $10^{-6}$  В.

Учитывая, что работа, совершаемая при перемещении заряженной частицы в электрическом поле, зависит от положения начальной и конечной точек пути, для расчета можно ввести энергетическую характеристику поля в каждой точке, величина которой является функцией положения точки. Такой характеристикой является электрический потенциал.

Предположим, что пробная частица, обладающая зарядом  $Q$ , расположена в точке 1 электрического поля (см. рис. 1.5) и, следовательно, находится под действием силы  $F_3$ . Электрическое поле действует на эту частицу подобно тому, как действует на тело поле тяготения, т. е. частица обладает потенциальной энергией  $W_1$ .

При перемещении заряженной частицы из точки 1 в точку 2 совершается работа  $A_{1,2}$ , связанная с действием той же силы  $F_3$ . Работу  $A_{1,2}$  нужно рассматривать как убыль потенциальной энергии заряженной частицы при перемещении ее между указанными точками.

Следовательно, потенциальная энергия в точке 2:  $W_2 = W_1 - W_{1,2}$ .

Отношение потенциальной энергии заряженной частицы, помещенной в данную точку электрического поля, к величине ее заряда называется электрическим потенциалом поля в этой точке:

$$V_1 = W_1/Q; \quad V_2 = W_2/Q.$$

Таким образом, напряжение между двумя точками электрического поля равно разности потенциалов поля в этих точках:

$$U_{1,2} = \frac{W_{1,2}}{Q} = \frac{W_1 - W_2}{Q} = V_1 - V_2. \quad (1.6)$$

Аналогичные рассуждения можно привести, рассматривая заряженную частицу в точках 2, 3 и др.

Потенциальная энергия заряженной частицы в электрическом поле уменьшается при переходе от точки к точке по направлению линий напряженности. Она становится равной нулю за пределами электрического поля, где сила  $F_3 = 0$ .

При наличии электрического поля бесконечной протяженности сила  $F_3$  равна нулю в бесконечности.

При обратном перемещении заряженной частицы против силы взаимодействия ее с электрическим полем потенциальная энергия будет возрастать за счет работы внешней неэлектрической силы.

Потенциальную энергию можно определить относительно какого-либо уровня, принятого за начальный. При теоретических исследованиях за начальный потенциал принимают потенциал бесконечно удаленной точки поля, где он равен нулю. Таким образом, потенциал любой точки электрического поля характеризуется энергией, которая затрачивается (или может быть затрачена) на перемещение, единицы заряда из данной точки электрического поля в бесконечность (или наоборот).

При решении практических задач, относящихся к электрическим установкам, обычно полагают начальным потенциал земли, который принимают равным нулю.

### Эквипотенциальные поверхности и линии

Потенциал электрического поля изменяется от точки к точке. Вместе с тем в поле можно выделить ряд точек, имеющих одинаковый потенциал. Геометрическое место точек с одинаковым потенциалом называется поверхностью уровня потенциала или эквипотенциальной поверхностью.

В электрическом поле любой конфигурации линии напряженности и эквипотенциальные поверхности пересекаются под прямым углом. В этом нетрудно убедиться, рассматривая в эквипотенциальной поверхности около некоторой точки  $a$  любой бесконечно малый отрезок пути (рис. 1.6, б).

Согласно определению эквипотенциальной поверхности ( $V = \text{const}$ ), работа при перемещении заряженной частицы вдоль любого пути  $A_{1,2} = Q(V_1 - V_2)$  равна нулю. Это условие выполняется только в том случае, если вектор напряженности поля в точке  $a$  направлен перпендикулярно отрезку  $dl$  (электрическая сила действует в направлении, перпендикулярном перемещению частицы).

Отсюда следует, что эквипотенциальные поверхности равномерного поля — плоскости, перпендикулярные линиям напряженности

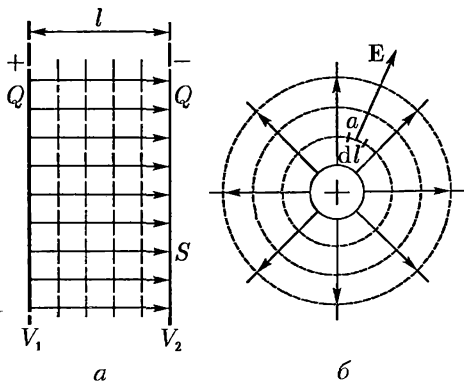


Рис. 1.6



(рис. 1.6, а), а поля одиночного точечного заряженного тела — сферические поверхности, центр которых совпадает с центром поля (см. рис. 1.6, б).

С помощью силовых и эквипотенциальных линий (эквипотенциальная линия — след эквипотенциальной поверхности) оказывается возможным наглядно изобразить картину электрического поля.

## Проводники в электрическом поле

В металлическом теле (рис. 1.7) под действием внешнего электрического поля с напряженностью  $E_1$  свободные электроны перемещаются к одной поверхности, которая получает отрицательный заряд. Противоположная поверхность получает положительный заряд.

Явление смещения свободных заряженных частиц на поверхность проводника, помещенного в электрическом поле, называется электростатической индукцией.

В результате разделения зарядов в проводнике создается внутреннее электрическое поле с напряженностью  $E_2$ , направленное противоположно внешнему. Движение свободных электронов в проводнике при электростатической индукции существует временно, но продолжается до тех пор, пока напряженности внешнего и внутреннего полей не станут равными.

При равенстве  $E_1 = E_2$  разделение зарядов в проводнике прекращается, так как результирующая напряженность электрического поля равна нулю.

Благодаря наличию в проводнике свободных заряженных частиц электростатическое поле в нем существовать не может.

Напряжение между двумя любыми точками проводника равно нулю, следовательно, потенциал его во всех точках один и тот же. Таким образом, проводник представляет собой эквипотенциальный объем, а его поверхность является эквипотенциальной поверхностью результирующего электрического поля.

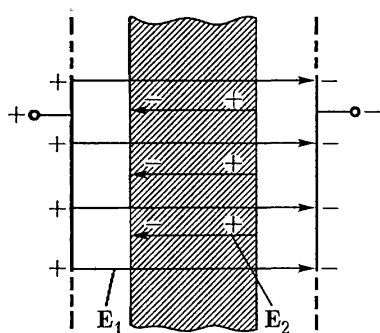


Рис. 1.7

Если в электрическое поле поместить проводник с полостью внутри, то и в этом случае заряженные частицы будут только на поверхности. Внутри металла и полости электрическое поле отсутствует.

Это свойство проводников используется для электростатического экранирования, т.е. для защиты какого-либо устройства от действия внешнего электрического поля (за-

щитаемый объект помещается в металлическую коробку или сетку с малыми отверстиями).

## Электрическая емкость

При анализе электростатической системы, состоящей из электропроводного заряженного тела и его электрического поля, определяют характеристики поля (напряженность, потенциал). Их можно определить в каждой точке пространства, где есть электрическое поле. Характеристиками заряженного тела в этой системе являются его электрический заряд  $Q$  и потенциал  $V$ , причем эти величины характеризуют тело не в отдельных точках, а в целом и связаны между собой. Далее (см. гл. 7) показано, что в вакууме связь заряда и потенциала в этом случае выражается пропорциональной зависимостью  $Q = CV$ , где коэффициентом пропорциональности является величина  $C$ , называемая *электрической емкостью тела*:

$$C = Q/V.$$

Таким образом, электрическая емкость заряженного тела характеризуется величиной заряда, который нужно сообщить этому телу для того, чтобы его потенциал изменился на единицу.

Наибольшее значение имеют системы из двух электрически изолированных между собой электропроводных тел, которые получают равные по величине, но противоположные по знаку заряды. Электрическую емкость подобных систем приходится определять и учитывать при проектировании и расчетах электротехнических и радиотехнических устройств и установок. В электротехнике и радиотехнике широко применяют специальные устройства, которые называют *электрическими конденсаторами*.

## Задачи

**Задача 1.5.** Найти распределение потенциалов в поле между двумя заряженными параллельными пластинами бесконечной протяженности (см. рис. 1.4).

**Решение.** В 1.2 установлено, что напряженность электрического поля между двумя бесконечными заряженными плоскостями одинакова во всех точках. Учитывая это, для определения потенциала воспользуемся формулой (1.6), приняв потенциал отрицательной пластины равным нулю.

Напряжение между пластиной 1 и произвольной точкой  $x$ :

$$U_{1,x} = Ex = V_1 - V_x.$$

Потенциал точки  $x$ :

$$V_x = V_1 - U_{1,x} = V_1 - Ex.$$

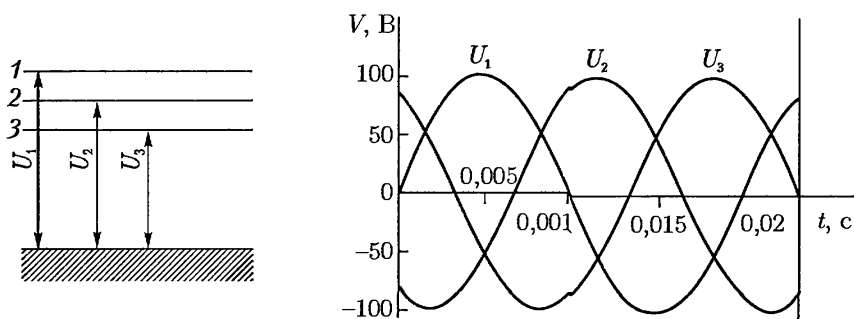


Рис. 1.8

При  $V_2 = 0$  потенциал положительной пластины равен напряжению между пластинами:  $V_1 = V_{1,2} - El$ .

Потенциал произвольной точки  $x$ :

$$U_x = U_{1,2}(1 - x/l).$$

**Вывод.** Между двумя бесконечными плоскостями, заряженными противоположно с одинаковой плотностью заряда, потенциал изменяется по линейному закону, уменьшаясь на пути от положительной пластины к отрицательной. На рис. 1.4 показан график распределения потенциала между пластинами.

**Задача 1.6.** Между параллельными пластинами, размеры которых значительно больше расстояния между ними, напряжение  $U = 100$  В. Определить потенциалы пластин, поочередно полагая равным нулю потенциал точки, отстоящей от отрицательной пластины на расстоянии 0;  $1/4$ ;  $1/2$  общего расстояния между пластинами. Построить график распределения потенциала во всех случаях.

**Задача 1.7.** Напряжение между каждым из трех проводов линии передачи и землей изменяется в соответствии с графиками на рис. 1.8. Полагая потенциал земли равным нулю, определить напряжения между каждой парой проводов в моменты времени  $t_1 = 0$ ;  $t_2 = 0,005$  с;  $t_3 = 0,01$  с.

## ГЛАВА 2

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Известно несколько видов явления электрического тока, различающихся в зависимости от типа вещества, в котором оно возникает при соответствующих условиях.

Деление веществ по степени электропроводности на проводники, полупроводники и непроводники (диэлектрики) связано с понятием об электрическом токе проводимости.

### 2.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ПРОВОДНИКАХ

Проводники разделяют на два вида в зависимости от типа носителей электрического заряда, образующих электрический ток. В проводниках первого вида (металлы) ток образуется свободными электронами, поэтому электропроводность их называется электронной. В проводниках второго вида (расплавленные соли, растворы солей, кислот, щелочей) носителями электрического заряда являются ионы — заряженные атомы и молекулы.

### Электронная теория строения металлов

Представление об электронной структуре атомов послужило основанием для классической теории строения металлов. В этой теории учитывается, что валентные электроны наружного слоя уединенного атома слабо связаны с ядром. При образовании кристаллов на электроны каждого атома действуют ядра других атомов. В этих условиях некоторые валентные электроны утрачивают постоянную связь с одним ядром и переходят от одного атома к другому. Такие электроны называют свободными. Атомы, потерявшие электроны из валентного слоя, становятся положительными ионами и располагаются в узлах кристаллической решетки, совершая тепловые колебания около положения равновесия. Общий заряд свободных электронов в кристалле равен положительному заряду ионов, поэтому кристалл остается электрически нейтральным.

Свободные электроны тоже участвуют в хаотическом тепловом движении, но перемещаются по всему кристаллу, образуя своеоб-

разный электронный газ. Предполагается, что свободные электроны обладают свойствами молекул идеального газа: они не взаимодействуют на расстоянии между собой и с другими частицами металла, но при своем движении могут сталкиваться с ионами кристаллической решетки. Электронная теория строения металлов была разработана в связи с общей проблемой электропроводности веществ. Электропроводность, теплопроводность, электрическое сопротивление легко объяснить при введении понятия о свободных электронах.

Электронная теория объясняет плохую электропроводность у ряда веществ отсутствием свободных электронов. Такие вещества называют диэлектриками. Однако не все электрические свойства твердых тел, в том числе и металлов, можно объяснить с помощью электронной теории. Применение ее в ряде случаев противоречит опытным данным.

## **Явление электрического тока проводимости**

На заряженные частицы в электрическом поле действуют электрические силы  $F_z$ . Если электрическое поле поддерживается в проводнике, то свободные заряженные частицы, участвующие в тепловом беспорядочном движении, приобретают составляющие скорости вдоль линий напряженности поля. При этом условии частицы движутся преимущественно в одном направлении: положительные — по направлению поля, а отрицательные — в обратную сторону.

**Явление направленного движения свободных носителей электрического заряда в веществе или в вакууме называется электрическим током проводимости.**

Частицы, образующие ток в веществе проводников, являются структурными элементами самих проводников. Поэтому электрический ток в проводниках второго вида сопровождается химическими изменениями и переносом вещества (например, явление электролиза).

Так как все электроны одинаковы, в проводниках первого вида электрический ток не сопровождается изменением химического состава проводника. Не обнаруживается и перенос вещества, так как масса электронов очень мала по сравнению с массой ядра.

## **Величина электрического тока проводимости**

Интенсивность электрического тока оценивается физической величиной, называемой силой электрического тока. В практике эту величину называют электрическим током или просто током.

Величина тока проводимости определяется электрическим зарядом всех частиц, проходящих через поперечное сечение проводника в единицу времени. Предположим, что через поперечное сечение проводника  $S$  за время  $t$  равномерно проходит  $n$  электронов. Заряд каждого электрона  $e$ , поэтому общий заряд частиц, прошедших через сечение за это время,  $Q = en$ .

Отношение

$$Q / t = en / t = I \quad (2.1)$$

выражает заряд, перенесенный электронами через сечение проводника за 1 с, т. е. ток  $I$ .

Единица измерения электрического тока ампер (А) в Международной системе единиц является одной из основных.

В практике применяют также производные от ампера: 1 килоампер (кА) =  $10^3$  А — для измерения больших токов; 1 миллиампер (мА) =  $10^{-3}$  А и 1 микроампер (мкА) =  $10^{-6}$  А — для измерения малых токов.

Положительным направлением электрического тока условно принято считать направление, в котором движутся положительно заряженные частицы. В металлах положительное направление тока противоположно направлению движения электронов.

Электрический ток, длительно не изменяющийся по величине и направлению, называется **п о с т о я н н ы м** (1 на рис. 2.1). Таким образом, для постоянного тока характерно изменение заряда в одном направлении с одинаковой интенсивностью. Если ток с течением времени изменяется, то он называется **переменным** (2, 3 на рис. 2.1).

В этом случае по оси ординат на графиках откладываются мгновенные значения тока, которые определяются изменением заряда  $q$  за бесконечно малый промежуток времени:

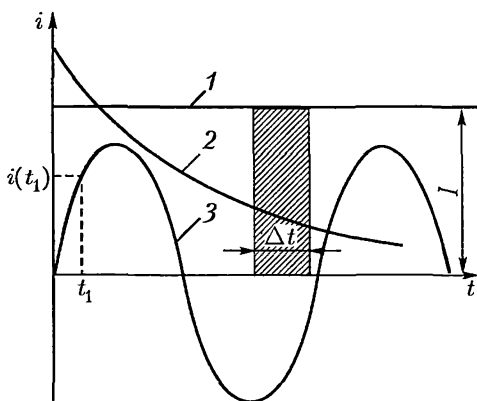


Рис. 2.1

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (2.2)$$

На кривой 3 (см. рис. 2.1) показан мгновенный ток  $i(t_1)$  в момент времени  $t_1$ . В практических расчетах пользуются понятием плотности электрического тока проводимости  $J$ .

При токе в проводнике  $I$  и поперечном сечении проводника  $S$  численно плотность тока определяется отношением

$$J = I/S. \quad (2.3)$$

Единица плотности тока

$$[J] = \frac{\text{ампер}}{\text{метр}^2} (\text{А/м}^2).$$

В практике площадь поперечного сечения проводов чаще выражают в  $\text{мм}^2$  и соответственно плотность тока — в  $\text{А/мм}^2$ .

При постоянном токе, несмотря на движение заряженных частиц в проводнике, распределение заряда в нем стационарно, так как в любом элементе объема за некоторый промежуток времени заряд уходящих и входящих частиц одинаков.

Электрическое поле, связанное с движущимися заряженными частицами в проводнике, называется **стационарным** в отличие от электростатического, связанного с неподвижными заряженными частицами.

Электрический ток в проводнике и соответствующее ему стационарное электрическое поле нужно поддерживать, непрерывно пополняя энергию поля, которая расходуется в связи с движением заряженных частиц, превращаясь в теплоту.

## Задачи

**Задача 2.1.** Линия до розетки выполнена проводом, площадь поперечного сечения которого  $S_1 = 4 \text{ мм}^2$ . Гибкий шнур, соединяющий настольную лампу с розеткой, имеет сечение  $S_2 = 2,5 \text{ мм}^2$ . а) На каком участке плотность тока больше? б) Сравнить заряды, проходящие через поперечное сечение провода, на обоих участках.

**Задача 2.2.** В целях пожарной безопасности для проводов устанавливаются допустимые величины тока  $I_{\text{доп}}$  и плотности тока  $J_{\text{доп}}$ . Для проводов, указанных в прил. 3, сравнить величины: а) допустимого тока; б) допустимой плотности тока.

**Задача 2.3.** Начертить зависимость заряда от времени  $q(t)$ , соответствующую постоянному току (прямая 1 на рис. 2.1).

**Задача 2.4.** Уравнение тока (кривая 3 на рис. 2.1)  $i = 20 \sin 314t$ . Определить ток  $i_1$  в момент времени  $t_1 = 5/3 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ .

**Задача 2.5.** Уравнение тока (кривая 2 на рис. 2.1)  $i = 40e^{-t/\tau}$ , где  $\tau = 0,5 \text{ с}$ . Определить мгновенный ток в моменты времени  $t_1 = 0$ ;  $t_2 = 0,5 \text{ с}$ .

## 2.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ. ЗАКОН ОМА

Опытами установлено, что интенсивность электрического тока пропорциональна напряженности электрического поля и зависит от свойств проводящего вещества.

Для практических целей представляет интерес определение величины тока в проводнике, если известны его форма и размеры.

### Электрическая проводимость

Плотность электрического тока в проводнике выражается произведением напряженности электрического поля  $E$  и удельной электрической проводимости  $\gamma$ :

$$J = \gamma E. \quad (2.4)$$

*Удельная электрическая проводимость характеризует электропроводность вещества, т. е. способность к образованию внутри вещества электрического тока под действием электрического поля.*

Рассмотрим отрезок проводника длиной  $l$  и поперечным сечением  $S$  (рис. 2.2).

Наличие электрического поля в проводнике означает, что потенциал его изменяется при переходе от точки к точке, т. е. проводник не является эквипотенциальным объемом. Если поле равномерно и направлено вдоль проводника, то разность потенциалов между его концами можно выразить по формуле (1.5):  $U = El$ .

Считая электрический ток равномерно распределенным по сечению ( $J = \text{const}$ ) и учитывая формулу (2.4), получим

$$\frac{I}{S} = \gamma \frac{U}{l},$$

отсюда

$$I = \frac{\gamma S}{l} U.$$

Отношение

$$\frac{I}{U} = \frac{\gamma S}{l} = G \quad (2.5)$$

называется электрической проводимостью проводника и обозначается  $G$ .

Электрическая проводимость показывает, какой ток образуется в проводнике данных размеров при напряжении на его концах в 1 В.

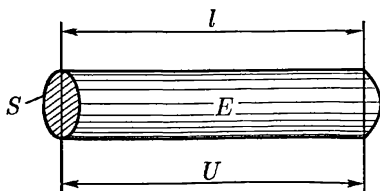


Рис. 2.2



Единица электрической проводимости:  $[G] = [I/U] = \text{ампер/вольт} =$   
 $= \text{сименс (См)}$ .

## Электрическое сопротивление

Зависимость (2.5) можно записать в таком виде:

$$U/I = R, \text{ тогда } \boxed{I = U/R}, \quad (2.6)$$

где  $R = 1/G$  — величина, обратная проводимости, называемая электрическим сопротивлением проводника.

Электрическое сопротивление — это противодействие, которое атомы и молекулы проводника оказывают направленному движению зарядов в проводнике.

Свойства токопроводящего материала характеризуются также величиной, обратной удельной проводимости  $\gamma$ , называемой удельным сопротивлением

$$\rho = 1/\gamma. \quad (2.7)$$

Учитывая формулы (2.5) и (2.7), можно записать выражение для сопротивления проводника через его размеры

$$R = U/I = l/\gamma S = \rho l/S. \quad (2.8)$$

Единицей электрического сопротивления является сопротивление такого проводника, в котором при разности потенциалов на концах в 1 В устанавливается ток в 1 А:  $[R] = [U/I] = \text{вольт/ампер} =$   
 $= \text{ом (Ом)}$ .

По формулам (2.5) и (2.8) можно определить величины удельной проводимости  $\gamma$ , удельного сопротивления  $\rho$  и единицы их измерения. В СИ  $[\gamma] = 1/(\text{Ом} \cdot \text{м})$  и  $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$ .

В практике принято выражать длину проводов в м, а сечение в мм, поэтому в справочных таблицах удельная проводимость часто дается в  $\text{м}/(\text{Ом} \cdot \text{мм}^2)$ , а удельное сопротивление — в  $\text{Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ .

Для полупроводников и диэлектриков величина  $\rho$  обычно выражается в  $\text{Ом} \cdot \text{см}$ .

Выражение (2.6), т.е.  $I = U/R$ , является математическим выражением закона Ома для пассивного участка электрической цепи:

**ток в проводнике равен отношению напряжения на участке проводника к электрическому сопротивлению этого участка.**

Выражения  $U = IR$  и  $R = U/I$  являются производными закона Ома для пассивного участка электрической цепи.

## Зависимость электрического сопротивления от температуры

Электронная теория электропроводности так объясняет сущность электрического сопротивления металлов. Свободный пробег электронов ограничен соударением их с ионами, образующими кристаллическую решетку. При столкновении кинетическая энергия электронов передается кристаллической решетке металла. После каждого столкновения электроны под действием сил электрического поля снова набирают скорость и отдают энергию при столкновении. При этом проводник нагревается за счет работы сил электрического поля. Электроны выполняют роль посредника при преобразовании электрической энергии в теплоту, а величина сопротивления при данном токе определяется количеством энергии, преобразуемой в единицу времени (см. 3.3).

При увеличении температуры проводника усиливается тепловое хаотическое движение частиц, что увеличивает число столкновений и затрудняет упорядоченное движение электронов. Этим объясняется увеличение удельного электрического сопротивления металлов с ростом температуры.

Почти у всех металлов при рабочих температурах удельное сопротивление с ростом температуры увеличивается по линейному закону

$$\rho_2 = \rho_1 [1 + \alpha(t_2 - t_1)], \quad (2.9)$$

где  $\rho_1, \rho_2$  — удельные сопротивления при начальной и конечной температуре;  $\alpha$  — постоянный для данного металла коэффициент, называемый температурным коэффициентом сопротивления;  $t_1$  и  $t_2$  — начальная и конечная температура.

Для проводников второго рода величина  $\alpha$  отрицательна, следовательно, с увеличением температуры их сопротивление уменьшается за счет усиления (увеличения) ионизации.

Сопротивление проводников (коэффициент  $\alpha$  дан в прил. 2) определяется выражением:

$$R_2 = R_1 [1 + \alpha(t_2 - t_1)], \quad t_2 = \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot \alpha} + t_1 \quad (2.10)$$

Большая группа проводниковых материалов имеет постоянную величину удельного сопротивления (проводимости), не зависящую от тока и напряжения. Малая величина коэффициента  $\alpha$  обуславливает постоянство удельного сопротивления в рабочем интервале температур (от 0 до 100 °C), поэтому изменение тока в рабочих пределах не вызывает изменения сопротивления ( $R = \text{const}$ ).

Зависимость между током и напряжением  $I/(U)$  (вольт-амперная характеристика), выраженная графически, имеет

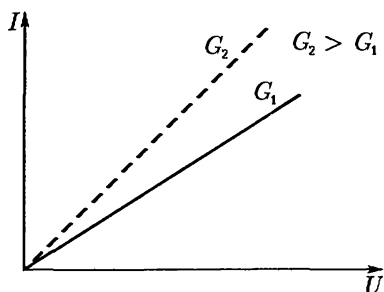


Рис. 2.3

вид прямой линии, проходящей через начала координат (рис. 2.3). Чем больше проводимость, тем больший ток образуется в проводнике при том же напряжении, поэтому вольт-амперная характеристика проводника идет круче при большей величине проводимости.

## Задачи

**Задача 2.6.** Определить сопротивление медного провода двухпроводной линии передачи при  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  и  $t_2 = 30^\circ\text{C}$ , если сечение провода  $S = 120 \text{ мм}^2$ , а длина линии  $l = 100 \text{ км}$ .

**Решение.** Из прил. 2 находим удельное сопротивление  $\rho$  меди при  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  и температурный коэффициент сопротивления  $\alpha$ :  $\rho = 0,0175 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ ;  $\alpha = 0,004 \text{ град}^{-1}$ .

Определим сопротивление провода при  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  по формуле (2.8), учитывая длину прямого и обратного проводов линии:

$$R_1 = 0,0175 \cdot \frac{100\,000 \cdot 2}{120} = 29,17 \text{ Ом.}$$

Сопротивление провода при  $t_2 = 30^\circ\text{C}$  найдем по формуле (2.10)

$$R_2 = 29,17(1 + 0,004 \cdot (30 - 20)) = 30,34 \text{ Ом.}$$

**Задача 2.7.** Определить температуру обмотки якоря генератора постоянного тока при работе, если сопротивление ее составляет  $0,12 \text{ Ом}$ . До начала работы при  $20^\circ\text{C}$  сопротивление обмотки было  $0,1 \text{ Ом}$ . Обмотка выполнена медным проводом.

**Задача 2.8.** Катушка из медной проволоки имеет  $N = 2000$  витков, средний диаметр витка  $D = 127 \text{ мм}$ , диаметр проволоки  $d = 2 \text{ мм}$ . Определить сопротивление катушки при  $0, 20, 60^\circ\text{C}$ .

**Задача 2.9.** Двухпроводная линия длиной  $2 \text{ км}$  имеет при  $40^\circ\text{C}$  сопротивление  $2,5 \text{ Ом}$ . Из какого материала (медь, алюминий, сталь) изготовлены провода этой линии, если их сечение  $50 \text{ мм}^2$ ?

## 2.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ВАКУУМЕ

В современной технике широко применяются электровакуумные приборы (электронные лампы, вакуумные фотоэлементы), в которых обеспечиваются условия для возникновения и поддержания электрического тока в среде, не обладающей электропроводностью.

## Электронная эмиссия

Рассмотрим двухэлектродную лампу (диод), схема которой показана на рис. 2.4. Два металлических электрода, находящихся внутри стеклянного или металлического баллона, из которого удален воздух, имеют выводы наружу, что позволяет подвести к ним электрическое напряжение. Один электрод соединен с отрицательным полюсом источника напряжения и называется катодом К. Другой электрод соединен с положительным полюсом источника и называется анодом А.

Разность потенциалов между электродами в вакууме создает электрическое поле, которое необходимо для возникновения и поддержания электрического тока между электродами. Однако этого условия недостаточно. Электрический ток не может возникнуть, если внутри баллона нет свободных заряженных частиц. Для того чтобы ток возник и поддерживался, необходимо в пространство между электродами непрерывно вводить свободные заряженные частицы. В электровакуумных приборах для этого используется физический процесс выхода свободных электронов из катода — электронная эмиссия.

Выход свободных электронов из металла может быть и при нормальной температуре. Но отделившиеся от металла электроны не могут удалиться более чем на несколько межатомных расстояний, так как металл, заряженный положительно, электростатическими силами притягивает их обратно. Процессы испускания и поглощения электронов металлом идут одновременно, поэтому около катода имеется электронное облако, которое тоже препятствует выходу электронов из металла. Электрическое поле между металлом и электронным облаком создает для свободных электронов на границе металл—вакуум потенциальный барьер с разностью потенциалов  $U_0$ .

Без специальных мер по увеличению кинетической энергии свободных электронов до величины, при которой возможно преодоление потенциального барьера, электронная эмиссия проявляется настолько слабо, что практически ее использовать нельзя.

Электрон может преодолеть потенциальный барьер и выйти из металла, если ему извне сообщить дополнительную энергию, равную ра-

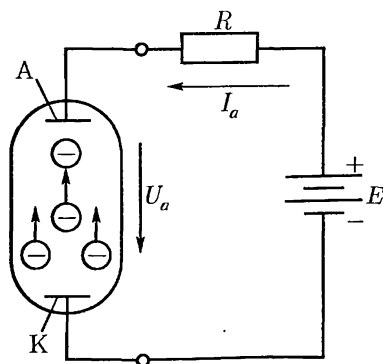


Рис. 2.4



Рис. 2.5

боте, которая затрачивается на перемещение электрона через поверхностный слой на границе металла с вакуумом. Величина этой работы, равная произведению заряда электрона  $e$  и напряжения  $U_0$ , называется работой выхода:

$$A_0 = eU_0. \quad (2.11)$$

Для свободных электронов металл схематически можно представить в виде потенциального ящика с плоским дном и вертикальными стенками высотой, равной работе выхода  $A_0$  (рис. 2.5).

## Вольт-амперные характеристики электровакуумных приборов

Одним из способов увеличения электронной эмиссии является нагревание металла. В этом случае эмиссия электронов называется термоэлектронной.

В электронной лампе источником свободных электронов (эмиттером) является катод, нагретый до определенной температуры; например, рабочая температура катода из вольфрама  $2250 - 2550^\circ\text{C}$ .

Применение в качестве эмиттеров материалов, характеризующихся меньшей работой выхода, чем вольфрам (окислы бария, стронция), позволяет значительно снизить рабочую температуру катода (до  $550 - 1000^\circ\text{C}$ ). Электроны, перешедшие из катода в вакуум, под действием электрического поля направляются на анод. При таких условиях промежуток между электродами электронной лампы является проводящим, а в цепи рис. 2.4 устанавливается электрический ток, называемый анодным ( $I_a$ ).

Величина анодного тока зависит от различных факторов, важнейшими из которых являются температура катода  $T$  и напряжение между электродами  $U_a$ . Эти зависимости, названные

вольт-амперными (анодными) характеристиками, показаны на рис. 2.6. С ростом напряжения ток сначала медленно, а затем резко возрастает, что объясняется увеличением скорости движения электронов к аноду.

При некоторой величине  $U_a$  и температуре катода  $T_1$  анодный ток достигает тока эмиссии  $I_{s1}$ , когда все электроны, покинувшие катод, достигают анода. Пологий участок вольт-амперной характеристики

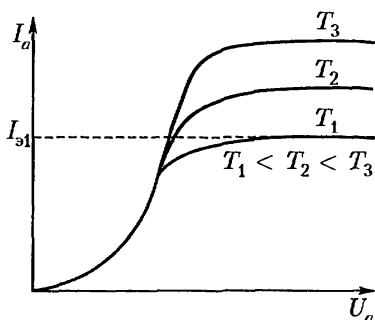


Рис. 2.6

называется участком насыщения. При увеличении температуры ток эмиссии возрастает, а пологий участок кривой  $I_a(U_a)$  располагается на графике выше.

Если потенциал катода оказывается выше потенциала анода ( $V_a < 0$ ), то ток в цепи практически равен нулю: электрическое поле направлено от катода к аноду; электроны, вылетевшие из катода, не могут достигнуть анода, так как под действием поля возвращаются на катод. Это «запирающее» свойство диода используется для выпрямления переменного тока.

Кроме двухэлектродной лампы в радиоэлектронике широко применяются трехэлектродные и многоэлектродные лампы, которые тоже имеют нелинейные вольт-амперные характеристики.

Энергия, необходимая для преодоления потенциального барьера, может быть сообщена электронам излучением (видимый свет, ультрафиолетовые и инфракрасные лучи и другие излучения).

Явление выхода электронов из металла под действием лучистой энергии — фотоэлектронная эмиссия (внешний фотоэффект) — было обнаружено в 1888 г. профессором Московского университета А. Г. Столетовым.

В качестве эмиттера фотоэлектрических катодов используются щелочноземельные элементы. Фотокатоды применяются в электронных приборах, реагирующих на излучения; эти приборы называются фотозелементами.

Если анод имеет положительный потенциал относительно катода, то в электрической цепи, содержащей фотозелмент с внешним фотоэффектом, устанавливается фототок, зависящий от ряда факторов, в том числе от интенсивности освещения, длины волны излучения и напряжения между анодом и катодом.

На рис. 2.7 представлены вольт-амперные характеристики вакуумного фотозлемента с сурьмяно-цезиевым фотокатодом. Каждая из них соответствует определенному световому потоку  $\Phi$ , действующему на фотокатод.

Энергия электронов может быть повышена бомбардировкой поверхности проводника потоком быстро движущихся электронов, называемых первичными. Электроны, покинувшие проводник в результате его бомбардировки первичными электронами, называются вторичными, а само явление выхода электронов — вторичной электронной эмиссией.

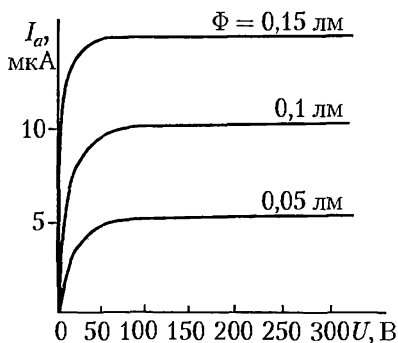


Рис. 2.7

Вторичная эмиссия может быть результатом бомбардировки проводника не только электронами, но и положительными ионами и другими частицами. Несмотря на то что в некоторых приборах вторичная эмиссия явление нежелательное, иногда ее все же используют.

Электроны из проводника могут быть вырваны действием сильного электрического поля (напряженность порядка  $10^6$  В/см). Такая эмиссия называется автоэлектронной или холодной. В приборах, работающих по принципу холодной эмиссии, наиболее распространен ртутный катод.

### **Контрольные вопросы**

1. При каких условиях электрический ток может поддерживаться в вакууме?
2. Что называется работой выхода электронов?
3. Объясните явление термоэлектронной эмиссии.
4. Объясните ход кривой, показывающей зависимость анодного тока диода от анодного напряжения. Как влияет на ход этой кривой изменение температуры?
5. В чем состоит явление фотоэлектронной эмиссии?
6. Что такое вторичная эмиссия, автоэлектронная эмиссия?

## **2.4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ**

Газы являются диэлектриками, если находятся в обычных физических условиях. В этом случае они состоят в основном из нейтральных атомов и молекул, а заряженные частицы (электроны, ионы), имеющиеся в некотором объеме газа лишь в незначительном количестве, не могут образовать заметного тока.

Однако из нейтральных молекул и атомов могут образоваться заряженные частицы — ионы, если в силу каких-либо причин число электронов в них изменится: этот процесс называется ионизацией. Ионизированный газ является проводником.

### **Ионизация газов**

Ионизация происходит под действием космических лучей, рентгеновского и ультрафиолетового излучения, высокой температуры, электрического поля.

Опыт показывает, что перечисленные ионизирующие факторы сами по себе не могут вызывать значительного роста числа заряженных частиц в единице объема, тем более что наряду с ионизацией идет обратный процесс образования нейтральных молекул и атомов, называемый **рекомбинацией**.

Электрическая проводимость газа, возникшая в результате внешнего ионизирующего воздействия, называется **несамо-**

стоятельной. Если внешний ионизирующий фактор перестает действовать, то в силу рекомбинации электрическая проводимость газа исчезает.

Наибольшее значение имеет ионизация атомов и молекул газа, вызываемая столкновением их с быстродвижущимися электронами. При таком столкновении энергия движущегося электрона частично или полностью передается нейтральному атому или молекуле.

При достаточной энергии удара от нейтрального атома или молекулы отрывается один или несколько электронов, вместо нейтрального атома или молекулы появляется положительный ион.

Возможно также сцепление электрона с нейтральным атомом или молекулой, что приводит к образованию отрицательного иона. Процесс образования ионов при столкновении нейтральных атомов и молекул с быстродвижущимися электронами называется ударной ионизацией.

В результате ионизации количество электронов увеличивается, это приводит к росту числа столкновений и, следовательно, к еще большему увеличению числа заряженных частиц.

В ионизированном состоянии газ является проводником. Электропроводность газа, поддерживаемая благодаря ударной ионизации действием внешнего электрического поля, называется самостоятельным разрядом.

Различают несколько видов самостоятельного разряда в газе: тихий, тлеющий, искровой, дуговой.

*Тихий разряд.* Этот разряд возникает при относительно больших давлениях газа (например, атмосферном), когда поле в разрядном промежутке между электродами очень неравномерно из-за малого радиуса кривизны электродов.

Тихий разряд обычно наблюдается около электродов в тех местах, где напряженность электрического поля достигает некоторой величины, называемой критической для данного газа, и сопровождается свечением — «короной».

При передаче электрической энергии на высоком напряжении вокруг проводов линии нередко можно наблюдать (особенно в сырую погоду) тихий (коронный) разряд, который приносит вред, вызывая дополнительные потери энергии.

*Тлеющий разряд.* При низких давлениях в длинной стеклянной трубке можно получить тлеющий разряд, если между электродами, расположенными у ее концов, приложить напряжение в несколько сотен вольт. Различные газы при тлеющем разряде дают свечение разного цвета. Благодаря этому лампы тлеющего разряда применяются в декоративных целях.

Зависимость тока в лампе тлеющего разряда от напряжения между электродами (вольт-амперная характеристика) нелинейная,



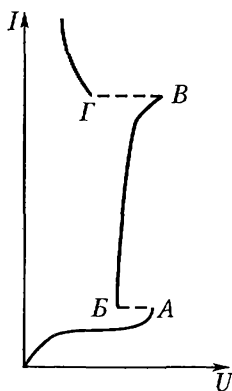


Рис. 2.8

причем в некотором интервале изменения тока напряжение остается постоянным (участок  $B\Gamma$  на рис. 2.8). На этом рисунке точка  $A$  характеристики соответствует зажиганию прибора, точка  $B$  — началу дугового разряда. Газоразрядные приборы тлеющего разряда используются для стабилизации напряжения.

*Искровой разряд.* Такой разряд возникает между холодными электродами при большом внутреннем сопротивлении источника питания.

Ионизация газа, начавшаяся под действием электрического поля, приобретает лавинообразный характер, в результате чего газовый промежуток становится проводящим и между электродами проскакивает искра. При этом

резко уменьшается сопротивление газового промежутка.

По расстоянию между электродами, при котором возникает пробой воздуха, можно судить о величине напряжения между электродами. На этой основе для измерения очень высоких напряжений применяются шаровые разрядники.

*Дуговой разряд.* При большой мощности источника питания искровой разряд может перейти в дуговой, более устойчивый самостоятельный разряд в газе при атмосферном или повышенном давлении.

Такой разряд называется электрической дугой. Характерной особенностью дугового разряда является то, что он сопровождается ослепительным свечением и сильным нагреванием электродов (до  $3000^\circ\text{C}$  и более).

Световое действие электрической дуги используется для специального освещения (прожекторы, проекционные аппараты), а тепловое — для сварки и плавления металлов.

Электрическая дуга, возникающая при выключении электрических установок, — явление нежелательное, так как ее тепловое действие разрушает контакты отключающих аппаратов (рубильников, контакторов, выключателей). Поэтому приходится принимать специальные меры, в результате чего выключающие аппараты значительно усложняются, увеличиваются их размеры.

## Вольт-амперные характеристики газоразрядных приборов

Электрический ток при дуговом разряде образуется электронами и ионами, освободившимися вследствие термической ионизации газа, а также в результате эмиссии электронов из накаливаемого

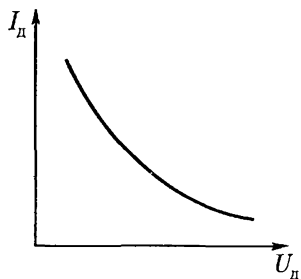


Рис. 2.9

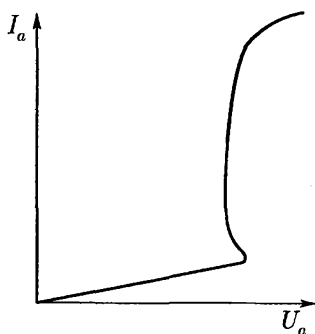


Рис. 2.10

катода. Под действием этих явлений между электродами создается газоразрядная плазма.

Электроны, имея в тысячи раз меньшую массу, чем ионы, в электрическом поле приобретают значительно большую скорость, поэтому преобладают в образовании тока дуги.

При некоторой степени ионизации горение дуги стабилизируется и устанавливаются определенные ток  $I_d$  и напряжение между электродами  $U_d$ . Рост тока в дуге приведет к увеличению степени ионизации и уменьшению сопротивления дугового промежутка, что повлечет за собой снижение напряжения  $U_d$ .

Таким образом, вольт-амперная характеристика электрической дуги представляет собой падающую кривую (рис. 2.9).

В технике широко распространены газоразрядные приборы, у которых проводимость газового промежутка обусловлена заряженными частицами, полученными как за счет электронной эмиссии нагретого катода, так и ионизацией газов или паров. К таким приборам относят газотроны, тиратроны, ртутные выпрямители и др.

Вольт-амперные характеристики газоразрядных приборов нелинейны. На рис. 2.10 показана вольт-амперная характеристика газотрона.

### Контрольные вопросы

1. Объясните явления ионизации газов и их электрической проводимости.
2. В чем состоят особенности тихого и тлеющего разряда в газах?
3. Начертите вольт-амперную характеристику дугового разряда и объясните ход этой кривой.
4. На чем основано применение электронных и ионных приборов для выпрямления переменного тока?
5. Назовите известные случаи практического применения явлений электрического разряда в газе: тлеющего, дугового, искрового.

## 2.5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Способность вещества к образованию в нем электрического тока, как отмечалось в 2.2, определяется удельной электрической проводимостью. По этому признаку полупроводники занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками. Величины удельной проводимости полупроводников находятся в широком интервале — от  $10^3$  до  $10^{-10} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{см}}$ .

### Электрические свойства полупроводников

Полупроводниками являются многие минералы, некоторые металлы, окислы и сульфиды металлов и т. д.

В Периодической таблице Менделеева полупроводники представлены группой элементов, к которым относятся германий, кремний, селен, теллур и др.

Способность к образованию электрического тока связана с концентрацией свободных электронов и возможностью их направленного перемещения в веществе.

Концентрация свободных электронов (количество электронов в единице объема) в полупроводнике в тысячи и миллионы раз меньше, чем в металле. Этим объясняется количественное различие в величинах их удельной электрической проводимости.

Сравнение металлов и полупроводников показывает также существенную разницу во влиянии температуры на их проводимость. С ростом температуры проводимость металлов уменьшается, проводимость же полупроводников увеличивается.

При увеличении температуры в полупроводнике, так же как и в металле, уменьшается возможность направленного движения свободных электронов, что связано с увеличением числа столкновений. Но в отличие от металлов в полупроводнике одновременно резко увеличивается концентрация свободных электронов. Эти факторы влияют на проводимость противоположно: с ростом числа столкновений проводимость уменьшается, а с ростом концентрации — увеличивается. В металлах концентрация свободных электронов от температуры практически не зависит, поэтому изменение (уменьшение) проводимости при росте температуры связано только с уменьшением возможности направленного движения свободных электронов.

В полупроводнике же влияние роста концентрации сильнее, поэтому с ростом температуры проводимость увеличивается.

## Электронная и дырочная электрические проводимости

В полупроводниках, так же как в металлах, электрический ток образуется электронами.

Однако при рассмотрении проводимости полупроводников полагают, что в них имеется два вида носителей заряда: электроны и дырки. Если некоторый электрон получает извне энергию, достаточную, чтобы порвать парно-электронную связь между атомами, то он становится свободным. Освобожденное электроном место в межатомной связи условно называют дыркой, причем отсутствие электрона равноценно наличию в этом месте такого же по величине положительного заряда. На не замещенное электроном место может перейти другой электрон, порвавший связь с атомом и образовавший новую дырку.

Такое последовательное замещение и освобождение электронами мест в межатомных связях рассматривается как движение дырок, которые ведут себя как положительно заряженные частицы.

Движение свободных электронов обуславливает электронную электрическую проводимость (типа  $n$ ), а движение дырок — дырочную (типа  $p$ ). Скорость движения электронов значительно превышает скорость дырок, поэтому проводимость большинства чистых полупроводников является в основном электронной.

Для увеличения проводимости полупроводника и придания ей четко выраженного типа  $n$  или  $p$  к сверхчистому полупроводнику добавляют очень малое количество примеси ( $10^{-6}$ – $10^{-5}$  %).

Различают два вида примесей. К первому виду относятся химические элементы с большей валентностью, а ко второму — элементы с меньшей валентностью, чем валентность полупроводника.

В первом случае примесная электрическая проводимость оказывается электронной (типа  $n$ ), во втором — дырочной (типа  $p$ ).

Предположим, что в качестве основного вещества используется четырехвалентный германий Ge. Между соседними атомами чистого германия имеется четырехсторонняя химическая связь соответственно числу валентных электронов (рис. 2.11). Атомы введенной примеси (пятивалентной сурьмы Sb) занимают места атомов германия в кристаллической решетке (рис. 2.11, а). При этом четыре валентных электрона атома сурьмы образуют химические связи с валентными электронами атомов германия. Пятый электрон оказывается «лишним», менее связанным со своим атомом; он легко попадает в зону проводимости, т. е. становится свободным.

Примесный атом трехвалентного индия In также может заменить в кристаллической решетке атом германия (рис. 2.11, б). Но для образования четырехсторонней связи с соседними атомами у

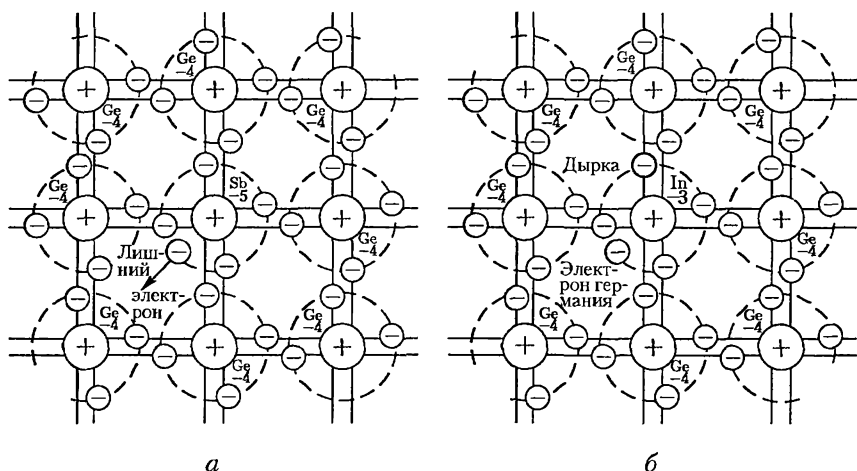


Рис. 2.11

атома индия не хватает одного электрона, поэтому в валентной связи образуется свободное место — дырка.

## Явления в контакте двух металлов

Большое значение для практики имеют явления в контакте двух металлов, а также полупроводников, из которых один обладает электронной, а другой дырочной проводимостью.

Рассмотрим контакт двух металлов 1 и 2, обладающих разными величинами работы выхода электронов (рис. 2.12).

Металл 2 имеет меньшую работу выхода, т. е. верхний уровень энергии электронов у него выше, чем у металла 1 (рис. 2.12, а). Обладая большой энергией, электроны могут покинуть металл 2. При установлении контакта начинается переход электронов из металла 2 в металл 1, причем этот процесс совершается за счет электронов с более высоким уровнем энергии (рис. 2.12, б). В результате энергетический уровень электронов в металле 2 понижается, а в металле 1 повышается; в металле 2 образуется избыток положительного заряда, а в металле 1 — избыток отрицательного заряда. Происходящее на границе металлов выравнивание энергетических уровней сопровождается возникновением контактной разности потенциалов  $U_k$  в пограничном слое некоторой толщины  $l$  (толщина  $l$  соизмерима с размером атомов). Величина контактной разности потенциалов пропорциональна разности работ выхода. В соответствии с формулой (2.11)

$$U_k = (A_1 - A_2) / e. \quad (2.12)$$

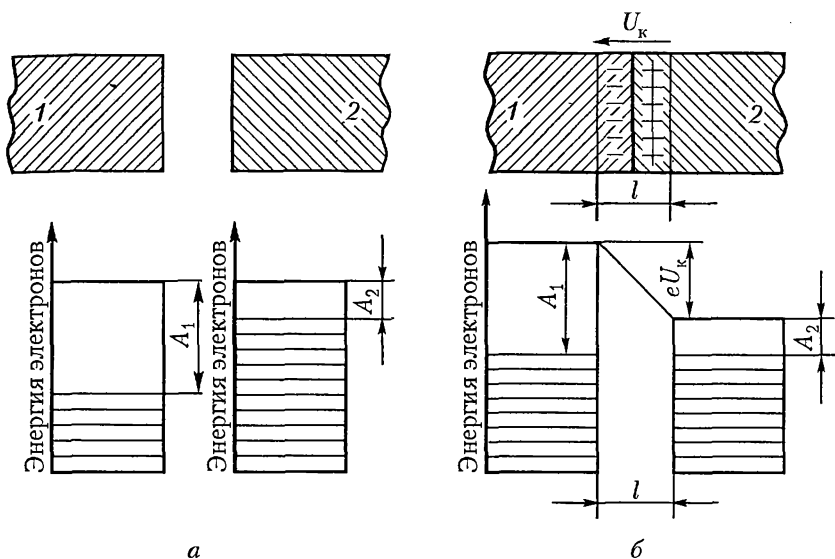


Рис. 2.12

Электрическое поле, образовавшееся в результате диффузии электронов из одного металла в другой, препятствует движению электронов через контакт. По мере перехода электронов увеличивается разность потенциалов  $U_k$  и усиливается электрическое поле, противодействующее движению электронов. Процесс заканчивается по достижении равновесия, при котором силы электрического поля равны сторонним силам, вызывающим диффузию электронов из одного металла в другой. Контактная разность потенциалов получает установившуюся величину, образуя для электронов определенный потенциальный барьер.

### Электронно-дырочный переход

В контакте двух полупроводников с разным видом электрической проводимости (электронной и дырочной) создается электронно-дырочный ( $n-p$ ) переход: электроны из  $n$ -полупроводника переходят в  $p$ -полупроводник (рис. 2.13). В обратном направлении идет диффузия дырок. В приконтактных слоях полупроводников создаются избыточные заряды разных знаков:  $p$ -полупроводник получает отрицательный, а  $n$ -полупроводник — положительный.

Электрическое поле на границе создает потенциальный барьер  $U_k$ , препятствующий

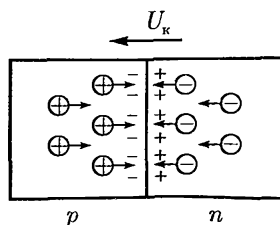


Рис. 2.13

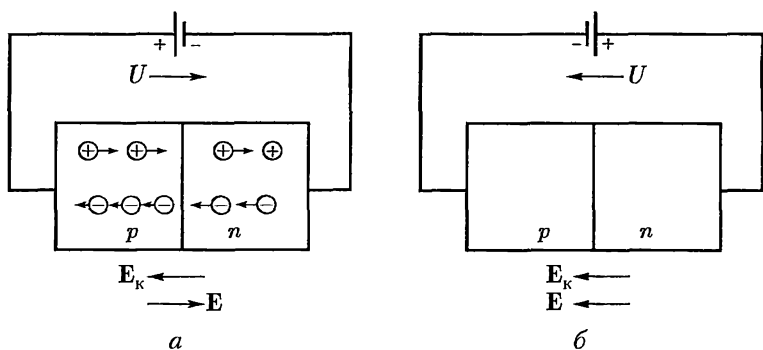


Рис. 2.14

щий дальнейшему перемещению электронов и дырок. Благодаря наличию контактной разности потенциалов электронно-дырочный переход имеет одностороннюю электрическую проводимость, т.е. обладает вентильным свойством.

Предположим, что к полупроводникам, образующим  $n$ - $p$ -переход, подведено напряжение от постороннего источника (рис. 2.14, а) плюсом к  $p$ -полупроводнику, в результате чего на границе полупроводников образуется электрическое поле с напряженностью  $E$ . Электрическое поле  $E_k$ , возникшее на границе полупроводников в результате диффузии электронов и дырок, становится слабее под действием источника; потенциальный барьер оказывается тем ниже, чем больше приложенное напряжение. Соответственно увеличивается количество носителей заряда (электронов и дырок), переходящих из одной области полупроводника в другую.

При некоторой величине приложенного напряжения потенциального барьера не будет, тогда противодействие заряженным частицам определяется только омическим сопротивлением полупроводника [см. формулу (2.8)].

Если изменить полярность приложенного напряжения (рис. 2.14, б), то электрическое поле в  $n$ - $p$ -переходе усиливается, потенциальный барьер увеличивается. Поэтому для основных носителей заряда создается большое сопротивление. В направлении от  $n$ -полупроводника к  $p$ -полупроводнику через контакт ток практически отсутствует. Незначительный обратный ток в цепи может поддерживаться за счет неосновных носителей заряда (электронов в полупроводнике с дырочной проводимостью и дырок в полупроводнике с электронной проводимостью), которые появляются в ма-

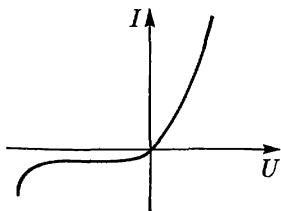


Рис. 2.15

лом количестве. По этой же причине с ростом напряжения источника обратный ток практически не увеличивается.

Полупроводник с электронно-дырочным переходом по своим вентильным свойствам аналогичен электровакуумному диоду и поэтому называется полупроводниковым диодом. На рис. 2.15 показана его вольт-амперная характеристика.

### **Контрольные вопросы**

1. Какие вещества относятся к полупроводникам?
2. В чем состоит основная особенность электрической проводимости полупроводников по сравнению с металлами?
3. Как влияют на электрическую проводимость полупроводников примеси?
4. Объясните возникновение контактной разности потенциалов на контакте двух металлов или двух полупроводников.
5. Чем отличается электронная проводимость от дырочной?
6. Почему чистый полупроводник имеет в основном электронную электрическую проводимость?
7. Что такое электронно-дырочный переход?



## ГЛАВА 3

# ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ

Явление электрического тока проводимости имеет огромное практическое значение. С ним связаны важнейшие энергетические преобразования: получение электрической энергии из других видов энергии и обратное ее превращение; передача электрической энергии на расстояние.

Эти энергетические преобразования осуществляются в электрических цепях.

**Электрическая цепь** — это совокупность устройств и объектов, образующих путь электрического тока. Отдельное устройство, входящее в состав электрической цепи и выполняющее в ней определенную функцию, называется элементом электрической цепи.

Электрические цепи можно классифицировать: по виду тока — цепи постоянного и переменного тока; по составу элементов — цепи активные и пассивные, цепи линейные и нелинейные; по характеру распределения параметров — цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Электрические цепи переменного тока, кроме того, различают по числу фаз — однофазные, многофазные (в основном трехфазные).

### 3.1. ЭЛЕМЕНТЫ И СХЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Простейшая электрическая цепь (рис. 3.1) состоит из трех основных элементов: источника электрической энергии 1, приемника электрической энергии 2, соединительных проводов 3. Кроме основных элементов в электрические цепи входят различные вспомога-

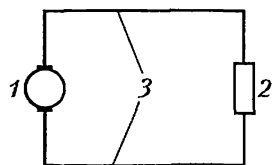


Рис. 3.1

тельные элементы для управления (рубильники, переключатели, контакторы и др.), защиты (плавкие предохранители, реле и т. д.), регулирования (реостаты, стабилизаторы тока и напряжения, трансформаторы), контроля (амперметры, вольтметры и т. д.). Вспомогательные элементы, так же как и основные, включаются в цепь с помощью проводов.

## Источники электрической энергии

*Источник электрической энергии — это преобразователь какого-либо вида неэлектрической энергии в электрическую.* В настоящее время основным видом такого преобразователя является электро-механический генератор — преобразователь механической энергии в электрическую. На тепловых электростанциях работают турбогенераторы — электрические машины, приводимые в движение тепловыми (паровыми, газовыми) турбинами, а на гидроэлектростанциях установлены гидрогенераторы — электрические машины с приводом от гидравлических турбин. Турбогенераторы и гидрогенераторы электростанций — это машины переменного тока.

Для цепей постоянного тока применяются электромеханические генераторы постоянного тока; преобразователи химической энергии в электрическую — гальванические элементы и аккумуляторы; устройства для прямого преобразования тепловой энергии в электрическую — термоэлектродгенераторы.

Источниками электрической энергии служат электрические трансформаторы и выпрямители. Эти устройства не вырабатывают электрическую энергию, а получают ее от тех же генераторов переменного тока, изменяют ее характеристики: трансформаторы изменяют величину напряжения, а выпрямители преобразуют переменное напряжение в постоянное. Трансформаторы и выпрямители, с одной стороны, являются приемниками электрической энергии, а с другой — источниками.

## Приемники электрической энергии

Наиболее многочисленными и разнообразными элементами электрических цепей являются *приемники электрической энергии*. Они преобразуют электрическую энергию в другие виды энергии: механическую (электродвигатели переменного и постоянного тока, тяговые электромагниты); тепловую (электрические промышленные печи, бытовые нагревательные приборы, сварочные аппараты), световую (лампы электрического освещения, прожекторы), химическую (аккумуляторы в процессе зарядки, электролитические ванны и др.).

Для передачи и распределения электрической энергии служат провода и кабели, с помощью которых соединяются в электрические цепи источники, приемники электрической энергии и промежуточные устройства.

В соединительных проводах и кабелях при наличии в них электрического тока выделяется теплота, поэтому в расчете они выступают как приемники электрической энергии.

## Схемы электрических цепей

При разработке, конструировании, монтаже электрических изделий и установок нельзя обойтись без электрических схем. В зависимости от основного назначения различают несколько типов схем: структурную, функциональную, принципиальную, монтажную и др.

На принципиальной схеме приводится полный состав элементов и указаны все связи между ними. Эта схема дает детальное представление о принципах работы изделия (установки).

Электрическую цепь можно составить из элементов, входящих в данное изделие или установку. В других случаях изделия (установки) сами являются элементами электрической цепи.

**Схема электрической цепи — это графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения ее элементов, показывающее соединения этих элементов.**

Условные обозначения в электрических схемах установлены стандартами системы ЕСКД.

В электрических цепях и их схемах различают последовательное и параллельное соединения элементов.

Будем считать, что каждый элемент для включения в цепь имеет два зажима, из которых один условно назовем *н а ч а л о м*, а другой — *к о н ц о м* данного элемента.

При последовательном соединении группы элементов конец предыдущего элемента соединен с началом следующего; начало первого элемента и конец последнего являются зажимами (Н, К) группы элементов, которыми она может быть присоединена к другим участкам цепи (рис. 3.2, а).

При параллельном соединении группы элементов начала всех элементов соединены в одном зажиме, а концы — в другом; этими зажимами группа присоединяется к другим участкам цепи (рис. 3.2, б).

Группы элементов между собой могут быть включены последовательно или параллельно — так образуются сложные электрические цепи.

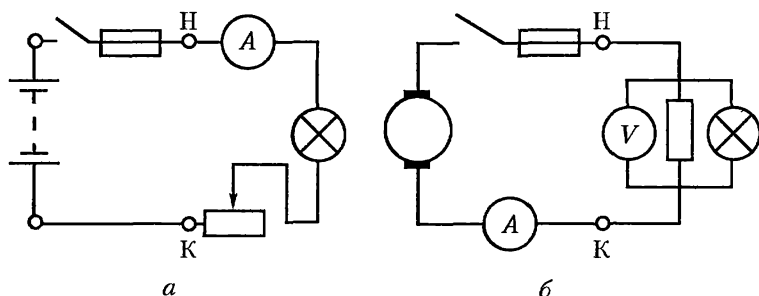


Рис. 3.2

## Задачи

**Задача 3.1.** Составить схему электрической цепи, в которой к аккумуляторной батарее присоединены три резистора. Один — регулируемый, включен последовательно к группе из двух нерегулируемых, соединенных между собой параллельно. В схеме предусмотреть управление с помощью двухполюсного выключателя, защиту плавкими предохранителями, измерение общего тока в цепи и напряжения на зажимах батареи.

**Задача 3.2.** Составить схему электрической цепи, в которой четыре резистора (один из них регулируемый) образуют замкнутый контур в виде четырехугольника. В одной диагонали четырехугольника — гальванический элемент, присоединенный к цепи через однополюсный выключатель; в другой находится гальванометр, который можно включить и выключить кнопчным выключателем.

**Задача 3.3.** Составить схему электрической цепи, в которой последовательно включены два нерегулируемых резистора, аккумуляторная батарея и генератор постоянного тока. С помощью переключателя батарее и генератор можно включить согласно или встречно. В схеме предусмотреть защиту цепи плавкими предохранителями, измерение тока, измерение напряжения на зажимах батареи и генератора одним вольтметром с помощью переключателя.

**Задача 3.4.** Составить схему электрической цепи, в которой генератор постоянного тока и аккумуляторная батарея, включенные параллельно, снабжают энергией внешнюю часть цепи, состоящей из трех нерегулируемых резисторов, включенных также параллельно. Каждый элемент цепи присоединяется к ней однополюсным выключателем. В схеме предусмотреть измерение общего напряжения, тока в каждом источнике и общего тока приемников энергии.

## 3.2. ПОЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ИЗ ДРУГИХ ВИДОВ ЭНЕРГИИ

Физические процессы получения электрической энергии различаются в зависимости от вида преобразуемой энергии. Главное различие состоит в природе сил, которые разделяют положительный и отрицательный заряды в веществе.

На электрически заряженные частицы кроме сил электрического поля при определенных условиях действуют сторонние силы, обусловленные неэлектромагнитными процессами (химические реакции, тепловые процессы, контактные явления и т. д.).

В результате действия сторонних сил в источнике электрической энергии происходит разделение электрических зарядов и образуется электродвижущая сила (ЭДС).

В гл. 10 показано, что разделение зарядов в электропроводной среде происходит также под действием электромагнитных сил (на-

пример, при движении заряженных частиц в магнитном поле), в результате чего индуцируется электрическое поле и образуется ЭДС.

Величина, характеризующая способность стороннего поля и индуцированного электрического поля вызывать электрический ток, называется электродвижущей силой.

Рассмотрим примеры преобразования химической, тепловой, лучистой энергии в электрическую, физический смысл и количественное выражение электродвижущей силы (о преобразовании механической энергии в электрическую см. 10.3).

## Преобразование химической энергии в электрическую

Электрохимическими источниками электрической энергии являются гальванические элементы, аккумуляторы, топливные элементы.

На рис. 3.3 показана цинковая пластинка, опущенная в водный раствор серной кислоты (электролит). Цинк растворяется в электролите, причем в раствор переходят положительные ионы  $Zn^{+}$ . Раствор заряжается положительно, а цинк — отрицательно. Растворение цинка обусловлено химическими силами. В области контакта цинк — раствор появляется электрическое поле образованных ионов, направленное от раствора к цинку.

По мере растворения цинка растет заряд, а вместе с ним и напряженность электрического поля. Электрическое поле противодействует переходу ионов  $Zn^{+}$  в раствор, поэтому на определенной стадии растворение цинка прекращается. Такое равновесное состояние соответствует равенству двух сил, действующих на ионы  $Zn^{+}$ : химических, под действием которых цинк растворяется, и электрических, препятствующих растворению. Растворение цинка прекращается при наличии некоторой разности потенциалов  $U_1$  между цинком и раствором.

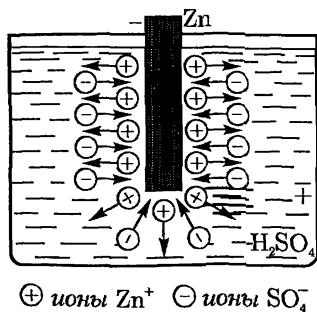


Рис. 3.3

Если в тот же раствор поместить пластинку из другого вещества, то описанный процесс будет иметь место и в этом случае. Но полученная разность потенциалов  $U_2$  может быть другой величины — больше или меньше  $U_1$ .

По такому принципу образуется ЭДС гальванического элемента и аккумулятора (рис. 3.4, а, б).

При соединении пластин I и II проводником в замкнутой цепи будет действовать ЭДС химического элемента

$$E_a = U_1 - U_2 \quad (3.1)$$

и установится электрический ток.

В данном случае ЭДС создается и поддерживается при работе элемента химическими силами (сторонние силы) и, следовательно, можно говорить о преобразовании химической энергии в электрическую.

Электрический ток в гальваническом элементе сопровождается необратимыми электрохимическими процессами, которые можно описать определенными химическими реакциями.

Применение гальванических элементов ограничено — в единицу времени они могут дать лишь незначительное количество электрической энергии, а срок их работы невелик и заканчивается, когда активное вещество электродов в определенной степени будет израсходовано.

Значительно большее применение имеют аккумуляторы, электрохимические процессы которых обратимы. Обратимость электрохимических процессов позволяет проводить многократную зарядку и разрядку аккумуляторов. При зарядке в них накапливается определенное количество химической энергии (за счет израсходованной электрической энергии), а при разрядке эта энергия может быть использована в электрической цепи в виде электрической энергии. На рис. 3.4 показан режим разрядки свинцового аккумулятора.

Дальнейшим развитием техники прямого преобразования химической энергии в электрическую является создание топливных элементов.

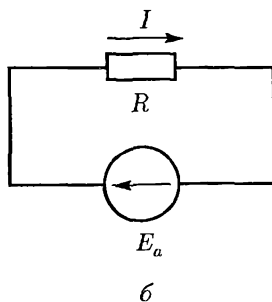
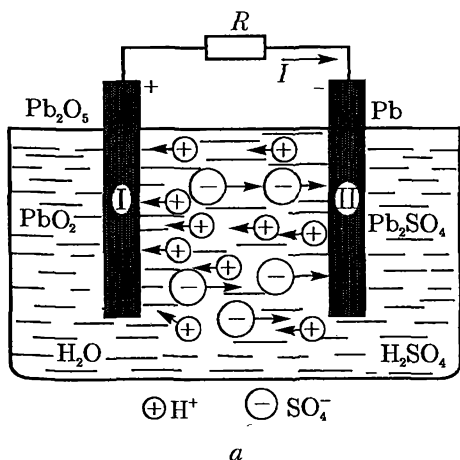


Рис. 3.4

Электрическая энергия в них (как и в гальванических элементах) получается при химических реакциях, в ходе которых расходуются активные материалы: топливо (водород, природный газ, нефтепродукты и т. п.) и окислитель (кислород, воздух).

Запас активных материалов непрерывно пополняется, поэтому топливный элемент (в отличие от гальванического) в принципе может работать сколь угодно долго.

Хорошие энергетические характеристики, большой диапазон мощностей (от нескольких ватт до сотен киловатт в единице) открывают возможность широкого применения топливных элементов и прежде всего для привода различных автономных транспортных средств.

Электрохимические генераторы просты в эксплуатации, бесшумны, не создают радиопомех и отходов, загрязняющих воздух.

## Преобразование тепловой энергии в электрическую

Непосредственное преобразование тепловой энергии в электрическую можно осуществить, используя явления в контакте двух металлов или полупроводников, где действуют сторонние силы, которыми обусловлена диффузия заряженных частиц.

Величина контактной разности потенциалов зависит не только от свойств контактирующих материалов, но и от температуры контакта, так как с температурой связаны энергия свободных электронов и их концентрация.

Изучая замкнутую цепь из двух разных металлов (рис. 3.5, а), можно убедиться в том, что при одинаковой температуре контактов 1 и 2 электрического тока в цепи не возникнет, так как контактные раз-

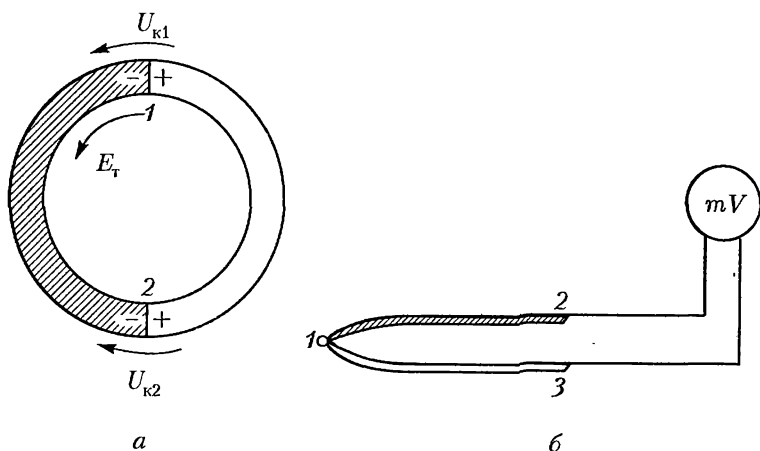


Рис. 3.5

ности потенциалов, определяемые формулой (2.12), в обоих контактах одинаковы, но направлены в противоположные стороны по цепи

$$U_{\kappa 1} = U_{\kappa 2} = \frac{A_1 - A_2 + A_2 - A_1}{e} = 0. \quad (3.2)$$

Если один из контактов, например 1, нагреть ( $t_1 > t_2$ ), то равновесие нарушится — в контакте 1 появится дополнительный скачок потенциала, связанный с нагревом. В этом случае  $U_{\kappa 1} > U_{\kappa 2}$ . В цепи образуется термоэлектродвижущая сила (термоЭДС), абсолютное значение которой пропорционально разности температур контактов:

$$E_{\tau} = U_{\kappa 1} - U_{\kappa 2} = E_0(t_1 - t_2), \quad (3.3)$$

где  $E_0$  — величина, зависящая от свойств металлов, образующих контакт.

Однако концентрация свободных электронов в металлах велика и при переходе из одного металла в другой меняется очень мало. В связи с этим контактная разность потенциалов оказывается незначительной и мало зависит от температуры. По этой причине металлические термоэлементы имеют очень малые ЭДС и КПД и применяются для измерения температур (рис. 3.5, 6).

В отличие от металлов в полупроводниках при увеличении температуры сильно увеличиваются концентрации свободных электронов и дырок. Это свойство полупроводников позволяет получить более высокие термоЭДС и КПД термоэлементов.

Полупроводниковый термоэлемент состоит из двух полупроводников ( $n$  и  $p$  на рис. 3.6). Один имеет электронную, а другой — дырочную проводимость. При нагревании полупроводников в месте соединения их металлической пластинкой сильно увеличивается концентрация свободных носителей заряда. Поэтому в полупроводниках возникает диффузия их от горячего конца к холодному. В полупроводнике с электронной проводимостью к холодному концу перемещаются электроны, в результате чего этот конец заряжается отрицательно. В другом полупроводнике к холодному концу перемещаются дырки, образуя положительный заряд. Возникшая разность потенциалов противодействует диффузии, и при некоторой величине ее устанавливается равновесие сил электрического поля и сторонних сил, под действием которых идет процесс диффузии носителей заряда. Эта разность потенциалов и является термоЭДС полупроводникового термоэлемента.

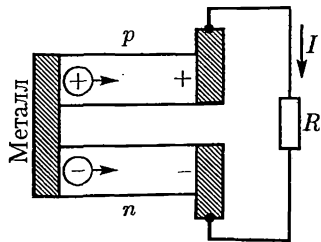


Рис. 3.6



Если к холодным концам полупроводников подключить токопроводящий элемент, например резистор, то образуются замкнутая цепь и электрический ток в ней.

В 1964 г. в нашей стране был создан первый в мире термоэлектрический генератор для прямого преобразования тепловой энергии ядерного реактора в электрическую (установка «Ромашка» мощностью 500 Вт). В настоящее время ведутся работы с целью увеличения мощности и КПД термоэлектрогенераторов.

## Преобразование лучистой энергии в электрическую

Концентрация и энергия свободных носителей заряда в полупроводниках могут увеличиваться не только при нагревании, но и под действием лучистой энергии (свет, инфракрасное излучение).

Проводимость полупроводников, обусловленная действием на них лучистой энергии, называется фотопроводимостью (внутренним фотоэффектом). Явление фотопроводимости лежит в основе действия группы электронных приборов, называемых фотосопротивлениями.

Действие твердого фотоэлемента с запирающим слоем (вентильного фотоэлемента) в фотогенераторном режиме поясняет рис. 3.7. В вентильном фотоэлементе осуществляется контакт двух полупроводников, один из которых обладает электронной проводимостью, а другой — дырочной. Благодаря диффузии электронов и дырок через  $n$ – $p$ -переход во взаимно противоположных направлениях образуется контактная разность потенциалов  $U_k$ . Если полупроводники освещаются, в них за счет поглощения световой энергии образуются неосновные свободные носители заряда — электроны в  $p$ -полупроводнике и дырки в  $n$ -полупроводнике. Эти электроны и дырки под действием электрического поля, в свою очередь, направляются через  $n$ – $p$ -переход: дырки — в дырочный полупроводник, а электроны — в электронный. Освещение контакта приводит к нарушению равновесия основных носителей заряда, в результате которого потенциальный барьер в контакте уменьшается и устанавливается новое состояние равновесия при меньшей величине его, равной  $U_{к.с.}$

Разность потенциальных барьеров в контакте полупроводников в неосвещенном и освещенном состояниях называется фотоэлектродвижущей силой:

$$E_c = U_k - U_{к.с.} \quad (3.4)$$

Фото ЭДС тем больше, чем интенсивнее освещается полупроводник. После соедине-

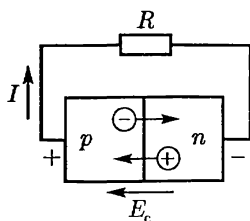


Рис. 3.7

ния полупроводников возникает ток в цепи и происходит преобразование лучистой энергии в электрическую. Фотоэлектрические генераторы предназначены для прямого преобразования солнечной энергии в электрическую и в настоящее время применяются в космической технике.

## ЭДС и мощность источника электрической энергии

Возникновение электродвижущей силы  $E$  во всех случаях связано с работой  $A_{\text{ст}}$  сторонних сил по перемещению заряженных частиц. Количественная оценка этого явления дается величиной работы, приходящейся на единицу заряда:

$$E = A_{\text{ст}}/Q. \quad (3.5)$$

Единицей измерений ЭДС, так же как и напряжения, является вольт (В).

Положительное направление ЭДС совпадает с направлением, в котором сторонние силы действуют на частицы с положительным зарядом. Это соответствует и положительному направлению тока в цепи. Если ток создается электронами, то ЭДС направлена против движения электронов, т.е. внутри источника от «-» к «+». Таким образом, в источнике электрической энергии направления ЭДС и тока совпадают.

Работа сторонних сил равна энергии, отдаваемой источником питания во внешнюю цепь. Эта энергия называется электрической энергией источника:

$$W_{\text{и}} = A_{\text{ст}} = EQ. \quad (3.6)$$

Перемещенный заряд  $Q$  можно выразить через ток в источнике:  $Q = It$ , поэтому

$$W_{\text{и}} = EIt. \quad (3.7)$$

Формула (3.7) позволяет подсчитать энергию, выработанную источником за определенный промежуток времени  $t$ , используя электрические показатели цепи — ЭДС источника и ток, но не позволяет оценить работоспособность источника.

Действительно, определенное количество электрической энергии может быть получено от разных источников, но за разное время. Работоспособность источников можно оценить, сравнивая количество энергии, вырабатываемое за одно и то же время, например за 1 с.

Величина энергии, вырабатываемой за единицу времени, т.е. скорость преобразования энергии в источнике, называется мощностью источника:

$$P_{\text{и}} = \frac{W_{\text{и}}}{t} = \frac{EIt}{t};$$

$$P_{\text{н}} = EI. \quad (3.8)$$

Единица энергии — джоуль (Дж). Единица мощности  $[P] = [W/t] = \text{джоуль/секунда} = \text{ватт (Вт)}$ .

Из формулы (3.8) следует, что  $\text{ватт} = \text{вольт} \cdot \text{ампер}$ ;  $\text{джоуль} = \text{вольт} \cdot \text{ампер} \cdot \text{секунда} = \text{ватт} \cdot \text{секунда}$ .

Указанные единицы мощности и энергии являются основными. Измерять большие мощности и количества энергии удобнее более крупными единицами, чем ватт и джоуль. Поэтому пользуются производными единицами: 1 киловатт (кВт) =  $10^3$  Вт; 1 мегаватт (МВт) =  $10^6$  Вт; 1 киловатт-час (кВт · ч) =  $1000 \cdot 3600 = 36 \cdot 10^5$  Вт · с (или Дж).

### Задачи

**Задача 3.5.** Два генератора постоянного тока, работая круглосуточно на общий приемник, выработали вместе за месяц 96 000 кВт · ч электроэнергии. В течение 10 сут этого месяца первый генератор находился в ремонте. За это время счетчик электрической энергии, установленный на линии к приемнику, показал 24 000 кВт · ч. Определить мощность и ЭДС каждого генератора, если амперметр в цепи первого генератора во время работы показывал 500 А, а в цепи второго — 1000 А.

**Решение.** По условию задачи начерчена электрическая схема (рис. 3.8), где  $G_1$  и  $G_2$  — генераторы;  $\Pi$  — приемник,  $Wh_1$  и  $Wh_2$  — счетчики электрической энергии;  $A_1$  и  $A_2$  — амперметры;  $B_1$  и  $B_2$  — выключатели;  $I_1$  и  $I_2$  — токи генераторов;  $I_{\text{н}}$  — ток приемника;  $E_1$  и  $E_2$  — ЭДС генераторов.

Мощность второго генератора определим по показаниям счетчика за 10 сут, в которые первый генератор находился на ремонте. В это время второй генератор работал один:

$$P_{2г} = A_{2г} / t_2 = 24\,000 / (24 \cdot 10) = 100 \text{ кВт}.$$

Энергия, выработанная первым генератором за месяц,

$$A_{1г} = A - A_{2г} = 96\,000 - 24\,000 \cdot 3 = 24\,000 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

Мощность первого генератора

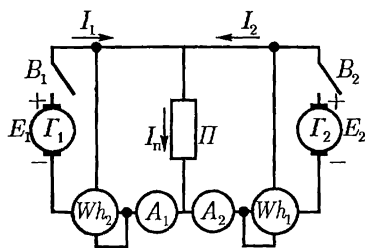


Рис. 3.8

$$P_{1г} = A_{1г} / t_1 = 24\,000 / (24 \cdot 20) = 50 \text{ кВт}.$$

ЭДС второго генератора

$$E_2 = P_{2г} / I_2 = 100\,000 / 1000 = 100 \text{ В}.$$

ЭДС первого генератора

$$E_1 = P_{1г} / I_1 = 50\,000 / 500 = 100 \text{ В}.$$

**Задача 3.6.** Аккумуляторная батарея при разрядке работала с током  $I =$

$= 50 \text{ А}$  в течение  $10 \text{ ч}$ . Определить мощность батареи, если ее ЭДС в течение всего периода работы оставалась практически постоянной, равной  $20 \text{ В}$ . Определить стоимость электрической энергии, выработанной батареей, при цене  $40 \text{ коп.}$  за  $1 \text{ кВт} \cdot \text{ч}$ .

**Задача 3.7.** Определить плотность тока в проводах сечением  $10 \text{ мм}^2$ , соединяющих приемник с генератором, суточная выработка энергии которого составляет  $120 \text{ кВт} \cdot \text{ч}$  при ЭДС  $E = 100 \text{ В}$ .

### 3.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ДРУГИЕ ВИДЫ ЭНЕРГИИ

В электрической цепи электрическая энергия одновременно получается в источнике и преобразуется в другой вид энергии в приемнике. Тип приемника выбирают в соответствии с требуемым для практических целей видом неэлектрической энергии.

Рассмотрим принципы преобразования электрической энергии в тепловую, световую и химическую; вопрос преобразования электрической энергии в механическую рассмотрен в 10.3.

#### Преобразование электрической энергии в тепловую

Физический процесс преобразования электрической энергии в тепловую рассмотрен в 2.2.

Выразим количество выделенной теплоты через напряжение и ток.

Предположим, что в проводнике, имеющем на концах разность потенциалов  $U$ , заряд перемещенных частиц  $Q = It$ .

Энергия электрического поля, затраченная на перемещение заряженных частиц, согласно (1.5),

$$W_э = UQ = UIt.$$

Работа сил электрического поля расходуется на нагревание проводника, так как никаких других проявлений этой работы не наблюдается. Поэтому энергию  $W_э$  можно считать равной тепловой энергии приемника:

$$W_{\pi} = W_э = UIt. \quad (3.9)$$

В этой формуле энергия выражена в джоулях. Согласно закону Ома [см. формулу (2.6)],  $U = IR$ , тогда

$$W_{\pi} = I^2 R t. \quad (3.10)$$

Формула (3.10) является математическим выражением закона Ленца—Джоуля.

Количество электрической энергии, преобразуемой в проводнике за единицу времени в тепловую энергию, пропорционально квадрату тока и электрическому сопротивлению проводника.

Скорость преобразования электрической энергии в другой вид энергии в приемнике называется мощностью приемника:

$$P_{\pi} = W_{\pi}/t = UI. \quad (3.11)$$

Эта формула справедлива для любого приемника независимо от вида энергии, который получается в результате преобразования.

Если электрическая энергия полностью превращается в тепловую, то мощность приемника можно выразить через ток в проводнике и его сопротивление:

$$P_{\pi} = I^2 R. \quad (3.12)$$

Явление преобразования в проводниках электрической энергии в тепловую широко используется в практике. На этом принципе основано действие большинства электрических промышленных и бытовых нагревательных устройств.

### Преобразование электрической энергии в световую

Принцип преобразования электрической энергии в тепловую лежит также в основе работы электрических ламп накаливания. Нить лампы, изготовленная из тугоплавкого металла (вольфрама), нагревается при электрическом токе в ней до температуры порядка 3000 °С.

При высокой температуре нити лампы часть энергии излучается в виде световой энергии, которая в общем потоке энергии, излучаемой лампой, составляет менее 10 %.

### Преобразование электрической энергии в химическую

Аккумулятор при зарядке или электролитическая ванна являются приемниками электрической энергии.

ЭДС аккумулятора  $E_a$  при зарядке сохраняет то же направление, что и при разрядке; ток же в аккумуляторе изменяет свое направление на обратное, так как он определяется не направлением ЭДС аккумулятора, а ЭДС  $E$  внешнего источника питания (рис. 3.9). ЭДС аккумулятора  $E_a$  при зарядке направлена против тока и потому называется противоЭДС.

Перемещение заряженных частиц при зарядке аккумулятора осуществляется в результате действия электрического поля, кото-

рое создается источником питания. Силы электрического поля в любой момент времени уравновешиваются химическими (сторонними) силами, поэтому работа сил электрического поля, приходящаяся на единицу заряда, может быть приравнена против ЭДС  $E_a$ .

Тогда энергия, израсходованная на зарядку,

$$W_n = E_a Q = E_a I t, \quad (3.13)$$

а мощность потребления электрической энергии

$$P_n = W_n / t = E_a I. \quad (3.14)$$

Формулы, выражающие энергию и мощность при разрядке и зарядке аккумулятора, одинаковы. Однако нужно не забывать о физическом различии процессов: в первом случае аккумулятор является источником, а во втором — приемником электрической энергии.

При преобразовании электрической энергии в тепловую сопротивление обусловлено соударениями частиц. При преобразовании электрической энергии в химическую противодействием току оказывают сторонние силы.

Этим объясняется различие выражений (3.11) и (3.14), которыми количественно определяется скорость преобразования электрической энергии в другой вид энергии.

### Задачи

**Задача 3.8.** Электрическая печь, имеющая сопротивление  $R = 10$  Ом, получает электрическую энергию от генератора при напряжении на ее зажимах  $U = 120$  В. Генератор связан с печью алюминиевыми проводами сечением  $S = 10$  мм<sup>2</sup> и длиной 50 м (в одну сторону). Определить мощность, развиваемую генератором с внутренним сопротивлением  $r = 0,1$  Ом, и стоимость электрической энергии, израсходованной печью за 2 ч, при тарифе 40 коп. за 1 кВт · ч.

**Решение.** Условию задачи соответствует схема рис. 3.10. Сопротивление соединительных проводов при  $t = 20$  °С

$$R_n = \rho \frac{l}{S} = 0,029 \cdot \frac{50 \cdot 2}{10} = 0,29 \text{ Ом.}$$

Ток в электропечи

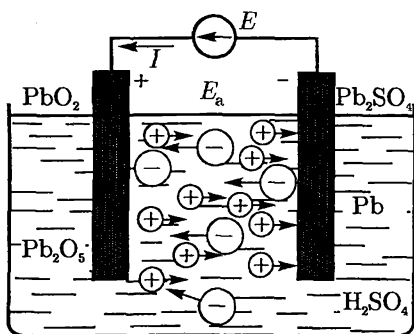


Рис. 3.9

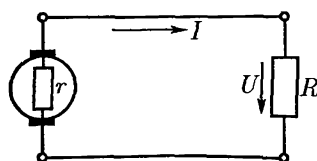


Рис. 3.10

$$I = U/R = 120/10 = 12 \text{ А.}$$

Мощность электропечи

$$P_{\Pi} = UI = 120 \cdot 12 = 1440 \text{ Вт.}$$

Мощность потерь энергии в соединительных проводах

$$P_{\text{л}} = I^2 R_{\text{л}} = 12^2 \cdot 0,29 = 41,8 \text{ Вт.}$$

Мощность потерь внутри генератора

$$P_{\text{вт}} = I^2 r = 12^2 \cdot 0,1 = 14,4 \text{ Вт.}$$

Общая мощность потребления

$$P = P_{\Pi} + P_{\text{л}} + P_{\text{вт}} = 1440 + 41,8 + 14,4 = 1496,2 \text{ Вт.}$$

Эта мощность, согласно закону сохранения энергии, равна мощности генератора. Учитывая, что в генераторе ток такой же, как в приемнике и соединительных проводах, найдем ЭДС генератора

$$E = P/I = 1496,2/12 = 124,5 \text{ В.}$$

Энергия, израсходованная в печи за 2 ч,

$$W_{\Pi} = P_{\Pi} t = 1440 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 2,88 \text{ кВт} \cdot \text{ч.}$$

Стоимость электроэнергии

$$a = W_{\Pi} c = 2,88 \cdot 0,4 = 1,15 \text{ руб.}$$

**Задача 3.9.** Мощность электрического утюга 300 Вт при напряжении 120 В. Определить ток и сопротивление нагревательного элемента.

**Задача 3.10.** Электродвигатель постоянного тока включен в сеть с напряжением 220 В. Механическая мощность на валу двигателя 8,4 кВт, КПД 84 %. Определить электрическую мощность и ток двигателя.

**Задача 3.11.** На зарядку аккумулятора при токе  $I = 4 \text{ А}$  и напряжении на внешних зажимах источника  $U = 30 \text{ В}$  затрачивается время  $t = 6 \text{ ч}$ . Определить запас энергии и ЭДС аккумулятора, если известно, что 10 % энергии, израсходованной на зарядку, составляют потери в аккумуляторе и соединительных проводах. ЭДС аккумулятора и зарядный ток предполагаются при зарядке неизменными.

### 3.4. РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Режим работы электрической цепи, т. е. ее электрическое состояние, определяется значениями токов, напряжений и мощностей ее отдельных элементов.

Наиболее характерные режимы электрических цепей рассмотрим на примере простейшей цепи с переменным сопротивлением приемника-электрической энергии (рис. 3.11).

## Номинальный режим

Источники и приемники электрической энергии, провода, а также вспомогательные аппараты и приборы характеризуются номинальными величинами тока, напряжения, мощности и т. д., на которые эти устройства рассчитаны заводами-изготовителями для нормальной работы. Номинальные величины обычно указываются в паспорте устройства.

Режим работы, при котором действительные токи, напряжения, мощности элементов электрической цепи соответствуют их номинальным величинам, называется **н о м и н а л ь н ы м** (нормальным).

Отклонения от номинального режима нежелательны, а превышение номинальных величин в большинстве случаев недопустимо, так как при этом не могут быть гарантированы расчетные продолжительность и экономичность работы электрических устройств и установок.

Для обеспечения нормальных условий работы приемников электрической энергии необходимо соблюдать соответствие напряжений: действительное напряжение на зажимах устройства должно быть равно его номинальному напряжению.

## Рабочий режим

Режимы электрической цепи по различным причинам могут отличаться от номинального.

Если в электрической цепи действительные характеристики режима отличаются от номинальных величин ее элементов, но отклонения находятся в допустимых пределах, то режим называется **р а б о ч и м**. На схеме рис. 3.11 сопротивление соединительных проводов отнесено к приемнику. Применяя к этой цепи закон сохранения энергии, нетрудно составить уравнение энергетического баланса за некоторое время:

$$W_{\text{и}} - W_0 = W_{\text{п}},$$

где  $W_{\text{и}} = EIt$  — энергия источника [см. (3.7)];  $W_{\text{п}} = I^2 R t$  — энергия приемника [см. (3.10)];  $W_0$  — энергия потерь в источнике.

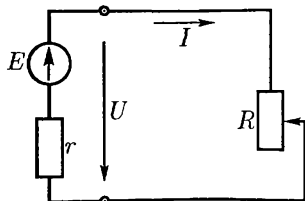


Рис. 3.11



По аналогии с энергией приемника энергию потерь выразим в виде  $W_0 = I^2 r t$ , где  $r$  — внутреннее сопротивление источника.

В этом случае энергетический баланс имеет вид

$$EIt = I^2 r t + I^2 R t,$$

после сокращения на  $t$  получим уравнение баланса мощностей

$$EI = I^2 r + I^2 R.$$

Далее, сокращая на  $I$ , получаем уравнение баланса напряжений

$$E = Ir + IR \text{ или } E = U_0 + U,$$

где  $U_0$  — внутреннее падение напряжения в источнике;  $U$  — напряжение на внешних зажимах источника.

Ток в цепи

$$I = E / (r + R). \quad (3.15)$$

Эта формула является выражением закона Ома для простейшей цепи.

Напряжение  $U$  на внешних зажимах источника, равное в этом случае напряжению на приемнике, меньше ЭДС источника на величину внутреннего падения напряжения  $Ir$ :

$$U = IR = E - Ir. \quad (3.16)$$

Отношение мощности  $P_{\Pi}$  приемника к мощности  $P_{\text{и}}$  источника называется коэффициентом полезного действия источника:

$$\eta = P_{\Pi} / P_{\text{и}}. \quad (3.17)$$

КПД источника можно определить отношением напряжения на зажимах источника к его ЭДС:

$$\eta = P_{\Pi} / P_{\text{и}} = UI / EI = U / E. \quad (3.18)$$

### Внутреннее сопротивление

Рассматривая уравнение баланса мощностей электрической цепи (см. рис. 3.11) и схему замещения источника электрической энергии (см. рис. 3.13, а), отметим, что понятие о внутреннем сопротивлении источника можно характеризовать с двух сторон. С одной стороны — это расчетная величина и в этом качестве входит в расчетные схемы (схемы замещения), а численно определяется по формуле (3.12):  $r = P_0 / I^2$ , где  $P_0$  — мощность потерь электрической энергии в источнике при токе  $I$  в нем независимо от причины и очага потерь. С другой

стороны, потери электрической энергии обусловлены каким-либо физическим явлением внутри источника, например явлением электрического сопротивления проводника, которое выражает формула (2.8); в частности, в электрической машине внутреннее сопротивление складывается из нескольких слагаемых, в том числе сопротивления проводов обмотки якоря, сопротивления контактов и др.

Аналогичные замечания о внутреннем сопротивлении можно отнести и к приемнику электрической энергии, если процесс преобразования энергии в нем сопровождается потерями электрической энергии.

## Режимы холостого хода и короткого замыкания

При  $R = \infty$  тока в цепи не будет. Этот случай соответствует размыканию цепи. Режим электрической цепи или отдельных источников, при котором ток в них равен нулю, называется режимом холостого хода. При холостом ходе напряжение на внешних зажимах источника равно его ЭДС  $U = E$ .

При  $R = 0$ , согласно выражению (3.15),  $I = E/r = I_k$ , а напряжение на зажимах приемника и источника  $U \doteq 0$ .

Режим электрической цепи, при котором накоротко замкнут участок с одним или несколькими элементами, в связи с чем напряжение на этом участке равно нулю, называется режимом короткого замыкания. Соответственно ток  $I_k$  в цепи называется током короткого замыкания.

Короткие замыкания в электрических установках нежелательны, так как токи короткого замыкания, как правило, в несколько раз превышают номинальные величины, что ведет к резкому увеличению выделения теплоты в токоведущих частях и, следовательно, к порче электрических установок.

Напряжение на зажимах источника уменьшается от  $U = E$  до  $U = 0$ , если ток нагрузки увеличивается от нуля до тока короткого замыкания  $I_k$  (рис. 3.12).

### Задачи

**Задача 3.12.** Источник электрической энергии имеет в качестве нагрузки реостат с переменным сопротивлением  $R$ . ЭДС источника  $E = 24$  В, а его внутреннее сопротивление  $r = 1$  Ом. Построить графики зависимости напряжения  $U$  на зажимах источника, мощности источника  $P_{\text{и}}$ , мощности приемника  $P_{\text{п}}$ , КПД

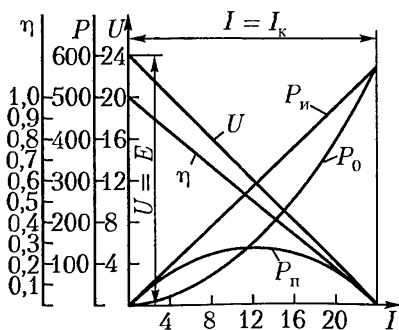


Рис. 3.12

Таблица 3.1

| $R$ , Ом            | $\infty$ | 23 | 11 | 7  | 5  | 3   | 2   | 1   | 0,2 | 0   |
|---------------------|----------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $I$ , А             | 0        | 1  | 2  | 3  | 4  | 6   | 8   | 12  | 20  | 24  |
| $U$ , В             | 24       | 23 | 22 | 21 | 20 | 18  | 16  | 12  | 4   | 0   |
| $P_{\text{и}}$ , Вт | 0        | 24 | 48 | 72 | 96 | 144 | 192 | 288 | 480 | 576 |
| $P_{\text{п}}$ , Вт | 0        | 23 | 44 | 63 | 80 | 108 | 128 | 144 | 80  | 0   |

источника, мощности потерь внутри источника  $P_0$  от тока в цепи при изменении сопротивления нагрузки от  $R = \infty$  (холостой ход) до  $R = 0$  (короткое замыкание), считая ЭДС источника постоянной.

**Решение.** Для решения задачи воспользуемся схемой рис. 3.11. При сопротивлении нагрузки  $R = 11$  Ом:

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{24}{11 + 1} = 2 \text{ А};$$

$$U = IR = 2 \cdot 11 = 22 \text{ В};$$

$$P_{\text{и}} = EI = 24 \cdot 2 = 48 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{п}} = I^2 R = 2^2 \cdot 11 = 44 \text{ Вт};$$

$$P_0 = I^2 r = 2^2 \cdot 1 = 4 \text{ Вт};$$

$$\eta = P_{\text{п}} / P_{\text{и}} = 44 / 48 = 0,917.$$

Для других величин сопротивления  $R$  результаты подсчетов приведены в табл. 3.1.

По данным таблицы в прямоугольной системе координат строим график  $U, P_{\text{и}}, P_{\text{п}}, P_0, \eta$  в функции  $I$ . Графики показаны на рис. 3.12.

Из табл. 3.1 и графика рис. 3.12 видно, что при равенстве сопротивления нагрузки внутреннему сопротивлению источника на потребителе выделяется максимальная мощность. Поэтому режим, при котором сопротивление потребителя  $R$  равно внутреннему сопротивлению источника, т.е.  $R = r$ , называют режимом максимальной отдачи мощности источником. Однако при максимальной отдаче КПД цепи  $\eta = 50\%$ .

**Задача 3.13.** К источнику электрической энергии ЭДС  $E = 18$  В и внутренним сопротивлением  $r = 0,25$  Ом подключен приемник энергии, имеющий сопротивление  $R = 5,75$  Ом. Начертить схему цепи и определить: 1) напряжение на внешних зажимах источника и его КПД; 2) стоимость энергии, израсходованной в приемнике за 30 дней при работе по 7 ч в день, если цена электроэнергии 40 коп. за 1 кВт·ч.

**Задача 3.14.** В электрической цепи, состоящей из источника и приемника электрической энергии, ток  $I = 2$  А. Внутреннее сопротивление источника 1 Ом. Сопротивление приемника  $R = 23$  Ом. Начертить схему

цепи и определить: 1) ЭДС источника; 2) мощность приемника, мощность и КПД источника.

### 3.5. СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Для облегчения расчета составляется схема замещения электрической цепи, т.е. схема, отображающая свойства цепи при определенных условиях.

На схеме замещения изображают все элементы, влиянием которых на результат расчета нельзя пренебречь, и указывают также электрические соединения между ними, которые имеются в цепи.

#### Схемы замещения элементов электрических цепей

Элементы цепи, в которых электрическая энергия преобразуется в теплоту, характеризуются сопротивлением  $R$  или проводимостью  $G$  и называются п а с с и в н ы м и.

Элементы электрической цепи, в которых преобразование энергии осуществляется при наличии электродвижущей силы, характеризуются в большинстве случаев постоянными величинами ЭДС  $E$  и внутреннего сопротивления  $r$  (рис. 3.13, а). Такие элементы цепи называются а к т и в н ы м и.

На расчетных схемах источник энергии можно представить ЭДС без внутреннего сопротивления, если это сопротивление мало по сравнению с сопротивлением приемника (рис. 3.13, б).

При  $r = 0$  внутреннее падение напряжения  $U_0 = 0$ , поэтому напряжение на зажимах источника при любом токе равно ЭДС:  $U = E = \text{const}$ . Такой источник энергии с неизменным напряжением на его зажимах, не зависящим от внешнего сопротивления, называется источником ЭДС.

В некоторых случаях источник электрической энергии на расчетной схеме заменяют другой (эквивалентной) схемой (рис. 3.14, а), где вместо ЭДС  $E$  источник характеризуется его током короткого замыкания  $I_k$ , а вместо внутреннего сопротивления в расчет вводится внутренняя проводимость  $g = 1/r$ .

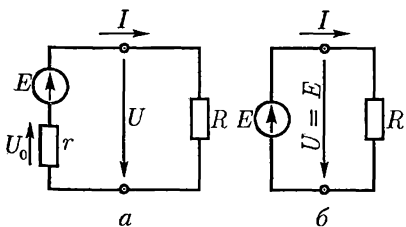


Рис. 3.13

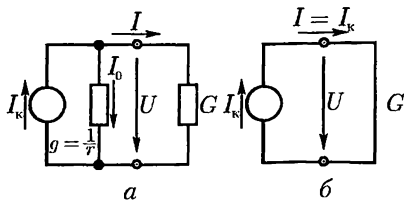


Рис. 3.14

Возможность такой замены можно доказать, разделив равенство (3.16) на  $r$ :

$$U/r = E/r - I,$$

где  $U/r = I_0$  — некоторый ток, равный отношению напряжения на зажимах источника к внутреннему сопротивлению;  $E/r = I_k$  — ток короткого замыкания источника;  $I = U/R$  — ток приемника.

Введем новые обозначения и получим равенство  $I_k = I_0 + I$ , которому удовлетворяет эквивалентная схема рис. 3.14, а.

Если внутреннюю проводимость отнести к приемнику, то можно положить  $g = 0$  и  $I_0 = 0$ .

В этом случае при любой величине напряжения на зажимах источника его ток остается равным току короткого замыкания (рис. 3.14, б):

$$I = I_k = \text{const.}$$

Источник с неизменным током, не зависящим от внешнего сопротивления, называют источником тока.

Один и тот же источник электрической энергии может быть заменен в расчетной схеме источником ЭДС или источником тока.

### Схема замещения электрической цепи

На рис. 3.15, а, б изображены электрическая цепь и ее схема замещения; указаны положительные направления тока и напряжения.

В этой схеме генератор  $\Gamma$  электрической энергии представлен ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $r$ ; два приемника  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — соответственно сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , сопротивление проводов линии  $\mathcal{L}$  заменено сосредоточенным сопротивлением  $R_n$ , вспомогательные аппараты и приборы в схеме замещения отсутствуют, так как в данном случае предполагается, что на результаты расчета они не влияют.

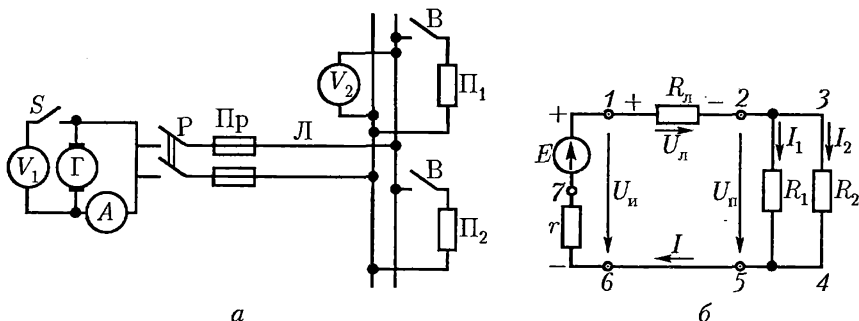


Рис. 3.15

На рис. 3.16 показана схема более сложной электрической цепи.

Рассматривая схему различных электрических цепей, можно выделить в них характерные участки.

**Участок, вдоль которого ток один и тот же, называется ветвью электрической цепи.**

**Место соединения ветвей называется узлом электрической цепи.**

Узел образуется при соединении в одной точке не менее трех ветвей, например на схеме рис. 3.16 к узлу 6 подключены четыре ветви.

Ветви, не содержащие источников электрической энергии, называются пассивными, а ветви, в которые входят источники, — активными.

**Любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям, называется контуром электрической цепи.**

На рис. 3.15, б таких контуров три:  $1-2-5-6-1$ ;  $1-2-3-4-5-6-1$ ;  $2-3-4-5-2$ .

На схемах стрелками отмечаются положительные направления ЭДС, напряжений и токов. Направление ЭДС может быть указано обозначением полярности зажимов источника: внутри источника ЭДС направлена от отрицательного зажима к положительному (так же как и ток).

Положительное направление напряжения на участке цепи совпадает с направлением тока — от точки большего потенциала к точке меньшего. У приемника направления напряжения и тока совпадают, у источника они противоположны.

## Задачи

**Задача 3.15.** Генератор постоянного тока в начале работы при температуре  $20^\circ\text{C}$  имел сопротивление цепи якоря (внутреннее сопротивление)  $r = 1$  Ом и напряжение на внешних зажимах  $U = 112$  В. Приемник энергии имел сопротивление  $37,3$  Ом при той же начальной температуре.

В результате работы температура обмотки якоря повысилась до  $60^\circ\text{C}$ , а приемника — до  $40^\circ\text{C}$ . Определить напряжение на зажимах генератора в этом случае, считая температурный коэффициент сопротивления для цепи якоря генератора и приемника одинаковым и равным  $0,004$  град $^{-1}$ .

**Задача 3.16.** Десять электрических ламп по  $100$  Вт каждая подключены к распределительному пункту двухпроводной линией длиной  $50$  м при сечении алюминиевого провода  $10$  мм $^2$ .

Начертить схему цепи и определить мощность потерь энергии в проводах линии, если напряжение на лампах  $200$  В.

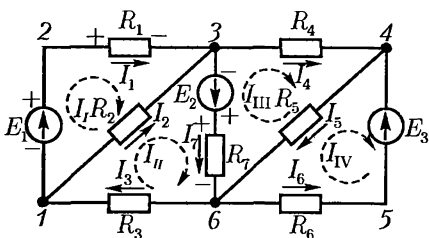


Рис. 3.16

## ГЛАВА 4

# РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Основная цель расчета электрической цепи заключается в определении токов в ее ветвях. Зная токи, нетрудно найти напряжения и мощности ветвей и отдельных элементов цепи.

Значения токов, напряжений, мощностей дают возможность оценить условия и эффективность работы электротехнического оборудования и приборов во всех участках электрической цепи.

Связь между ЭДС, напряжениями и токами линейных электрических цепей выражается линейными уравнениями, т. е. уравнениями первой степени, поэтому для их расчета применяются аналитические методы с обычными алгебраическими преобразованиями.

### 4.1. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Для расчета электрических цепей наряду с законом Ома применяются два закона Кирхгофа, являющиеся следствиями физических законов из группы законов сохранения.

#### Первый закон Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа применяется к узлам электрических цепей:

**в ветвях, образующих узел электрической цепи, алгебраическая сумма токов равна нулю:**

$$\boxed{\sum I = 0.} \quad (4.1)$$

В эту сумму токи входят с разными знаками в зависимости от направления их по отношению к узлу. На основании первого закона Кирхгофа для каждого узла можно составить уравнение токов. Например, для точки 3 схемы рис. 3.16 такое уравнение имеет вид

$$I_1 + I_2 - I_4 - I_7 = 0.$$

В этом уравнении токи, направленные к узлу, условно взяты положительными, а токи, направленные от узла, — отрицательными:

$$I_1 + I_2 = I_4 + I_7. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) позволяет дать другую формулировку первого закона Кирхгофа:

**сумма токов, направленных к узлу электрической цепи, равна сумме токов, направленных от того же узла.**

Этот закон следует из закона сохранения электрического заряда и соответствует принципу непрерывности электрического тока.

Если допустить преобладание в узле токов одного направления, то заряд одного знака должен накапливаться, а потенциал узловой точки непрерывно изменяться, что в реальных цепях не наблюдается.

## Второй закон Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа применяется к контурам электрических цепей:

**в контуре электрической цепи алгебраическая сумма напряжений на его ветвях равна нулю:**

$$\boxed{\sum U = 0.} \quad (4.3)$$

Для доказательства второго закона Кирхгофа обойдем контур 1—2—3—4—5—6—1 в схеме рис. 3.16 по часовой стрелке и запишем выражения потенциалов точек контура при указанных направлениях токов в ветвях (выбраны произвольно). Обход начнем от точки 1, потенциал которой  $V_1$ . Потенциал каждой последующей точки выразим относительно точки предыдущей:  $V_2 = V_1 + E_1$ ;  $V_3 = V_2 - I_1 R_1$ ;  $V_4 = V_3 - I_4 R_4$ ;  $V_5 = V_4 - E_3$ ;  $V_6 = V_5 + I_6 R_6$ ;  $V_1 = V_6 - I_3 R_3$ .

Изменение потенциала по выбранному контуру должно быть равно нулю, так как оно выражает работу, затраченную на перемещение частиц, обладающих вместе единицей заряда, по замкнутому пути в электрических полях источников и приемников энергии (см. 1.2).

Таким образом, в замкнутом контуре

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 &= 0, \\ E_1 - I_1 R_1 - I_4 R_4 - E_3 + I_6 R_6 - I_3 R_3 &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

или

$$-(E_1 - I_1 R_1) + I_4 R_4 + (E_3 - I_6 R_6) + I_3 R_3 = 0.$$

В этом уравнении напряжения ветвей:

$$3-2-1 \quad E_1 - I_1 R_1 = U_{3,1};$$



$$3-4 \quad I_4 R_4 = U_{3,4};$$

$$4-5-6 \quad E_3 - I_6 R_6 = U_{4,6};$$

$$6-1 \quad I_3 R_3 = U_{6,1},$$

поэтому  $U_{3,1} + U_{3,4} + U_{4,6} + U_{6,1} = 0$ .

В уравнении (4.4) напряжения, направленные по обходу контура, считаются положительными, а направленные против обхода — отрицательными.

Уравнение (4.4) перепишем в следующем виде:

$$I_1 R_1 + I_4 R_4 + I_3 R_3 - I_6 R_6 = E_1 - E_3. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) позволяет дать другую формулировку второго закона Кирхгофа:

**в контуре электрической цепи алгебраическая сумма падений напряжения в пассивных элементах равна алгебраической сумме ЭДС этого контура:**

$$\boxed{\sum IR = \sum E.} \quad (4.6)$$

Другим контурам соответствуют другие уравнения, которые не трудно написать, не прибегая к выражениям потенциалов точек контура.

Для этого можно пользоваться следующим правилом. В левую часть уравнения следует записать алгебраическую сумму падений напряжения в пассивных элементах контура, а в правую — алгебраическую сумму ЭДС, встречающихся при обходе контура.

При этом положительными считаются токи и ЭДС, направление которых совпадает с направлением обхода.

Согласно этому правилу, запишем уравнения для двух других контуров схемы, представленной на рис. 3.16:

для 1—2—3—6—1

$$I_1 R_1 + I_7 R_7 + I_3 R_3 = E_1 + E_2;$$

для 3—4—6—3

$$I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_7 R_7 = -E_2.$$

В 4.2 на конкретном примере показано, что непосредственной основой второго закона Кирхгофа [формулы (4.3), (4.6)] является закон сохранения энергии.

## Задачи

**Задача 4.1.** Составить уравнения по первому закону Кирхгофа для всех узлов схемы рис. 3.16. Доказать, что в системе уравнений, составлен-

ных по первому закону Кирхгофа, любое уравнение является следствием других уравнений.

**Задача 4.2.** Составить уравнения по второму закону Кирхгофа для всех контуров схемы рис. 3.16. Доказать, что в системе уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, любые  $m - n + 1$  уравнений являются независимыми ( $m$  — число ветвей,  $n$  — число узлов в схеме); каждое из оставшихся уравнений может быть получено из независимых уравнений.

## 4.2. НЕРАЗВЕТВЛЕННАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ

Элементы неразветвленной электрической цепи соединены между собой последовательно.

*Отличительной особенностью последовательного соединения является то, что электрический ток во всех участках цепи один и тот же.*

### Общий случай последовательного соединения

Рассмотрим общий случай последовательного соединения источников и приемников электрической энергии (рис. 4.1), пренебрегая внутренними сопротивлениями источников. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа, произвольно задавшись направлениями тока в цепи и направлением обхода контура (например, по часовой стрелке):

$$IR_1 + IR_2 + IR_3 = E_1 - E_2 + E_3. \quad (4.7)$$

Ток в цепи

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (4.8)$$

При обходе контура видно, что относительно направления обхода ЭДС  $E_1$  и  $E_3$  направлены одинаково, т. е. согласно, а ЭДС  $E_2$  — им навстречу.

Ток в цепи определяется действием всех трех ЭДС, и при заданных направлениях ЭДС и тока нетрудно установить, что элементы с ЭДС  $E_1$  и  $E_3$  вырабатывают электрическую энергию, а элемент с ЭДС  $E_2$  ее потребляет. Если в качестве источников ЭДС в данном случае предположить аккумуляторы, то источники  $E_2$  и  $E_3$  разряжаются, а источник  $E_1$  заряжается.

В элементах цепи, характеризующихся сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , электрическая энергия

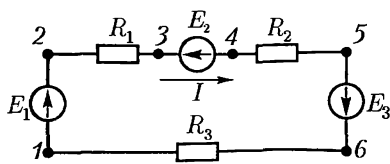


Рис. 4.1

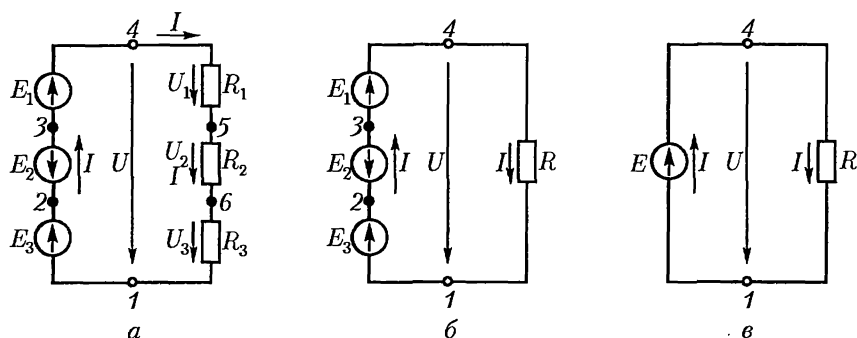


Рис. 4.2

преобразуется в тепловую. Рассматривая в качестве примера схему рис. 4.1, нетрудно убедиться в том, что второй закон Кирхгофа является следствием закона сохранения энергии в применении его к контуру электрической цепи.

Для этого достаточно умножить уравнение (4.7) на  $I$ , перенеся предварительно  $E_2$  в левую часть:

$$E_2 I + I^2 R_1 + I^2 R_2 + I^2 R_3 = E_1 I + E_3 I.$$

Получим уравнение баланса мощности для рассматриваемой цепи: сумма мощностей источников электрической энергии равна сумме мощностей приемников.

Ток в цепи с последовательным соединением элементов (см. рис. 4.1) не изменится и баланс мощностей сохранится, если произвести перестановку элементов цепи, сгруппировав ЭДС и сопротивления, как показано на рис. 4.2, а.

## Последовательное соединение пассивных элементов

Участок цепи 4—5—6—1 представляет собой последовательное соединение резисторов. На рассматриваемом участке действует напряжение  $U$ , равное алгебраической сумме ЭДС левой части схемы [см. правую часть уравнения (4.7)]. Это напряжение равно также сумме падений напряжения в правой части схемы [см. левую часть уравнения (4.7)]:

$$U = IR_1 + IR_2 + IR_3 = U_1 + U_2 + U_3.$$

Вынесем  $I$  за скобку и получим

$$U = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

или

$$U / I = R_1 + R_2 + R_3.$$

Отношение  $U/I = R$  есть некоторое сопротивление, эквивалентное по своему действию всем трем сопротивлениям:

$$R = R_1 + R_2 + R_3. \quad (4.9)$$

Это равенство позволяет на участке 4—5—6—1 три сопротивления заменить одним (эквивалентным) и получить более простую схему (рис. 4.2, б) при условии неизменности тока в цепи и сохранении того же баланса мощностей. Этот вывод можно распространить на любое число последовательно включенных пассивных элементов:

$$R = \sum_1^n R_n, \quad (4.10)$$

т.е. *общее сопротивление неразветвленной цепи равно сумме сопротивлений ее участков.*

### Последовательное соединение источников ЭДС

Участок 1—2—3—4 цепи на рис. 4.2, а представляет собой последовательное соединение источников ЭДС. Напряжение между точками 4—1  $U = E_1 - E_2 + E_3$ .

Последнее равенство позволяет на участке 1—2—3—4 три ЭДС заменить одной (эквивалентной)

$$E = E_1 - E_2 + E_3 \quad (4.11)$$

и получить более простую схему (рис. 4.2, в), в которой только одна (эквивалентная) ЭДС  $E$ .

Этот вывод можно распространить на любое число последовательно включенных источников. Если ЭДС всех источников равны и направлены согласно, как это имеет место при включении аккумуляторных элементов в батарею, то общая ЭДС может быть определена по формуле

$$E = nE_n, \quad (4.12)$$

где  $E_n$  — ЭДС одного элемента;  $n$  — число элементов в батарее.

Согласно составленной эквивалентной схеме (см. рис. 4.2, в),

$$I = \frac{E}{R} = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

### Потенциальная диаграмма

В схеме, представленной на рис. 4.1, при переходе от точки 1 к точке 2 потенциал повышается на величину  $E_1$ , а при переходе от точки 2 к точке 3 — снижается на величину  $U_{2,3} = IR_1$ . При переходе от точки 3 к точке 4 потенциал понижается на величину  $U_{3,4} = -E_2$ .

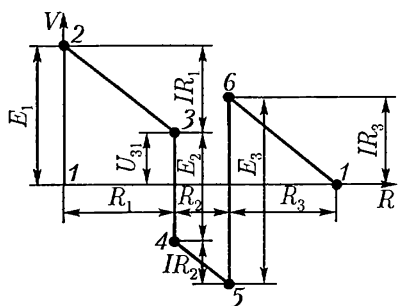


Рис. 4.3

Изменение потенциалов в электрической цепи можно наглядно изобразить графически в виде потенциальной диаграммы.

Потенциальная диаграмма представляет собой график изменения потенциала при обходе цепи, построенный в прямоугольной системе координат, в которой по оси абсцисс откладываются в определенном масштабе сопротивления участков цепи, а по оси ординат — потенциалы соответствующих точек. Потенциальная диаграмма цепи, изображенной на рис. 4.1, показана на рис. 4.3. Потенциалы точек цепи найдены согласно равенствам:

$$V_2 = V_1 + E_1; \quad V_3 = V_2 - IR_1;$$

$$V_4 = V_3 - E_2;$$

$$V_5 = V_4 - IR_2; \quad V_6 = V_5 + E_3;$$

$$V_1 = V_6 - IR_3,$$

причем потенциал точки 1 принят равным нулю. Так как внутренние сопротивления источников ЭДС приняты равными нулю, при переходе через эти элементы потенциалы изменяются скачком.

Однако в большинстве случаев источники обладают внутренним сопротивлением  $r$ , отличным от нуля. Эти сопротивления учитываются при определении тока цепи и в построении потенциальной диаграммы.

Сила тока определяется алгебраической суммой ЭДС всех источников, деленной на полное сопротивление цепи:

$$I = \frac{\sum E}{\sum (R + r)}.$$

Для определения силы и направления тока в неразветвленной цепи с несколькими источниками произвольно выбирают направление обхода контура цепи (по часовой или против часовой стрелки).

Тогда ЭДС, совпадающие по направлению с выбранным направлением обхода, в алгебраической сумме берут со знаком плюс, а несовпадающие — со знаком минус. Если при расчете результат получился положительный, то ток совпадает с произвольно выбранным направлением обхода. Если же результат получился отрицательным, то ток имеет направление, противоположное выбранному.

## Задачи

**Задача 4.3.** Генератор с ЭДС  $E_1 = 100$  В и аккумуляторы с ЭДС  $E_2 = 130$  В и  $E_3 = 90$  В включены по схеме рис. 4.4. Сопротивление потребителей:  $R_1 = 16$  Ом;  $R_2 = 12$  Ом;  $R_3 = 4$  Ом;  $R_4 = 8$  Ом, а внутренние сопротивления источников  $r_1 = 6$  Ом;  $r_2 = 9$  Ом;  $r_3 = 5$  Ом.

Определить ток в цепи, построить потенциальную диаграмму цепи, составить и проверить баланс мощностей.

**Решение.** Обходим контур по часовой стрелке

$$I = \frac{E_1 - E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + r_1 + r_2 + r_3} = \frac{100 - 130 - 90}{16 + 12 + 4 + 8 + 6 + 9 + 5} = -2 \text{ А.}$$

Таким образом, ток в цепи, равный 2 А, направлен против выбранного направления обхода, т.е. против часовой стрелки (как указано на рис. 4.4).

Для построения потенциальной диаграммы определим потенциалы, указанных точек цепи, приняв потенциал точки 1 равным нулю, т.е.  $V_1 = 0$ .

$$V_2 = V_1 + IR_1 = 0 + 2 \cdot 16 = 32 \text{ В;}$$

$$V_3 = V_2 + E_1 + Ir_1 = 32 + 100 + 2 \cdot 6 = 144 \text{ В;}$$

$$V_4 = V_3 + IR_2 = 144 + 2 \cdot 12 = 168 \text{ В;}$$

$$V_5 = V_4 - E_2 + Ir_2 = 168 - 130 + 2 \cdot 9 = 56 \text{ В;}$$

$$V_6 = V_5 + IR_3 = 56 + 2 \cdot 4 = 64 \text{ В;}$$

$$V_7 = V_6 + IR_4 = 64 + 2 \cdot 8 = 80 \text{ В;}$$

$$V_1 = V_7 - E_3 + Ir_3 = 80 - 90 + 2 \cdot 5 = 0.$$

Потенциальная диаграмма показана на рис. 4.5.

Составляем баланс мощностей. Из расчета следует, что генератор 1 работает в режиме потребителя, а аккумуляторы 2 и 3 — в режиме генератора:

$$E_2 I + E_3 I = E_1 I + I^2 \sum (R + r).$$

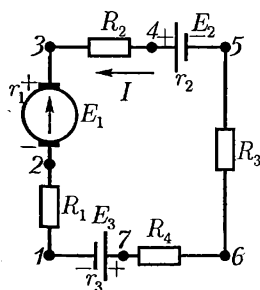


Рис. 4.4

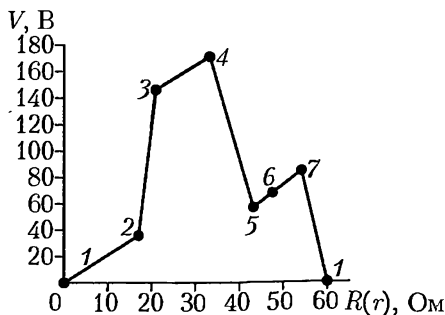


Рис. 4.5

Проверяем:

$$130 \cdot 2 + 90 \cdot 2 = 100 \cdot 2 + 2^2 \cdot 60, \quad 440 \text{ Вт} = 440 \text{ Вт.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Определите напряжение на зажимах генератора  $U_1$ , аккумуляторных батареях  $U_2$ ,  $U_3$  и на резисторах  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$ .
2. Постройте потенциальную диаграмму цепи, полагая, что потенциал  $V_5 = 0$ .
3. Найдите напряжение между точками 3—1 ( $U_{3,1}$ ) и точками 3—5 ( $U_{3,5}$ ), пользуясь потенциальной диаграммой.

**Задача 4.4.** По данным задачи 4.3, определить силу и направление тока и построить потенциальную диаграмму цепи, если изменить направление ЭДС всех источников на рис. 4.4.

**Задача 4.5.** Аккумуляторная батарея состоит из 20 щелочных аккумуляторов, соединенных последовательно. ЭДС каждого аккумулятора 1,2 В, а внутреннее сопротивление  $r = 0,5$  Ом. Определить мощность приемника энергии, подключенного к батарее, если его сопротивление  $R = 38$  Ом.

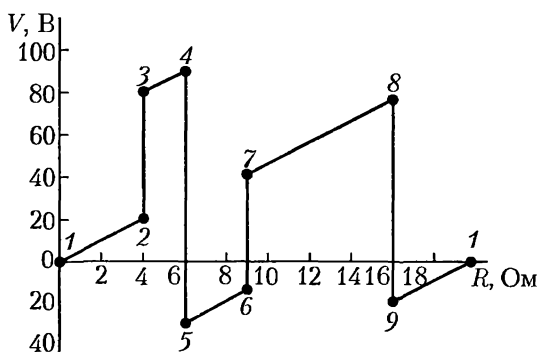


Рис. 4.6

**Задача 4.6.** Напряжение на зажимах генератора постоянного тока  $U_1 = 130$  В, ток в линии  $I = 50$  А, сечение алюминиевого провода  $S = 25 \text{ мм}^2$ , длина линии  $l = 50$  м. Определить падение напряжения в линии  $\Delta U$ , напряжение в конце линии  $U_2$ , мощность передачи энергии от генератора в линию  $P_1$  и мощность приемника  $P_2$ .

**Задача 4.7.** По заданной потенциальной диаграмме (рис. 4.6) начертить схему электрической цепи и составить для этой цепи баланс мощностей.

## 4.3. РАЗВЕТВЛЕННАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ С ДВУМЯ УЗЛАМИ

Разветвленная электрическая цепь, как видно из названия, состоит из нескольких ветвей.

Ветви, присоединенные к одной паре узлов, включены параллельно (рис. 4.7, а). Отличительной особенностью параллельного со-

единения является то, что ко всем ветвям приложено одно и то же напряжение.

## Параллельное соединение пассивных элементов

Приемники электрической энергии, представленные на схеме рис. 4.7, а сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , и источник электрической энергии  $E$  с внутренним сопротивлением  $r$  подключены к одной паре узлов (точки А и Б). Составим уравнение токов для узла А в соответствии с первым законом Кирхгофа:  $I = I_1 + I_2 + I_3$ .

Токи приемников можно выразить, используя напряжение между узлами и проводимости ветвей:

$$I_1 = UG_1; \quad I_2 = UG_2; \quad I_3 = UG_3;$$

$$\text{где } G_1 = 1 / R_1; \quad G_2 = 1 / R_2; \quad G_3 = 1 / R_3;$$

$$I = UG_1 + UG_2 + UG_3 = U(G_1 + G_2 + G_3).$$

Разделим это уравнение на  $U$ :

$$I / U = G_1 + G_2 + G_3.$$

Отношение  $I/U$  есть проводимость  $G$ , соответствующая общему току цепи и общему напряжению:

$$G = G_1 + G_2 + G_3. \quad (4.13)$$

Этот вывод можно распространить на любое число  $n$  параллельно соединенных приемников:

$$G = \sum_1^n G_n. \quad (4.14)$$

При параллельном соединении пассивных ветвей общая проводимость между двумя узлами равна сумме проводимостей всех ветвей.

Исходя из формул (4.13) и (4.14), можно заменить три проводимости (в общем случае  $n$  проводимостей) одной (эквивалентной) проводимостью  $G$  и получить более простую схему (рис. 4.7, б).

Эквивалентное сопротивление при параллельном соединении нескольких ветвей определяется из равенства

$$1 / R = 1 / R_1 + 1 / R_2 + 1 / R_3 \dots + 1 / R_n. \quad (4.15)$$

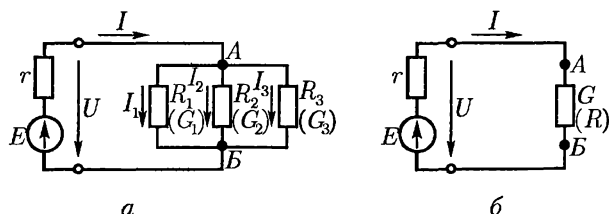


Рис. 4.7



Очень часто встречается параллельное соединение двух ветвей. В этом случае эквивалентное сопротивление определяется по формуле

$$1 / R = 1 / R_1 + 1 / R_2$$

или

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (4.16)$$

Схема на рис. 4.7, б, полученная после замены трех проводимостей одной (эквивалентной), представляет собой простейшую схему электрической цепи.

Ток в этой схеме, равный току в неразветвленной части (см. рис. 4.7, а), определяется по формуле (3.15)

$$I = \frac{E}{r + R}.$$

Целью расчета электрической цепи является не только определение общего тока, но и тока в каждой ветви.

Если заданы ЭДС и все сопротивления, то после определения общего тока по формуле (3.15) нужно определить напряжение между узловыми точками и токи в ветвях по закону Ома:  $U = IR$ ,  $I_1 = U/R_1$ ,  $I_2 = U/R_2$ ;  $I_3 = U/R_3$ .

## Параллельное соединение источников энергии

В практике часто встречаются случаи параллельного включения источников электрической энергии, работающих совместно на один или несколько приемников (рис. 4.8).

В таких случаях определением токов в источниках решается важная задача распределения нагрузки между ними.

Представим источники энергии в схеме рис. 4.8, а эквивалентными схемами источников тока, а сопротивление приемника заменим проводимостью  $G$  (рис. 4.8, б):

$$I_1 = I_{1к} - I_{0.1}; \quad I_2 = I_{2к} - I_{0.2};$$

$$I_3 = I_{3к} - I_{0.3}; \quad I = UG;$$

$$I_{1к} = E_1 g_1; \quad I_{0.1} = U g_1;$$

$$I_{2к} = E_2 g_2; \quad I_{0.2} = U g_2;$$

$$I_{3к} = E_3 g_3; \quad I_{0.3} = U g_3,$$

где  $U = U_{AB}$  — напряжение между узловыми точками А и Б.

По первому закону Кирхгофа, для узла А

$$I_1 + I_2 + I_3 = I,$$

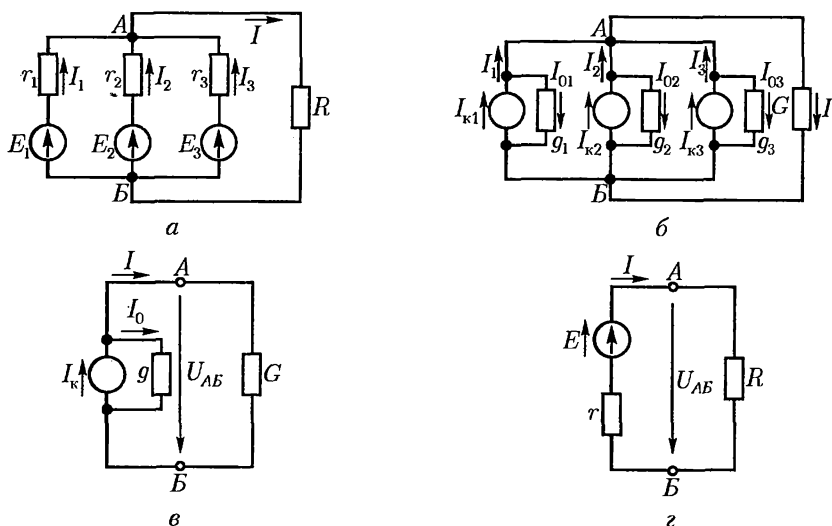


Рис. 4.8

или

$$I_{1к} + I_{2к} + I_{3к} = I_{0.1} + I_{0.2} + I_{0.3} = U(G + g_1 + g_2 + g_3).$$

Это равенство дает основание три источника тока заменить одним (эквивалентным), а схему рис. 4.8, б заменить более простой (рис. 4.8, в). Эквивалентный источник тока характеризуется током короткого замыкания:

$$I_{к} = I_{1к} + I_{2к} + I_{3к}$$

и внутренней проводимостью

$$g = g_1 + g_2 + g_3.$$

Для схемы рис. 4.8, в

$$I_{к} = I + I_0 = I + Ug. \quad (4.17)$$

Напряжение между узлами

$$U = \frac{I_{1к} + I_{2к} + I_{3к}}{g_1 + g_2 + g_3 + G} = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2 + E_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3 + G}. \quad (4.18)$$

Токи в ветвях можно определить по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (E_1 - U)g_1 = (E_1 - U) / r_1; \\ I_2 &= (E_2 - U)g_2 = (E_2 - U) / r_2; \\ I_3 &= (E_3 - U)g_3 = (E_3 - U) / r_3; \\ I &= UG = U / R. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Из этих выражений следует, что источники с относительно большей ЭДС и меньшим внутренним сопротивлением имеют больший ток, т. е. принимают на себя большую нагрузку. Если ЭДС и внутренние сопротивления источников одинаковы, нагрузка между ними распределяется поровну.

Общий ток в этом случае определяется произведением тока одного источника  $I_n$  на число параллельно включенных источников:

$$I = I_n n. \quad (4.20)$$

Сила тока каждого источника ограничена его номинальным значением  $I_{\text{ном}}$ , сверх которого нагружать источник нельзя. Параллельное соединение источников применяется для увеличения общего тока, благодаря чему достигается увеличение мощности потребления энергии без изменения напряжения.

От схемы с эквивалентным источником тока можно перейти к схеме с эквивалентным источником ЭДС (рис. 4.8, з), разделив уравнение (4.17) на  $g$ :  $I_k / g = I / g + U$ .

Так как  $1/g = r$  — внутреннее сопротивление эквивалентного источника ЭДС, то  $I_k r = Ir + U$ .

Но  $I_k r = E$  — ЭДС эквивалентного источника;  $Ir$  — падение напряжения во внутреннем сопротивлении, поэтому  $E = U + Ir$ .

В 5.3 рассматривается метод расчета разветвленных электрических цепей, предусматривающий замену всех источников ЭДС одним (эквивалентным), который принято называть эквивалентным генератором.

### Общий случай параллельного соединения источников и приемников электрической энергии

Выводы и формулы, полученные ранее, могут быть применены для расчета электрических цепей с двумя узловыми точками, между

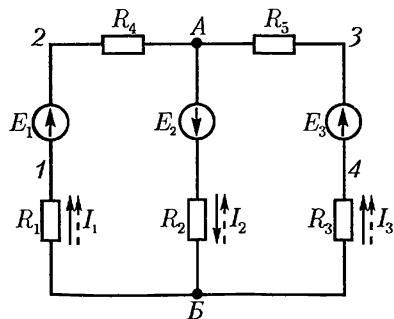


Рис. 4.9

которыми содержится любое число параллельных ветвей с источниками и приемниками энергии, в том числе и такие ветви, которые имеют несколько элементов, соединенных последовательно (например, схема, приведенная на рис. 4.9).

Порядок расчета таких цепей, предусматривающий предварительное определение напряжения между узловыми точками, называется методом узлового на-

п р я ж е н и я (о применении метода узловых напряжений к расчету сложных цепей см. 5.5).

Для применения этого метода должны быть заданы ЭДС источников и проводимости ветвей (последние можно определить, если заданы сопротивления элементов каждой ветви).

В общем случае токи в ветвях и ЭДС могут иметь различное направление, поэтому при определении узлового напряжения нужно взять алгебраическую сумму произведений  $EG$  и формула (4.18) примет вид

$$U_{AB} = \frac{\sum EG}{\sum G}. \quad (4.21)$$

Знак ЭДС устанавливается в соответствии с положительным направлением токов в ветвях, которое выбирается произвольно, но одинаково для всех ветвей (например, от  $B$  к  $A$ ).

ЭДС ветви считается положительной, если ее направление совпадает с положительным направлением тока. В противном случае ЭДС подстав ляют со знаком минус в формулу (4.21) и также при определении токов по формулам (4.19).

### Задачи

**Задача 4.8.** Для схемы, изображенной на рис. 4.7,  $a$ , известны:  $E = 130$  В,  $r = 0,5$  Ом,  $R_1 = 30$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 12$  Ом. Определить токи в схеме, мощность передачи энергии приемниками и КПД источника.

**Р е ш е н и е.** Вначале определим эквивалентное сопротивление между точками  $A$  и  $B$ :  $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = 1/30 + 1/20 + 1/12 = 1/6$  См,  $R = 6$  Ом.

Ток в неразветвленной части цепи

$$I = E/(r + R) = 130/(0,5 + 6) = 20 \text{ А.}$$

Для определения токов в параллельных ветвях между узловыми точками определим напряжение на зажимах источника, которое в данном случае равно напряжению на приемниках:

$$U = E - Ir = IR = 130 - 20 \cdot 0,5 = 120 \text{ В;}$$

$$I_1 = U / R_1 = 120 / 30 = 4 \text{ А;}$$

$$I_2 = U / R_2 = 120 / 20 = 6 \text{ А;}$$

$$I_3 = U / R_3 = 120 / 12 = 10 \text{ А.}$$

Проверим правильность определения токов по уравнению (4.1):

$$I = I_1 + I_2 + I_3; \quad 20 = 4 + 6 + 10.$$

Мощность передачи энергии приемникам

$$P = UI = 120 \cdot 20 = 2400 \text{ Вт.}$$

КПД источника

$$\eta = U/E = 120/130 = 0,923.$$

**Задача 4.9.** Выполнить расчет электрической цепи по условию задачи 4.8, если сопротивление  $R_3$  отключено, а ЭДС источника  $E$  остается без изменения.

**Задача 4.10.** Для схемы, изображенной на рис. 4.7, а, известны:  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 15$  Ом,  $R_3 = 6$  Ом,  $r = 0,5$  Ом,  $I_3 = 10$  А. Определить токи в схеме, мощность и КПД источника.

**Решение.** Используя данные условия, относящиеся к третьей ветви, определим напряжение между узлами  $A$  и  $B$  по закону Ома:

$$U = I_3 R_3 = 10 \cdot 6 = 60 \text{ В.}$$

Напряжение  $U$  является общим для всех ветвей, присоединенных к точкам  $A$  и  $B$ . Это дает возможность использовать ту же формулу для определения токов в двух ветвях:  $I_1 = U/R_1 = 60/10 = 6$  А;  $I_2 = U/R_2 = 60/15 = 4$  А.

Ток в неразветвленной части цепи

$$I' = I_1 + I_2 + I_3 = 6 + 4 + 10 = 20 \text{ А.}$$

ЭДС источника

$$E = U + U_0 = U + Ir = 60 + 20 \cdot 0,5 = 70 \text{ В.}$$

Мощность источника

$$P_{\text{и}} = EI = 70 \cdot 20 = 1400 \text{ Вт.}$$

Мощность потребления энергии приемниками

$$P_{\text{п}} = UI = 60 \cdot 20 = 1200 \text{ Вт.}$$

КПД источника

$$\eta = P_{\text{п}} / P_{\text{и}} = 1200/1400 = 0,857.$$

**Задача 4.11.** Выполнить расчет электрической цепи по данным условиям задачи 4.10, если к точкам  $A$  и  $B$  подключить четвертый приемник энергии с сопротивлением  $R_4 = 20$  Ом, а ЭДС источника  $E = 70$  В.

**Задача 4.12.** Определить токи и составить баланс мощностей для схемы, изображенной на рис. 4.9, если известны:  $E_1 = 120$  В,  $E_2 = 80$  В,  $E_3 = 60$  В,  $r_1 = 0,5$  Ом,  $r_2 = 0,4$  Ом,  $r_3 = 0,2$  Ом,  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 15,6$  Ом,  $R_3 = 12,4$  Ом,  $R_4 = 7,5$  Ом,  $R_5 = 7,4$  Ом.

**Решение.** Применяя метод узловых напряжений, найдем  $U_{AB}$  по формуле (4.21). Предварительно зададим положительное направление токов от  $B$  к  $A$  и подсчитаем проводимости ветвей:

$$G_1 = \frac{1}{R_1 + R_4 + r_1} = \frac{1}{2 + 7,5 + 0,5} = \frac{1}{10} \text{ См;}$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2 + r_2} = \frac{1}{15,6 + 0,4} = \frac{1}{16} \text{ См};$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3 + R_5 + r_3} = \frac{1}{12,4 + 7,4 + 0,2} = \frac{1}{20} \text{ См};$$

$$U_{AB} = \frac{E_1 G_1 - E_2 G_2 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{120 \frac{1}{10} - 80 \frac{1}{16} + 60 \frac{1}{20}}{1/10 + 1/16 + 1/20} = 47 \text{ В}.$$

Токи в ветвях:

$$I_1 = (E_1 - U_{AB}) G_1 = (120 - 47) \frac{1}{10} = 7,3 \text{ А};$$

$$I_2 = (E_2 - U_{AB}) G_2 = (-80 - 47) \frac{1}{16} = -7,95 \text{ А};$$

$$I_3 = (E_3 - U_{AB}) G_3 = (60 - 47) \frac{1}{20} = 0,65 \text{ А}.$$

Токи  $I_1$  и  $I_3$  положительны. Их направление совпадает с выбранным ранее условно-положительным направлением от узла  $B$  к узлу  $A$ . Направление тока  $I_2$  противоположно положительному направлению; в результате расчета этот ток получился отрицательным. На схеме рис. 4.9 пунктиром показано положительное направление токов в ветвях, а сплошной стрелкой — их действительное направление.

Для составления баланса мощностей необходимо подсчитать мощность каждого элемента схемы, в том числе и мощность потерь внутри источников. Заметим, что направления ЭДС и токов во всех ветвях совпадают — источники ЭДС являются источниками энергии.

Мощности источников:

$$P_{11} = E_1 I_1 = 120 \cdot 7,3 = 876 \text{ Вт};$$

$$P_{12} = E_2 I_2 = 80 \cdot 7,95 = 636 \text{ Вт};$$

$$P_{13} = E_3 I_3 = 60 \cdot 0,65 = 39 \text{ Вт}.$$

Общая мощность источников 1551 Вт.

При определении мощности источников можно не задумываться над тем, в каком режиме работает тот или другой источник. Ответ на этот вопрос дает знак полученной мощности, если токи и ЭДС подставлять с теми знаками, какие были приняты или получены в расчете. Например, мощность второго источника положительна:  $P_{12} = -80 \cdot (-7,95) = 636 \text{ Вт}$ . Это указывает на то, что в данной ветви работает источник энергии. Раньше  $E_2$  и  $I_1$  сразу были взяты положительными, так как отмечено совпадение направлений напряжения и тока.

Мощности потерь внутри источников:

$$P_{0,1} = I_1^2 r_1 = 7,3^2 \cdot 0,5 = 26,5 \text{ Вт};$$

$$P_{0,2} = I_2^2 r_2 = 7,95^2 \cdot 0,4 = 25,2 \text{ Вт};$$

$$P_{0,3} = I_3^2 r_3 = 9,65^2 \cdot 0,2 = 0,084 \text{ Вт}.$$

Общая мощность потерь внутри источников приблизительно 52 Вт.  
Мощность приемников:

$$P_{2,1} = I_1^2 R_1 = 7,3^2 \cdot 2 = 106 \text{ Вт};$$

$$P_{2,2} = I_2^2 R_2 = 7,95^2 \cdot 15,6 = 986 \text{ Вт};$$

$$P_{2,3} = I_3^2 R_3 = 0,65^2 \cdot 12,4 = 5 \text{ Вт};$$

$$P_{2,4} = I_4^2 R_4 = 7,3^2 \cdot 7,5 = 399 \text{ Вт};$$

$$P_{2,5} = I_5^2 R_5 = 0,65^2 \cdot 7,4 = 3 \text{ Вт}.$$

Общая мощность приемников 1499 Вт.

Баланс мощностей (мощность источников равна мощности приемников плюс мощность потерь внутри источников) 1551 Вт = (1499 + 52) Вт.

**Задача 4.13.** Для схемы рис. 4.8, *a* известны:  $E_1 = 120 \text{ В}$ ,  $E_2 = 115 \text{ В}$ ,  $E_3 = 110 \text{ В}$ ,  $r_1 = 0,3 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 0,4 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = 0,5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ .

Найти токи в схеме и составить баланс мощностей. На основании результатов решения дать заключение о режиме работы каждого источника ЭДС.

#### 4.4. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ (МЕТОД «СВЕРТЫВАНИЯ» ЦЕПИ)

Метод эквивалентных сопротивлений применяется для расчета таких электрических цепей, в которых имеются пассивные элементы, включенные между собой последовательно, параллельно или по смешанной схеме.

##### Определение эквивалентных сопротивлений

На схеме рис. 4.10, *a* сопротивления  $R_3$  и  $R_4$  включены последовательно: между ними (в точке 3) нет ответвления с током, поэтому  $I_3 = I_4$ . Эти два сопротивления можно заменить одним (эквивалентным), определив его как сумму  $R_3 + R_4 = R_{3,4}$ .

После такой замены получается более простая схема (рис. 4.10, *б*).

Сопротивления  $R_2$  и  $R_{3,4}$  соединены параллельно, их можно заменить одним (эквивалентным), определив его по формуле (4.16):

$$R_{2,4} = \frac{R_2 R_{3,4}}{R_2 + R_{3,4}},$$

и получить более простую схему (рис. 4.10, *в*).

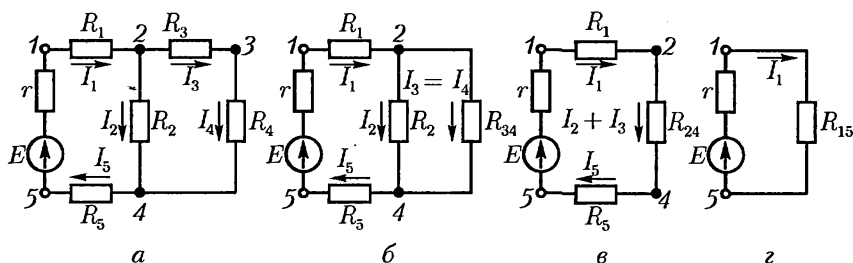


Рис. 4.10

В схеме рис. 4.10, в сопротивления  $R_1$ ,  $R_{2,4}$ ,  $R_5$  соединены последовательно. Заменяв эти сопротивления одним (эквивалентным) сопротивлением между точками 1 и 5, получим простейшую схему (рис. 4.10, г).

Подобными преобразованиями схему смешанного соединения пассивных элементов с одним источником энергии в большинстве случаев можно привести к простейшей схеме. В более сложных схемах методом эквивалентных сопротивлений достигается упрощение, которое значительно облегчает расчет.

## Определение токов

В простейшей схеме (см. рис. 4.10, г) ток  $I$  определяется по закону Ома с использованием формулы (3.15). Токи в других ветвях первоначальной схемы определяют, переходя от схемы к схеме в обратном порядке.

Из схемы рис. 4.10, в видно, что

$$I_5 = I_1 = I_2 + I_3.$$

Кроме того, напряжение между точками 2 и 4

$$U_{2,4} = I_1 R_{2,4}.$$

Зная это напряжение, легко определить токи  $I_2$  и  $I_3 = I_4$ :

$$I_2 = U_{2,4} / R_2; \quad I_3 = I_4 = U_{2,4} / R_{3,4}.$$

После определения токов  $I_1$  и  $I_5$  напряжение  $U_{2,4}$  можно найти как разность потенциалов между точками 2 и 4. Для этого положим  $V_4$  известным (например, равным нулю), а  $V_2$  найдем так же, как при построении потенциальной диаграммы в 4.2, обойдя от точки 4 неразветвленный участок цепи с током  $I_1 = I_5$ :

$$V_2 = V_4 - I_5 R_5 + E - I_1 r - I_1 R_1;$$

$$U_{2,4} = V_2 - V_4 = E - I(R_5 + r + R_1).$$



## Задачи

**Задача 4.14.** Для схемы рис. 4.10, *a* заданы:  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 1,5 \text{ Ом}$ ,  $E = 160 \text{ В}$ ,  $r = 0,5 \text{ Ом}$ .

Определить токи во всех элементах схемы и КПД источника.

**У к а з а н и е.** Задачу решить в порядке, изложенном в 4.4.

**Задача 4.15.** В схеме рис. 4.10, *a* ток  $I_3 = 3 \text{ А}$ . Определить ЭДС и мощность источника, приняв величины сопротивлений по условию задачи 4.14.

## 4.5. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ЗВЕЗДЫ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Пассивные элементы в электрических цепях соединяют не только последовательно или параллельно. Во многих схемах можно выделить группы из трех элементов, образующих треугольник или звезду сопротивлений.

При расчете подобных цепей упрощение схем выполняют известным методом эквивалентных сопротивлений, но предварительно проводят преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду или наоборот.

### Треугольник и звезда сопротивлений

Рассмотрим в качестве примера схему рис. 4.11, *a*, которая применяется для измерения сопротивлений (схема моста Уитстона).

В этой схеме нет элементов, соединенных последовательно или параллельно, но имеются замкнутые контуры из трех сопротивлений (треугольник сопротивлений), причем точки, разделяющие каждую пару смежных сопротивлений, являются узловыми.

К узловым точкам  $a$ ,  $b$ ,  $c$  присоединен треугольник сопротивлений  $R_{ab}$ ,  $R_{bc}$ ,  $R_{ca}$ . Его можно заменить эквивалентной трехлучевой звездой сопротивлений  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$  (на рисунке изображены штриховыми линиями), присоединенных, с одной стороны, к тем же точкам  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , а с другой — в общей (узловой) точке  $e$ .

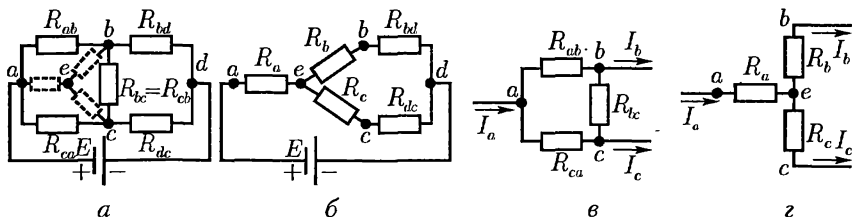


Рис. 4.11

Смысл замены становится понятным при рассмотрении эквивалентной схемы 4.11, б, где сопротивления  $R_b$  и  $R_{bd}$  соединены между собой последовательно, так же как и сопротивления  $R_c$  и  $R_{dc}$ .

Две ветви между узловыми точками  $e$  и  $d$  с этими парами сопротивлений соединены параллельно. Соответствующими преобразованиями схему можно привести к простейшему виду.

### Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду

Замена треугольника сопротивлений эквивалентной звездой и наоборот осуществляется при условии, что такая замена не изменяет потенциалов узловых точек  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , являющихся вершинами треугольника и эквивалентной звезды.

Одновременно предполагают, что в остальной части схемы, не затронутой преобразованием, режим работы не изменяется (не изменяются токи, напряжения, мощности). Для доказательства возможности перехода от треугольника к звезде и наоборот рассмотрим схемы рис. 4.11, в, г.

Эти схемы остаются эквивалентными для всех режимов, в том числе и для режима, при котором  $I_a = 0$ , что соответствует обрыву общего провода, ведущего к точке  $a$ . В этом случае в схеме треугольника между точками  $b$  и  $c$  включены параллельно две ветви с сопротивлениями  $R_{bc}$  и  $R_{ab} + R_{ca}$ .

Общее сопротивление между этими точками

$$\frac{R_{bc}(R_{ab} + R_{ca})}{R_{bc} + R_{ab} + R_{ca}}.$$

В схеме звезды между точками  $b$  и  $c$  включены последовательно сопротивления  $R_b$  и  $R_c$ . Общее сопротивление между этими точками  $R_b + R_c$ .

По условиям эквивалентности напряжение между точками  $b$  и  $c$  и токи  $I_b$  и  $I_c$  в обеих схемах должны быть одинаковыми. Следовательно, и сопротивления между точками  $b$  и  $c$  в обеих схемах одинаковы, т. е.

$$R_b + R_c = \frac{R_{bc}(R_{ab} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

Полагая  $I_b = 0$ , а затем  $I_c = 0$ , получим

$$R_c + R_a = \frac{R_{ca}(R_{bc} + R_{ab})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}};$$

$$R_a + R_b = \frac{R_{ab}(R_{ca} + R_{bc})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

Совместное решение трех полученных уравнений приводит к следующим выражениям, которые служат для определения сопротивлений трехлучевой звезды по известным сопротивлениям эквивалентного треугольника:

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \\ R_b &= \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \\ R_c &= \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

### Преобразование звезды сопротивлений в эквивалентный треугольник

Для расчета некоторых схем применяется преобразование трехлучевой звезды в эквивалентный треугольник, которое показано на рис. 4.12, а, где схема взята такой же, как на рис. 4.11, а.

При этом для определения параметров треугольника по заданным параметрам звезды пользуются формулами, которые записаны применительно к схемам рис. 4.12, а, б:

$$G_{ad} = \frac{G_a G_d}{G_a + G_d + G_c};$$

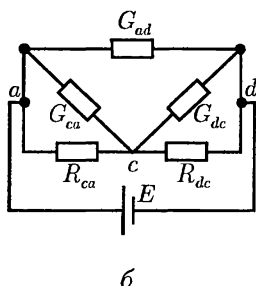
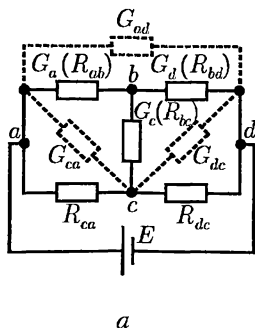


Рис. 4.12

$$G_{dc} = \frac{G_d G_c}{G_a + G_d + G_c}; \quad (4.23)$$

$$G_{ca} = \frac{G_c G_a}{G_a + G_d + G_c},$$

где  $G_{ad}$ ,  $G_{dc}$ ,  $G_{ca}$  — проводимости сторон треугольника;  $G_a$ ,  $G_b$ ,  $G_c$  — проводимости лучей звезды.

Зная проводимости, нетрудно определить сопротивления треугольника, если это необходимо.

### Задачи

**Задача 4.16.** Определить токи в схеме рис. 4.11, а, если известны:  $R_{ab} = 12$  Ом,  $R_{bd} = 18$  Ом,  $R_{ca} = 6$  Ом,  $R_{dc} = 18$  Ом,  $R_{cb} = 18$  Ом,  $E = 132$  В.

**У к а з а н и е.** Задачу решить преобразуя треугольник сопротивлений  $b, d, c$  в эквивалентную звезду.

**Задача 4.17.** Решить задачу 4.16 (см. рис. 4.11, а), преобразуя звезду сопротивлений в эквивалентный треугольник.

**У к а з а н и е.** Для преобразования взять звезду сопротивлений, лучи которой сходятся в точке  $c$ .

## НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

А н а л и з о м электрических цепей называют определение токов (или напряжений) в ее ветвях.

В гл. 4 рассмотрен расчет только относительно простых электрических цепей. В расчетах цепей сложной конфигурации с несколькими источниками энергии изученные ранее методы применяются для отдельных простых участков, если имеются необходимые исходные данные.

В общих же случаях применяются другие методы, основой которых служат законы Кирхгофа.

### 5.1. МЕТОД УЗЛОВЫХ И КОНТУРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методы анализа с применением законов Кирхгофа позволяют рассчитать электрическую цепь любой конфигурации и сложности, т. е. являются основными.

#### Обоснование метода

Рассматривая схему любой разветвленной электрической цепи, можно отметить в ней электрические узлы и выделить контуры. Например, в схеме рис. 3.16 имеется четыре узла (точки 1, 3, 4, 6) и несколько контуров (1—2—3—1; 1—3—6—1 и др.).

Для каждой узловой точки можно составить уравнения токов по первому закону Кирхгофа (узловые уравнения), например, для узла 3:  $I_1 + I_2 = I_4 + I_7$ ; для каждого контура — уравнение напряжений по второму закону Кирхгофа (контурные уравнения), например для контура 1—3—6—1:  $I_2R_2 + I_3R_3 + I_7R_7 = E_2$ .

В эти уравнения входят токи в ветвях, определение которых составляет ближайшую цель расчета, которая достигается совместным решением системы узловых и контурных уравнений; их число должно быть равно числу неизвестных токов.

Прежде чем приступить к составлению уравнений по законам Кирхгофа, необходимо выбрать условно-положительное направление

ние тока в каждой ветви (число неизвестных токов, как нетрудно видеть, равно числу ветвей).

Положительные направления токов выбирают произвольно. Действительные направления токов могут не совпадать с условно-положительными. Ошибка в выборе направления тока в результате решения будет обнаружена: ток с неправильно выбранным направлением получится отрицательным. Изменив его направление, в дальнейших расчетах можно считать его положительным.

## Узловые уравнения

Запишем систему узловых уравнений для рассматриваемой схемы

$$\left. \begin{array}{l} \text{для узлов: } 1 \quad I_3 = I_1 + I_2; \\ 3 \quad I_1 + I_2 = I_4 + I_7; \\ 4 \quad I_4 + I_6 = I_5; \\ 6 \quad I_5 + I_7 = I_3 + I_6. \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

В этой системе уравнений любых три уравнения являются независимыми, так как в каждое из них входит хотя бы один новый ток по сравнению с другими уравнениями.

Четвертое уравнение не содержит нового тока, поэтому его можно получить из предыдущих трех несложными подстановками.

*При наличии в схеме  $n$  узлов можно составить по первому закону Кирхгофа  $n - 1$  независимых уравнений.*

Число независимых уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, недостаточно для определения всех неизвестных токов.

В схеме рис. 3.16 насчитывается семь неизвестных токов, а независимых узловых уравнений только три. Еще четыре уравнения составим по второму закону Кирхгофа.

## Контурные уравнения

Из всех контуров схемы выбирают те, для которых можно составить наиболее простые независимые уравнения.

При этом можно руководствоваться таким правилом: каждое последующее уравнение будет независимо от предыдущих, если в данный контур входит хотя бы одна ветвь схемы, которая не входила в уже использованные контуры.

Можно доказать, что число независимых контурных уравнений для схемы, содержащей  $m$  ветвей и  $n$  узлов, составляет  $m - n + 1$ .

Для десяти контуров при  $m = 7$  в данном случае независимых контурных уравнений можно составить четыре, т. е. столько, сколько необходимо для определения всех токов для контуров:

$$\left. \begin{aligned} 1-2-3-1 \quad I_1 R_1 - I_2 R_2 &= E_1; \\ 1-3-6-1 \quad I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_7 R_7 &= E_2; \\ 6-3-4-6 \quad I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_7 R_7 &= -E_2; \\ 6-4-5-6 \quad I_5 R_5 - I_6 R_6 &= -E_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Правильность определения токов в цепи можно проверить, подставив их найденные величины в одно из уравнений, которые составлены для схемы этой цепи, но не вошли в систему уравнений, взятых для решения. С этой же целью можно составить баланс мощностей цепи.

### Задачи

**Задача 5.1.** Методом узловых и контурных уравнений определить токи в цепи, изображенной на рис. 5.3, для которой известны:  $E_1 = 120$  В,  $E_2 = 100$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 30$  Ом,  $R_4 = 30$  Ом.

**Задача 5.2.** Методом узловых и контурных уравнений определить токи в цепи, схема которой показана на рис. 5.4, если заданы:  $E_1 = 120$  В,  $E_2 = 140$  В,  $r_1 = r_2 = 1$  Ом,  $R = 27$  Ом.

## 5.2. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ ТОКОВ

В некоторых случаях расчет электрических цепей можно провести относительно просто, используя принцип наложения.

Этот принцип применяется только к линейным системам, а в данном случае — для расчета линейных электрических цепей.

### Обоснование метода

Рассмотрим в качестве примера схему рис. 5.1, *а* и составим для нее систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 + I_3 R_3 &= E_1; \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 &= E_2; \\ I_1 + I_2 &= I_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Ток каждой ветви из этой системы линейных уравнений определяется однозначно.

Решение системы (5.3) дает выражения для токов:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= E_1 \frac{R_2 + R_3}{A} - E_2 \frac{R_3}{A}; \\ I_2 &= E_2 \frac{R_1 + R_3}{A} - E_1 \frac{R_3}{A}; \\ I_3 &= E_1 \frac{R_2}{A} + E_2 \frac{R_1}{A}, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

где  $A = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$ .

Как и следовало ожидать, значения токов определяются действием ЭДС, имеющих в схеме, т. е. каждая ЭДС вносит в силу тока каждой ветви свою определенную долю. Предположим, что в схеме действует только ЭДС  $E_1$ , а  $E_2 = 0$ . Тогда получим величины токов, вызываемых ЭДС  $E_1$ :

$$I'_1 = E_1 \frac{R_1 + R_2}{A}; \quad I'_2 = E_1 \frac{R_3}{A}; \quad I'_3 = E_1 \frac{R_2}{A}. \quad (5.5)$$

Полагая  $E_1 = 0$ , получим величины частных токов от действия ЭДС  $E_2$ :

$$I''_1 = E_2 \frac{R_3}{A}; \quad I''_2 = E_2 \frac{R_1 + R_3}{A}; \quad I''_3 = E_2 \frac{R_1}{A}. \quad (5.6)$$

Для любой схемы с линейными элементами можно провести подобные рассуждения, из которых следует метод расчета электрических цепей: определяются частные токи в ветвях от действия каждой ЭДС; действительный ток каждой ветви равен алгебраической сумме частных токов этой ветви:

$$I_k = \sum I_k^{(n)}, \quad (5.7)$$

где  $I_k^{(n)}$  — ток  $k$ -й ветви от  $n$ -й ЭДС.

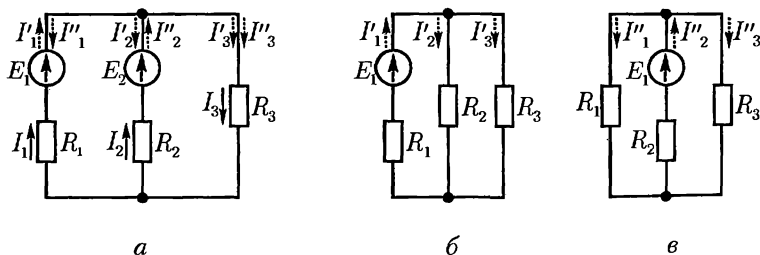


Рис. 5.1



## Порядок расчета

1. На основе исходной схемы составляют частные расчетные схемы (рис. 5.1, б, в), в каждой из которых действует только одна ЭДС. Все другие ЭДС исключают и от каждого источника в схеме остается только его внутреннее сопротивление.

2. Любым подходящим методом определяют токи в частных схемах, которые чаще всего оказываются относительно простыми.

Для частных схем (см. рис. 5.1, б, в) выражения для токов, найденные путем свертывания, совпадают с (5.4), которые были записаны ранее из уравнений Кирхгофа, например:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{E_1(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{E_1(R_2 + R_3)}{A}.$$

3. Алгебраическим сложением (наложением) частных токов определяют токи в исходной схеме. В рассматриваемом примере

$$I_1 = I'_1 - I''_1, \quad I_2 = -I'_2 + I''_2, \quad I_3 = I'_3 + I''_3.$$

При определении общих токов необходимо правильно учесть направления частных токов: в исходной схеме намечают условно-положительные направления токов в ветвях. Частный ток считают положительным, если он направлен одинаково с положительным током в той же ветви исходной схемы. Частный ток противоположно-го направления считают отрицательным.

При таком подходе общие токи в ветвях исходной схемы могут получиться положительными или отрицательными. В последнем случае надо изменить направление тока и считать его положительным в дальнейших расчетах.

## Входные и взаимные проводимости и сопротивления

В равенствах (5.4) множители при ЭДС имеют размерность проводимости. Обозначив их как проводимости, получим

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= G_{11}E_1 - G_{12}E_2; \\ I_2 &= G_{22}E_2 - G_{21}E_1; \\ I_3 &= G_{31}E_1 + G_{32}E_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

где

$$\begin{aligned} G_{11} &= (R_2 + R_3)/A; & G_{22} &= (R_1 + R_2)/A; & G_{12} &= G_{21} = R_3/A; \\ G_{31} &= R_2/A; & G_{32} &= R_1/A. \end{aligned}$$

Коэффициенты с одинаковыми индексами называют *входными проводимостями ветвей* ( $G_{1,1}$ ;  $G_{2,2}$ ). Коэффициенты с разными индексами называют *взаимными проводимостями ветвей* ( $G_{1,2}$ ;  $G_{2,1}$ ;  $G_{3,1}$ ;  $G_{3,2}$ ).

Если предположить, что ЭДС  $E_2 = 0$ , из равенства системы (5.4) получим

$$I'_1 = G_{1,1}E_1; \quad I'_2 = G_{2,1}E_1; \quad I'_3 = G_{3,1}E_1,$$

а при  $E_1 = 0$

$$I''_2 = G_{2,2}E_2; \quad I''_1 = G_{1,2}E_2; \quad I''_3 = G_{3,2}E_2.$$

Из этих выражений следует:

*входная проводимость любой ветви равна отношению тока к ЭДС этой ветви, если ЭДС во всех остальных ветвях приняты равными нулю; входное сопротивление — величина, обратная входной проводимости:*

$$G_{nn} = I_n E_n; \quad R_{nn} = 1 / G_{nn}. \quad (5.9)$$

*Взаимная проводимость двух любых ветвей равна отношению тока в одной ветви к ЭДС в другой ветви, если ЭДС во всех остальных ветвях приняты равными нулю; взаимное сопротивление — величина, обратная взаимной проводимости:*

$$G_{kn} = I_{kn} / E_n; \quad R_{kn} = 1 / G_{kn}, \quad (5.10)$$

причем  $G_{kn} = G_{nk}$ .

Входные и взаимные проводимости и сопротивления можно определить расчетом, используя частные схемы, или найти путем измерений. После этого нетрудно найти токи в ветвях составив равенства типа (5.8).

## Коэффициенты передачи напряжения и тока

Режим электрической цепи в некоторых случаях характеризуется коэффициентами передачи напряжения и тока. Чаще всего они применяются к цепям, содержащим один источник ЭДС (рис. 5.2, а) или один источник тока (рис. 5.2, б).

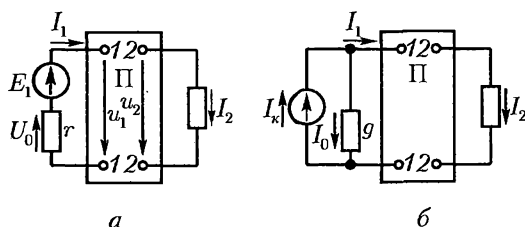


Рис. 5.2

Коэффициент передачи напряжения равен отношению напряжения на зажимах приемника к напряжению источника ЭДС, действующего в цепи:

$$K_u = U_2 / U_1.$$

Коэффициент передачи тока равен отношению тока в приемнике к току источника тока, действующего в цепи:

$$K_i = I_2 / I_1. \quad (5.11)$$

### Задачи

**Задача 5.3.** Для цепи (рис. 5.3, а) известны:  $E_1 = 120$  В,  $E_2 = 100$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 30$  Ом,  $R_4 = 30$  Ом. Определить токи в цепи методом наложения.

**Решение.** Определим токи от действия каждой ЭДС в отдельности по схемам, представленным на рис. 5.3, б, в. В схеме рис. 5.3, б сопротивления  $R_1$  и  $R_3$  соединены параллельно. То же относится к паре сопротивлений  $R_2$  и  $R_4$ .

Найдем эквивалентное сопротивление между точками 1—4:

$$R_{1,4} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} + \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 24 \text{ Ом}.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I'_{1,4} = E_1 / R_{1,4} = 120 / 24 = 5 \text{ А}.$$

Сопротивления между точками 1—2 и 2—4 по данным задачи одинаковы (по 12 Ом). Поэтому  $U'_{12} = U'_{2,4} = I'_{1,4} R_{1,2} = 5 \cdot 12 = 60$  В.

Токи в схеме:

$$I'_1 = U'_{12} / R_1 = 60 / 20 = 3 \text{ А}; \quad I'_2 = U'_{2,4} / R_2 = 60 / 20 = 3 \text{ А};$$

$$I'_3 = U'_{12} / R_3 = 60 / 30 = 2 \text{ А}; \quad I'_4 = U'_{2,4} / R_4 = 60 / 30 = 2 \text{ А}.$$

В схеме, изображенной на рис. 5.3, а, пары сопротивлений  $R_1, R_2$  и  $R_3, R_4$  соединены параллельно, а сопротивления, эквивалентные этим парам, — последовательно.

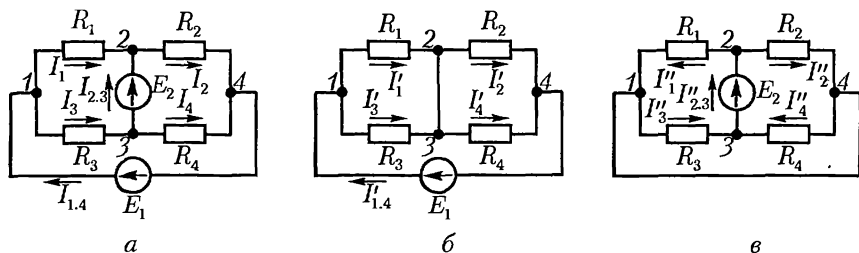


Рис. 5.3

Найдем эквивалентные сопротивления  
схемы между точками 2—3:

$$R_{2,3} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} =$$

$$= \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} + \frac{30 \cdot 30}{30 + 30} = 25 \text{ Ом.}$$

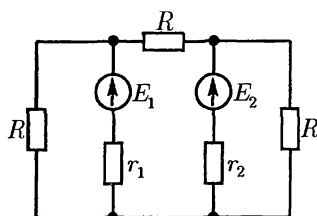


Рис. 5.4

Ток в неразветвленной части цепи

$$I'_{2,3} = E_2 / R_{2,3} = 100 / 25 = 4 \text{ А.}$$

Напряжения на участках схемы между точками:  
2—1

$$U''_{2,1} = I''_{2,3} R_{2,1} = 4 \cdot 10 = 40 \text{ В;}$$

1—3

$$U''_{1,3} = I''_{2,3} R_{1,3} = 4 \cdot 15 = 60 \text{ В.}$$

Токи в схеме:

$$I''_1 = U''_{2,1} / R_1 = 40 / 20 = 2 \text{ А;}$$

$$I''_2 = U''_{2,1} / R_2 = 40 / 20 = 2 \text{ А;}$$

$$I''_3 = U''_{1,3} / R_3 = 60 / 30 = 2 \text{ А;}$$

$$I''_4 = U''_{1,3} / R_4 = 60 / 30 = 2 \text{ А.}$$

Токи в исходной схеме (см. рис. 5.3, а) найдем по принципу наложения, учитывая направления токов в частных схемах:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 3 - 2 = 1 \text{ А;}$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 2 + 2 = 4 \text{ А;}$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = 3 + 2 = 5 \text{ А;}$$

$$I_4 = I'_4 - I''_4 = 2 - 2 = 0.$$

$$I_{1,4} = I'_{1,4} = 5 \text{ А, так как } I''_{1,4} = 0;$$

$$I_{2,3} = I''_{2,3} = 4 \text{ А, так как } I'_{2,3} = 0.$$

**Задача 5.4.** В цепи (рис. 5.4) определить токи методом наложения по данным условиям задачи 5.2.

### 5.3. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

В практических расчетах часто нет необходимости знать режимы работы всех элементов сложной цепи, но ставится задача исследовать режим работы одной определенной ветви.

Для определения тока, напряжения, мощности этой ветви можно воспользоваться одним из ранее описанных методов расчета.

При расчете сложной электрической цепи приходится выполнять значительную вычислительную работу даже в том случае, когда требуется определить ток в одной ветви. Объем этой работы в несколько раз увеличивается, если необходимо установить изменение тока, напряжения, мощности при изменении сопротивления данной ветви, так как вычисления нужно проводить несколько раз, задаваясь различными величинами сопротивления.

Решение такой задачи значительно упрощается при использовании метода эквивалентного генератора.

#### Обоснование метода

Исследуемая ветвь с сопротивлением  $R_{ab}$  (рис. 5.5, а) присоединяется к остальной части схемы (внутри прямоугольника А) в двух

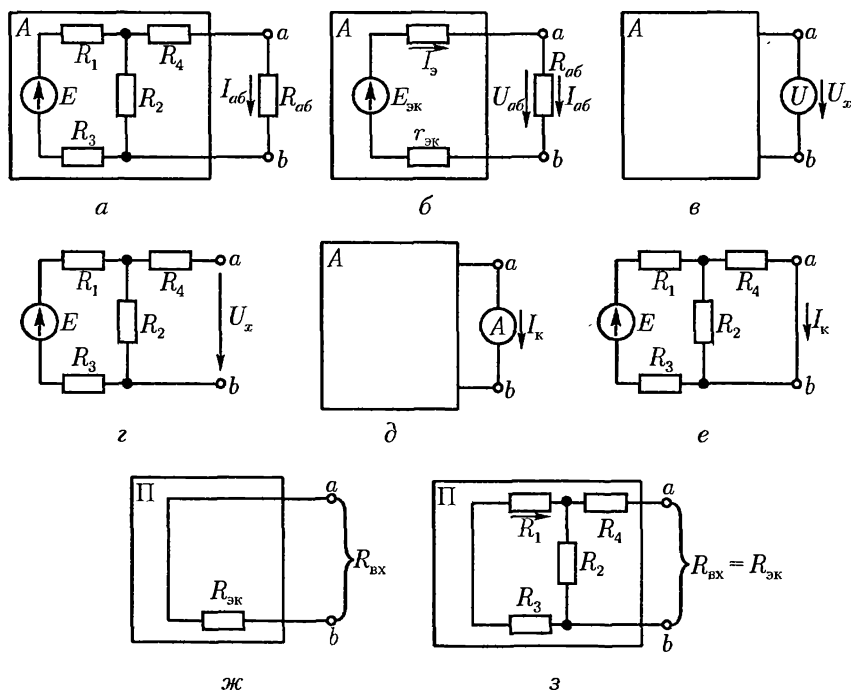


Рис. 5.5

точках  $a$  и  $b$ . Эту часть схемы можно рассматривать относительно исследуемой ветви как источник с некоторой эквивалентной ЭДС  $E_{\text{эк}}$  и некоторым эквивалентным внутренним сопротивлением  $r_{\text{эк}}$  (рис. 5.5, б). Такой условный источник энергии называется эквивалентным генератором или активным двухполюсником (А). Если в части схемы, относящейся к двухполюснику, нет источников энергии, то двухполюсник называется пассивным (П).

Ток в исследуемой ветви можно найти в эквивалентной схеме (см. рис. 5.5, б) по известной формуле (3.15):

$$I_{ab} = E_{\text{эк}} / (r_{\text{эк}} + R_{ab}). \quad (5.12)$$

Таким образом, решение задачи по определению тока  $I_{ab}$  сводится к определению ЭДС  $E_{\text{эк}}$  эквивалентного генератора и его внутреннего сопротивления  $r_{\text{эк}}$ , которое называется также входным сопротивлением активного двухполюсника.

После определения  $E_{\text{эк}}$  и  $r_{\text{эк}}$  дальнейшее исследование режима работы ветви  $ab$  при изменении сопротивления  $R_{ab}$  не требует громоздких вычислений, так как ЭДС  $E_{\text{эк}}$  и внутреннее сопротивление  $r_{\text{эк}}$  эквивалентного генератора не изменяются.

Ток в ветви  $ab$  определяют по формуле (5.12) для любого значения  $R_{ab}$ .

### Определение ЭДС и внутреннего сопротивления эквивалентного генератора

Для определения этих величин рассмотрим два крайних режима эквивалентного генератора — режим холостого хода и режим короткого замыкания.

Отсоединим исследуемую ветвь  $R_{ab}$  в точках  $a$  и  $b$ , тогда эквивалентный генератор будет находиться в режиме холостого хода.

Напряжение холостого хода  $U_x$  на его внешних зажимах  $a$  и  $b$  согласно схеме, представленной на рис. 5.5, б, равно эквивалентной ЭДС:

$$E_{\text{эк}} = U_x.$$

Напряжение холостого хода  $U_x$  можно измерить (рис. 5.5, в) или определить с помощью расчета (рис. 5.5, г). Для рассматриваемой цепи

$$U_x = IR_2 = ER_2 / (R_1 + R_2 + R_3).$$

Сопротивление  $R_4$  в расчет не вошло, так как при отключенном сопротивлении  $R_{ab}$  ток в сопротивлении  $R_4$  также равен нулю.

Сопротивление  $r_{\text{эк}}$  эквивалентного генератора можно определить, используя режим короткого замыкания.

В режиме короткого замыкания эквивалентного генератора (см. рис. 5.5, б) ток короткого замыкания  $I_K$  выражается отношением

$$I_K = E_{\text{эк}} / r_{\text{эк}}.$$

Отсюда

$$r_{\text{эк}} = E_{\text{эк}} / I_K = U_x / I_K. \quad (5.13)$$

Для измерения тока  $I_K$  можно применить схему, изображенную на рис. 5.5, д, если короткое замыкание между точками  $a$  и  $b$  реальной цепи не вызовет опасного увеличения токов в ее элементах. При наличии такой опасности нужно измерить ток  $I_{ab}$  нагрузки эквивалентного генератора и падение напряжения  $U_{ab}$  в нагрузочном сопротивлении  $R_{ab}$  (см. рис. 5.5, б), а внутреннее сопротивление

$$r_{\text{эк}} = (E_{\text{эк}} - U_{ab}) / I_{ab} = (U_x - U_{ab}) / I_{ab}.$$

Ток  $I_K$  можно определить, применив один из известных методов расчета. Для рассматриваемого примера расчетная схема приведена на рис. 5.5, е.

Однако определение  $I_K$  может оказаться громоздким, поэтому в сложных схемах  $r_{\text{эк}}$  определяется как входное сопротивление пассивного двухполюсника между точками  $a$  и  $b$ . Для того чтобы получить расчетную схему для определения  $r_{\text{эк}}$ , нужно все ЭДС активного двухполюсника принять равными нулю, замкнув накоротко точки цепи, к которым присоединены источники этих ЭДС. Тогда активный двухполюсник превращается в пассивный.

Справедливость этого приема следует из схемы, представленной на рис. 5.5, б; при  $E_{\text{эк}} = 0$  сопротивление  $r_{\text{эк}}$  является входным сопротивлением этой схемы. Таким образом, входное сопротивление пассивного двухполюсника  $R_{\text{вх}}$  со стороны зажимов  $a$  и  $b$  (рис. 5.5, ж) определяет внутреннее сопротивление  $r_{\text{эк}}$  эквивалентного генератора.

Равенство  $E_{\text{эк}} = 0$  соответствует тому, что все ЭДС активного двухполюсника равны нулю, поэтому расчетная схема для определения  $r_{\text{эк}}$  имеет вид, как на рис. 5.5, з.

Для этой схемы

$$r_{\text{эк}} = \frac{(R_1 + R_3)R_2}{R_1 + R_3 + R_2} + R_4.$$

## Задачи

**Задача 5.5.** Построить графики зависимости тока и мощности в ветви 2–4 (см. рис. 5.3, а) от сопротивления в этой ветви по данным условиям задачи 5.1.

**Решение.** Для решения задачи применим метод эквивалентного генератора. Отключим ветвь 2–4 для определения напряжения холостого хо-

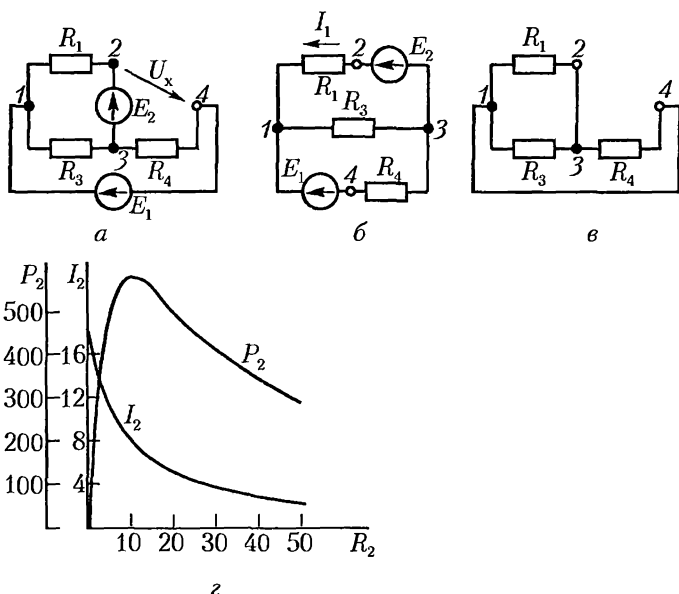


Рис. 5.6

да (рис. 5.6, а). После отключения ветви 2–4 получилась схема с двумя узловыми точками 1 и 3, изображенная в несколько ином виде на рис. 5.6, б.

Для расчета этой схемы целесообразно применить метод узлового напряжения:

$$G_1 = 1/R_1 = 1/20 \text{ См}; \quad G_3 = 1/R_3 = 1/30 \text{ См}; \quad G_4 = 1/R_4 = 1/30 \text{ См};$$

$$U_{13} = \frac{E_1 G_4 + E_2 G_1}{G_1 + G_3 + G_4} = \frac{120 \cdot \frac{1}{30} + 100 \cdot \frac{1}{20}}{1/20 + 1/30 + 1/30} = 77,2 \text{ В.}$$

Для определения разности потенциалов между точками 2 и 4 найдем ток

$$I_1 = (E_2 - U_{13})G_1 = (100 - 77,2) \frac{1}{20} = 1,14 \text{ А.}$$

$$V_2 = V_4 + I_1 R_1 + E_1;$$

$$U_x = V_2 - V_4 = E_1 + I_1 R_1 = 120 + 1,14 \cdot 20 = 142,8 \text{ В.}$$

Для определения внутреннего сопротивления эквивалентного генератора полагаем равными нулю действительные ЭДС исходной схемы.

Получим схему, представленную на рис. 5.6, в, из которой видно, что по отношению к точкам 2 и 4 все три сопротивления пассивного двухполюсника соединены параллельно:



$$1 / r_{\text{эк}} = 1 / R_1 + 1 / R_3 + 1 / R_4 = 1 / 20 + 1 / 30 + 1 / 30 = 7 / 60 \text{ См};$$

$$r_{\text{эк}} = 60 / 7 = 8,58 \text{ Ом}.$$

Ток в исследуемой ветви определим по формуле (5.12), задаваясь различными значениями сопротивления.

Для сопротивления  $R_2 = 20 \text{ Ом}$  получим

$$I_2 = U_x / (r_{\text{эк}} + R_2) = \frac{142,8}{(8,58 + 20)} = 5 \text{ А};$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = 5^2 \cdot 20 = 500 \text{ Вт}.$$

Для других значений сопротивления  $R_2$  результаты подсчетов сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

| $R_2, \text{Ом}$ | 0    | 2    | 4     | 6   | 8   | 10  | 20  | 30  | 50   | $\infty$ |
|------------------|------|------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|------|----------|
| $I_2, \text{А}$  | 16,6 | 13,5 | 11,35 | 9,8 | 8,6 | 7,7 | 5   | 3,7 | 2,42 | 0        |
| $P_2, \text{Вт}$ | 0    | 364  | 515   | 575 | 592 | 590 | 500 | 410 | 290  | 0        |

Графики  $I_2(R_2)$  и  $P_2(R_2)$  показаны в прямоугольной системе координат на рис. 5.5, з.

**Задача 5.6.** Построить графики зависимости тока и мощности в ветви  $bc$  (см. рис. 4.11, а) от сопротивления этой ветви по данным условиям задачи 4.16.

## 5.4. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Число узловых и контурных уравнений для сложной схемы оказывается большим, а решение системы  $m$  уравнений — громоздким. Число уравнений можно уменьшить до  $m - n + 1$  и тем существенно упростить расчет, если ввести понятие контурных токов и применить их для решения задачи.

### Контурные токи и ЭДС

Рассмотрим в качестве примера уже известную схему рис. 3.16 и выделенные в ней ранее четыре независимых контура, для которых записаны уравнения (5.2). Заметим, что, применяя метод контурных токов, источники энергии удобнее представлять в схемах их ЭДС и внутренними сопротивлениями (см. 3.5). В данной схеме внутренние сопротивления источников энергии равны нулю (или отнесены к приемникам).

*Контурный ток* — это некоторая расчетная величина, которая одинакова для всех ветвей данного контура. Контурные токи на схеме обозначены  $I_I$ ;  $I_{II}$ ;  $I_{III}$ ;  $I_{IV}$ .

Нетрудно заметить, что контурный ток равен действительному току ветви, которая принадлежит только данному контуру:

$$I_1 = I_I; \quad I_3 = I_{II}; \quad I_4 = I_{III}; \quad I_6 = -I_{IV}. \quad (5.14)$$

Некоторые ветви схемы относятся к двум смежным контурам (ветви 1–3; 3–6; 4–6).

Действительный ток в такой ветви определяется наложением контурных токов, т. е. равен алгебраической сумме контурных токов тех контуров, в которые эта ветвь входит:

$$I_2 = I_{II} - I_I; \quad I_5 = I_{III} - I_{IV}; \quad I_7 = I_{II} - I_{III}. \quad (5.14a)$$

В уравнениях (5.2) заменим токи ветвей их выражениями через контурные токи (5.14), (5.14a):

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } I_I(R_1 + R_2) - I_{II}R_2 = E_1; \\ \text{II. } I_{II}(R_2 + R_3 + R_7) - I_I R_2 - I_{III}R_7 = E_2; \\ \text{III. } I_{III}(R_4 + R_5 + R_7) - I_{IV}R_5 - I_{II}R_7 = -E_2; \\ \text{IV. } I_{IV}(R_5 + R_6) - I_{III}R_5 = -E_3. \end{array} \right\} \quad (5.15)$$

В правую часть этих уравнений входят ЭДС источников, встречающихся при обходе данного контура.

*Алгебраическая сумма ЭДС данного контура называется контурной ЭДС.*

В данном примере в каждом контуре по одной ЭДС, поэтому контурные ЭДС:  $E_I = E_1$ ;  $E_{II} = E_2$ ;  $E_{III} = -E_2$ ;  $E_{IV} = -E_3$ .

Если в данный контур не входят источники ЭДС, то контурная ЭДС его равна нулю.

## Собственные и общие сопротивления контуров

В левую часть уравнений (5.15) входят падения напряжения, обусловленные контурными токами.

Сумма сопротивлений всех ветвей, входящих в данный контур, называется собственным сопротивлением контура.

Для схемы рис. 3.16 собственные сопротивления контуров:

$$R_{1,1} = R_1 + R_2; \quad R_{2,2} = R_2 + R_3 + R_7; \quad R_{3,3} = R_4 + R_5 + R_7;$$

$$R_{4,4} = R_5 + R_6.$$

Сопротивления ветвей, входящих в два смежных контура, называются общими сопротивлениями контуров. Такими сопротивлениями в схеме рис. 3.16 являются  $R_{1,2} = R_2$ ;  $R_{2,3} = R_7$ ;  $R_{3,4} = R_5$ .

При определении собственных и общих сопротивлений внутренние сопротивления источников ЭДС учитываются как и сопротивления приемников энергии.

## Метод контурных токов

С учетом новых понятий и обозначений перепишем уравнения (5.15):

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } I_I R_{1,1} - I_{II} R_{1,2} = E_I; \\ \text{II. } I_{II} R_{2,2} - I_I R_{1,2} - I_{III} R_{2,3} = E_{II}; \\ \text{III. } I_{III} R_{3,3} - I_{II} R_{2,3} - I_{IV} R_{3,4} = E_{III}; \\ \text{IV. } I_{IV} R_{4,4} - I_{III} R_{3,4} = E_{IV}. \end{array} \right\} \quad (5.16)$$

Решая эту систему уравнений любым способом, известным из алгебры, определяют контурные токи, а по формулам (5.14) и (5.14а) находят токи в ветвях.

В данном примере вместо семи узловых и контурных уравнений для расчета достаточно четырех уравнений с четырьмя контурными токами.

Из всего сказанного следует порядок составления уравнения с контурными токами.

1. В заданной схеме выбирают направления токов в ветвях (произвольно).

2. Намечают независимые контуры и выбирают направление контурных токов, например по часовой стрелке.

3. Определяют контурные ЭДС, собственные и общие сопротивления контуров, обходя контуры в направлении контурных токов.

4. Записывают систему уравнений типа (5.16); в левой части их слагаемые с собственными сопротивлениями контуров берут со знаком плюс, а слагаемые с общими сопротивлениями — со знаком минус.

## Задачи

**Задача 5.7.** Методом контурных токов определить токи в схеме, изображенной на рис. 5.4 по данным условия задачи 5.2.

**Задача 5.8.** Методом контурных токов определить токи в схеме рис. 4.9 по данным условия задачи 4.12.

## 5.5. МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Законы Кирхгофа являются основой для расчета электрических цепей методом узловых напряжений, который позволяет сократить число уравнений в системе до  $n - 1$ , где  $n$  — число узлов.

### Узловые напряжения и токи

Для данных рассуждений примером может служить схема рис. 3.16. Однако, применяя метод узловых напряжений, удобнее источники ЭДС заменить эквивалентными источниками токов на основе выводов 3.5, что и показано на рис. 5.7.

Источники энергии на рисунке представлены токами короткого замыкания:  $I_{к1} = E_1 G_1$ ;  $I_{к2} = E_2 G_7$ ;  $I_{к3} = E_3 G_6$ , а внутренние проводимости их приняты равными нулю или отнесены к приемникам.

Один из узлов схемы принимается базисным, и его потенциал считается равным нулю (узел 6,  $V_6 = 0$ ).

Узловым напряжением называется разность потенциалов между данным узлом и базисным.

В рассматриваемой схеме узловые напряжения

$$U_I = V_1 - V_6 = V_1; U_{III} = V_3 - V_6 = V_3; U_{IV} = V_4 - V_6 = V_4. \quad (5.17)$$

Выразим напряжения ветвей через узловые напряжения. Нетрудно заметить, что узловое напряжение численно равно напряжению ветви, которая присоединена к базисному узлу:

$$U_3 = -U_I; U_5 = U_{IV}; U_6 = U_{IV}; U_7 = -U_{III}. \quad (5.18)$$

Напряжение ветви, не присоединенной к базисному узлу, равно разности узловых напряжений тех узлов, между которыми находится эта ветвь:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= V_3 - V_1 = U_{III} - U_I; U_2 = V_3 - V_1 = U_{III} - U_I; \\ U_4 &= V_3 - V_4 = U_{III} - U_{IV}. \end{aligned} \right\} \quad (5.18a)$$

По первому закону Кирхгофа составим систему уравнений для трех независимых узлов (кроме базисного) рассматриваемой схемы: для узлов:

$$\begin{aligned} 1 \quad & I_{к1} - I_1 - I_2 - I_3 = 0; \\ 3 \quad & I_{к2} - I_{к1} + I_1 + I_2 + I_4 - I_7 = 0; \\ 4 \quad & -I_{к3} + I_5 + I_6 - I_4 = 0. \end{aligned}$$

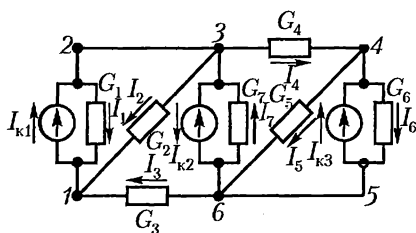


Рис. 5.7

Эти уравнения перепишем так, чтобы в правой части их были только внутренние токи источников тока, из которых складываются токи для узлов:

$$\begin{aligned} 1 \quad & -I_1 - I_2 - I_3 = -I_{\kappa 1}; \\ 3 \quad & I_1 + I_2 + I_4 - I_7 = I_{\kappa 1} - I_{\kappa 2}; \\ 4 \quad & I_5 + I_6 - I_4 = I_{\kappa 3}. \end{aligned}$$

(5.19)

Узловым током называется алгебраическая сумма внутренних токов источников тока всех ветвей, присоединенных к данному узлу.

В этой сумме токи источников тока, направленные к узлу, считаются положительными, а от узла — отрицательными:

$$I_I = -I_{\kappa 1}; \quad I_{III} = I_{\kappa 1} - I_{\kappa 2}; \quad I_{IV} = I_{\kappa 3}.$$

Если к некоторому узлу не присоединены ветви с источниками токов, то его узловой ток равен нулю.

## Узловые и общие проводимости

Выразим токи ветвей через напряжения и проводимости этих ветвей:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= U_1 G_1; \quad I_2 = U_2 G_2; \quad I_3 = U_3 G_3; \\ I_4 &= U_4 G_4; \quad I_5 = U_5 G_5; \quad I_6 = U_6 G_6; \quad I_7 = U_7 G_7, \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

а учитывая (5.18), систему уравнений (5.19) представим в следующем виде:

для узлов:

$$\left. \begin{aligned} 1 \quad & U_I(G_1 + G_2 + G_3) - U_{III}(G_1 + G_2) = I_I; \\ 3 \quad & U_{III}(G_1 + G_2 + G_4 + G_7) - U_I(G_1 + G_2) - U_{IV}G_4 = I_{III}; \\ 4 \quad & U_{IV}(G_4 + G_5 + G_6) - U_{III}G_4 = I_{IV}. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Узловой проводимостью называется сумма проводимостей всех ветвей, присоединенных к данному узлу.

В системе уравнений (5.21) узловые проводимости выражаются так:

для узлов:

$$\left. \begin{aligned} 1 \quad & G_{11} = G_1 + G_2 + G_3; \\ 2 \quad & G_{33} = G_1 + G_2 + G_4 + G_7; \\ 4 \quad & G_{44} = G_4 + G_5 + G_6. \end{aligned} \right\}$$

Общей проводимостью называется сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих данные два узла.

В системе уравнений (5.21) общие проводимости  $G_{1,3} = G_1 + G_2$ ;  $G_{3,4} = G_4$ .

С учетом новых обозначений уравнения (5.21) перепишем так: для узлов:

$$\left. \begin{aligned} 1 \quad U_I G_{11} - U_{III} G_{13} &= I_I; \\ 2 \quad U_{III} G_{33} - U_I G_{13} - U_{IV} G_{3,4} &= I_{III}; \\ 4 \quad U_{IV} G_{4,4} - U_{III} G_{3,4} &= I_{IV}. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

## Метод узловых напряжений

Решая систему уравнений (5.22) любым способом, известным из алгебры, определяют узловые напряжения, затем по (5.18), (5.18a) находят напряжения ветвей, а по формулам (5.20) — токи ветвей.

В данном примере вместо семи узловых и контурных уравнений для расчета достаточно трех уравнений с тремя узловыми напряжениями.

Из всего сказанного следует порядок составления уравнений с узловыми напряжениями.

1. В заданной схеме выбирают направления токов в ветвях (произвольно). Если по условию источники энергии заданы как источники ЭДС (напряжения), переходят к эквивалентным схемам источников тока.

2. Намечают базисный узел и все независимые узлы и выбирают положительные направления узловых напряжений — от независимых узлов к базисному.

3. Определяют узловые токи, узловые и общие проводимости; при этом токи источников тока, направленные к узлам, принимают положительными.

4. Записывают систему уравнений типа (5.22); в левой части уравнений слагаемые с узловыми проводимостями берут со знаком плюс, а слагаемые с общими проводимостями — со знаком минус.

## Задачи

**Задача 5.9.** Методом узловых напряжений определить токи в схеме рис. 5.4 по условию задачи 5.2.

**Задача 5.10.** Методом узловых напряжений определить токи в схеме рис. 5.3, а по условию задачи 5.1.

## ГЛАВА 6

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

В автоматике, электронике и радиотехнике широко применяются элементы электрических цепей, имеющие нелинейную зависимость между током и напряжением  $U = f(I)$ .

*Электрическая цепь, в которую входят нелинейные элементы, называется нелинейной.*

Нелинейную вольт-амперную характеристику имеют электровакуумные приборы (см. рис. 2.6), фотоэлементы (см. рис. 2.7), газоразрядные приборы (см. рис. 2.8–2.10), полупроводниковые приборы (см. рис. 2.15).

Большую группу нелинейных элементов представляют нелинейные сопротивления: терморезисторы, варисторы, бареттеры и др.

В данной главе рассмотрены принципы решения некоторых задач расчета электрических цепей с нелинейными элементами на основе их вольт-амперных характеристик.

### 6.1. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ ПРОСТЕЙШИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Для нелинейных электрических цепей остаются справедливыми законы Ома и Кирхгофа. Однако рассмотренные ранее (см. гл. 4, 5) методы расчета для нелинейных цепей непосредственно применить нельзя.

Аналитический расчет нелинейной цепи можно выполнить при условии, что вольт-амперные характеристики нелинейных элементов выражаются относительно простыми уравнениями  $I = f(U)$ . Например, для электронной лампы известна зависимость  $I = kU^{3/2}$ . Кроме того, характеристики некоторых нелинейных элементов в определенном интервале изменения напряжения и тока прямолинейны или близки к прямой. В таких случаях можно составить для нелинейного элемента эквивалентную схему замещения с линейными элементами и ввести ее в аналитический расчет.

В других случаях схемы замещения остаются нелинейными, но с их помощью достигаются упрощения схем нелинейных цепей.

## Статическое и динамическое сопротивления нелинейного элемента

У нелинейных элементов различают статическое и динамическое сопротивления (рис. 6.1, а).

Статическим сопротивлением в данной точке  $a$  вольт-амперной характеристики называют отношение напряжения к току, соответствующему этой точке

$$R_{\text{ст}} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{m_u \overline{od}}{m_i \overline{oc}} = m_R \operatorname{tg} \alpha, \quad (6.1)$$

где  $m_u$  и  $m_i$  — масштабы напряжения и тока;  $m_R = m_u/m_i$  — масштаб сопротивления.

Динамическое сопротивление в точке  $a$  определяется отношением бесконечно малых приращений напряжения  $dU$  и тока  $dI$ :

$$R_{\text{дин}} = \frac{dU}{dI} \approx \frac{m_u \overline{ae}}{m_i \overline{be}} = m_R \operatorname{tg} \beta. \quad (6.2)$$

Динамическое сопротивление пропорционально тангенсу угла наклона касательной к вольт-амперной характеристике в точке  $a$ .

## Приведение нелинейных цепей к линейным

Если продолжать линейный участок  $h-b-a$  характеристики до пересечения с осью напряжения, то он пересечет ее в точке  $f$ .

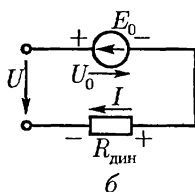
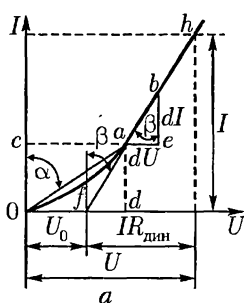


Рис. 6.1

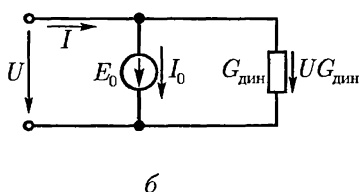
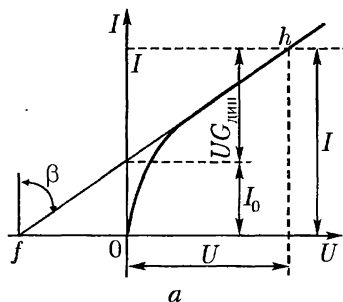


Рис. 6.2



Отрезок  $of$  в принятом масштабе напряжений выражает постоянное напряжение  $U_0$ . Нетрудно заметить, что в любой точке  $h$  прямолинейной части вольт-амперной характеристики напряжение складывается из постоянного напряжения  $U_0$  и изменяющейся части, определяемой произведением тока и динамического сопротивления, т. е. прямая  $fh$  выражается уравнением

$$U = U_0 + IR_{\text{дин}}. \quad (6.3)$$

На основании уравнения (6.3) нелинейный элемент можно представить схемой последовательного соединения ЭДС  $E_0 = U_0$  и динамического сопротивления  $R_{\text{дин}}$  (рис. 6.1, б). При этом

$$U = E_0 + IR_{\text{дин}}.$$

Аналогичную схему замещения можно получить для нелинейного элемента с вольт-амперной характеристикой, обращенной выпуклостью к оси токов (рис. 6.2, а). ЭДС  $E_0$  в этом случае будет направлена по направлению тока. На примере данной характеристики покажем, что нелинейный элемент можно представить схемой параллельного соединения источника тока и динамической проводимости  $G_{\text{дин}}$ .

В линейной части характеристики ток можно представить в виде суммы

$$I = I_0 + UG_{\text{дин}}. \quad (6.4)$$

Этому равенству соответствует схема замещения рис. 6.2, б.

После замены нелинейных элементов эквивалентными схемами замещения с линейными элементами нелинейную цепь можно рассчитать одним из методов, применяемых для расчета линейных цепей.

## Нелинейный активный двухполюсник

Нелинейный элемент, вольт-амперная характеристика которого не проходит через начало координат (рис. 6.3, а), можно представить схемой последовательного соединения постоянной ЭДС и нелинейного сопротивления.

Если характеристику нелинейного элемента перенести так, чтобы она проходила через начало координат, то получится зависимость  $I(U)$  нелинейного сопротивления эквивалентной схемы, в которую кроме этого нелинейного сопротивления последовательно включен источник ЭДС  $E_0$ .

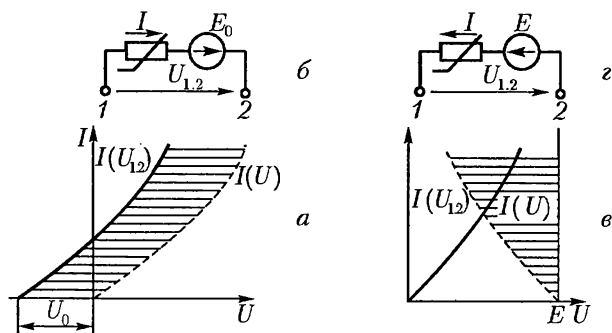


Рис. 6.3

Эквивалентная схема рис. 6.3, б представляет собой активный нелинейный двухполюсник, для которого справедливо уравнение по второму закону Кирхгофа. В данном случае

$$U_{12} = -U_0 + U(I); \quad U_{12} = -E_0 + U(I). \quad (6.5)$$

Эту схему вводить в аналитический расчет нельзя, так как она остается нелинейной в отличие от схемы рис. 6.1, б или 6.2, б, но ее можно использовать для упрощения более сложной схемы, в которую она входит как часть.

В некоторых случаях полезно или необходимо обратное построение: по известной вольт-амперной характеристике нелинейного сопротивления и величине ЭДС  $E$  последовательно с ним включенного источника строят вольт-амперную характеристику активного нелинейного двухполюсника (рис. 6.3, в, г).

## Задачи

**Задача 6.1.** Доказать, что нелинейный элемент с вольт-амперной характеристикой (см. рис. 6.1) можно представить эквивалентной линейной схемой с источником тока и динамической проводимостью. Начертить эту схему.

**Задача 6.2.** Доказать, что нелинейный элемент с вольт-амперной характеристикой (см. рис. 6.2) можно представить эквивалентной линейной схемой с источником ЭДС и динамическим сопротивлением. Начертить эту схему.

**Задача 6.3.** Вольт-амперная характеристика нелинейного сопротивления задана табл. 6.1. Построить вольт-амперную характеристику нелинейного двухполюсника при последовательном соединении этого сопротивления и источника ЭДС  $E = 100$  В.

Таблица 6.1

|               |   |     |     |     |     |     |     |
|---------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $U, \text{В}$ | 0 | 20  | 40  | 60  | 80  | 100 | 120 |
| $I, \text{А}$ | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,9 | 1,4 | 2   | 2,5 |

## 6.2. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Многие нелинейные элементы, применяемые в практике, имеют вольт-амперные характеристики, у которых нет линейных участков, и уравнения для их аналитического выражения.

Расчет цепей, содержащих такие элементы, осуществляется графическими методами, которые применимы при любом виде вольт-амперных характеристик и дают результаты достаточной точности.

Исходные данные для расчета (вольт-амперные характеристики элементов цепи) задаются в виде графиков или таблиц.

Задачу определения тока одного элемента по напряжению этого элемента или обратную задачу решают просто: заданное значение отмечают на оси координат, находят соответствующую ей точку кривой, а затем на другой оси определяют искомое значение.

Рассмотрим, как решаются такие задачи, когда несколько элементов соединены между собой в нелинейной цепи.

### Последовательное соединение двух нелинейных элементов

Для расчета такой цепи (рис. 6.4, а) заданные вольт-амперные характеристики элементов  $I(U_1)$  и  $I(U_2)$  строят в общей системе координат (рис. 6.4, б).

Далее строят вольт-амперную характеристику  $I(U)$  всей цепи, выражающую зависимость тока в цепи от общего напряжения.

Ток  $I$  обоих участков цепи одинаков, а общее напряжение  $U = U_1 + U_2$ .

Для построения общей вольт-амперной характеристики достаточно сложить абсциссы исходных кривых  $I(U_1)$  и  $I(U_2)$ .

Проведем прямую, параллельную оси абсцисс и соответствующую току  $I_1$ . Отрезки 1-2 и 1-3 в выбранном масштабе выражают напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  на участках. Сложив эти отрезки, на той же прямой получим точку 4 общей вольт-амперной характеристики.

Для других значений тока аналогично найден еще ряд точек, через которые проведена общая вольт-амперная характеристика.

Построение вольт-амперных характеристик (см. рис. 6.4, б) является подготовитель-

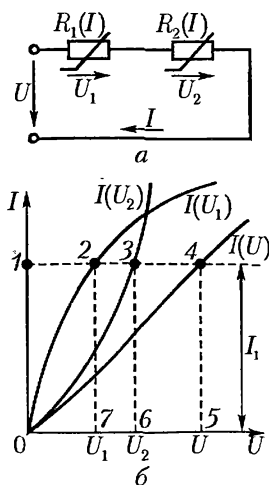


Рис. 6.4

ным этапом для решения различных задач, относящихся к подобным цепям. Требуется, например, определить ток в цепи и напряжения  $U_1$  и  $U_2$  на участках, если общее напряжение  $U$  известно.

На оси абсцисс находим точку 5, определяющую напряжение  $U$  (отрезок 0–5 в масштабе напряжений выражает напряжение в цепи). Через нее проводим перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с общей вольт-амперной характеристикой  $I(U)$  в точке 4. Из точки 4 проводим линию, параллельную оси абсцисс. Отрезок 5–4 выражает ток в цепи, а отрезки 1–2 и 1–3 — напряжения на участках (соответственно  $U_1$  и  $U_2$ ).

## Параллельное соединение двух нелинейных элементов

При параллельном соединении двух нелинейных элементов (рис. 6.5, а) к ним приложено одно и то же напряжение  $U$ , а ток в неразветвленной части цепи равен сумме токов в ветвях:  $I = I_1 + I_2$ .

Для построения общей вольт-амперной характеристики  $I(U)$  нужно для ряда значений  $U$  сложить ординаты вольт-амперных характеристик элементов, как показано на рис. 6.5, б. При напряжении  $U_1$  (отрезок 0–1) сумма отрезков 1–2 (ток  $I_1$ ) и 1–3 (ток  $I_2$ ) равна отрезку 1–4 (ток  $I$ ).

Предположим, что по заданному значению  $U = U_1$  нужно определить токи в ветвях и общий ток  $I$ . На оси абсцисс откладываем отрезок 0–1, выражающий напряжение  $U_1$ , и через точку 1 проводим линию, параллельную оси ординат. Определяем точки 2, 3, 4 пересечения прямой с вольт-амперными характеристиками. Отрезки 1–2, 1–3, 1–4 в масштабе токов выражают токи в цепи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I$ .

Аналогично решают задачи при параллельном соединении нелинейного элемента с линейными, а также при большем числе линейных и нелинейных элементов.

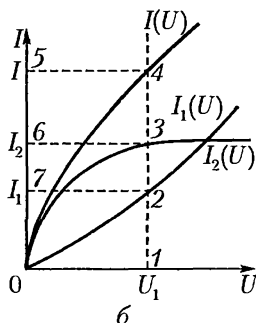
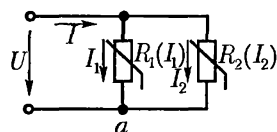


Рис. 6.5

## Смешанное соединение нелинейных элементов

При смешанном соединении нелинейных элементов графический расчет цепи производится методом «свертывания» схемы: в соответствии со схемой соединения элементов складываются их вольт-амперные характеристики.

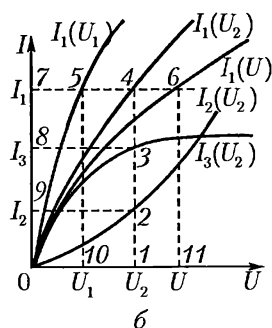
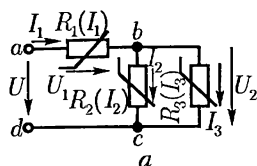


Рис. 6.6

Рассмотрим решение этой задачи применительно к схеме рис. 6.6, а.

По заданным характеристикам  $I_2(U_2)$ ,  $I_3(U_3)$  параллельно соединенных элементов строится вольт-амперная характеристика участка цепи между точками.

Для примера на рис. 6.6, б при напряжении  $U_2$  (отрезок 0–1) определены токи  $I_2$  (отрезок 1–2) и  $I_3$  (отрезок 1–3), а затем ток  $I_1 = I_2 + I_3$  (отрезок 1–4).

Далее строим вольт-амперную характеристику  $I_1(U)$  всей цепи, учитывая, что участок цепи между точками  $b, c$  включен последовательно с нелинейным элементом на участке  $ab$ . Для примера при токе  $I_1$  (отрезок 0–7) определены напряжения  $U_1$  (отрезок 7–5) и  $U_2$  (отрезок 7–4), а также общее напряжение  $U = U_1 + U_2$  (отрезок 7–6).

После построения вольт-амперных характеристик порядок решения задачи зависит от ее условия. Пусть задано напряжение в цепи. Требуется определить токи в схеме и напряжения на участках.

Отложив на оси абсцисс отрезок 0–11, выражающий напряжение  $U$ , проведем линию 11–6 параллельно оси ординат до пересечения с кривой  $I_1(U)$ . Отрезком 11–6 определяется ток  $I_1$  в неразветвленной части цепи. Прямая, параллельная оси абсцисс, проведенная через точку 6, пересекает кривые  $I_1(U_1)$  и  $I_1(U_2)$  в точках 5 и 4. Отрезками 7–4 и 7–5 определяются напряжения  $U_2$  и  $U_1$  на участках. Напряжение  $U_2$  — общее для параллельно соединенных участков с токами  $I_2$  и  $I_3$ . Для определения этих токов через точку 4 проводится прямая, параллельная оси ординат. Пересечение этой прямой с кривыми  $I_2(U_2)$  и  $I_3(U_2)$  в точках 2 и 3 дает отрезки 1–2 и 1–3, определяющие токи  $I_2$  и  $I_3$ .

## Задачи

**Задача 6.4.** Пользуясь рис. 6.4, запишите порядок решения следующих задач.

1. Дано напряжение  $U_2$ . Определить в цепи ток  $I$  и напряжения  $U_1, U$ .
2. Дан ток  $I$ . Определить напряжения  $U_1, U_2, U$ .

**Задача 6.5.** Пользуясь рис. 6.5, запишите порядок решения следующих задач.

1. Дан ток  $I_2$ . Определить напряжение  $U$  и токи  $I_1, I$ .
2. Дан ток  $I$ . Определить напряжение  $U$  и токи  $I_1, I_2$ .

**Задача 6.6.** Для поддержания постоянным тока нагрузки при колебаниях входного напряжения  $U$  последовательно с нагрузочным резисто-

Таблица 6.2

|               |   |     |     |   |     |      |     |      |     |     |
|---------------|---|-----|-----|---|-----|------|-----|------|-----|-----|
| $U, \text{В}$ | 0 | 0,5 | 1   | 2 | 4   | 6    | 8   | 10   | 12  | 14  |
| $I, \text{А}$ | 0 | 1   | 1,6 | 2 | 2,1 | 2,15 | 2,2 | 2,25 | 2,5 | 3,2 |

ром  $R_n = 1 \text{ Ом}$  (рис. 6.7, а) включен бареттер Б, вольт-амперная характеристика которого дана в табл. 6.2.

Построить график изменения тока в цепи при изменении входного напряжения.

**Решение.** Графически определим ток в цепи и напряжение на участках. Для этого на одном чертеже построим вольт-амперные характеристики бареттера и нагрузочного резистора (рис. 6.7, б), выбрав предварительно масштабы по обоим осям.

Для построения на миллиметровой бумаге рекомендуются масштабы: напряжений  $m_u = 2 \text{ В/см}$ ; токов  $m_i = 1 \text{ А/см}$ .

Вольт-амперная характеристика нагрузочного резистора — прямая, проходящая через начало координат под углом  $\alpha$  к оси токов (см. пункт 0а на рис. 6.7, б). Определим угол  $\alpha$ :  $\text{tg } \alpha = R_n m_i / m_u$ .

Ток в цепи и падение напряжения  $U_1$  связаны между собой двумя зависимостями: вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента  $I(U_1)$  и уравнением  $U_1 = U - IR_n$ , которое при постоянной величине  $R_n$  изображается на графике прямой. Точка пересечения этой прямой с вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента на графике определяет  $I$  и  $U_1$  удовлетворяющие обоим зависимостям.

Построим указанную прямую при заданной величине  $R_n = 1 \text{ Ом}$  и входном напряжении  $U = 8 \text{ В}$ . Для этого определим положение точек, в которых прямая пересекается с осями координат:

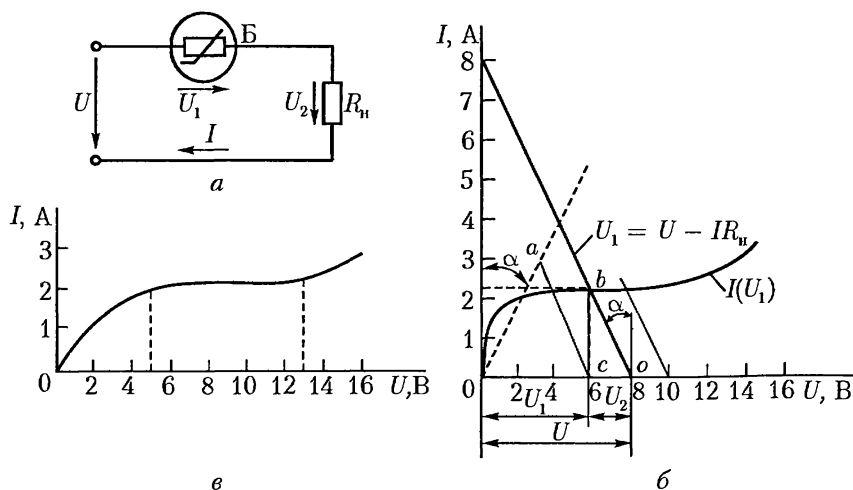


Рис. 6.7

при  $I = 0$   $U_1 = U = 8$  В;

при  $U_1 = 0$   $I_0 = U/R_n = 8/1 = 8$  А.

Прямая, построенная по двум точкам, пересекается с вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента в точке  $b$ .

Спроецируем эту точку на оси координат и найдем значения тока и напряжения на участках:  $I = 2,2$  А;  $U_1 = 5,8$  В;  $U_2 = 2,2$  В. Аналогично найдем те же величины для других напряжений, для чего прямую перемещаем параллельно самой себе (на рис. 6.7,  $b$  показаны такие характеристики для  $U = 6$  и  $10$  В).

График  $I(U)$  для заданной цепи построен на рис. 6.7,  $e$ . Из графика видно, что при изменении входного напряжения в пределах от 5 до 13 В ток в цепи остается практически постоянным.

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Определите напряжение в цепи  $U$  и напряжения на участках по известному току в цепи  $I = 1,8$  А,  $I = 3$  А.

2. Определите сопротивление бареттера  $R_6$  для всех значений напряжения  $U_1$  на его зажимах, определенных в ходе решения задачи.

## 6.3. ПРИМЕРЫ УПРОЩЕНИЯ СХЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Расчеты разветвленных нелинейных электрических цепей при наличии в схеме произвольного количества элементов представляют значительные трудности. В зависимости от вида схемы принимается тот или другой путь расчета, но во всех случаях основой является систематическое упрощение схемы. Рассмотрим некоторые конкретные примеры.

### Цепь с двумя узлами

Между двумя узлами 1 и 2 (рис. 6.8) включены три ветви, две из которых представляют собой последовательное соединение нелинейного сопротивления и постоянной ЭДС.

Нелинейные сопротивления заданы вольт-амперными характеристиками  $I_1(U_1)$ ;  $I_2(U_2)$ ;  $I_3(U_3)$  (рис. 6.9).

Ток каждой ветви можно выразить в зависимости от напряжения между узлами:  $U_{1,2} = E_1 - U_1(I_1)$ ;  $U_{1,2} = E_2 - U_2(I_2)$ ;  $U_{1,2} = U_3(I_3)$ .

Построение кривых  $I_1(U_{1,2})$  и  $I_2(U_{1,2})$  проводится так: для ряда значений тока определяют разность ЭДС и соответствующих значений напряжения; через полученные точки проводят кривые. Кривая  $I_3(U_{1,2})$  совпадает с заданной кривой  $I_3(U_3)$ , так как  $U_{1,2} = U_3$ .

Далее строится кривая  $(I_1 + I_2)(U_{1,2})$ ; для ряда значений  $U_{1,2}$  определяют сумму токов  $I_1 + I_2$ , которая, согласно первому закону Кирхгофа, равна  $I_3$ .

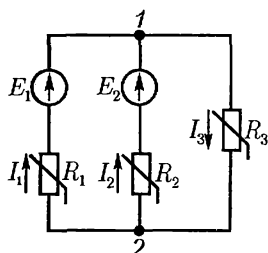


Рис. 6.8

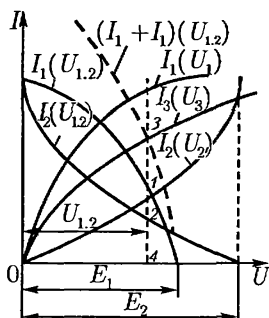


Рис. 6.9

Поэтому точка 3, в которой пересекаются кривые  $(I_1 + I_2)$  и  $I_3(U_3)$ , определяет силу тока  $I_3$  (отрезок 3–4). Опустив перпендикуляр к оси  $U$  через точку 3, находят другие величины: ток  $I_1$  — отрезок 1–4; ток  $I_2$  — отрезок 2–4; напряжение  $U_{1.2}$  — отрезок 0–4.

Заметим, что кривая  $(I_1 + I_2)$  ( $U_{1.2}$ ) является вольт-амперной характеристикой нелинейного активного двухполюсника, эквивалентного двум ветвям исходной схемы. Построение этой кривой означает замену двух ветвей (1 и 2) одной ветвью, что является упрощением заданной схемы. Нетрудно представить, что такой путь можно применить при наличии в схеме большего числа ветвей и постепенно привести ее к схеме простейшего активного нелинейного двухполюсника.

## Цепь с одним нелинейным сопротивлением

Предположим, что в разветвленную цепь входит несколько линейных элементов, в том числе источники ЭДС, и одно нелинейное сопротивление (рис. 6.10, а). Ветвь с нелинейным сопротивлением можно выделить, а оставшуюся линейную часть представить в виде активного двухполюсника.

Включим в нелинейную ветвь ЭДС  $E'$  такой величины, чтобы ток в ней уменьшился до нуля. Для активного линейного двухполюсника такое состояние является режимом холостого хода, поэтому  $E' = U_x$ , где  $U_x$  — напряжение холостого хода.

Для того чтобы получить ток, т. е. возвратиться к первоначальному режиму, можно в нелинейную ветвь включить еще одну ЭДС  $E''$ , равную по величине  $E'$ , но направленную ей встречно (рис. 6.10, б). Можно сказать, что ток в нелинейной ветви вызывает только ЭДС  $E''$ , а остальные ЭДС ( $E'$  и активного двухполюсника) тока не вызывают и их можно из схемы исключить, накоротко замкнув точки, к которым эти источники присоединены.



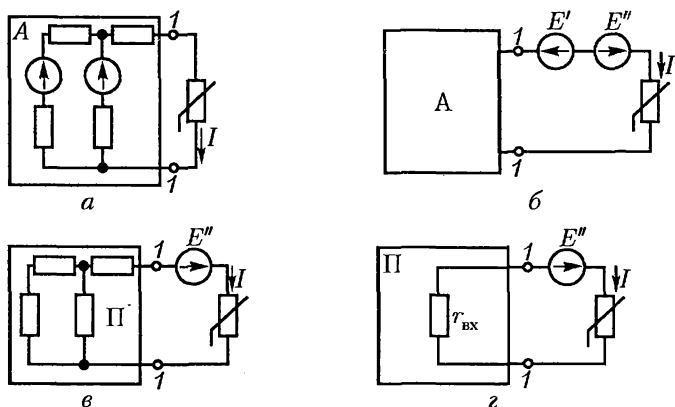


Рис. 6.10

В результате получается схема последовательного соединения пассивного линейного двухполюсника с активным нелинейным двухполюсником (рис. 6.10, в).

Отсюда следует порядок расчета первоначально заданной нелинейной цепи: 1) определяют напряжение холостого хода и входное сопротивление линейного двухполюсника (рис. 6.10, г); 2) находят, например графически, ток и напряжение в нелинейной ветви; 3) определяют токи в линейной части цепи, считая сопротивление нелинейной ветви  $R = U/I$  постоянным.

### Цепь с двумя нелинейными сопротивлениями

В сложную цепь могут входить два нелинейных сопротивления, которые простым преобразованием не приводятся к одному сопротивлению (рис. 6.11, а).

Упрощение и расчет такой цепи можно осуществить в следующем порядке. Выделим нелинейные сопротивления, а оставшуюся часть цепи представим активным линейным четырехполюсником, у которого к первичным и вторичным зажимам присоединено по одному нелинейному сопротивлению.

В каждой нелинейной ветви можно провести преобразования, такие же, как на рис. 6.10, и провести аналогичные рассуждения (рис. 6.11, б). В данном случае линейный четырехполюсник можно представить Т-образной схемой замещения и получить схему с двумя узлами, изображенную на рис. 6.11, в.

Затем надо определить сопротивления Т-схемы четырехполюсника и решить задачу так, как указано в начале этого параграфа. При необходимости от Т-схемы четырехполюсника известными

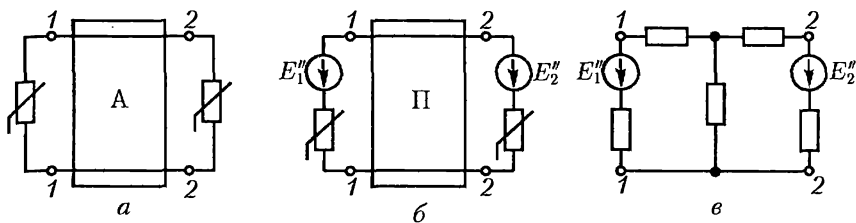


Рис. 6.11

способами можно перейти к исходной схеме, считая при этом сопротивления нелинейных ветвей постоянными, так как токи в них найдены.

Подобный путь применяют для расчета цепей с тремя (и более) нелинейными сопротивлениями.

## Метод последовательных приближений

Суть этого метода заключается в предварительном выборе ожидаемого результата и последовательной его проверке и уточнении.

Рассмотрим метод на примере относительно простой цепи последовательного соединения двух нелинейных сопротивлений (см. рис. 6.4, а). Даны напряжение на зажимах цепи и вольт-амперные характеристики нелинейных элементов.

Ток в цепи по закону Ома

$$I_n = \frac{U}{R_1(I_n) + R_2(I_n)}, \quad (6.6)$$

где  $n$  — порядковый номер приближения.

Первое значение тока  $I_1$  в цепи выбирают ориентировочно, если имеются для этого какие-то основания, а если их нет, то произвольно. По вольт-амперным характеристикам определяют напряжения на нелинейных элементах  $U_1$  и  $U_2$  и затем по закону Ома — сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ :  $R_1 = U_1/I_1$ ;  $R_2 = U_2/I_1$ .

По формуле (6.6) находят второе приближение тока:

$$I_2 = U/(R_1 + R_2).$$

По найденному значению тока  $I_2$  и вольт-амперным характеристикам снова определяют напряжения на нелинейных элементах и их сопротивления, а затем опять находят ток и так до тех пор, пока результат не начнет практически повторяться. Обычно достаточно точный ответ получают после четырех-пяти повторений расчета, если процесс приближений обладает сходимостью. В случае расходящегося процесса задачу следует решать на основе уравнения для

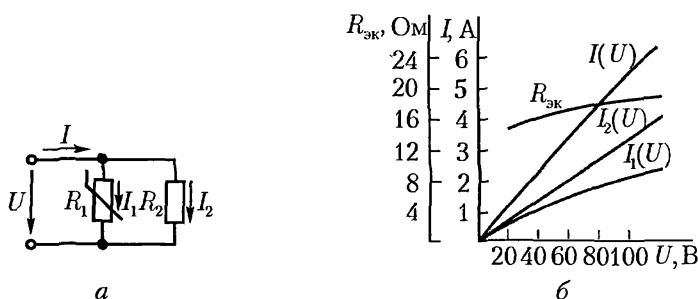


Рис. 6.12

другой величины вместо (6.6), например для напряжения на одном из нелинейных элементов:

$$U_{I_n} = \frac{UR_1(I_n)}{R_1(I_n) + R_2(I_n)}. \quad (6.7)$$

### Задачи

**Задача 6.7.** Лампа накаливания включена параллельно с линейным резистором  $R_2 = 30$  Ом (рис. 6.12, а). Построить зависимость эквивалентного сопротивления  $R_{эк}$  цепи от напряжения  $U$  на его зажимах.

Методом последовательных приближений определить напряжение  $U$  при токе в неразветвленной части цепи  $I = 5$  А. Вольт-амперная характеристика лампы задана в табл. 6.3.

Таблица 6.3

| $U, \text{В}$ | 0 | 20  | 40  | 60  | 80   | 100  | 120 |
|---------------|---|-----|-----|-----|------|------|-----|
| $I, \text{А}$ | 0 | 0,6 | 1,1 | 1,5 | 1,85 | 2,15 | 2,4 |

**Решение.** Построим вольт-амперные характеристики элементов цепи. На рис. 6.12, б:  $I_1(U)$  — характеристика лампы, а  $I_2(U)$  — характеристика резистора  $R_2$ . Сложив ординаты этих характеристик при различных значениях напряжения, получим вольт-амперную характеристику всей цепи, т.е. зависимость тока в неразветвленной части цепи от приложенного напряжения  $I(U)$ . Эквивалентное сопротивление схемы найдем как отношение  $R_{эк} = U/I$  — для различных значений приложенного напряжения.

Результаты вычислений приведены на рис. 6.12, б.

**Задача 6.8.** В анодной цепи триода 6Н8С (рис. 6.13) имеется нелинейный нагрузочный резистор  $R_n$ . Полагая напряжение  $U$  анодного источника постоянным, равным 150 В, построить график изменения анодного тока  $U_a$ , напряжений на аноде  $U_a$  и на нагрузке  $U_n$  при изменении сопротивления нагрузочного резистора от 10 до 100 кОм. Анодная характеристика  $I_a(U_a)$  при сеточном напряжении  $U_c = -4$  В задана в табл. 6.4.

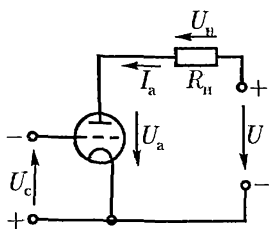


Рис. 6.13

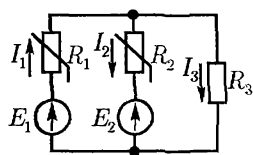


Рис. 6.14

Таблица 6.4

|                  |   |    |     |     |     |      |
|------------------|---|----|-----|-----|-----|------|
| $U_a, \text{В}$  | 0 | 40 | 80  | 120 | 160 | 200  |
| $I_a, \text{мА}$ | 0 | 0  | 0,8 | 3,6 | 8   | 13,5 |

**Задача 6.9.** Определить токи в схеме рис. 6.14, если ЭДС  $E_1 = 100 \text{ В}$ ,  $E_2 = 20 \text{ В}$ , сопротивление  $R_3 = 2000 \text{ Ом}$ ; характеристики нелинейных элементов заданы в табл. 6.5.

Таблица 6.5

|                |   |    |    |    |    |    |     |
|----------------|---|----|----|----|----|----|-----|
| $U, \text{В}$  | 0 | 5  | 20 | 30 | 50 | 70 | 100 |
| $I, \text{мА}$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60  |

## ГЛАВА 7

# РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

В рабочем состоянии электрических устройств и установок между токоведущими частями имеется разность потенциалов, т. е. существует электрическое поле.

Кроме основного (разрешенного) канала тока имеется бесчисленное множество потенциальных каналов, которые закрыты электрической изоляцией. Таким образом, электрическая изоляция находится под действием электрического поля и должна быть рассчитана на то, чтобы надежно выполнять свои функции. Для расчета необходимо определить характеристики электрического поля.

Эти и другие вопросы, относящиеся к электрическому полю, рассматриваются в данной главе.

### 7.1. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА КУЛОНА ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Расчет электрических полей на основе закона Кулона применяется в тех случаях, когда электрические заряды тел можно рассматривать сосредоточенными в весьма малом объеме, т. е. полагать заряженные тела точечными.

#### Электрическое поле уединенного заряженного тела

Из закона Кулона следует, что напряженность электрического поля уединенного точечного заряженного тела

$$E = \frac{F_z}{Q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (7.1)$$

где  $Q$  — заряд тела;  $Q_0$  — заряд пробного тела;  $r$  — расстояние от заряженного тела до точки, в которой определяется напряженность поля.

Электрическое поле уединенного точечного заряженного тела неравномерно. Найдем потенциал поля в некоторой точке 1 (см.

рис. 7.3), используя выражение (1.3), с помощью которого выразим работу в поле на пути от некоторой точки 1 до бесконечности:

$$A_{1\infty} = Q_0 \int_{r_1}^{\infty} E dr = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{\infty} \frac{Q dr}{r^2} = \frac{Q_0 Q}{4\pi\epsilon_0 r_1},$$

где  $r_1$  — расстояние от заряженного тела до точки 1.

Положение точки 1 выбрано произвольно, поэтому полученное выражение можно записать для любой точки

$$V = \frac{A_{1\infty}}{Q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (7.2)$$

Напряжение между точками 1 и 2

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Между напряженностью электрического поля и потенциалом в некоторой точке имеется определенная связь, которую выразим в общем виде.

Из выражения (1.3) следует:

$$\begin{aligned} dA &= -Q_0 E_n dl, \\ \frac{dA}{Q_0} &= dV = -E_n dl. \end{aligned}$$

Знак минус в этих выражениях указывает на то, что энергия убывает, если перемещение происходит в направлении напряженности поля.

Отсюда

$$E_n = -(dV) / (dl), \quad (7.3)$$

где  $E_n$  — проекция вектора  $\mathbf{E}$  на направление  $dl$ .

## Электрическое поле группы заряженных тел

При рассмотрении электрического поля в вакууме (а также в воздухе) установили, что напряженность поля линейно зависит от заряда тела [в выражении (7.1)  $Q = \text{const}$ ]. Поэтому при определении напряженности результирующего поля от действия нескольких заряженных тел можно пользоваться принципом наложения полей.

В каждой точке пространства, окружающего заряженные тела, электрическое поле одного тела накладывается на поле другого.

Для определения общей напряженности нужно найти величину и направление вектора напряженности каждого из составляющих полей, а затем сложить векторы;

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n. \quad (7.4)$$

Принцип наложения действителен и при определении потенциала в некоторой точке результирующего поля. Но потенциалы складываются алгебраически, так как они скалярные величины:

$$V = V_1 + V_2 + \dots = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \dots \quad (7.5)$$

### Задачи

**Задача 7.1.** Два точечных тела, заряды которых  $Q_1 = 3,2 \cdot 10^{-11}$  Кл и  $Q_2 = -4,267 \cdot 10^{-11}$  Кл, расположены в воздухе в противоположных вершинах воображаемого прямоугольника со сторонами 6 и 8 см (рис. 7.1). Определить напряженность и потенциал в двух других вершинах и в точках 5, 6, 7, 8.

**Решение.** Определим в заданных точках напряженность электрического поля каждого заряженного тела в отдельности по формуле (7.1), обозначая напряженность буквой  $E$  с индексами. Первая цифра индекса указывает, с каким заряженным телом связано поле, вторая — точку, где определяется напряженность этого поля.

В точке 3

$$E_{1,3} = \frac{Q_1}{4\pi r_{1,3}^2 \epsilon_0} = \frac{3,2 \cdot 10^{-11}}{4\pi \cdot 0,06^2 \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}} = 80 \text{ В/м.}$$

По формуле (7.2):

$$V_{1,3} = 4,8 \text{ В.}$$

$$E_{2,3} = \frac{Q}{4\pi r_{2,3}^2 \epsilon_0} =$$

$$= \frac{4,267 \cdot 10^{-11}}{4\pi \cdot 0,08^2 \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}} = 60 \text{ В/м.}$$

$$V_{2,3} = 4,8 \text{ В.}$$

Согласно принципу наложения, общую напряженность поля найдем геометрическим (векторным) сложением составляющих.

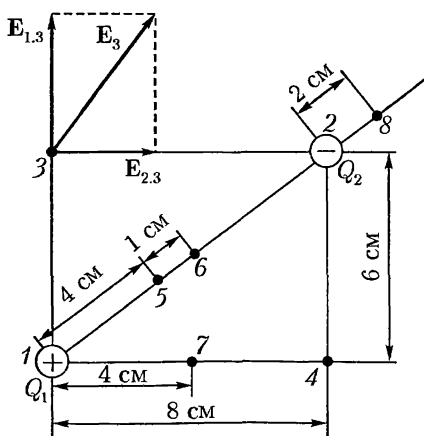


Рис. 7.1

По условию задачи векторы  $E_{1,3}$  и  $E_{2,3}$  направлены под углом  $90^\circ$  друг к другу. Поэтому напряженность результирующего поля можно подсчитать как гипотенузу прямоугольного треугольника, катетами которого являются эти векторы:

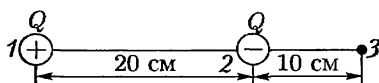


Рис. 7.2

$$E_3 = \sqrt{E_{1,3}^2 + E_{2,3}^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ В/м};$$

$$V_3 = V_{1,3} + V_{2,3} = 9,6 \text{ В.}$$

В общем случае определение напряженности результирующего поля можно выполнить графически, по правилам векторного сложения или по теореме косинусов.

В точке 5

$$E_{1,5} = \frac{Q_1}{4\pi r_{1,5}^2 \epsilon_0} = \frac{3,2 \cdot 10^{-11}}{4\pi \cdot 0,04^2 \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}} = 180 \text{ В/м};$$

$$V_{1,5} = 7,2 \text{ В};$$

$$E_{2,5} = \frac{Q_2}{4\pi r_{2,5}^2 \epsilon_0} = \frac{4,627 \cdot 10^{-11}}{4\pi \cdot 0,06^2 \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}} = 106,7 \text{ В/м};$$

$$V_{2,5} = 6,4 \text{ В.}$$

По условию задачи векторы  $E_{1,5}$  и  $E_{2,5}$  направлены по прямой 1–2 в одну сторону. Поэтому величину напряженности результирующего поля можно найти как сумму числовых значений  $E_{1,5}$  и  $E_{2,5}$ .

$$E_5 = E_{1,5} + E_{2,5} = 180 + 106,7 = 286,7 \text{ В/м};$$

$$V_5 = V_{1,5} + V_{2,5} = 13,6 \text{ В.}$$

Напряженность и потенциал результирующего поля в точках 4, 6, 7, 8 определите самостоятельно.

**Задача 7.2.** Два точечных заряженных тела, имеющих одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды  $Q$ , расположены в вакууме, как показано на рис. 7.2. Определить величину заряда, если в точке 3 напряженность поля  $E_3 = 80 \text{ В/м}$ .



## 7.2. ТЕОРЕМА ГАУССА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

В практике чаще встречаются случаи, когда заряд тела распределен по его поверхности с некоторой плотностью. В таких случаях задачи решаются более просто на основе теоремы Гаусса.

### Поток вектора напряженности электрического поля

Рассматривая электрическое поле, изображенное на рис. 7.3, выделим элемент поверхности площадью  $dS$ . Он представляет собой маленькую часть сферы радиусом  $r$ , в центре которой помещено точечное тело с положительным зарядом  $Q$ .

В силу геометрической симметрии поля вектор напряженности  $\mathbf{E}$  по величине одинаков во всех точках поверхности и направлен перпендикулярно ей. Произведение  $E dS$  выражает величину элементарного потока  $dN$  вектора напряженности электрического поля через элемент поверхности  $dS$ , если линии напряженности перпендикулярны пронизываемой ими поверхности:  $dN = E dS$ .

Определим полный поток  $N$  вектора напряженности электрического поля, для чего сложим элементарные потоки по всей поверхности сферы:

$$N = \oint E dS. \quad (7.6)$$

Вынося постоянную величину  $E$  за знак суммы и учитывая, что вектор  $\mathbf{E}$  всюду перпендикулярен поверхности сферы, получаем

$$N = E \oint dS,$$

где  $\oint dS = 4\pi r^2$  — площадь сферы; следовательно,

$$N = E \cdot 4\pi r^2. \quad (7.7)$$

Подставляя напряженность поля в формулу (7.1), получим

$$N = Q / \epsilon_0. \quad (7.8)$$

### Теорема Гаусса

Приведенные рассуждения справедливы и при отрицательном заряде с той лишь разницей, что поток вектора напряженности в этом случае отрицательный.

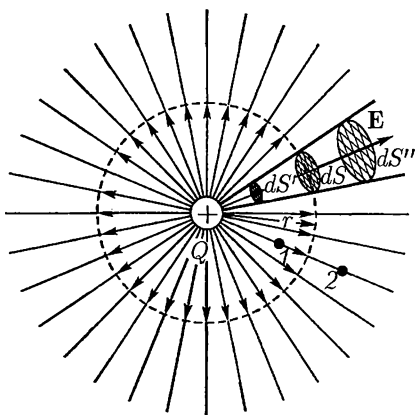


Рис. 7.3

Из формулы (7.8) следует, что поток  $N$  не зависит от радиуса сферической поверхности.

Потоку вектора напряженности электрического поля можно придать некоторую наглядность с помощью линий напряженности.

Вследствие симметрии электрического поля в рассматриваемом случае линии напряженности пронизывают всю поверхность сферы и их плотность (число линий на единицу площади) одинакова. Предположим, что эта плотность выбрана численно равной напряженности поля. Тогда общее число линий, пронизывающих поверхность сферы, будет численно равно полному потоку вектора напряженности поля  $N$ .

Число линий напряженности, а следовательно, и поток вектора напряженности остаются одинаковыми для сферы любого радиуса. Это справедливо и для элементов  $dS'$  и  $dS''$  сферических поверхностей, через которые проходят одни и те же линии напряженности (см. рис. 7.3), образующие конус с вершиной в центре сферы.

Элементарный поток вектора напряженности заключен внутри указанного конуса, и пронизывающие элемент поверхности  $dS$  линии напряженности образуют элементарную трубку поля. Сложив потоки всех трубок по всему объему шара, получим полный поток вектора напряженности электрического поля точечного заряженного тела.

Можно доказать, что формула (7.8) справедлива не только для сферы, окружающей точечное заряженное тело, но и для любой замкнутой поверхности.

В общем случае направление вектора напряженности  $\mathbf{E}$  может быть не перпендикулярно элементу поверхности  $dS$  около выбранной точки  $A$  (рис. 7.4). Угол между направлением вектора  $\mathbf{E}$  и внешней нормалью  $\mathbf{n}$  к поверхности в точке  $A$  обозначим  $\alpha$  (внешняя нормаль — это линия, перпендикулярная поверхности в выбранной точке, направленная от этой поверхности с внешней стороны). Для определения потока через элемент поверхности нужно взять проекцию вектора  $\mathbf{E}$  на направление внешней нормали

$$dN = E_n dS,$$

где

$$E_n = E \cos \alpha.$$

Тогда

$$dN = E \cos \alpha dS.$$

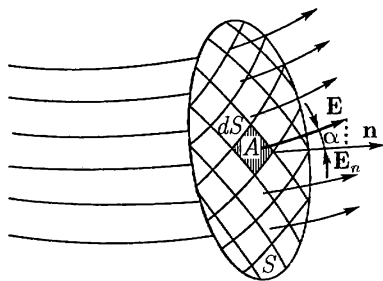


Рис. 7.4

Суммирование элементарных потоков по всей замкнутой поверхности дает полный поток

$$N = \oint E_n dS = Q/\epsilon_0. \quad (7.9)$$

Если внутри замкнутой поверхности находится любое число тел с разноименными зарядами, в формулы (7.8) и (7.9) следует ввести алгебраическую сумму всех зарядов

$$N = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q. \quad (7.10)$$

Алгебраическая сумма зарядов берется в данном случае потому, что линии напряженности при положительных и отрицательных зарядах направлены противоположно.

Формула (7.10) является математическим выражением теоремы Гаусса, которая формулируется так:

**поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность в вакууме равен отношению электрического заряда, заключенного внутри этой поверхности к электрической постоянной.**

### Поле заряженной плоскости

Бесконечная плоскость (рис. 7.5) имеет заряд, распределенный с плотностью  $\sigma$ . Выделим вокруг части этой плоскости замкнутую поверхность, которая образована двумя плоскими поверхностями, параллельными заряженной плоскости, и цилиндрической боковой поверхностью, перпендикулярной ей. Вследствие симметрии все точки поверхности  $S$  имеют одинаковую напряженность поля.

Кроме того, вектор напряженности направлен перпендикулярно заряженной плоскости, т.е. перпендикулярно поверхности  $S$  и параллельно цилиндрической боковой поверхности. В этом случае поток вектора напряженности через цилиндрическую поверхность ра-

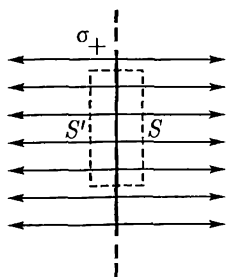


Рис. 7.5

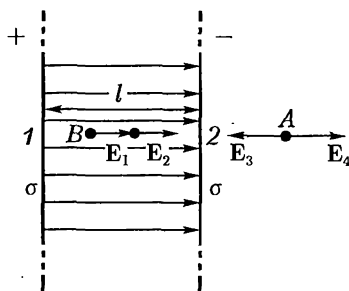


Рис. 7.6

вен нулю и, следовательно, общий поток равен потоку через поверхности  $S$ .

Заряд, заключенный внутри выделенной поверхности, составляет  $\sigma S$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда.

Согласно теореме Гаусса,

$$E_n 2S = E 2S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}.$$

Отсюда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (7.11)$$

Электрическое поле двух параллельных бесконечных плоскостей, несущих разноименные заряды одинаковой плотности (рис. 7.6), определяется наложением полей положительной и отрицательной пластин.

Как видно из формулы (7.11), напряженность поля бесконечной плоскости не связана с расстоянием от нее. Поэтому вне пластин (точка  $A$ ) поля положительной и отрицательной пластин взаимно скомпенсированы, т. е. результирующая напряженность поля равна нулю ( $E = 0$ ).

Между пластинами (точка  $B$ ) поля их складываются, поэтому

$$E = \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \text{const}. \quad (7.12)$$

Таким образом, между двумя бесконечными плоскостями, заряженными противоположно с одинаковой плотностью заряда, напряженность поля одинакова во всех точках по величине и направлению, т. е. электрическое поле равномерно.

## Поле заряженного шара

Наметим в пространстве, окружающем заряженный шар, произвольную точку  $1$ , отстоящую от центра шара на расстоянии  $r$  (рис. 7.7). Выделим сферическую поверхность, концентричную с поверхностью заряженного шара, так, чтобы точка  $1$  лежала на этой поверхности. Вследствие симметрии все точки выделенной поверхности имеют одинаковую напряженность. В данном случае вектор напряженности  $E$  направлен радиально в каждой точке, т. е. перпендикулярно выбранной сферической поверхности.

Поток вектора напряженности поля через выделенную сферическую поверхность

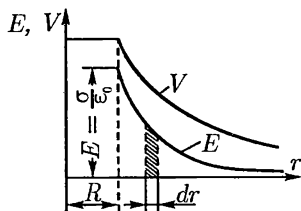
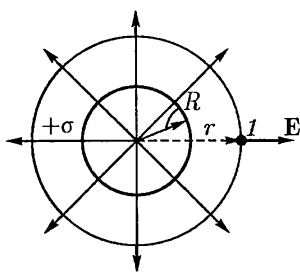


Рис. 7.7

$$N = E \cdot 4\pi r^2.$$

Заряд шара

$$Q = \sigma \cdot 4\pi R^2,$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда;  $R$  — радиус шара.

Согласно теореме Гаусса [см. формулу (7.8)],

$$E \cdot 4\pi r^2 = Q/\epsilon_0.$$

Отсюда для напряженности поля получим выражение

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \quad (7.13)$$

Напряженность поля заряженного шара имеет такое же выражение, какое получено из закона Кулона для точечного заряженного тела. Следовательно, заряд шара можно считать сосредоточенным в центре и рассматривать заряженный шар как точечное заряженное тело. При  $r = R$

$$E = \sigma/\epsilon_0.$$

На рис. 7.7 показаны графики зависимости напряженности и потенциала поля уединенного заряженного шара от расстояния  $r$ .

## Поле заряженного прямого провода

Проведем через некоторую точку 1 пространства цилиндрическую поверхность, ось которой совпадает с осью провода круглого сечения (рис. 7.8).

Вследствие симметрии во всех точках выделенной поверхности линии напряженности перпендикулярны ей, а напряженность поля одинакова:  $E_n = E$ .

Поток вектора напряженности

$$N = E \cdot 2\pi r l,$$

где  $2\pi r l$  — боковая поверхность цилиндра.

Поток через основания цилиндра равен нулю, так как линии напряженности не пронизывают их.

Согласно теореме Гаусса,

$$E \cdot 2\pi r l = Q/\epsilon_0,$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (7.14)$$

где  $Q = \tau l$ ,  $\tau$  — линейная плотность заряда на проводе.

### Задачи

**Задача 7.3.** Построить графики напряженности электрического поля заряженного шара (поверхностная плотность заряда  $\sigma = 2 \cdot 10^{-8}$  Кл/м<sup>2</sup>, радиус шара  $R = 5$  см) и заряженного прямого провода (линейная плотность заряда  $\tau = 4 \cdot 10^{-8}$  Кл/м).

**Решение.** Для построения графиков нужно задаться несколькими значениями расстояния  $r$  от центра шара или оси провода до точек, в которых предполагается определить напряженность поля. По формуле (7.13) определяют напряженность электрического поля заряженного шара  $E_1$ , по формуле (7.14) — заряженного провода  $E_2$ .

При  $r = 10$  см

$$E_1 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon r^2} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 5^2}{\frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 10^2} = 180\pi \text{ В/м};$$

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{\frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{-9} \cdot 9}} = 72 \cdot 10^2 \text{ В/м}.$$

Определите напряженность электрического поля в обоих случаях в точках, положение которых определяется расстоянием  $r = 5, 20, 50, 100$  см и  $\infty$ ; постройте графики  $E(r)$  в прямоугольной системе координат.

**Задача 7.4.** Напряженность электрического поля на расстоянии 20 см от центра заряженного шара составляет 10 В/м. Определите напряженность поля на расстоянии 8 см от центра шара.

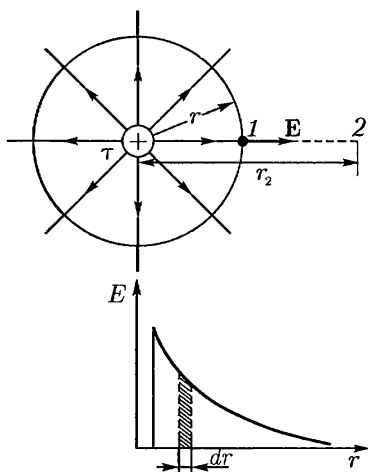


Рис. 7.8

## 7.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

По сравнению с проводниками количество свободных заряженных частиц в единице объема диэлектрика очень мало. Поэтому при наличии электрического поля направленным движением свободных заряженных частиц можно пренебречь и считать, что в диэлектрике преобладают электростатические явления.

При этом электрическое поле воздействует на вещество диэлектрика, которое определенным образом изменяет электрическое поле.

## Поляризация диэлектрика

Различают диэлектрики с полярными и неполярными молекулами. Полярные молекулы в электрическом отношении можно уподобить электрическому диполю (рис. 7.9, а). Электрическим диполем называют совокупность двух точечных заряженных тел, обладающих равными по величине и противоположными по знаку зарядами, расстояние между которыми очень мало по сравнению с расстоянием от них до точек, в которых рассматривается поле диполя.

Электрической характеристикой диполя является его электрический момент  $p$ , числовое значение которого равно произведению величины заряда точечных тел на расстояние между ними:

$$p = Qa. \quad (7.15)$$

Вектор электрического момента направлен от отрицательного заряда к положительному.

Полярные молекулы в диэлектрике расположены так, что электрические моменты их направлены беспорядочно. Поэтому тела, в состав которых входят полярные молекулы, в целом нейтральны, хотя каждая полярная молекула создает свое электрическое поле.

Рассмотрим диэлектрик, помещенный в равномерное электрическое поле с напряженностью  $E$  между двумя заряженными металлическими пластинами (рис. 7.9).

Во внешнем электрическом поле полярная молекула (диполь) испытывает действие пары сил, которая поворачивает ее таким образом, что электрический момент диполя оказывается направленным так же, как и напряженность поля (рис. 7.9, б).

В неполярных молекулах диэлектрика под действием внешнего электрического поля происходит смещение заряженных частиц

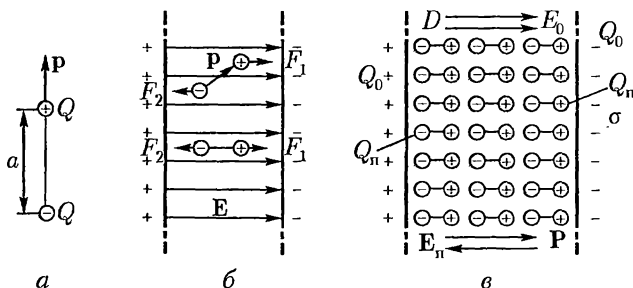


Рис. 7.9

вдоль его направления, в результате чего они приобретают свойство диполей. Это явление называется поляризацией диэлектрика.

## Поляризованность диэлектрика

Степень поляризации диэлектрика оценивают вектором поляризованности  $\mathbf{P}$ . Для однородного по всем направлениям диэлектрика величина вектора поляризованности представляет геометрическую сумму электрических моментов  $p$  молекул, заключенных в единице объема:

$$P = \sum p/V. \quad (7.16)$$

Поляризованность тем больше, чем сильнее электрическое поле. Зависит она и от свойства диэлектрика. Поэтому поляризованность можно выразить произведением

$$P = \epsilon_0 \chi_r E, \quad (7.17)$$

где  $\chi_r$  — диэлектрическая восприимчивость (относительная) — величина, характеризующая способность диэлектрика поляризоваться под действием электрического поля.

В результате поляризации диэлектрика диполи стремятся располагаться вдоль линий напряженности электрического поля. При этом внутри диэлектрика в любом объеме, не меньшем объема молекулы, сохраняется равенство общих зарядов того и другого знака, так что диэлектрик остается нейтральным. По поверхностям диэлектрика, прилегающим к металлическим пластинам, распределены частицы, имеющие заряд одного знака: отрицательный — на границе с положительной пластиной и положительный — на границе с отрицательной пластиной (рис. 7.9, в).

На обеих поверхностях заряд распределен равномерно с одинаковой плотностью  $\sigma$ . Таким образом, на границе между металлической пластиной и диэлектриком распределены два вида заряженных частиц: свободные частицы металлической пластины с общим зарядом  $Q_0$  и связанные частицы диэлектрика с общим зарядом  $Q_n$  противоположного знака.

Электрическое поле в диэлектрике соответствует общему заряду частиц  $Q = Q_0 - Q_n$ ; оно физически существует в пространстве между молекулами диэлектрика. Это поле можно также представить как результат наложения двух полей — внешнего (напряженность  $E_0$ ) и внутреннего (напряженность  $E_n$ ).

В данном случае внешним называется поле свободных заряженных частиц металлических пластин при отсутствии диэлектри-



ка, а внутренним — поле связанных заряженных частиц диэлектрика, существующее независимо от внешнего поля. Независимое существование внутреннего поля диэлектрика до некоторой степени условно, так как оно возникает только при наличии внешнего поля и в большинстве случаев исчезает при его отсутствии.

Однако имеются такие диэлектрики, которые, будучи поляризованными внешним электрическим полем, сохраняют остаточную поляризацию (сегнетоэлектрики и электроеты).

## Электрическое смещение

На основании теоремы Гаусса [см. формулу (7.8)] для равномерного поля свободных заряженных частиц

$$E_0 S = Q_0 / \epsilon_0, \quad (7.18)$$

а для поля в диэлектрике

$$ES = (Q_0 - Q_n) / \epsilon_0. \quad (7.19)$$

Найдем величину вектора поляризованности  $\mathbf{P}$  (рис. 7.9, в). Электрический момент элементарного поверхностного заряда имеет значение  $\sigma dSl$ , где  $l$  — расстояние между пластинами или толщина диэлектрика;  $\sigma Sl$  — момент всего объема диэлектрика.

Таким образом, числитель выражения (7.16) в данном случае имеет величину  $\sigma Sl$ , знаменатель —  $Sl$ .

Тогда поляризованность

$$P = \frac{\sigma Sl}{Sl}, \text{ или } P = \sigma. \quad (7.20)$$

Величина поляризованности равна плотности заряда на поверхности диэлектрика.

Вместе с тем заряд связанных частиц на поверхности диэлектрика равен общему заряду частиц, которые смещаются в диэлектрике через любую плоскость, параллельную обкладкам.

Согласно выражению (7.19),

$$\epsilon_0 ES = Q_0 - Q_n.$$

Общий заряд связанных частиц с учетом выражения (7.20)

$$Q_n = \sigma S = PS.$$

Тогда

$$\epsilon_0 ES = Q_0 - PS$$

или

$$(\epsilon_0 E + P)S = Q_0. \quad (7.21)$$

Из этого выражения следует, что электрическое поле в диэлектрике можно рассматривать только в связи с зарядом  $Q_0$  свободных заряженных частиц и не учитывать явление поляризации, если в качестве характеристики поля принять другую векторную величину  $D$ , называемую электрическим смещением:

$$\boxed{D = \epsilon_0 E + P.} \quad (7.22)$$

С введением этого понятия формула (7.21) упрощается

$$DS = Q_0.$$

Электрическое смещение как характеристика электрического поля не зависит от свойств среды, а определяется только зарядом свободных частиц, что значительно облегчает расчеты электрических полей.

В выражение (7.22) подставим численное значение вектора поляризованности согласно (7.17)

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_r E. \quad (7.23)$$

В этой формуле величина  $\epsilon_0 E$  характеризует только электрическое поле в вакууме, обозначается  $D_0$  и называется электрическим смещением в вакууме:

$$D_0 = \epsilon_0 E. \quad (7.24)$$

Слагаемым  $\epsilon_0 \chi_r E = P$  учитывается явление поляризации диэлектрика.

## Диэлектрическая проницаемость

Сравнивая выражения (7.18) и (7.19), нетрудно установить, что при внесении диэлектрика в пространство между металлическими пластинами электрическое поле становится слабее того поля, которое создается при отсутствии диэлектрика и прочих одинаковых условиях, т. е.  $E < E_0$ .

Это обстоятельство формально можно учесть, введя в выражения, определяющие напряженность поля, вместо электрической постоянной  $\epsilon_0$  величину  $\epsilon_a > \epsilon_0$ , считая заряд по-прежнему равным заряду  $Q_0$  свободных частиц.

Величина  $\epsilon_a$ , называемая диэлектрическим коэффициентом, наряду с диэлектрической восприимчивостью  $\chi_r$  характеризует электрические свойства диэлектрика.

Из выражения (7.23) электрическое смещение можно выразить формулой

$$D = \epsilon_0 (1 + \chi_r) E = \epsilon_a E. \quad (7.25)$$

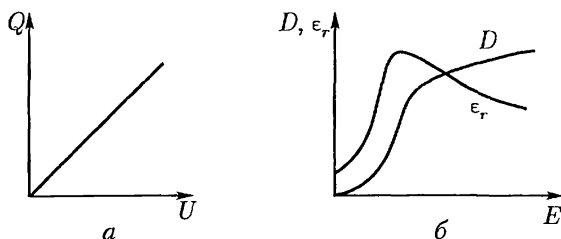


Рис. 7.10

Величина  $\epsilon_a = \epsilon_0(1 + \chi_r)$ , характеризующая свойства диэлектрика, и есть упомянутая ранее диэлектрическая проницаемость.

Диэлектрическая проницаемость имеет такую же размерность, как и электрическая постоянная.

Обычно электрические свойства веществ оценивают отношением их диэлектрической проницаемости  $\epsilon_a$  к электрической постоянной  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_r = \epsilon_a / \epsilon_0 = 1 + \chi_r. \quad (7.26)$$

Диэлектрическая восприимчивость  $\chi_r$  диэлектриков — величина положительная, поэтому  $\epsilon_r > 1$ , а  $\epsilon_a > \epsilon_0$ .

Величина  $\epsilon_r$  называется относительной диэлектрической проницаемостью и показывает, во сколько раз электрическое поле в диэлектрике слабее, чем в вакууме, при прочих равных условиях. Значения относительной диэлектрической проницаемости некоторых веществ даны в табл. прил. 1.

В этой таблице указаны некоторые из веществ, для которых величина относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_r$  постоянна, т. е. практически не зависит от напряженности электрического поля.

Емкость конденсаторов, изготовленных с применением таких диэлектриков, не зависит от величины напряжения между его обкладками. Такие конденсаторы называются линейными, так как зависимость их заряда от напряжения —  $Q(U)$  — прямолинейная (рис. 7.10, а). Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков сильно зависит от напряженности электрического поля, что видно из рис. 7.10, б, на котором эта зависимость показана вместе с графиком  $D(E)$ . Конденсатор с сегнетоэлектриком имеет нелинейную вольт-кулоновую характеристику  $Q(U)$ . Такие конденсаторы применяются в устройствах автоматики.

## Задачи

**Задача 7.5.** Определить силу взаимодействия заряженных тел по данным условия задачи 7.1 в двух случаях: а) заряженные тела находятся в воздухе; б) заряженные тела находятся в трансформаторном масле ( $\epsilon_r = 2,5$ ).

**Задача 7.6.** Два точечных заряженных тела, имеющих одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды  $Q = 10^{-10}$  Кл, находятся в трансформаторном масле ( $\epsilon_r = 2,5$ ). Определить напряженность поля и потенциал в точке 3 по рис. 7.2.

**Задача 7.7.** Напряженность электрического поля на расстоянии 20 см от центра заряженного шара составляет 10 В/м. Определить заряд шара, который находится: а) в воздухе, б) в парафине ( $\epsilon_r = 2$ ).

## 7.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ

Связь уединенного проводника, имеющего электрический заряд  $Q$ , с собственным электрическим полем характеризуется величиной заряда. В этом поле поверхность проводника является поверхностью равного потенциала  $V$ ; такой же потенциал имеют все точки в объеме проводника, поэтому можно говорить о потенциале проводника.

При увеличении или уменьшении заряда совершается работа и энергетическая характеристика (потенциал) проводника соответственно увеличивается или уменьшается.

Однако при равном изменении зарядов двух проводников, каждый из которых уединен, изменения их потенциалов могут быть неравными. На зависимость между потенциалом и зарядом уединенного проводника влияют форма и размеры его поверхности, а также среда, в которую проводник помещен. Для выражения этого влияния введено понятие электрической емкости уединенного проводника  $C$  (см. 1.2).

### Общее выражение емкости

Электрическая емкость проводника есть величина, характеризующая способность проводника накапливать электрический заряд, численно равная отношению заряда проводника к его потенциалу:

$$C = Q / V. \quad (7.27)$$

Связь потенциала и заряда проводника в данном случае выражена в предположении, что все другие проводники бесконечно удалены, а потенциал бесконечно удаленной точки равен нулю.

В вакууме это отношение для данного проводника остается неизменным независимо от величины заряда. Во многих диэлектриках, используемых в практике, емкость проводника тоже постоянна в широких пределах изменения заряда.

Единица емкости

$$[C] = \text{кулон/вольт} = \text{фарад (Ф)}.$$

Фарад — очень крупная единица емкости, поэтому в практических расчетах часто выражают емкость в долях фарада — микрофарадах (мкФ) и пикофарадах (пФ):  $1 \text{ Ф} = 10^6 \text{ мкФ} = 10^{12} \text{ пФ}$ .

В системе заряженных проводников на заряд и потенциал каждого проводника влияют форма, расположение и величина зарядов других проводников. В этом случае применяется понятие о емкости системы проводников, например о емкости конденсатора (см. 1.2).

Проводники конденсатора, имея равные по величине, но противоположные по знаку заряды (см. рис. 1.6, а), имеют разные потенциалы  $V_1$  и  $V_2$ . Следовательно, между проводниками имеется напряжение  $U = V_1 - V_2$ . Тогда

$$C = Q / (V_1 - V_2) = Q / U_{1,2}, \quad (7.28)$$

т. е. емкость электрического конденсатора характеризуется величиной заряда, который нужно сообщить одному из проводников конденсатора, чтобы напряжение между заряженными проводниками изменилось на единицу.

Емкость конденсатора зависит от формы и размеров обкладок, расстояния и свойств среды между обкладками.

Проводимость диэлектриков, используемых для заполнения пространства между обкладками конденсатора, ничтожно мала. Поэтому конденсаторы могут служить для накопления и сохранения электрического поля и его энергии.

## Емкость плоского конденсатора

Конденсатор называется *плоским*, если его обкладками являются две плоскопараллельные металлические пластины (см. рис. 1.6, а).

Обычно расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, поэтому электрическое поле плоского конденсатора можно считать равномерным.

Для определения емкости воспользуемся формулой (7.12), в которой электрическую постоянную  $\epsilon_0$  заменим диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_a$  диэлектрика. С учетом формулы (1.5) получим

$$E = \sigma / \epsilon_a = U / l.$$

Умножим обе части равенства на  $S$  — площадь одной пластины

$$\sigma S / \epsilon_a = US / l = Q / \epsilon_a.$$

Емкость плоского конденсатора

$$C = Q / U = \epsilon_a S / l. \quad (7.29)$$

## Емкость цилиндрического конденсатора

Обкладками цилиндрического конденсатора служат две цилиндрические поверхности, оси которых совпадают (рис. 7.11). Электрическое поле неравномерное, но имеет радиальную симметрию.

Полагая и в этом случае расстояние между обкладками малым по сравнению с длиной конденсатора, т. е. пренебрегая искажением поля у его краев, для определения емкости используем выводы 7.2 [см. формулу (7.14)]. Обозначим радиусы обкладок: внутренней —  $r_1$ , внешней —  $r_2$ ; потенциалы —  $V_1$  и  $V_2$ . Потенциал внутренней обкладки  $V_1$  можно найти, если к потенциалу  $V_2$  прибавить работу по перемещению заряженных частиц между обкладками конденсатора, отнесенную к единице заряда.

Напряженность электрического поля на пути между обкладками не постоянна, поэтому работу определим как сумму работ на элементарных участках пути  $dr$ , столь малых, что в пределах таких участков напряженность поля можно считать постоянной:

$$V_1 = V_2 + \int_{r_1}^{r_2} E dr = V_2 + \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q dr}{2\pi\epsilon_a r} = V_2 + \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Напряжение между обкладками

$$U = V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (7.30)$$

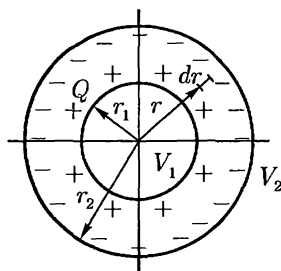


Рис. 7.11

## Емкость двухпроводной линии

Определим емкость двухпроводной линии, у которой радиус проводов  $r_0$ , расстояние между осями проводов  $a$ , длина проводов  $l$ , напряжение между проводами  $U$ , а заряд этой системы проводов  $Q$  (рис. 7.12).

При  $a \gg r_0$  будем полагать, что заряд каждого провода распределен равномерно по его поверхности. Это значит, что взаимное влияние проводов на распределение зарядов по поверхности не учитывается.

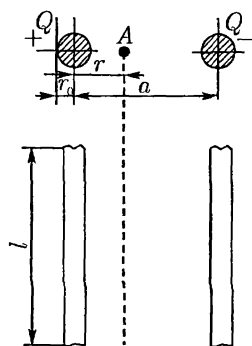


Рис. 7.12

Для определения разности потенциалов между проводами воспользуемся формулой (7.14). В некоторой точке А, находящейся между проводами в плоскости, проведенной через их оси, напряженность поля:

первого провода

$$E_1 = \frac{Q}{2\pi r l \epsilon_a};$$

второго провода

$$E_2 = \frac{Q}{2\pi(a-r)l \epsilon_a}.$$

Заряды проводов имеют противоположные знаки, поэтому между проводами векторы  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  направлены в одну сторону. Общая напряженность поля в точке А

$$E = E_1 + E_2 = \frac{a}{2\pi l \epsilon_a} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{a-r} \right).$$

Напряженность поля зависит от расстояния  $r$ , поэтому напряжение между проводами

$$U = \int_{r_0}^{a-r_0} E dr = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_a} \left[ \int_{r_0}^{a-r_0} \frac{1}{r} dr + \int_{r_0}^{a-r_0} \frac{dr}{a-r} \right];$$

$$U = \frac{Q}{\pi l \epsilon_a} \ln \frac{a-r_0}{r_0}.$$

Учитывая, что  $a \gg r_0$ , напряжение между проводами

$$U = \frac{Q}{\pi l \epsilon_a} \ln \frac{a}{r_0}.$$

Емкость двухпроводной линии

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi l \epsilon_a}{\ln \frac{a}{r_0}}. \quad (7.31)$$

### Задачи

**Задача 7.8.** Определить емкость и заряд плоского воздушного конденсатора, у которого площадь обкладки  $S = 100 \text{ см}^2$ , расстояние между обкладками  $l = 5 \text{ мм}$ , напряжение между обкладками  $U = 100 \text{ В}$ .

Решение.

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{l} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-3}} = 17,7 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 17,7 \text{ пФ};$$

$$Q = CU = 17,7 \cdot 10^{-12} \cdot 100 = 17,7 \cdot 10^{-10} \text{ Кл.}$$

**Задача 7.9.** Определить емкость цилиндрического воздушного конденсатора, имеющего радиусы обкладок  $r_1 = 40$  мм,  $r_2 = 50$  мм и длину  $l = 0,5$  м.

Решение.

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 0,5}{36\pi \ln \frac{50}{40}} = 0,125 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 125 \text{ пФ.}$$

**Задача 7.10.** Как изменится емкость плоского конденсатора задачи 7.8, если расстояние между обкладками уменьшить в два раза (т.е. сделать  $l = 2,5$  мм)? Как это изменение повлияет на допустимое рабочее напряжение конденсатора?

**Задача 7.11.** Как изменится емкость плоского конденсатора, если площадь обкладок  $S$  увеличить в 10 раз (т.е.  $S = 100 \text{ см}^2$ )? Для каких конденсаторов (воздушных, слюдяных, бумажных) это изменение вызовет значительное, а для каких незначительное изменение размеров конденсатора?

## 7.5. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ ДИЭЛЕКТРИКА

Диэлектрик, разделяющий проводники с разными электрическими потенциалами (электроизоляция), находится в электрическом поле и несет электрическую нагрузку, величина которой ограничена электрической прочностью диэлектрика.

В электрических устройствах электрическую изоляцию часто выполняют из нескольких диэлектриков с различной диэлектрической проницаемостью. Например, обмотки силового трансформатора, изолированные хлопчатобумажной изоляцией, погружают в трансформаторное масло, которое также является изолятором и одновременно охлаждающей средой. Между обмотками устанавливаются барьеры из электротехнического картона.

Таким образом, электрическая изоляция, имеющая различные конструктивные формы, должна быть не только сконструирована, но и рассчитана на электрическую прочность.

## Пробивная напряженность

Напряженность электрического поля в диэлектрике зависит, как уже известно, от напряжения между проводниками (электродами),



расстояния между ними, формы и размеров электродов, свойств диэлектрика.

При увеличении напряженности электрического поля, т.е. увеличении электрической нагрузки изоляции, наступает в конце концов разрушение диэлектрика (пробой).

Величина напряженности электрического поля, при которой начинается пробой диэлектрика и изоляционные свойства его нарушаются, называют пробивной напряженностью или электрической прочностью диэлектрика.

Отношение электрической прочности к действительной величине напряженности поля называют запасом прочности:

$$K = E_{\text{пр}}/E. \quad (7.32)$$

### Изменение электрического поля на границе двух диэлектриков

Рассмотрим плоский конденсатор, между обкладками которого имеется два слоя диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_{r1}$  и  $\epsilon_{r2}$  (рис. 7.13).

Величина и направление вектора напряженности электрического поля на границе раздела диэлектриков изменяются тем больше, чем больше отличаются их диэлектрические проницаемости.

Плоскость раздела диэлектриков параллельна плоскости обкладок. В этом случае линии напряженности поля перпендикулярны плоскости раздела, т.е. в обоих диэлектриках их направления совпадают. На основании теоремы Гаусса напишем выражения для электрического смещения в диэлектриках:

$$\epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1 S = D_1 S = Q_0 = \sigma S;$$

$$\epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2 S = D_2 S = Q_0 = \sigma S.$$

Как видно, при направлении поля, перпендикулярном плоскости раздела диэлектриков, электрическое смещение в обоих диэлектриках одинаково; численно оно равно поверхностной плотности заряда обкладок конденсатора

$$D_1 = D_2 = \sigma. \quad (7.33)$$

Нетрудно убедиться в том, что напряженность поля в обоих диэлектриках не будет одинакова:

$$\epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2 \quad (7.34)$$

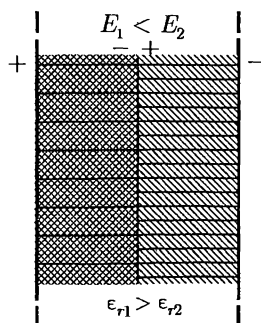


Рис. 7.13

или

$$E_1 / E_2 = \epsilon_{r2} / \epsilon_{r1}. \quad (7.35)$$

Напряженность поля больше в диэлектрике с меньшей диэлектрической проницаемостью.

Скачкообразное изменение напряженности поля на границе раздела двух диэлектриков, имеющих разные диэлектрические проницаемости, физически объясняется тем, что вследствие разной поляризованности диэлектриков на границе образуется избыточный связанный заряд плотностью  $\sigma_{\text{св}} = P_2 - P_1$ ; это приводит к усилению поля в одном диэлектрике и ослаблению в другом.

Наличие заряда на границе раздела диэлектриков дает основание считать конденсатор с двумя или несколькими слоями составленным из двух или нескольких конденсаторов (см. последовательное соединение в 7.6).

Устройство изоляции из нескольких слоев различных диэлектриков в неравномерном электрическом поле позволяет в определенной мере выровнять напряженность электрического поля и тем создать более благоприятные условия для работы изоляции и сократить ее размеры.

### Задачи

**Задача 7.12.** Между обкладками плоского воздушного конденсатора, имеющими площадь  $S = 1800 \text{ см}^2$  и напряжение  $U_0 = 1,2 \text{ кВ}$ , расстояние  $l$  составляет  $0,5 \text{ см}$ . Определить напряженность электрического поля и заряд конденсатора. Как изменятся эти величины, если конденсатор отключить от источника напряжения, а пространство между обкладками заполнить парафином ( $\epsilon_r = 2$ )?

**Решение.** Напряженность электрического поля плоского конденсатора определяется отношением напряжения к расстоянию между обкладками [см. формулу (1.5)]:

$$E_0 = \frac{U_0}{l} = \frac{1200}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 24 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

Для определения заряда найдем емкость конденсатора по формуле (7.29)

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{l} = \frac{10^{-9} \cdot 1800 \cdot 10^{-4}}{36\pi \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} = 0,318 \cdot 10^{-9} \text{ Ф;}$$

заряд  $Q_0 = C_0 U_0 = 0,318 \cdot 10^{-9} \cdot 1200 = 3,82 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$ .

После отключения конденсатора от источника напряжения заряд  $Q$  сохраняется неизменным и в том случае, если воздух как диэлектрик между пластинами заменить парафином. При этом предполагается, что утечки заряда нет.

Емкость конденсатора с парафином будет уже другой, так как в формулу (7.29) вместо  $\epsilon_0$  должна быть подставлена величина  $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r$  [см. формулу (7.26)]

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{l} = 2C_0 = 0,636 \cdot 10^{-9} \text{ Ф.}$$

При этом же заряде  $Q_0$  и увеличении емкости напряжение между обкладками уменьшится

$$U = \frac{Q_0}{C} = \frac{3,82 \cdot 10^{-7}}{0,636 \cdot 10^{-9}} = 600 \text{ В.}$$

Напряженность поля также уменьшится

$$E = \frac{U}{l} = \frac{600}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 12 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

**Вывод.** При замене диэлектрика заряд конденсатора, отключенного от источника напряжения, сохраняется неизменным; напряжение между обкладками и напряженность поля изменяются обратно пропорционально относительной диэлектрической проницаемости.

**Задача 7.13.** Решить задачу 7.12 при условии, что конденсатор остается подключенным к источнику напряжения.

**Решение.** Если конденсатор после замены диэлектрика остается подключенным к источнику напряжения, то напряженность поля при любом диэлектрике остается неизменной (геометрические размеры конденсатора также не изменились)

$$E_0 = E = \frac{U_0}{l} = \frac{1200}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 24 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

Изменение емкости конденсатора (в данном случае увеличение в два раза) приведет к увеличению заряда в два раза:

$$Q = CU_0 = 0,636 \cdot 10^{-9} \cdot 1200 = 7,64 \cdot 10^{-7} \text{ Кл.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Сформулируйте вывод, следующий из решения задачи 7.13.
2. Дайте физическое объяснение увеличению заряда конденсатора после замены одного диэлектрика другим.

**Задача 7.14.** Цилиндрический воздушный конденсатор длиной  $l = 20$  см, радиусом внутреннего цилиндра  $r_1 = 0,5$  см и внешнего  $r_2 = 2,5$  см включен на напряжение 20 кВ. Определить заряд конденсатора, минимальную и максимальную напряженности электрического поля. Как изменятся эти величины, если конденсатор отключить от источника напряжения, а в пространство между обкладками вставить стеклянную трубочку толщиной 2 см ( $\epsilon_r = 5$ )?

**Задача 7.15.** Решить задачу 7.14 при условии, что конденсатор от источника напряжения не отключается.

**Задача 7.16.** Плоский воздушный конденсатор находится под напряжением 20 кВ. Расстояние между обкладками равно 2 см, площадь обкладок 200 см<sup>2</sup>. Определить емкость, запас электрической прочности конденсатора, если электрическая прочность воздуха 30 кВ/см.

Определить емкость конденсатора, распределение напряжения между слоями и запас электрической прочности, если, не отключая конденсатора от источника заряда, в воздушный промежуток между обкладками параллельно им внести лист стекла толщиной 0,5 см (рис. 7.14) с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r = 7$ . Электрическая прочность стекла больше, чем воздуха.

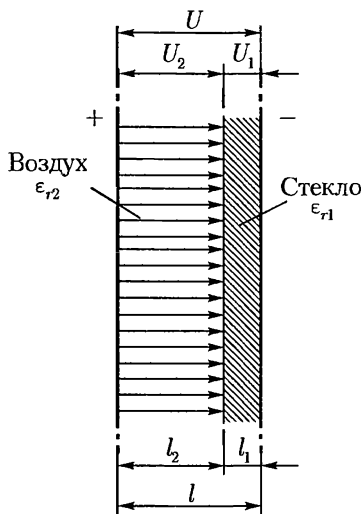


Рис. 7.14

**Решение.** Напряженность электрического поля воздушного конденсатора [(см. формулу (1.5)]

$$E_0 = \frac{U}{l} = \frac{20\,000}{2 \cdot 10^{-2}} = 10^6 \text{ В/м} = 10 \text{ кВ/см.}$$

Запас прочности

$$K = E_{\text{пр}} / E_0 = 30 / 10 = 3.$$

После внесения в воздушный промежуток стекла найдем распределение напряжения между слоями, имея в виду, что общее напряжение конденсатора равно сумме напряжений слоев

$$U = U_1 + U_2 = l_1 E_1 + l_2 E_2,$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — толщина слоев.

Согласно формулам (7.33) и (7.25),

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}; \quad E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}};$$

$$U = \frac{\sigma l_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} + \frac{\sigma l_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \sigma \frac{l_1 \epsilon_{r2} + l_2 \epsilon_{r1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}.$$

Отсюда

$$E_1 = \frac{\epsilon_{r2} U}{l_1 \epsilon_{r2} + l_2 \epsilon_{r1}}; \quad E_2 = \frac{\epsilon_{r1} U}{l_1 \epsilon_{r2} + l_2 \epsilon_{r1}};$$

$$E_1 = \frac{1 \cdot 20 \cdot 10^3}{(0,5 \cdot 1 + 1,5 \cdot 7) \cdot 10^{-2}} = 182 \cdot 10^3 \text{ В/м};$$

$$E_2 = \frac{7 \cdot 20 \cdot 10^3}{(0,5 \cdot 1 + 1,5 \cdot 7) \cdot 10^{-2}} = 1273 \cdot 10^3 \text{ В/м};$$

$$U_1 = E_1 l_1 = 182 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} = 910 \text{ В};$$

$$U_2 = E_2 l_2 = 1273 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} = 19\,090 \text{ В}.$$

Запас электрической прочности конденсатора определяется по менее электрически прочному диэлектрику, в данном случае воздуху

$$K = E_{\text{пр}} / E_2 = 30 / 12,73 = 2,35.$$

Таким образом, при внесении в воздушный промежуток стекла запас электрической прочности конденсатора уменьшился, несмотря на то, что электрическая прочность стекла сама по себе больше, чем воздуха.

Емкость воздушного конденсатора

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{l} = \frac{10^{-9} \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 9 \cdot 0,02} = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 8,8 \text{ пФ}.$$

Емкость конденсатора после внесения стекла определим из выражения, полученного раньше для напряжения на конденсаторе, умножив и разделив правую его часть на  $S$ :

$$U = \frac{\sigma S}{S} \frac{l_1 \epsilon_{r2} + l_2 \epsilon_{r1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}},$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} S}{l_1 \epsilon_{r2} + l_2 \epsilon_{r1}} = \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 9} \frac{7 \cdot 1 \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{(0,5 \cdot 1 + 1,5 \cdot 7) \cdot 10^{-2}} = 11,25 \text{ пФ}.$$

**Задача 7.17.** Решить задачу 7.16, приняв толщину листа стекла равной 1,5 см.

## 7.6. СОЕДИНЕНИЯ КОНДЕНСАТОРОВ

Система заряженных проводников может содержать не два, а больше проводников. Каждая пара проводников, полностью изолированных друг от друга, характеризуется электрической емкостью.

Практический интерес обычно представляет вопрос о распределении заряда и потенциалов в системе проводников, когда она заряжена от источника постоянного напряжения. Во многих случаях системы заряженных проводников по отношению к источнику можно рассматривать как последовательное, параллельное или смешанное соединение конденсаторов.

## Последовательное соединение

На рис. 7.15 изображены три конденсатора, соединенные последовательно. К зажимам источника постоянного напряжения (точки 1, 2, 3, 4) присоединены две крайние обкладки последовательной цепочки конденсаторов, другие обкладки с источником непосредственно не соединяются и заряжаются вследствие электростатической индукции. Поэтому заряд всех конденсаторов и каждого в отдельности один и тот же:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_n. \quad (7.36)$$

Для упрощения расчетов можно группу конденсаторов заменить одним с эквивалентной емкостью.

Напряжение на эквивалентном конденсаторе равно общему напряжению группы последовательно соединенных конденсаторов:

$$U_1 + U_2 + U_3 = U.$$

Учитывая (7.28) и (7.36), получим

$$Q_1/C_1 + Q_2/C_2 + Q_3/C_3 = Q/C;$$

$$1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \dots + 1/C_n = 1/C. \quad (7.37)$$

Если в последовательную цепь соединяются  $n$  конденсаторов одинаковой емкости  $C_n$ , то эквивалентная емкость

$$C = C_n/n. \quad (7.38)$$

## Параллельное соединение

При параллельном соединении все конденсаторы соединены одной обкладкой в общей точке 1, а другой обкладкой — в общей точке 2 (рис. 7.16). К этим точкам подводится напряжение источника. В таком случае группу конденсаторов тоже можно заменить одним с эквивалентной емкостью  $C$ .

Все конденсаторы имеют между обкладками одно и то же напряжение  $U$ , а заряды получаются разными:

$$Q_1 = C_1 U; \quad Q_2 = C_2 U;$$

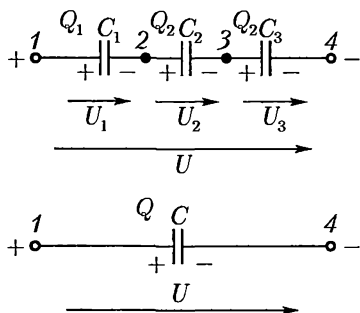
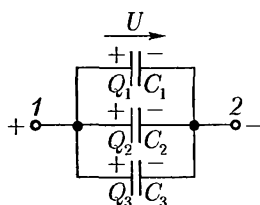


Рис. 7.15



$$Q_3 = C_3 U; Q_n = C_n U. \quad (7.39)$$

Каждый конденсатор получает заряд независимо от другого, поэтому общий заряд равен сумме зарядов конденсаторов:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n = Q.$$

Подставляя сюда выражения зарядов (7.39) и сокращая на  $U$ , получим

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = C. \quad (7.40)$$

Рис. 7.16

Эквивалентная емкость равна сумме емкостей. При параллельном соединении  $n$  конденсаторов одинаковой емкости  $C_n$  эквивалентная емкость

$$C = n C_n. \quad (7.41)$$

Как видим, параллельное соединение конденсаторов увеличивает эквивалентную емкость батареи этих конденсаторов (7.41), а последовательное соединение — уменьшает ее.

Однако, при последовательном соединении конденсаторов, напряжение сети, в которую включена батарея этих конденсаторов, распределяется между конденсаторами в зависимости от их емкости. Отсюда следует, что последовательное соединение конденсаторов применяют для того, чтобы напряжение на каждом конденсаторе не превышало его допустимого рабочего напряжения (во избежание пробоя диэлектрика конденсатора).

Смешанное соединение конденсаторов применяют тогда, когда необходимо увеличить емкость батареи и уменьшить напряжение, до допустимого рабочего, на каждом конденсаторе (задача 7.20).

## Задачи

**Задача 7.18.** Определить заряд и напряжение каждого конденсатора в схеме рис. 7.17, а, если емкости их  $C_1 = 8$  мкФ;  $C_2 = 5$  мкФ;  $C_3 = 3$  мкФ, а общее напряжение  $U = 100$  В.

**Решение.** Эквивалентная емкость параллельно включенных конденсаторов  $C_2$  и  $C_3$  равна (рис. 7.17, а):

$$C_{2,3} = C_2 + C_3 = 5 + 3 = 8 \text{ мкФ}.$$

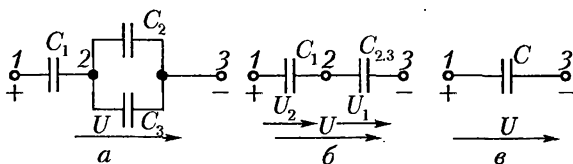


Рис. 7.17

На упрощенной схеме (рис. 7.17, б), видно, что емкости  $C_1$  и  $C_2$  соединены последовательно, поэтому эквивалентная емкость этих конденсаторов:

$$C = \frac{C_1 C_{2.3}}{C_1 + C_{2.3}} = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = 4 \text{ мкФ. } \left( \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{2.3}} = \frac{C_{2.3} + C_1}{C_1 C_{2.3}} \right)$$

Общий заряд системы конденсаторов в схеме рис. 7.17, а:

$$Q = CU = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

Такой же заряд имеет место на последовательно включенных конденсаторах  $C_1$  и  $C_{2.3}$ , т.е.

$$Q_1 = Q_{2.3} = Q = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

Тогда напряжение на конденсаторах:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^{-6}} = 50 \text{ В; } U_2 = \frac{Q_{2.3}}{C_{2.3}} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^{-6}} = 50 \text{ В.}$$

Следовательно, заряды конденсаторов  $C_2$  и  $C_3$ :

$$Q_2 = C_2 U_2 = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл;}$$

$$Q_3 = C_3 U_3 = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

**Задача 7.19.** Определить емкость каждого конденсатора в цепи рис. 7.17, а, если общий заряд цепи  $Q = 1$  Кл при напряжении  $U = 220$  В, а заряд третьего конденсатора  $Q_3 = 0,4$  Кл, при напряжении  $U_2 = 40$  В.

**Решение.** Эквивалентная емкость цепи:

$$C = Q / U = 1 / 220 = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ Ф.}$$

Емкость третьего конденсатора:

$$C_3 = Q_3 / U_3 = 0,4 / 40 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Ф.}$$

Заряд, напряжение и емкость первого конденсатора:

$$Q_1 = Q = 1 \text{ Кл; } U_1 = U - U_2 = 200 - 40 = 160 \text{ В;}$$

$$C_1 = Q_1 / U_1 = 1 / 160 = 0,625 \cdot 10^{-2} \text{ Ф.}$$

**Задача 7.20.** В цепи с напряжением 380 В необходимо обеспечить емкость  $C = 10$  мкФ. На складе имеются конденсаторы емкостью  $C' = 2$  мкФ, рассчитанные на рабочее напряжение  $U_p = 100$  В каждый. Сколько конденсаторов нужно получить на складе и как их соединить?



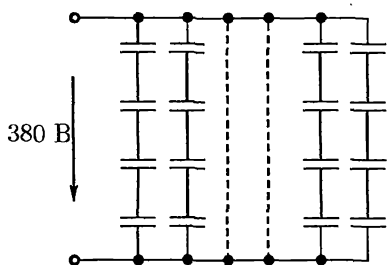


Рис. 7.18

Решение. На напряжение 380 В необходимо включить последовательно четыре конденсатора, рассчитанные на напряжение 100 В каждый, т. е.

$$n_{\text{послед}} = 380/100 = 3,8 \approx 4.$$

Емкость четырех последовательно включенных конденсаторов:

$$C_{\text{послед}} = C'/n_{\text{послед}} = 2/4 = 0,5 \text{ мкФ}.$$

Следовательно, для обеспечения емкости  $C = 10 \text{ мкФ}$  необходимо включить параллельно  $n_{\text{парал}} = C/C_{\text{послед}} = 10/0,5 = 20$  таких последовательно соединенных групп конденсаторов (рис. 7.18).

Таким образом, на складе необходимо получить 80 конденсаторов, т. е.

$$n = n_{\text{послед}} \cdot n_{\text{парал}} = 4 \cdot 20 = 80,$$

и включить их по схеме рис. 7.18.

## ГЛАВА 8

# МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Магнитное поле окружает движущиеся элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом, и связано с ними. В проводнике с током и пространстве вокруг него магнитное поле создается этим током, а внутри и вне намагниченного тела (постоянного магнита) — внутриатомным и внутримолекулярным движением элементарных заряженных частиц (например, вращением электронов вокруг собственной оси и ядра атома).

Магнитное поле характеризуется воздействием на движущуюся электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и ее скорости.

### 8.1. ЗАКОН АМПЕРА. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Магнитное поле обнаруживается благодаря магнитным явлениям: притяжению и отталкиванию проводов с токами или намагниченных тел, действию проводника с током на магнитную стрелку, электромагнитной индукции.

В основе этих явлений лежит характерное свойство магнитного поля — силовое действие на движущиеся заряженные частицы. Силы взаимодействия магнитного поля с движущимися заряженными частицами (токами) называются **э л е к т р о м а г н и т н ы м и**.

Изучение магнитных явлений и расчеты, связанные с их использованием, невозможны без количественной оценки магнитного поля.

Выбирая необходимую для этого величину, можно исходить из силового взаимодействия двух проводов с токами.

### Закон Ампера

Опыт показывает, что на каждый из двух проводов действуют силы, притягивающие друг к другу провода с одинаковым направлением токов и отталкивающие провода с противоположными направлениями токов (рис. 8.1).

Магнитные поля, обусловленные каждым из токов, распределены в одной и той же области пространства. Поэтому в соответствии с

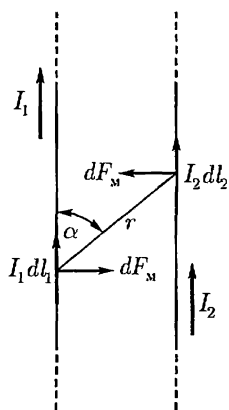


Рис. 8.1

принципом наложения можно полагать, что оба провода окружены общим магнитным полем, которое получается в результате наложения двух полей. Каждое поле связано со своим током, когда соответствующий провод уединен.

В таком случае притяжение или отталкивание проводов нужно рассматривать как результат силового действия общего магнитного поля на заряженные частицы, образующие ток в каждом из проводов. Количественные соотношения для этого случая определены законом Ампера, согласно которому силовое действие магнитного поля на движущиеся заряженные частицы рассматривается как взаимодействие двух элементов тока.

**Сила взаимодействия между двумя элементами тока в вакууме пропорциональна произведению элементов тока и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.**

Элементом тока называется произведение  $I dl$ , где  $dl$  — длина участка провода с током  $I$ , весьма малая (так же как и диаметр провода) по сравнению с расстоянием от него до точек, в которых рассматривается магнитное поле тока  $I$ .

Если элементы тока расположены параллельно, то сила взаимодействия между ними

$$dF_m = \frac{\mu_0 I_1 dl_1 I_2 dl_2 \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (8.1)$$

где  $I_1 dl_1$ ,  $I_2 dl_2$  — элементы токов;  $r$  — расстояние между элементами;  $\alpha$  — угол между направлением одного из элементов тока и отрезком прямой  $r$ , проведенным от этого элемента к другому;  $\mu_0 / 4\pi$  — коэффициент пропорциональности, величина которого определяется в зависимости от системы единиц. Числитель этого коэффициента  $\mu_0$  называется магнитной постоянной.

В Международной системе единиц (СИ) магнитная постоянная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{генри}}{\text{метр}} \quad (\text{Гн/м});$$

$$\text{генри} = \frac{\text{вольт-секунда}}{\text{ампер}} \text{ — единица индуктивности (см. 8.5).}$$

Заметим, что формула (8.1) и последующие формулы, относящиеся к магнитному полю в вакууме, справедливы и для магнитного поля в воздухе. Вопрос о применении их для других сред подробно рассмотрен в 8.7.

## Магнитная индукция

Предположим, что элемент линейного тока  $I_2 dl_2$  столь мал, что его поле практически не изменяет поле тока  $I_1$ . Тогда этот элемент линейного тока можно рассматривать как пробный, служащий лишь для регистрации электромагнитной силы, которая в этом случае является результатом действия магнитного поля первого тока на пробный элемент линейного тока.

Значение тока  $I_1$  определяет интенсивность магнитного поля: чем больше ток, тем «сильнее» его магнитное поле.

Для оценки интенсивности магнитного поля введено понятие магнитной индукции  $B$ .

**Магнитная индукция — векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля.**

В численном выражении магнитная индукция равна отношению силы, действующей на заряженную частицу, к произведению заряда  $Q$  и скорости частицы  $v$ , направленной так, что эта сила максимальна

$$B = F_m / Qv. \quad (8.2)$$

Направление вектора магнитной индукции перпендикулярно векторам силы и скорости и совпадает с поступательным перемещением правого винта (или буравчика), если вращать его в направлении от вектора силы к вектору скорости частицы с положительным зарядом.

За некоторое время  $dt$ , согласно (2.2), заряд  $Qv = Idt$ , а скорость  $v = \frac{dl}{dt}$ , поэтому  $Qv = Idl$  — элемент тока.

Из формулы (8.1) следует

$$dB = \frac{dF_m}{I_2 dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 dl_1}{4\pi r^2} \sin \alpha. \quad (8.3)$$

Магнитное поле в окружающем проводник пространстве создается не только выбранным элементом тока, но и другими элементами, на которые может быть разделен реальный проводник (рис. 8.2).

Магнитная индукция  $B$  в данной точке является векторной суммой элементарных векторов  $dB$ .

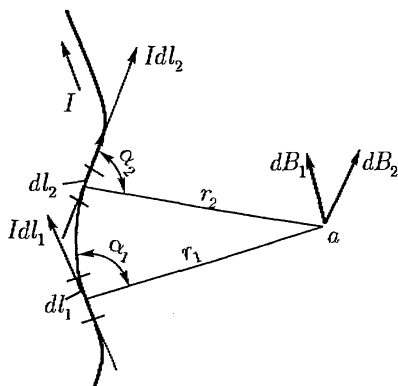


Рис. 8.2

Формула (8.3), по которой определяется элементарная магнитная индукция, является математическим выражением закона Био—Савара.

Из нее следует единица измерения магнитной индукции:

$$[dB] = \left[ \frac{dF_m}{I_2 dl_2} \right] \approx \frac{\text{ньютон}}{\text{ампер} \cdot \text{метр}} = \frac{\text{вебер}}{\text{метр}^2} = \text{тесла (Тл)}.$$

В расчетах применяется также единица магнитной индукции — гаусс (Гс) ( $1 \text{ Гс} = 10^{-4} \text{ Тл}$ ).

### Линии магнитной индукции

Графически магнитное поле можно изобразить с помощью линий магнитной индукции.

Линию магнитной индукции проводят так, чтобы в каждой точке этой линии касательная к ней совпадала с вектором магнитной индукции.

Пользуясь этим правилом, можно изобразить магнитное поле для различных случаев.

Магнитное поле тока прямолинейного провода имеет линии магнитной индукции в виде окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных направлению тока, с центром на оси провода (рис. 8.3).

Направление магнитной индукции в этом случае определяется с помощью правила буравчика: *если направление поступательного движения буравчика совместить с направлением тока в проводе, то вращение рукоятки покажет направление линий магнитной индукции.*

Большой практический интерес представляет картина магнитного поля тока катушек, так как во многих электротехнических устройствах (трансформаторах, электрических машинах, электромагнитных реле и т. д.) магнитное поле создается токами в катушках различной формы. Магнитное поле тока цилиндрической катушки

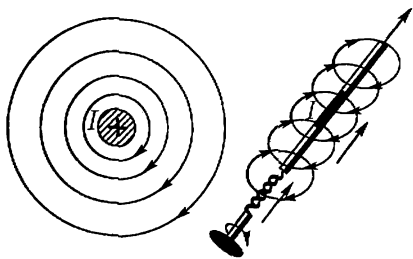


Рис. 8.3

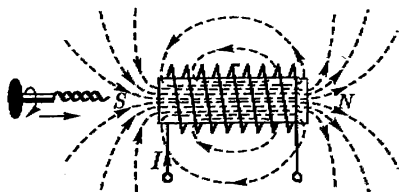


Рис. 8.4

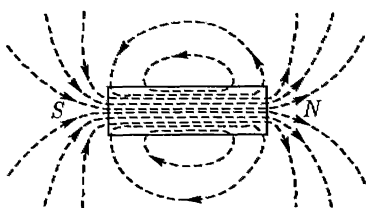


Рис. 8.5

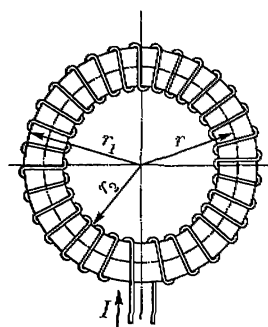


Рис. 8.6

изображено на рис. 8.4. Если длина катушки значительно больше ее диаметра, то линии магнитной индукции имеют внутри катушки одинаковое направление (вдоль оси катушки) и величина магнитной индукции во всех точках одинакова, за исключением точек, расположенных у краев.

*Магнитное поле, имеющее во всех точках одинаковую по величине и направлению магнитную индукцию, называется однородным (равномерным).*

По форме магнитного поля цилиндрическая катушка подобна постоянному магниту кругового сечения (рис. 8.5). На конце катушки, где линии магнитной индукции выходят из нее, образуется северный полюс, а на противоположном конце — южный.

Кольцевая катушка с обмоткой на тороидальном сердечнике (рис. 8.6) создает магнитное поле только внутри витков. Направление линий индукции магнитного поля тока катушки или контура тоже определяется правилом буравчика, но в другой формулировке: *если рукоятку буравчика вращать по направлению тока в витках, то поступательное перемещение буравчика совпадает с направлением линий магнитной индукции внутри катушки.*

С помощью линий магнитной индукции можно выразить не только направление магнитного поля, но и величину магнитной индукции, подобно тому, как это делается при исследовании электрического поля (см. 1.1).

Неравномерное магнитное поле изображается замкнутыми линиями, проведенными с неодинаковой плотностью в различных областях.

В отличие от линий напряженности электростатического поля, которые начинаются на положительных, а заканчиваются на отрицательных заряженных телах или уходят в бесконечность, линии индукции магнитного поля всегда замкнуты на себя, т. е. не имеют ни начала, ни конца.

## Проводник с током в магнитном поле

Большой практический интерес представляет сила, действующая на проводник с током в равномерном магнитном поле. На рис. 8.7 показан прямолинейный провод в пространстве между полюсами постоянного магнита или электромагнита (катушки со стальным сердечником), расположенный так, что между направлениями вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и тока в проводе  $I$  угол  $\alpha = 90^\circ$ .

В равномерном магнитном поле на элемент длины провода в любом месте действует одинаковая электромагнитная сила, поэтому на основании формул (8.2) и (8.3) можно записать выражение силы, действующей на часть провода, расположенную в пределах магнитного поля:

$$F_m = BIl, \quad (8.4)$$

где  $B$  — магнитная индукция, Тл;  $I$  — ток в проводе;  $A$ ;  $l$  — длина части провода, расположенной в магнитном поле, м;  $F_m$  — электромагнитная сила, Н.

Если провод располагается так, что между направлениями вектора магнитной индукции поля и тока в проводе угол  $\alpha \neq 90^\circ$ , то электромагнитная сила определяется той же формулой (8.4), но вместо полной длины провода берется ее проекция на направление, перпендикулярное направлению поля:

$$F_m = BIl \sin \alpha. \quad (8.5)$$

На провод с током, расположенный вдоль линий магнитной индукции, магнитное поле не действует.

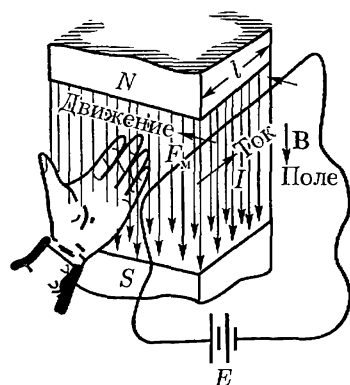


Рис. 8.7

Сила  $F_m$  направлена всегда перпендикулярно плоскости, в которой лежит провод и находятся линии магнитной индукции. Направление электромагнитной силы наиболее удобно определять по правилу левой руки: если расположить левую руку так, чтобы вытянутые четыре пальца (кроме большого) показывали направление тока в проводе, а линии магнитной индукции «входили» в ладонь, то большой палец, отогнутый перпендикулярно остальным четырем, покажет направление электромагнитной силы.

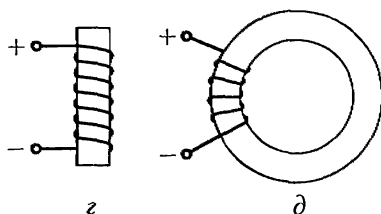
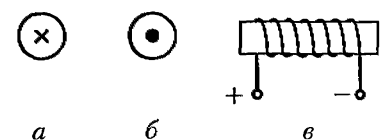


Рис. 8.8

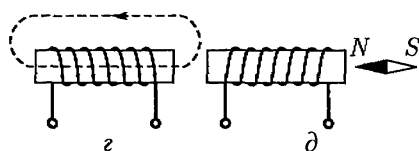
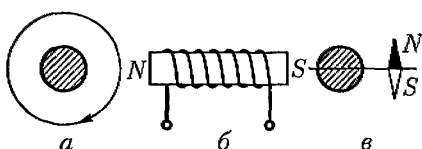


Рис. 8.9

## Задачи

**Задача 8.1.** Из выражения (8.1) найти размерность магнитной постоянной  $\mu_0$ .

**Задача 8.2.** Определить направление линий магнитной индукции в случаях, изображенных на рис. 8.8, а — д; направление тока в случаях, показанных на рис. 8.9, а — д.

**Задача 8.3.** В равномерное магнитное поле с индукцией  $B = 1,2$  Тл помещен прямолинейный проводник длиной  $l = 80$  см с током  $I = 20$  А. Определить силу, действующую на проводник, если он расположен перпендикулярно направлению линий магнитной индукции.

**Решение.** Подставим в формулу (8.5) заданные величины, от которых зависит сила:  $F_m = BIl \sin \alpha = 1,2 \cdot 20 \cdot 0,8 \sin 90^\circ = 19,2$  Н.

## Дополнительные вопросы к задаче

1. Как изменится сила, действующая на проводник, если его расположить к под углом  $60^\circ$  и  $30^\circ$  к направлению линий магнитной индукции?

2. Какой ток нужно создать в проводнике, чтобы при угле  $\alpha = 60^\circ$  сила оставалась такой же, какая найдена по условию основной задачи?

3. При каком значении магнитной индукции сила увеличится в два раза по сравнению с силой, действующей на проводник, при  $\alpha = 60^\circ$  и прочих величинах, заданных в условии задачи?

## 8.2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАКОНА БИО — САВАРА

Определим с помощью закона Био — Савара магнитную индукцию и напряженность магнитного поля в ряде конкретных случаев.



## Поле кругового тока

На рис. 8.10 изображен кольцевой провод (виток) с током  $I$ . Требуется определить индукцию магнитного поля в центре этого витка (точка  $O$ ).

Согласно закону Био—Савара [см. формулу (8.3)], каждый элемент тока создает в точке  $O$  магнитную индукцию

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}.$$

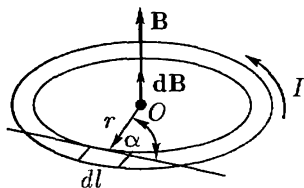


Рис. 8.10

При этом имеется в виду, что угол  $\alpha = 90^\circ$  и составляющие результирующей магнитной индукции  $B$  в центре витка от каждого элемента имеют одно и то же направление, перпендикулярное плоскости витка.

Поэтому

$$B = \oint dB = \oint \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}.$$

Постоянные величины вынесем за знак интеграла

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint dl,$$

где  $\oint dl = l = 2\pi r$  — длина витка.

Следовательно,

$$B = \frac{\mu_0 I \cdot 2\pi r}{4\pi r^2},$$

или

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}. \quad (8.6)$$

## Поле прямого тока

Определим индукцию магнитного поля в точке  $A$  (рис. 8.11), если оно создается током  $I$  прямолинейного провода конечной длины.

Элемент длины провода  $dl$  создает в точке  $A$  элементарный вектор магнитной индукции  $dB$  [см. формулу (8.3)]. Для того чтобы найти полную величину магнитной индукции, следует сложить элементарные векторы  $dB$  от всех элементов  $dl$ , из которых состоит длина провода.

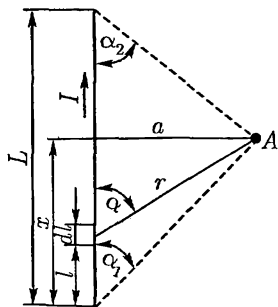


Рис. 8.11

Учитывая, что провод и отрезки  $\tau$ , проведенные от любого элемента провода в точку  $A$ , лежат в одной плоскости, можно заключить, что все векторы  $dB$  в точке  $A$  направлены по одной прямой, перпендикулярной этой плоскости, в данном случае за чертеж.

Поэтому полную величину магнитной индукции можно найти интегрированием

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

Из рис. 8.11 видно, что  $\frac{a}{x-l} = \operatorname{tg} \alpha$ ;  $l = x - a \operatorname{ctg} \alpha$ .

$$\text{Отсюда } dl = \frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Кроме того,

$$a/r = \sin \alpha; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{a^2};$$

$$dB = \frac{\mu_0 I a \sin^2 \alpha}{4\pi \sin^2 \alpha a^2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha.$$

Полная величина магнитной индукции в точке  $A$

$$B = \int_{\alpha_1}^{180^\circ - \alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} - \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{180^\circ - \alpha_2};$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2). \quad (8.7)$$

### Задачи

**Задача 8.4.** В витке, имеющем форму прямоугольника со сторонами  $b = 10$  см и  $c = 20$  см, ток  $I = 10$  А. Определить магнитную индукцию в точке пересечения диагоналей прямоугольника (точка  $A$  на рис. 8.12,  $a$ ).

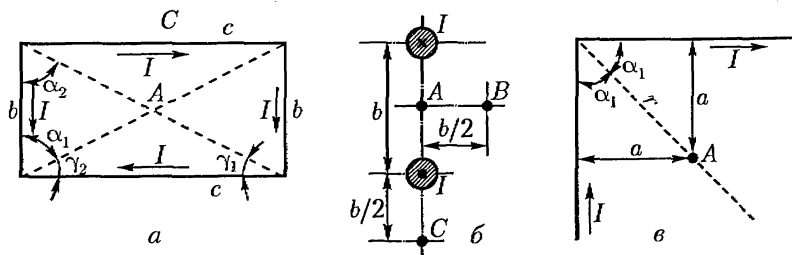


Рис. 8.12

**Решение.** Магнитную индукцию поля прямолинейного провода конечной длины определяют по формуле (8.7).

Подставив в эту формулу обозначения величин по рис. 8.12, *а*, получим выражения для составляющих магнитной индукции. От участков провода, расположенных по сторонам *b*,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{c}{2}} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

В данном случае  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , поэтому

$$B_1 = \frac{\mu_0 I \cos \alpha}{\pi c}.$$

Аналогично, от участков провода, расположенных по сторонам *c*, при  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I \cos \gamma}{\pi b}.$$

Магнитная индукция в точке *A* ( $B_A$ ) складывается из составляющих  $B_1$  (от двух сторон *b*) и  $B_2$  (от двух сторон *c*):  $B_A = 2(B_1 + B_2)$ . При этом учитывается, что по отношению к каждому из двух участков провода *b* или *c* точка *A* расположена одинаково и все составляющие магнитной индукции направлены в одну сторону (по правилу буравчика — за плоскость чертежа):

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{\pi} \left( \frac{\cos \alpha}{c} + \frac{\cos \gamma}{b} \right).$$

Из чертежа следует, что

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Учитывая эти выражения, после преобразования получим

$$B_A = \frac{2\mu_0 I \sqrt{b^2 + c^2}}{\pi bc};$$

$$B_A = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \sqrt{10^2 + 20^2}}{\pi \cdot 10 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 4\sqrt{5} \cdot 10^{-5} = 8,95 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

**Задача 8.5.** Определить магнитную индукцию в точках *A*, *B*, *C*, расположенных так, как показано на рис. 8.12, *б*. Ток в проводах линии  $I = 1000 \text{ А}$ , расстояние между проводами  $b = 40 \text{ см}$ .

**Задача 8.6.** Два участка провода образуют между собой угол  $90^\circ$ , как показано на рис. 8.12, *в*. Определить магнитную индукцию в точках, равноудаленных от обоих участков провода, если ток в нем равен  $I$ .

### 8.3. РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Связь тока с его магнитным полем ранее выражена формулой закона Био — Савара, который можно применять для определения основных характеристик магнитного поля в любом случае. Подобные задачи решаются более просто на основе понятий о циркуляции вектора магнитной индукции и полном токе.

#### Циркуляция вектора магнитной индукции и полный ток

Для выяснения смысла этих понятий в магнитном поле системы токов выберем произвольный замкнутый контур (рис. 8.13). В каждой точке этого контура вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  может иметь любое направление. Обозначим через  $B_l$  проекцию этого вектора на направление элемента длины  $dl$  около выбранной точки контура.

Выражение  $\oint B_l dl$ , взятое по всему замкнутому контуру, называют циркуляцией вектора магнитной индукции по данному контуру.

Алгебраическую сумму токов  $\sum I$ , пронизывающих поверхность, ограниченную контуром, называют **полным током**.

На основе закона Био — Савара можно доказать, что *циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру пропорциональна полному току, пронизывающему поверхность, ограниченную этим контуром* (см. рис. 8.13):

$$\oint_l B_l dl = \mu_0 \sum I. \quad (8.8)$$

Для магнитного поля в вакууме коэффициентом пропорциональности между циркуляцией вектора магнитной индукции и полным током является магнитная постоянная  $\mu_0$ .

При составлении уравнения (8.8) для конкретного случая знак произведения  $B_l dl$  берется положительным, если в данной точке направление  $B_l$  совпадает с направлением обхода контура; знак тока принимается положительным, если направление линий индукции магнитного поля данного тока, определенное по правилу буравчика, совпадает с направлением обхода.

Выражение  $\oint_l B_l dl$  можно представить алгебраической суммой произведений  $B_l dl$ , составленной из бесконечно большого числа слагаемых.

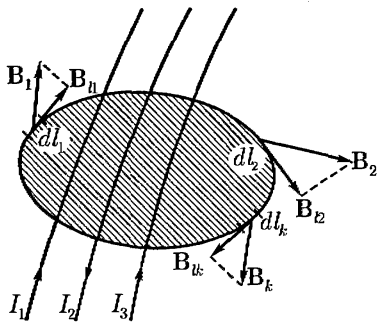


Рис. 8.13

Для рис. 8.13

$$B_{l_1}dl_1 + \dots + B_{l_2}dl_2 + \dots + B_{l_k}dl_k + \dots = (I_1 - I_2 + I_3)\mu_0.$$

Если выбрать контур, совпадающий с линией магнитной индукции, то вместо проекции вектора магнитной индукции  $B_l$  в формулу (8.8) можно подставить полную его величину  $B$ .

В отдельных случаях магнитное поле обладает симметрией, при которой магнитная индукция во всех точках такого контура имеет одинаковое значение. Для этих случаев формула (8.8) имеет более простое выражение.

Вынесем за знак интеграла  $B_l = B$

$$B \oint dl = \mu_0 \sum I,$$

где  $\oint dl = l$  — длина контура; тогда

$$Bl = \mu_0 \sum I. \quad (8.9)$$

Формула (8.8) справедлива для магнитного поля, созданного замкнутыми токами. Ее нельзя применить для определения составляющей магнитной индукции поля, образуемого током на участке провода конечной длины, как это сделано при выводе формулы (8.7) на основании закона Био — Савара.

## Поле прямого тока

Наметим на произвольном расстоянии  $a$  от оси провода точку  $A$  (рис. 8.14,  $a$ ) и проведем через нее замкнутый контур, совпадающий с линией магнитной индукции. Как известно, эта линия — окружность с центром на оси провода. Все точки контура находятся на одинаковом расстоянии от оси провода, поэтому магнитная индукция поля в них имеет одинаковую величину.

Согласно формуле (8.8),

$$B \cdot 2\pi a = \mu_0 I;$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (8.10)$$

Формула (8.10) совпадает с выводами, полученными из закона Био — Савара [см. формулу (8.7)] при  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , равных нулю.

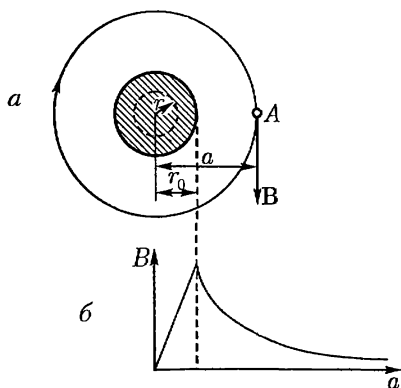


Рис. 8.14

Для определения магнитной индукции поля внутри провода выберем произвольный контур радиуса  $r$  и будем полагать плотность тока во всех точках сечения провода одинаковой и равной

$$J = I/(\pi r_0^2),$$

где  $r_0$  — радиус провода.

Полный ток, пронизывающий часть сечения, ограниченную выбранным контуром, имеет величину

$$\sum I = J\pi r^2 = Jr^2/r_0^2;$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{Ir^2}{r_0^2},$$

отсюда

$$B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi r_0^2}. \quad (8.11)$$

На рис. 8.14, б показан график изменения магнитной индукции внутри и вне линейного провода большой протяженности, построенный по формулам (8.10) и (8.11).

### Поле тока кольцевой катушки

Выберем замкнутый контур, совпадающий с линией магнитной индукции в центре сечения сердечника (см. рис. 8.6). Предполагая намотку витков равномерной, по соображениям симметрии применим формулу (8.9).

Поверхность, ограниченная выбранным контуром, пронизывается током  $I$  столько раз, сколько витков  $N$  имеет катушка, поэтому

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 IN;$$

магнитная индукция

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}. \quad (8.12)$$

Эта формула пригодна для определения магнитной индукции и в других точках, расположенных внутри катушки дальше или ближе к центру, если в них подставить соответствующий радиус.

## Поле тока цилиндрической катушки

Если витки катушки навиты вплотную друг к другу, то при бесконечной ее протяженности все точки на любой линии, параллельной оси, находятся в одинаковых условиях (рис. 8.15).

Магнитная индукция поля внутри катушки во всех точках этой линии одинакова и направлена вдоль оси катушки. Вне катушки магнитного поля нет.

Выделим замкнутый контур  $a-b-e-z$  прямоугольной формы и применим к нему формулу (8.8). При обходе контура нужно учитывать, что на участке  $b-e$  поля нет ( $B = 0$ ); на участках  $a-b$  и  $e-z$  вне катушки поля нет, а внутри катушки магнитная индукция направлена перпендикулярно направлению обхода, поэтому проекция вектора  $\mathbf{B}$  на направление обхода равна нулю. На участке  $z-a$   $B_l = B$ .

Таким образом, циркуляция вектора магнитной индукции имеет величину  $\oint B_l dl = Bl$ .

Полный ток контура  $a-b-e-z$

$$\sum I = IN,$$

где  $N$  — число витков, уложенных на участке длиной  $l$ .

Согласно выражению (8.9),

$$Bl = \mu_0 IN; \quad B = \mu_0 IN/l. \quad (8.13)$$

Из этой формулы следует, что магнитное поле внутри бесконечно длинной катушки равномерно.

Формулу (8.13) можно применить, допуская некоторую погрешность, для определения магнитной индукции цилиндрической катушки конечной длины  $l_k$ , если она значительно больше диаметра витка ( $l_k \gg D$ ):

$$B = \mu_0 IN/l_k. \quad (8.14)$$

Применение закона Био—Савара к цилиндрической катушке конечной длины дает для определения  $B$  в любой точке  $M$  на оси катушки выражение

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2l_k} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2). \quad (8.15)$$

Формулы (8.12)–(8.15), определяющие магнитное поле катушек, имеют в числителе произведение тока и числа витков  $IN$ . Магнитное поле данной интенсивности можно получить

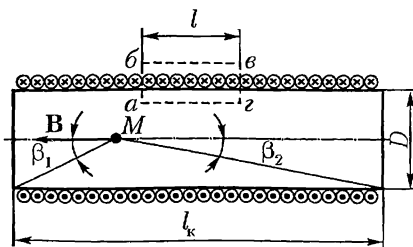


Рис. 8.15

при относительно малом числе витков, но большом токе, или при малом токе, но относительно большом числе витков.

Это дает основание при расчете магнитных полей пользоваться произведением  $IN$  как единой величиной, которая называется **намагничивающей силой**. В практике эту величину называют также **ампер-витками**.

### Задачи

**Задача 8.7.** В обмотке цилиндрической катушки, имеющей длину  $l = 20$  см, диаметр витка  $D = 4$  см, число витков  $N = 500$ , ток  $I = 20$  А, определить индукцию магнитного поля на оси катушки по формулам (8.14) и (8.15) в двух точках: а) равноудаленной от краев катушки; б) на краю катушки. В обоих случаях подсчитать погрешность расчета по приближенной формуле (8.14).

**Задача 8.8.** На кольцевой сердечник из ферромагнитного материала, диаметр которого по средней линии  $D = 20$  см, намотаны две обмотки с числом витков  $N_1 = 800$  и  $N_2 = 300$ . Определить магнитную индукцию в центре сечения сердечника при согласном и встречном включении обмоток и токе в них  $I = 5$  А.

**Задача 8.9.** Построить график магнитной индукции поля прямолинейного медного провода. Диаметр провода  $d = 10$  мм. Постоянный ток в проводе  $I = 200$  А.

## 8.4 МАГНИТНЫЙ ПОТОК И ПОТОКОСЦЕПЛЕНИЕ

Понятие о магнитном потоке как характеристике магнитного поля имеет в электротехнике большое значение. Его применяют при рассмотрении принципов работы и расчетах электромагнитных устройств (электрических машин, трансформаторов, электромагнитов различного назначения).

### Магнитный поток

Любой проводник с током создает магнитное поле. Рассмотрим для примера в качестве источника магнитного поля виток провода кольцевой формы с током  $I$  (рис. 8.16).

Линии магнитной индукции этого неравномерного поля сцеплены с самим витком и часть их пронизывает некоторую поверхность  $S$ .

Выделим на этой поверхности элемент площади  $dS$ , в пределах которой магнитную индукцию  $B$  можно считать одинаковой. Вектор магнитной индукции в общем случае направлен под некоторым углом  $\beta$  к нормали  $n$  этой поверхности.

Проекция вектора  $B$  на направление нормали дает вектор  $B_n$ , направленный перпендикулярно выделенной элементарной площадке  $dS$ .



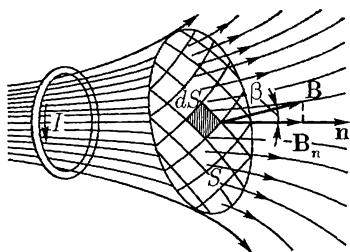


Рис. 8.16

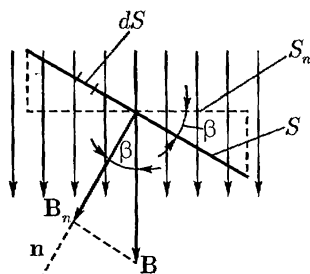


Рис. 8.17

Величина  $B_n dS = d\Phi$  выражает элементарный поток вектора магнитной индукции.

Сложив элементарные потоки по всей поверхности, получим выражение полного потока вектора магнитной индукции или магнитного потока через заданную поверхность  $S$ :

$$\Phi = \int_S B_n dS. \quad (8.16)$$

Аналогично можно выразить магнитный поток через любую другую поверхность, в том числе и через поверхность, ограниченную самим витком, т. е. магнитный поток, сцепленный с ним.

В практике бывают случаи, когда магнитное поле можно считать равномерным, а поверхность, через которую определяется магнитный поток, — плоскостью (рис. 8.17).

В этом случае  $B$  и  $B_n$  остаются одинаковыми для всех точек плоскости, поэтому

$$\Phi = \int_S B_n dS = B_n \int dS = B_n S = BS_n, \quad (8.17)$$

где  $S_n$  — проекция площади  $S$  на плоскость, перпендикулярную направлению вектора магнитной индукции.

Если плоскость  $S$  расположена перпендикулярно линиям магнитной индукции, то магнитный поток

$$\Phi = BS. \quad (8.18)$$

Согласно формулам (8.18) и (8.19), магнитная индукция  $B$  является плотностью магнитного потока в данной точке поля. Единица измерения магнитного потока — вебер:

$$[\Phi] = [BS] = \text{тесла} \cdot \text{метр}^2 = \text{вольт} \cdot \text{секунда} = \text{вебер (Вб)}.$$

## Работа при перемещении проводника с током в магнитном поле

Рассмотрим проводящий контур прямоугольной формы, одна сторона которого находится в равномерном магнитном поле. При токе  $I$  в данном контуре на провод действует электромагнитная сила  $F_m$  (рис. 8.18).

Незакрепленный контур перемещается в направлении действия силы; при этом на пути  $b$  сторона его описывает плоскую поверхность  $S$ , перпендикулярную линиям магнитной индукции  $S = bl$ .

Произведение магнитной индукции и площади этой поверхности выражает магнитный поток  $\Phi$  равномерного поля через данную площадь  $S$  [см (8.18)].

При движении контура с током в магнитном поле электромагнитная сила  $F_m$  на пути  $b$  совершает работу  $A = F_m b = BIlb$ .

В этом случае работа считается положительной. При движении провода против силы  $F_m$  (при наличии внешней механической силы) работа отрицательная.

Учитывая формулу (8.18), работу, совершенную в результате взаимодействия магнитного поля и тока в проводнике, движущемся в магнитном поле, можно определить произведением тока в проводнике и магнитного потока сквозь поверхность, очерченную проводником при его движении:  $A = \Phi I$ .

Магнитный поток через поверхность, очерченную проводником, является разностью потоков, пронизывающих проводящий контур в конечном и начальном положениях, т.е. положительным приращением магнитного потока, сцепленного с контуром:

$$\Delta\Phi = \Phi_{II} - \Phi_I,$$

где

$$\Phi_{II} = Bb_2l; \quad \Phi_I = Bb_1l.$$

Работа, затраченная на перемещение контура,

$$A = \Delta\Phi I. \quad (8.19)$$

На основании рассмотренного примера можно сделать следующие выводы, справедливые для любой электромагнитной системы (см. также задачу 8.10).

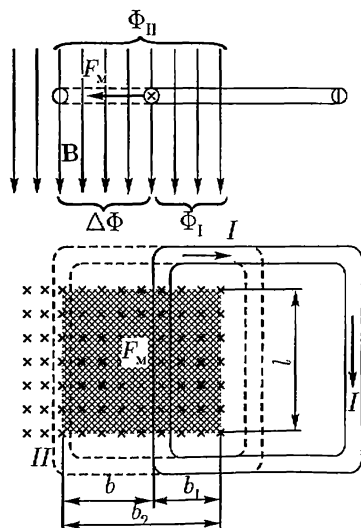


Рис. 8.18

1. Работа электромагнитных сил, затраченная на перемещение контура с током, равна произведению тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

2. Всякий контур с током в магнитном поле стремится занять положение, при котором магнитный поток, пронизывающий контур, оказывается положительным и наибольшим (положительным считается магнитный поток, совпадающий внутри контура с потоком, созданным током этого контура).

Приведем такой пример. Стальной сердечник втягивается внутрь катушки с током. При этом магнитный поток катушки увеличивается, так как добавляется действие контуров тока внутри стального сердечника, которые образуются внутриатомным и внутримолекулярным движением заряженных частиц (подробнее см. в 8.7). Если перемещение сердечника ничем не ограничено, то он втягивается до тех пор, пока поток не увеличится до максимальной величины для этой системы. Сказанное относится к любым электромагнитным устройствам с подвижным стальным якорем (реле, тяговые электромагниты и т. п.).

## Магнитное потокосцепление

При определении работы, совершаемой электромагнитными силами, была взята рамка, имеющая один виток. Но на рамку можно намотать несколько витков, тогда работа электромагнитных сил при перемещении рамки увеличится.

Если предположить, что все  $N$  витков сцеплены с одним и тем же потоком, то работа электромагнитных сил увеличится в  $N$  раз:  $A = N\Delta\Phi I$ .

Произведение числа витков и сцепленного с этими витками магнитного потока называют потокосцеплением:

$$\Psi = N\Phi. \quad (8.20)$$

Следовательно, *работа электромагнитных сил выражается произведением тока в витках и приращения магнитного потокосцепления:*

$$A = \Delta\Psi I. \quad (8.21)$$

В общем случае витки катушки могут быть сцеплены с разными потоками, тогда общее потокосцепление определяется алгебраической суммой потоков, сцепленных с каждым витком:

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots \Phi_n.$$

При этом имеется в виду, что потокосцепление одного витка численно равно потоку через поверхность, ограниченную этим витком.

Отдельные потоки ( $\Phi_1, \Phi_2$  и т.д.) могут быть сцеплены с несколькими витками (рис. 8.19), тогда потокосцепление будет выражено алгебраической суммой следующего вида:

$$\Psi = \Phi_1 N_1 + \Phi_2 N_2 + \dots + \Phi_n N_n. \quad (8.22)$$

Если в уединенном контуре любой формы имеется ток, то его магнитное поле сцеплено с самим контуром. Потокосцепление такого контура называется собственным или потокосцеплением самоиндукции. *Собственное потокосцепление характеризует связь тока с собственным магнитным полем.*

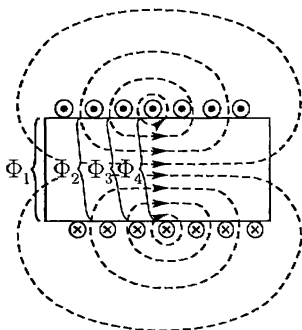


Рис. 8.19

### Задачи

**Задача 8.10.** Прямоугольная рамка с током  $I$  расположена в магнитном поле, как показано на рис. 8.20. Найти выражение для работы, совершенной при повороте рамки из положения I в положение II.

**Решение.** По правилу левой руки найдем направления сил, действующих на стороны рамки в положении I.

На стороны  $ab$  и  $вг$  рамки действуют силы  $F_{1м}$  и  $F_{2м}$ , на две другие стороны силы не действуют, так как ток в них направлен вдоль линий магнитной индукции. Силы  $F_{1м}$  и  $F_{2м}$  образуют вращающий момент, под действием которого рамка поворачивается из положения I в положение II.

В положении II вращающий момент равен нулю, так как силы  $F_{1м}$  и  $F_{2м}$  направлены противоположно вдоль линии, проходящей через ось вращения рамки.

Стороны рамки  $ab$  и  $вг$  переместились в направлении действия силы на  $d/2$ , где  $d$  — ширина рамки.

Работа по перемещению каждой стороны рамки составляет  $BIdl/2$ , а всей рамки —  $A = BIdl = \Phi_m I$ , где  $ld$  — площадь рамки;  $BS = \Phi_m$  — наибольшая величина магнитного потока, пронизывающего рамку.

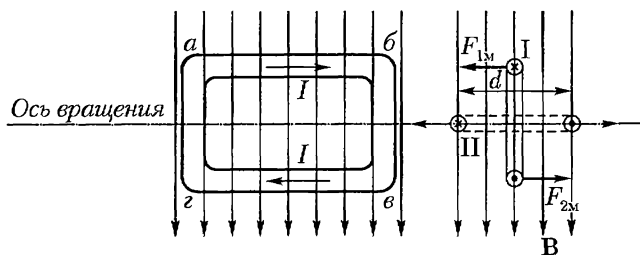


Рис. 8.20

Величина  $\Phi_m$  в данном случае определяет изменение потока, сцепленного с рамкой при повороте ее из положения  $I(\Phi_I = 0)$  в положение  $II(\Phi_{II} = \Phi_m)$ . Изменение потока в зависимости от угла поворота рамки происходит по закону  $\Phi = \Phi_m \sin \alpha$ , так как в любом промежуточном положении проекция площади рамки на плоскость, перпендикулярную направлению линий магнитной индукции, равна  $S \sin \alpha$ .

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Докажите, что положение II рамки является устойчивым.

2. Что надо предпринять, чтобы рамки в равномерном магнитном поле вращались непрерывно в одну сторону?

**Задача 8.11.** В обмотке тороидальной катушки, имеющей длину  $l_k = 40$  см, площадь поперечного сечения  $S = 6$  см<sup>2</sup>, число витков  $N = 400$ , ток  $I = 20$  А. Определить магнитный поток внутри катушки.

**Решение.** Магнитную индукцию внутри катушки определим по формуле (8.12), учитывая, что длина катушки  $2\pi r = l_k$ :

$$B = \frac{\mu_0 IN}{l_k} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 400}{0,4} = 8\pi \cdot 10^{-3} \text{ Тл.}$$

Магнитный поток определим приближенно, полагая поле внутри катушки равномерным:

$$\Phi = BS = 8\pi \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-4} = 48\pi \cdot 10^{-7} \text{ Вб.}$$

Определите, какой ток должен быть в катушке, чтобы можно было получить поток  $\Phi = 2 \cdot 10^{-5}$  Вб.

**Задача 8.12.** На кольцо из неферромагнитного материала сечением  $S = 10$  см<sup>2</sup> равномерно навито  $N = 300$  витков. Определить магнитный поток в кольце, имеющем диаметр средней линии  $d = 20$  см, если в обмотке ток  $I = 30$  А.

**Задача 8.13.** Прямоугольная рамка шириной 16 см и длиной 32 см (см. рис. 8.20), выполненная из четырех одинаковых витков провода, помещена в магнитное поле с индукцией  $B = 1,5$  Тл. Ток в проводе рамки  $I = 5$  А. Считая начальным положение рамки, когда угол между направлением поля и плоскостью рамки равен  $30^\circ$ , определить работу электромагнитных сил при повороте рамки до устойчивого положения в двух случаях: а) направление поля и тока такое, как показано на рис. 8.20; б) направление тока изменено на обратное.

## 8.5. ИНДУКТИВНОСТЬ СОБСТВЕННАЯ И ВЗАИМНАЯ

При изменении тока в контуре или катушке изменяется потокосцепление самоиндукции или собственное потокосцепление, обусловленное током в этом контуре (катушке), а также взаимное потокосцепление с другим контуром или катушкой.

Опыт показывает, что одинаковое изменение тока в двух контурах или катушках приводит в общем случае к различному измене-

нию их потокосцепления. Особенности данного контура или катушки в отношении образования потокосцепления характеризуются индуктивностью собственной и взаимной.

## Индуктивность собственная

На зависимость между потокосцеплением и током уединенного контура влияют форма, размеры контура и среда, в которой создается его магнитное поле, т.е. факторы, обусловленные конструкцией контура или катушки.

Для выражения этого влияния введено понятие индуктивности контура или катушки.

**Собственная индуктивность уединенного контура (или катушки) есть величина, характеризующая связь потокосцепления самоиндукции и тока, численно равная отношению потокосцепления самоиндукции контура к току в нем:**

$$\boxed{L = \Psi/I.} \quad (8.23)$$

В вакууме и неферромагнитных веществах (см. 8.7) это отношение для данного контура (катушки) остается неизменным независимо от значений тока и потокосцепления.

Единица индуктивности  $[L] = \text{вебер/ампер} = \text{генри (Гн)}$ .

В практических расчетах индуктивность часто выражается в долях генри: миллигенри (мГн) и микрогенри (мкГн);  $1 \text{ Гн} = 10^3 \text{ мГн} = 10^6 \text{ мкГн}$ .

## Индуктивность взаимная

Рассмотрим магнитную связь двух катушек с токами, расположенных друг от друга так, что магнитный поток, вызванный током первой катушки  $I_1$ , сцеплен с витками обеих катушек.

Предположим, что потоков магнитного рассеяния нет, т.е. все магнитные линии одной катушки сцеплены с другой катушкой (рис. 8.21, а).

Собственное потокосцепление первой катушки

$$\Psi_{1,1} = \Phi_1 N_1 = L_1 I_1, \quad (8.24)$$

где  $N_1$  — число витков первой катушки.

Магнитный поток, созданный током первой катушки, сцеплен с витками второй катушки.

Взаимное потокосцепление, как и собственное, пропорционально току, создающему поток

$$\Psi_{12} = \Phi_1 N_2 = M_{12} I_1. \quad (8.25)$$

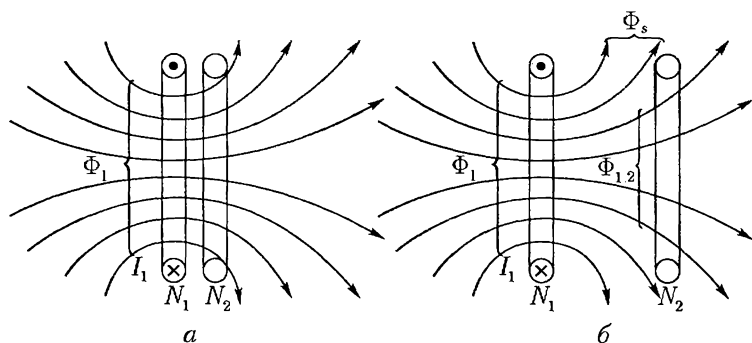


Рис. 8.21

Коэффициент пропорциональности  $M_{1,2}$  — величина постоянная (в неферромагнитных средах), зависит от конструктивных особенностей рассматриваемой системы катушек и называется взаимной индуктивностью.

Из уравнений (8.24) и (8.25) следует, что

$$L_1/M_{12} = N_1/N_2.$$

Магнитная связь может осуществляться потоком второй катушки с током  $I_2$ .

По аналогии с первой катушкой, собственное потокосцепление второй катушки

$$\Psi_{22} = \Phi_2 N_2 = L_2 I_2,$$

взаимное потокосцепление

$$\Psi_{2,1} = \Phi_2 N_1 = M_{2,1} I_2.$$

Отношение индуктивности  $L_2$  к взаимной индуктивности  $M_{2,1}$ :

$$L_2/M_{2,1} = N_2/N_1.$$

Из отношений индуктивностей катушек к взаимной индуктивности находим

$$M_{12}M_{2,1} = L_1L_2.$$

Нетрудно доказать, что коэффициенты  $M_{1,2}$  и  $M_{2,1}$  одинаковы.

Для этого предположим, что вторая катушка с током  $I_2$  удаляется в бесконечность. Потокосцепление этой катушки изменяется на величину взаимного потокосцепления. Работа, совершаемая при удалении катушки, согласно формуле (8.21), определяется произведением  $\Psi_{1,2}I_2$ . Учитывая относительность движения, ту же работу можно определить произведением  $\Psi_{2,1}I_1$ , т. е.

$$\Psi_{12}I_2 = \Psi_{2,1}I_1.$$

Отсюда

$$\Psi_{12}/I_1 = \Psi_{21}/I_2,$$

или

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

Взаимоиндуктивность выражается через индуктивности катушек:

$$M = \sqrt{L_1 L_2}. \quad (8.26)$$

### Коэффициент связи

Формула (8.26) справедлива при отсутствии рассеяния магнитных потоков, т.е. когда между катушками существует наибольшая магнитная связь. В действительности некоторая часть линий магнитной индукции поля данной катушки сцеплена только с собственными витками (на рис. 8.21, б это относится к первой катушке). Этими линиями определяется магнитный поток рассеяния  $\Phi_s$ , который не образует магнитной связи катушек; поэтому в реальных устройствах, где используется магнитная связь, поток рассеяния должен быть по возможности уменьшен.

Из-за потоков рассеяния магнитная связь катушек оказывается неполной ( $\Phi_{12} < \Phi_1$ ). При этом взаимоиנדуктивность будет меньше величины  $\sqrt{L_1 L_2}$ , что учитывается коэффициентом связи  $k$ :

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}. \quad (8.27)$$

Коэффициент связи  $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$  теоретически может изменяться от 0 до 1.

Потоки рассеяния уменьшить до нуля практически невозможно, поэтому коэффициент связи  $k$  всегда меньше единицы.

В системе магнитно-связанных контуров или катушек различают согласное и встречное включение.

Если направления намагничивающих сил двух катушек, определенные по правилу буравчика, совпадают, то включение катушек называется согласным (рис. 8.22, а). При несовпадении этих направлений включение называется встречным (рис. 8.22, б).

Для изменения направления намагничивающей силы катушки можно, согласно правилу буравчика, изменить направление тока или направление хода витков (правая или левая намотка).

Изменяя направление тока или направление намотки одной из катушек, получают согласное или встречное включение.

При встречном включении катушек можно добиться такого положения, когда потоки обеих катушек, определенные порознь, рав-



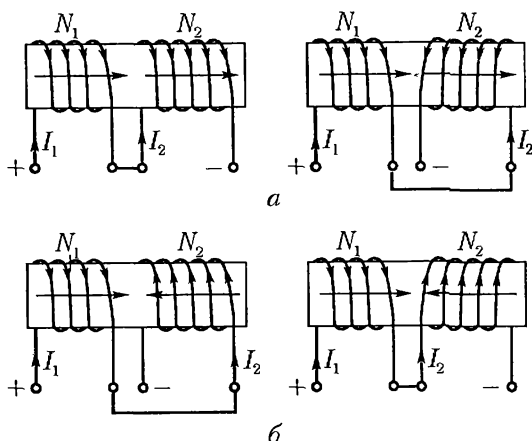


Рис. 8.22

ны, а результирующий поток в соответствии с принципом наложения равен нулю.

Если требуется получить катушку без индуктивности, можно применить бифилярную намотку, которая выполняется проводом, сложенным вдвое.

Магнитный поток, а следовательно, и индуктивность бифилярно намотанной катушки равны нулю, так как каждый виток ее состоит из двух проводников с противоположным направлением тока.

## Задачи

**Задача 8.14.** В сердечнике трансформатора магнитная индукция  $B = 1,2$  Тл. Сердечник имеет прямоугольную форму сечения с размерами 60 и 50 мм. Пренебрегая магнитным рассеянием, определить потокоцепление первичной обмотки, имеющей 1000 витков, и вторичной обмотки, имеющей 200 витков.

**Задача 8.15.** Потокосцепление кольцевой катушки с неферромагнитным сердечником при токе  $I_1 = 20$  А равно 0,02 Вб. Определить число витков и индуктивность катушки, если диаметр сердечника по средней линии  $D = 8$  см, площадь поперечного сечения  $S = 2$  см<sup>2</sup>.

**Задача 8.16.** Индуктивности обмоток трансформатора  $L_1 = 0,45$  Гн и  $L_2 = 0,2$  Гн. Определить взаимную индуктивность обмоток, если коэффициент связи между ними 0,9.

## 8.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДУКТИВНОСТЕЙ

Проводящие контуры, катушки — наиболее распространенные элементы электротехнических устройств, а индуктивность является конструктивной характеристикой этих элементов и применяется

при расчетах. Поэтому важно не только само понятие индуктивности, но и способы вычисления ее для различных случаев.

## Индуктивность катушки

Определим индуктивность участка  $l$  бесконечно длинной цилиндрической катушки, имеющей на этом участке  $N$  витков диаметром  $D$  (см. рис. 8.15).

Магнитное поле такой катушки равномерное. В этом случае по формуле (8.13)  $B = \mu_0 IN/l$ .

Если витки катушки плотно прилегают друг к другу, можно считать поток всех витков одинаковым:

$$\Psi = BS N = \mu_0 I N^2 S / l,$$

где  $S = \pi D^2/4$  — площадь поперечного сечения катушки.

Согласно формуле (8.23), индуктивность

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 S N^2}{l}. \quad (8.28)$$

Выражение (8.28) можно использовать для приближенного вычисления индуктивности цилиндрической катушки конечной длины, если  $l_k \gg D$ . Точность результата тем больше, чем больше отношение  $l_k/D$ . Индуктивность кольцевой катушки на тороидальном сердечнике (см. рис. 8.6, где  $l = 2\pi r$ ) приближенно определяют по этой же формуле.

В практике (например, радиотехнической) применяются катушки различной формы, для которых условие  $l_k \gg D$  чаще всего не выполняется. Для определения индуктивности применяются расчетные кривые или эмпирические формулы, поправочные коэффициенты к формуле (8.28), приводимые в справочниках.

## Индуктивность двухпроводной линии

Для определения индуктивности участка двухпроводной линии (рис. 8.23) нужно применить формулу (8.23), для чего предварительно следует подсчитать потокосцепление.

Поток, сцепленный с контуром, образованным прямым и обратным проводами линии, нужно подсчитать по формуле (8.16), учитывая, что магнитное поле линейного тока неравномерное.

Выделим между проводами элемент площади  $dS = l dx$ , в пределах которой магнитную индукцию можно считать постоянной:

$$d\Phi = B l dx$$

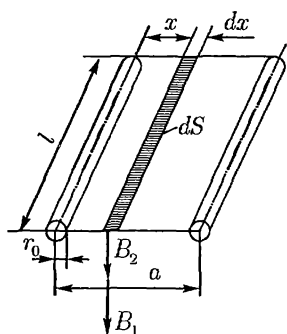


Рис. 8.23

или

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx.$$

Поток, образованный током прямого провода, определим суммированием элементарных потоков на всем расстоянии между проводами в свету:

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{r_0}^{a-r_0} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a-r_0}{r_0}.$$

Учитывая, что  $a \gg r_0$ , вместо  $a - r_0$  можно взять  $a$ :

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a}{r_0}.$$

Точно такой же поток и в том же направлении создается током обратного провода, поэтому общий поток

$$\Phi = 2\Phi_1 = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{a}{r_0}.$$

Двухпроводная линия, имея прямой и обратный провода, образует один виток; поэтому потокосцепление численно равно определенному магнитному потоку:  $\Psi = \Phi$ .

Индуктивность

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{a}{r_0}. \quad (8.29)$$

Подсчет по формуле (8.29) дает неточный результат, так как не была учтена внутренняя индуктивность, образованная магнитным потоком внутри проводов.

### Задачи

**Задача 8.17.** Определить индуктивность кольцевой катушки прямоугольного поперечного сечения  $S = 6 \text{ см}^2$ , имеющей наружный радиус  $r_2 = 11 \text{ см}$ , внутренний  $r_1 = 9 \text{ см}$ , а число витков  $N = 500$  (см. рис. 8.6).

**Решение.** Магнитная индукция по формуле (8.12)

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}.$$

При плотной намотке тонким проводом магнитный поток можно считать одинаковым для всех витков, поэтому потокосцепление

$$\Psi = BSN = \frac{\mu_0 I N^2 S}{2\pi r}.$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r},$$

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Гн} = 0,3 \text{ мГн}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Формула для определения индуктивности кольцевой катушки получена в предположении, что магнитная индукция во всех точках сечения кольца одинакова и равна индукции в середине сечения. В действительности магнитная индукция уменьшается в направлении от внутренней стороны сечения к внешней. Более точное выражение для определения индуктивности кольцевой катушки прямоугольного сечения имеет вид

$$L = \frac{\mu_0 b N^2}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где  $b$  — размер сердечника по оси катушки.

Подсчитайте погрешность (%) полученного результата определения индуктивности к величине, найденной по более точной формуле.

2. Определите магнитный поток и магнитное потокоцепление катушки при токе в ней  $I = 5 \text{ А}$ .

**Задача 8.18.** В цилиндрической катушке с индуктивностью  $L = 0,2 \text{ мГн}$  ток  $I = 10 \text{ А}$ . Пренебрегая магнитным рассеянием, определить магнитное потокоцепление и поток катушки, если число ее витков  $N = 200$ .

**Задача 8.19.** Определить индуктивность участка двухпроводной линии длиной  $l = 500 \text{ м}$ , выполненной медным проводом радиуса  $r = 0,8 \text{ см}$  при расстоянии между проводами  $a = 0,5 \text{ м}$ .

**Задача 8.20.** На кольцевой неферромагнитный сердечник, длина которого по средней окружности  $l = 30 \text{ см}$  и поперечное сечение  $S = 5 \text{ см}^2$ , намотана обмотка  $N_1 = 500$  витков. Ток в обмотке  $I = 5 \text{ А}$ . Определить: 1) индуктивность катушки и магнитный поток в сердечнике; 2) взаимную индуктивность с другой обмоткой, намотанной на тот же сердечник, с числом витков  $N_2 = 200$ , если магнитный поток рассеяния составляет 30 % от потока первой обмотки.

## 8.7. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

Ранее магнитное поле рассматривалось в вакууме, где из-за отсутствия вещества оно не испытывает на себе его влияние и определяется только токами в проводниках. Эти токи будем называть *внешними*.

Если магнитное поле внешних токов создается в веществе, то поле воздействует на него, а вещество определенным образом изменяет магнитное поле.

## Намагничивание вещества

Любое вещество, находящееся в магнитном поле внешних токов, приходит в особое состояние намагниченности, характеризующееся возникновением в нем добавочного магнитного поля.

Движение заряженных частиц внутри атома можно рассматривать как элементарные внутриатомные токи, поэтому добавочное магнитное поле, возникшее в результате намагничивания, будем называть полем элементарных (внутренних) токов.

Магнитные свойства элементарного кругового тока (рис. 8.24, а) можно характеризовать магнитным моментом  $m$ , величина которого определяется произведением элементарного кругового тока и площади описанного им круга, а направление по правилу буравчика

$$m = iS. \quad (8.30)$$

При отсутствии магнитного поля внешних токов элементарные токи внутри вещества ориентированы беспорядочно, поэтому общий магнитный момент даже малых объемов вещества оказывается равным нулю, а магнитное поле элементарных токов не обнаруживается.

Влияние магнитного поля внешних токов на круговые элементарные токи в веществе состоит в том, что изменяется ориентация осей вращения частиц так, что их магнитные моменты оказываются направленными в одну сторону.

Интенсивность и характер намагничивания у различных веществ в одинаковом магнитном поле внешних токов значительно отличаются. Поэтому все вещества разделяют на три группы.

К первой группе относятся диамагнитные вещества, в которых магнитное поле элементарных токов направлено против вызвавшего его поля внешних токов. Иначе говоря, результирующее магнитное поле в веществах этой группы слабее магнитного поля внешних токов. Диамагнитные вещества — вода, водород, кварц, серебро, медь и др.

Ко второй и третьей группам относятся соответственно парамагнитные (алюминий, кислород, воздух и т.д.) и ферромагнитные (железо, никель, кобальт и некоторые их сплавы) вещества. Общим для веществ этих групп является то, что при намагничивании магнитные моменты элементарных токов в них

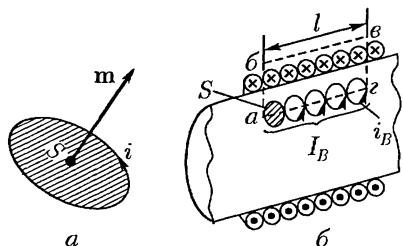


Рис. 8.24

ориентируются в направлении поля внешних токов. В результате магнитное поле усиливается.

Ферромагнитные вещества имеют особое значение в электротехнике, поэтому их магнитные свойства подробно рассмотрены в 8.8. Здесь отметим лишь, что магнитная индукция в ферромагнитном веществе во много (сотни и тысячи) раз больше, чем в парамагнитном, при одинаковой намагничивающей силе внешних токов.

### Намагниченность вещества

Из сказанного ранее ясно, что результирующее магнитное поле в веществе складывается из двух полей: поля внешних токов (токов в проводах) и поля элементарных внутренних токов.

В связи с этим для равномерного магнитного поля катушки (рис. 8.24, б) при наличии внутри ее какого-либо сердечника, например стального, можно записать уравнение, аналогичное уравнению (8.9) (это можно сделать и при неравномерном поле; равномерное поле взято для упрощения рассуждения):

$$Bl = \mu_0 IN + \mu_0 I_B, \quad (8.31)$$

где  $I_B$  — полный элементарный ток, сцепленный с контуром  $a-b-e-z$ .

Сравнивая (8.31) с (8.13), видим, что магнитная индукция в веществе (парамагнитном или ферромагнитном) больше, чем в вакууме, в связи с действием элементарных токов, т.е. благодаря намагничиванию вещества.

Степень намагничивания вещества оценивается вектором намагниченности  $M$ . Для однородного по всем направлениям вещества величина вектора намагниченности равна геометрической сумме магнитных моментов элементарных токов в единице объема вещества:

$$M = \sum m/V. \quad (8.32)$$

### Напряженность магнитного поля

Найдем величину общего магнитного момента элементарных токов, сцепленных с контуром  $a-b-e-z$ , учитывая, что при одинаковой ориентации токи с контуром сцеплены только на участке  $a-z$  длиной  $l$  (см. рис. 8.24, б):

$$\sum m = \sum i_B S = S \sum i_B = SI_B,$$

где  $i_B$  — элементарный ток, сцепленный с контуром  $a-b-e-z$ ;  $S$  — площадь, ограниченная контуром элементарного тока.

Подставив  $\sum m$  в формулу (8.32), получим

$$M = \frac{SI_B}{Sl},$$

откуда

$$I_B = Ml.$$

Равенство (8.31) можно представить в виде

$$Bl = \mu_0 IN + \mu_0 Ml,$$

или

$$(B/\mu_0 - M)l = IN. \quad (8.33)$$

Из формулы (8.33) следует, что магнитное поле в веществе можно рассматривать как результат действия только токов в проводях (в витках катушки), если в качестве характеристики поля принять новую векторную величину **H**, которая называется **напряженностью магнитного поля**:

$H = B/\mu_0 - M.$

(8.34)

С введением этого понятия формула (8.33) примет вид

$$Hl = IN.$$

Это уравнение подобно уравнению (8.13), полученному на основе представления о циркуляции вектора магнитной индукции в поле тока бесконечно длинной катушки.

Напряженность **H** как характеристика магнитного поля не зависит от свойств среды, а определяется только величиной токов в проводях, что значительно облегчает расчеты магнитных полей.

### Магнитная проницаемость вещества

Из уравнения (8.34) можно выразить величину магнитной индукции в веществе

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M.$$

Намагниченность вещества является результатом действия внешнего магнитного поля токов. Коэффициент пропорциональности между напряженностью поля **H** и намагниченностью **M** называется **магнитной восприимчивостью  $\chi$** :

$$M = \chi H. \quad (8.35)$$

Магнитная восприимчивость выражает способность вещества намагничиваться под действием внешнего магнитного поля. Учитывая выражение (8.35), запишем

$$B = \mu_0 H + \mu_0 \chi H.$$

В этой формуле величина  $\mu_0 H$  характеризует только магнитное поле в вакууме, обозначается  $B_0$ , а называется магнитной индукцией в вакууме

$$B_0 = \mu_0 H. \quad (8.36)$$

Магнитную индукцию в веществе можно выразить формулой:

$$B = \mu_0 (1 + \chi) H = \mu_a H. \quad (8.37)$$

Величина

$$\mu_a = \mu_0 (1 + \chi) \quad (8.38)$$

характеризует магнитные свойства вещества, в котором существует магнитное поле, и называется абсолютной магнитной проницаемостью.

На основе формулы (8.37) абсолютную магнитную проницаемость можно определить отношением модуля магнитной индукции к модулю напряженности магнитного поля.

В практике удобно пользоваться отношением абсолютной магнитной проницаемости вещества  $\mu_a$  к магнитной постоянной  $\mu_0$ :

$$\mu_r = \mu_a / \mu_0 = 1 + \chi. \quad (8.39)$$

Величина  $\mu_r$  называется относительной магнитной проницаемостью и показывает, во сколько раз магнитное поле в веществе получается сильнее (или слабее), чем в вакууме, при прочих равных условиях, т.е.

$$\mu_a / \mu_0 = B / B_0.$$

Магнитная восприимчивость ферромагнитных веществ велика, поэтому их величина  $\mu_r \gg 1$ . Для остальных веществ  $\chi \approx 0$ , а  $\mu_r = 1$ .

### Задачи

**Задача 8.21.** На кольцевой неферромагнитный сердечник, средний радиус которого  $r = 48$  см, намотана обмотка, имеющая  $N_1 = 2000$  витков. На эту обмотку concentрично наложена вторая обмотка с числом витков  $N_2 = 3500$ . Площадь поперечного сечения сердечника  $S = 20$  см<sup>2</sup>. Определить взаимную индуктивность обмоток, если коэффициент магнитной связи между ними  $k = 0,9$ . При последовательном соединении обмоток и токе  $I = 3$  А определить магнитный поток в сердечнике в двух случаях: а) обмотки включены согласно; б) обмотки включены встречно.



**Решение.** Для определения взаимной индуктивности воспользуемся формулой (8.27). Но предварительно найдем индуктивность каждой катушки. Индуктивность первой катушки

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2000^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{2\pi \cdot 48 \cdot 10^{-2}} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Индуктивность второй катушки

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3500^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{2\pi \cdot 48 \cdot 10^{-2}} = 10,2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Взаимная индуктивность

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,9\sqrt{3,33 \cdot 10,2 \cdot 10^{-6}} = 5,25 \cdot 10^{-2} \text{ Гн.}$$

Для определения магнитного потока найдем намагничивающую силу:  
а) при согласном включении

$$F_1 = N_1 I + N_2 I = (2000 + 3500) \cdot 3 = 16\,500 \text{ А;}$$

б) при встречном включении

$$F_2 = N_2 I - N_1 I = (3500 - 2000) \cdot 3 = 4500 \text{ А.}$$

Напряженность магнитного поля

$$H_1 = \frac{F_1}{2\pi r} = \frac{16\,500}{2\pi \cdot 48 \cdot 10^{-2}} = 5460 \text{ А/м;}$$

$$H_2 = \frac{F_2}{2\pi r} = \frac{4500}{2\pi \cdot 48 \cdot 10^{-2}} = 1490 \text{ А/м.}$$

Магнитная индукция

$$B_1 = \mu_0 H_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5460 = 6,86 \cdot 10^{-3} \text{ Тл;}$$

$$B_2 = \mu_0 H_2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1490 = 1,87 \cdot 10^{-3} \text{ Тл.}$$

Магнитный поток

$$\Phi_1 = B_1 S = 6,86 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-4} = 13,7 \cdot 10^{-6} \text{ Вб;}$$

$$\Phi_2 = B_2 S = 1,87 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-4} = 3,74 \cdot 10^{-6} \text{ Вб.}$$

**Задача 8.22.** Решить задачу 8.21 при изменении только одного условия: сердечник изготовлен из стали с относительной магнитной проницаемостью  $\mu_r = 200$  (магнитная проницаемость стали предполагается постоянной при переключении обмоток).

Результаты сравните с теми, которые получены при решении задачи 8.21.

## Дополнительные вопросы к задаче

1. Какой ток нужно установить в катушках при согласном и встречном включении, чтобы в неферромагнитном сердечнике получить такие же потоки, какие получаются в стальном сердечнике?

2. Сколько нужно взять витков в обеих обмотках, чтобы при согласном их включении и токе  $I = 3$  А получить в неферромагнитном сердечнике такой же магнитный поток, какой получается в стальном сердечнике при тех же условиях?

3. Какова роль стального сердечника в электротехнических устройствах?

**Задача 8.23.** В кольцевой катушке с неферромагнитным сердечником ток  $I = 6$  А. При этом в катушке создается магнитный поток  $\Phi = 6 \cdot 10^{-5}$  Вб. Определить индуктивность катушки, имеющей  $N = 1000$  витков. Как изменятся индуктивность и магнитный поток этой катушки, если неферромагнитный сердечник заменить стальным с относительной магнитной проницаемостью  $\mu_r = 650$ , сохранив тот же ток?

## 8.8. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Введение понятия о магнитной проницаемости вещества позволяет все формулы, полученные ранее для магнитного поля в вакууме, применить и для магнитного поля в веществе, заменив в них магнитную постоянную  $\mu_0$  магнитной проницаемостью  $\mu_a$ . О такой возможности свидетельствует полная аналогия формул (8.36) и (8.37).

Это обстоятельство вместе с понятием о напряженности магнитного поля является основой для формулировки закона полного тока.

### Закон полного тока

В формуле (8.8)

$$\oint_l B_l dl = \mu_0 \sum I$$

вместо  $\mu_0$  запишем  $\mu_a$ , а вместо магнитной индукции подставим равную ей величину  $B_l = H_l \mu_a$ . Получим

$$\boxed{\oint_l H_l dl = \sum I.} \quad (8.40)$$

Уравнение (8.40) выражает закон полного тока:

**циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна полному току, пронизывающему поверхность, ограниченную этим контуром.**

В тех случаях, когда напряженность магнитного поля имеет одинаковую величину по всему контуру, а выбранный контур совпада-

ет с линией магнитной индукции (см. 8.3), уравнение (8.40) оказывается более простым:  $Hl = \sum I$ , а для катушек

$$Hl = IN. \quad (8.41)$$

Если контур содержит несколько участков с различными величинами напряженности поля ( $H_1, H_2, \dots, H_n$ ), но в пределах каждого участка напряженность не меняется, то уравнение (8.40) можно записать так:

$$\sum_1^n H_n l_n = \sum_1^n I_n N_n, \quad (8.42)$$

где  $n$  — номер участка контура.

В таком выражении закон полного тока напоминает второй закон Кирхгофа и применяется при расчете магнитных цепей (см. гл. 9).

### Изменение магнитного поля на границе двух сред

Выделим на границе двух сред, имеющих относительные магнитные проницаемости  $\mu_{r1}$  и  $\mu_{r2}$ , замкнутый контур  $a-b-v-z-d-e-a$  (рис. 8.25) около некоторой точки  $A$ .

Магнитная индукция и напряженность магнитного поля в этой точке характеризуются векторами  $B_1$  и  $H_1$  в первой и  $B_2$  и  $H_2$  во второй среде.

Разложим векторы  $B$  и  $H$  в обеих средах на нормальные  $B_n, H_n$  и тангенциальные  $B_t, H_t$  составляющие.

При отсутствии на поверхности раздела сред токов проводимости по закону полного тока для указанного контура  $\sum H\Delta l = 0$

$$-H_{2n} \overline{ab} - H_{1n} \overline{bv} + H_{1t} \overline{vz} + H_{1n} \overline{zd} + H_{2n} \overline{de} - H_{2t} \overline{ea} = 0.$$

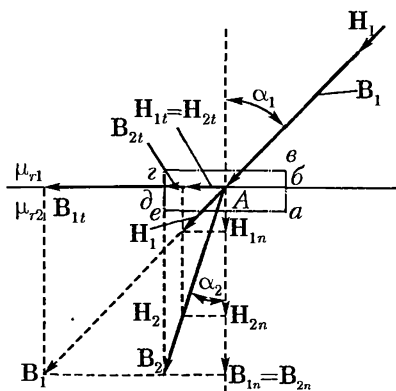


Рис. 8.25

Учитывая равенство соответствующих отрезков контура, получим  $H_{1t} = H_{2t}$  или

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2. \quad (8.43)$$

На границе двух сред тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля не изменяется.

Магнитный поток сквозь поверхность раздела сред создают только нормальные составляющие магнитной индукции. Учитывая же непрерывность линий маг-

нитной индукции, можно заключить, что магнитный поток на границе двух сред не изменяется.

Таким образом,

$$B_{1n} \Delta S = B_{2n} \Delta S,$$

где  $\Delta S$  — любой элемент площади на границе раздела сред.

Сокращая на  $\Delta S$ , получим  $B_{1n} = B_{2n}$  или

$$B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2. \quad (8.44)$$

Разделим равенство (8.43) на (8.44)

$$\frac{H_1 \sin \alpha_2}{B_1 \cos \alpha_1} = \frac{H_2 \sin \alpha_2}{B_2 \cos \alpha_2}.$$

Отсюда

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_{r1} \mu_0}{\mu_{r2} \mu_0} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}. \quad (8.45)$$

Равенство (8.45) выражает закон преломления линий магнитной индукции на границе двух сред.

В частном случае, когда линии магнитной индукции перпендикулярны плоскости раздела, тангенциальные составляющие напряженности и индукции равны нулю. Магнитная индукция на границе двух сред в этом случае не изменяется [см. формулу (8.44)]:  $B_1 = B_2$ .

Напряженность магнитного поля изменяется скачком

$$\mu_0 \mu_{r1} H_1 = \mu_0 \mu_{r2} H_2 \quad (8.46)$$

или

$$\mu_{r1} H_1 = \mu_{r2} H_2$$

и оказывается больше в среде с меньшей магнитной проницаемостью.

### Задачи

**Задача 8.24.** Определить изменение направления линий магнитной индукции на границе стали с воздухом, если известны для стали  $\mu_{r1} = 1000$ ;  $\alpha_1 = 89^\circ$ .

**Решение.** По формуле (8.45)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_{r1} / \mu_{r2}; \quad \operatorname{tg} 89^\circ / \operatorname{tg} \alpha_2 = 1000/1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} 89^\circ / 1000 = 0,057; \quad \alpha_2 = 30^\circ 2'.$$

Случай изменения магнитного поля на границе ферромагнитной среды и воздуха часто встречается в электромагнитных устройствах, где магнитные потоки замыкаются по стальным участкам, чередующимся с воздушными зазорами.

Магнитная проницаемость стали во много раз больше магнитной проницаемости воздуха, поэтому при значениях  $\alpha_1$ , даже близких к  $90^\circ$ , значение  $\alpha_2$  получается близким к нулю.

Практически можно считать, что линии магнитной индукции в воздухе у границы со сталью перпендикулярны поверхности раздела.

**Задача 8.25.** Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  в электротехнической стали с относительной магнитной проницаемостью  $\mu_r = 200$  образует с нормалью  $\mathbf{n}$  к поверхности раздела угол  $\alpha_1 = 80^\circ$ . Определить угол  $\alpha_2$ , который образует вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}_2$  с той же нормалью в воздухе. Найти магнитную индукцию и напряженность поля в воздухе, если в стали напряженность поля  $H_1 = 80$  А/см.

**Задача 8.26.** Неферромагнитный сердечник катушки (см. задачу 8.20) заменен стальным ( $\mu_r = 960$ ). Считая поле внутри катушки равномерным, определить взаимоиндуктивность в этом случае.

## 8.9. СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Ферромагнитные вещества широко применяются в электротехнике благодаря их способности намагничиваться и значительно усиливать внешнее магнитное поле. Для практики большое значение имеют особые свойства ферромагнитных веществ, выявляющиеся в процессе намагничивания. Эти свойства можно проследить на опыте, измеряя напряженность поля  $H$  и магнитную индукцию  $B$  катушки со стальным сердечником (рис. 8.26).

### Намагничивание ферромагнитных материалов

С ростом напряженности поля  $H$  магнитная индукция  $B$  увеличивается по закону  $B = \mu_0(M + H)$ .

График  $B(H)$ , соответствующий первоначальному намагничиванию и показанный на рис. 8.27, называется кривой первоначального намагничивания. Там же даны зависимости от напряженности поля  $\mu_0 M$  и  $\mu_0 H$ , из которых складывается магнитная индукция в ферромагнитной среде.

Получив состояние магнитного насыщения, уменьшим напряженность внешнего магнитного поля  $H$ . Магнитная индукция уменьшается по кривой 1–2 (рис. 8.28), которая не совпадает с кривой первоначального намагничивания (кривая 0–1). При  $H = 0$  магнитная индукция имеет остаточное значение  $B_r$ .

Размагничивание сердечника как бы запаздывает по сравнению с уменьшением напряженности поля. Это явление называют магнитным гистерезисом.

Особенностью ферромагнитных веществ является наличие сильных магнитных свя-

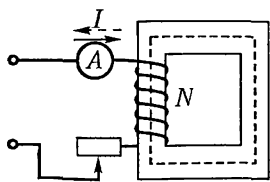


Рис. 8.26

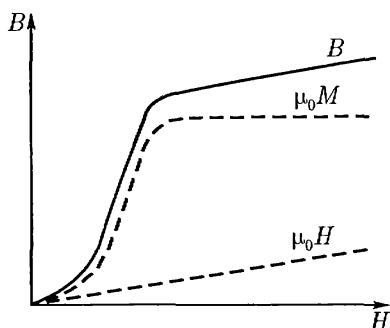


Рис. 8.27

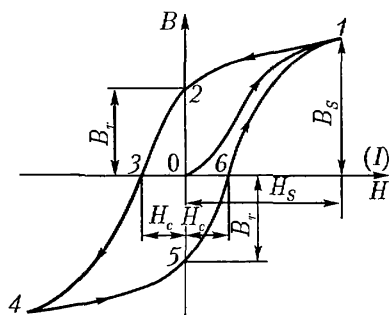


Рис. 8.28

зей молекул, вследствие чего в них образуются весьма малые (микроскопические) области, внутри которых магнитные моменты молекул ориентированы в одну сторону. Такие области имеют значительный общий магнитный момент и называются самопроизвольно намагниченными.

В отсутствие внешнего магнитного поля ферромагнитные вещества не проявляют своих магнитных свойств, так как магнитные моменты самопроизвольно намагниченных областей направлены беспорядочно. Общий магнитный момент всего объема тела оказывается равным нулю.

Усиление магнитного поля в ферромагнитной среде, а также явления магнитного насыщения и остаточного магнетизма хорошо объясняются изменением ориентации магнитных моментов областей самопроизвольной намагниченности под действием внешнего поля.

В образовании внутреннего магнитного поля участвуют не отдельные молекулы, как в диамагнитных и парамагнитных веществах, а целые области, обладающие магнитным моментом.

Магнитное насыщение означает, что все магнитные моменты ориентированы по направлению внешнего поля. Остаточный магнетизм объясняется тем, что при снятии внешнего поля определенная часть магнитных моментов сохраняет приобретенное при намагничивании направление, так что результирующий магнитный момент объема сердечника не уменьшается до нуля.

## Магнитный гистерезис

Изменив направление тока в катушке и, следовательно, направление внешнего поля в сердечнике, увеличим напряженность поля (вектор  $\mathbf{H}$  изменил направление). Магнитная индукция уменьшается до нуля (отрезок кривой 2–3), а затем изменит направление на обратное (см. рис. 8.28).

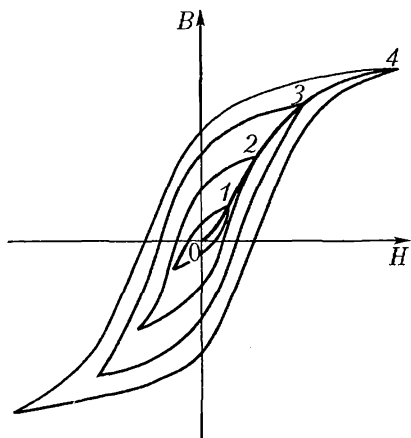


Рис. 8.29

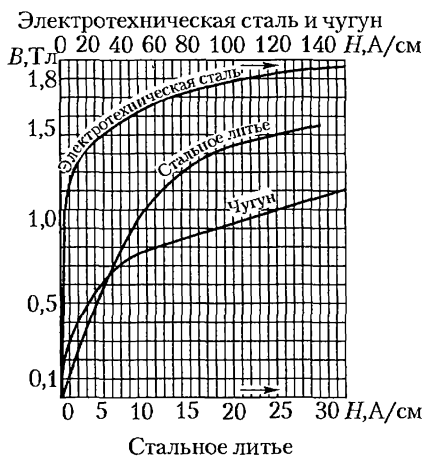


Рис. 8.30

Величину напряженности поля  $H$ , необходимую для уничтожения поля в сердечнике, называют коэрцитивной (задерживающей) силой. В точке 3 внешнее поле скомпенсировало остаточное поле намагниченности сердечника ( $-H_c = M$ ). В дальнейшем результирующее поле в сердечнике изменяет направление и усиливается, пока не наступает насыщение (участок 3–4). Аналогично можно получить данные и начертить нижнюю часть графика 4–5–6–1. Полученную замкнутую кривую  $B(H)$  называют петлей магнитного гистерезиса.

Циклическое перемагничивание вещества в области значений  $B$  и  $H$ , меньших тех, которые соответствуют полному насыщению, тоже образует петлю гистерезиса, полностью заключенную внутри предельной петли.

Ряд таких петель гистерезиса показан на рис. 8.29. Кривую 0–1–2–3–4, проведенную через вершины всех петель гистерезиса, называют основной кривой намагничивания. Она проходит близко к кривой первоначального намагничивания, но не совпадает с ней.

Основную кривую намагничивания используют при технических расчетах магнитных систем. На рис. 8.30 изображены основные кривые намагничивания некоторых ферромагнитных материалов.

## Свойства ферромагнитных материалов

На основе опыта намагничивания и перемагничивания ферромагнитных материалов можно сформулировать основные их свойства.

1. Ферромагнитные вещества относительно легко и сильно намагничиваются. Относительная магнитная проницаемость  $\mu_r$  для некоторых ферромагнитных материалов достигает значений  $10^5$  и выше.

2. С ростом напряженности внешнего магнитного поля намагниченность и магнитная индукция увеличиваются; однако намагниченность и магнитная индукция не пропорциональны напряженности поля (см. рис. 8.27). Это значит, что магнитная восприимчивость  $\chi$  и магнитная проницаемость  $\mu_r$  — не постоянные величины, а зависят от намагниченности  $M$ .

3. Начиная с некоторой напряженности поля  $H$  при ее увеличении происходит магнитное насыщение, т. е. такое состояние ферромагнитных веществ, при котором рост напряженности поля не приводит к увеличению намагниченности.

4. При уменьшении напряженности поля  $H$  после достижения состояния насыщения намагниченность и магнитная индукция уменьшаются. Однако величины  $M$  и  $B$  отличаются от тех, которые были зафиксированы для одинаковых  $H$  при увеличении напряженности.

5. При устранении внешнего поля ( $H = 0$ ) обнаруживается остаточная намагниченность ( $M$  и  $B$  не равны нулю).

6. При увеличении напряженности поля  $H$  в обратном направлении происходит сначала размагничивание намагниченного образца, а затем намагничивание в обратном направлении ( $M$  и  $B$  меняют знак) до насыщения.

7. При циклическом перемагничивании с определенной частотой ферромагнитное вещество нагревается, что свидетельствует о затрате энергии на перемагничивание.

Абсолютная магнитная проницаемость ферромагнитного вещества определяется в каждой точке основной кривой намагничивания (рис. 8.31) отношением

$$\mu_a = B/H = \frac{m_B}{m_H} \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $m_B$  и  $m_H$  — масштабы по осям координат.

Магнитная проницаемость, определяемая этим отношением, называется статической.

Как видим, с ростом напряженности поля магнитная проницаемость вначале увеличивается, а при переходе в область насыщения уменьшается.

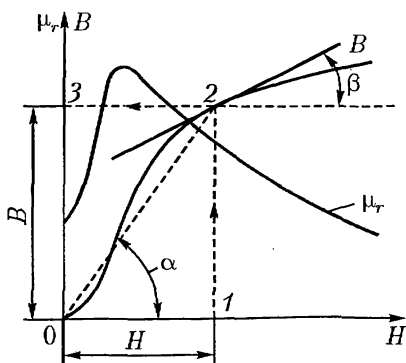


Рис. 8.31



Кроме статической магнитной проницаемости  $\mu_a$  определяется дифференциальная магнитная проницаемость  $\mu_{a \text{ диф}}$ . Последняя пропорциональна тангенсу угла наклона касательной к основной кривой намагничивания в каждой точке:

$$\mu_{a \text{ диф}} = \frac{dB}{dH} = \frac{m_B}{m_H} \operatorname{tg} \beta.$$

Что касается затрат энергии на перемагничивание, то, как будет показано дальше (см. гл. 24), величина их пропорциональна площади, ограниченной петлей магнитного гистерезиса.

## Магнитно-мягкие и магнитно-твердые материалы

Для всех ферромагнитных материалов отмеченные свойства являются общими, однако проявляются они по-разному в зависимости от их химического состава.

В связи с этим различают две основные группы ферромагнитных материалов: магнитно-твердые и магнитно-мягкие.

Магнитно-твердые материалы имеют большие величины остаточной магнитной индукции и коэрцитивной силы, широкую петлю магнитного гистерезиса. К магнитно-твердым материалам относятся хромовольфрамовые, хромомолибденовые стали ( $B_r = 1 \text{ Тл}$ ,  $H_c = 60 \text{ А/см}$ ), сплав альнико (Al, Ni, Co) и др.

Для магнитно-мягких материалов характерны большая магнитная проницаемость и малая коэрцитивная сила (узкая петля магнитного гистерезиса).

К магнитно-мягким материалам относятся электротехническая сталь (малоуглеродистая с присадкой кремния от 1,7 до 4 %), чистое электролитическое железо, электротехнический чугун, пермаллой (80 % Ni и 20 % Fe) и др.

Магнитно-мягкие материалы применяются для устройства магнитных цепей электрических машин, аппаратов, электромагнитов и т. п. Свойства материалов обеспечивают в этих устройствах создание сильных магнитных полей при относительно небольших величинах намагничивающих сил  $IN$  и относительно малые потери энергии при перемагничивании.

## Задачи

**Задача 8.27.** Решить задачу 8.21, если сердечник выполнен из электротехнической стали, характеристика намагничивания которой приведена на рис. 8.30.

**Решение.** В задаче 8.22 магнитная проницаемость была принята постоянной условно в предположении, что в тех пределах изменения маг-

нитной индукции, какие имеют место при переключении обмоток, характеристика намагничивания стали близка к прямой. Если характеристику намагничивания нельзя хотя бы приближенно считать прямолинейной, то формула (8.27) в этом случае непригодна. Взаимную индуктивность обмоток можно определить по формуле (8.25), предполагая без тока сначала одну, а затем другую обмотки. В этом случае  $M_{1,2} \neq M_{2,1}$ .

Для определения индуктивности катушки нельзя воспользоваться и формулой (8.28), так как неизвестна магнитная проницаемость стали.

При разомкнутой второй обмотке найдем индуктивность  $L_1$  и взаимную индуктивность  $M_{1,2}$ .

Намагничивающая сила обмотки

$$F_1 = I_1 N_1 = 3 \cdot 2000 = 6000 \text{ А.}$$

Напряженность поля

$$H_1 = \frac{F_1}{2\pi r} = \frac{6000}{2\pi \cdot 48 \cdot 10^{-2}} = 2000 \text{ А / м} = 20 \text{ А / см.}$$

Магнитную индукцию находят по кривой намагничивания электро-технической стали в следующем порядке (см. рис. 8.30, 8.31). На оси абсцисс определяют точку 1, отстоящую от начала координат на расстоянии  $0-1$ , выражающем в принятом масштабе найденную величину напряженности поля. Из этой точки проводят прямую, параллельную оси ординат, до пересечения с кривой намагничивания в точке 2. Эту точку проецируют на ось ординат и получают ответ — величину магнитной индукции (отрезок  $0-3$ ).

Для  $H_1 = 20 \text{ А/см:}$

$$B_1 = 14\,000 \text{ Гс} = 1,4 \text{ Тл.}$$

Магнитный поток

$$\Phi_{1,1} = BS = 1,4 \cdot 20 \cdot 10^{-4} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Собственное потокоцепление первой обмотки

$$\Psi_{1,1} = \Phi_{1,1} N_1 = 2,8 \cdot 10^{-3} \cdot 2000 = 5,6 \text{ Вб.}$$

Индуктивность первой обмотки

$$L_1 = \Psi_{1,1} / I = 5,6 / 3 = 1,86 \text{ Гн.}$$

Найдем взаимное потокоцепление, считая поток рассеяния  $\Phi_s = 0,1\Phi_{1,1}$ :

$$\Psi_{1,2} = \Phi_{1,2} N_2 = \Phi_{1,1} N_2 \cdot 0,9 = 2,8 \cdot 10^{-3} \cdot 3500 \cdot 0,9 = 8,83 \text{ Вб.}$$

Взаимная индуктивность

$$M_{1,2} = \Psi_{1,2} / I_1 = 8,83 / 3 = 2,94 \text{ Гн.}$$

Определить: 1) индуктивность и взаимную индуктивность ( $L_2$ ,  $M_{2,1}$  при отсутствии тока в первой обмотке); 2) магнитный поток и общую индуктивность при согласном и встречном включении обмоток.

## ГЛАВА 9 МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

В конструкцию многих электротехнических устройств (электрических машин, трансформаторов, электрических аппаратов, измерительных приборов и т. д.) входят магнитные цепи.

Магнитной цепью называется часть электротехнического устройства, содержащая ферромагнитные тела, в которой при наличии намагничивающей силы возникает магнитный поток и вдоль которой замыкаются линии магнитной индукции. Источниками намагничивающей силы могут быть катушки с токами, постоянные магниты.

В конструктивном отношении магнитные цепи выполняют неразветвленными и разветвленными; применение того или иного вида цепи определяется в основном назначением электромагнитного устройства.

### 9.1. РАСЧЕТ НЕРАЗВЕТВЛЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

В неразветвленной магнитной цепи (рис. 9.1, 9.2) магнитный поток во всех участках один и тот же.

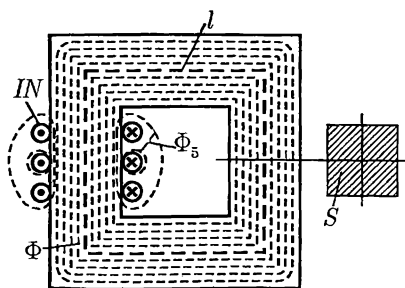


Рис. 9.1

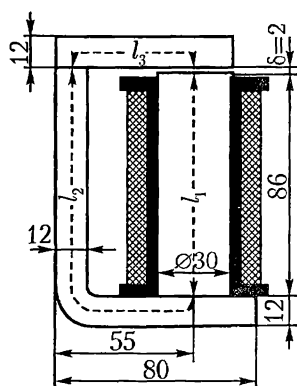


Рис. 9.2

При расчете и конструировании магнитной цепи электромагнитного устройства решаются вопросы, связанные с выбором размеров, формы, материалов. Эти вопросы изучают в специальных курсах.

Здесь рассмотрим расчет для существующей или сконструированной магнитной цепи, размеры и материалы которой, а также расположение обмоток токами известны. При этом решают задачи двух типов.

## Прямая задача

По заданному магнитному потоку в цепи требуется определить намагничивающую силу, необходимую для создания этого потока.

Рассмотрим решение этой задачи для неразветвленной однородной магнитной цепи (см. рис. 9.1) без учета потоков рассеяния.

1. По заданному магнитному потоку и известной площади  $S$  поперечного сечения сердечника находят магнитную индукцию

$$B = \Phi/S.$$

2. Определяют напряженность магнитного поля  $H$  в сердечнике. Зависимость  $B(H)$  — характеристика намагничивания — для стали нелинейная, а магнитная проницаемость  $\mu_r$  — величина непостоянная. Обычно напряженность магнитного поля определяют по кривой намагничивания данного сорта стали (см. рис. 8.30 и прил. 4).

3. Находят намагничивающую силу по закону полного тока [см. формулу (8.41)]:

$$IN = Hl,$$

где  $l$  — длина магнитопровода, подсчитанная по средней линии без учета закруглений, причем условно принимается, что эта средняя линия во всех точках совпадает с линией магнитной индукции.

## Обратная задача

По заданной намагничивающей силе требуется найти магнитный поток в магнитопроводе.

1. Определяют напряженность магнитного поля в сердечнике

$$H = IN/l.$$

2. По кривой намагничивания данного сорта стали находят магнитную индукцию  $B$ .

3. Определяют магнитный поток

$$\Phi = BS.$$

Для конкретных величин  $B$  и  $H$ , определенных в ходе решения задачи, можно подсчитать статическую магнитную проницаемость данного сорта стали по формуле (8.37):

$$\mu_a = B/H,$$

тогда магнитная индукция

$$B = \frac{\mu_a IN}{l},$$

магнитный поток

$$\Phi = \frac{\mu_a INS}{l} = \frac{IN}{l/\mu_a S}.$$

Обозначив знаменатель этого выражения через  $R_m$ :

$$R_m = \frac{l}{\mu_a S}, \quad (9.1)$$

получим

$$\Phi = IN/R_m. \quad (9.2)$$

### Магнитное сопротивление

Выражение (9.2) по форме напоминает закон Ома для электрической цепи: на месте тока стоит магнитный поток, на месте ЭДС — намагничивающая сила (ее называют еще магнитодвижущей силой — МДС). Величину  $R_m$  называют магнитным сопротивлением. Выражение магнитного сопротивления сердечника по форме аналогично выражению для определения сопротивления проводника электрическому току. Нужно отметить, что формулы для электрической и магнитной цепей похожи только написанием. Никакого физического подобия явлений в электрической и магнитной цепях не существует.

Расчет магнитных цепей обычно проводят без определения магнитного сопротивления. Это понятие используют в некоторых случаях при качественном рассмотрении явлений в магнитных цепях. Пользуясь им, найдем, как должна измениться намагничивающая сила катушки, если в стальном сердечнике (см. рис. 9.1) сделать хотя бы незначительный воздушный зазор, а магнитный поток при этом должен остаться таким же.

Предположим, что в стальном сердечнике длиной  $l = 100$  мм имеется воздушный зазор  $\delta = 1$  мм.

## Магнитное сопротивление сердечника

$$R_{1м} = \frac{l}{\mu_a S}.$$

Магнитное сопротивление сердечника с воздушным зазором равно сумме сопротивлений двух участков.

Сопротивление стальной части магнитной цепи при той же магнитной индукции останется практически без изменения, так как уменьшение длины ее очень незначительно ( $\approx 1\%$ ).

Сопротивление воздушного зазора

$$R_{2м} = \frac{\delta}{\mu_0 S};$$

$$\frac{R_{2м}}{R_{1м}} = \frac{\delta \mu_a S}{l \mu_0 S} = \frac{\delta \mu_a}{l \mu_0}.$$

Предположим, что относительная магнитная проницаемость стали  $\mu_r = 1000$ , тогда

$$\mu_a = 1000 \mu_0$$

и

$$\frac{R_{2м}}{R_{1м}} = \frac{1 \cdot 1000 \mu_0}{100} = 10.$$

Магнитное сопротивление воздушного зазора оказывается в 10 раз больше сопротивления стального сердечника.

Отсюда следует, что для обеспечения того же магнитного потока при наличии воздушного зазора в 1 мм нужно иметь намагничивающую силу примерно в 10 раз большую, чем при его отсутствии. Эта разница оказывается во много раз большей для сердечников из специальных сплавов, для которых величина  $\mu_r$  достигает сотен тысяч.

Поэтому во всех случаях, когда по условиям работы электромагнитного устройства без воздушного зазора обойтись нельзя, следует по возможности его сокращать.

## Задачи

**Задача 9.1.** В сердечнике кольцевой формы из электротехнической стали нужно получить магнитный поток  $\Phi = 2 \cdot 10^{-3}$  Вб. Определить: а) ток в обмотке, имеющей  $N = 100$  витков; б) магнитную проницаемость стали при заданном потоке в сердечнике; в) индуктивность катушки.

Размеры сердечника заданы в миллиметрах на рис. 9.3.

**Решение.** Площадь сечения сердечника

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2.$$

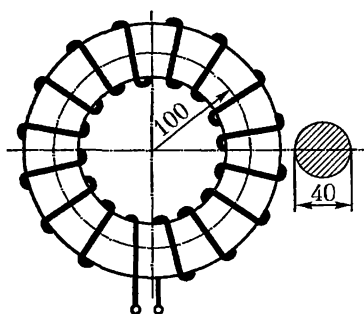


Рис. 9.3

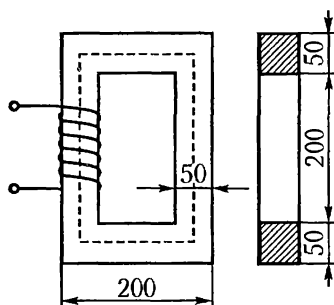


Рис. 9.4

Считая магнитную индукцию по сечению сердечника одинаковой, найдем ее величину по заданному потоку

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{12,56 \cdot 10^{-4}} \approx 1,6 \text{ Тл.}$$

По кривой намагничивания (см. рис. 8.30) определим напряженность магнитного поля:  $H = 50 \text{ А/см} = 5000 \text{ А/м}$ .

Намагничивающая сила, необходимая для создания заданного потока,

$$IN = Hl = 5000 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 3140 \text{ А.}$$

Ток в обмотке

$$I = IN/N = 3140/100 = 31,4 \text{ А.}$$

Магнитная проницаемость стали при найденных величинах  $B$  и  $H$ :

$$\mu_a = B/H = 1,6/5000 = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ Гн/м.}$$

Относительная магнитная проницаемость

$$\mu_r = \frac{\mu_a}{\mu_0} = \frac{3,2 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 254.$$

Индуктивность катушки

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 100}{31,4} \approx 6,36 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

**Задача 9.2.** По условию задачи 9.1 найти те же величины, если материал сердечника — сталь 1211, пермендюр (см. прил. 4). Сравнить полученные результаты с результатами решения предыдущей задачи.

**Задача 9.3.** Определить магнитный поток и магнитное сопротивление сердечника (рис. 9.4), размеры которого заданы в миллиметрах, если в катушке с числом витков  $N = 200$  ток  $I = 6 \text{ А}$ . Сердечник изготовлен из

электротехнической стали 1511, причем 10% его сечения занимает изоляция между листами.

Р е ш е н и е. Намагничивающая сила и напряженность поля

$$IN = 6 \cdot 200 = 1200 \text{ A};$$

$$H = IN/l = 1200/80 = 15 \text{ A/см} = 1500 \text{ A/м},$$

где  $l$  — длина замкнутого сердечника по средней линии; согласно размерам, указанным на чертеже,  $l = 80 \text{ см} = 0,8 \text{ м}$ .

Магнитная индукция по характеристике намагничивания электротехнической стали 1511 (см. прил. 4)  $B = 1,42 \text{ Тл}$ .

Полная площадь сечения сердечника

$$S' = 5 \cdot 5 = 25 \text{ см}^2.$$

Активная площадь

$$S = 25 \cdot 0,9 = 22,5 \text{ см}^2 = 22,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Магнитный поток

$$\Phi = BS = 1,42 \cdot 22,5 \cdot 10^{-4} = 32 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Магнитная проницаемость при заданной величине намагничивающей силы

$$\mu_a = B/H = 1,42/1500 \approx 0,95 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/м}.$$

Магнитное сопротивление

$$R_m = \frac{l}{\mu_a S} = \frac{0,8}{0,95 \cdot 10^{-3} \cdot 22,5 \cdot 10^{-4}} \approx 3,74 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн}.$$

**Задачи 9.4.** По условию задачи 9.3 определить величины магнитного потока и магнитного сопротивления, если ток в катушке уменьшен до 3 А.

## 9.2. РАСЧЕТ НЕРАЗВЕТВЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

Неоднородная магнитная цепь состоит из нескольких участков, отличающихся в общем случае длиной, поперечным сечением и материалом. Чаще всего встречаются магнитные цепи, у которых кроме участков из ферромагнитных материалов имеются воздушные зазоры.



## Прямая задача

При решении прямой задачи размеры и материалы каждого участка цепи известны, а магнитный поток задан; определяют намагничивающую силу. Порядок решения прямой задачи такой же, как и для однородной цепи, но магнитную индукцию и напряженность поля определяют для каждого участка; при этом потоки рассеяния в расчет не принимают.

Магнитная индукция  $k$ -го участка

$$B_k = \Phi / S_k,$$

где  $S_k$  — площадь поперечного сечения  $k$ -го участка.

По магнитной индукции определяют напряженность поля: для участков из ферромагнитных материалов — по кривым намагничивания; для воздушных зазоров и других участков из неферромагнитных материалов — по формуле  $H_0 = B_0 / \mu_0$ .

Далее составляют уравнение согласно закону полного тока:

$$\sum I_k N_k = \sum H_k l_k, \quad (9.3)$$

где  $H_k$  — напряженность магнитного поля  $k$ -го участка (принимают ее одинаковой во всех точках этого участка);  $l_k$  — длина  $k$ -го участка, взятая по средней линии;  $H_k l_k$  — магнитное напряжение  $k$ -го участка (далее магнитное напряжение будем обозначать  $U_m$ );  $\sum I_k N_k$  — алгебраическая сумма намагничивающих сил всех обмоток, входящих в рассматриваемую цепь.

Намагничивающую силу считают положительной в левой части уравнения (9.3), если ее направление, определенное по правилу буравчика, совпадает с направлением обхода магнитного контура. Магнитное напряжение в правой части уравнения считают положительным, если направление магнитного потока совпадает с направлением обхода контура.

Для магнитной цепи (см. рис. 9.2) развернутое уравнение (9.3) имеет вид

$$IN = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_0 \delta = U_{1м} + U_{2м} + U_{3м} + U_{0м}.$$

## Обратная задача

Обратную задачу — определение магнитного потока по заданным намагничивающим силам — нельзя решить так же просто, как для однородной цепи, так как невозможно сразу установить распределение магнитного напряжения между участками.

Нельзя также воспользоваться формулой (9.2), так как магнитное сопротивление участка из ферромагнитного материала зависит

от величины  $\mu_r$ , которая определяется не известной еще магнитной индукцией.

Задачу можно решить методом последовательных приближений.

При наличии в цепи воздушного зазора первое значение магнитного потока можно взять, считая магнитное сопротивление воздушного зазора равным сопротивлению всей магнитной цепи.

Основанием для такого выбора является то, что даже малый воздушный зазор имеет магнитное сопротивление, значительно большее, чем вся остальная часть цепи, выполненная из ферромагнитных материалов (см. 9.1).

Пренебрегая в первом приближении магнитным сопротивлением ферромагнитной части, получим поток

$$\Phi_0 = \frac{IN}{\delta/(\mu_0 S)}.$$

Определить магнитный поток можно, построив кривую намагничивания цепи в целом. Для этого нужно задаться произвольно несколькими величинами магнитного потока и определить соответствующие им величины намагничивающей силы.

По результатам расчета строится кривая намагничивания цепи (рис. 9.5). По кривой находят магнитный поток, соответствующий заданной намагничивающей силе.

Возможен и другой путь графо-аналитического решения обратной задачи (рис. 9.6). По взятым произвольно нескольким величинам магнитного потока находят величины  $U_{м.с} = Hl_c$  (для стальной

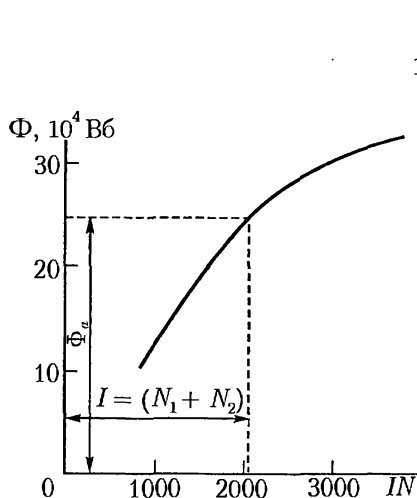


Рис. 9.5

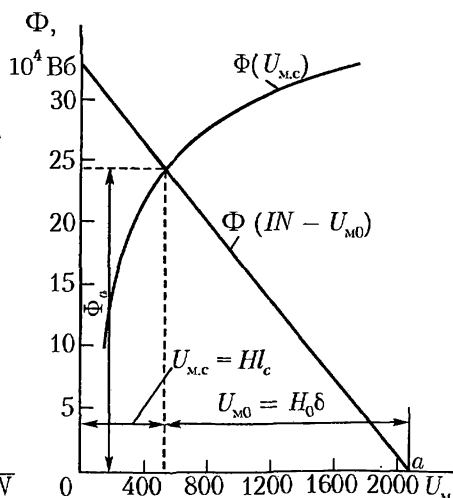


Рис. 9.6

части цепи) и  $U_{m0} = H_0 \delta$  (для воздушного зазора). Затем из начала координат проводят кривую  $\Phi(U_{m.c})$ .

На оси абсцисс находят точку  $a$ , соответствующую заданной намагничивающей силе  $IN$ , из которой влево проводят прямую  $\Phi(IN - U_{m0})$ .

В точке пересечения этих графиков по оси ординат находят искомый поток, а по оси абсцисс — величины  $U_{m.c} = Hl_c$  и  $U_{m0} = H_0 \delta$ .

## Задачи

**Задача 9.5.** Магнитная цепь стального электромагнитного реле клапанного типа имеет поток  $\Phi = 1,2 \cdot 10^{-3}$  Вб. Определить число витков катушки реле, необходимое для возбуждения созданного магнитного потока при токе в катушке 0,2 А. Ярмо и якорь реле прямоугольного сечения  $7,5 \times 1,2$  см, сердечник круглого сечения диаметром 3 см. Другие размеры показаны на рис. 9.2.

**Решение.** Магнитная цепь реле делится на однородные участки:

а) сердечник круглого сечения

$$S_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 3^2}{4} = 7,1 \text{ см}^2, \text{ длина } l_1 = 8,6 \text{ см};$$

б) ярмо прямоугольного сечения

$$S_2 = 7,5 \cdot 1,2 = 9 \text{ см}^2; \text{ длина } l_2 = 14,9 \text{ см (см. рис. 9.2);}$$

в) якорь прямоугольного сечения

$$S_3 = 7,5 \cdot 1,2 = 9 \text{ см}^2; \text{ длина } l_3 = 6,1 \text{ см};$$

г) воздушный зазор, сечение которого принимаем равным сечению сердечника, пренебрегая некоторым увеличением его за счет выпучивания линий магнитной индукции,

$$S_0 = 7,1 \text{ см}^2, \text{ длина } \delta = 0,2 \text{ см.}$$

Магнитная индукция в участках цепи при  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_0 = \Phi$ :

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{7,1 \cdot 10^{-4}} \approx 1,69 \text{ Тл};$$

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^{-4}} \approx 1,33 \text{ Тл};$$

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{1,2 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^{-4}} \approx 1,33 \text{ Тл};$$

$$B_0 = \frac{\Phi_0}{S_0} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{7,1 \cdot 10^{-4}} \approx 1,69 \text{ Тл.}$$

Напряженность магнитного поля в стальных участках определена по кривой намагничивания литой стали (см. прил. 4), которая принята такой же и для ковanej стали:  $H_1 = 57 \text{ А/см}$ ;  $H_2 = 18 \text{ А/см}$ ;  $H_3 = 18 \text{ А/см}$ .

В воздушном зазоре

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1,69}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 135 \cdot 10^4 \text{ А / м} \approx 13500 \text{ А / см}.$$

Составляем уравнение по закону полного тока

$$IN = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_0 \delta;$$

$$IN = 57 \cdot 8,6 + 18 \cdot 14,9 + 18 \cdot 6,1 + 13500 \cdot 0,2 \approx 3568 \text{ А}.$$

Число витков обмотки

$$N = IN/I = 3568/0,2 \approx 17840 \text{ А}.$$

**Задача 9.6.** По условию задачи 9.1 найти число витков катушки, если в стальном сердечнике выпилить поперечный воздушный зазор  $\delta = 2 \text{ мм}$ .

**Задача 9.7.** Две катушки  $N_1 = 2000$  витков и  $N_2 = 600$  витков насажены на стержни сердечника из электротехнической стали 1211 (см. прил. 4). Размеры магнитной цепи показаны на рис. 9.7. Определить магнитный поток при токе в катушках  $I = 0,8 \text{ А}$  и при соединении концов катушек по схеме:  $K_1$  соединен с  $K_2$ , напряжение приложено к зажимам  $H_1$  и  $H_2$ .

**Решение.** Магнитная цепь рис. 9.7 имеет шесть участков, размеры которых найдены из чертежа:

а) воздушный зазор  $\delta_{0.1} = 0,09 \text{ см}$ ,  $S_{0.1} = 5 \cdot 4,5 = 22,5 \text{ см}^2$ ;

б) стержень  $A$   $l_1 = 20 \text{ см}$ ,  $S_1 = 22,5 \text{ см}^2$ ;

в) ярмо  $B$   $l_2 = 25 \text{ см}$ ,  $S_2 = 22,5 \text{ см}^2$ ;

г) стержень  $B$   $l_3 = 20 \text{ см}$ ,  $S_3 = 22,5 \text{ см}^2$ ;

д) воздушный зазор  $\delta_{0.2} = 0,09 \text{ см}$ ,  $S_{0.2} = 22,5 \text{ см}^2$ ;

е) ярко  $D$   $l_6 = 25 \text{ см}$ ,  $S_6 = 22,5 \text{ см}^2$ .

Задаемся несколькими величинами магнитного потока, причем наибольший возможный поток найдем в предположении, что магнитное сопротивление создают только воздушные зазоры [см. формулы (9.1), (9.2)]:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{(IN_1 + IN_2)\mu_0 S_0}{\delta} = \\ &= \frac{0,8(2000 + 600) \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 22,5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 0,09 \cdot 10^{-2}} \approx \\ &\approx 32,7 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}. \end{aligned}$$

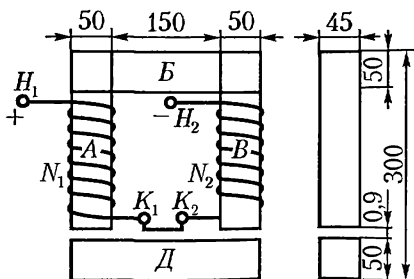


Рис. 9.7

При определении потока учтено, что катушки включены согласно, поэтому их намагничивающие силы сложены.

Для полученного потока найдем намагничивающую силу с учетом стальной части магнитной цепи. Последовательность решения такая же, как и при решении задачи 9.5. Результаты расчета для  $\Phi_0$  и других величин потока сведены в табл. 9.1

Таблица 9.1

| Участок цепи                     | $\Phi, 10^4$<br>Вб | $B,$<br>Тл | $H,$<br>А/см | $HI = U_m,$<br>А | $\Phi, 10^4$<br>Вб               | $B,$<br>Тл | $H,$<br>А/см | $HI = U_m,$<br>А | $\Phi, 10^4$<br>Вб               | $B,$<br>Тл | $H,$<br>А/см | $HI = U_m,$<br>А |
|----------------------------------|--------------------|------------|--------------|------------------|----------------------------------|------------|--------------|------------------|----------------------------------|------------|--------------|------------------|
| Воздушный зазор                  | 32,7               | 1,45       | 11500        | 1035             | 30                               | 1,33       | 10600        | 955              | 25                               | 1,11       | 8850         | 796              |
| Стержень А                       | 32,7               | 1,45       | 19,5         | 390              | 30                               | 1,33       | 12,5         | 250              | 25                               | 1,11       | 6,5          | 130              |
| Ярмо В                           | 32,7               | 1,45       | 19,5         | 488              | 30                               | 1,33       | 12,5         | 312              | 25                               | 1,11       | 6,5          | 162,5            |
| Стержень В                       | 32,7               | 1,45       | 19,5         | 390              | 30                               | 1,33       | 12,5         | 250              | 25                               | 1,11       | 6,5          | 130              |
| Воздушный зазор                  | 32,7               | 1,45       | 11500        | 1035             | 30                               | 1,33       | 10600        | 955              | 25                               | 1,11       | 8850         | 796              |
| Якорь Д                          | 32,7               | 1,45       | 19,5         | 488              | 30                               | 1,33       | 12,5         | 312              | 25                               | 1,11       | 6,5          | 162,5            |
| $IN = \sum U_m = 3826 \text{ А}$ |                    |            |              |                  | $IN = \sum U_m = 3034 \text{ А}$ |            |              |                  | $IN = \sum U_m = 2177 \text{ А}$ |            |              |                  |
| Воздушный зазор                  | 20                 | 0,89       | 7100         | 640              | 15                               | 0,67       | 5340         | 480              | 10                               | 0,445      | 3540         | 318              |
| Стержень А                       | 20                 | 0,89       | 3,9          | 78               | 15                               | 0,67       | 2,4          | 48               | 10                               | 0,445      | 1,5          | 30               |
| Ярмо В                           | 20                 | 0,89       | 3,9          | 97,5             | 15                               | 0,67       | 1,4          | 60               | 10                               | 0,445      | 1,5          | 37,5             |
| Стержень В                       | 20                 | 0,89       | 3,9          | 78               | 15                               | 0,67       | 2,4          | 48               | 10                               | 0,445      | 1,5          | 30               |
| Воздушный зазор                  | 20                 | 0,89       | 7100         | 640              | 15                               | 0,67       | 5340         | 480              | 10                               | 0,445      | 3540         | 318              |
| Якорь Д                          | 20                 | 0,89       | 3,9          | 97,5             | 15                               | 0,67       | 2,4          | 60               | 10                               | 0,445      | 1,5          | 37,5             |
| $IN = \sum U_m = 1631 \text{ А}$ |                    |            |              |                  | $IN = \sum U_m = 1176 \text{ А}$ |            |              |                  | $IN = \sum U_m = 771 \text{ А}$  |            |              |                  |

График зависимости  $\Phi(IN)$  построен на рис. 9.5. По этой кривой определяем искомый поток, соответствующий намагничивающей силе:  $I(N_1 + N_2) = 2080$  А,  $\Phi_a = 24,4 \cdot 10^{-4}$  Вб.

Для графо-аналитического способа определения потока по типу рис. 9.6 из табл. 9.1 выпишем значения  $\Phi$  и  $HI_c$  в табл. 9.2.

Таблица 9.2

| $\Phi, 10^4$ Вб     | 10  | 15  | 20  | 25  | 30   | 32,7 |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|------|------|
| $U_{м.с} = HI_c, A$ | 135 | 216 | 351 | 585 | 1124 | 1756 |

Графики зависимостей  $\Phi(U_{м.с})$  и  $\Phi(IN - U_{м.0})$  показаны на рис. 9.6, причем прямая  $\Phi(IN - U_{м.0})$  построена по двум точкам. При  $IN - U_{м.0} = 0$   $\Phi = \Phi_0 = 32,7 \cdot 10^{-4}$  Вб, при  $\Phi = 0$   $IN - U_{м.0} = IN = 2080$  А.

В точке пересечения графиков определяем искомый магнитный поток, а также величины  $HI_c = U_{м.с}$  и  $H_0\delta = U_{м.0}$ , соответствующие этому потоку:  $\Phi_a = 24,4 \cdot 10^{-4}$  Вб;  $U_{м.с} = HI_c = 530$  А;  $H_0\delta = U_{м.0} = 1550$  А.

**Задача 9.8.** Катушки, изображенные на рис. 9.7, включены по следующей схеме: соединены между собой зажимы  $K_1$  и  $H_2$ ; напряжение подведено к зажимам  $H_1$  и  $K_2$ . Определить магнитный поток при тех же условиях, что и в задаче 9.7

### 9.3. РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННОЙ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

В разветвленной магнитной цепи магнитные потоки в общем случае различны в разных ветвях (рис. 9.8).

Разветвленные магнитные цепи делятся на симметричные и несимметричные.

Симметричную магнитную цепь мысленно можно разделить на неразветвленные цепи таким образом, что во всех участках выде-

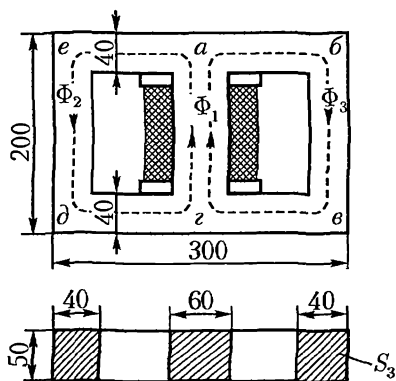


Рис. 9.8

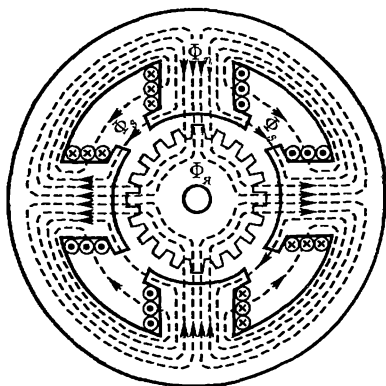


Рис. 9.9



щения, в которую войдут постоянные магнитные сопротивления участков и намагничивающие силы.

На рис. 9.11, а показана схема замещения магнитной цепи (см. рис. 9.8). Пренебрегая потоками рассеяния, расчет магнитной цепи можно выполнить аналогично расчету электрической цепи, решая систему линейных уравнений, составленных для узлов [см. формулу (9.4)] и контуров [см. формулу (9.3)].

## Графический расчет разветвленной цепи

Элементы схем замещения магнитных цепей, осуществляемых на практике (кроме элементов, соответствующих воздушным зазорам), имеют нелинейные характеристики  $\Phi(U_m)$ , так как магнитная проницаемость ферромагнитных материалов зависит от напряженности поля. Нелинейными являются и магнитные цепи в целом.

Аналогия с электрической цепью указывает на возможность графического расчета нелинейной магнитной цепи в порядке, изложенном в 6.2. Первый этап расчета состоит в построении характеристик  $\Phi(U_m)$  для каждого участка цепи в общей системе координат. Для этого используются характеристики намагничивания материалов, из которых изготовлена магнитная цепь. Например, чтобы построить характеристику  $\Phi_3(U_{3m})$  нужно ряд величин напряженности поля  $H_3$ , взятых из характеристики намагничивания материала третьего участка магнитной цепи, умножить на длину этого участка ( $H_3 l = U_{3m}$ ), а соответствующие им величины магнитной индукции умножить на площадь  $S_3$  этого участка ( $B_3 S_3 = \Phi_3$ ).

По полученным значениям  $U_{3m}$  и  $\Phi_3$  строят график  $\Phi_3(U_{3m})$  (рис. 9.11, б). Магнитные сопротивления  $R_{2m}$  и  $R_{3m}$  соединены параллельно, поэтому магнитные напряжения второго и третьего участков одинаковы:  $U_{2m} = U_{3m} = U_{2.3m}$ .

Сумма магнитных потоков этих участков равна магнитному потоку первого участка (сопротивление  $R_{1m}$ ):  $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$ .

Складывая магнитные потоки  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  для ряда значений магнитного напряжения, получим кривую  $\Phi_1(U_{2.3m})$ .

На рис. 9.11, б это показано для одного значения  $U_{мп}$ . Отрезки 4—3

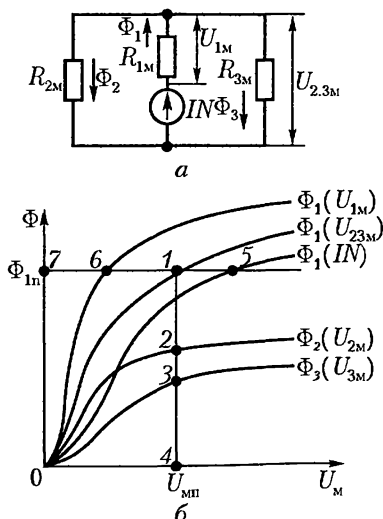


Рис. 9.11



и 4–2 в масштабе магнитных потоков выражают потоки  $\Phi_3$  и  $\Phi_2$ . Сумма этих отрезков, равная отрезку 4–1, выражает магнитный поток  $\Phi_{1п}$ . Магнитное сопротивление  $R_{1м}$  и сопротивление, эквивалентное  $R_{2м}$  и  $R_{3м}$ , соединены последовательно. Поэтому намагничивающая сила всей цепи  $IN$  равна сумме магнитных напряжений  $U_{1м}$  и  $U_{2.3м}$ :  $IN = U_{1м} + U_{2.3м}$ . Магнитные же потоки участков цепи с сопротивлениями  $R_{1м}$  и  $R_{2.3м}$  одинаковы.

Складывая магнитные напряжения  $U_{1м}$  и  $U_{2.3м}$  для ряда значений магнитного потока, получим кривую  $\Phi_1(IN)$ . На рис. 9.11, б это показано для одного значения  $\Phi_{1п}$ . Отрезки 7–6 и 7–1 в масштабе магнитных напряжений выражают магнитные напряжения  $U_{1м}$  и  $U_{2.3м}$ . Сумма этих отрезков дает отрезок 7–5, выражающий намагничивающую силу  $IN$ .

Выполнив указанные построения, нетрудно решить различные задачи расчета магнитной цепи.

### Задачи

**Задача 9.9.** Катушка, имеющая 500 витков, расположена на среднем стержне магнитопровода, изготовленного из стали 1511 (см. рис. 9.8) Определить ток в катушке, если в крайнем стержне магнитный поток  $\Phi_2 = \Phi_3 = 2 \cdot 10^{-3}$  Вб. Рассеяние потока не учитывается.

**Решение.** В данной симметричной цепи можно наметить два одинаковых в магнитном отношении контура:  $a-b-c-z-a$  и  $a-e-d-z-a$ . В каждом из них по два участка:  $l_1 = 16$  см;  $S_1 = 6 \cdot 5 = 30$  см<sup>2</sup>,  $l_2 = l_3 = 42$  см;  $S_2 = S_3 = 4 \cdot 5 = 20$  см<sup>2</sup>.

Рассматривая один из контуров, решим задачу в порядке, принятом для неразветвленной цепи:

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ Тл.}$$

Магнитный поток в среднем стержне в два раза больше, чем в крайних:  $\Phi_1 = 2\Phi_2$ ,

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-4}} \approx 1,33 \text{ Тл.}$$

По кривым намагничивания стали 1511 (см. прил. 4) находим:  $H_2 = 3$  А/см,  $H_1 = 8$  А/см.

По закону полного тока

$$IN = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 8 \cdot 16 + 3 \cdot 42 = 254 \text{ А.}$$

Ток в катушке

$$I = IN/N = 254/500 \approx 0,51 \text{ А.}$$

**Задача 9.10.** В крайнем стержне магнитопровода, взятого по условию задачи 9.9, имеется воздушный зазор  $\delta = 0,1$  см. Определить, как нужно изменить ток в катушке, чтобы сохранить прежнюю величину потока в этом стержне (см. рис. 9.10).

**Решение.** При наличии воздушного зазора в одном крайнем стержне магнитная цепь становится несимметричной.

В контуре  $a-e-d-z-a$  сохранились те же участки; в контуре  $a-b-e-z-a$   $l_1 = 16$  см;  $l_3 = 41,9$  см;  $\delta = 0,1$  см;  $S_1 = 30$  см<sup>2</sup>;  $S_3 = 20$  см<sup>2</sup>;  $S_0 = 20$  см<sup>2</sup>.

Магнитная индукция в воздушном зазоре и крайнем стержне  $b-e$ :

$$B_0 = B_3 = \frac{\Phi_3}{S_0} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ Тл.}$$

Напряженность поля

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 0,796 \cdot 10^6 \text{ А/м} \approx 7960 \text{ А/см};$$

по кривой намагничивания стали 1511  $H_3 = 3$  А/см.

В магнитной цепи можно наметить третий контур ( $a-b-e-z-d-e-a$ ). Для этого контура по закону полного тока

$$0 = -H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_0 \delta;$$

$$H_2 = \frac{H_3 l_3 + H_0 \delta}{l_2} = \frac{3 \cdot 41,9 + 7960 \cdot 0,1}{42} \approx 22 \text{ А/см},$$

Магнитная индукция на участке  $l_2$  по кривой намагничивания  $B_2 = 1,48$  Тл.

Магнитный поток на участке  $l_2$ :

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 1,48 \cdot 20 \cdot 10^{-4} = 2,96 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Магнитный поток в среднем стержне (участок  $l_1$ ) определим на основании первого закона Кирхгофа для узла  $a$ :

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 2,96 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} = 4,96 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Магнитная индукция на этом участке

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{4,96 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-4}} \approx 1,65 \text{ Тл.}$$

Напряженность поля  $H_1 = 69,5$  А/см.

Для одного из контуров, включающего средний стержень, например  $a-b-e-z-a$ , по закону полного тока

$$IN = H_1 l_1 + H_3 l_3 + H_0 \delta,$$

$$IN = 69,5 \cdot 16 + 3 \cdot 41,9 + 7960 \cdot 0,1 \approx 2034 \text{ А.}$$

Ток в катушке

$$I = IN/N = 2034/500 = 4,07 \text{ А.}$$

**Вывод.** Для того чтобы сохранить в крайнем стержне такой же магнитный поток при наличии воздушного зазора  $\delta = 0,1$  см, требуется увеличить ток в катушке почти в восемь раз по сравнению с тем случаем, когда зазор отсутствует.

**Задача 9.11.** Рассчитать магнитную цепь по условию задачи 9.9, если в среднем стержне (см. рис. 9.8) имеется воздушный зазор  $\delta = 0,1$  см.

## 9.4. ПОСТОЯННЫЕ МАГНИТЫ

В измерительных приборах, электрической аппаратуре и других устройствах в качестве источников намагничивающей силы широко применяют постоянные магниты.

На рис. 9.12 схематично изображены магнитные системы магнитоэлектрического измерительного прибора (а) и поляризованного реле (б).

Эти системы, как и большинство им подобных, имеют несколько участков: 1) из магнитно-твердого материала — постоянного магнита 1; 2) из магнитно-мягкого материала 2, служащего магнитопроводом, и воздушного зазора 3, форма и размеры которого определяют конструкцией и назначением устройства.

При расчете магнитной цепи с постоянным магнитом требуется определить магнитный поток и индукцию в воздушном зазоре или по заданному потоку найти оптимальные размеры постоянного магнита (наименьшие объем и габариты).

### Характеристики размагничивания постоянных магнитов

Величины остаточной магнитной индукции  $B_r$  и коэрцитивной силы  $H_c$  характеризуют материал постоянного магнита: чем они больше, тем выше его качество. Как известно, на петле гистерезиса  $B_r$  соответствует  $H = 0$ , а при  $B = 0$   $H = H_c$ .

Промежуточные магнитные состояния определяются частью петли магнитного гистерезиса, лежащей во второй четверти, — характеристикой размагничивания. На рис. 9.13 показаны характеристики размагничивания некоторых магнитно-твердых сплавов: 1 — АНКО-4; 2 — АНКО-2; 3 — АН-2; 4 — сталь с 30% кобальта. Такие характеристики используют при расчете постоянных магнитов.

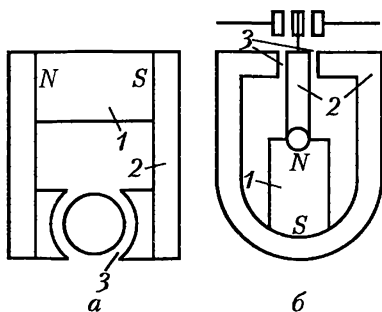


Рис. 9.12

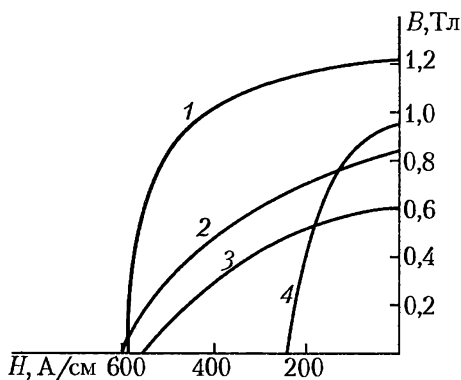


Рис. 9.13

Согласно закону полного тока, сумма магнитных напряжений участков магнитной цепи (см. рис. 9.12) равна нулю, так как внешняя намагничивающая сила (ампер-витки) отсутствует:

$$H_{\tau} l_{\tau} + \sum Hl = 0 \text{ или } U_{\text{м.т}} = -\sum U_{\text{м}}, \quad (9.5)$$

где  $U_{\text{м.т}}$  — магнитное напряжение постоянного магнита;  $\sum U_{\text{м}} = \sum (U_{\text{м.с}} + U_{\text{м0}})$  — сумма магнитных напряжений всех участков магнитной цепи, включая воздушные зазоры, но без постоянного магнита.

Левая и правая части равенства (9.5) связаны с магнитной индукцией и потоком определенными зависимостями:  $\Phi_{\tau}(U_{\text{м.т}})$  — кривая размагничивания постоянного магнита (по форме повторяет кривую намагничивания материала, из которого выполнен постоянный магнит);  $\Phi_{\text{м}}(U_{\text{м.с}})$  — кривая намагничивания части конструкции устройства, изготовленной из магнитно-мягкого материала;  $\Phi_0(U_{\text{м0}})$  — прямая, проходящая через начало координат и повторяющая в других масштабах зависимость  $B_0 = \mu_0 H_0$ .

### Определение магнитного потока в магнитной цепи с постоянным магнитом

Пренебрегая потоком рассеяния ( $\Phi_{\text{м}} \approx \Phi_{\tau} \approx \Phi_0 = \Phi$ ) и магнитным напряжением в участках из магнитно-мягкого материала ( $U_{\text{м.т}} \approx -U_{\text{м0}}$ ), можно построить в общей системе координат зависимости  $\Phi(U_{\text{м.т}})$  и  $\Phi(-U_{\text{м0}})$ .

В этом случае искомый магнитный поток  $\Phi_0$  определяется точкой их пересечения (рис. 9.14).

Магнитная индукция в воздушном зазоре

$$B_0 = \Phi_0 / S_0.$$

Из равенства (9.5) следует, что напряженности поля в воздушном зазоре и магните направлены в противоположные стороны.

При отсутствии воздушного зазора (постоянный магнит замкнут) остаточная индукция имеет величину  $B_r$ , а при наличии зазора будет меньше  $B_r$ . Воздушный зазор создает эффект размагничивания магнита.

### Задачи

**Задача 9.12.** Определить магнитный поток и индукцию в воздушном зазоре постоянного магнита (см. рис. 9.12, а), если магнит, изготовленный из сплава АНКО-2, имеет длину  $l_{\tau} = 10$  см;  $S_{\tau} = 4$  см<sup>2</sup>. Полюса и цилиндрический сердечник изготовлены из магнитно-мягкой стали, имеют общую длину  $l_{\text{м}} = 15$  см; воздушный зазор между полюсом и сердечником  $\delta = 0,2$  см с каждой стороны и площадь  $S = 10$  см<sup>2</sup>. Характеристика размагничивания сплава АНКО-2 представлена на рис. 9.13.

**Решение.** Построим зависимость магнитного потока в магните от магнитного напряжения  $\Phi(U_{м.т})$ .

Для этого, согласно кривой 2 на рис. 9.13, берем величины  $B$  и  $H$ , подсчитываем  $\Phi$  и  $U_{м.т}$  и результаты подсчета сводим в табл. 9.3.

Для тех же величин магнитного потока определим  $U_{м.0} = H\delta$  для воздушного зазора. Величинами  $H_c l_c$ , для участков из стали пренебрегаем из-за их незначительной величины.

Таблица 9.3

| $B, \text{Тл}$                    | 0,82 | 0,7  | 0,6  | 0,4  | 0,2  | 0    |
|-----------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| $\Phi = BS_r, 10^{-4} \text{ Вб}$ | 3,28 | 2,8  | 24   | 1,6  | 0,8  | 0    |
| $H_r, \text{А/см}$                | 0    | 200  | 300  | 450  | 550  | 600  |
| $U_{м.т}, \text{А}$               | 0    | 2000 | 3000 | 4500 | 5500 | 6000 |

Для потока  $\Phi = 3,28 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$ ;

$$B_0 = \frac{\Phi_0}{S_0} = \frac{3,28 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 10^{-4}} = 0,328 \text{ Тл}; \quad H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{0,328}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 2610 \text{ А/см};$$

$$U_{м.0} = H_0 \delta = 2610 \cdot 0,4 = 1044 \text{ А}.$$

Результаты подсчетов сводим в табл. 9.4.

Таблица 9.4

| $\Phi, 10^{-4} \text{ Вб}$       | 3,28  | 2,8  | 2,4  | 1,6  | 0,8  | 0 |
|----------------------------------|-------|------|------|------|------|---|
| $B_0, \text{Тл}$                 | 0,328 | 0,28 | 0,24 | 0,16 | 0,08 | 0 |
| $H_0, \text{А/см}$               | 2610  | 2220 | 1910 | 1270 | 637  | 0 |
| $U_{м.0} = H_0 \delta, \text{А}$ | 1044  | 890  | 764  | 508  | 255  | 0 |

Зависимости  $\Phi(U_{м.т})$  и  $\Phi(U_{м.0})$  построены на рис. 9.14. В точке пересечения этих графиков находим магнитный поток:  $\Phi_0 = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$ . Магнитная индукция в воздушном зазоре

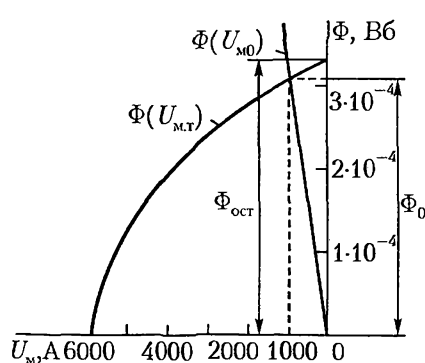


Рис. 9.14

$$B_0 = \frac{\Phi_0}{S_0} = \frac{3,1 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 10^{-4}} = 0,31 \text{ Тл}.$$

**Задача 9.13.** Определить магнитный поток и индукцию в воздушном зазоре поляризованного реле (см. рис. 9.12, б), если постоянный магнит изготовлен из сплава АНКО-2, имеет длину  $l_r = 4 \text{ см}$ ;  $S_r = 8 \text{ см}^2$ . Размеры ярма и якоря:  $l_{яр} = 10 \text{ см}$  (на одну сторону),  $S_{яр} = 4 \text{ см}^2$ ;  $l_{як} = 4 \text{ см}$ ,  $S_{як} = 2 \text{ см}^2$ ; воздушный зазор  $\delta = 0,3 \text{ см}$ ,  $S_0 = 4 \text{ см}^2$ .

## ГЛАВА 10

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Электромагнитная индукция — это одно из явлений, на которых основаны электро- и радиотехника.

Для оценки важности этого явления достаточно привести примеры взаимного преобразования механической и электрической энергии, передачи и распределения электрической энергии, передачи и приема информации.

Знание явления и закона электромагнитной индукции необходимо при изучении электрических цепей переменного тока.

### 10.1. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Явление электромагнитной индукции открыл в 1831 г. английский физик М. Фарадей и на основе этого открытия сформулировал один из важнейших физических законов — закон электромагнитной индукции.

#### Явление электромагнитной индукции

Явление электромагнитной индукции можно продемонстрировать следующими опытами. Внутри цилиндрической катушки, концы которой соединены с гальванометром, с определенной скоростью вводится постоянный магнит. Стрелка гальванометра отклоняется, обнаруживая электрический ток в катушке (рис. 10.1, а). При удалении магнита от катушки стрелка гальванометра отклоняется в обратную сторону.

Гальванометр обнаруживает ток в катушке, если перемещать ее относительно другой катушки с током, которую назовем первичной

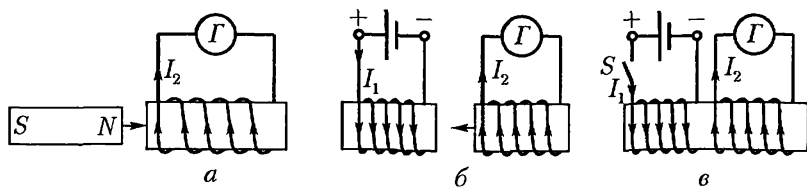


Рис. 10.1

(рис. 10.1, б). На рис. 10.1, в показаны две катушки, расположенные на одном сердечнике. Одна из них присоединена к источнику электрической энергии через ключ, другая замкнута через гальванометр.

Электрические катушки между собой не связаны, но при замыкании ключа наблюдается отклонение стрелки гальванометра в одну сторону, при размыкании — в другую.

Несмотря на внешнее различие опытов, их одинаковый результат дает основание полагать, что непосредственная причина возникновения электрического тока в цепи вторичной катушки в этих опытах одинакова.

Действительно, во всех рассмотренных опытах изменяется потокосцепление вторичной катушки: в первых двух случаях — благодаря изменению положения ее в магнитном поле, в третьем случае — в связи с увеличением тока в первичной катушке после замыкания ключа и уменьшением его после размыкания.

**Возбуждение электродвижущей силы в контуре при изменении потокосцепления этого контура называется электромагнитной индукцией.**

Под действием индуцированной ЭДС в замкнутом контуре возникает индуцированный электрический ток. Возникновение тока означает, что во вторичный контур передается энергия, которая при наличии сопротивления в цепи превращается в теплоту. В первых двух опытах электрическая энергия возникла за счет механической работы при перемещении постоянного магнита (см. рис. 10.1, а) или катушки (см. рис. 10.1, б). В третьем опыте обе катушки неподвижны, т.е. механическая работа не совершается. Электрическая энергия во вторичной катушке возникает за счет энергии источника, включенного в цепи первичной катушки. В этом случае электрическая энергия передается из одной цепи в другую посредством магнитного поля.

Преобразование энергии из одного вида в другой посредством магнитного поля или изменение энергии поля количественно определяются через абсолютное значение изменения потокосцепления. Явление электромагнитной индукции, сопровождающее эти процессы, связано со скоростью изменения потокосцепления.

## **Закон электромагнитной индукции**

Закон электромагнитной индукции устанавливает количественное выражение для индуцированной ЭДС.

Электродвижущая сила, индуцируемая в замкнутом контуре при изменении сцепленного с ним магнитного потока, равна скорости изменения потокосцепления, взятой с отрицательным знаком: ~

$$\boxed{E = -\frac{d\Phi}{dt}}. \quad (10.1)$$

В этой форме закон электромагнитной индукции дал Фарадей.

В катушке, имеющей несколько витков, общая ЭДС зависит от числа витков  $N$ . Если все витки катушки сцеплены с одинаковым магнитным потоком, то ЭДС будет в  $N$  раз больше:

$$E = -\frac{dNd\Phi}{dt}, \quad E = \frac{Nd\Phi}{dt}. \quad (10.2)$$

В общем случае витки катушки могут быть сцеплены с разными потоками, тогда ее общая ЭДС определяется алгебраической суммой ЭДС отдельных витков:

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = -\frac{d\Phi_1 + d\Phi_2 + \dots + d\Phi_n}{dt}.$$

В числителе последнего выражения дана алгебраическая сумма изменений потокосцепления отдельных витков катушек, т. е. изменение общего потокосцепления.

Таким образом, ЭДС катушки определяется скоростью изменения ее общего потокосцепления, и общая формула закона электромагнитной индукции имеет вид

$$\boxed{E = -\frac{d\Psi}{dt}}. \quad (10.3)$$

## Правило Ленца

В 1833 г. профессор Петербургского университета Э. Х. Ленц установил общее правило для определения направления индуцированного тока и электромагнитных сил, возникающих в результате взаимодействия магнитного поля с индуцированным током.

Если магнитный поток, сцепленный с проводящим замкнутым контуром, изменяется, в контуре возникают явления электрического и механического характера, препятствующие изменению магнитного потока.

Правило Ленца отражает проявления электромагнитной инерции в системах контуров с токами. Этому правилу соответствует знак минус в формулах, выражающих закон электромагнитной индукции [см. (10.1) — (10.3)], если принять положительными



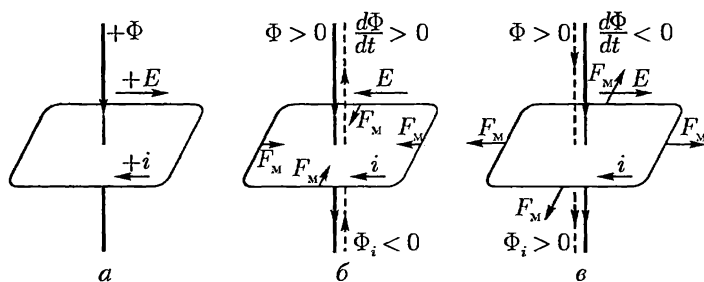


Рис. 10.2

направления магнитного потока и индуцированной в контуре ЭДС, удовлетворяющие правилу буравчика (рис. 10.2. а).

Предположим, что положительный магнитный поток, сцепленный с контуром, увеличивается. Приращение потока  $d\Phi$  и скорость его изменения  $d\Phi/dt$  положительны ( $d\Phi > 0$ ,  $d\Phi/dt > 0$ ). Индуцированная в контуре ЭДС, согласно правилу Ленца, направлена против выбранного положительного направления, т.е. отрицательна ( $E \leq 0$ ) (рис. 10.2, б). Индуцированный в контуре ток  $i$  (направление его совпадает с направлением ЭДС) создает вторичный магнитный поток  $\Phi_i$  (который, согласно правилу буравчика, действует против основного потока  $\Phi$ , т.е. препятствует его увеличению). Одновременно в контуре возникают электромагнитные силы, стягивающие контур (направление силы определяется правилом левой руки).

Тенденция к уменьшению поверхности, ограниченной контуром, направлена в данном случае на уменьшение основного потока.

При уменьшении основного магнитного потока ( $d\Phi < 0$  и  $d\Phi/dt < 0$ ) индуцированная ЭДС положительна ( $E > 0$ ), т.е. совпадает с выбранным положительным направлением (рис. 10.2, в). Индуцированный в контуре ток  $i$  создает вторичный магнитный поток, совпадающий по направлению с основным потоком. Вторичный магнитный поток, возникновение которого можно рассматривать как реакцию системы контуров с токами на изменение ее магнитного состояния, в данном случае препятствует уменьшению основного магнитного потока. Возникающие при этом электромагнитные силы стремятся расширить контур с током, т.е. увеличить магнитный поток, сцепленный с ним.

Факторы, противодействующие изменению магнитного потока, тем сильнее, чем быстрее изменяется поток.

Электромагнитная инерция в системах контуров с токами подобна механической инерции в системах движущихся тел: при всяком измерении скорости возникают силы инерции, препятствующие этому изменению.

## Задачи

**Задача 10.1.** Магнитный поток, создаваемый током в катушке, изменяется по графику рис. 10.3. Построить график ЭДС, индуцированной в катушке числом витков  $N = 15$ , если наибольшая величина потока  $\Phi_m = 0,2$  Вб.

Решение. ЭДС в катушке определяют по формуле (10.2), где  $d\Phi/dt$  — скорость изменения магнитного потока. На участке 0–1 отрицательный магнитный поток в течение  $t_1 = 0,02$  с растет от нуля до  $\Phi_m = 0,2$  Вб по линейному закону, поэтому скорость изменения потока постоянна и отрицательна:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{0,2}{0,02} = -10 \text{ Вб/с}.$$

При постоянной скорости изменения магнитного потока ЭДС будет постоянной:

$$E = -\frac{Nd\Phi}{dt} = +15 \cdot 10 = 150 \text{ В}.$$

Знак ЭДС определим по правилу Ленца.

Условно-положительные направления магнитного потока и индуцированной ЭДС в катушке показаны на рис. 10.4, а.

На участке 0–1 кривой  $\Phi(t)$  отрицательный магнитный поток увеличивается. Направления магнитного потока и тока в катушке, соответствующие этому отрезку времени, отмечены на рис. 10.4, б. Индуцированная ЭДС препятствует росту магнитного потока, т.е. направлена против тока, создающего поток (пунктирные стрелки). В данном случае ЭДС положи-

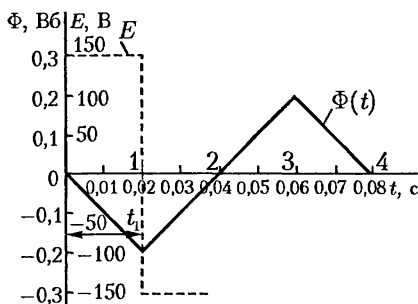


Рис. 10.3

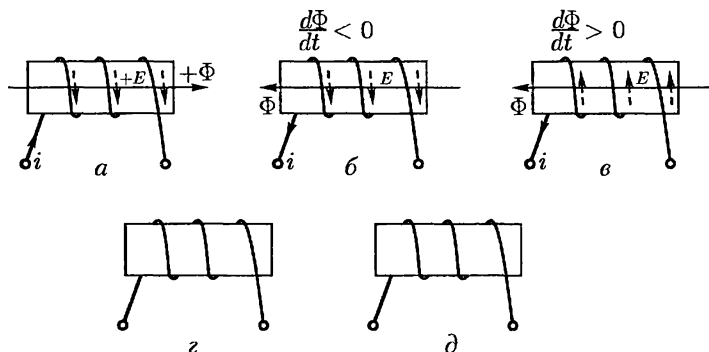


Рис. 10.4

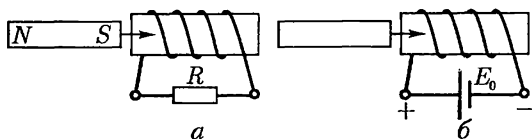


Рис. 10.5

тельна, так как ее направление совпадает с условно-положительным направлением.

На участке 1–2 отрицательный магнитный поток уменьшается с той же скоростью, с какой он раньше увеличивался. Индуцированная ЭДС, сохраняя свою величину 150 В, препятствует уменьшению потока, т. е. направлена, так же как ток в катушке (рис. 10.4, в) против условно-положительного направления. Из формулы (10.2) также следует, что ЭДС отрицательна.

Проводя аналогичные рассуждения, определите величину и направление ЭДС в катушке в течение отрезков времени 2–3 и 3–4. Начертите график ЭДС и на рис 10.4, з, д отметьте направления тока, потока и ЭДС в катушке.

**Задача 10.2.** Внутри катушки (рис. 10.5, а) вводится постоянный магнит. Определить направление индуцированного тока в цепи катушки. За счет какой энергии будет выделяться теплота в резисторе при наличии в нем индуцированного тока?

**Задача 10.3.** Катушка, имеющая 100 витков, входит в электрическую цепь (рис. 10.5, б), где действует ЭДС  $E = 10$  В при сопротивлении цепи  $R = 2$  Ом.

Определить ток в катушке для следующих случаев: а) внутрь катушки вводится стальной сердечник, при этом магнитный поток изменяется с постоянной скоростью 0,02 Вб/с; б) стальной сердечник удаляется из катушки с такой же скоростью; в) катушка без сердечника, г) катушка с неподвижным сердечником.

## 10.2. НАВЕДЕНИЕ ЭДС В ПРОВОДНИКЕ, ДВИЖУЩЕМСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В проводнике, движущемся в магнитном поле так, что он пересекает линии магнитной индукции, индуцируется электродвижущая сила. Это явление — разновидность электромагнитной индукции.

### Выражение ЭДС в проводнике, движущемся в магнитном поле

Рассмотрим отрезок  $AB$  прямолинейного проводника, который движется, пересекая под прямым углом линии магнитной индукции равномерного поля с магнитной индукцией  $B$ .

На рис. 10.6, *а* показан проводник *АВ*, который катится в направлении механической силы  $F_{\text{мх}}$  по металлическим шинам, соединенным между собой через сопротивление  $R$ .

Проводник *АВ*, отрезки шин и сопротивление образуют замкнутый проводящий контур. При перемещении проводника на расстояние  $b$  с постоянной скоростью  $v$  магнитный поток, сцепленный с этим контуром, увеличивается за счет увеличения площади поверхности, ограниченной контуром.

Приращение магнитного потока

$$\Delta\Phi = B\Delta S = Bbl,$$

где  $l$  — длина части проводника *АВ*, находящейся в магнитном поле.

Абсолютная величина ЭДС в контуре

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{Bbl}{\Delta t},$$

где  $\Delta t$  — время, в течение которого проводник *АВ* переместился на расстояние  $b$ ;  $b/\Delta t = v$  — скорость движения проводника; поэтому

$$E = Bvl. \quad (10.4)$$

Если проводник будет перемещаться под углом  $\alpha$   $90^\circ$  к направлению магнитной индукции поля (рис. 10.6, *б*), то приращение магнитного потока за время  $\Delta t$  при той же скорости  $v$  будет

$$\Delta\Phi = Blbs \sin \alpha,$$

ЭДС в контуре

$E = Bvl \sin \alpha.$

(10.5)

При  $\alpha = 90^\circ$  из (10.5) можно получить формулу (10.4), по которой подсчитывается наибольшая величина ЭДС при данных величинах  $B$ ,  $v$ ,  $l$ . При  $\alpha = 0$  (проводник движется вдоль линий магнитной индукции) ЭДС равна нулю.

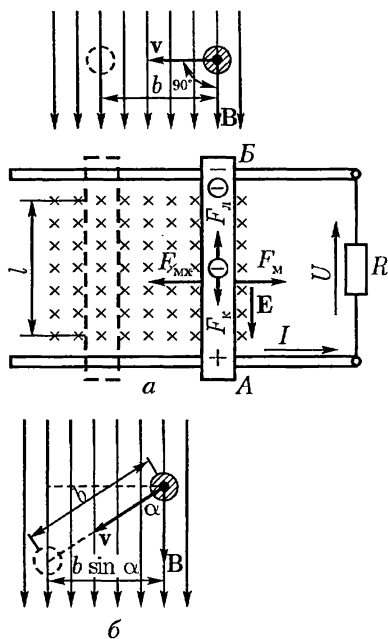


Рис. 10.6

## Силы Лоренца

Выражение (10.4) для индуцированной ЭДС можно получить, используя формулу (8.4) и выражение (2.1) применительно к одному электрону:

$$I = e/t.$$

Магнитное поле действует на заряженные частицы только в проводнике  $AB$ , который движется в магнитном поле. На другие части проводящего контура (шины и сопротивление  $R$ ) оно не действует, так как они находятся вне поля и к тому же неподвижны. Учитывая это, рассмотрим один проводник  $AB$ , не связанный с остальной частью контура.

Свободные электроны вещества проводника  $AB$ , находящегося в магнитном поле, одновременно перемещаются относительно проводника (внутреннее перемещение, например тепловое) и вместе с ним со скоростью  $v$  под действием внешней силы  $F_{\text{мх}}$  приложенной к проводнику.

В данном случае рассмотрим ту составляющую общей скорости электронов, которая связана с движением проводника. Электромагнитная сила, действующая на каждый электрон ( $F_{\text{л}}$  — сила Лоренца), согласно правилу левой руки, направлена вдоль проводника, а по величине определяется выражением (8.4):

$$F_{\text{л}} = BIb = B \frac{e}{t} b = Bev,$$

где  $b$  — путь, пройденный электроном вместе с проводником за время  $t$ .

Скапливаясь на одном конце проводника, электроны создают избыточный отрицательный заряд, а на другом конце образуется такой же по величине положительный заряд.

Разделение зарядов в проводнике приводит к возникновению электрического поля и взаимодействию разделенных частиц. Силы электрического поля  $F_{\text{к}}$  (силы Кулона) являются силами притяжения частиц, поэтому они направлены против сил магнитного поля (сил Лоренца  $F_{\text{л}}$ ).

Если проводник движется с постоянной скоростью, то электромагнитные силы не меняются, а силы электрического поля растут по мере накопления зарядов на концах проводника.

Разделение зарядов прекращается при равенстве электромагнитных и электрических сил:  $F_{\text{л}} = F_{\text{к}}$ .

Равенство сил означает наличие между концами проводника установившейся разности потенциалов или электрического напряжения

$$Bev = \frac{V_A - V_B}{l} e; \quad V_A - V_B = E = Bvl.$$

Действие магнитного поля на свободные электроны проводника при его движении является причиной возникновения электродвижущей силы, которая называется ЭДС электромагнитной индукции.

## Магнитогидродинамический генератор

Силовое действие магнитного поля на движущиеся заряженные частицы используется для прямого преобразования тепловой энергии в электрическую. Такое преобразование происходит в магнитогидродинамическом генераторе (МГД-генераторе), принципиальная схема которого показана на рис. 10.7. В камере сгорания 1 горит топливо и образуется газ, нагретый до высокой температуры 2500 – 2800° С. Для ионизации в раскаленный газ вводится в небольшом количестве присадка (пары солей щелочных металлов калия, натрия или цезия) и так образуется электропроводная плазма. Плазма направляется в канал-сопло 2, где приобретает большую скорость (несколько тысяч метров в секунду), а в конце канала она пролетает в сильном магнитном поле, образованном электромагнитом 3.

Магнитное поле действует на движущиеся заряженные частицы (электроны, ионы) с силой, направленной перпендикулярно направлению движения плазмы (правило левой руки). Часть из них достигает стенок канала, где смонтированы электроды 4, которые заряжаются — один положительно, другой отрицательно, т. е. образуется ЭДС магнитогидродинамического генератора

К электродам присоединен потребитель электрической энергии и в образованной цепи устанавливается электрический ток.

В нашей стране с 1971 г. действует первая в мире опытно-промышленная установка с МГД-генератором мощностью 25 тыс. кВт.

При высокой температуре топливо в МГД-генераторе сгорает более полно, чем в топках паровых котлов, что способствует увеличению КПД и существенно сокращает вредные выбросы в атмосферу.

## Правило правой руки

Если проводник  $AB$  входит в замкнутый проводящий контур, как на рис. 10.6, то благодаря действию ЭДС индукции в контуре установится постоянное перемещение электронов — электрический ток.

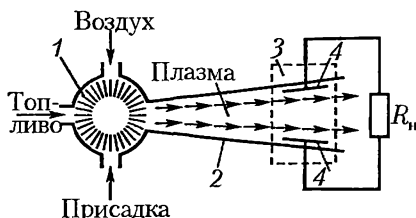


Рис. 10.7

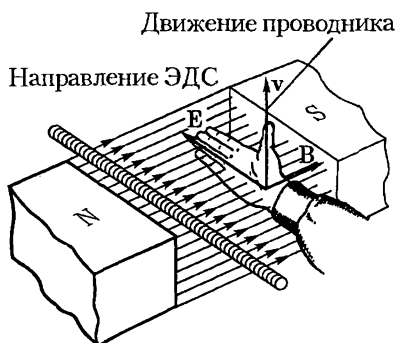


Рис. 10.8

Направление индуцированной ЭДС и тока в проводнике  $AB$  можно определить по направлению движения электронов: ток направлен против движения электронов, т. е. от минуса к плюсу.

В практике для определения направления индуцированной ЭДС применяют правило правой руки (рис. 10.8): если расположить правую руку так, чтобы большой палец, отогнутый перпендикулярно остальным четырем, показывал направление дви-

жения проводника, а линии магнитной индукции входили в ладонь, то вытянутые четыре пальца покажут направление ЭДС электромагнитной индукции.

Все изложенное о возникновении индуцированной ЭДС в проводнике справедливо и в том случае, когда проводник остается неподвижным, а движется система магнитных полюсов, так что линии магнитной индукции пересекают проводник. В этом случае, определяя направление ЭДС по правилу правой руки, нужно считать проводник движущимся в направлении, противоположном направлению движения магнитных полюсов.

## Задачи

**Задача 10.4.** В равномерном магнитном поле, магнитная индукция которого  $B = 1,2$  Тл, движется проводник, пересекая линии магнитной индукции под углом  $\alpha = 30^\circ$ .

Определить ЭДС в проводнике, если его длина  $l = 80$  см, а скорость движения  $v = 5$  м/с.

**Решение.** При  $\alpha = 30^\circ$

$$E = Bvl \sin \alpha = 1,2 \cdot 5 \cdot 0,8 \sin 30^\circ = 2,4 \text{ В.}$$

Определите ЭДС в том же проводнике, если он движется под углом  $\alpha = 60$  и  $90^\circ$  к направлению поля.

**Задача 10.5.** В равномерном магнитном поле  $B = 1,8$  Тл перпендикулярно линиям магнитной индукции движется прямолинейный проводник длиной  $0,5$  м со скоростью  $v = 20$  м/с (см. рис. 10.6). Концы проводника соединены через резистор с сопротивлением  $R = 1,6$  Ом так, что образуется замкнутый контур. Сопротивление движущегося проводника и соединительных проводов вместе составляет  $r = 0,2$  Ом.

Определить ток в цепи и механическую мощность, необходимую для преодоления реакции магнитного поля.

**Задача 10.6.** Определить скорость  $v$ , с которой нужно перемещать проводник в равномерном магнитном поле, чтобы в нем наводилась ЭДС  $E = 20$  В, если магнитная индукция поля  $B = 1,5$  Тл, длина проводника  $l = 60$  см, а угол  $\alpha$  между направлениями  $B$  и  $v = 45, 60$  и  $90^\circ$ .

**Задача 10.7.** Проводник  $AB$  (см. рис. 10.6) длиной 1 м движется перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью 20 м/с. Концы проводника замкнуты через резистор с сопротивлением  $R = 2$  Ом.

Определить магнитную индукцию поля, если известно, что в резисторе выделяется энергия 800 Дж за 1 с. Сопротивлением движущегося проводника  $AB$  и соединительных проводов можно пренебречь.

### 10.3. ВЗАИМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Электромагнитное действие магнитного поля и электромагнитная индукция используются для преобразования механической энергии в электрическую и обратно.

Устройства, с помощью которых эти преобразования осуществляются, называются электрическими машинами. Машина для преобразования механической энергии в электрическую называется генератором, а для обратного преобразования — двигателем.

Конструкции, принципы и режимы работы различных электрических машин изучаются в специальном курсе.

Здесь в общем виде рассмотрим принципы взаимного преобразования механической и электрической энергии.

#### Принцип преобразования механической энергии в электрическую

Проводник  $AB$  (см. рис. 10.6) движется с постоянной скоростью за счет механической энергии какого-либо первичного двигателя — источника механической энергии.

Механическая мощность движения проводника

$$P_{\text{мх}} = F_{\text{мх}}v, \quad (10.6)$$

где  $F_{\text{мх}}$  — сила, действующая на проводник со стороны первичного двигателя.

Благодаря электромагнитной индукции в проводнике возникают ЭДС и ток

$$I = E/(r + R),$$

где  $r$  — сопротивление проводника  $AB$  (внутреннее сопротивление источника электрической энергии);  $R$  — сопротивление внешней



части цепи, включая сопротивление приемника, и части шин, входящей в контур.

В данном случае проводник  $AB$  является источником ЭДС, электрическая мощность которого  $P = EI$ .

Величину  $P$  часто называют электромагнитной мощностью. С появлением тока в проводнике  $AB$  возникает электромагнитная сила  $F_m$ , действующая в направлении, перпендикулярном направлению тока. Применяя правило левой руки, можно убедиться в том, что электромагнитная сила  $F_m$  направлена против силы  $F_{mx}$ .

Следовательно, внешняя сила  $F_{mx}$  в данном случае движущая, а  $F_m$  — тормозная.

При постоянной скорости  $v$  (установившееся движение) движущая и тормозная силы равны:

$$F_{mx} = F_m = BIl.$$

Подставляя выражения силы в формулу (10.6), получим

$$P_{mx} = F_m v = BIlv.$$

Так как

$$Bvl = E,$$

то

$$P_{mx} = EI = P. \quad (10.7)$$

Следовательно, механическая мощность первичного двигателя равна электрической мощности источника.

Выражение (10.7) показывает, что при движении проводника в магнитном поле в направлении механической силы происходит полное преобразование механической энергии в электрическую.

Напряжение на концах проводника  $U_{AB}$  является одновременно напряжением на внешней части цепи, которое меньше ЭДС на величину внутреннего падения напряжения:

$$U_{AB} = E - Ir = IR. \quad (10.8)$$

## Преобразование электрической энергии в механическую

Обратное преобразование электрической энергии в механическую можно показать на том же проводнике  $AB$ , изменив несколько электрическую цепь, в которую он входит (рис. 10.9).

Вместо приемника электрической энергии в цепь входит источник электрической энергии с ЭДС  $E_0$ .

Если на концах проводника  $AB$  обеспечить и поддерживать напряжение  $U_{AB}$  больше, чем его ЭДС  $E$ , ток в нем изменит направление на обратное [согласно формуле (10.8), ток меняет знак]. Такое состояние в цепи достигается благодаря наличию ЭДС  $E_0$  источника электрической энергии.

Считая направление тока на рис. 10.9 положительным, его величину найдем согласно второму закону Кирхгофа:

$$U_{AB} - E = Ir; \quad I = (U_{AB} - E)/r.$$

В этом случае ЭДС индукции в проводнике направлена против тока и является противоЭДС.

Встречное направление ЭДС и тока является признаком потребления электрической энергии в данном устройстве и преобразования ее в другой вид энергии (см. 3.3). Действительно, с изменением направления тока изменяется на противоположное и направление электромагнитной силы  $F_m$ . Оно совпадает теперь с направлением скорости движения проводника. Сила  $F_m$  становится движущей. Теперь противодействие оказывает механическая сила  $F_{mx}$  (например, сила трения).

Составим баланс мощностей для рассматриваемой электрической цепи.

Проводник  $AB$  является приемником электрической энергии. Его электрическая мощность  $P = U_{AB}I$ . Так как  $U_{AB} = E + Ir$ , то  $P = EI + I^2r$ .

Учитывая выражение (10.4), запишем

$$P = BvIl + I^2r = F_m v + I^2 r_0. \quad (10.9)$$

Первое слагаемое в этой сумме определяет механическую мощность движущегося проводника, а второе — мощность тепловых потерь в проводнике  $AB$  в соответствии с законом Ленца — Джоуля.

В связи с тем что механическая энергия возникает как результат действия сил магнитного поля, может создаться впечатление, что движение проводника происходит за счет энергии магнитного поля. В действительности же в механическую преобразуется электрическая энергия источника, что и подтверждается уравнением (10.9). Магнитное поле здесь является лишь посредником при преобразовании энергии. Последнее замечание относится и к обратному преобразованию энергии — механической в электрическую.

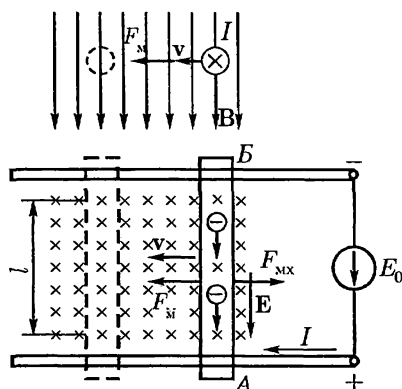


Рис. 10.9

## Задачи

**Задача 10.8.** Виток медного провода в виде рамки, укрепленной на стальном цилиндре — роторе длиной  $l = 30$  см и диаметром  $d = 20$  см (рис. 10.10, а), вращается с частотой  $n = 1500 \text{ мин}^{-1}$  в радиальном магнитном поле. Концы рамки присоединены к двум половинкам разрезанного медного кольца (коллектора), вращающегося вместе с ротором. К щеткам, наложенным на коллектор, присоединен приемник энергии с сопротивлением  $R = 0,9$  Ом; сопротивление самой рамки и соединительных проводов  $r = 0,1$  Ом. График распределения магнитной индукции в воздушном зазоре показан на рис. 10.10. б, где  $B_m = 1,2$  Тл.

Определить: а) значение и направление силы, действующей на провод рамки; б) механический момент, развиваемый двигателем, вращающим рамку; в) электрическую мощность в рамке.

**Решение.** Определим ЭДС, индуцированную в рамке, по формуле (10.4). Предварительно найдем линейную скорость проводника:

$$v = \frac{\pi d n}{60} = \frac{3,14 \cdot 0,2 \cdot 1500}{60} = 15,7 \text{ м/с.}$$

Учитывая, что рамка имеет два проводника, в которых индуцируются ЭДС, суммарную ЭДС витка найдем по формуле

$$E = 2lvB_m = 2 \cdot 0,3 \cdot 15,7 \cdot 1,2 = 11,3 \text{ В.}$$

Ток в цепи

$$I = \frac{E}{r + R} = \frac{11,3}{(0,1 + 0,9)} = 11,3 \text{ А.}$$

Тормозная сила, действующая на одну сторону рамки, и механический момент

$$F_m = BIl = 1,2 \cdot 11,3 \cdot 0,3 \approx 4,07 \text{ Н;}$$

$$M = F_m d = 4,07 \cdot 0,2 \approx 0,814 \text{ Н·м.}$$

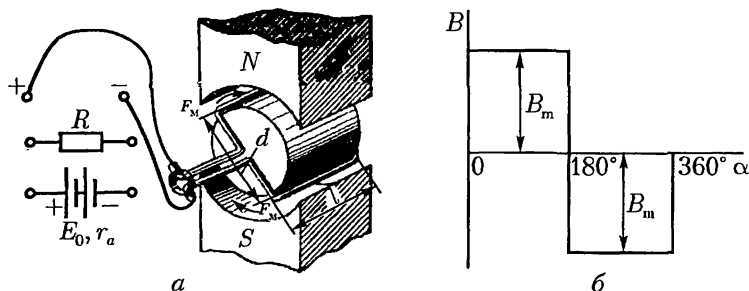


Рис. 10.10

Этот момент, будучи тормозным, при постоянной частоте вращения равен движущему моменту двигателя.

Электрическая мощность, развиваемая в рамке,

$$P = EI = 11,3 \cdot 11,3 \approx 128 \text{ Вт.}$$

Баланс электрической мощности

$$128 = I^2 r + I^2 R = 11,3^2 \cdot 1 \approx 128 \text{ Вт.}$$

Механическая мощность двигателя

$$P_{\text{мх}} = 2F_{\text{м}}v = 2 \cdot 4,07 \cdot 15,7 \approx 128 \text{ Вт.}$$

**Выводы.** 1. Механическая энергия, подводимая к рамке от первичного двигателя, полностью превращается в электрическую, что подтверждается равенством механической и электрической мощностей.

2. Электрическая энергия, полученная в рамке, превращается в теплоту в самой рамке ( $I^2 r = 12,8 \text{ Вт}$ ) и в приемнике ( $I^2 R = 115,2 \text{ Вт}$ ).

**Задача 10.9.** Устройство, описанное в задаче 10.8, переведено в режим двигателя. Для этого вместо приемника энергии в цепь включили аккумуляторную батарею с ЭДС  $E = 12 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r_a = 0,2 \text{ Ом}$ .

Определить окружное усилие, вращающий момент и скорость рамки и составить баланс мощностей, если ток в цепи установился равным  $10 \text{ А}$ .

**Решение.** Определим ЭДС в рамке согласно второму закону Кирхгофа:

$$E_0 = E + I(r + r_a);$$

$$E = E_0 - I(r + r_a) = 12 - 10(0,1 + 0,2) = 9 \text{ В.}$$

Линейная скорость вращения рамки

$$v = \frac{E}{Bl} = \frac{9}{1,2 \cdot 0,3 \cdot 2} = 12,5 \text{ м/с.}$$

Частота вращения

$$n = \frac{60v}{\pi d} = \frac{60 \cdot 12,5}{3,14 \cdot 0,2} = 1200 \text{ мин}^{-1}.$$

Окружное усилие на цилиндре

$$F_{\text{м}} = BIl = 1,2 \cdot 10 \cdot 0,3 = 3,6 \text{ Н.}$$

Вращающий момент

$$M = F_{\text{м}}d = 3,6 \cdot 0,2 = 0,72 \text{ Н·м.}$$

Механическая мощность

$$P_{\text{мх}} = 2F_{\text{м}}v = 2 \cdot 3,6 \cdot 12,5 = 90 \text{ Вт.}$$

Баланс мощностей: *мощность батареи равна сумме механической мощности и мощности потерь в электрической цепи:*

$$E_0 I = I_2^2 (r + r_a) + P_{\text{мх}};$$

$$12 \cdot 10 = 10^2 \cdot 0,3 + 90;$$

$$120 \text{ Вт} = 120 \text{ Вт.}$$

**Задача 10.10.** Прямоугольная рамка (см. рис. 10.10), имеющая два витка медной проволоки, вращается в радиальном магнитном поле с частотой  $2000 \text{ мин}^{-1}$ .

Размеры витка: длина  $l = 30 \text{ см}$ , ширина  $d = 20 \text{ см}$ , сечение провода  $S = 1 \text{ мм}^2$ ,  $B = 0,8 \text{ Тл}$ . Определить механическую мощность рамки и энергию, выделяемую в приемнике энергии с сопротивлением  $R = 1,9 \text{ Ом}$  за 1 ч. Сопротивление соединительных проводов  $R_{\text{мх}} = 0,065 \text{ Ом}$ .

Какую ЭДС должна иметь аккумуляторная батарея, чтобы после включения ее вместо приемника энергии сохранились неизменными механическая мощность и частота вращения рамки? Внутреннее сопротивление батареи  $r_a = 0,2 \text{ Ом}$ .

## 10.4. ЭДС САМОИНДУКЦИИ И ВЗАИМОИНДУКЦИИ

При изменении собственного потокосцепления в контуре или катушке наводится ЭДС самоиндукции  $e_L$ , а при изменении взаимного потокосцепления — ЭДС взаимоиндукции.

### ЭДС самоиндукции

Изменение собственного потокосцепления обычно является следствием изменения тока

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt},$$

или

$$\boxed{e_L = -L \frac{di}{dt}} \quad (10.10)$$

ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока  $di/dt$ . Она противодействует изменению тока, т.е. при увеличении тока препятствует его росту, а при уменьшении задерживает его падение (правило Ленца).

Чем быстрее изменяется ток, тем больше противодействие его росту или падению. Однако это противодействие зависит не только

от скорости изменения тока, но и от конструкции электромагнитного устройства, что в формуле (10.10) выражается множителем  $L$ , т. е. индуктивностью этого устройства.

Если изменение тока в катушке является следствием изменения приложенного к ней напряжения, то ЭДС самоиндукции направлена против приложенного напряжения, когда ток растет, и совпадает по направлению с напряжением, когда ток уменьшается.

Подобно массе, характеризующей инертность в механической системе, индуктивность характеризует инертность в электромагнитной системе.

## ЭДС взаимной индукции

Для системы магнитно-связанных катушек (см. рис. 8.21) ЭДС взаимной индукции

$$e_{2м} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt}; \quad e_{1м} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt}.$$

Изменение взаимного потокоцепления может быть следствием изменения тока в одной из катушек или изменения коэффициента связи.

Предположим, что изменяется ток  $i_1$  в первой катушке. ЭДС взаимной индукции  $e_{2м}$  во второй катушке пропорциональна скорости изменения этого тока:

$$e_{2м} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \quad (10.11)$$

Аналогично, при изменении тока  $i_2$  ЭДС взаимной индукции

$$e_{1м} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}. \quad (10.12)$$

В том и другом случае коэффициентом пропорциональности является взаимная индуктивность системы  $M$ .

Правило Ленца в применении к такой системе указывает на то, что изменение тока в одной катушке встречает противодействие со стороны другой катушки.

Из выражения (10.11) видно, что ЭДС взаимной индукции  $e_{2м}$ , а следовательно, и индуцированный ток  $i_2$  имеют знак, противоположный скорости изменения тока  $i_1$ . Это значит, что при увеличении тока  $i_1$  и его магнитного потока  $\Phi_{12}$  индуцированный ток  $i_2$  создает магнитный поток  $\Phi_{21}$ , направленный встречно потоку  $\Phi_{12}$ ; при уменьшении  $i_1$  поток  $\Phi_{21}$  направлен согласно с уменьшающимся потоком  $\Phi_{12}$ . Аналогично рассуждение можно привести из выражения

(10.12). Направление магнитных потоков в обоих случаях, как обычно, определяется по правилу буравчика.

Взаимоиндуктивность, так же как и индуктивность, характеризует электромагнитную инерцию, но в системе катушек (контуров), имеющих магнитную связь.

## Принцип действия трансформатора

Наглядным примером практического использования явления взаимной индукции является работа трансформатора. Трансформатор — статический электромагнитный аппарат для изменения значения напряжения или тока.

Принципиальная схема трансформатора (рис. 10.11) имеет магнитопровод 3 из электротехнической стали и две обмотки на магнитопроводе: первичную 1 с числом витков  $N_1$  и вторичную 2 с числом витков  $N_2$ . Обмотки выполняют из медного провода.

Первичной обмоткой трансформатор включается в сеть переменного напряжения  $U_1$ , и в ней возникает ток  $i_1$ . К вторичной обмотке подключается приемник электрической энергии.

Рассмотрим трансформатор с разомкнутой цепью вторичной обмотки, т. е. в режиме холостого хода.

При переменном токе в первичной обмотке создается переменный магнитный поток  $\Phi$ , который замыкается по стальному сердечнику и образует потокосцепление с обеими обмотками. Таким образом, в трансформаторе обмотки электрически между собой не связаны, а связаны переменным магнитным потоком.

В радиотехнике при высоких частотах применяются воздушные трансформаторы без стального сердечника.

В обеих обмотках наводится ЭДС:

$$e_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt}; \quad e_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Отношение ЭДС

$$e_1/e_2 = N_1/N_2 = n. \quad (10.13)$$

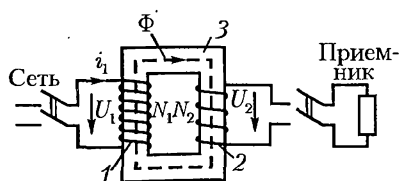


Рис. 10.11

Отношение чисел витков обмоток трансформатора называется коэффициентом трансформации.

Отношение ЭДС при холостом ходе можно заменить отношением напряжений на зажимах обмоток, учитывая, что  $\mathcal{U}_2 = e_2$  и

$u_1 \approx e_1$  ( $u_1 > e_1$  на величину падения напряжения в обмотке, которое при холостом ходе мало).

Следовательно,

$$u_2 = u_1 \frac{N_2}{N_1}. \quad (10.14)$$

Отсюда видно, что при  $N_2 > N_1$  ( $u_2 > u_1$ ) трансформатор повышает, а при  $N_2 < N_1$  ( $u_2 < u_1$ ) — понижает напряжение.

Если к вторичной обмотке подключить приемник энергии, то в ее цепи возникает ток  $i_2$  и в приемник будет поступать электрическая энергия из сети через трансформатор. При этом передача энергии из первичной обмотки во вторичную осуществляется посредством магнитного поля.

## Вихревые токи

Рассмотрим металлический сердечник внутри катушки с переменным током (рис. 10.12, а). При отмеченном направлении тока магнитный поток в сердечнике направлен вдоль оси сердечника вверх.

Металлический сердечник можно мысленно разделить на ряд замкнутых на себя слоев, ось которых совпадает с осью сердечника. Каждый такой слой представляет собой замкнутый виток, в котором переменным потоком индуцируются ЭДС и ток, направленные в плоскостях, перпендикулярных оси магнитного потока.

Рассматривая совокупность таких замкнутых контуров, можно представить себе в теле сердечника вихревые токи, замыкающиеся вокруг оси магнитного потока. Направление вихревых токов определяется правилом Ленца.

При увеличении магнитного потока вихревые токи направлены по часовой стрелке, если смотреть на сердечник сверху. Вихревые токи в соответствии с законом Ленца — Джоуля сопровождаются выделением теплоты в сердечнике. Это явление используется на практике для нагревания металлов (плавления стали, нагрева под закалку и других целей).

В сердечниках электрических машин, трансформаторов и элект-

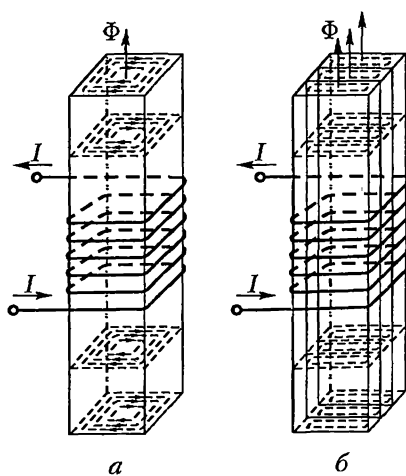


Рис. 10.12



трических аппаратов тоже возникают вихревые токи. Но здесь они нежелательны, потому что увеличивают общие потери энергии в устройствах и вызывают дополнительный их нагрев.

Для уменьшения потерь энергии сердечники устройств переменного тока собираются из листовой электротехнической стали (толщина 0,35 мм), листы которой изолируются друг от друга специальным лаком.

Уменьшение вихревых токов таким способом достигается благодаря тому, что контуры, по которым в сплошном сердечнике замыкаются вихревые токи, оказываются разрезанными на части, изолированные друг от друга (рис. 10.12, б). Кроме того, ослабление вихревых токов достигается увеличением удельного электрического сопротивления материала сердечника. Для этого в электротехническую сталь вводится присадка кремния до 4 %.

### Задачи

**Задача 10.11.** Обмотки трансформатора имеют индуктивность  $L_1 = 6,1$  Гн;  $L_2 = 0,08$  Гн и коэффициент магнитной связи  $k = 0,9$ . Определить ЭДС, наведенную в обеих обмотках, при увеличении тока в первой обмотке со скоростью 1000 А/с.

**Решение.** ЭДС самоиндукции в первой обмотке

$$e_1 = -L_1 \frac{di}{dt} = 6,1 \cdot 1000 = 6100 \text{ В.}$$

Для определения ЭДС во второй обмотке найдем взаимную индуктивность обмоток:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,9\sqrt{6,1 \cdot 0,08} = 0,63 \text{ Гн;}$$

$$e_2 = -M \frac{di_1}{dt} = 0,63 \cdot 1000 = 630 \text{ В.}$$

**Задача 10.12.** В кольцевой катушке с ферромагнитным сердечником при изменении тока со скоростью 200 А/с наводится ЭДС  $e = 30$  В.

Определить число витков катушки, если длина сердечника по средней линии  $l = 100$  см, а площадь поперечного сечения  $S = 20$  см<sup>2</sup>.

**Задача 10.13.** Катушка с индуктивностью  $L = 0,15$  Гн подключается к источнику постоянного напряжения  $U = 10$  В. Определить скорость нарастания тока в момент включения и потокосцепление при установившемся режиме, если сопротивление катушки  $R = 1$  Ом.

**Указание.** В установившемся режиме ток достигает наибольшего возможного значения.

**Задача 10.14.** Катушка с индуктивностью  $L = 30$  мГн включается на постоянное напряжение 50 В. Определить сопротивление катушки, если известно, что в тот момент, когда ток достиг значения 10 А, скорость его нарастания составляла 1000 А/с.

# ГЛАВА 11

## ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

Электрическое и магнитное поля обладают энергией, которая накапливается при образовании заряда в электрической системе или образовании тока в электромагнитной системе. В данной главе получены количественные выражения энергии электрического и магнитного полей, а также электрических и магнитных сил.

### 11.1. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

При зарядке конденсатора энергия запасается в виде энергии электрического поля и может быть возвращена источнику при преобразовании в другой вид энергии.

#### Выражение энергии через характеристики конденсатора

Заряд конденсатора образуется переносом заряженных частиц с одной обкладки на другую под действием внешнего источника энергии. Работа, совершенная при переносе единицы заряда, численно равна напряжению между обкладками.

Если бы напряжение в процессе зарядки не изменялось, то энергию можно было бы определить произведением напряжения и заряда [см. формулу (1.5)]. Однако в процессе накопления заряда растет и напряжение, поэтому при определении энергии, затраченной на образование заряда, нужно учесть зависимость между напряжением и зарядом (7.28). Если емкость конденсатора — величина постоянная, зависимость между напряжением и зарядом графически выражается прямой линией (рис. 11.1).

Предположим, что заряд  $Q_1$  увеличился на  $dQ$  — величину столь малую, что в пределах изменения заряда напряжение можно считать неизменным:  $U_C = U_{C1}(dU_C \rightarrow 0)$ . Тогда рабо-

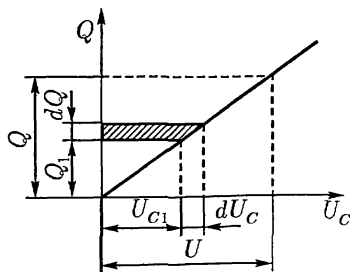


Рис. 11.1

та, выполненная при увеличении заряда на  $dQ$ , определяется произведением

$$dW_э = U_{C1}dQ. \quad (11.1)$$

На графике (см. рис. 11.1) она показана заштрихованным элементом площади.

Всю работу, затраченную на образование заряда, можно определить, суммируя элементы площади в пределах изменения заряда от 0 до  $Q$  и напряжения от 0 до  $U_C = U$ , где  $U$  — напряжение на зажимах источника энергии.

Нетрудно заметить, что работа и равная ей энергия электрического поля конденсатора определяются площадью прямоугольного треугольника, катетами которого являются  $Q$  и  $U$ :

$$W_э = UQ/2. \quad (11.2)$$

Формулу (11.2) можно представить в другом виде, если вместо  $Q$  и  $U$  подставить их выражения из (7.28), тогда

$$W_э = CU^2/2, \quad (11.3)$$

или

$$W_э = Q^2/2C. \quad (11.4)$$

### Выражение энергии через характеристики электрического поля

Выражение (11.2) получено на основе закона сохранения энергии; однако из него непосредственно не следует, что энергия  $W_э$  является энергией электрического поля. Можно показать, что эта энергия распределена в электрическом поле.

Для примера рассмотрим равномерное электрическое поле плоского конденсатора (см. рис. 1.6, а).

Поток вектора электрического смещения через любую поверхность, проведенную в диэлектрике параллельно пластинам, равен заряду  $Q$  конденсатора, что следует из формулы (7.33):  $DS = Q$ .

Напряженность равномерного электрического поля  $E = U/l$ .

Следовательно,

$$W_э = \frac{QU}{2} = \frac{1}{2}DESl = \frac{1}{2}DEV, \quad (11.5)$$

где  $V$ —объем диэлектрика, в котором распределено поле, связанное с заряженными пластинами конденсатора.

Отношение энергии к объему диэлектрика дает объемную плотность энергии электрического поля

$$w_э = W_э/V = \frac{1}{2}DE. \quad (11.6)$$

Энергия, определенная формулой (11.2) через характеристики проводников, выражена также формулой (11.5) через характеристики электрического поля. Эквивалентность этих формул свидетельствует о том, что энергия системы заряженных тел является энергией электрического поля.

### Задачи

**Задача 11.1.** Плоский воздушный конденсатор емкостью 600 пФ при расстоянии между электродами 2 см заряжен до напряжения  $U = 4$  кВ и отключен от источника напряжения. Определить изменение энергии и напряженности электрического поля конденсатора при уменьшении расстояния между электродами вдвое.

**Решение.** До изменения расстояния между обкладками энергия электрического поля по формуле (11.3)

$$W_{1э} = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{600 \cdot 10^{-12} \cdot 4000^2}{2} = 48 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Напряженность электрического поля [см. (1.5)]

$$E_0 = U_1/l_1 = 4000/0,02 = 2 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

При уменьшении расстояния между обкладками вдвое заряд конденсатора не изменяется (предполагается, что утечки заряда нет).

Вследствие увеличения емкости конденсатора напряжение между обкладками уменьшится во столько же раз [см. формулу (7.28)]:

$$U_2 = Q/C_2 = U_1/2 = 2 \text{ кВ.}$$

Энергия электрического поля

$$W_{2э} = \frac{C_2 U_2^2}{2} = \frac{1200 \cdot 10^{-12} \cdot 2000^2}{2} = 24 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Напряженность электрического поля

$$E_2 = U_2/l = 2000/0,01 = 2 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

**Задача 11.2.** Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между электродами  $l = 0,5$  см и площадью обкладок  $S = 3600 \text{ см}^2$  заряжен до напряжения  $U = 5$  кВ и отключен от источника напряжения. Определить

изменение энергии и напряженность электрического поля конденсатора, если расстояние между обкладками увеличить до 0,6 см.

**Задача 11.3.** Определить площадь обкладки и расстояние между обкладками плоского конденсатора, который должен иметь емкость, равную 5000 мкФ, и двукратный запас электрической прочности, если изоляцию предполагается выполнить из бумаги ( $\epsilon_r = 3,14$ ;  $E_{пр} = 10$  кВ/мм), а рабочее напряжение конденсатора составляет 10 кВ.

**Задача 11.4.** Между обкладками плоского воздушного конденсатора напряжение 70 кВ. Определить напряженность электрического поля в диэлектрике конденсатора и запас прочности, если расстояние между электродами равно 2,5 см, а электрическая прочность воздуха  $E_{пр} = 30$  кВ/см.

Во сколько раз изменяется емкость конденсатора и запас прочности, если, не отключая конденсатора от источника напряжения, между обкладками ввести лист картона ( $\epsilon_r = 4$ ;  $E_{пр} = 120$  кВ/см) толщиной 5 мм, расположив его параллельно обкладкам?

Возможна ли нормальная работа конденсатора в условиях, указанных в задаче, до и после введения картона между обкладками?

Ответить на этот же вопрос при условии, что лист картона введен между обкладками после отключения конденсатора от источника напряжения.

## 11.2. МЕХАНИЧЕСКИЕ СИЛЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Вопрос о механических силах в электрическом поле рассмотрим на примере плоского конденсатора, заряженного от внешнего источника энергии, имеющего напряжение  $U$ . Электрическое поле конденсатора будем полагать равномерным.

### Энергетический баланс в электростатической системе

Силы  $F_z$ , возникающие вследствие взаимодействия пластин с электрическим полем, приложены к пластинам и направлены так, что они притягиваются. Предположим, что одна из пластин конденсатора свободна и возможное малое перемещение ее под действием силы  $F_z$  обозначим через  $dx$  (рис. 11.2).

В дальнейших рассуждениях будем исходить из того, что при изменении заряда конденсатора не возникает потерь энергии в проводниках в связи с перемещением заряженных частиц и в диэлектрике вследствие изменения напряженности поля.

При таких условиях в соответствии с законом сохранения энергии при изменении заряда конденсатора на  $dQ$  за счет энергии внеш-

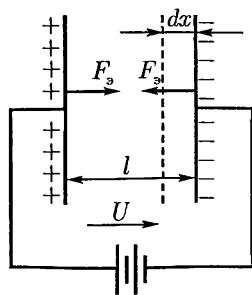


Рис. 11.2

него источника изменяется энергия электрического поля на  $dW_э$  и совершается механическая работа  $F_э dx$ :

$$UdQ = dW_э + F_э dx. \quad (11.7)$$

### Обобщенное выражение электрической силы (первый случай)

Заряд конденсатора остается неизменным ( $Q = \text{const}$ ), т. е. заряженный конденсатор отключен от внешнего источника энергии.

При  $dQ = 0$  работа внешнего источника  $UdQ = 0$ . Поэтому

$$dW_э + F_э dx = 0 \text{ или } F_э dx = -dW_э.$$

Последнее равенство показывает, что механическая работа, связанная с перемещением пластины, совершается за счет энергии электрического поля.

Действительно, механическая работа, совершаемая электрической силой, положительна ( $F_э dx > 0$ ), следовательно, изменение энергии электрического поля отрицательно ( $dW_э < 0$ ). Это значит, что энергия электрического поля в данном случае уменьшается.

Механическую силу, стремящуюся изменить положение пластины конденсатора, можно выразить отношением

$$F_э = \frac{dW_э}{dx} \text{ (при } Q = \text{const}). \quad (11.8)$$

Рассуждая аналогично, можно получить зависимость между механическим моментом и углом поворота  $\alpha$ , если механическое движение осуществляется в виде вращения одной пластины по отношению к другой:

$$M = -\frac{dW_э}{d\alpha}. \quad (11.9)$$

Изменение расстояния  $l$  между пластинами на  $dx$  изменит емкость конденсатора. При уменьшении расстояния емкость увеличивается, а напряжение между пластинами уменьшается, что непосредственно следует из формулы (7.28).

Предположим, что расстояние между пластинами увеличивается благодаря действию на пластины внешних механических сил. Энергия в системе возрастает на величину работы, совершенной внешним источником механической энергии. При этом емкость конденсатора уменьшится, а напряжение между пластинами увеличится.

## Обобщенное выражение электрической силы (второй случай)

Напряжение между пластинами остается постоянным, ( $U = \text{const}$ ), т.е. во время движения пластины конденсатор не отключается от внешнего источника энергии.

При уменьшении расстояния между пластинами увеличивается емкость конденсатора, что при неизменном напряжении влечет за собой увеличение заряда.

Внешний источник энергии должен затратить энергию на увеличение заряда конденсатора в количестве  $UdQ$ .

Изменение энергии электрического поля  $dW_э$  при изменении заряда, согласно формуле (11.2),  $dW_э = \frac{1}{2}UdQ$ , т.е. составляет половину энергии внешнего источника, израсходованной при увеличении заряда конденсатора. Вторая половина энергии расходуется на покрытие механической работы  $F_э dx$ , следовательно,

$$dW_э = F_э dx \quad (\text{при } U = \text{const}).$$

Отсюда

$$F_э = \frac{dW_э}{dx}. \quad (11.10)$$

Аналогично, при вращательном движении

$$M = \frac{dW_э}{d\alpha}. \quad (11.11)$$

Увеличение расстояния между пластинами в результате действия внешних механических сил приведет к уменьшению емкости. Но при постоянном напряжении за уменьшением емкости последуют уменьшение заряда конденсатора и уменьшение энергии электрического поля. В этом случае механическая работа, связанная с перемещением пластины, совершается внешними механическими силами. Величина этой работы численно равна уменьшению энергии электрического поля. Таким образом, источнику электрической энергии возвращается энергия, численно равная удвоенному значению механической работы.

### Задачи

**Задача 11.5.** Расстояние между двумя точечными заряженными телами в масле ( $\epsilon_r = 2,25$ ) составляет 20 см. На каком расстоянии должны находиться те же тела в воздухе, чтобы сила взаимодействия между ними сохранила свою величину?

**Задача 11.6.** По данным условия задачи 11.1 определить энергию и напряженность электрического поля, если конденсатор не отключается от источника заряда.

**Задача 11.7.** По данным условия задачи 11.2 определить энергию и напряженность электрического поля, если конденсатор не отключается от источника заряда.

### 11.3. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При возникновении электрического тока в проводящем контуре одна часть энергии источника питания расходуется на преодоление электрического сопротивления контура и превращается в теплоту, а другая запасается в виде энергии магнитного поля.

#### Энергия магнитного поля уединенного контура или катушки с током

Определим вначале энергию магнитного поля уединенного контура с током  $I$ , пользуясь формулой (8.21), согласно которой изменение энергии в магнитной системе связано с изменением потокосцепления.

При этом нужно принять во внимание, что в процессе возникновения тока в контуре он не остается постоянным, а увеличивается от 0 до  $I$ . Вместе с изменением тока изменяется и потокосцепление [см. формулу (8.23)].

При таких условиях оба множителя в формуле (8.21) являются переменными, поэтому с помощью этой формулы можно определить лишь приращение энергии  $dW_m$  за некоторый весьма малый промежуток времени, в течение которого ток в контуре можно считать неизменным:

$$dW_m = i d\Psi, \quad (11.12)$$

где  $i$  — некоторое промежуточное значение тока между 0 и  $I$ , принятое неизменным в течение бесконечно малого промежутка времени;  $d\Psi$  — приращение потокосцепления за тот же промежуток времени.

Если индуктивность контура постоянна, то зависимость между потокосцеплением и током графически изображается прямой линией (рис. 11.3). Изменение энергии при токе  $i$  выразится заштрихованным элементом площади [см. формулу (11.12)]. Энергию при потокосцеплении  $\Psi$

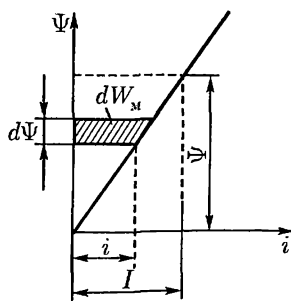


Рис. 11.3



и токе  $I$  можно определить суммой таких элементов, т. е. площадью прямоугольного треугольника с катетами  $\Psi$  и  $I$ :

$$W_m = \Psi I / 2.$$

Учитывая формулу (8.23), запишем и другие выражения для определения энергии магнитного поля

$$W_m = \frac{\Psi I}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}. \quad (11.13)$$

### **Энергия магнитного поля в системе магнитно-связанных контуров (катушек)**

Определим энергию магнитного поля в системе двух магнитно-связанных контуров (катушек) с токами.

Энергия магнитного поля этой системы накапливается в процессе установления токов в обоих контурах, причем в процессе накопления определенное влияние оказывает взаимное потокоосцепление.

По закону сохранения энергии общий запас энергии в магнитном поле не зависит от последовательности установления тока в контурах.

Учитывая это, зададим определенную последовательность установления токов в контурах: сначала ток увеличивается от 0 до  $I_1$  в первом контуре, а после этого — от 0 до  $I_2$  во втором контуре.

При изменении тока в первом контуре изменяется собственное потокоосцепление первого контура от 0 до  $\Psi_{1,1}$  и взаимное потокоосцепление второго контура от 0 до  $\Psi_{1,2}$ .

Энергия в системе определяется только изменением собственнo-го потокоосцепления и при установившемся токе  $I_1$  выражается формулой (11.13)

$$W_{1,1m} = \frac{\Psi_{1,1} I_1}{2} = \frac{L_1 I_1^2}{2}.$$

Энергия, определяемая изменением взаимного потокоосцепления, равна нулю, так как во втором контуре ток равен нулю.

При изменении тока во втором контуре изменяются собственное потокоосцепление второго контура от 0 до  $\Psi_{2,2}$  и взаимное потокоосцепление первого контура от 0 до  $\Psi_{2,1}$ .

Взаимное потокоосцепление второго контура при этом не изменяется, так как ток в первом контуре уже установился.

К запасу энергии  $W_{1,1m}$  добавляется энергия, определяемая изменением собственного потокоосцепления второго контура:

$$W_{2,2\text{м}} = \frac{\psi_{22} I_2}{2} = \frac{L_2 I_2^2}{2},$$

и энергия, определяемая изменением взаимного потокоосцепления первого контура,

$$W_{2,1\text{м}} = I_1 \Psi_{2,1} = M_{2,1} I_1 I_2.$$

Последняя часть энергии выражена по формуле (8.21), так как магнитное поле второго контура взаимодействует с постоянным током первого контура.

Энергия магнитного поля системы двух контуров с токами

$$W_{\text{м}} = W_{1,1\text{м}} + W_{2,2\text{м}} \pm W_{2,1\text{м}}$$

или

$$W_{\text{м}} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} \pm M_{2,1} I_1 I_2.$$

Учитывая независимость энергии магнитного поля от последовательности установления токов в контурах или принимая во внимание, что  $M_{2,1} = M_{1,2} = M$ , получим окончательно

$$W_{\text{м}} = \frac{L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2}{2} \pm M I_1 I_2. \quad (11.14)$$

Знак перед произведением  $M I_1 I_2$  в уравнении (11.14) зависит от способа включения контуров (катушек).

При согласном включении взаимное потокоосцепление совпадает по направлению с собственным, поэтому энергия взаимосвязи входит в уравнение со знаком плюс. При встречном включении взаимное потокоосцепление направлено против собственного, поэтому энергию взаимосвязи в той же формуле нужно взять со знаком минус.

## Индуктивность в системе магнитно-связанных катушек

Рассмотрим частный случай, когда две магнитно-связанные катушки электрически соединены между собой последовательно, в результате чего в обеих катушках ток  $I$  один и тот же (см. рис. 8.22).

Энергия магнитного поля такой системы

$$W_{\text{м}} = \frac{L_1 I^2}{2} + \frac{L_2 I^2}{2} \pm M I^2,$$

или

$$W_{\text{м}} = \frac{L_1 + L_2 \pm 2M}{2} I^2 = \frac{LI^2}{2},$$

где  $L = L_1 + L_2 \pm 2M$  — индуктивность системы магнитно-связанных катушек.

При согласном включении

$$L_{\text{с}} = L_1 + L_2 + 2M, \quad (11.15)$$

при встречном включении

$$L_{\text{в}} = L_1 + L_2 - 2M. \quad (11.16)$$

### Выражение энергии через характеристики магнитного поля

Формулами (11.13) и (11.14) энергия выражена через характеристики контуров с токами.

Можно показать, что в данном случае энергия распределена в магнитном поле, окружающем проводники с токами.

Для примера возьмем поле катушки с кольцевым сердечником. Если диаметр сечения сердечника много меньше диаметра самого сердечника, поле можно считать равномерным:

$$\Psi = BSN; \quad I = \frac{Hl_{\text{к}}}{N}; \quad l_{\text{к}} = 2\pi r.$$

Тогда

$$W_{\text{м}} = \frac{\Psi I}{2} = \frac{BSN}{2N} Hl_{\text{к}} = \frac{BHS l_{\text{к}}}{2} = \frac{BHV}{2},$$

где  $S l_{\text{к}} = V$  — объем сердечника.

Энергия магнитного поля в единице объема

$$w_{\text{м}} = W_{\text{м}}/V = BH/2. \quad (11.17)$$

Здесь энергия выражена через характеристики магнитного поля, что свидетельствует о ее принадлежности магнитному полю.

### Задачи

**Задача 11.8.** Определить энергию магнитного поля в системе двух обмоток (см. задачу 8.21) при согласном и встречном их включении, если ток в первой обмотке  $I_1 = 5$  А, а во второй  $I_2 = 3$  А.

**Решение.** Для определения энергии в магнитно-связанной системе двух обмоток воспользуемся формулой (11.14).

Величины индуктивностей катушек и взаимной индуктивности при неферромагнитном сердечнике не зависят от тока в них, поэтому возьмем их

по результатам решения задачи 8.21:  $L_1 = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ ;  $L_2 = 10,2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ ;  $M = 5,25 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ .

При согласном включении обмоток

$$W_{\text{м.с}} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2 = \frac{3,33 \cdot 10^{-3} \cdot 5^2}{2} + \frac{10,2 \cdot 10^{-3} \cdot 3^2}{2} + 5,25 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 3 = 166,3 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

При встречном включении

$$W_{\text{м.в}} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} - M I_1 I_2 = 8,7 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Определите энергию магнитного поля: а) при разомкнутой цепи первой обмотки; б) при разомкнутой цепи второй обмотки.

2. Определите энергию магнитного поля при согласном и встречном включении обмоток, если обмотки соединены последовательно, а ток в них  $I = 3 \text{ А}$ .

**Задача 11.9.** Общая индуктивность двух последовательно соединенных катушек (см. рис 8.22) при согласном включении равна 1,52 мГн, при встречном — 0,88 мГн. Определить взаимную индуктивность катушек.

**Решение.** Найдем взаимоиндуктивность катушек, решив совместно уравнения (11.15) и (11.16):

$$L_c = L_1 + L_2 + 2M; \quad L_v = L_1 + L_2 - 2M.$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$L_c - L_v = 4M; \quad M = \frac{L_c - L_v}{4}.$$

В данном случае  $L_c = 1,52 \text{ мГн}$ ;  $L_v = 0,88 \text{ мГн}$ ;

$$M = (1,52 - 0,88)/4 = 0,16 \text{ мГн.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Определите энергию в системе двух катушек при согласном и встречном включении и токе, равном 5 А.

2. Определите энергию магнитного поля, когда ток, равный 5 А, есть только в одной катушке (сначала в первой, а затем во второй), размеры катушек одинаковы, а  $N_1 = 2N_2$ .

**Задача 11.10.** Кольцевая катушка с сердечником в форме тороида (см. рис. 8.6) из неферромагнитного материала имеет напряженность магнитного поля в центре сечения сердечника  $H = 8 \text{ А/см}$ . Внутренний радиус тороида  $r_1 = 42 \text{ мм}$ , а внешний  $r_2 = 60 \text{ мм}$ . Определить энергию магнитного поля, считая его равномерным.

## 11.4. МЕХАНИЧЕСКИЕ СИЛЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В технике широко применяются устройства, в основе работы которых лежит силовое действие магнитного поля (электродвигатели, реле, тяговые и подъемные электромагниты, электроизмерительные приборы и др.).

Электромагнитные силы приходится учитывать при расчете электрических аппаратов, проектировании распределительных устройств электростанций и в других случаях.

### Энергетический баланс в электромагнитной системе

Определение электромагнитной силы  $F_m$  рассмотрим на примере взаимодействия полюсов электромагнита (рис. 11.4), полагая магнитное поле в воздушном зазоре между полюсами равномерным.

Обозначим ток в обмотке электромагнита через  $i$ , сопротивление обмотки —  $R$ , возможное малое перемещение одного из полюсов (якоря электромагнита) —  $dx$ .

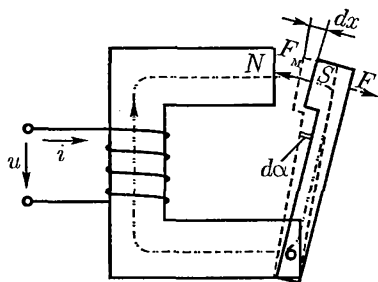


Рис. 11.4

Работа внешнего источника энергии, к зажимам которого подключена обмотка электромагнита, в общем случае расходуется на выделение теплоты в обмотке ( $i^2 R dt$ ), на изменение энергии в магнитном поле ( $dW_m$ ) и механическую работу ( $F_m dx$ ).

Согласно закону сохранения энергии за малый отрезок времени энергетический баланс в системе выражается уравнением

$$U i dt = i^2 R dt + dW_m + F_m dx.$$

Два последних слагаемых в правой части уравнения выражают изменение энергии в магнитной системе. Рассмотрим их более подробно. При этом учтем выводы, сделанные в 8.4 о том, что изменение энергии магнитного поля и работа электромагнитных сил определяются изменением потокосцепления:

$$i d\Psi = dW_m + F_m dx.$$

### Обобщенное выражение электромагнитной силы (первый случай)

Потокосцепление в магнитной системе не изменяется ( $\Psi = \text{const}$ ,  $d\Psi = 0$ ); это условие обычно соблюдается в электромагнитах переменного тока. Тогда

$$dW_{\text{м}} + F_{\text{м}}dx = 0,$$

$$F_{\text{м}}dx = -dW_{\text{м}} \text{ (при } \Psi = \text{const}).$$

Последнее равенство показывает, что механическая работа, связанная с перемещением якоря электромагнита, совершается за счет энергии магнитного поля. Внешний источник расходует энергию только на выделение теплоты.

Механическая работа электромагнитной силы положительна ( $F_{\text{м}}dx > 0$ ); следовательно, изменение энергии магнитного поля отрицательно ( $dW_{\text{м}} < 0$ ), т. е. она убывает.

Механическая сила, стремящаяся изменить положение якоря, может быть выражена отношением

$$F_{\text{м}} = -\frac{dW_{\text{м}}}{dx}. \quad (11.18)$$

Аналогично можно получить зависимость между механическим моментом и углом поворота якоря:

$$M_{\text{м}} = -\frac{dW_{\text{м}}}{d\alpha}. \quad (11.19)$$

### Обобщенное выражение электромагнитной силы (второй случай)

Ток в обмотке электромагнита поддерживается постоянным ( $i = \text{const}$ ). При уменьшении расстояния между полюсами увеличивается индуктивность, что при неизменном токе повлечет за собой увеличение потокосцепления. Внешний источник должен затратить энергию на увеличение потокосцеплений в количестве  $i d\Psi$ .

Согласно формуле (11.13), энергия магнитного поля изменяется на величину

$$dW_{\text{м}} = \frac{1}{2} i d\Psi,$$

что составляет половину энергии внешнего источника, а другая расходуется на покрытие механической работы  $F_{\text{м}}dx$ .

Следовательно,

$$dW_{\text{м}} = F_{\text{м}}dx \text{ (при } i = \text{const}).$$

Отсюда

$$F_{\text{м}} = \frac{dW_{\text{м}}}{dx}. \quad (11.20)$$

Аналогично, для вращательного движения

$$M_{\text{м}} = \frac{dW_{\text{м}}}{d\alpha}. \quad (11.21)$$

Таким образом, механическая сила (или момент), стремящаяся изменить положение якоря электромагнита, равна увеличению энергии магнитного поля в расчете на единицу изменения пути (или угла), если ток в обмотке не изменяется.

Увеличение воздушного зазора в результате действия внешней механической силы приведет к уменьшению индуктивности. Но при неизменном токе за этим последует уменьшение потокосцепления и энергии магнитного поля.

Механическая работа, связанная с перемещением якоря, совершается внешними механическими силами. Величина этой работы численно равна уменьшению энергии магнитного поля. Таким образом, источнику электрической энергии возвращается энергия, численно равная удвоенной величине механической работы.

Используя общие выводы и формулы, полученные ранее, найдем выражения для определения электромагнитных сил в конкретных случаях, встречающихся на практике.

### Тяговое усилие электромагнита

Отрывная сила (груза, пружины и т.д.) стремится увеличить воздушный зазор между полюсами электромагнита. Предположим, что этот зазор увеличится на  $dx$ . При этом объем, в котором распределено магнитное поле, увеличится на  $dV = Sdx$ , где  $S$  — площадь полюса.

Изменение энергии магнитного поля составит

$$dW_m = w_m dV = \frac{BH}{2} S dx.$$

Согласно формуле (11.20),

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{dW_m}{dx} = \frac{BHS}{2} \frac{dx}{dx}; \\ F_m &= \frac{BHS}{2} = \frac{B^2 S}{2\mu_0}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

### Силы взаимодействия двух параллельных проводов с токами

На практике часто встречается параллельное расположение проводов с токами. Таким образом, например, монтируются шины распределительных устройств электрических станций и подстанций.

Для того чтобы правильно выбрать шины и изоляторы, на которых они закреплены, необходимо определить электромагнитные силы взаимодействия между шинами.

В данном случае силу взаимодействия можно рассматривать как действие магнитного поля тока первого провода I на ток второго провода II или наоборот (рис. 11.5).

Согласно формуле (8.10), магнитное поле тока первого провода в месте расположения второго провода характеризуется индукцией

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a},$$

где  $a$  — расстояние между осями проводов.

Между направлениями  $B_1$  и  $I_2$  угол  $\alpha = 90^\circ$ .

По формуле (8.4) сила, действующая на ток второго провода в поле первого провода,

$$F_{12м} = B_1 I_2 l_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l_2}{2\pi a}.$$

Аналогичное выражение получается для силы, действующей на ток первого провода в магнитном поле тока второго провода:

$$F_{21м} = B_2 I_1 l_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l_1}{2\pi a}.$$

Рассматривая взаимодействие равных участков  $l$  двух проводов, получим общую формулу

$$F_m = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}. \quad (11.23)$$

### Действие магнитного поля на свободно заряженную частицу

Действие магнитного поля на заряженные частицы, движущиеся вне проводника, например в вакууме, широко используется в технике.

Примерами такого использования могут служить: фокусировка или смещение электронного пучка (луча) в электронно-лучевых

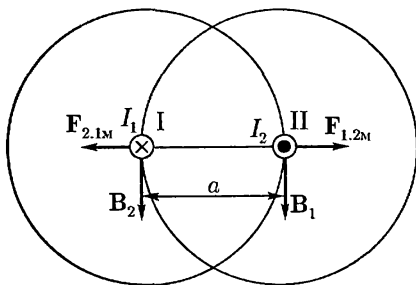


Рис. 11.5



трубках телевизора и осциллографов или электронных микроскопах, ускорение заряженных частиц для исследования ядерных процессов и т. д.

Для определения силы, которая действует на частицу с зарядом  $Q$ , движущуюся в равномерном магнитном поле, можно использовать формулу (8.5), подставив в нее  $I = Q/t$ ;  $F_m = BQ \frac{l}{t} \sin \alpha$ .

Рассматривая длину проводника  $l$  как путь, пройденный заряженной частицей за время  $t$ , отношение  $l/t$  можно считать скоростью движения частицы

$$l/t = v,$$

тогда

$$F_m = BQv \sin \alpha, \quad (11.24)$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями линий магнитной индукции и направлением движения заряженной частицы. При  $\alpha = 90^\circ$

$$F_m = BQv. \quad (11.25)$$

Сила  $F_m$ , согласно правилу левой руки, направлена перпендикулярно направлению линий магнитной индукции и направлению скорости.

Из механики известно, что при действии на тело постоянной по величине силы перпендикулярно направлению скорости тело движется по окружности радиуса

$$\rho = mv^2/F_m.$$

Подставляя в последнее выражение силу из формулы (11.25), получим

$$\rho = \frac{mv}{QB}, \quad (11.26)$$

где  $m$  — масса заряженной частицы.

Если все величины правой части уравнения (11.26) постоянны, то заряженная частица движется по окружности радиуса  $\rho$  в плоскости, перпендикулярной направлению линий магнитной индукции.

Угловая скорость движения

$$\omega_0 = v/\rho = QB/m. \quad (11.27)$$

### Задачи

**Задача 11.11.** В вершинах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  равностороннего треугольника со стороной  $a = 10$  см расположены три параллельных прямых провода

(рис. 11.6). Токи в проводах  $B$  и  $C$   $I_B = I_C = 6000$  А и направлены в одну сторону, а ток в третьем проводе  $I_A = 12000$  А направлен в противоположную сторону. Определить силу, действующую на 1 м длины каждого провода.

**Решение.** Рассматривая отдельно каждую пару проводов, определим направление сил взаимодействия между ними. При этом будем иметь в виду, что при одинаковом направлении токов провода притягиваются друг к другу, а при разном — отталкиваются. Направления сил показаны на рис. 11.6. Их величину определим по формуле (11.23):

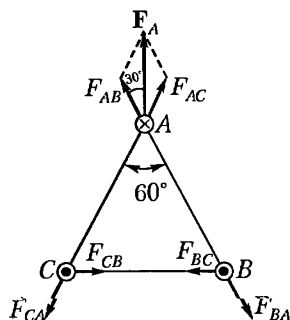


Рис. 11.6

$$F_{AB} = F_{BA} = \frac{\mu_0 I_A I_B l}{2\pi a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 1}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 144 \text{ Н};$$

$$F_{AC} = F_{CA} = \frac{\mu_0 I_A I_C l}{2\pi a} = 144 \text{ Н}.$$

Величину и направление силы  $F_A$ , действующей на провод  $A$ , определяют векторным сложением составляющих:  $F_A = F_{AB} + F_{AC}$ . В данном случае складываются две равные силы с углом  $60^\circ$  между их направлениями.

Результирующая сила направлена посередине между составляющими и имеет величину  $F_A = \sqrt{3}F_{AB} = \sqrt{3} \cdot 144 \approx 249,1$  Н. Определите силы, действующие на два других провода.

**Задача 11.12.** В вершинах  $A$ ,  $B$  и  $C$  прямоугольного треугольника с катетами  $AB = 12$  см и  $BC = 16$  см расположены три параллельных прямых провода с токами  $I_A = 10\,000$  А;  $I_B = I_C = 5000$  А, причем токи  $I_B$  и  $I_C$  имеют одинаковое направление, а ток  $I_A$  — противоположное.

Определить величину и направление сил, действующих на 1 м каждого провода.

**Задача 11.13.** Определить силу, с которой якорь  $D$  электромагнита (см. рис. 9.7) притягивается к сердечнику. Необходимые данные для расчета взять по условию и решению задачи 9.7.

## ГЛАВА 12

# СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ЭДС И ТОК

Получение, передача и использование электрической энергии осуществляются в основном с помощью устройств и сооружений переменного тока. Для этого применяют генераторы, трансформаторы, линии передачи и распределительные сети переменного тока. Наиболее широко используют приемники электрической энергии, работающие на переменном токе.

Переменным электрическим током называется электрический ток, изменяющийся с течением времени (см. рис. 2.1, кривые 2, 3).

**Периодический электрический ток, являющийся синусоидальной функцией времени, называется синусоидальным электрическим током.**

Такой ток в практике обычно имеют в виду, когда говорят о переменном токе. В некоторых случаях ток изменяется по периодическому несинусоидальному закону (см. гл. 23).

В линейных электрических цепях переменный синусоидальный ток возникает под действием ЭДС такой же формы. Поэтому для изучения электрических устройств и цепей переменного тока необходимо прежде рассмотреть способы получения синусоидальной ЭДС и основные понятия, относящиеся к величинам, которые изменяются по синусоидальному закону.

### 12.1. ПОЛУЧЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ЭДС

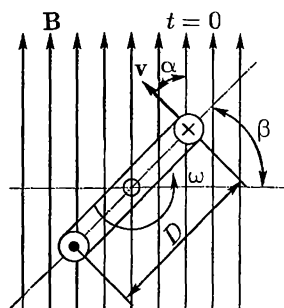


Рис. 12.1

Для получения ЭДС синусоидальной формы генератор переменного тока промышленного типа имеет определенные конструктивные особенности. Однако принципиально синусоидальную зависимость ЭДС от времени можно получить, вращая с постоянной частотой в равномерном магнитном поле проводник в виде прямоугольной рамки (рис. 12.1).

## Вращение витка в равномерном магнитном поле

Согласно формуле (10.5), ЭДС в рамке, имеющей два активных проводника длиной  $l$ ,  $e = 2Bvl \sin \alpha$  (в дальнейшем все изменяющиеся во времени величины: токи, напряжения, ЭДС и т. д. — будем обозначать малыми буквами в отличие от постоянных значений для тех же величин, которые обозначают большими буквами).

При равномерном вращении рамки линейная скорость проводника не изменяется:

$$v = \frac{D}{2} \omega,$$

а угол между направлением скорости и направлением магнитного поля изменяется пропорционально времени

$$\beta = \alpha = \omega t. \quad (12.1)$$

Угол  $\beta$  определяет положение вращающейся рамки относительно плоскости, перпендикулярной направлению магнитной индукции (положение рамки в момент начала отсчета времени  $t = 0$  характеризуется углом  $\beta = 0$ ). Поэтому ЭДС в рамке является синусоидальной функцией времени

$$e = BlD \omega \sin \omega t.$$

Наибольшей величины ЭДС достигает при угле  $\alpha = \omega t = 90^\circ$ :

$$E_m = Bl \omega D;$$

$$e = E_m \sin \omega t. \quad (12.2)$$

В рассмотренном случае синусоидальное изменение ЭДС достигается за счет непрерывного изменения угла, под которым проводники пересекают линии магнитной индукции. Однако такой способ получения ЭДС в практике не применяется, так как трудно создать равномерное поле в достаточно большом объеме.

## Генератор переменного тока

В электромашинных генераторах переменного тока промышленного типа синусоидальная ЭДС получается при постоянном угле, но в неравномерном магнитном поле.

Магнитное поле генератора (радиальное) в воздушном зазоре между статором и ротором направлено по радиусам окружности ротора (рис. 12.2, а). Магнитная индукция вдоль воздушного зазора распределена по закону, близкому к синусоидальному. Такое распределение достигается соответствующей формой полюсных нако-

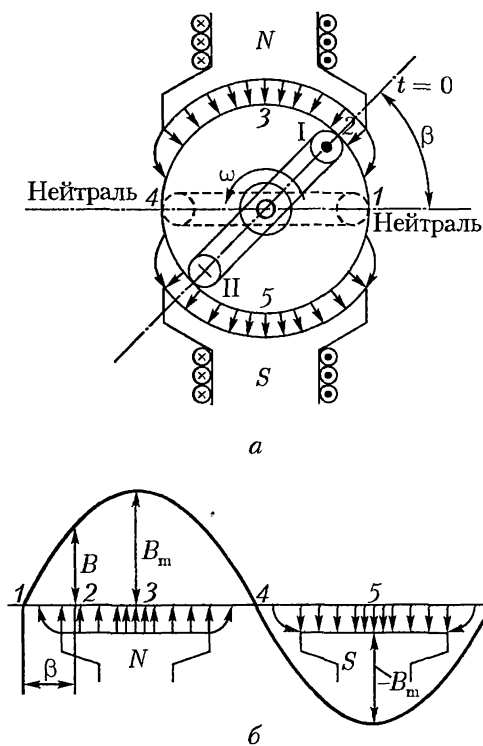


Рис. 12.2

нечников. Синусоидальный закон распределения магнитной индукции вдоль воздушного зазора показан на рис. 12.2, б в развернутом виде.

В любой точке воздушного зазора, положение которой определяется углом  $\beta$ , отсчитанным от нейтральной плоскости (нейтрали) против движения часовой стрелки, магнитная индукция выражается уравнением

$$B = B_m \sin \beta. \quad (12.3)$$

Нейтральная плоскость перпендикулярна оси полюсов и делит магнитную систему на симметричные части, из которых одна относится к северному полюсу, а другая — к южному.

Наибольшую величину магнитная индукция имеет под серединой полюсов, т. е. при углах  $\beta = 90^\circ$  ( $B = B_m$ ) и  $\beta = 270^\circ$  ( $B = -B_m$ ).

На нейтрали (при  $\beta = 0$  и  $\beta = 180^\circ$ ) магнитная индукция равна нулю ( $B = 0$ ).

На рис. 12.3 показана конструктивная схема генератора переменного тока с двумя парами полюсов, расположенных на роторе, а про-

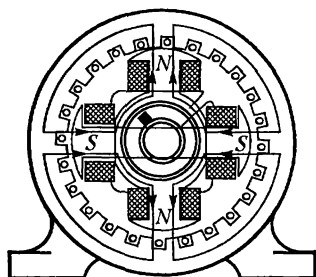


Рис. 12.3

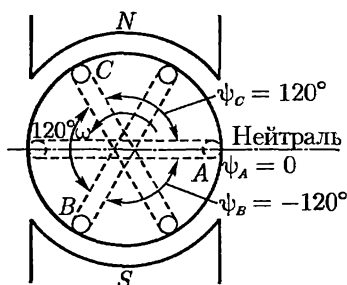


Рис. 12.4

водники обмотки, где наводится ЭДС, помещены в пазах сердечника статора.

Отметим еще одну разновидность генераторов переменного тока — генератор с тремя обмотками (трехфазный генератор), которые на схеме рис. 12.4 представлены тремя витками на роторе (у турбо- и гидрогенераторов эти обмотки находятся на статоре). Плоскости витков расположены под углом  $120^\circ$  друг к другу.

### ЭДС в обмотке генератора

При равномерном вращении ротора в его обмотке (см. на рис. 12.2,  $a$  — в витке) наводится ЭДС, определяемая формулой (10.4),

$$e = Bv \cdot 2l.$$

Подставляя выражение магнитной индукции (12.3), получим

$$e = B_m v \cdot 2l \sin \beta.$$

При  $\beta = 90^\circ$ , т. е. в положении проводника под серединой полюса, наводится наибольшая ЭДС

$$E_m = B_m \cdot 2vl.$$

Уравнение ЭДС можно записать так:

$$e = E_m \sin \beta.$$

Учитывая формулу (12.1), получим такую же зависимость ЭДС от времени, как при вращении рамки (см. рис. 12.1), считая начальным положением витка ( $t = 0$ ), когда его плоскость совпадает с нейтралью

$$e = E_m \sin \omega t. \quad (12.4)$$

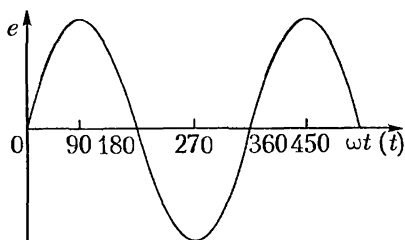


Рис. 12.5

Таким образом, и в данном случае ЭДС является синусоидальной функцией времени (рис. 12.5). Такой же результат получается, если вращать полюса, а проводники оставить неподвижными.

В прямоугольной системе координат ЭДС можно изобразить в функции угла  $\beta = \omega t$  или в функции времени  $t$ . Зависимость  $e(\omega t)$  и  $e(t)$  можно изобразить одной кривой, но при разных масштабах по оси абсцисс, отличающихся в  $\omega$  раз.

Если обмотку генератора замкнуть через сопротивление, то в образовавшейся цепи возникает синусоидальный ток, повторяющий по форме кривую ЭДС.

Полагая сопротивление цепи линейным, равным  $R$ , получим для тока такое выражение:

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m \sin \omega t}{R} = I_m \sin \omega t, \quad (12.5)$$

где  $I_m = E_m/R$  — наибольшее значение тока.

Напряжение и ток синусоидальной формы можно получить с помощью генераторов, не имеющих вращающихся частей и магнитных полюсов, например ламповых генераторов.

## Задачи

**Задача 12.1.** ЭДС электромашинного генератора выражается уравнением

$$e = E_m \sin (314t + 90^\circ).$$

Определить число пар полюсов этого генератора, если известна частота вращения ротора  $n = 75 \text{ мин}^{-1}$ .

На какой угол в пространстве поворачивается ротор генератора за  $1/4$  периода?

**Решение.** Период ЭДС, наводимой в обмотке генератора (см. рис. 12.2), имеющего одну пару полюсов, равен времени полного оборота ротора. Угловую скорость вращения ротора можно определить отношением полного угла, соответствующего одному обороту ротора, к периоду:  $\omega' = 2\pi/T$ .

Однако генератор может иметь не одну, а  $p$  пар полюсов (на рис. 12.3  $p = 2$ ). Полный цикл изменения ЭДС в этом случае совершается при движении проводника мимо одной пары полюсов (как за полный оборот ро-

тора в генераторе с  $p = 1$ ) Поэтому при одинаковой частоте вращения ротора период ЭДС будет в  $p$  раз короче, а частота в  $p$  раз больше.

Уменьшение периода и соответствующее увеличение частоты при данном числе пар полюсов можно получить, увеличивая частоту вращения ротора.

Частота синусоидальной ЭДС при  $p = 1$  равна числу оборотов ротора в секунду, а при  $p > 1$   $F = pn/60$ , где  $n$  — частота вращения ротора,  $\text{мин}^{-1}$ . Из уравнения ЭДС известна угловая частота  $\omega = 314$  рад/с; при этом

$$f = \omega/2\pi = 314/(2 \cdot 3,14) = 50 \text{ Гц.}$$

При частоте вращения ротора  $n = 75 \text{ мин}^{-1}$ :

$$p = 60f/n = 60 \cdot 50/75 = 40.$$

При  $p = 1$  за  $1/4$  периода ротор повернется на  $1/4$  окружности, т. е. в угловой мере на  $90^\circ$ . При  $p = 40$  угол поворота ротора за  $1/4$  периода будет в  $p$  раз меньше:  $\alpha = 90/40 = 2,25^\circ$ .

**Задача 12.2.** Написать уравнение ЭДС генератора по следующим данным: за время, равное половине периода, ротор поворачивается в пространстве на угол  $\varphi_0 = 45^\circ$  при частоте вращения  $n = 750 \text{ мин}^{-1}$ .

ЭДС  $e$  переходит через нуль к отрицательному значению в момент времени  $t = 8,34 \cdot 10^{-3}$  с от начала отсчета, а при  $t = 0$  она равна 7000 В.

**Задача 12.3.** Генератор имеет две пары полюсов. Определить частоту вращения его ротора, если частота ЭДС, наводимой в обмотке,  $f = 50$  Гц.

## 12.2. УРАВНЕНИЯ И ГРАФИКИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Анализ электрических цепей переменного тока невозможно проводить без выражения ЭДС токов, напряжений их уравнениями. Для наглядности применяются графики этих величин в прямоугольной системе координат. Поэтому рассмотрим уравнения и графики синусоидальных величин более подробно.

### Уравнения и графики

Уравнение (12.4) записано для случая, когда начало отсчета времени ( $t = 0$ ) совпадает с моментом прохождения витка через нейтраль (см. на рис. 12.2, а положение 1, в котором плоскость витка совпадает с нейтралью).

На рис. 12.4 положение витков тоже соответствует началу отсчета времени ( $t = 0$ ) и определяется для каждого из них углом, отсчитанным от нейтрали до плоскости витка: для первого витка этот угол  $\psi_A = 0$ , для второго —  $\psi_B < 0$  и третьего  $\psi_C > 0$ .



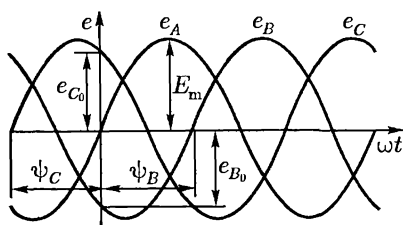


Рис. 12.6

При вращении ротора ЭДС будет наводиться во всех витках, но уравнения ЭДС не будут одинаковыми. Действительно, при  $t = 0$  ЭДС в витках

$$A: e_{A_0} = E_m \sin 0^\circ = 0;$$

$$B: e_{B_0} = E_m \sin \psi_B < 0;$$

$$C: e_{C_0} = E_m \sin \psi_C > 0.$$

Эта зависимость ЭДС от начального положения витка учитывается введением в уравнение начального угла.

С учетом начального угла ЭДС витка  $C$  выражается уравнением

$$e_C = E_m \sin (\omega t + \psi_C),$$

ЭДС витка  $B$

$$e_B = E_m \sin (\omega t - \psi_B).$$

Таким образом, в общем виде уравнение ЭДС должно быть записано так:

$$e = E_m \sin (\omega t \pm \psi). \quad (12.6)$$

Из этого уравнения можно определить величину ЭДС в любой момент при произвольном начальном положении витка.

На рис. 12.6 в соответствии с уравнением (12.6) построены графики ЭДС трех витков, отличающихся в момент начала отсчета времени расположением относительно нейтральной плоскости ( $e_A$  при  $\psi_A = 0$ ,  $e_C$  при  $\psi_C > 0$ ,  $e_B$  при  $\psi_B < 0$ ).

## Характеристики синусоидальных величин

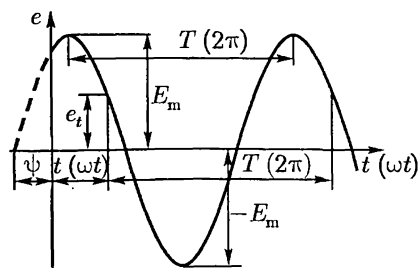


Рис. 12.7

Уравнением и графиком задаются все характеристики синусоидально изменяющейся величины: амплитуда, угловая частота, начальная фаза, период, частота и для любого момента времени мгновенная величина.

Далее приведены определения этих характеристик, и они показаны на рис. 12.7 примени-

тельно к синусоидальной ЭДС. Определения распространяются на все величины, изменяющиеся по синусоидальному закону (ток, напряжение и др.).

**Мгновенная величина** (или мгновенное значение) ЭДС  $e$  — величина ЭДС в рассматриваемый момент времени. Мгновенная ЭДС определяется уравнением (12.6) при подстановке в него времени  $t$ , прошедшего от начала отсчета до данного момента.

**Период**  $T$  — наименьший интервал времени, по истечении которого мгновенные величины периодической ЭДС повторяются. Если аргумент синусоидальной функции выражается в углах, то период выражается постоянной величиной  $2\pi$ .

**Частота**  $f$  — величина, обратная периоду:

$$f = 1/T, \quad (12.7)$$

т.е. частота равна числу периодов переменной ЭДС в секунду. Частота выражается в герцах (Гц):  $1 \text{ Гц} = 1/\text{с}$ .

**Амплитуда**  $E_m$  — наибольшая величина, которую принимает ЭДС в течение периода. Амплитуда является одной из мгновенных величин, которая соответствует аргументу  $\omega t \pm \psi$ , равному  $k\pi + 90^\circ$ , где  $k$  — любое целое число или нуль.

**Фаза** (фазовый угол  $\omega t \pm \psi$ ) — аргумент синусоидальной ЭДС, отсчитываемый от ближайшей предшествующей точки перехода ЭДС через нуль к положительному значению. Фаза в любой момент времени определяет стадию гармонического изменения синусоидальной ЭДС.

**Начальная фаза**  $\psi$  — фаза синусоидальной ЭДС в начальный момент времени.

Две синусоидальные величины, имеющие разные начальные фазы, называются **сдвинутыми по фазе**.

**Угловая частота**  $\omega$ , или **угловая скорость**, характеризуется углом поворота ротора ( $\alpha$ ) генератора в единицу времени ( $t$ ). За время одного периода  $T$  угол поворота ротора равен  $2\pi$  радиан, следовательно:

$$\omega = \alpha/t = 2\pi/T = 2\pi f. \quad (12.8)$$

## Задачи

**Задача 12.4.** Переменный электрический ток задан уравнением  $i = 100 \sin (628 - 60^\circ)$ .

Определить период, частоту этого тока и мгновенные его значения при  $t = 0$ ;  $t_1 = 0,152$  с. Построить график тока.

**Решение.** Уравнение синусоидального тока в общем случае имеет вид

$$i = I_m \sin (\omega t \pm \psi).$$

Сопоставляя это уравнение с заданным частным уравнением тока, устанавливаем, что амплитуда  $I_m = 100$  А, угловая частота  $\omega = 628$  рад/с, начальная фаза  $\Psi = -60^\circ$ .

Период  $T = 2\pi/\omega = 2\pi/628 = 0,01$  с.

Частота  $f = 1/T = 1/0,01 = 100$  Гц.

Мгновенные значения тока найдем, подставив в уравнение тока заданные значения времени:

при  $t = 0$

$$i_0 = 100 \sin(-60^\circ) = -86,5 \text{ А};$$

при  $t_1 = 0,152$  с

$$i_1 = 100 \sin\left(628 \cdot 0,152 \frac{360^\circ}{2\pi} - 60^\circ\right) =$$

$$= 100 \sin(15,2 \cdot 360^\circ - 60^\circ) = 100 \sin(72^\circ - 60^\circ) = 100 \sin 12^\circ.$$

Синусоидальная величина через  $360^\circ$  повторяется, поэтому мгновенный ток при угле  $\omega t_1 = 15,2 \cdot 360^\circ$  будет таким же, как и при угле  $0,2 \cdot 360^\circ = 72^\circ$ :

$$i_1 = 100 \sin(72^\circ - 60^\circ) = 100 \sin 12^\circ = 20,8 \text{ А}.$$

Для построения графика  $i(\omega t)$  нужно определить ряд мгновенных токов, соответствующих различным моментам времени (рис. 12.8).

**Задача 12.5.** Синусоидальный ток имеет амплитуду  $I_m = 10$  А, угловую частоту  $\omega = 134$  рад/с и начальную фазу  $\psi = 30^\circ$ .

По этим данным составить уравнение тока, начертить график тока  $i(\omega t)$ , соответствующий этому уравнению, и определить по графику и с помощью расчета: а) период  $T$ ; б) мгновенные токи при  $\omega t = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ .

**Задача 12.6.** На рис. 12.9 изображены графики двух ЭДС. Написать уравнения кривых и определить угол сдвига фаз между ними. Определить из графиков мгновенные ЭДС для момента времени  $t_1 = 0,007$  с и сравнить с результатами, полученными из уравнений.

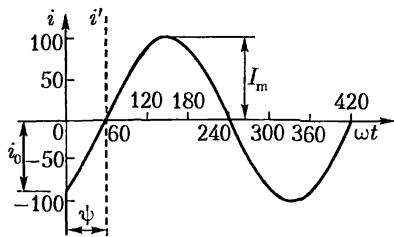


Рис. 12.8

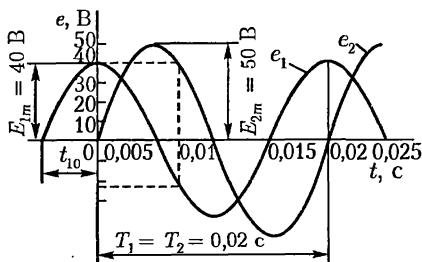


Рис. 12.9

### 12.3. ВЕКТОРНЫЕ ДИАГРАММЫ

До сих пор величины, изменяющиеся по синусоидальному закону, задавали уравнениями и изображали графиками в прямоугольной системе координат. При расчете электрических цепей переменного тока пользуются весьма простым и наглядным способом графического изображения синусоидальных величин с помощью вращающихся векторов.

#### Обоснование векторной диаграммы

Предположим, что ток задан уравнением

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Из точки пересечения двух взаимно перпендикулярных осей проведем вектор  $\mathbf{I}$ , длина которого в определенном масштабе  $M_i$  выражает амплитуду тока  $I_m$ :

$$\mathbf{I}_m = I_m / M_i.$$

Направление вектора выберем так, чтобы с положительным направлением горизонтальной оси вектор составлял угол, равный начальной фазе  $\Psi$  (рис. 12.10).

Проекция этого вектора на вертикальную ось определяет мгновенный ток в начальный момент времени:  $i_0 = I_m \sin \psi$ .

Представим себе, что вектор  $\mathbf{I}_m$  вращается против движения часовой стрелки с угловой скоростью, равной угловой частоте  $\omega$ . Его положение в любой момент времени определяется углом  $\omega t + \psi$ .

Тогда мгновенный ток для произвольного момента времени  $t$  можно определить проекцией вектора  $\mathbf{I}_m$  на вертикальную ось в этот момент времени.

Например, для  $t = t_1$

$$i_1 = I_m \sin(\omega t_1 + \psi),$$

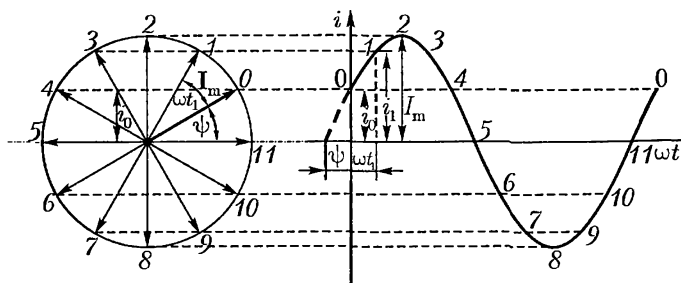


Рис. 12.10

в общем случае

$$i = I_m \sin (\omega t + \psi).$$

Получили такое же уравнение, каким был задан переменный ток, что свидетельствует о возможности изображения тока вращающимся вектором при нанесении его на чертеж в начальном положении.

## Построение векторной диаграммы

Вращая вектор  $I_m$  против движения часовой стрелки, в прямоугольной системе координат построим график изменения проекции его на вертикальную ось в пределах одного оборота (одного периода). Получим известный уже график синусоидальной функции, соответствующий заданному уравнению.

При построении векторов положительные углы отсчитывают от положительного направления горизонтальной оси против вращения часовой стрелки, а отрицательные — по ее движению.

В процессе расчета электрической цепи определяется ряд синусоидальных величин. Все их можно изобразить на одном чертеже с помощью вращающихся векторов, привязав к одной паре взаимно перпендикулярных осей.

*Совокупность векторов, изображающих на одном чертеже несколько синусоидальных величин одинаковой частоты в начальный момент времени, называется векторной диаграммой.* Например, напряжение и ток в электрической цепи выражаются уравнениями

$$u = 125 \sin (\omega t + 30^\circ);$$

$$i = 12 \sin (\omega t - 20^\circ).$$

Векторная диаграмма такой цепи изображена на рис. 12.11. Если выбрать масштабы напряжения и тока

$$M_u = 50 \text{ В/см}; \quad M_i = 4 \text{ А/см},$$

то

$$U_m = U_m / M_u = 125 / 50 = 2,5 \text{ см};$$

$$I_m = I_m / M_i = 12 / 4 = 3 \text{ см}.$$

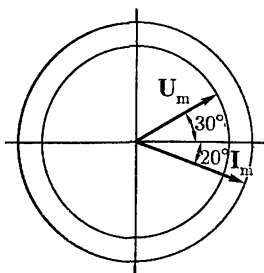


Рис. 12.11

Векторная диаграмма содержит векторы синусоидальных величин одинаковой частоты, поэтому они вращаются с одинаковой частотой и их взаимное расположение не меняется.

Начало отсчета времени выбирают произвольно, поэтому один из векторов диаграммы можно направить произвольно; осталь-

ные же нужно располагать с учетом сдвига фаз по отношению к первому или предыдущему вектору.

## Сложение и вычитание векторов

Простота и наглядность векторных диаграмм — не единственное и не главное достоинство способа изображения синусоидальных величин.

Требуется сложить, например, два тока, заданных уравнениями

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t - \psi_2).$$

Выражение суммы

$$i = i_1 + i_2 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \sin(\omega t - \psi_2)$$

оказывается громоздким, из него не видны амплитуда и начальная фаза результирующего тока.

Можно графически сложить два заданных тока, построив их в одной системе координат и для ряда аргументов, найдя сумму двух ординат. Через полученные точки проведем кривую суммы, увидим, что эта кривая тоже синусоида с таким же периодом, как и слагаемые. По кривой общего тока можно найти амплитуду и начальную фазу. Громоздкость и неудобство такого сложения очевидны.

Очень просто сложение и вычитание синусоидальных величин осуществляется по правилам сложения и вычитания векторов.

Сложим два заданных тока  $i_1$  и  $i_2$  по известному правилу сложения векторов (рис. 12.12, а). Для этого изобразим токи в виде векторов из общего начала  $O$ . Результирующий вектор найдем как диагональ параллелограмма, построенного на слагаемых векторах

$$I_m = I_{1m} + I_{2m}.$$

Сложение векторов, особенно трех и более, удобнее вести в таком порядке: один вектор остается на месте, другие переносятся па-

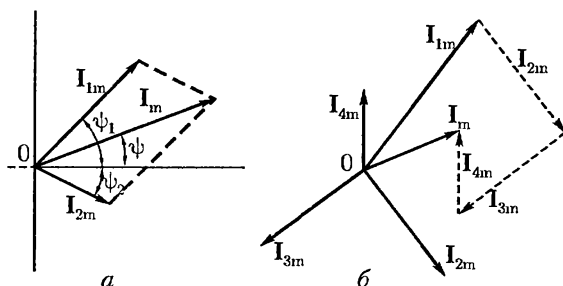


Рис. 12.12

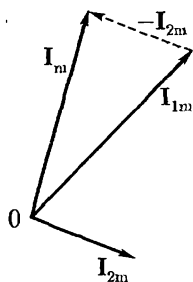


Рис. 12.13

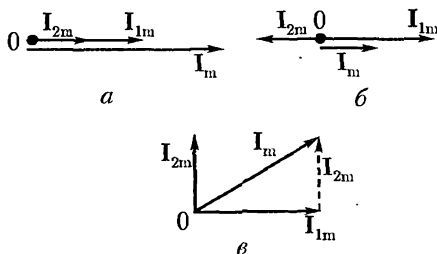


Рис. 12.14

параллельно самим себе так, чтобы начало последующего вектора совпало с концом предыдущего.

Вектор  $I_m$ , проведенный из начала первого вектора в конец последнего, представляет собой сумму всех векторов (рис. 12.12, б).

Вычитание одного вектора из другого выполняют сложением прямого вектора (уменьшаемого) с вычитаемым вектором, повернутым на  $180^\circ$  (рис. 12.13).

$$I_m = I_{1m} - I_{2m} = I_{1m} + (-I_{2m}).$$

При сложении синусоидальных величин в отдельных случаях можно применить аналитическое решение применительно к рис. 12.12, а — по теореме косинусов; к рис. 12.14, а — сложение модулей векторов; б — вычитание модулей векторов, в — по теореме Пифагора.

## Задачи

**Задача 12.7.** Два тока заданы уравнениями

$$i_1 = 20 \sin(\omega t + 90^\circ);$$

$$i_2 = 30 \sin(\omega t + 30^\circ).$$

Найти уравнения токов

$$i_3 = i_1 + i_2; \quad i_4 = i_1 - i_2; \quad i_5 = i_2 - i_1.$$

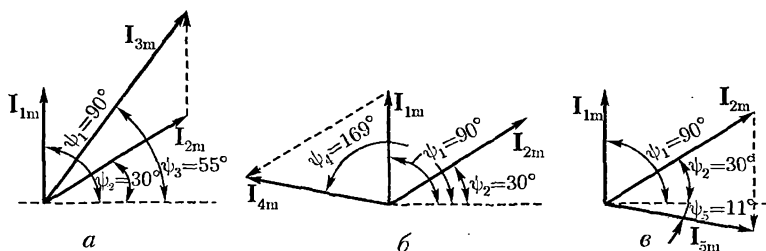


Рис. 12.15

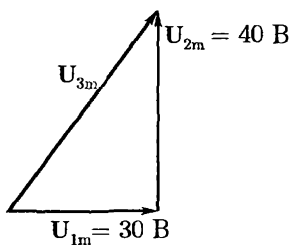


Рис. 12.16

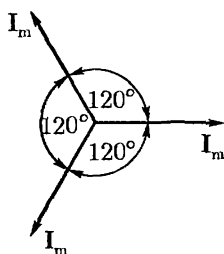


Рис. 12.17

**Решение.** Решение задачи проще всего выполнять графически в векторной форме. Для этого изобразим векторы заданных токов. Масштаб тока выбираем так, чтобы наибольший вектор поместился на имеющемся листе бумаги, одновременно учитывая возможность отчетливого изображения наименьшего вектора.

При разборе решения рекомендуется провести построения по рис. 12.15 на листе миллиметровой бумаги в масштабе  $M_i = 10 \text{ А/см}$ . В этом масштабе длина векторов:  $I_{1m} = I_{1m}/M_i = 20/10 = 2 \text{ см}$ ;  $I_{2m} = I_{2m}/M_i = 30/10 = 3 \text{ см}$ .

Длину вектора суммы определяют графически (рис. 12.15, а):  $I_{3m} = 4,3 \text{ см}$ ;  $I_{3m} M_i = 4,3 \cdot 10 = 43 \text{ А}$ .

Начальная фаза этого вектора по чертежу  $\psi_3 = +55^\circ$ .

Уравнение суммы токов:  $i_3 = 43 \sin(\omega t + 55^\circ)$ .

В таком же порядке найдены векторы разностей токов (рис. 12.15, б, в). Вычитаемые векторы взяты в противофазе с заданными.

После измерения длин векторов и начальных фаз напишем уравнения разностей токов:  $i_4 = 26 \sin(\omega t + 169^\circ)$ ;  $i_5 = 26 \sin(\omega t - 11^\circ)$ .

**Задача 12.8.** Написать уравнения трех синусоидальных напряжений векторной диаграммы на рис. 12.16 при частоте  $f = 50 \text{ Гц}$  ( $U_{1m} = 30 \text{ В}$ ;  $U_{2m} = 40 \text{ В}$ ).

**Задача 12.9.** Написать уравнения трех токов, векторная диаграмма которых изображена на рис. 12.17. Частота токов  $f = 100 \text{ Гц}$ ,  $I_{1m} = 60 \text{ А}$ .

## 12.4. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ И СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

О переменном токе все известно, если задано его уравнение или график. Однако в практике пользоваться уравнениями или графиками токов затруднительно.

Переменный ток обычно характеризуется его действующим значением  $I$ . При изучении выпрямительных устройств электрических машин пользуются средними значениями ЭДС, тока, напряжения.

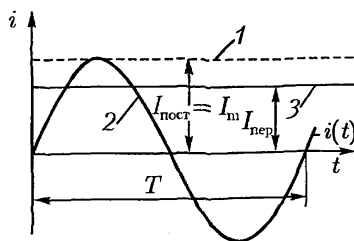


Рис. 12.18



## Действующее значение переменного тока

При определении действующего значения переменного тока можно исходить из какого-либо его действия в электрической цепи (тепловое, механическое взаимодействие проводов с токами).

На рис. 12.18 изображены графики двух токов: постоянного 1 и переменного 2, причем значение постоянного тока равно амплитуде переменного.

Постоянный ток, равный амплитуде переменного, выделит больше теплоты в одном и том же элементе цепи за одно и то же время, так как переменный ток в течение полупериода меньше постоянного, и лишь одно мгновение эти токи равны.

*Действующее значение переменного тока  $I$  численно равно величине постоянного тока, который в одном и том же элементе цепи за время периода  $T$  выделяет столько же теплоты, сколько при тех же условиях выделяет переменный ток.*

Действующее значение переменного тока  $I$  меньше амплитуды (прямая 3 на рис. 12.18).

Определим количество теплоты, выделяемой за период  $T$  постоянным током, равным  $I$ , и переменным током  $i = I_m \sin \omega t$  (см. рис. 12.18) в элементе цепи с сопротивлением  $R$ :

$$Q_{\text{пост}} = I^2 R T; \quad Q_{\text{пер}} = \int_0^T i^2 R dt = I_m^2 R \int_0^T \sin^2 \omega t dt.$$

Приравнявая  $Q_{\text{пост}} = Q_{\text{пер}}$ , найдем

$$I^2 T = \int_0^T i^2 dt; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (12.9)$$

Действующее значение периодического тока является его средней квадратичной за период.

Его можно найти из уравнения (12.9), но для наглядности воспользуемся графическим решением поставленной задачи.

Среднеквадратичное значение переменного тока за период можно представить в виде квадратного корня из суммы очень большого числа ординат кривой  $i^2(t)$ , разделенной на число ординат  $n$ :

$$I = \sqrt{\frac{i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_n^2}{n}}, \quad (12.10)$$

где в числителе подкоренного выражения представлена сумма квадратов ряда мгновенных токов в течение периода;  $n$  — число этих значений, стремящееся к  $\infty$ .

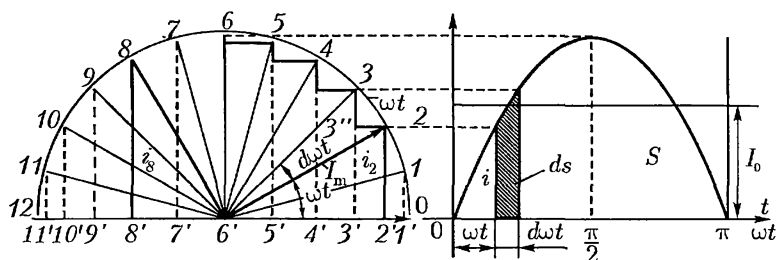


Рис. 12.19

На рис. 12.19 показан ряд положений вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вектора тока  $I_m$  и соответствующие им мгновенные токи  $i$ . Эти положения отмечены точками 0, 1, 2 и т. д. на окружности, которую описывает конец вектора  $I_m$ .

Рассмотрим два положения вектора  $I_m$  (отмечены точками 2 и 8), отстоящие по окружности на  $90^\circ$ , т. е. находящиеся соответственно в первой и второй четвертях окружности. Прямоугольные треугольники  $6' - 2 - 2'$  и  $6' - 8 - 8'$  равны, так как равны их стороны:  $2 - 2' = 6' - 8'$  и  $2' - 6' = 8 - 8'$ . Из этих треугольников следует:  $i_2^2 + i_8^2 = I_m^2$ .

Каждому положению вектора  $I_m$  в первой четверти соответствует другое его положение во второй, для которых можно написать аналогичное выражение. Такие рассуждения можно провести для другой полуокружности, т. е. распространить их на второй полупериод тока, причем квадраты отрицательных мгновенных токов будут положительны, поэтому

$$i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_8^2 + \dots + i_n^2 = I_m^2 \frac{n}{2}.$$

Подставляя это выражение в (12.10), получим

$$I = I_m / \sqrt{2}. \quad (12.11)$$

Таким образом, действующее значение синусоидального тока меньше его амплитуды в  $\sqrt{2}$  раза.

Понятие о действующем значении можно распространить на все синусоидальные функции и, следовательно, говорить о действующем значении напряжения, ЭДС.

Действующие значения тока, напряжения измеряются электроизмерительными приборами. Номинальные токи и напряжения электротехнических устройств выражаются действующими значениями, для которых в дальнейшем будем строить векторные диаграммы.

Отношение амплитуды к действующему значению называется коэффициентом амплитуды  $K_a$ . Для синусоидальной функции этот коэффициент равен  $\sqrt{2}$ ; если кривая тока или напряжения имеет более острую форму, чем синусоида, то  $K_a > \sqrt{2}$ , в противном случае  $K_a < \sqrt{2}$  (при прямоугольной форме  $K_a = 1$ ).

## Среднее значение переменного тока

*Средним значением переменного тока (ЭДС, напряжения) называется среднее арифметическое из всех мгновенных величин за полупериод.*

Среднее значение равно высоте прямоугольника с основанием  $\pi$  (в угловой мере), площадь которого равна площади  $S$ , ограниченной положительной полуволной тока и осью абсцисс (см. рис. 12.19),  $I_{\text{ср}} = S$ .

Для определения площади  $S$  нужно сложить в пределах полупериода элементарные площади  $dS$ , одна из которых на рисунке показана при некотором угле  $\omega t$  и мгновенном значении тока  $i$ .

При малом изменении угла ( $d\omega t \rightarrow 0$ ) значение тока можно считать постоянным, поэтому

$$dS = i d\omega t = I_m \sin \omega t d\omega t.$$

Изменению угла на  $d\omega t$  соответствует поворот на такой же угол вектора  $I_m$ , конец которого опишет дугу 2–3 длиной

$$dl = I_m d\omega t,$$

поэтому

$$dS = dl \sin \omega t.$$

Длину дуги  $dl$  можно считать равной гипотенузе прямоугольного треугольника 2–3–3". Этот треугольник имеет взаимно перпендикулярные стороны с треугольником 2–6'–2', поэтому углы при вершинах 3 и 6' равны  $\omega t$ . Сторона 2–3" треугольника 2–3–3" равна проекции гипотенузы 2–3 на горизонтальную ось:

$$dS = dl \sin \omega t = \overline{2' - 3'}.$$

Такие же рассуждения можно привести для последующих и предыдущих изменений угла  $\omega t$  на  $d\omega t$ . Следовательно, сумму  $S$  элементарных площадей  $dS$ , взятую за полупериод, можно приравнять проекции полуокружности на ее диаметр:  $S = 2I_m$ .

Таким образом,  $I_{\text{ср}} = 2I_m$ .

Среднее значение синусоидального тока

$$I_c = 2I_m/\pi. \quad (12.12)$$

Среднее значение синусоидальной функции за период равно нулю, так как площади положительной и отрицательной полуволн равны.

Отношение действующего значения к среднему называется коэффициентом формы кривой  $K_\Phi$ :

$$K_\Phi = I/I_c.$$

Для синусоиды

$$K_\Phi = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

Найдем среднее и действующее значения ЭДС, наводимой в прямоугольном витке (см. рис. 12.1) при вращении его в равномерном магнитном поле с постоянной угловой скоростью. Для этого в формуле (12.2) обозначим:  $lD = S$  — площадь витка;  $BS = \Phi_m$  — наибольшее значение магнитного потока, сцепленного с витком.

Амплитуда ЭДС при наличии  $N$  витков

$$E_m = \Phi_m N \omega = 2\pi f N \Phi_m.$$

Среднее значение ЭДС

$$E_c = 2E_m/\pi = 4fN\Phi_m.$$

Действующее значение ЭДС

$$E = K_\Phi E_c = 1,11E_c = 4,44fN\Phi_m. \quad (12.13)$$

### Задачи

**Задача 12.10.** Определить действующее значение ЭДС, наводимой в прямоугольной рамке, имеющей  $N = 10$  витков, при вращении ее в равномерном магнитном поле  $B = 1,2$  Тл с постоянной угловой скоростью  $\omega = 314$  рад/с (см. рис. 12.1) Размеры рамки: ширина  $D = 20$  см, активная длина одной стороны  $l = 30$  см.

**Решение.** Начальным положением рамки будем считать положение, когда плоскость рамки перпендикулярна направлению поля ( $\beta = 0$ ). Магнитный поток, сцепленный с витками рамки, в этом положении наибольший:  $\Phi_m = BS = 1,2 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,072$  Вб.

По мере поворота рамки против движения часовой стрелки магнитный поток уменьшается и при  $\beta = 90^\circ$  становится равным нулю.

Уравнение магнитного потока следующее:  $\Phi = \Phi_m \cos \omega t$ , где  $\omega t = \beta$  — переменный угол, определяющий положение рамки относительно плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля.

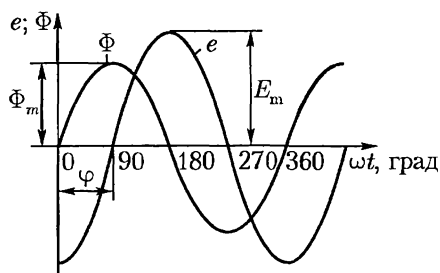


Рис. 12.20

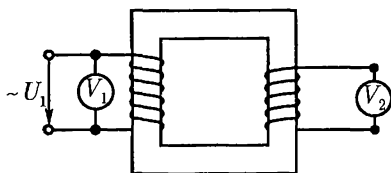


Рис. 12.21

Средняя ЭДС

$$E_c = 4Nf\Phi_m = 4 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 0,072 = 144 \text{ В.}$$

Действующее значение ЭДС

$$E = K_\Phi E_c = 1,11 \cdot 144 = 160 \text{ В.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Доказать, что ЭДС, наводимая в витках рамки, отстает от магнитного потока по фазе на  $90^\circ$ , как показано на рис. 12.20. Какое положение рамки в этом случае принято за начальное?

2. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС пропорциональна скорости изменения потока. Как выражена зависимость ЭДС от скорости изменения потока в формуле (12.13)?

**Задача 12.11.** Построить график ЭДС, возникающей в секции обмотки, состоящей из 50 витков, если сцепленный с ними поток изменяется по закону  $\Phi = 0,04 \cos 942t$ .

**Задача 12.12.** Определить показания вольтметров в схеме на рис. 12.21, если магнитный поток в сердечнике трансформатора изменяется по закону синуса, причем при площади сердечника  $S = 50 \text{ см}^2$  наибольшее значение магнитной индукции составляет 0,95 Тл. Число витков обмоток:  $N_1 = 6000$ ,  $N_2 = 300$ . Частота тока в первичной обмотке  $f = 50 \text{ Гц}$ .

# ГЛАВА 13

## ЭЛЕМЕНТЫ И ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Все реальные электротехнические устройства обладают электрическим сопротивлением  $R$ , индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$ , которые являются параметрами электрической цепи переменного тока. В схемах электрической цепи переменного тока используются комбинации этих параметров при различных способах соединения элементов цепи.

При расчетах в цепях переменного тока для мгновенных значений можно использовать все законы и правила постоянного тока.

### 13.1. ЦЕПЬ С АКТИВНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Электрические лампы накаливания, печи сопротивления, бытовые нагревательные приборы, реостаты и другие приемники, где электрическая энергия преобразуется в тепловую, на схемах замещения обычно представлены только сопротивлением  $R$ .

Для схемы, изображенной на рис. 13.1, *а*, заданы сопротивление и напряжение, изменяющееся по закону

$$u = U_m \sin \omega t.$$

Требуется определить ток и мощность цепи.

#### Ток в цепи

Выражение для мгновенного тока найдем по закону Ома:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t,$$

где  $I_m = U_m/R$  — амплитуда тока.

Из уравнений напряжения и тока видно, что начальные фазы обеих кривых одинаковы, т. е. *напряжение и ток в цепи с сопротивлением  $R$  совпадают по фазе*. Это показано на графиках и векторной диаграмме (рис. 13.1, *б, в*).

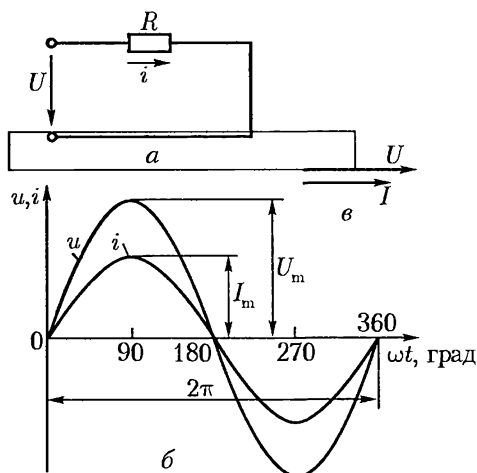


Рис. 13.1

Действующий ток найдем, разделив амплитуду на  $\sqrt{2}$ :

$$I_m / \sqrt{2} = U_m / \sqrt{2} R,$$

отсюда

$$I = U/R; \quad U = IR; \quad R = U/I. \quad (13.1)$$

Формулы (13.1) выражают закон Ома для цепи переменного тока с сопротивлением  $R$ . Внешне они ничем не отличаются от формулы (2.6) для цепи постоянного тока, если переменные напряжение и ток выражены действующими значениями.

## Мгновенная мощность

При переменных значениях напряжения и тока скорость преобразования электрической энергии в приемнике, т.е. его мощность, тоже изменяется. *Мгновенная мощность равна произведению мгновенных величин напряжения и тока.*

$$p = U_m \sin \omega t I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t.$$

Из тригонометрии найдем

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}.$$

Учитывая это, запишем

$$p = \frac{U_m I_m}{2} - \frac{U_m I_m}{2} \cos 2\omega t. \quad (13.2)$$

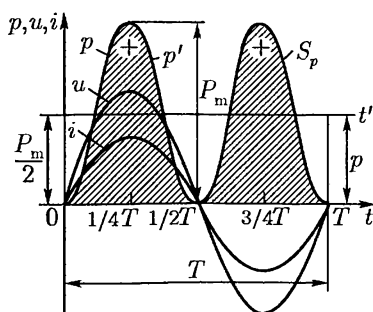


Рис. 13.2

Более наглядное представление о характере изменения мощности в цепи дает график в прямоугольной системе координат, который строится после умножения ординат кривых напряжения и тока, соответствующих ряду значений их об-

щего аргумента — времени  $t$ . Зависимость мощности от времени — периодическая кривая (рис. 13.2).

Если ось времени  $t$  поднять по чертежу на величину  $p = P_m/2 = U_m I_m/2$ , то относительно новой оси  $t'$  график мощности является синусоидой с двойной частотой и начальной фазой  $90^\circ$ :

$$p' = \frac{U_m I_m}{2} \sin(2\omega t - 90^\circ) = -\frac{U_m I_m}{2} \cos 2\omega t.$$

Таким образом, в первоначальной системе координат мгновенная мощность равна сумме постоянной величины  $P = U_m I_m/2$  и переменной  $p'$ :  $p = P + p'$ .

Анализируя график мгновенной мощности, нетрудно заметить, что мощность в течение периода остается положительной, хотя ток и напряжение меняют свой знак. Это получается благодаря совпадению по фазе напряжения и тока.

Постоянство знака мощности указывает на то, что направление потока электрической энергии остается в течение периода неизменным, в данном случае от сети (от источника энергии) в приемник сопротивлением  $R$ , где электрическая энергия необратимо преобразуется в другой вид энергии. В этом случае электрическая энергия называется активной.

Активная энергия (мощность) является потребляемой, т. е. преобразующейся в другие виды энергии (мощности).

## Активная мощность

Скорость преобразования электрической энергии в другой вид энергии за конечный промежуток времени, значительно превышающий период изменения тока, характеризуется средней мощностью. Она равна средней мощности за период, которую называют активной.

**Активная мощность** — среднее арифметическое мгновенной мощности за период.

Для рассматриваемой цепи активную мощность  $P$  нетрудно определить из графика, представленного на рис. 13.2.

Среднее значение мощности равно высоте прямоугольника с основанием  $T$ , равновеликого площади, ограниченной кривой  $p(t)$  и осью абсцисс (на рисунке заштриховано).

Равенство площадей  $PT = S_p$  выполняется, если высоту прямоугольника взять равной половине наибольшей мгновенной мощности  $P_m$ .



В этом случае часть площади  $S_p$ , находящаяся выше прямоугольника, точно укладывается в оставшуюся незаштрихованной его часть:

$$P = \frac{P_m}{2} = \frac{U_m I_m}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = UI.$$

Активная мощность цепи с сопротивлением равна произведению действующих значений напряжения и тока:

$$P = UI = I^2 R = U^2 / R. \quad (13.3)$$

С математической точки зрения активная мощность является постоянной составляющей в уравнении мгновенной мощности  $p(t)$  [см. выражение (13.2)].

Среднюю мощность за период можно найти интегрированием уравнения (13.2) в пределах периода:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T dt - \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T \cos 2\omega t dt,$$

$$\int_0^T \cos 2\omega t dt = 0.$$

Поэтому

$$P = \frac{U_m I_m}{2} = UI.$$

Сопротивление  $R$ , определяемое из формулы (13.3) отношением активной мощности цепи к квадрату действующего тока, называется активным электрическим сопротивлением.

### Задачи

**Задача 13.1.** Написать уравнения тока и напряжения и определить активную мощность цепи, векторная диаграмма которой изображена на рис. 13.3. Активное сопротивление  $R = 20$  Ом, частота  $f = 100$  Гц.

**Задача 13.2.** Группа электрических ламп общей мощностью  $P = 900$  Вт включена в сеть переменного тока с напряжением  $U = 169 \sin(314t + 60^\circ)$ . Определить действующий ток в цепи и написать его уравнение.

Построить в масштабе графики напряжения и тока в прямоугольной системе координат и векторную диаграмму цепи.

**Задача 13.3.** Определить мгновенные мощности в лампах (см. предыдущую задачу) в моменты времени  $t_1 = 0,005$  с и  $t_2 = 0,01$  с.

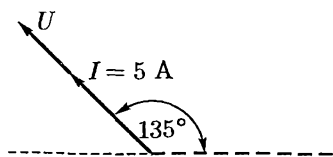


Рис. 13.3

## 13.2. ЦЕПЬ С ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Исследуемая далее цепь, содержащая только индуктивность, является искусственной, так как катушки, линии электропередачи и другие устройства кроме индуктивности  $L$  имеют и активное сопротивление.

Однако рассмотрение идеальной катушки (при  $R = 0$ ) необходимо для уяснения физических процессов в реальных цепях. Это тем более важно, что в отдельных случаях активным сопротивлением и емкостью можно пренебречь из-за их малости. Например, ненагруженный трансформатор в схеме замещения в ряде случаев может быть представлен только своей индуктивностью.

Допустим, что для цепи (рис. 13.4, а) известны индуктивность и ток, изменяющийся по закону (рис. 13.4, б, в)

$$i = I_m \sin \omega t. \quad (13.4)$$

Требуется определить напряжение и мощность цепи.

### Индуктивное напряжение

Переменный ток в катушке вызывает ЭДС самоиндукции (см. 10.4). При отсутствии активного сопротивления приложенное к катушке напряжение уравновешивается только ЭДС самоиндукции, поэтому в соответствии со вторым законом Кирхгофа в любой момент времени  $u = -e_L$ .

ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока [см. формулу (10.10)]

$$e_L = -L \frac{di}{dt},$$

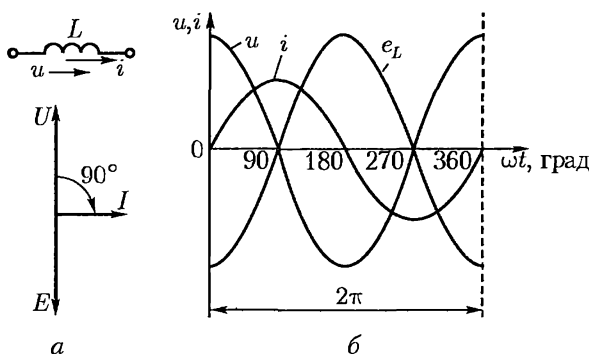


Рис. 13.4

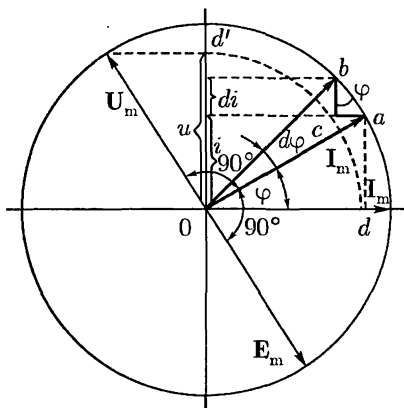


Рис. 13.5

а напряжение

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Уравнение приложенного напряжения можно найти, рассматривая векторную диаграмму на рис. 13.5, где ток изображен вектором  $I_m$ , который предполагается вращающимся с угловой скоростью, равной угловой частоте  $\omega$ . В начальном положении (при  $t = 0$ ) вектор  $I_m$  направлен по горизонтальной оси вправо. Это соответствует уравнению тока (13.4), если мгновенные значения тока  $i$

определять проекцией вращающегося вектора  $I_m$  на вертикальную ось (см. 12.3).

Рассмотрим промежуточные положения вектора  $I_m$ , отстоящие от начального на угол  $\varphi = \omega t$  и  $\varphi + d\varphi$ , где  $d\varphi$  — элементарный угол, на который вектор  $I_m$  поворачивается за малый промежуток времени  $dt$ . За время  $dt$  ток изменился на  $di$ . Приращение тока выражается катетом прямоугольного треугольника  $abc$ , гипотенуза которого  $ab$  при весьма малом угле  $d\varphi$  может быть приравнена дуге окружности между точками  $a$  и  $b$ , а угол при вершине  $b$  равен  $\varphi$ . Поэтому отрезок  $ab$  в масштабе тока имеет значение  $I_m d\varphi$  и  $di = I_m d\varphi \cos \varphi$ .

Уравнение напряжения

$$u = L \frac{di}{dt} = LI_m \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi.$$

Но

$$\varphi = \omega t, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

поэтому

$$u = \omega LI_m \cos \omega t = \omega LI_m \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Это уравнение можно получить, дифференцируя уравнение тока

$$i = I_m \sin \omega t, \quad \frac{di}{dt} = \omega I_m \cos \omega t = \omega I_m \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (13.5)$$

## Индуктивное сопротивление

Действующее значение напряжения определяется из уравнения (13.5), где  $\omega L I_m = U_m$  — амплитуда напряжения. Разделив это выражение на  $\sqrt{2}$ , получим

$$\omega L \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$\boxed{I = U/X_L.} \quad (13.6)$$

Коэффициент пропорциональности между действующими значениями напряжения и тока, равный произведению индуктивности и угловой частоты  $\omega L$ , обозначают  $X_L$  и называют реактивным сопротивлением индуктивности или индуктивным сопротивлением.

Индуктивное сопротивление выражается в омах:

$$[X_L] = [U/I] = B/A = \text{Ом}.$$

Действующее значение тока в цепи с индуктивностью равно отношению действующего значения напряжения к индуктивному сопротивлению.

Формула (13.6) идентична формуле, выражающей закон Ома. Это позволяет ток в цепи с индуктивностью определять так же, как ток в цепи с активным сопротивлением. Но нужно помнить, что индуктивное сопротивление с физической точки зрения ничего общего с обычным сопротивлением не имеет. Понятие об индуктивном сопротивлении, введенное для облегчения расчета, заменяет в расчете фактическое влияние ЭДС самоиндукции на ток в цепи, т. е. отражает инерционные свойства электрической цепи.

## Векторная диаграмма цепи

Сопоставление уравнений тока (13.4) и напряжения (13.5) показывает, что *в цепи с индуктивностью ток отстает от напряжения по фазе на четверть периода, или в угловой мере на  $\pi/2$* . Это видно также на рис. 13.5. Мгновенное напряжение выражается отрезком  $Od$  в масштабе, отличающемся от масштаба тока в  $\omega L$  раз. Перенесем этот отрезок на вертикальную ось (отрезок  $Od'$ ), где откладываются мгновенные значения тока. Этому мгновенному напряжению и соответствует вектор  $U_m$ , опережающий вектор  $I_m$  по ходу вращения

на угол  $90^\circ$ . ЭДС самоиндукции, направленная против приложенного напряжения, имеет уравнение

$$e = -\omega L I_m \cos \omega t = E_m \sin(\omega t - 90^\circ),$$

а на рис. 13.5 изображена вектором  $E_m$  отстающим от вектора тока  $I_m$  на  $90^\circ$ . На рис. 13.4 это показано отдельно на графике и векторной диаграмме (на векторной диаграмме отложены действующие величины).

## Мгновенная и реактивная мощности

Мгновенная мощность  $p = ui$ , или

$$p = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) I_m \sin \omega t = U_m I_m \cos \omega t \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t.$$

График изменения мощности (рис. 13.6) представляет собой синусоиду двойной частоты с амплитудой:

$$Q = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{U_m I_m}{\sqrt{2}\sqrt{2}},$$

или

$Q = UI.$

(13.7)

Наибольшее значение мощности в цепи с индуктивностью равно произведению действующих значений напряжения и тока.

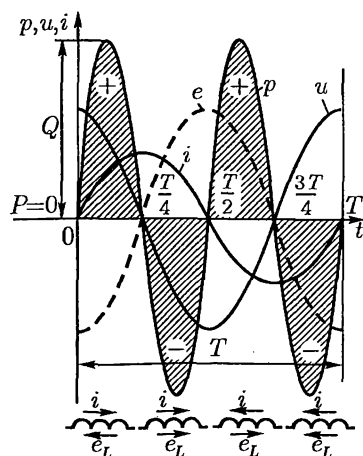


Рис. 13.6

Для выяснения физического смысла энергетических процессов обратим еще раз внимание на график мощности. Из него видно, что мгновенная мощность в течение периода четыре раза меняет знак (в моменты времени  $T/4$ ;  $T/2$ ;  $3T/4$ ;  $T$ ).

Изменение знака мощности означает, что направление потока энергии меняется.

В первую четверть периода, когда ток в цепи увеличивается, энергия накапливается в магнитном поле катушки за счет энергии источника. Катушка в это время является приемником энергии, ток направлен

против ЭДС самоиндукции. Во вторую четверть периода, когда ток уменьшается, энергия возвращается в сеть (к источнику).

Направления ЭДС самоиндукции и тока в катушке совпадают — катушка является источником энергии. В следующую половину периода процесс повторяется. Нетрудно заметить, что количество энергии, накапливаемой в катушке за одну четверть периода (заштрихованная площадь «+»), точно равно количеству энергии, возвращаемой обратно в следующую четверть периода (заштрихованная площадь «-»).

*Средняя (активная) мощность за период в цепи с индуктивностью равна нулю ( $P = 0$ ), так как в цепи с индуктивностью преобразования электрической энергии в другие виды энергии (тепловую, механическую) не происходит.*

Как видно из диаграммы (см. рис. 13.6), мощность в цепи с индуктивностью колеблется между источником и магнитным полем индуктивности, загружая источник и провода, но не потребляется. Такая колеблющаяся, но не потребляемая мощность, называется реактивной мощностью.

Единица реактивной мощности — вар — вольт-ампер реактивный.

### Задачи

**Задача 13.4.** Катушка имеет индуктивность  $L = 15,9$  мГн, активное сопротивление  $R = 0$ . Начертить график зависимости индуктивного сопротивления и тока в катушке от частоты приложенного напряжения, если действующее напряжение  $U = 100$  В остается неизменным.

**Решение.** Нужно задаться несколькими значениями частоты, определить соответствующие индуктивные сопротивления, а затем ток.

Для частоты  $f = 50$  Гц

$$X_L = \omega L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 15,9 \cdot 10^{-3} \approx 5 \text{ Ом};$$

$$I = U/X_L = 100/5 = 20 \text{ А}.$$

По результатам расчета для других частот ( $f = 0,25, 100, 500, 1000, 10\,000$  Гц) постройте в прямоугольной системе координат графики, согласно условию задачи.

**Задача 13.5.** К катушке с индуктивностью  $L = 25,5$  мГн приложено переменное напряжение  $u = 113 \sin(314t - 30^\circ)$ .

Определить реактивную мощность цепи, построить векторную диаграмму тока и напряжения и графики их в прямоугольной системе координат.

**Задача 13.6.** Определить мгновенную мощность в цепи (см. задачу 13.5) через промежуток времени  $t = 0,025$  с после начала отсчета.

### 13.3. ЦЕПЬ С ЕМКОСТЬЮ

В конденсаторе с идеальным диэлектриком предполагается полное отсутствие тока проводимости и потерь энергии. Изменение напряжения между обкладками конденсатора сопровождается электрическим током смещения, величина которого зависит от емкости  $C$ . При напряжении на конденсаторе (рис. 13.7, а)  $u = U_m \sin \omega t$  определим ток и мощность.

#### Электрический ток смещения

Внешнее электрическое поле вызывает поляризацию диэлектрика (см. 7.3).

При всяком изменении электрического поля изменяется поляризованность диэлектрика, причем связанные заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул вещества, перемещаются, образуя электрический ток.

Явление движения связанных заряженных частиц в диэлектрике при изменении поляризации диэлектрика называют электрическим током поляризации.

Ток поляризации, согласно формуле (2.2),

$$i_n = \frac{dq}{dt} = \frac{d(\sigma S)}{dt} = \frac{S d\sigma}{dt},$$

где  $\sigma$  — плотность электрического смещения заряда; отсюда

$$\frac{i_n}{S} = \frac{d\sigma}{dt},$$

где  $i_n/S = J_n$  — плотность тока поляризации.

Учитывая формулу (7.20), найдем, что плотность тока поляризации равна скорости изменения поляризованности:

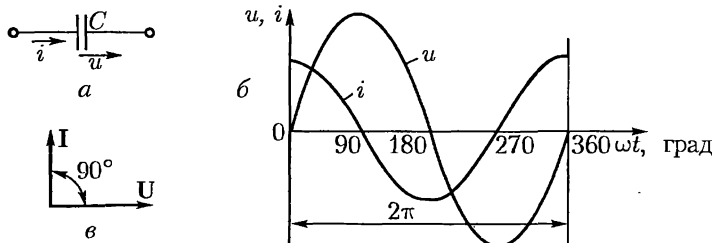


Рис. 13.7

$$J_n = \frac{dP}{dt}.$$

При изменении электрического поля меняется не только вектор поляризации  $\mathbf{P}$ , но и вектор электрического смещения в вакууме  $\mathbf{D}_0$ . Из выражений (7.22) и (7.24) следует

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD_0}{dt} + \frac{dP}{dt}.$$

Второе слагаемое в правой части этого уравнения есть плотность тока поляризации, связанного с движением заряженных частиц диэлектрика. Первое слагаемое также имеет размерность плотности тока, но характеризует физический процесс в самом электрическом поле при его изменении во времени.

Величину  $\frac{dD_0}{dt} = J_0$  называют плотностью электрического смещения в вакууме. Плотность полного электрического тока смещения

$$J = \frac{dD}{dt} = J_0 + J_n.$$

Введение понятия о токе смещения позволяет рассматривать электрическую цепь с конденсатором непрерывной: на участках из проводников имеется ток проводимости, а в диэлектрике — равный ему ток смещения.

### Ток в цепи с емкостью

Заряд конденсатора пропорционален напряжению между его обкладками [см. формулу (7.28)], поэтому изменение напряжения сопровождается изменением заряда

$$dq = C du.$$

Скорость изменения заряда пропорциональна скорости изменения напряжения

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}.$$

Но скорость изменения заряда равна электрическому току [см. формулу (2.2)]

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}. \quad (13.8)$$



При этом во внешнем по отношению к конденсатору участке цепи происходит движение электронов (ток проводимости) через источник. Одновременно при увеличении напряжения совершается поляризация диэлектрика в конденсаторе и возникает ток смещения. При уменьшении напряжения диэлектрик деполяризуется.

Таким образом, *ток в цепи с конденсатором пропорционален скорости изменения напряжения на его обкладках.*

Уравнение (13.8) по форме подобно уравнению (13.5). Поэтому характер изменения тока при синусоидальном напряжении можно проследить на векторной диаграмме аналогично тому, как это сделано при рассмотрении цепи с индуктивностью (см. рис. 13.5), отнеся рассуждения к скорости изменения напряжения.

На диаграмме векторы тока и напряжения следует поменять местами. В связи с этим уравнение тока для цепи с емкостью можно записать аналогично уравнению для напряжения в цепи с индуктивностью:

$$i = \omega C U_m \cos \omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (13.9)$$

Уравнение тока можно получить, дифференцируя уравнение напряжения

$$i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d(U_m \sin \omega t)}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t.$$

### Емкостное сопротивление

Величина  $\omega C U_m = I_m$  есть амплитуда тока. Разделив это выражение на  $\sqrt{2}$ , получим

$$I = \omega C U = U / X_C. \quad (13.10)$$

Величину  $1/\omega C$  обозначают  $X_C$  и называют реактивным сопротивлением емкости или емкостным сопротивлением. Емкостное сопротивление — величина, обратная произведению емкости и угловой частоты.

**Действующий ток в цепи с емкостью равен отношению действующего напряжения к емкостному сопротивлению.**

Формула (13.10) по форме совпадает с формулой, выражающей закон Ома. Емкостное сопротивление — это противодействие заряженного конденсатора току цепи.

Из векторной диаграммы и графика (рис. 13.7, б, в) видно, что напряжение в цепи с емкостью отстает по фазе от тока на угол  $90^\circ = \pi/2$ , т. е. если  $i = I_m \sin \omega t$ , то  $u = U_m \sin(\omega t - \pi/2)$ .

## Мощность в цепи

Построение графика мгновенной мощности (рис. 13.8) выполняется точно так же, как и для цепи с индуктивностью, если иметь в виду, что мгновенная мощность выражается таким же произведением:

$$p = ui,$$

или

$$p = U_m \sin(\omega t - \pi/2) I_m \sin \omega t = -UI \sin 2\omega t.$$

Из графика видно, что мгновенная мощность, как и в цепи с индуктивностью, четыре раза в течение периода меняет знак, т. е. во вторую и четвертую четверти периода энергия (мощность) накапливается в электрическом поле конденсатора — конденсатор заряжается. А в первую и третью четверти периода энергия (мощность) в том же количестве возвращается к источнику — конденсатор разряжается.

Таким образом, в цепи переменного тока с емкостью имеет место колебание мощности между источником и электрическим полем конденсатора. Такая колеблющаяся мощность, как известно, называется реактивной. Отсюда и сопротивление индуктивное и емкостное называют реактивными ( $X_L$ ,  $X_C$ ).

Однако, как видно из графиков (рис. 13.6 и 13.8), реактивная мощность в цепи с емкостью изменяется в противофазе с реактивной мощностью в цепи с индуктивностью. Отсюда и знак минус в аналитическом выражении мгновенной мощности в цепи с емкостью.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, какие были сделаны для цепи с индуктивностью, можно сделать вывод, что активная мощность в цепи с емкостью равна нулю ( $p = 0$ ), т. е. в цепи с емкостью преобразования электрической энергии в другие виды энергии (тепловую, механическую и др.) не происходит.

Реактивная мощность в цепи с емкостью определяется выражением:

$$Q = UI = U^2 \omega C. \quad (13.11)$$

### Задачи

**Задача 13.7.** Конденсатор имеет емкость  $C = 637$  мкФ. Начертить график зависимости емкостного сопротивления и

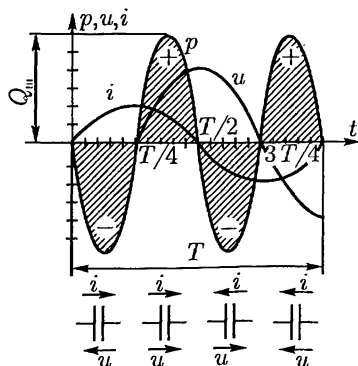


Рис. 13.8

тока в конденсаторе от частоты приложенного напряжения, действующее значение которого  $U = 100$  В остается неизменным.

**Решение.** Для решения задачи нужно задаться несколькими значениями частоты. Определить соответствующие величины емкостного сопротивления, а затем тока.

Для частоты 50 Гц

$$X_C = 1/\omega C = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 637 \cdot 10^{-6}} \approx 5 \text{ Ом};$$

$$I = 100/5 = 20 \text{ А.}$$

По результатам расчета для других частот ( $f = 0,25, 100, 500, 1000, 10\,000$  Гц) постройте в прямоугольной системе координат графики согласно условию задачи.

**Задача 13.8.** К конденсатору емкостью  $C = 398$  мкФ приложено переменное напряжение  $u = 169 \sin(314t + 30^\circ)$ .

Определить реактивную мощность цепи, построить векторную диаграмму тока и напряжения и их графики.

**Задача 13.9.** После включения кабеля в сеть напряжением  $U = 6600$  В и частотой 50 Гц установился ток  $I = 41,6$  А. Определить емкость кабеля, реактивную мощность цепи и максимальную энергию электрического поля кабеля.

## 13.4. ЦЕПЬ С РЕАЛЬНОЙ КАТУШКОЙ ИНДУКТИВНОСТИ

Реальная катушка отличается от идеальной тем, что переменный ток в ней сопровождается не только изменением энергии в магнитном поле, но и преобразованием электрической энергии в другой вид. В частности, в проводе катушки электрическая энергия преобразуется в теплоту в соответствии с законом Ленца — Джоуля (о потерях энергии в катушке с ферромагнитным сердечником см. гл. 24).

Ранее было выяснено, что в цепи переменного тока процесс преобразования электрической энергии в другой вид характеризуется активной мощностью цепи  $P$  (см. 13.1), а изменение энергии в магнитном поле — реактивной мощностью  $Q$  (см. 13.2). В реальной катушке имеют место оба процесса, т.е. ее активная и реактивная мощности отличны от нуля. Поэтому в схеме замещения реальная катушка должна быть представлена активным и реактивным элементами.

Деление реальной катушки на два элемента искусственно, так как конструктивно оба элемента неразделимы. Однако такой же схемой замещения можно представить реальную цепь из двух конструктивно не совмещенных элементов, один из которых характеризуется только активной мощностью  $P$  ( $Q = 0$ ), а другой — реактивной (индуктивной) мощностью  $Q$  ( $P = 0$ ).

## Схема замещения катушки с последовательным соединением элементов

В схеме с последовательным соединением элементов реальная катушка характеризуется активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ .

Активное сопротивление определяется величиной мощности потерь

$$R = P/I^2,$$

а индуктивность — конструкцией катушки (см. 8.6). Предположим, что ток в катушке выражается уравнением  $i = I_m \sin \omega t$  (рис. 13.9, а). Требуется определить напряжение в цепи и мощность.

При переменном токе в катушке возникает ЭДС самоиндукции  $e_L$ , поэтому ток зависит от действия приложенного напряжения и ЭДС  $e_L$ . Уравнение электрического равновесия цепи, составленное по второму закону Кирхгофа, имеет вид

$$u + e_L = iR,$$

или

$$u = iR + (-e_L) = iR + L \frac{di}{dt} = u_R + u_L. \quad (13.12)$$

Приложенное к катушке напряжение состоит из двух слагаемых, одно из которых  $u_R$  равно падению напряжения в активном сопротивлении, а другое  $u_L = L \frac{di}{dt}$  уравнивает ЭДС самоиндукции.

В соответствии с этим катушку в схеме замещения можно представить активным и индуктивным сопротивлениями, соединенными последовательно (рис. 13.9, б).

Дополнительно заметим, что оба слагаемых в правой части равенства (13.12) являются синусоидальными функциями времени. Согласно выводам, полученным в 13.1 и 13.2,  $u_R$  совпадает по фазе с током, а  $u_L$  опережает ток на  $90^\circ$ .

Поэтому

$$u = RI_m \sin \omega t + \omega LI_m \sin(\omega t + \pi/2).$$

## Треугольники напряжений, сопротивлений, мощностей

Несовпадение по фазе слагаемых в выражении (13.12) затрудняет определение амплитуды и действующего значения приложенно-

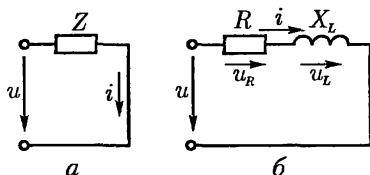


Рис. 13.9

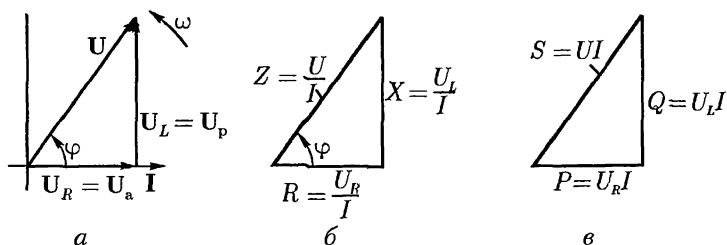


Рис. 13.10

го к цепи напряжения  $U$ . Поэтому воспользуемся векторным способом сложения синусоидальных величин. Амплитуды составляющих общего напряжения

$$U_{mR} = RI_m; \quad U_{mL} = \omega LI_m,$$

а действующие значения

$$U_R = RI; \quad U_L = X_L I.$$

Вектор общего напряжения

$$U = U_R + U_L.$$

Для того чтобы найти значение вектора  $U$ , построим векторную диаграмму (рис. 13.10, а), предварительно выбрав масштабы тока  $M_i$  и напряжения  $M_u$ .

За исходный вектор диаграммы принимаем вектор тока  $I$ . Направление этого вектора совпадает с положительным направлением оси, от которой отсчитываются фазовые углы (начальная фаза заданного тока  $\psi_i = 0$ ). Как и ранее, эту ось удобно (но не обязательно) направить по горизонтали.

Вектор  $U_R$  по направлению совпадает с вектором тока  $I$ , а вектор  $U_L$  направлен перпендикулярно вектору  $I$  с положительным углом.

Из диаграммы видно, что вектор общего напряжения  $U$  опережает вектор тока  $I$  на угол  $\varphi > 0$ , но  $< 90^\circ$ , а по величине равен гипотенузе прямоугольного треугольника, катетами которого являются векторы падений напряжения в активном и индуктивном сопротивлениях  $U_R$  и  $U_L$ :

$$U_R = U \cos \varphi. \quad (13.13)$$

Проекция вектора напряжения  $U$  на направление вектора тока называется активной составляющей вектора напряжения и обозначается  $U_a$ . Для катушки по схеме рис. 13.9 при  $U_a = U_R$ :

$$U_L = U \sin \varphi. \quad (13.14)$$

Проекция вектора напряжения  $U$  на направление, перпендикулярное вектору тока, называется реактивной составляющей вектора напряжения и обозначается  $U_p$ . Для катушки  $U_p = U_L$ :

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}. \quad (13.15)$$

При токе  $i = i_m \sin \omega t$  уравнение напряжения можно записать на основании векторной диаграммы в виде

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Стороны треугольника напряжений, выраженные в единицах напряжения, разделим на ток  $I$ . Получим подобный треугольник сопротивлений (рис. 13.10, б), катетами которого являются активное  $R = U_R/I$  и индуктивное  $X_L = U_L/I$  сопротивления, а гипотенузой — величина  $Z = U/I$ .

Отношение действующего напряжения к действующему току данной цепи называется полным сопротивлением цепи. Стороны треугольника сопротивлений нельзя считать векторами, так как сопротивления не являются функциями времени.

Из треугольника сопротивлений следует

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}. \quad (13.16)$$

Понятие о полном сопротивлении цепи  $Z$  позволяет выразить связь между действующими значениями напряжения и тока формулой, подобной формуле, выражающей закон Ома (2.6):

$$U = I\sqrt{R^2 + X_L^2} = IZ; \quad I = U/Z. \quad (13.17)$$

Из треугольников напряжений и сопротивлений определяются

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= U_R/U = R/Z; \quad \sin \varphi = U_L/U = X_L/Z; \\ \operatorname{tg} \varphi &= U_L/U = X_L/R. \end{aligned} \quad (13.18)$$

## Мощность катушки

Мгновенная мощность катушки

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \varphi) I_m \sin \omega t.$$

Из графика мгновенной мощности (рис. 13.11) видно, что в течение периода мощность четыре раза меняет знак; следовательно, направление потока энергии и в данном случае в течение периода ме-

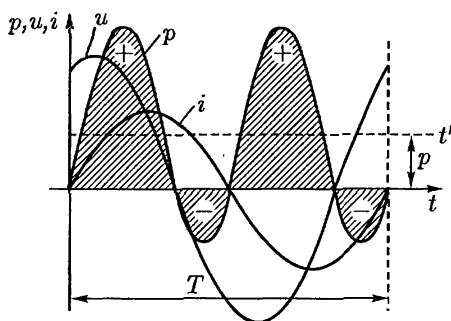


Рис. 13.11

няется. Относительно некоторой оси  $t'$ , сдвинутой параллельно оси  $t$  на величину  $P$ , график мгновенной мощности является синусоидальной функцией двойной частоты.

При положительном значении мощности энергия переходит от источника в приемник, а при отрицательном — наоборот. Нетрудно заметить, что количество энергии, по-

ступившей в приемник (положительная площадь), больше возвращенной обратно (отрицательная площадь).

Следовательно, в цепи с активным сопротивлением и индуктивностью часть энергии, поступающей от генератора, необратимо превращается в другой вид энергии, но некоторая часть возвращается обратно. Этот процесс повторяется в каждый период тока, поэтому в цепи наряду с непрерывным превращением электрической энергии в другой вид энергии (активная энергия) часть ее совершает колебания между источником и приемником (реактивная энергия).

Скорость необратимого процесса преобразования энергии оценивается средней мощностью за период, или активной мощностью  $P$ , скорость обменного процесса характеризуется реактивной мощностью  $Q$ .

На основании выводов, полученных в 13.1 и 13.2, в активном сопротивлении  $P = U_R I$ ;  $Q = 0$ , а в индуктивном  $P = 0$ ;  $Q = U_L I$ .

Активная мощность всей цепи равна активной мощности в сопротивлении  $R$ , а реактивная — реактивной мощности в индуктивном сопротивлении  $X_L$ . Подставляя значения  $U_R = U \cos \varphi$  и  $U_L = U \sin \varphi$ , определяемые из треугольника напряжений по формулам (13.18), получим

$$P = UI \cos \varphi; \quad (13.19)$$

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (13.20)$$

Кроме активной и реактивной мощностей пользуются понятием полной мощности  $S$ , которая определяется произведением действующих значений напряжения и тока цепи:

$$S = UI = I^2 Z. \quad (13.21)$$

Полную мощность можно получить и из другого выражения (13.22), которое легко доказать на основании формул (13.19) и (13.20):

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (13.22)$$

Мощности  $S$ ,  $P$ ,  $Q$  графически можно выразить сторонами прямоугольного треугольника (см. рис. 13.10, в). Треугольник мощностей получается из треугольника напряжений, если стороны последнего, выраженные в единицах напряжения, умножить на ток.

Из треугольника мощностей можно определить

$$\cos \varphi = P/S; \quad \sin \varphi = Q/S; \quad \operatorname{tg} \varphi = Q/P. \quad (13.23)$$

Полная мощность имеет ту же размерность, что  $P$  и  $Q$ , но для различия единицу полной мощности называют в о л т - а м п е р (В · А).

Активная мощность  $P$  меньше или равна полной мощности цепи. Отношение активной мощности цепи к ее полной мощности  $P/S$  называют к о э ф ф и ц и е н т о м м о щ н о с т и.

Назначение приемников электрической энергии — преобразование ее в другие виды энергии. Поэтому колебания энергии в цепи не только бесполезны, но и вредны.

Коэффициент мощности —  $\cos \varphi$  — показывает, какая часть полной мощности ( $S$ ) является активной, т. е. потребляемой (13.19).

### Схема замещения катушки с параллельным соединением элементов

Для реальной катушки можно составить и другую расчетную схему — с параллельным соединением двух ветвей: с активной  $G$  и индуктивной  $B_L$  проводимостями. На рис. 13.12, б эта схема показана в сравнении со схемой последовательного соединения активного и индуктивного сопротивлений (рис. 13.12, а), рассмотренной ранее.

Покажем, что схемы рис. 13.12, а, б эквивалентны в том смысле, что при одинаковом напряжении сохраняются неизменными ток в неразветвленной части цепи, активная и реактивная мощности.

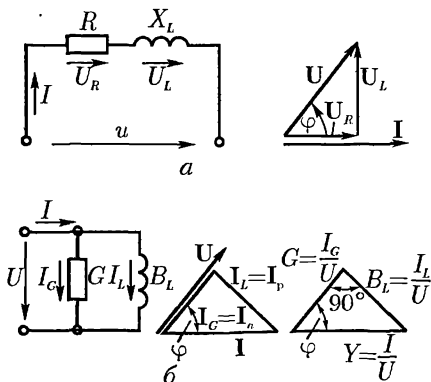


Рис. 13.12



Вектор тока  $\mathbf{I}$  можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие и в соответствии со схемой и векторной диаграммой на рис. 13.12, б выразить векторным равенством

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_G + \mathbf{I}_L. \quad (13.24)$$

Для схемы параллельного соединения активного и индуктивного элементов общим является приложенное напряжение, а токи разные:  $I_G$  — ток в ветви с активной проводимостью по фазе совпадает с напряжением,  $I_L$  — ток в ветви с индуктивной проводимостью по фазе отстает от напряжения на угол  $90^\circ$ .

Вектор тока  $I$  и его составляющие  $I_G$  и  $I_L$  образуют прямоугольный треугольник, поэтому

$$I = \sqrt{I_G^2 + I_L^2}. \quad (13.25)$$

Составляющая тока в активном элементе

$$I_G = I \cos \varphi. \quad (13.26)$$

*Проекция вектора тока  $I$  на направление напряжения называется активной составляющей вектора тока и обозначается  $I_a$ .* Для катушки по схеме на рис. 13.12, б  $I_a = I_G$ .

Составляющая тока в реактивном элементе

$$I_L = I \sin \varphi. \quad (13.27)$$

*Проекция вектора тока  $I$  на направление, перпендикулярное вектору напряжения, называется реактивной составляющей вектора тока и обозначается  $I_p$ .* Для катушки  $I_p = I_L$ .

Стороны треугольника токов, выраженные в единицах тока, можно разделить на напряжение  $U$  и получить подобный треугольник проводимостей, катетами которого являются активная  $G = I_G/U$  и индуктивная  $B_L = I_L/U$  проводимости, а гипотенузой — величина  $Y = I/U$ , называемая полной проводимостью цепи.

Из треугольника проводимостей и с учетом ранее полученных выражений из треугольника сопротивлений получим

$$\left. \begin{aligned} Y &= \sqrt{G^2 + B_L^2}; \\ G &= \frac{I_G}{U} = \frac{I \cos \varphi}{IZ} = \frac{R}{Z^2}; \\ B_L &= \frac{I_L}{U} = \frac{I \sin \varphi}{IZ} = \frac{X_L}{Z^2}; \\ Y &= I/U = 1/Z. \end{aligned} \right\} \quad (13.28)$$

Кроме того,

$$\cos \varphi = I_G / I = G / Y; \quad \sin \varphi = I_L / I = B_L / Y; \quad (13.29)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = I_L / I_G = B_L / G.$$

### Задачи

**Задача 13.10.** Для определения параметров катушки  $R$  и  $L$  ее включили сначала в цепь постоянного тока, а затем в цепь переменного тока с частотой  $f = 50$  Гц по схемам рис. 13.13, а, б.

При постоянном токе  $I_1 = 4$  А вольтметр показал  $U_1 = 12$  В, а при переменном  $I_2 = 5$  А,  $U_2 = 25$  В. Определить активное сопротивление и индуктивность катушки и при переменном токе активную, реактивную и полную мощности. Построить векторную диаграмму и треугольник сопротивлений.

**Решение.** При постоянном токе ЭДС самоиндукции в катушке не возникает. Поэтому индуктивное сопротивление  $X_L = 0$ . Ток определяется приложенным напряжением и активным сопротивлением.

По формуле Ома:  $R = U_1 / I_1 = 12 / 4 = 3$  Ом.

При переменном токе отношение напряжения к току даст величину полного сопротивления:  $Z = U_2 / I_2 = 25 / 5 = 5$  Ом. Индуктивное сопротивление

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ Ом.}$$

Индуктивность

$$L = X_L / \omega = 4 / (2\pi \cdot 50) \approx 12,75 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 12,75 \text{ мГн.}$$

При разборе решения данной задачи на листе миллиметровой бумаги рекомендуется построить векторную диаграмму цепи и треугольники сопротивлений и мощностей, предварительно определив необходимые величины.

**Задача 13.11.** Построить графики зависимости полного сопротивления и тока в катушке от частоты переменного напряжения, приложенного к ее зажимам. Параметры катушки определены в задаче 13.10. Действующее напряжение остается неизменным, равным  $U = 100$  В. Для расчета можно взять частоты 0, 10, 25, 50, 100, 500 Гц.

При частоте  $f = 25$  Гц определить активную, реактивную и полную мощности катушки, построить векторную диаграмму.

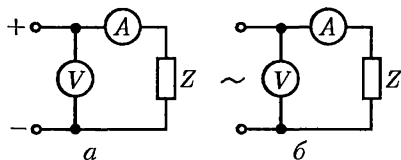


Рис. 13.13

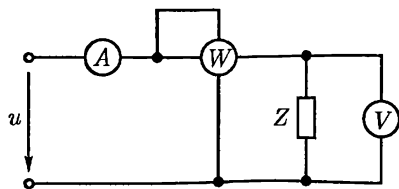


Рис. 13.14

**Задача 13.12.** В цепи переменного тока с активным сопротивлением и индуктивностью (рис. 13.14) при частоте  $f = 100$  Гц измерительные приборы показывают: амперметр — 10 А, вольтметр — 200 В, ваттметр — 1600 Вт. Определить параметры схем замещения цепи с последовательным ( $R, X_L$ ) и параллельным ( $G, B_L$ ) соединением элементов; реактивную и полную мощности цепи. Построить векторные диаграммы применительно к обоим схемам замещения.

**Решение** (для схемы замещения с последовательным соединением элементов).

Сопротивления:

активное

$$R = P/I^2; \quad R = 1600/10^2 = 16 \text{ Ом};$$

полное

$$Z = U/I = 200/10 = 20 \text{ Ом};$$

индуктивное

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12 \text{ Ом}.$$

Мощности цепи:

реактивная

$$Q = I^2 X_L = 10^2 \cdot 12 = 1200 \text{ вар};$$

полная

$$S = UI = 200 \cdot 10 = 2000 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Для построения векторной диаграммы дополнительно определим активную и реактивную составляющие напряжения:

$$U_a = IR = 10 \cdot 16 = 160 \text{ В};$$

$$U_L = IX_L = 10 \cdot 12 = 120 \text{ В}.$$

Векторная диаграмма показана на рис. 13.10, а.

Решите задачу для схемы с параллельным соединением элементов  $G, B_L$ .

### 13.5. ЦЕПЬ С РЕАЛЬНЫМ КОНДЕНСАТОРОМ

При переменном напряжении на реальном конденсаторе кроме тока смещения имеются небольшие токи проводимости через толщину диэлектрика (объемный ток) и по поверхности (поверхностный ток). Токи проводимости и поляризацию диэлектрика сопровождают потери энергии.

Таким образом, в реальном конденсаторе наряду с изменением энергии электрического поля (это характеризует реактивная мощность  $Q$ ) из-за несовершенства диэлектрика идет необратимый процесс преобразования электрической энергии в теплоту, скорость которой выражается активной мощностью  $P$ . Поэтому в схеме заме-

щения реальный конденсатор должен быть представлен активным и реактивным элементами.

Деление реального конденсатора на два элемента — это расчетный прием, так как конструктивно их выделить нельзя. Однако такую же схему замещения имеет реальная цепь из двух элементов, один из которых характеризуется только активной мощностью  $P$  ( $Q = 0$ ), другой — реактивной (емкостной) мощностью  $Q$  ( $P = 0$ ).

### Схема замещения конденсатора с параллельным соединением элементов

Реальный конденсатор (с потерями) можно представить эквивалентной схемой параллельного соединения активной  $G$  и емкостной  $B_C$  проводимостей (рис. 13.15), причем активная проводимость определяется мощностью потерь в конденсаторе  $G = P/U_C^2$ , а емкость — конструкцией конденсатора (см. 7.4).

Предположим, что проводимости  $G$  и  $B_C$  для такой цепи известны, а напряжение имеет уравнение  $u = U_m \sin \omega t$ .

Требуется определить токи в цепи и мощность.

Исследование цепи с активным сопротивлением в цепи с емкостью показало, что при синусоидальном напряжении токи в них также синусоидальны.

При параллельном соединении ветвей  $G$  и  $B_C$ , согласно первому закону Кирхгофа, общий ток  $I$  равен сумме токов в ветвях с активной и емкостной проводимостями:

$$i = i_G + i_C \quad (13.30)$$

Учитывая, что ток  $i_G$  совпадает по фазе с напряжением, а ток  $i_C$  опережает напряжение на четверть периода, уравнение общего тока можно записать в следующем виде:

$$i = I_{Gm} \sin \omega t + I_{Cm} \sin(\omega t + \pi/2).$$

Так как

$$I_{Gm} = GU_m, \quad \text{а} \quad I_{Cm} = B_C U_m,$$

имеем

$$i = GU_m \sin \omega t + B_C U_m \sin(\omega t + \pi/2).$$

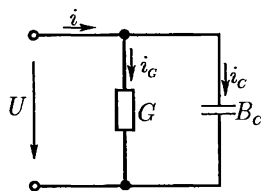


Рис. 13.15

### Треугольник токов

Для определения действующего значения общего тока  $I$  методом векторного сложения построим векторную диаграмму согласно уравнению

$$I = I_G + I_C.$$

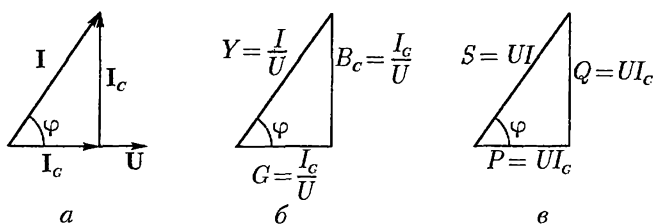


Рис. 13.16

Действующие значения составляющих тока

$$I_G = GU; \quad (13.31)$$

$$I_C = B_C U. \quad (13.32)$$

Первым на векторной диаграмме изображается вектор напряжения  $U$  (рис. 13.16, а), его направление совпадает с положительным направлением оси, от которой отсчитываются фазовые углы (начальная фаза напряжения  $\varphi_u = 0$ ).

Вектор  $I_C$  совпадает по направлению с вектором  $U$ , а вектор  $I_C$  направлен перпендикулярно вектору  $U$  с положительным углом.

Из векторной диаграммы видно, что вектор общего напряжения отстает от вектора общего тока на угол  $\varphi$ , величина которого больше нуля, но меньше  $90^\circ$ .

Вектор  $I$  является гипотенузой прямоугольного треугольника, катеты которого — составляющие его векторы  $I_G$  и  $I_C$ :

$$I_G = I \cos \varphi; \quad I_C = I \sin \varphi; \quad I = \sqrt{I_G^2 + I_C^2}. \quad (13.33)$$

При напряжении  $u = U_m \sin \omega t$  в соответствии с векторной диаграммой уравнение тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

### Треугольник проводимостей

Стороны треугольников токов, выраженные в единицах тока, разделим на напряжение  $U$ . Получим подобный треугольник проводимостей (рис. 13.16, б), катетами которого являются активная  $G = I_G/U$  и емкостная  $B_C = I_C/U$  проводимости, а гипотенузой — полная проводимость цепи  $Y = I/U$ .

Из треугольника проводимостей

$$Y = \sqrt{G^2 + B_C^2}. \quad (13.34)$$

Связь между действующими значениями напряжения и тока выражается формулами

$$I = U \sqrt{G^2 + B_C^2} = UY;$$

$$U = I/Y. \quad (13.35)$$

Из треугольника токов и проводимостей определяют значения

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= I_G/I = G/Y; \quad \sin \varphi = I_C/I = B_C/Y; \\ \operatorname{tg} \varphi &= I_C/I_G = B_C/G. \end{aligned} \quad (13.36)$$

## Мощность

Выражение мгновенной мощности реального конденсатора

$$p = ui = U_m \sin \omega t I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

совпадает с выражением мгновенной мощности катушки.

Рассуждения, аналогичные тем, которые сделаны при рассмотрении графика мгновенной мощности катушки (см. рис. 13.11), можно провести и для реального конденсатора на основе графика рис. 13.17.

Величины активной, реактивной и полной мощности выражаются теми же формулами, какие были получены для катушки [см. (13.19) – (13.22)].

Это нетрудно показать, если стороны треугольника токов, выраженные в единицах тока, умножить на напряжение  $U$ .

В результате умножения получится подобный треугольник мощностей (рис. 13.16, в), катетами которого являются мощности:

активная

$$P = UI_G = UI \cos \varphi;$$

реактивная

$$Q = UI_C = UI \sin \varphi;$$

полная

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

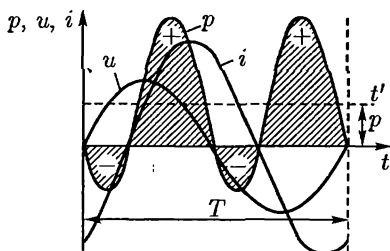


Рис. 13.17

## Схема замещения конденсатора

### с последовательным соединением элементов

Реальный конденсатор, так же как и катушка, на расчетной схеме может быть представлен последовательным соединением двух участков: с активным  $R$  и емкостным  $X_C$  сопротивлениями.

На рис. 13.18, а такая схема показана в сравнении со схемой параллельного соединения активной и емкостной проводимостей (рис. 13.18, б). Все выводы и формулы, полученные для катушки,

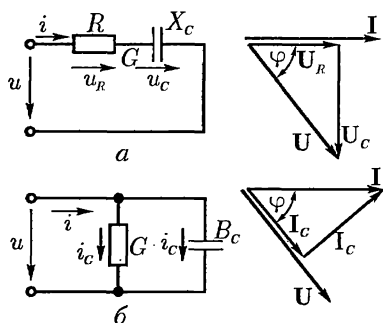


Рис. 13.18

элементы — резистор  $R$  и конденсатор  $C$ , имеют такую схему замещения, как показано на рис. 13.18,  $a$ .

### Задачи

**Задача 13.13.** В цепи переменного тока с активным сопротивлением и емкостью (см. рис 13.14) при частоте  $f = 100$  Гц измерительные приборы показывают: амперметр — 6 А, вольтметр — 180 В, ваттметр — 360 Вт. Определить параметры схем замещения цепи с параллельным ( $G$ ,  $B_C$ ) и последовательным ( $R$ ,  $X_C$ ) соединением элементов, реактивную и полную мощности цепи. Построить векторные диаграммы применительно к обеим схемам замещения.

**Решение** (для схемы замещения с параллельным соединением элементов).

Проводимости:

$$G = \frac{P}{U^2} = \frac{360}{180^2} = 1/90 \text{ См;}$$

$$Y = \frac{U}{I} = \frac{180}{6} = 1/30 \text{ См;}$$

$$B_C = \sqrt{Y^2 - G^2} = \sqrt{(1/30)^2 - (1/90)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{90} \text{ См.}$$

$$I_C = 180 \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{90} = 5,65 \text{ А.}$$

Векторная диаграмма показана на рис. 13.16,  $a$ .

Решить задачу для схемы с последовательным соединением элементов.

**Задача 13.14.** Вольтметр, включенный последовательно с конденсатором  $C = 0,637$  мкФ в сеть частотой 50 Гц, показывает напряжение 200 В.

Определить напряжение сети и сопротивление вольтметра, если мощность потерь в вольтметре составляет 4 Вт.

# ГЛАВА 14

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ

В данной главе будут рассмотрены электрические цепи переменного тока, содержащие три параметра  $R$ ,  $L$ ,  $C$  при последовательном и параллельном соединении резисторов, катушек и конденсаторов.

Расчет таких цепей можно вести на основе векторных диаграмм, из которых получают расчетные формулы.

### 14.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ КАТУШКИ И КОНДЕНСАТОРА

При последовательном соединении катушки и конденсатора на расчетной схеме каждый из этих элементов электрической цепи может быть представлен активным и реактивным сопротивлениями или активной и реактивной проводимостями.

Для расчета более простой является схема рис. 14.1, а, где элементы соединены последовательно, а в схеме рис. 14.1, б они соединены смешанно.

Предположим известными параметры катушки  $R_1$ ,  $L$  и конденсатора  $R_2C$ ; ток в цепи  $i = I_m \sin \omega t$ .

Требуется определить напряжение на участках цепи и мощность.

#### Векторная диаграмма и полное сопротивление цепи

Мгновенное значение общего напряжения можно представить суммой мгновенных напряжений на отдельных элементах схемы:

$$u = u_{IR} + u_L + u_{2R} + u_C.$$

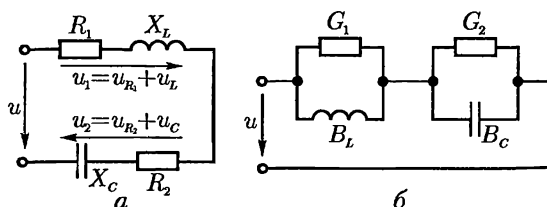


Рис. 14.1



Имея в виду несовпадение по фазе активных и реактивных напряжений, общее напряжение получим векторным сложением:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{1R} + \mathbf{U}_L + \mathbf{U}_{2R} + \mathbf{U}_C.$$

Для построения векторной диаграммы находим:

$$U_{1R} = IR_1; \quad U_{2R} = IR_2; \quad U_L = IX_L; \quad U_C = IX_C.$$

В зависимости от соотношения величин реактивных сопротивлений индуктивности и емкости можно отметить три случая.

1.  $X_L > X_C$ . Для этого случая векторная диаграмма представлена на рис. 14.2. На диаграмме построены треугольники напряжений для катушки и конденсатора и найдены векторы напряжения  $U_1$  и  $U_2$  на этих элементах.

Векторная сумма напряжений  $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}$  дает общее напряжение в цепи. Вместе с тем вектор  $\mathbf{U}$  является гипотенузой прямоугольного треугольника напряжений, катеты которого — активное и реактивное напряжения цепи ( $U_a$  и  $U_p$ ). Так как векторы активных составляющих напряжения направлены в одну сторону, их численные значения складываются:  $U_a = U_{1R} + U_{2R}$ .

Векторы реактивных составляющих напряжения направлены по одной прямой в противоположные стороны, поэтому им придают разные знаки: реактивное напряжение индуктивности считают положительным, а напряжение емкости — отрицательным:  $U_p = U_L - U_C$ .

При одинаковом токе во всех элементах цепи  $U_L > U_C$ . Ток отстает от общего напряжения по фазе на угол  $\varphi$ . Из треугольника напряжений следует

$$U = \sqrt{(U_{1R} + U_{2R})^2 + (U_L - U_C)^2} = I\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2},$$

или

$$U = I\sqrt{R^2 + X^2} = IZ, \quad (14.1)$$

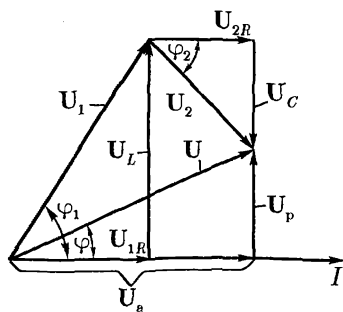


Рис. 14.2

где  $R = R_1 + R_2$  и  $X = X_L - X_C$  — общее активное и реактивное сопротивление цепи;  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$  — полное сопротивление цепи.

Эти сопротивления графически можно изобразить сторонами прямоугольного треугольника сопротивлений, который получают уже известным способом из треугольника напряжений.

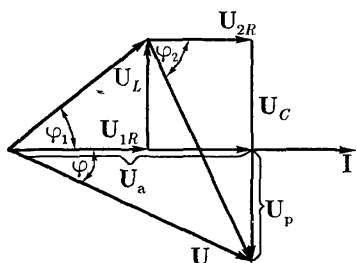


Рис. 14.3

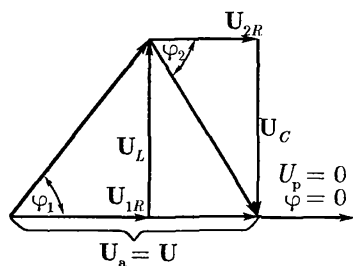


Рис. 14.4

Полное сопротивление цепи  $Z$  является коэффициентом пропорциональности между действующими значениями тока и общего напряжения цепи:

$$U = IZ; \quad I = U/Z; \quad Z = U/I.$$

Из треугольников напряжения и сопротивлений определяют следующие величины:

$$\cos \varphi = U_a / U = R/Z; \quad \sin \varphi = \frac{U_L - U_C}{U} = \frac{X_L - X_C}{Z};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_a} = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Угол сдвига по фазе между напряжением и током в цепи положительный ( $\varphi > 0$ )\*.

2.  $X_L < X_C$ . Векторная диаграмма изображена на рис. 14.3, где  $U_L < U_C$ , поэтому общее напряжение отстает от тока на угол  $\varphi < 0$ .

Реактивное сопротивление цепи носит емкостный характер. Расчетные формулы для первого случая остаются без изменения и для второго случая.

3.  $X_L = X_C$ . В этом случае реактивные составляющие напряжения катушки и конденсатора равны по величине и взаимно компенсированы:  $U_L = U_C$  (рис. 14.4). Поэтому реактивная составляющая общего напряжения и общее реактивное сопротивление равны нулю, а полное сопротивление цепи  $Z = R$ . Общее напряжение совпадает по фазе с током и равно по величине активной составляющей напряжения.

Угол  $\varphi$  сдвига фаз между током и общим напряжением равен нулю.

Ток в цепи и общее напряжение связаны формулой

$$U = IR, \quad \text{или} \quad I = U/R.$$

\* Фазовые углы отсчитываются от вектора тока.

В случае  $X_L = X_C$  в цепи имеет место явление резонанса напряжений, о котором подробно рассказано в гл. 17.

## Энергетический процесс в цепи

Из треугольника напряжений легко получить треугольник мощностей, из которого следуют уже известные формулы:

$$\left. \begin{aligned} P &= UI \cos \varphi; \quad Q = UI \sin \varphi; \\ S &= \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2} = UI. \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

Реактивные мощности входят в расчеты также с разными знаками: индуктивная мощность положительна, а емкостная — отрицательна.

В соответствии с этим знак реактивной мощности всей цепи может быть тем или другим, что следует и из формул (14.2).

При  $\varphi > 0$   $Q > 0$ ; при  $\varphi < 0$   $Q < 0$ .

Активная мощность положительна при любом угле, так как

$$\cos \varphi = \cos(-\varphi).$$

Полная мощность также всегда положительна.

На основании формул (14.2) можно сделать вывод о том, что в

рассматриваемой цепи совершаются преобразование электрической энергии ( $P \neq 0$ ) и обменный процесс между генератором и приемником ( $Q \neq 0$  при  $\varphi \neq 0$ ).

Энергетические процессы в данном случае сложнее, чем в ранее рассмотренных простых цепях. Усложнение объясняется тем, что наряду с обменом энергией между генератором и приемником совершается обмен энергией внутри приемника, между катушкой и конденсатором.

Особенности энергетического процесса в цепи с последовательным соединением катушки и конденсатора отражены на рис. 14.5, где показаны графики мгновенной мощности отдельных элементов и цепи в целом при  $X_L = X_C$ .

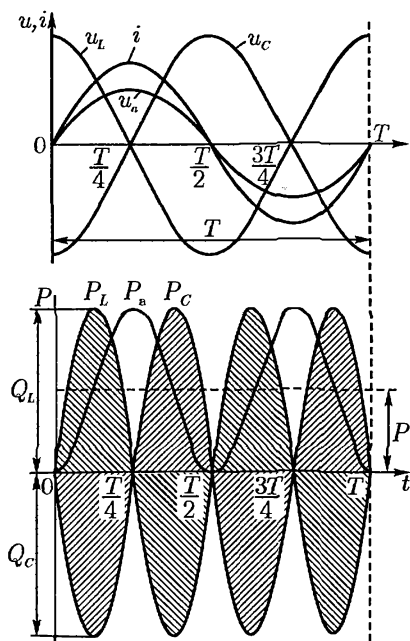


Рис. 14.5

Катушка и конденсатор в течение полупериода накапливают равные количества энергии. Однако в первую четверть периода, когда ток увеличивается, а напряжение на конденсаторе уменьшается, энергия накапливается в магнитном поле катушки и уменьшается в электрическом поле конденсатора, причем скорость изменения энергии (мощность) в любой момент времени одинакова. Это дает основание считать, что обмен энергией происходит только в приемнике между катушками и конденсатором.

Для преобразования электрической энергии в другой вид приемник получает ее от генератора со средней скоростью (мощностью)  $P$ .

### Задачи

**Задача 14.1.** Конденсатор емкостью  $C = 3,4$  мкФ и катушка с активным сопротивлением  $R = 50$  Ом и индуктивностью  $L = 29,8$  мГн подключены последовательно к генератору с напряжением  $U = 200$  В (рис. 14.6). Определить ток, активную, реактивную и полную мощности катушки, конденсатора и всей цепи при неизменном напряжении генератора и трех значениях частоты:  $f = f_p$ ;  $f < f_p$ ;  $f > f_p$ , где  $f_p$  — резонансная частота.

**Решение.** Для примера далее приведен расчет при частоте  $f = 250$  Гц. Реактивное сопротивление индуктивности

$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 250 \cdot 29,8 \cdot 10^{-3} \approx 46,8 \text{ Ом.}$$

Реактивное сопротивление емкости

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 250 \cdot 3,4 \cdot 10^{-6}} \approx 187 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{50^2 + (46,8 - 187)^2} \approx 149 \text{ Ом.}$$

Ток в цепи

$$I = U/Z = 200/149 \approx 1,34 \text{ А.}$$

Угол сдвига фаз между током и напряжением

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= R/Z = 50/149 \approx 0,335; \\ \sin \varphi &= \frac{X_L - X_C}{Z} = \frac{46,8 - 187}{149} \approx -0,94. \end{aligned}$$

Активная мощность

$$P = UI \cos \varphi = 200 \cdot 1,34 \cdot 0,335 \approx 90 \text{ Вт.}$$

Реактивная мощность индуктивности

$$Q_L = I^2 X_L = 1,34^2 \cdot 46,8 \approx 84 \text{ вар.}$$

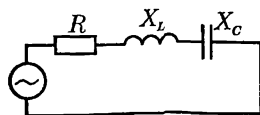


Рис. 14.6

Реактивная мощность емкости

$$Q_C = I^2 X_C = 1,34^2 \cdot 187 \approx 336 \text{ вар.}$$

Реактивная мощность цепи

$$Q = Q_L - Q_C = 84 - 336 = -252 \text{ вар.}$$

Сделать аналогичный подсчет для частот:  $f = f_p$ ;  $f > f_p$ ;  $f < f_p$ .

**Задача 14.2.** В сеть переменного тока частотой 50 Гц включены последовательно катушка с активным  $R = 30$  Ом и индуктивным  $X_L = 50$  Ом сопротивлениями и конденсатор с емкостью  $C = 318$  мкФ.

Напряжение на конденсаторе  $U_C = 100$  В. Определить ток в цепи, напряжение на катушке и в сети, активную и реактивную мощности цепи. Построить векторную диаграмму.

## 14.2. РАСЧЕТ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Порядок расчета, установленный для цепи при последовательном соединении катушки и конденсатора, можно применить и для цепи, содержащей произвольное число катушек и конденсаторов, соединенных последовательно.

На рис. 14.7, а для примера дана схема неразветвленной цепи, состоящей из пяти участков: конденсатора ( $R_1, X_1$ ) и катушки ( $R_2, X_2$ ), представленных активными и реактивными сопротивлениями; резистора  $R_3$ ; идеальных конденсатора  $X_4$  и катушки  $X_5$ .

Предположим, что кроме сопротивлений известен ток в цепи  $i = I_m \sin \omega t$ .

Требуется найти напряжения на участках, общее напряжение в цепи и мощность.

### Векторная диаграмма

Выберем условно-положительное направление тока  $i$ , как указано на схеме. Для мгновенных значений в соответствии со вторым законом Кирхгофа уравнение напряжений

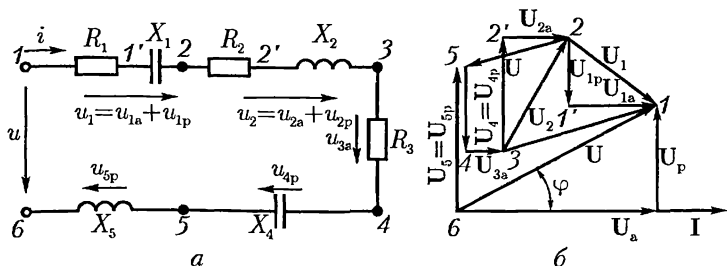


Рис. 14.7

$$u = u_{1a} + u_{1p} + u_{2a} + u_{2p} + u_{3a} + u_{4p} + u_{5p}.$$

Переходя к действующим значениям напряжений, нужно написать векторную сумму

$$U = U_{1a} + U_{1p} + U_{2a} + U_{2p} + U_{3a} + U_{4p} + U_{5p}.$$

Численно векторы напряжений определяются произведением тока и сопротивления соответствующего участка.

На рис. 14.7, б построена векторная диаграмма, соответствующая этому уравнению. За исходный, как обычно при расчете неразветвленных цепей, принят вектор тока, а затем проведены векторы падения напряжения на каждом участке схемы, причем направления их относительно вектора тока выбраны в соответствии с характером сопротивления участков.

При построении диаграммы напряжений начальной точкой выбрана точка б, совпадающая с началом вектора тока  $I$ . Из этой точки проведен вектор  $U_{5p}$  реактивного напряжения, индуктивного (по фазе опережает ток на  $90^\circ$ ) между точками 5 и б цепи. Из конца его проведен вектор  $U_{4p}$  реактивного напряжения емкости (по фазе отстает от тока на  $90^\circ$ ) между точками 4 и б цепи. Затем отложен вектор  $U_{3a}$  активного напряжения на резисторе (совпадает по фазе с током) между точками 3 и 4 цепи и т. д., если следовать по цепи против направления тока. Точки векторной диаграммы, где сходятся начало следующего вектора с концом предыдущего, обозначены теми же номерами, какими на схеме обозначены точки, отделяющие один элемент от другого.

При таком построении напряжение между любыми двумя точками цепи можно найти по величине и фазе, проведя вектор на диаграмме между точками с теми же номерами. Например, напряжение  $U_{5,2}$  между точками 5 и 2 выражается вектором, проведенным из точки 2 в точку 5 (вектор  $U_{2,5}$  направлен в обратную сторону); напряжение  $U_{3,1}$  между точками 3 и 1 выражается вектором, проведенным из точки 1 в точку 3.

Векторная диаграмма, построенная в соответствии с чередованием элементов цепи, называется топологической, так как точки, отделяющие векторы друг от друга, соответствуют точкам, разделяющим элементы схемы.

## Расчетные формулы

Из векторной диаграммы видно, что все активные составляющие векторов напряжений направлены одинаково — параллельно вектору тока, поэтому векторное сложение их можно заменить арифме-

тическим и найти активную составляющую напряжения цепи:  $U_a = U_{1a} + U_{2a} + U_{3a}$ .

Реактивные составляющие векторов напряжений перпендикулярны вектору тока, причем индуктивное напряжение опережает, а емкостное отстает по фазе от тока. Поэтому реактивная составляющая напряжения цепи  $U_p$  определяется их алгебраической суммой, в которой индуктивные напряжения считаются положительными, а емкостные — отрицательными:  $U_p = -U_{1p} + U_{2p} - U_{4p} + U_{5p}$ .

Векторы активного, реактивного и полного напряжений цепи образуют прямоугольный треугольник, из которого следует

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}. \quad (14.3)$$

Подставив падения напряжения, выраженные через ток и соответствующие сопротивления, получим

$$\begin{aligned} U &= I \sqrt{(\sum R_n)^2 + (\sum X_n)^2}; \\ I &= \frac{U}{\sqrt{(\sum R_n)^2 + (\sum X_n)^2}} = \frac{U}{Z}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Таким образом, снова получена знакомая уже формула, связывающая ток, напряжение и полное сопротивление цепи [ср. (14.4) и (14.1)].

В этой формуле  $\sum R_n$  — общее активное сопротивление, равное арифметической сумме всех активных сопротивлений, входящих в неразветвленную цепь;  $\sum X_n$  — общее реактивное сопротивление, равное алгебраической сумме всех реактивных сопротивлений, входящих в неразветвленную цепь. В этой сумме индуктивные сопротивления считаются положительными, а емкостные — отрицательными. Полное сопротивление неразветвленной цепи

$$Z = \sqrt{(\sum R_n)^2 + (\sum X_n)^2}. \quad (14.5)$$

В общем случае полное сопротивление цепи определяется как гипотенуза прямоугольного треугольника, катетами которого являются выраженные в определенном масштабе активное и реактивное сопротивления всей цепи. Из треугольника сопротивлений следует

$$\cos \varphi = \frac{\sum R_n}{Z}; \quad \sin \varphi = \frac{\sum X_n}{Z}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum X_n}{\sum R_n}. \quad (14.6)$$

От треугольника напряжений можно перейти также к треугольнику мощностей и получить уже известные формулы для определения мощностей в цепи:

$$P = UI \cos \varphi; \quad Q = UI \sin \varphi; \quad S = UI.$$

Вместе с тем активную мощность цепи можно представить как арифметическую сумму активных мощностей в элементах с активным сопротивлением. Реактивная мощность цепи равна алгебраической сумме мощностей реактивных элементов.

В этой сумме мощность индуктивных элементов считается положительной, а ёмкостных — отрицательной

$$P = \sum P_n; \quad Q = \sum Q_n; \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (14.7)$$

Формулы (14.2) — (14.7) являются общими; из них можно получить конкретное выражение для любой неразветвленной цепи.

### Задачи

**Задача 14.3.** Определить ток и составить баланс мощностей для цепи, схема которой изображена на рис. 14.8. Построить топографическую диаграмму и по ней определить напряжение  $U_{8,5}$  между точками 8 и 5 и  $U_{6,1}$  между точками 6 и 1.

Дано:

$$e_1 = 169 \sin(314t + 30^\circ);$$

$$e_2 = 226 \sin(314t + 120^\circ);$$

$$R_1 = 3 \text{ Ом}; \quad R_2 = 8 \text{ Ом}; \quad R_3 = 9 \text{ Ом},$$

$$X_{1L} = 4 \text{ Ом}; \quad X_{2L} = 6 \text{ Ом}; \quad X_{1C} = 15 \text{ Ом}; \quad X_{2C} = 10 \text{ Ом}.$$

**Решение.** Согласно второму закону Кирхгофа, составим уравнение напряжений в векторной форме, предварительно выбрав условно-положительные направления ЭДС и тока в схеме (их целесообразно выбрать одинаковыми независимо от того, в каком режиме работает источник ЭДС, так как фазовый угол сдвига, полученный в результате расчета, укажет истинный режим его работы):

$$U_{2C} + U_{3R} + U_{1C} + U_{2R} + U_{2L} + U_{1L} + U_{1R} = E_1 + E_2$$

или

$$\begin{aligned} & I(R_3 + R_2 + R_1) + \\ & + I(-X_{2C} - X_{1C} + X_{2L} + X_{1L}) = \\ & = E_1 + E_2. \end{aligned}$$

Общее активное сопротивление

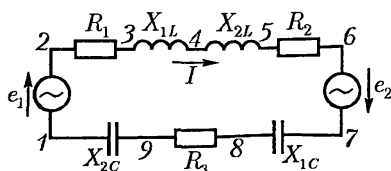


Рис. 14.8



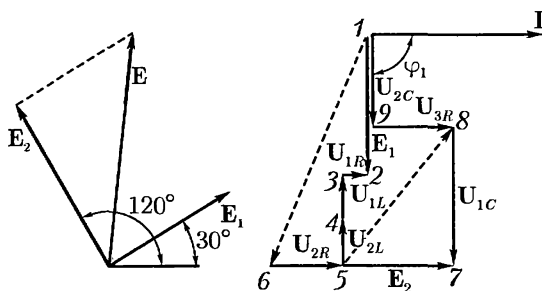


Рис. 14.9

$$\sum R = R_3 + R_2 + R_1 = 9 + 8 + 3 = 20 \text{ Ом.}$$

Общее реактивное сопротивление

$$\sum X = -X_{2C} - X_{1C} + X_{2L} + X_{1L} = -15 - 10 + 6 + 4 = -15 \text{ Ом.}$$

Как видно, общее реактивное сопротивление имеет емкостный характер.

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{(\sum R)^2 + (\sum X)^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ Ом.}$$

Действующие значения ЭДС

$$E_1 = E_{1m}/\sqrt{2} = 169/\sqrt{2} \approx 120 \text{ В.}$$

$$E_2 = E_{2m}/\sqrt{2} = 226/\sqrt{2} \approx 160 \text{ В.}$$

Для определения действующего значения суммы двух ЭДС ( $E_1 + E_2$ ) построим векторную диаграмму (рис. 14.9, а) (рекомендуется построить на листе миллиметровой бумаги в масштабе 40 В/см).

Измерение вектора  $\mathbf{E}$  показывает, что величина суммарной ЭДС  $E = 200 \text{ В}$ . ЭДС можно найти, учитывая, что ее составляющие взаимно перпендикулярны. В этом случае

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{120^2 + 160^2} = 200 \text{ В.}$$

Ток

$$I = E/Z = 200/25 = 8 \text{ А.}$$

Напряжение на отдельных участках схемы:

$$U_{2C} = IX_{2C} = 8 \cdot 10 = 80 \text{ В;}$$

$$U_{3R} = IR_3 = 8 \cdot 9 = 72 \text{ В;}$$

$$U_{1C} = IX_{1C} = 8 \cdot 15 = 120 \text{ В};$$

$$U_{2R} = IR_2 = 8 \cdot 8 = 64 \text{ В};$$

$$U_{2L} = IX_{2L} = 8 \cdot 6 = 48 \text{ В};$$

$$U_{1L} = IX_L = 8 \cdot 4 = 32 \text{ В};$$

$$U_{1R} = IR_1 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ В}.$$

Для построения векторной топографической диаграммы (рис. 14.9, б) выберите масштабы  $M_i = 2 \text{ А/см}$ ,  $M_u = 40 \text{ В/см}$  (рекомендуется построить на отдельном листе миллиметровой бумаги).

По векторной диаграмме найдены углы сдвига фаз между током и ЭДС  $E_1$  и  $E_2$ :  $\varphi_1 = -90^\circ$ ,  $\varphi_2 = 0$ .

Мощности участков приемника:

$$Q_{2C} = I^2 X_{2C} = 8^2 \cdot (-10) = -640 \text{ вар};$$

$$P_3 = I^2 R_3 = 8^2 \cdot 9 = 576 \text{ Вт};$$

$$Q_{1C} = I^2 X_{1C} = 8^2 \cdot (-15) = -960 \text{ вар};$$

$$P_2 = I^2 R_2 = 8^2 \cdot 8 = 512 \text{ Вт};$$

$$Q_{2L} = I^2 X_{2L} = 8^2 \cdot 6 = 384 \text{ вар};$$

$$P_1 = I^2 R_1 = 8^2 \cdot 3 = 192 \text{ Вт};$$

$$Q_{1L} = I^2 X_{1L} = 8^2 \cdot 4 = 256 \text{ вар}.$$

Мощности источников:

$$P_{1E} = E_1 I \cos \varphi_1 = 120 \cdot 8 \cos(-90^\circ) = 0;$$

$$Q_{1E} = E_1 I \sin \varphi_1 = 120 \cdot 8 \sin(-90^\circ) = -960 \text{ вар};$$

$$P_{2E} = E_2 I \cos \varphi_2 = 160 \cdot 8 \cos 0^\circ = 1280 \text{ Вт};$$

$$Q_{2E} = E_2 I \sin \varphi_2 = 160 \cdot 8 \sin 0^\circ = 0.$$

Баланс мощностей

$$\sum P_E = \sum P.$$

$$1280 = 192 + 576 + 512 = 1280;$$

$$\sum Q_E = \sum Q.$$

$$-960 = -640 - 960 + 384 + 256 = -960.$$

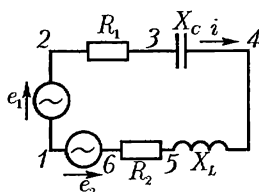


Рис. 14.10

Например, вектор  $U_{8,5}$  направлен в точку 8 из точки 5. Измерение векторов  $U_{8,5}$  и  $U_{6,1}$  дает

$$U_{8,5} = 3,8 \text{ см}; \quad U_{6,1} = 5,5 \text{ см};$$

$$U_{8,5} = U_{8,5} M_u = 3,8 \cdot 40 = 152 \text{ В};$$

$$U_{6,1} = U_{6,1} M_u = 5,5 \cdot 40 = 220 \text{ В}.$$

**Задача 14.4.** Определить ток, составить баланс мощностей и построить векторную топографическую диаграмму для цепи, схема которой показана на рис. 14.10.

Дано:  $E_1 = 150 \text{ В}$ ,  $E_2 = 0$ ,  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 12 \text{ Ом}$ .

### 14.3. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ КАТУШКИ И КОНДЕНСАТОРА

Для рассмотрения параллельного соединения катушки и конденсатора представим их на схеме активными и реактивными проводимостями (рис. 14.11, а).

На схеме рис. 14.11, б те же катушки и конденсатор представлены активными и реактивными сопротивлениями. Первая схема имеет некоторое преимущество, так как в ней все элементы соединены параллельно, а в другой они соединены смешанно.

Считая известными параметры катушки  $G_1$ ,  $B_L$  и конденсатора  $G_2$ ,  $B_C$ , а также напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , определим токи в цепи и ее мощность.

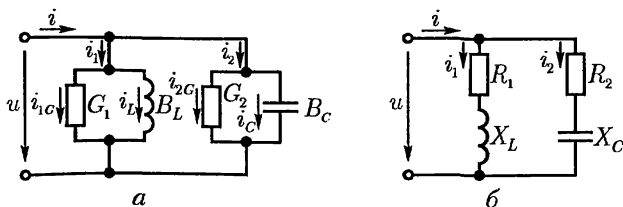


Рис. 14.11

## Векторная диаграмма цепи. Полная проводимость цепи

Согласно первому закону Кирхгофа, мгновенная величина общего тока равна сумме мгновенных токов отдельных ветвей:

$$i = i_1 + i_2 = i_{1G} + i_L + i_{2G} + i_C.$$

Имея в виду несовпадение по фазе активных и реактивных токов, общий ток найдем векторным сложением

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{1G} + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_{2G} + \mathbf{I}_C.$$

Для построения векторной диаграммы находим:

$$I_{1G} = UG_1; \quad I_{2G} = UG_2; \quad U_L = IB_L; \quad I_C = UB_C.$$

В зависимости от соотношения величин реактивных проводимостей ветвей с индуктивностью и емкостью можно отметить три случая.

1.  $B_L > B_C$ . Для этого случая векторная диаграмма представлена на рис. 14.12, а. На диаграмме построены треугольники токов для катушки и конденсатора и найдены векторы токов  $\mathbf{I}_1$  и  $\mathbf{I}_2$  в этих элементах:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{1G} + \mathbf{I}_L; \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{2G} + \mathbf{I}_C.$$

Векторная сумма токов  $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}$  дает общий ток в цепи. Вместе с тем вектор  $\mathbf{I}$  является гипотенузой прямоугольного треугольника токов, катеты которого — составляющие вектора тока по двум взаимно перпендикулярным осям:

$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{1G} + \mathbf{I}_{2G}$  — активная составляющая;

$\mathbf{I}_p = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C$  — реактивная составляющая.

Векторы активных составляющих токов направлены в одну сторону, поэтому их численные значения складываются. Векторы реактивных составляющих токов направлены перпендикулярно вектору напряжения в противоположные стороны, поэтому им даются разные знаки: индуктивные токи считаются положительными, а емкостные — отрицательными. При одинаковом напряжении на всех

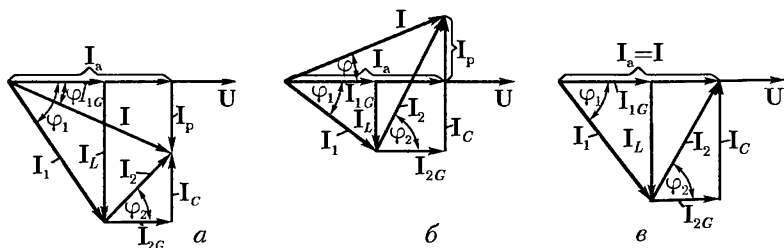


Рис. 14.12

элементах цепи  $I_L > I_C$ . Общий ток отстает от общего напряжения по фазе на угол  $\varphi$ .

Из треугольника токов следует

$$I = \sqrt{(I_{1C} + I_{2C})^2 + (I_L + I_C)^2} = U \sqrt{(G_1 + G_2)^2 + (B_L - B_C)^2},$$

или

$$I = U \sqrt{G^2 + B^2} = UY,$$

где  $G = G_1 + G_2$  и  $B = B_L - B_C$  — общие активная и реактивная проводимости цепи;  $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$  — полная проводимость цепи.

Эти три проводимости графически можно изобразить сторонами прямоугольного треугольника проводимостей, который получается уже известным способом из треугольника токов.

Полная проводимость цепи  $Y$  является коэффициентом пропорциональности между действующими значениями общего тока и напряжения цепи:

$$\boxed{I = UY; \quad U = I/Y; \quad Y = I/U.} \quad (14.8)$$

Из треугольников токов и проводимостей определяются значения:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= I_a/I = G/I; \quad \sin \varphi = \frac{I_L - I_C}{I} = \frac{B_L - B_C}{Y}; \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{I_L - I_C}{I_a} = \frac{B_L - B_C}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

Угол сдвига по фазе между напряжением и общим током в цепи положительный ( $\varphi > 0$ )\*.

2.  $B_L < B_C$ . Векторная диаграмма изображена на рис. 14.12, б. Так как  $I_L < I_C$ , то напряжение отстает от общего тока на угол  $\varphi < 0$ .

Реактивная проводимость цепи имеет емкостный характер. Расчетные формулы, полученные для случая 1, действительны и для этого случая.

3.  $B_L = B_C$ . В этом случае реактивные составляющие токов катушки и конденсатора равны по величине:  $I_L = I_C$ . Реактивная составляющая общего тока и общая реактивная проводимость равны нулю. Общий ток совпадает по фазе с напряжением и равен по величине активной составляющей тока. Угол  $\varphi$  сдвига фаз между общим током и напряжением равен нулю (рис. 14.12, в).

Общий ток в цепи и напряжение связаны формулой

$$I = UG, \quad \text{или} \quad U = I/G.$$

\* Фазовые углы отсчитываются от вектора тока.

В случае  $B_L = B_C$  в цепи имеет место резонанс токов, о котором подробно рассказано в гл. 17.

## Энергетический процесс в цепи

Из векторной диаграммы токов легко получить треугольник мощностей, из которого следуют те же формулы (14.2), которые были получены для последовательного соединения катушки и конденсатора.

Реактивные мощности индуктивности и емкости входят в расчет с разными знаками: реактивная мощность индуктивности положительна, а реактивная мощность емкости отрицательна. В соответствии с этим знак реактивной мощности всей цепи может быть тем или другим, что следует из формул (14.2).

Если  $\varphi > 0$ , то  $Q > 0$ ; при  $\varphi < 0$   $Q < 0$ .

Активная мощность положительна при любом знаке угла. Полная мощность тоже всегда положительна.

В рассматриваемой цепи активная мощность имеет определенное значение ( $P \neq 0$ ), следовательно, имеет место преобразование электрической энергии в другой вид. Кроме того, часть энергии, полученной от генератора, возвращается обратно в генератор ( $Q \neq 0$  при  $\varphi \neq 0$ ). Обмен энергией совершается также между катушкой и конденсатором.

## Задачи

**Задача 14.5.** В цепи, схема которой изображена на рис. 14.13, определить ток, активную, реактивную и полную мощность катушки, конденсатора и всей цепи при неизменном напряжении  $U = 200$  В и частоте источника  $f = 100$  Гц. Параметры цепи  $R_1 = 10$  Ом,  $L = 55,2$  мГн,  $C = 138$  мкФ,  $R_2 = 0$ .

**Решение.** При частоте  $f = 100$  Гц индуктивное сопротивление первой ветви

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 100 \cdot 55,2 \cdot 10^{-3} \approx 34,6 \text{ Ом.}$$

Проводимости:  
активная

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{10}{10^2 + 34,6^2} \approx 0,0077 \text{ См;}$$

реактивная

$$B_L = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{34,6}{10^2 + 34,6^2} \approx 0,0266 \text{ См.}$$

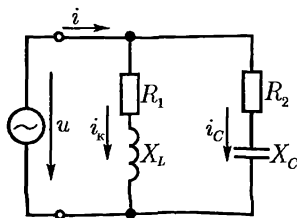


Рис. 14.13

Полная проводимость катушки

$$Y_k = \sqrt{G_1^2 + B_L^2} = \sqrt{(0,0077^2) + (0,0266^2)} \approx 0,0278 \text{ См.}$$

Проводимости второй ветви:

активная

$$G_2 = 0;$$

реактивная

$$B_C = \omega C = 2\pi \cdot 100 \cdot 183 \cdot 10^{-6} \approx 0,0867 \text{ См.}$$

Полная проводимость цепи

$$Y = \sqrt{(\sum G)^2 + (\sum B)^2} = \sqrt{(0,0077^2) + (0,0266 - 0,0867)^2} \approx 0,0605 \text{ См.}$$

Токи:

в неразветвленной части цепи

$$I = UY = 200 \cdot 0,0605 = 12,1 \text{ А;}$$

в конденсаторе

$$I_C = UB_C = 200 \cdot 0,0867 = 17,34 \text{ А;}$$

в катушке

$$I_k = UY_k = 200 \cdot 0,0278 = 5,56 \text{ А.}$$

Коэффициент мощности цепи

$$\cos \varphi = \sum G/Y = 0,0077/0,0605 \approx 0,127,$$

$$\sin \varphi = \sum B/Y = 0,06/0,0605 \approx 0,992.$$

Реактивные мощности:

катушки

$$Q_k = U^2 B_L = 200^2 \cdot 0,0266 = 1064 \text{ вар;}$$

конденсатора

$$Q_C = U^2 B_C = 200^2 \cdot 0,0867 = 3468 \text{ вар;}$$

цепи

$$Q = U^2 \sum B = 200^2 \cdot 0,06 = 2400 \text{ вар.}$$

Активная мощность цепи

$$P = P_k = I_k^2 R_1 = 5,56^2 \cdot 10 \approx 310 \text{ Вт.}$$

Полные мощности:

катушки

$$S_k = U^2 Y_k = 200^2 \cdot 0,0278 = 1112 \text{ В·А;}$$

конденсатора

$$S_C = Q_C = 3468 \text{ В} \cdot \text{А};$$

цепи

$$S = U^2 Y = 200^2 \cdot 0,0605 = 2420 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

**Задача 14.6.** Для схемы рис. 14.13 по данным условия задачи 14.5 найти резонансную частоту  $f_p$ . Выполнить расчет цепи в порядке, изложенном при решении задачи 14.4, для двух значений частоты источника:  $f = f_p$ ;  $f < f_p$ .

Решение. При резонансе  $B_L = B_C$ , т. е.

$$\frac{\omega_p L}{(\omega_p L)^2 + R_1^2} = \frac{\frac{1}{\omega_p C}}{\left(\frac{1}{\omega_p C}\right)^2 + R_2^2}.$$

Из этого уравнения можно получить формулу для резонансной частоты

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}.$$

Учитывая, что  $R_2 = 0$ , и подставляя другие данные, получим

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_1^2}{L^2}} = \sqrt{\frac{1}{138 \cdot 10^{-6} \cdot 55,2 \cdot 10^{-3}} - \frac{10^2}{(55,2 \cdot 10^{-3})^2}} \approx$$
$$\approx 314 \text{ рад/с};$$

$$f_p = \omega_p / 2\pi = 314 / 6,28 = 50 \text{ Гц}.$$

Далее расчет цепи по условию задачи выполните самостоятельно.

#### 14.4. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ВЕТВЕЙ

Расчет электрической цепи, рассмотренный в предыдущем параграфе, можно применить для цепей, содержащих произвольное число приемников, соединенных параллельно.

На рис. 14.14, а параллельно соединены те же элементы цепи, которые в 14.2 были рассмотрены при последовательном соединении (см. рис. 14.7, а). Предположим, что для этой цепи известны напряжение  $u = U_m \sin \omega t$  и параметры элементов цепи  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Требуется найти токи в цепи и мощность.



## Векторная диаграмма

Для мгновенных значений в соответствии с первым законом Кирхгофа уравнение токов

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5.$$

Представляя ток в каждой ветви суммой активной и реактивной составляющих, получим

$$i = i_{1a} + i_{1p} + i_{2a} + i_{2p} + i_{3a} + i_{4p} + i_{5p}.$$

Для действующих токов нужно написать векторное уравнение

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{1a} + \mathbf{I}_{1p} + \mathbf{I}_{2a} + \mathbf{I}_{2p} + \mathbf{I}_{3a} + \mathbf{I}_{4p} + \mathbf{I}_{5p}.$$

Численные значения векторов токов определяются произведением напряжения и проводимости соответствующей ветви.

На рис. 14.14, б построена векторная диаграмма, соответствующая этому уравнению. За исходный вектор принят, как обычно при расчете цепей с параллельным соединением ветвей, вектор напряжения  $\mathbf{U}$ , а затем нанесены векторы тока в каждой ветви, причем направления их относительно вектора напряжения выбраны в соответствии с характером проводимостей ветвей. Начальной точкой при построении диаграммы токов выбрана точка, совпадающая с началом вектора напряжения. Из этой точки проведен вектор  $\mathbf{I}_{1a}$  активного тока ветви 1—1 (по фазе совпадает с напряжением), а из конца его проведен вектор  $\mathbf{I}_{1p}$  реактивного тока той же ветви (опережает напряжение на  $90^\circ$ ). Эти два вектора являются составляющими вектора  $\mathbf{I}_1$  тока первой ветви. Далее в том же порядке отложены векторы токов других ветвей. Следует обратить внимание на то, что проводимость ветви 3—3 активная, поэтому реактивная составляющая тока в этой ветви равна нулю. В ветвях 4—4 и 5—5 проводимости реактивные, поэтому в составе этих токов нет активных составляющих.

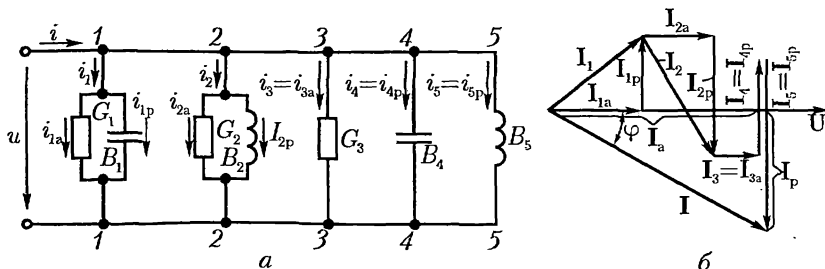


Рис. 14.14

## Расчетные формулы

Из векторной диаграммы видно, что все активные составляющие векторов тока направлены одинаково — параллельно вектору напряжения, поэтому векторное сложение их можно заменить арифметическим и найти активную составляющую общего тока:  $I_a = I_{1a} + I_{2a} + I_{3a}$ .

Реактивные составляющие векторов токов перпендикулярны вектору напряжения, причем индуктивные токи направлены в одну сторону, а емкостные — в другую. Поэтому реактивная составляющая общего тока в цепи определяется их алгебраической суммой, в которой индуктивные токи считаются положительными, а емкостные — отрицательными:

$$I_p = -I_{1p} + I_{2p} - I_{4p} + I_{5p}.$$

Векторы активного, реактивного и полного тока всей цепи образуют прямоугольный треугольник, из которого следует

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}. \quad (14.10)$$

Подставив значения токов в ветвях, выраженные через напряжение и соответствующие проводимости, получим

$$I = U \sqrt{(\sum G_n)^2 + (\sum B_n)^2}, \quad (14.11)$$

$$U = \frac{I}{\sqrt{(\sum G_n)^2 + (\sum B_n)^2}} = \frac{I}{Y}, \quad (14.12)$$

где  $\sum G_n$  — общая активная проводимость, равная арифметической сумме активных проводимостей всех ветвей;  $\sum B_n$  — общая реактивная проводимость, равная алгебраической сумме реактивных проводимостей всех ветвей (в этой сумме индуктивные проводимости считаются положительными, а емкостные — отрицательными);  $Y$  — полная проводимость цепи;

$$Y = \sqrt{(\sum G_n)^2 + (\sum B_n)^2}. \quad (14.13)$$

Таким образом, получена знакомая уже формула (14.12), связывающая напряжение, ток и проводимость цепи [ср. (14.12) и (14.8)].

Следует обратить внимание на возможные ошибки при определении полной проводимости цепи по известным проводимостям отдельных ветвей: нельзя складывать арифметически проводимости ветвей, если токи в них не совпадают по фазе.

Полную проводимость цепи в общем случае определяют как гипотенузу прямоугольного треугольника, катетами которого являются выраженные в определенном масштабе активная и реактивная проводимости всей цепи:

$$\cos \varphi = \frac{\sum G_n}{Y}; \quad \sin \varphi = \frac{\sum B_n}{Y}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum B_n}{\sum G_n}. \quad (14.14)$$

От треугольника токов можно перейти также к треугольнику мощностей и для определения мощности получить известные уже формулы:

$$P = UI \cos \varphi; \quad Q = UI \sin \varphi; \quad S = UI. \quad (14.15)$$

Активную мощность цепи можно представить как арифметическую сумму активных мощностей ветвей.

Реактивная мощность цепи равна алгебраической сумме мощностей ветвей. В этом случае индуктивная мощность берется положительной, а емкостная — отрицательной:

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum P_n; \quad Q = \sum Q_n; \\ S &= \sqrt{P^2 + Q^2}. \end{aligned} \right\} \quad (14.16)$$

## Расчет цепи без определения проводимостей ветвей

Расчет электрической цепи при параллельном соединении ветвей можно выполнить без предварительного определения активных и реактивных проводимостей, т.е. представляя элементы цепи в схеме замещения их активными и реактивными сопротивлениями (рис. 14.15, а).

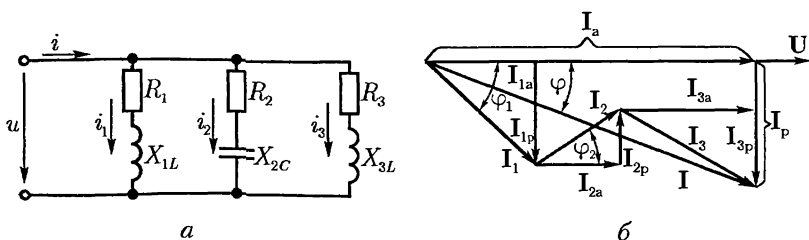


Рис. 14.15

Определяют токи в ветвях по формуле (14.4)

$$I_1 = U/Z_1, I_2 = U/Z_2 \text{ и т. д.,}$$

где  $Z_1, Z_2$  и т. д. — полное сопротивление ветвей.

Полное сопротивление ветви, в которую входит несколько элементов, соединенных последовательно, определяют по формуле (14.5).

Для построения векторной диаграммы токов (рис. 14.15, б) можно определить активную и реактивную составляющие тока каждой ветви по формулам

$$I_{1a} = I_1 = \frac{R_1}{Z_1}, \quad I_{1p} = I_1 \frac{X_1}{Z_1}$$

и т. д. для всех ветвей.

В этом случае отпадает необходимость определения углов  $\varphi_1, \varphi_2$  и построения их на чертеже. Ток в неразветвленной части цепи

$$I = I_{1a} + I_{1p} + I_{2a} + I_{2p} + \dots$$

Общий ток и мощность цепи определяются далее в том же порядке, какой был показан ранее [см. формулы (14.10), (14.15), (14.16)].

### Задачи

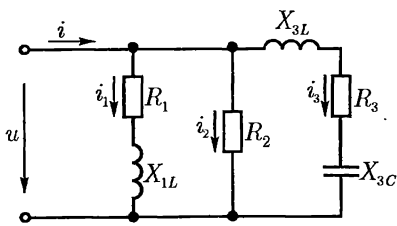
**Задача 14.7.** Определить ток в неразветвленной части цепи (рис. 14.16, а), активную, реактивную и полную мощность всей цепи. Построить векторную диаграмму токов и напряжений. Дано:  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 25,5 \text{ мГн}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 15 \text{ Ом}$ ,  $L_3 = 47,9 \text{ мГн}$ ,  $C_3 = 159 \text{ мкФ}$ ,  $u = 282 \sin 314t$ .

Решение. Реактивные сопротивления ветвей:

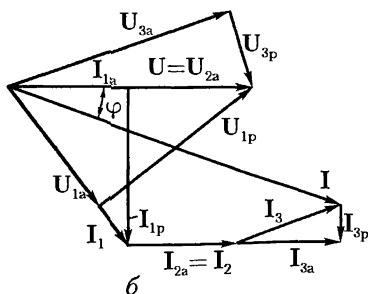
$$X_{1L} = \omega L_1 = 314 \cdot 25,5 \cdot 10^{-3} \approx 8 \text{ Ом};$$

$$X_{3L} = \omega L_3 = 314 \cdot 47,9 \cdot 10^{-3} \approx 15 \text{ Ом};$$

$$X_{3C} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{314 \cdot 159 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом};$$



а



б

Рис. 14.16

$$X_3 = X_{3L} - X_{3C} = 15 - 20 = -5 \text{ Ом.}$$

Полные сопротивления ветвей:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{1L}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ Ом;}$$

$$Z_2 = R_2 = 20 \text{ Ом;}$$

$$Z_3 = \sqrt{R_3^2 + (X_{3L} - X_{3C})^2} = \sqrt{15^2 + (15 - 20)^2} \approx 15,8 \text{ Ом.}$$

Действующее напряжение

$$U = U_m / \sqrt{2} = 282 / 1,41 \approx 200 \text{ В.}$$

Токи в ветвях

$$I_1 = U / Z_1 = 200 / 10 = 20 \text{ А; } I_2 = U / Z_2 = 200 / 20 = 10 \text{ А;}$$

$$I_3 = U / Z_3 = 200 / 15,8 \approx 12,6 \text{ А.}$$

Составляющие токов ветвей:

активные

$$I_{1a} = I_1 \frac{R_1}{Z_1} = 20 \cdot \frac{6}{10} = 12 \text{ А;}$$

$$I_{2a} = I_2 \frac{R_2}{Z_2} = 10 \cdot \frac{20}{20} = 10 \text{ А;}$$

$$I_{3a} = I_3 \frac{R_3}{Z_3} = 12,6 \cdot \frac{15}{15,8} \approx 12 \text{ А;}$$

реактивные

$$I_{1p} = I_1 \frac{X_1}{Z_1} = 20 \cdot \frac{8}{10} = 16 \text{ А;}$$

$$I_{2p} = I_2 \frac{X_2}{Z_2} = 10 \cdot \frac{0}{20} = 0;$$

$$I_{3p} = I_3 \frac{X_3}{Z_3} = 12,6 \cdot \frac{15 - 20}{15,8} \approx -4 \text{ А.}$$

Общий ток:

активный

$$I_a = I_{1a} + I_{2a} + I_{3a} = 12 + 10 + 12 = 34 \text{ А;}$$

реактивный

$$I_p = I_{1p} + I_{2p} + I_{3p} = 16 + 0 - 4 = 12 \text{ А;}$$

в неразветвленной части цепи

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{34^2 + 12^2} = 36 \text{ А.}$$

Активные мощности:

ветвей

$$P_1 = UI_{1a} = 200 \cdot 12 = 2400 \text{ Вт;}$$

$$P_2 = UI_{2a} = 200 \cdot 10 = 2000 \text{ Вт;}$$

$$P_3 = UI_{3a} = 200 \cdot 12 = 2400 \text{ Вт};$$

всей цепи

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 2400 + 2000 + 2400 = 6800 \text{ Вт}.$$

Реактивные мощности:

ветвей

$$Q_1 = UI_{1p} = 200 \cdot 16 = 3200 \text{ вар};$$

$$Q_2 = UI_{2p} = 200 \cdot 0 = 0;$$

$$Q_3 = UI_{3p} = 200 \cdot (-4) = -800 \text{ вар};$$

всей цепи

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3200 + 0 - 800 = 2400 \text{ вар}.$$

Полная мощность цепи

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{6800^2 + 2400^2} = 7200 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Проверка правильности подсчета мощности:

$$\cos \varphi = I_a/I = 34/36 \approx 0,944;$$

$$P = UI \cos \varphi = 200 \cdot 36 \cdot 0,944 \approx 6800 \text{ Вт};$$

$$\sin \varphi = I_p/I = 12/36 \approx 0,333;$$

$$Q = UI \sin \varphi = 200 \cdot 36 \cdot 0,333 \approx 2400 \text{ вар};$$

$$S = UI = 200 \cdot 36 = 7200 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Для построения векторной диаграммы дополнительно определим активные и реактивные напряжения ветвей:

$$U_{1a} = U \cos \varphi_1 = 200 \cdot \frac{6}{10} = 120 \text{ В};$$

$$U_{1p} = U \sin \varphi_1 = 200 \cdot \frac{8}{10} = 160 \text{ В};$$

$$U_{2a} = U = 200 \text{ В}; \quad U_{2p} = 0;$$

$$U_{3a} = U \cos \varphi_3 = 200 \cdot \frac{15}{15,8} \approx 189,9 \text{ В};$$

$$U_{3p} = U \sin \varphi_3 = 200 \cdot \frac{15 - 20}{15,8} \approx -63,3 \text{ В}.$$

Векторная диаграмма показана на рис. 14.16, б.

**Задача 14.8.** Решить задачу 14.7 путем определения проводимостей ветвей и всей цепи.

**Задача 14.9.** Решить задачу 14.5 путем определения активных и реактивных составляющих токов ветвей и всей цепи.

## ГЛАВА 15

# СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД

Методы расчета электрических цепей переменного тока с помощью векторных диаграмм, рассмотренные в предыдущих главах, основаны на изображении синусоидальных величин векторами.

Из курса математики известно, что каждому вектору  $\underline{A}$  в комплексной плоскости (рис. 15.1) соответствует комплексное число  $A$ , которое можно выразить в форме:

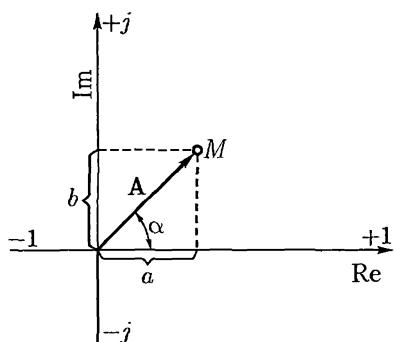


Рис. 15.1

алгебраической —  $\underline{A} = a + jb$ ;  
тригонометрической —  $\underline{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha$ ;  
показательной —  $\underline{A} = Ae^{j\alpha}$ .

Это дает основание от графического (векторного) выражения синусоидальных напряжений и токов перейти к аналитическому выражению их комплексными числами, а операции с векторами заменить алгебраическими действиями.

### 15.1. ВЫРАЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

При расчете электрических цепей переменного тока используют или определяют следующие величины: ЭДС напряжения, токи, сопротивления и проводимости, мощность. Все эти величины должны быть выражены в символической форме, т. е. комплексными числами.

#### Напряжения и токи

Подобно тому как на векторных диаграммах длины векторов выражают действующие значения, комплексные выражения ЭДС на-

пряжений и токов записывают так, что модули их также равны действующим значениям\*.

Для примера рассмотрим схему электрической цепи параллельного соединения катушки и конденсатора (рис. 15.2).

Напряжение на зажимах цепи выражается уравнением

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u).$$

Этому напряжению соответствуют вектор  $\mathbf{U}$  в комплексной плоскости (рис. 15.3) и комплексное число в показательной форме

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi_u}. \quad (15.1)$$

Ток  $i_1$  в катушке отстает от напряжения на угол  $\varphi_1$ :

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi_1) = I_{1m} \sin(\omega t - \psi_{1i});$$

угол  $\psi_{1i} = \psi_u - \varphi_1$  в рассматриваемом случае  $\psi_{1i} < 0$ .

Вектору тока  $\mathbf{I}_1$  соответствует комплексное число

$$\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_{1i}} = I_1 \cos \psi_{1i} - jI_1 \sin \psi_{1i}. \quad (15.2)$$

Ток в конденсаторе опережает напряжение на угол  $\varphi_2$ .

Вектору тока  $\mathbf{I}_2$  соответствует уравнение

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_u + \varphi_2) = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_{2i})$$

и комплекс

$$\dot{I}_2 = I_2 e^{j\psi_{2i}} = I_2 \cos \psi_{2i} + jI_2 \sin \psi_{2i}, \quad (15.3)$$

где

$$\psi_{2i} = \psi_u + \varphi_2; \quad \psi_{2i} > 0.$$

Согласно первому закону Кирхгофа, ток в неразветвленной части цепи складывается из токов в параллельных ветвях:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2.$$

Для определения этого тока сложение векторов  $\mathbf{I}_1$  и  $\mathbf{I}_2$  можно заменить сложением комплексов

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2;$$

$$\dot{I} = (I_1 \cos \psi_{1i} - jI_1 \sin \psi_{1i}) + (I_2 \cos \psi_{2i} + jI_2 \sin \psi_{2i}) =$$

\* Комплексы синусоидально изменяющихся величин принято отмечать точками над их буквенными обозначениями (например, комплексы напряжения  $\dot{U}$ , тока  $\dot{I}$ ). Комплексы величин, не зависящих от времени (например, сопротивлений, проводимостей), обозначают большими буквами без точек, но с черточкой внизу:  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}$ .

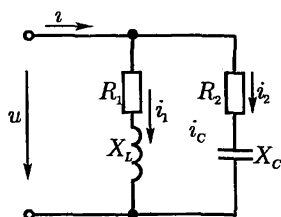


Рис. 15.2



$$= I \cos \psi_i + jI \sin \psi_i = Ie^{j\psi_i}. \quad (15.4)$$

Следует обратить внимание на различие между действительной или мнимой частями комплекса, с одной стороны, и активной или реактивной составляющими вектора тока — с другой.

Действительная и мнимая части комплекса тока равны проекциям вектора тока на оси комплексной плоскости (ось действительных и ось мнимых величин).

Активная и реактивная составляющие вектора тока в данном участке цепи равны его проекциям на взаимно перпендикулярные оси, одна из которых направлена вдоль вектора напряжения этого же участка цепи. Действительная и мнимая части комплекса тока равны соответственно активной и реактивной составляющим вектора тока только в том случае, если вектор напряжения направлен вдоль оси действительных чисел, т.е. комплекс напряжения выражается действительным числом.

## Сопротивления

Для выражения сопротивлений в комплексной форме продолжим рассмотрение схемы рис. 15.2, где каждый из элементов (катушка и конденсатор) представлен активным и реактивным сопротивлениями, соединенными последовательно. Разделив комплекс напряжения  $\dot{U}$  на комплекс тока в катушке  $\dot{I}_1$ , получим комплекс сопротивления первой ветви

$$\underline{Z}_1 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_1} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{I_1e^{-j\psi_{1i}}} = \frac{U}{I_1}e^{j(\psi_u + \psi_{1i})} = Z_1e^{j\varphi_1}, \quad (15.5)$$

где  $Z_1 = U/I_1$  — модуль комплекса полного сопротивления;  $\varphi_1 = \psi_u + \psi_{1i}$  — угол сдвига фаз между напряжением и током первой ветви ( $\varphi_1 > 0$ ).

Выразим комплекс сопротивления катушки в тригонометрической и алгебраической формах

$$\underline{Z}_1 = Z_1e^{j\varphi_1} = Z_1 \cos \varphi_1 + jZ_1 \sin \varphi_1.$$

Но  $Z_1 \cos \varphi_1 = R_1$ ;  $Z_1 \sin \varphi_1 = X_L$ , поэтому

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L. \quad (15.6)$$

Аналогично, для второй ветви

$$\underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{I_2e^{j\psi_{2i}}} = \frac{U}{I_2}e^{j(\psi_u - \psi_{2i})} = Z_2e^{j\varphi_2},$$

где  $Z_2 = U/I_2$  — модуль комплекса полного сопротивления;  $\varphi_2 = \psi_u - \psi_{2i}$  — угол сдвига фаз между напряжением и током второй ветви ( $\varphi_2 < 0$ );

$$\underline{Z}_2 = Z_2 e^{-j\varphi_2} = Z_2 \cos \varphi_2 - jZ_2 \sin \varphi_2,$$

или

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_C. \quad (15.7)$$

Если в ветвях схемы на рис. 15.2 реактивных сопротивлений нет ( $X_L = X_C = 0$ ), то, согласно выражениям (15.6) и (15.7),  $\underline{Z}_1 = R_1$ ;  $\underline{Z}_2 = R_2$ . При  $R_1 = R_2 = 0$   $\underline{Z}_1 = jX_L$ ;  $\underline{Z}_2 = -jX_C$ .

Из приведенных рассуждений следует:

1. Активное сопротивление в комплексной форме выражается действительным положительным числом.

2. Реактивные сопротивления в комплексной форме выражаются мнимыми числами, причем индуктивное сопротивление ( $X_L$ ) положительно, а емкостное ( $X_C$ ) отрицательно.

3. Полное сопротивление участка цепи при последовательном соединении  $R$  и  $X$  выражается комплексным числом, действительная часть которого равна активному сопротивлению, а мнимая часть — реактивному сопротивлению этого участка (см. прил. 5).

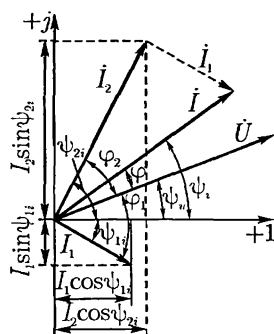


Рис. 15.3

## Проводимости

Выражения проводимостей ветвей в комплексной форме можно получить, представив каждый элемент (катушку и конденсатор) схемой параллельного соединения активной и реактивной проводимостей (см. рис. 14.1, б):

$$\underline{Y}_1 = \dot{I}_1/\dot{U}; \quad \underline{Y}_2 = \dot{I}_2/\dot{U}. \quad (15.8)$$

Из этих формул видно, что выражения проводимостей комплексными числами можно получить в таком же порядке, как для сопротивлений. Для того чтобы не повторять аналогичных рассуждений, полные проводимости в символической форме можно найти как величины, обратные комплексам полных сопротивлений:

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z}. \quad (15.9)$$

Для первой ветви (катушки)

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + jX_L} = \frac{R_1 - jX_L}{(R_1 + jX_L)(R_1 - jX_L)} =$$

$$= \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = G_1 - jB_L;$$

$$\underline{Y}_1 = G_1 - jB_L = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}} = \frac{I_2 e^{-j\psi_{1i}}}{U e^{-j\psi_u}} = Y e^{-j\varphi_1}, \quad (15.10)$$

где  $G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2}$  и  $B_L = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}$  — активная и индуктивная проводимости.

Для второй ветви (конденсатора)

$$\begin{aligned} \underline{Y}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2 - jX_C} = \frac{R_2 + jX_C}{(R_2 - jX_C)(R_2 + jX_C)} = \\ &= \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} + j \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} = G_2 + jB_C; \end{aligned}$$

$$\underline{Y}_2 = G_2 + jB_C = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}} = \frac{I_2 e^{j\psi_{2i}}}{U e^{j\psi_u}} = Y_2 e^{j\varphi_2}, \quad (15.11)$$

где  $G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2}$  и  $B_C = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}$  — активная и емкостная проводимости.

Результаты этих преобразований показывают, что *полная проводимость ветви электрической цепи в комплексной форме выражается комплексным числом, действительная часть которого равна активной проводимости, а мнимая часть равна реактивной проводимости этой ветви, причем индуктивная проводимость отрицательна, а емкостная — положительна.*

## Мощность

Комплекс мощности в данной цепи определяется умножением комплекса напряжения на сопряженный комплекс тока этой цепи.

Для ветви с активным сопротивлением и индуктивностью (см. рис. 15.2), согласно векторной диаграмме (см. рис. 15.3),

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u}; \quad \dot{I}_1 = I_1 e^{-j\psi_{1i}}.$$

Произведение комплекса напряжения и сопряженного комплекса тока

$$\underline{S}_1 = \dot{U} \dot{I}_1 = U e^{j\psi_u} I_1 e^{j\psi_{1i}} = U I_1 e^{j(\psi_u + \psi_{1i})} = U I_1 e^{j\psi_1}.$$

В алгебраической форме

$$\underline{S}_1 = \dot{U}\dot{I}_1 = UI_1 \cos \varphi_1 + \\ + jUI_1 \sin \varphi_1 = P_1 + jQ. \quad (15.12)$$

Действительная часть полученного комплекса выражает активную мощность, а мнимая (без множителя  $j$ ) — реактивную мощность первой ветви.

Для ветви с активным сопротивлением и емкостью

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u}; \quad \dot{I}_2 = I_2e^{j\psi_{2i}};$$

$$\underline{S}_2 = \dot{U}\dot{I}_2 = Ue^{j\psi_u} I_2e^{j\psi_{2i}} = UI_2e^{j(\psi_u - \psi_{2i})} = UI_2e^{-j\psi_2}.$$

В алгебраической форме

$$\underline{S}_2 = \dot{U}\dot{I}_2 = UI_2 \cos \varphi_2 - jUI_2 \sin \varphi_2 = P_2 - jQ_C. \quad (15.13)$$

Реактивная мощность в цепи с емкостью имеет отрицательный знак в отличие от положительного знака реактивной мощности в цепи с индуктивностью. Модуль комплекса мощности в той и другой ветви равен полной мощности:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= UI_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_L^2}; \\ S_2 &= UI_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_C^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15.14)$$

### Задачи

**Задача 15.1.** В схеме рис. 15.4 известны:  $R_1 = 0$ ;  $X_1 = 20$  Ом;  $R_2 = 20$  Ом;  $R_3 = 10$  Ом;  $X_3 = 20$  Ом;  $X_2 = 10$  Ом.

Выразить сопротивления ветвей в символической форме и определить комплекс сопротивления всей цепи.

**Задача 15.2.** В электрическую цепь входят четыре комплексных сопротивления:  $\underline{Z}_1 = 20e^{j30^\circ}$ ;  $\underline{Z}_2 = 30e^{j60^\circ}$ ;  $\underline{Z}_3 = 4$ ;  $\underline{Z}_4 = 6e^{j180^\circ}$ .

Общее сопротивление цепи выражается формулой

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4.$$

Начертить схему цепи с обозначением активных и реактивных элементов. Определить комплекс сопротивления всей цепи.

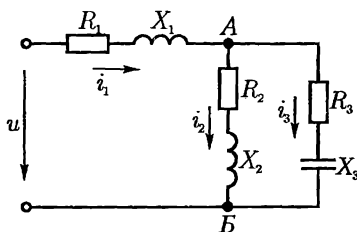


Рис. 15.4

## 15.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Представление векторов напряжений и токов комплексами, выражение сопротивлений и проводимостей комплексными числами, а также замена операций с векторами алгебраическими действиями с комплексными числами позволяют значительно упростить расчет сложных цепей переменного тока. Кроме того, применение комплексных чисел обеспечивает единство методов расчета электрических цепей постоянного и переменного токов.

Это значит, что все методы расчета и вытекающие из них соотношения для цепей постоянного тока можно применить и для цепей переменного тока, если величины выражены в комплексной форме. В этом практический смысл применения комплексных чисел для решения задач электротехники.

### Законы Кирхгофа

Согласно первому закону Кирхгофа, *алгебраическая сумма комплексов токов в электрическом узле равна нулю*:

$$\boxed{\sum \dot{I} = 0.} \quad (15.15)$$

Для составления уравнения в символической форме по первому закону Кирхгофа нужно выбрать условно-положительные направления токов. В уравнении (15.15) ток записывают со знаком плюс, если он направлен к узлу. Для схемы рис. 14.15, а

$$i - i_1 - i_2 - i_3 = 0,$$

или

$$i = i_1 + i_2 + i_3,$$

а в комплексной форме

$$\dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0,$$

или

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3.$$

Согласно второму закону Кирхгофа, *в контуре электрической цепи алгебраическая сумма комплексов в ЭДС источников равна алгебраической сумме комплексов падений напряжений*:

$$\boxed{\sum \dot{I} \underline{Z} = \sum \dot{E}.} \quad (15.16)$$

Для схемы рис. 14.10

$$iR_1 + u_C + u_L + iR_2 = e_1 - e_2,$$

а в комплексной форме

$$\dot{I}R_1 + \dot{I}(-jX_C) + \dot{I}jX_L + \dot{I}R_2 = \dot{E}_2 - \dot{E}_1.$$

### Преобразование схем

На примере цепи смешанного соединения сопротивлений (см. рис. 15.4) рассмотрим расчет методом преобразования и упрощения схемы.

Параллельно соединенные ветви, имеющие полные сопротивления

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 \text{ и } \underline{Z}_3 = R_3 - jX_3,$$

заменяются одной ветвью с эквивалентным сопротивлением

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

Сопротивление в неразветвленной части цепи  $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$  соединено последовательно с сопротивлением  $\underline{Z}_{AB}$ .

Общее сопротивление цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{AB}.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$\dot{I}_1 = \dot{U} / \underline{Z}.$$

Напряжения на участках цепи

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_1; \quad \dot{U}_{AB} = \dot{I}_1 \underline{Z}_{AB}.$$

Токи в параллельных ветвях

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_{AB} / \underline{Z}_2, \quad \dot{I}_3 = \dot{U}_{AB} / \underline{Z}_3.$$

Преобразованием можно упростить и более сложные схемы с последовательным и параллельным соединениями участков, а также схемы, которые содержат треугольники или трехлучевые звезды сопротивлений.

## Метод узлового напряжения

Схему с двумя узлами можно рассчитать, определив узловое напряжение по формуле:

$$\dot{U}_{AB} = \frac{\sum \dot{E} \underline{Y}}{\sum \underline{Y}}. \quad (15.17)$$

Эта формула аналогична формуле (4.21). В числителе ее записана алгебраическая сумма произведений комплексов ЭДС и проводимостей всех ветвей, а в знаменателе — сумма комплексов проводимостей ветвей.

Комплекс тока определяют по формуле

$$\dot{I}_n = (\dot{E}_n - \dot{U}_{AB}) \underline{Y}_n. \quad (15.18)$$

Правило выбора знаков ЭДС в формулах (15.16) — (15.18) такое же, как и в цепи постоянного тока, с той лишь разницей, что условно-положительные направления ЭДС выбираются при расчете, а в цепи постоянного тока направления ЭДС обычно заданы.

## Метод эквивалентного генератора

Порядок расчета по методу эквивалентного генератора, установленный в 5.3 для цепей постоянного тока, пригоден и для цепей переменного тока, если ЭДС, ток и сопротивления выражены в комплексной форме.

Ток  $\dot{I}_x$  в исследуемой ветви определяют из уравнения, подобного (5.12):

$$\dot{I}_x = \frac{\dot{E}_{\text{эк}}}{\underline{Z}_{\text{эк}} + \underline{Z}_x}, \quad (15.19)$$

где  $\dot{E}_{\text{эк}}$  — комплекс эквивалентной ЭДС, равный комплексу напряжения холостого хода активного двухполюсника при отключении исследуемой ветви;  $\underline{Z}_{\text{эк}}$  — комплекс сопротивления пассивного двухполюсника относительно точек присоединения исследуемой ветви (комплекс внутреннего сопротивления эквивалентного генератора);  $\underline{Z}_x$  — комплекс сопротивления исследуемой ветви.

## Задачи

**Задача 15.3.** Выполнить символическим методом расчет цепи (см. рис. 14.8).

Д а н о:

$$e_1 = 169 \sin(314t + 30^\circ);$$

$$e_2 = 226 \sin(314t + 120^\circ);$$

$$R_3 = 9 \text{ Ом}; R_1 = 3 \text{ Ом}; X_{1L} = 4 \text{ Ом}; R_2 = 8 \text{ Ом}; \\ X_{2L} = 6 \text{ Ом}; X_{1C} = 15 \text{ Ом}; X_{2C} = 10 \text{ Ом}.$$

Определить ток в цепи и напряжения  $U_{6.1}$ ,  $U_{9.5}$ .

Решение. Выразим заданные ЭДС и сопротивления комплексными числами.

ЭДС в комплексной форме:

$$\dot{E}_1 = \frac{169}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} = 120 e^{j30^\circ} = 104 + j60;$$

$$\dot{E}_2 = \frac{226}{\sqrt{2}} e^{j120^\circ} = 160 e^{j120^\circ} = -80 + j138.$$

Сопротивления в комплексной форме

$$\underline{R}_3 = 9; \quad \underline{R}_1 = 3; \quad \underline{X}_{1L} = j4; \quad \underline{R}_2 = 8; \quad \underline{X}_{2L} = j6; \\ \underline{X}_{1C} = -j15; \quad \underline{X}_{2C} = -j10.$$

При последовательном соединении общее сопротивление цепи

$$\underline{Z} = \underline{R}_3 + \underline{R}_1 + \underline{R}_2 + \underline{X}_{1L} + \underline{X}_{2L} + \underline{X}_{1C} + \underline{X}_{2C} = \\ = 9 + 3 + 8 + j4 + j6 - j15 - j10 = 20 - j15.$$

Сопротивление цепи в показательной форме:  
модуль

$$Z = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ Ом};$$

аргумент

$$\text{tg } \varphi = X/R = -15/20 = -0,75; \quad \varphi = -37^\circ.$$

Угол  $\varphi$  можно найти, определив

$$\sin \varphi = X/Z = -15/25 = -0,6; \quad \underline{Z} = 25 e^{-j37^\circ}.$$

Ток в цепи

$$\underline{I} = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2}{\underline{Z}} = \frac{104 + j60 - 80 + j138}{20 - j15} = \frac{24 + j198}{20 - j15}.$$

Для удобства деления выразим числитель и знаменатель в показательной форме:

$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 = 24 + j198 = 200 e^{j83^\circ};$$

$$\underline{I} = \frac{200 e^{j83^\circ}}{25 e^{-j37^\circ}} = 8 e^{j(83^\circ + 37^\circ)} = 8 e^{j120^\circ} = -4 + j6,94.$$



Из сравнения комплексов  $\dot{E}_2$  и  $\dot{I}$  и общей ЭДС  $\dot{E}_1 + \dot{E}_2$  видно, что ток в цепи совпадает по фазе с ЭДС  $E_2$  и опережает общее значение ЭДС на угол  $120 - 83 = 37^\circ$ .

Напряжение

$$\begin{aligned}\dot{U}_{6,1} &= \dot{E}_1 - \dot{I}(R_1 + jX_{L1} + jX_{L2} + R_2) = 104 + j60 - \\ &- (-4 + j6,94)(3 + j4 + j6 + 8) = 217 + j23,6; \\ \dot{U}_{6,1} &= 220e^{j6^\circ}.\end{aligned}$$

Угол сдвига фаз между током и напряжением  $\dot{U}_{6,1}\varphi = 120 - 6 = 114^\circ$ .

Напряжение  $\dot{U}_{9,5} = E_2 - \dot{I}(R_2 - jX_{1C} + R_3) = -116 - j40 = 123e^{-j161^\circ}$ .

Между током и напряжением  $\dot{U}_{5,9}$  угол сдвига фаз  $\varphi_2 = 120 - 19 = 101^\circ$ , так как  $\dot{U}_{5,9} = -\dot{U}_{9,5} = 123e^{j19^\circ}$ .

**Задача 15.4.** Определить символическим методом ток в цепи (см. рис. 14.10), составить баланс мощностей и построить векторную диаграмму. Дано:  $E_1 = 120$  В;  $E_2 = 90$  В ( $E_2$  отстает по фазе от  $E_1$  на  $90^\circ$ );  $R_1 = 40$  Ом;  $R_2 = 8$  Ом;  $X_C = 3$  Ом;  $X_L = 12$  Ом.

**Задача 15.5.** Определить символическим методом напряжения на зажимах источника, токи и мощность в цепи рис. 14.13, для которой известны:  $R_1 = 8$  Ом;  $X_L = 6$  Ом;  $R_2 = 9$  Ом;  $X_C = 12$  Ом;  $I_1 = 9$  А.

Решение. Выразим сопротивления ветвей в символической форме:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= R_1 + jX_L = 8 + j6 = 10e^{j37^\circ}; \\ \underline{Z}_2 &= R_2 - jX_C = 9 - j12 = 15e^{-j53^\circ}.\end{aligned}$$

Предположим, что комплекс тока  $\dot{I}_1$  выражается действительным числом (начальная фаза тока  $\psi_{1i} = 0$ )

$$\dot{I}_1 = I_1 e^{j0^\circ} = I_1 = 9$$

(начальную фазу тока можно выбрать произвольно, т. е. угол  $\psi_{1i}$  не равен нулю).

Напряжение в первой ветви, равное напряжению на зажимах источника,

$$\dot{U} = I_1 \underline{Z}_1 = 9(8 + j6) = 72 + j54 = 90e^{j37^\circ}; \quad U = 90 \text{ В.}$$

Ток во второй ветви

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{90e^{j37^\circ}}{15e^{-j53^\circ}} = 6e^{j90^\circ} = j6; \quad I_2 = 6 \text{ А.}$$

Ток в источнике

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 9 + j6 = 10,8e^{j34^\circ}; \quad I = 10,8 \text{ А.}$$

Мощность цепи

$$\underline{S} = \dot{U}\dot{I} = 90e^{j37^\circ} \cdot 10,8e^{-j34^\circ} = 972e^{j3^\circ} = 970j46; \quad P = 970 \text{ Вт;}$$

$$Q = 46 \text{ вар.}$$

## ГЛАВА 16

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Элементы электрической цепи могут быть между собой связаны общим магнитным полем и тогда изменение тока в одном из элементов является причиной наведения ЭДС в другом элементе (см. 10.4). Такое взаимное влияние элементов цепи называется их индуктивной связью.

Если индуктивными связями пренебречь нельзя, то расчет электрической цепи несколько усложняется.

### 16.1. ВЗАИМОИНДУКТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Сопротивление в электрической цепи, обусловленное взаимой индукцией, аналогично сопротивлению, обусловленному самоиндукцией, так как ЭДС взаимной индукции влияет на режим цепи с качественной стороны так же, как и ЭДС самоиндукции.

#### Одноименные и разноименные зажимы индуктивно-связанных катушек

Ранее в 8.5 было дано определение согласного и встречного включения катушек.

При *согласном* включении магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в катушках по направлению совпадают, поэтому ЭДС самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке также направлены одинаково.

При *встречном* включении магнитные потоки, а также ЭДС самоиндукции и взаимной индукции по направлению противоположны.

На схемах замещения взаимная индуктивность обозначается буквой *M* и дугой, объединяющей два индуктивно-связанных элемента (рис. 16.1). Для того чтобы различать согласное и встречное включения, на схемах обозначают также начала индуктивно-связанных катушек, отмечая их точками или звездочками.

*Зажимы индуктивно-связанных катушек называют одноименными (начала или концы), если при согласном включении положительное направление токов, принятое на схеме, относительно этих зажимов*

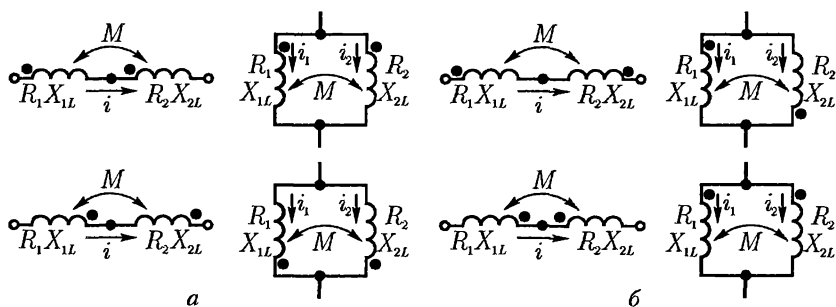


Рис. 16.1

одинаково (рис. 16.1, а). При встречном включении (рис. 16.1, б) ток в одной катушке направлен к началу, а в другой — к концу.

### Разметка зажимов на основе опыта

Направление магнитных потоков катушек зависит от их взаимного расположения и направления намотки витков. При отсутствии сведений о расположении начал и концов можно провести простой опыт, для которого кроме самих индуктивно-связанных катушек требуются гальванический элемент (или аккумулятор) и гальванометр (рис. 16.2).

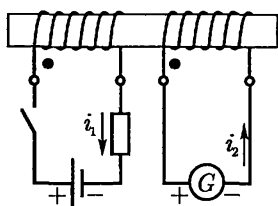


Рис. 16.2

Одну из катушек через ключ присоединяют к гальваническому элементу, к зажимам другой подключают гальванометр. В момент замыкания ключа возникают токи в обеих катушках, причем ток  $i_2$  создает магнитный поток, направленный навстречу потоку первой катушки (правило Ленца).

Поэтому при включении гальванического элемента токи  $i_1$  и  $i_2$  направлены противоположно относительно одноименных зажимов. Направление тока  $i_1$  известно, так как известна полярность источника питания, а направление тока  $i_2$  определяется по отклонению гальванометра.

Ток  $i_2$  направлен к положительному зажиму гальванометра, если стрелка его отклоняется по шкале (шкала односторонняя).

Одноименными зажимами катушек являются зажимы, к которым присоединены зажимы источника и гальванометра; два других зажима также одноименны.

### Взаимоиндуктивное сопротивление

Рассматривая две индуктивно-связанные катушки, запишем выражения ЭДС самоиндукции и взаимоиндукции, возникаю-

щие при синусоидальных токах в обеих катушках, направленных одинаково относительно одноименных зажимов. ЭДС и напряжения:

от самоиндукции от взаимной индукции  
*в первой катушке*

$$e_{1L} = -\frac{d\Psi_{11}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} = u_{1L}; \quad e_{1M} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt} = -u_{1M};$$

$$\dot{U}_{1L} = j\omega L_1 \dot{I}_1; \quad \dot{U}_{1M} = j\omega M \dot{I}_2;$$

*во второй катушке*

$$e_{2L} = -\frac{d\Psi_{22}}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} = -u_{2L}; \quad e_{2M} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} = -u_{2M};$$

$$\dot{U}_{2L} = j\omega L_2 \dot{I}_2; \quad \dot{U}_{2M} = j\omega M \dot{I}_1.$$

ЭДС и напряжения самоиндукции и взаимной индукции имеют одинаковые знаки, так как при согласном включении потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены одинаково. Создаваемый ими эффект противодействия току учитывается введением в расчет индуктивного сопротивления  $\omega L_1$ ,  $\omega L_2$  и взаимноиндуктивного сопротивления  $\omega M$ .

При встречном включении катушек ЭДС и напряжения самоиндукции и взаимной индукции будут иметь разные знаки:

$$\dot{U}_{1L} = j\omega L_1 \dot{I}_1; \quad \dot{U}_{1M} = -j\omega M \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_{2L} = j\omega L_2 \dot{I}_2; \quad \dot{U}_{2M} = -j\omega M \dot{I}_1.$$

Комплексные индуктивное и взаимноиндуктивное сопротивления записывают аналогично:

$$\underline{Z}_L = j\omega L = jX_L; \quad \underline{Z}_M = j\omega M = jX_M.$$

### Задачи

**Задача 16.1.** Для определения параметров двух магнитно-связанных катушек провели измерения.

1. По схеме рис. 16.3, а измерили ток и напряжение на каждой катушке, включив их последовательно в сеть постоянного тока:  $I = 2$  А;  $U_1 = 6$  В;  $U_2 = 8$  В.

2. По схеме рис. 16.3, б измерили в каждой катушке ток и напряжение, включив их порознь в сеть переменного тока:  $I_1 = 2$  А;  $U_1 = 10$  В;  $I_2 = 2$  А;  $U_2 = 12$  В.

3. По схеме рис. 16.3, в измерили ток и напряжение, включив катушки согласно и последовательно в сеть переменного тока:  $I_c = 2$  А;  $U_c = 24$  В.

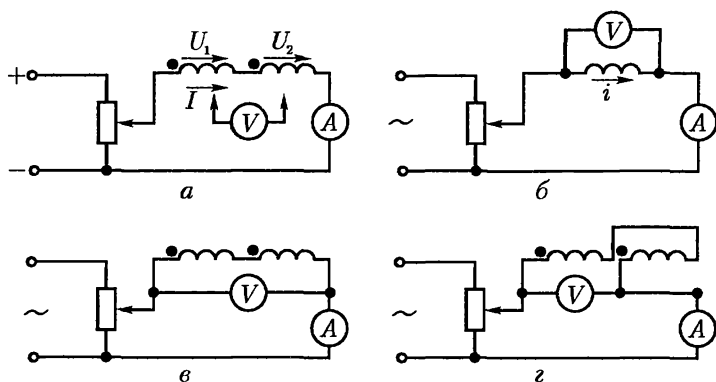


Рис. 16.3

4. По схеме рис. 16.3, г измерили ток и напряжение, включив катушки встречно и последовательно в сеть переменного тока:  $I_b = 2 \text{ A}$ ;  $U_b = 20 \text{ В}$ .

Определить активные сопротивления, индуктивности и взаимную индуктивность катушек, если частота в сети переменного тока 50 Гц.

**Решение.** Первый опыт позволяет определить активные сопротивления катушек, пренебрегая увеличением сопротивления от поверхностного эффекта:  $R_1 = U_1/I = 6/2 = 3 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = U_2/I = 8/2 = 4 \text{ Ом}$ .

Второй опыт позволяет определить полные сопротивления катушек переменному току при отсутствии взаимного влияния, а затем рассчитать индуктивности:  $Z_1 = U_1/I_1 = 10/2 = 5 \text{ Ом}$ ;  $Z_2 = U_2/I_2 = 12/2 = 6 \text{ Ом}$ .

Индуктивные сопротивления

$$X_1 = \sqrt{Z_1^2 - R_1^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ Ом};$$

$$X_2 = \sqrt{Z_2^2 - R_2^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 4,47 \text{ Ом}.$$

Индуктивности

$$L_1 = \frac{X_1}{\omega} = \frac{4}{2\pi \cdot 50} = 0,0127 \text{ Гн};$$

$$L_2 = \frac{X_2}{\omega} = \frac{4,47}{2\pi \cdot 50} = 0,0142 \text{ Гн}.$$

По результатам третьего и четвертого опытов определим взаимную индуктивность.

При согласном включении

$$\dot{U}_c = \dot{I}_c(R_1 + R_2) + \dot{I}_c(jX_{1L} + jX_{2L}) + 2\dot{I}_c jX_M = \dot{I}_c R + \dot{I}_c jX_c,$$

где

$$R = R_1 + R_2; \quad X_c = X_{1L} + X_{2L} + 2X_M = \omega(L_1 + L_2 + 2M);$$

$$Z_c = U_c/I_c = 24/2 = 12 \text{ Ом}; X_c = \sqrt{Z_c^2 - R^2} = \sqrt{12^2 - 7^2} = 9,75 \text{ Ом}.$$

При встречном включении

$$\dot{U}_B = \dot{I}_B(R_1 + R_2) + \dot{I}_B(jX_{1L} + jX_{2L} - 2jX_M) = \dot{I}_B + \dot{I}_B jX_B,$$

где

$$X_B = X_{1L} + X_{2L} - 2X_M = \omega(L_1 + L_2 - 2M);$$

$$Z_B = U_B/I_B = 20/2 = 10 \text{ Ом}; X_B = \sqrt{Z_B^2 - R^2} = \sqrt{10^2 - 7^2} = 7,15 \text{ Ом};$$

$$X_c = X_{1L} + X_{2L} + 2X_M; X_B = X_{1L} + X_{2L} - 2X_M.$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$X_c - X_B = 4X_M;$$

$$X_M = \frac{X_c - X_B}{4}; M = \frac{X_c - X_B}{4\omega}.$$

**Задача 16.2.** Две одинаковые катушки с активным сопротивлением  $R = 3 \text{ Ом}$  и индуктивностью  $L = 25,4 \text{ мГн}$  соединены последовательно. Катушки индуктивно связаны при  $M = 6,38 \text{ мГн}$ .

Найти комплекс сопротивления цепи при согласном и встречном включении катушек и частоте  $f = 50 \text{ Гц}$ .

## 16.2. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Особенность расчета электрических цепей с взаимной индуктивностью состоит в том, что к параметрам  $R, L, C$  добавляется четвертый параметр  $M$ . Кроме того, необходимо учитывать, что ЭДС взаимной индукции и самоиндукции в одном и том же элементе цепи могут по направлению совпадать или быть противоположными.

### Последовательное соединение

Для расчета неразветвленной цепи с взаимной индуктивностью (рис. 16.4) можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$u = u_{1R} + u_{1L} \pm u_M + u_R + u_{2R} + u_{2L} \pm u_M,$$

или

$$u = iR_1 + L \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} + iR + iR_2 + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt}.$$

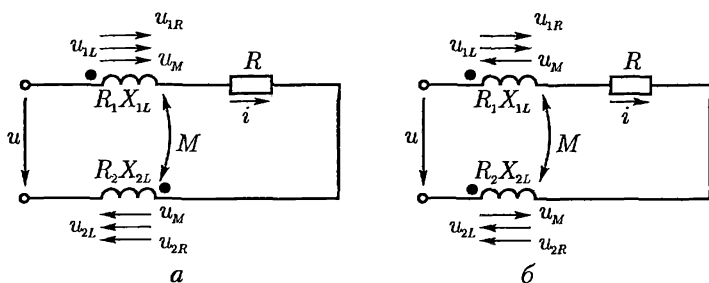


Рис. 16.4

Те же уравнения в символической форме через действующие значения тока и напряжения должны быть записаны так:

$$\dot{U} = \dot{U}_{1R} + \dot{U}_{1L} \pm \dot{U}_M + \dot{U}_R + \dot{U}_{2R} + \dot{U}_{2L} \pm \dot{U}_M,$$

или

$$\dot{U} = \dot{I}R_1 + j\dot{k}\omega L_1 \pm j\dot{k}\omega M + \dot{I}R + \dot{I}R_2 + j\dot{k}\omega L_2 \pm j\dot{k}\omega M,$$

$$\dot{U} = \dot{I}(R_1 + R + R_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2 \pm 2j\omega M). \quad (16.1)$$

При согласном включении (рис. 16.4, а) напряжение взаимной индукции  $u_M$  по направлению совпадает с напряжением самоиндукции  $u_L$ , поэтому слагаемые  $M \frac{di}{dt}$  или  $j\omega M$  и  $L \frac{di}{dt}$  или  $j\omega L$  имеют в уравнениях одинаковые, в данном случае положительные, знаки. При встречном включении (рис. 16.4, б) эти слагаемые имеют разные знаки.

Из уравнения (16.1) при заданном напряжении определяется ток, а при заданном токе — напряжение.

## Параллельное соединение

Для примера рассмотрим параллельное соединение двух катушек, имеющих сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$  индуктивности  $L_1$ ,  $L_2$  и взаимную индуктивность  $M$  (рис. 16.5).

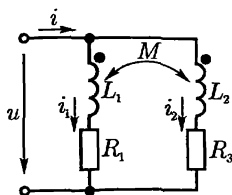


Рис. 16.5

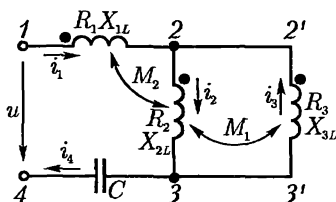


Рис. 16.6

Из схемы видно, что относительно одноименных зажимов токи в обеих катушках направлены одинаково, поэтому падения напряжения, обусловленные взаимоиндуктивностью, в соответствующие уравнения войдут с положительным знаком:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= R_1 \dot{I}_1 + jX_1 \dot{I}_1 + jX_M \dot{I}_1; \\ \dot{U} &= R_2 \dot{I}_2 + jX_2 \dot{I}_2 + jX_M \dot{I}_2; \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

Решение этой системы уравнений дает

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \dot{U}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \dot{U}; \\ \dot{I} &= \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \dot{U}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

Из последнего равенства находят входное комплексное сопротивление данной цепи

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}.$$

Аналогично определяют токи в случае встречного включения катушек, с той лишь разницей, что в уравнения (16.2) слагаемые, обусловленные взаимоиндуктивностью, войдут со знаком минус.

## Разветвленная цепь

В качестве примера рассмотрим схему рис. 16.6, для которой запишем уравнения с учетом взаимных индуктивностей.

1. Для контура 1-2-3-4-1

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_1 jX_{1L} + \dot{I}_2 jX_{2M} + \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 jX_{2L} + \\ &+ \dot{I}_1 jX_{2M} - \dot{I}_3 jX_{1M} - \dot{I}_4 jX_C. \end{aligned}$$

2. Для контура 2-2'-3'-3-2

$$0 = -\dot{I}_3 R_3 - \dot{I}_3 jX_{3L} + \dot{I}_2 jX_{1M} - \dot{I}_2 R_2 - \dot{I}_2 jX_{2L} + \dot{I}_3 jX_{1M} - \dot{I}_1 jX_{2M}.$$

3. Для узла 2

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0.$$

Знаки перед слагаемыми определяют согласно выбранным положительным направлениям тока и направлению обхода контуров; учитывают также включение катушек: согласное или встречное.



С этой точки зрения рассмотрим уравнение п. 2.

Направление обхода контура по часовой стрелке в обоих участках контура — против тока. Поэтому падения напряжения в активных и индуктивных сопротивлениях записаны в правой части уравнения со знаком минус. При определении знака падения напряжения, обусловленного ЭДС взаимной индукции, дополнительно учитывается согласное или встречное включение катушек: на участке 3–2 знаки ЭДС самоиндукции между второй и первой катушками совпадают, так как эти катушки включены согласно; поэтому  $\dot{I}_1 jX_{2M}$ , так же как и  $\dot{I}_2 jX_{2L}$ , имеет отрицательный знак. Падение напряжения во второй катушке, обусловленное взаимной индукцией с третьей катушкой, включенной с ней встречно, взято со знаком плюс, так как направления ЭДС самоиндукции второй катушки и взаимной индукции с третьей катушкой не совпадают.

В данном случае для определения токов в схеме нужно решить систему четырех уравнений, включая уравнение  $\dot{I}_1 = \dot{I}_4$ . Одно из контурных уравнений целесообразно использовать для проверки решения.

### Задачи

**Задача 16.3.** Определить ток и напряжение на участках цепи (рис. 16.7, а), построить векторную диаграмму при согласном включении катушек вариометра, как показано на рис. 16.7, б. Параметры катушек:  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 0,03 \text{ Гн}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $L_2 = 0,1 \text{ Гн}$ .

Взаимоиндуктивность  $M = 0,05 \text{ Гн}$ . Сопротивление нагрузки  $\underline{Z} = (30 + j30) \text{ Ом}$ . Напряжение сети  $U = 220 \text{ В}$ . Угловая частота  $\omega = 1000 \text{ рад/с}$ .

**Решение.** При согласном включении катушек вариометра

$$\dot{U} = \dot{I}(R_1 + R_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + j\omega 2M + \underline{Z});$$

$$220 = I(5 + 5 + j1000 \cdot 0,03 + j1000 \cdot 0,1 + j1000 \cdot 2 \cdot 0,05 + 30 + j30).$$

Ток в цепи

$$\dot{I} = \frac{220}{40 + j260} = \frac{220(40 - j260)}{40^2 + 260^2} = 0,127 - j0,827.$$

Напряжения на участках:  
на первой катушке вариометра

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}(R_1 + j\omega L_1 + j\omega M) = \\ &= (0,127 - j0,827)(5 + j30 + j50) = 66,84 + j6,07; \end{aligned}$$

на второй катушке вариометра

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{I}(R_2 + j\omega L_2 + j\omega M) = (0,127 - j0,827) \times \\ &\times (5 + j100 + j50) = 124,62 + j14,82; \end{aligned}$$

на нагрузке

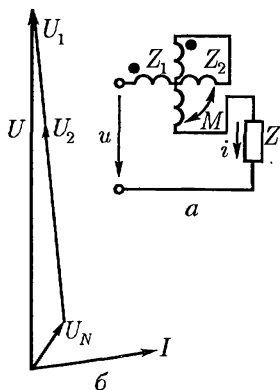


Рис. 16.7

$$\dot{U}_н = \dot{I} \underline{Z}_н = (0,127 - j0,827)(30 + j30) = 28,6 - j21.$$

Для построения векторной диаграммы (см. рис. 16.7, б) можно взять масштабы:  $M_i = 0,2 \text{ А/см}$ ,  $M_u = 20 \text{ В/см}$ .

**Задача 16.4.** По данным условия задачи 16.3 найти ток и напряжения на участках цепи рис. 16.7 при встречном включении катушек вариометра.

### 16.3. ТРАНСФОРМАТОР БЕЗ ФЕРРОМАГНИТНОГО СЕРДЕЧНИКА

Трансформаторы без ферромагнитного сердечника (воздушные) широко применяются в устройствах, работающих на высоких частотах, например в радиотехнике. Воздушный трансформатор состоит из двух индуктивно-связанных катушек (обмоток) (рис. 16.8), для которых справедливы положения предыдущего параграфа.

#### Векторная диаграмма воздушного трансформатора

Электрическая схема воздушного трансформатора не имеет особенностей: к первичной обмотке подведено напряжение  $U_1$  от некоторого источника энергии, а ко вторичной обмотке подключена нагрузка. Индуктивная связь обмоток характеризуется взаимоиндуктивностью  $M$ . Принятые на схеме рис. 16.8, а положительные направления токов и разметка одноименных зажимов показывают, что катушки включены встречно.

По второму закону Кирхгофа для контуров первичной и вторичной обмоток можно записать уравнения напряжений

$$\left. \begin{aligned} R_1 \dot{I}_1 + jX_{1L} \dot{I}_1 - jX_M \dot{I}_2 &= \dot{U}_1; \\ R_2 \dot{I}_2 + jX_{2L} \dot{I}_2 - jX_M \dot{I}_1 + jX_n \dot{I}_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

где  $R_1$ ,  $X_{1L}$ ;  $R_2$ ,  $X_{2L}$  и  $R_n$ ,  $X_n$  — сопротивления обмоток и нагрузки;  $X_M$  — взаимоиндуктивное сопротивление обмоток.

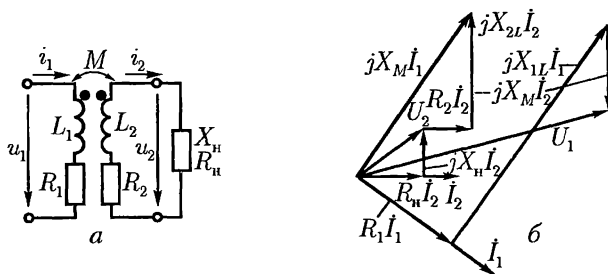


Рис. 16.8

Векторная диаграмма рис. 16.8, б построена согласно уравнениям (16.4), причем известным принят ток  $I_2$  и вектор этого тока отложен в произвольном направлении. Далее нанесены векторы падений напряжения в сопротивлениях вторичной обмотки  $R_n \dot{I}_2$ ;  $jX_n \dot{I}_2$  и  $R_2 \dot{I}_2$ ,  $jX_{2L} \dot{I}_2$ , сумма которых равна вектору  $jX_M \dot{I}_1$ .

Ток  $I_1$  определяют на основе векторной диаграммы: длина вектора  $jX_M \dot{I}_1$ , выраженная в вольтах, делится на сопротивление  $X_M$ . Вектор тока  $\dot{I}_1$  отложен перпендикулярно вектору  $jX_M \dot{I}_1$  с учетом отставания вектора тока.

Далее отложены векторы падений напряжения в первичной обмотке  $R_1 \dot{I}_1$ ,  $jX_{1L} \dot{I}_1$ ,  $-jX_M \dot{I}_2$ , сумма которых равна вектору первичного напряжения  $\dot{U}_1$ .

### Вносимые сопротивления

Из уравнений (16.4) можно выразить ток

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{(R_1 + R_{\text{вн}}) + j(X_{1L} + X_{\text{вн}})}, \quad (16.5)$$

где

$$R_{\text{вн}} = \frac{X_M^2 (X_{2L} + X_n)}{(R_2 + R_n)^2 + (X_{2L} + X_n)^2};$$

$$X_{\text{вн}} = \frac{X_M^2 (X_{2L} + X_n)}{(R_2 + R_n)^2 + (X_{2L} + X_n)^2}.$$

Величины  $R_{\text{вн}}$  и  $X_{\text{вн}}$  называются вносимыми сопротивлениями (вносят из второго контура в первый).

Из уравнения (16.5) видно, что воздушный трансформатор со стороны первичной обмотки может рассматриваться как двухполюсник с сопротивлениями  $R_1 + R_{\text{вн}}$  и  $X_{1L} + X_{\text{вн}}$ .

Условию передачи максимальной мощности из первого контура во второй соответствуют равенства  $R_{\text{вн}} = R_1$  и  $X_{1L} + X_{\text{вн}} = 0$ .

### Эквивалентная схема замещения воздушного трансформатора

Уравнения (16.4) перепишем в следующем виде:

$$R_1 \dot{I}_1 + j(X_{1L} - X_M) \dot{I}_1 + jX_M (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = \dot{U}_1;$$

$$R_2 \dot{I}_2 + j(X_{2L} - X_M) \dot{I}_2 - jX_M (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + \underline{Z}_n \dot{I}_2 = 0.$$

Этим уравнениям удовлетворяет схема без индуктивной связи (рис. 16.9).

Замена схемы трансформатора эквивалентной схемой без индуктивной связи позволяет анализировать его как обычную электрическую цепь, применяя общие методы расчета.

Рассмотрим случай, когда обмотки имеют одинаковое число витков:  $N_1 = N_2 = N$ . Разность сопротивлений такова:

$$\begin{aligned} X_{1L} - X_M &= \omega(L_1 - M) = \omega \left( \frac{\Psi_{11}}{I_1} - \frac{\Psi_{12}}{I_1} \right) = \\ &= \omega \left( \frac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} - \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \right) = \frac{\omega N}{I_1} (\Phi_{11} - \Phi_{12}) = \frac{\omega N}{I_1} \Phi_{1s}, \end{aligned}$$

где  $\Phi_{1s}$  — магнитный поток рассеяния первичной обмотки;  $\frac{N\Phi_{1s}}{I_1} = L_{1s}$  — индуктивность рассеяния первичной обмотки.

Следовательно,  $L_1 - M = L_{1s}$ ; аналогично,  $L_2 - M = L_{2s}$  — индуктивность рассеяния вторичной обмотки.

Намагничивающая сила обмоток является результатом действия той и другой обмоток, но вторичная обмотка, согласно правилу Ленца, действует против первичной, т. е.

$$\dot{F} = \dot{F}_1 - \dot{F}_2 = \dot{I}_1 N_1 - \dot{I}_2 N_2 = (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) N,$$

но  $\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \dot{I}_0$ , поэтому  $\dot{F} = \dot{I}_0 N$ .

Можно считать, что ветвь с током  $I_0$  создает намагничивающую силу трансформатора, поэтому она и называется намагничивающей ветвью.

Таким образом, в эквивалентной схеме замещения трансформатора индуктивные сопротивления обмоток обусловлены потокоцеплением рассеяния, а рабочим потоком является магнитный поток взаимоиндукции.

## Задачи

**Задача 16.5.** Определить напряжение на первичной обмотке воздушного трансформатора (см. рис. 16.8, а), если ток в ней  $I_1 = 15$  А,  $f = 50$  Гц.

Дано:  $R_1 = 2$  Ом,  $X_1 = 8$  Ом,  $R_2 = 3$  Ом,  $X_2 = 15$  Ом,  $M = 0,0318$  Гн,  $Z_n = (3 - j7)$  Ом.

**Задача 16.6.** Индуктивная связь между обмотками воздушного трансформатора характеризуется взаимоиндуктивностью  $M = 0,01$  мГн. В разомкнутой вторичной обмотке наводится ЭДС  $E_2 = 31,4$  В. Определить напряжение на зажимах первичной обмотки, сопротивление которой при частоте тока  $f = 50$  Гц выражается комплексом  $Z_1 = (6 + j8)$  Ом.

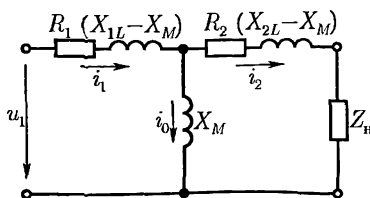


Рис. 16.9

## ГЛАВА 17

# РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Явление резонанса можно наблюдать в любых колебательных системах, в том числе механических и электрических. Электрический резонанс возникает при определенных условиях в электрических цепях переменного тока, содержащих индуктивности и емкости.

Изучение электрического резонанса необходимо, так как это явление широко используется в технике электросвязи, а в установках сильного тока, где его возникновение специально не предусматривается, резонанс может оказаться опасным (могут возникнуть перенапряжения и пробой изоляции).

### 17.1. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Для того чтобы понять резонансные явления, переходные процессы в электрических цепях переменного тока, которые рассматриваются далее, важно иметь представление о процессах в колебательном контуре, состоящем из идеальных катушки и конденсатора, т. е. в контуре без потерь.

Колебательный процесс в таком контуре заключается во взаимном преобразовании электрического и магнитного полей. При этом изменяется энергия полей, поэтому колебательный процесс в контуре с количественной стороны будем, как и раньше, характеризовать изменением энергии.

#### Ток и напряжение в колебательном контуре

Предположим, что конденсатор с емкостью  $C$  получил от источника запас энергии  $\frac{CU_m^2}{2}$  и переключен на катушку, как показано на

рис. 17.1, а (на этой схеме условно-положительные направления тока  $i$ , напряжения  $u_C$  и ЭДС  $e_L$  указаны стрелками). С этого момента процессы в цепи совершаются различно в течение четырех равных промежутков времени, составляющих вместе период времени  $T$  (рис. 17.1, е).

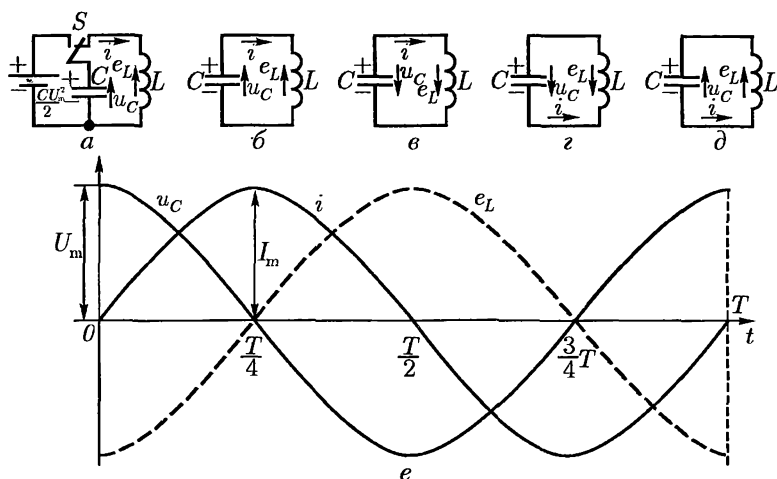


Рис. 17.1

В первую часть периода ( $0 - T/4$ ) конденсатор разряжается и в цепи существует ток. В это время в обособленной цепи конденсатор играет роль источника энергии (рис. 17.1, б). В начальный момент ток равен нулю, далее он увеличивается. Увеличение тока в цепи вызывает возникновение ЭДС самоиндукции  $e_L$  и накопление энергии в магнитном поле катушки. ЭДС самоиндукции уравнивает напряжение на конденсаторе:  $u_C = -e_L$ .

На рис. 17.1, б–д указаны истинные направления тока, напряжения и ЭДС для рассматриваемого отрезка времени.

Напряжение на конденсаторе в процессе разрядки уменьшается, поэтому вызываемый в цепи ток растет все медленнее, соответственно с этим уменьшается и ЭДС самоиндукции, которая пропорциональна скорости изменения тока. Таким образом, к концу разрядки конденсатора ( $u_C = 0$ ;  $i = I_m$ ;  $e_L = 0$ ) энергия электрического поля перешла в энергию магнитного поля и накопилась в количестве  $LI_m^2/2$ .

С этого момента ток начинает уменьшаться (но не прекращается), сохраняя свое направление. В следующую часть периода (от  $T/4$  до  $T/2$ ) направление тока сохраняется, потому что ЭДС самоиндукции при уменьшении тока меняет свой знак и роль источника энергии переходит к катушке. Уменьшающийся ток теперь является зарядным током конденсатора, заряжающегося в обратном направлении (рис. 17.1, в). Напряжение на конденсаторе увеличивается, уравнивая теперь ЭДС самоиндукции:  $e_L = -u_C$ .

При увеличении напряжения на конденсаторе его зарядный ток уменьшается все быстрее, в результате чего ЭДС  $e_L$  увеличивается.

Таким образом, к концу зарядки конденсатора напряжение на его обкладках достигает наибольшего значения, ЭДС самоиндукции тоже максимальна, а ток становится равным нулю. Энергия магнитного поля снова перешла в энергию электрического поля. С этого момента рост ЭДС самоиндукции прекращается и начинается ее уменьшение. Роль источника энергии снова переходит к конденсатору. Начинается третья часть периода (от  $T/2$  до  $3T/4$ ). В рассматриваемом процессе конденсатор второй раз становится источником энергии. Но по сравнению с первым он имеет обратную полярность, поэтому его разрядный ток изменяет направление и далее увеличивается. Снова энергия убывает в электрическом поле и накапливается в магнитном поле (рис. 17.1, з).

В момент времени  $t = 3T/4$  напряжение на конденсаторе и ЭДС самоиндукции становятся равными нулю, а ток — наибольшим. В последнем отрезке времени (от  $3T/4$  до  $T$ ) процесс протекает в том же порядке, что и во втором, но при обратном направлении тока (рис. 17.1, д).

В момент времени  $t = T$  конденсатор заряжен в том же направлении и тем же количеством энергии, как и при  $t = 0$ . Ток переходит через нуль к положительным значениям и далее увеличивается. Процесс повторяется в порядке, рассмотренном ранее.

## Характеристики колебательного контура

Энергетический процесс в колебательном контуре имеет периодический характер с периодом  $T$ . Колебания в электрической цепи, не связанной с источником энергии, называют **с в о б о д н ы м и** или **с в о б о д н ы м и**.

Этот процесс рассмотрен по графикам изменения тока  $i$ , напряжения  $u_C$  и ЭДС  $e_L$ , которые приняты синусоидальными функциями времени.

Для такого предположения имеется полное основание, так как эти величины взаимно связаны соотношением

$$u_C = u_L = L \frac{di}{dt}.$$

Вместе с тем ток в контуре пропорционален скорости изменения заряда конденсатора, причем он увеличивается, когда конденсатор разряжается. Следовательно,

$$i = -C \frac{du_C}{dt}.$$

Такая взаимная связь переменных величин говорит о синусоидальном законе изменения тока и напряжения, но при наличии сдвига фаз между ними на  $90^\circ$ , т. е. при

$$i = I_m \sin \omega_0 t,$$

$$u_C = U_m \sin(\omega_0 t + 90^\circ).$$

Это можно проверить:

$$u_C = L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_m \sin \omega_0 t)}{dt} = I_m L \omega_0 \cos \omega_0 t = U_m \sin(\omega_0 t + 90^\circ);$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = -C \frac{d[U_m \sin(\omega_0 t + 90^\circ)]}{dt} =$$

$$= -C \omega_0 U_m \cos(\omega_0 t + 90^\circ) = I_m \sin \omega_0 t.$$

Величину  $\omega_0$  в уравнениях тока и напряжения называют угловой частотой собственных колебаний в контуре. Найдём ее, используя равенство наибольшего количества энергии в конденсаторе и катушке:

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \quad (17.1)$$

и связь между амплитудами тока и напряжения

$$U_m = \omega_0 L I_m;$$

$$\frac{C \omega_0^2 L^2 I_m^2}{2} = L \frac{I_m^2}{2}.$$

Сокращая, получим

$$\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}. \quad (17.2)$$

Частота собственных колебаний

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (17.3)$$

Период собственных колебаний

$$T_0 = 1/f_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (17.4)$$

Из равенства (17.1) вытекает еще одно важное соотношение

$$I_m = U_m / \sqrt{L/C} = U_m / Z_B. \quad (17.5)$$

Величина, стоящая в знаменателе, имеет размерность сопротивления и называется волновым сопротивлением контура:

$$Z_B = \sqrt{L/C}. \quad (17.6)$$



## Колебательный контур с потерями энергии

Незатухающие колебания в контуре получаются в предположении, что потери энергии отсутствуют, т.е.  $R = 0$ .

Если активное сопротивление контура не равно нулю, то запас энергии в контуре сокращается (энергия превращается в теплоту), амплитуды тока и напряжения с каждым периодом убывают, как показано на рис. 17.2.

Более детальное исследование колебательного контура показывает, что частота собственных колебаний зависит от активного сопротивления:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (17.7)$$

При  $R = 0$  это выражение совпадает с (17.2).

При  $R \geq 2\sqrt{L/C}$  колебания в контуре не возникают, в чем нетрудно убедиться, подставив значение  $R$  в формулу (17.7). В этом случае процесс в контуре после подключения конденсатора к катушке является аperiодическим, напряжение на конденсаторе с максимальной величины постепенно падает до нуля, а ток сначала растёт, а потом тоже падает до нуля, не меняя знака (рис. 17.3).

### Задачи

**Задача 17.1.** Колебательный контур без потерь имеет частоту собственных колебаний  $f_0 = 2 \cdot 10^6$  Гц. Какая емкость включена в контур, если индуктивность его  $L = 0,25$  мГн? При каком наименьшем активном сопротивлении колебания в данном контуре не возникают?

**Задача 17.2.** Определить диапазон частот, в котором может работать радиоприемник, если индуктивность приемного контура  $0,32$  мГн, а емкость конденсатора может изменяться от  $31$  до  $260$  пФ.

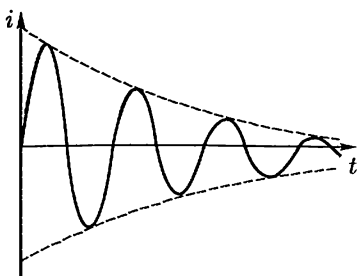


Рис. 17.2

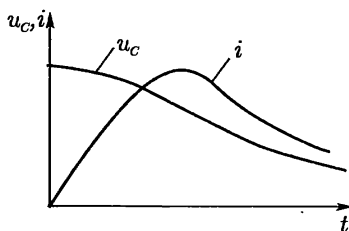


Рис. 17.3

## 17.2. РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ

При рассмотрении различных режимов электрических цепей в 14.1 был отмечен случай равенства реактивных сопротивлений  $X_L = X_C$  при последовательном соединении элементов, содержащих индуктивность и емкость.

В этом случае электрическая цепь находится в режиме резонанса напряжений, который характеризуется тем, что реактивная мощность цепи равна нулю, ток и напряжение совпадают по фазе.

### Условие возникновения резонанса

Резонанс напряжений возникает при определенной для данной цепи частоте источника энергии (частоте вынужденных колебаний), которую называют резонансной частотой  $\omega_p$ .

При резонансной частоте, как будет показано далее,  $X_L = X_C$ .

*Режим электрической цепи при последовательном соединении участков с индуктивностью и емкостью, характеризующийся равенством индуктивного и емкостного сопротивлений, называют резонансом напряжений.*

Резонанс напряжений рассмотрим сначала на схеме идеализированной цепи (рис. 17.4, а), в которой последовательно с резистором  $R$  включены идеальные (без потерь) катушка  $L$  и конденсатор  $C$ .

Реактивные сопротивления  $X_L$  и  $X_C$  (рис. 17.4, б) зависят от частоты вынужденных колебаний  $\omega$ :

$$X_L = \omega L; \quad X_C = 1/\omega C.$$

Приравнивая реактивные сопротивления и учитывая, что  $\omega = \omega_p$ , получим

$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C}.$$

Отсюда резонансная частота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}}; \quad f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (17.8)$$

В данном случае выражение для резонансной частоты совпадает с формулой (17.3) для частоты собственных колебаний в контуре без потерь.

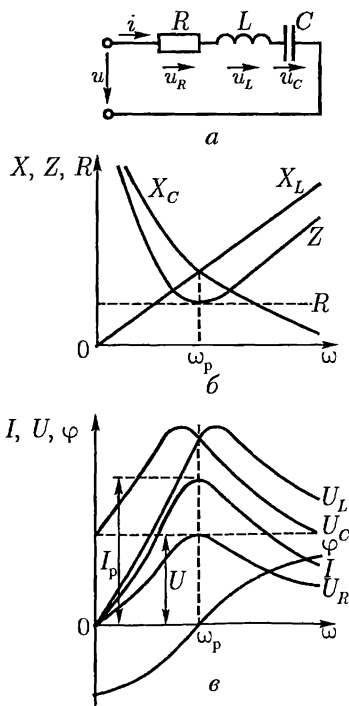


Рис. 17.4

Основные соотношения между величинами, характеризующими режим электрической цепи и энергетические процессы, рассмотрены в 14.1. Нужно отметить, что в неразветвленной цепи обмен энергией между катушкой и конденсатором совершается через источник энергии, который восполняет потери энергии в активных сопротивлениях.

## Резонансные кривые

Резонанс напряжений в цепи можно установить двумя путями: 1) изменением параметров  $L$  и  $C$  (одного из них или обоих вместе) при постоянной частоте источника или 2) изменением частоты источника энергии при постоянных  $L$  и  $C$ .

В связи с этим большой практический интерес представляют зависимости напряжений и токов на отдельных элементах цепи от частоты. Эти зависимости называют **резонансными кривыми** (рис. 17.4, в).

Реактивные сопротивления с изменением частоты меняются, как показано на рис. 17.4, б. При увеличении частоты  $X_L$  увеличивается пропорционально частоте, а  $X_C$  уменьшается по закону обратной пропорциональности.

Соответственно полное сопротивление  $Z$  цепи при резонансной частоте  $\omega_p$  оказывается наименьшим, равным активному сопротивлению  $R$ ; при частоте  $\omega < \omega_p$  полное сопротивление увеличивается с уменьшением частоты за счет роста  $X_C$ ; при частотах  $\omega > \omega_p$  полное сопротивление растет с увеличением частоты за счет роста  $X_L$ .

Такая зависимость полного сопротивления от частоты определяет характер изменения тока при постоянном напряжении в цепи (см. рис. 17.4, в). При  $\omega = 0$  ток равен нулю, далее с увеличением частоты ток увеличивается и при  $\omega = \omega_p$  достигает максимума  $I_p$ . Дальнейшее увеличение частоты ведет к постепенному уменьшению тока до нуля при  $\omega = \infty$ . Аналогично изменяется напряжение на активном сопротивлении  $U_R$ , которое пропорционально току:  $U_R = IR$ .

Напряжение на конденсаторе  $U_C$  при  $\omega = 0$  равно напряжению на зажимах источника  $U$ , так как сопротивление конденсатора  $X_C = \infty$ , что соответствует разрыву цепи на его зажимах. С ростом частоты  $U_C$  увеличивается, достигая наибольшей величины при частоте, несколько меньшей резонансной, и далее уменьшается до нуля при  $\omega = \infty$ .

Индуктивное напряжение  $U_L = 0$  при частоте  $\omega = 0$ , так как сопротивление  $X_L = 0$ . Увеличение частоты ведет к увеличению  $U_L$ , которое при частоте, несколько большей резонансной, достигает максимума, а затем уменьшается до величины напряжения источ-

ника при  $\omega = \infty$ , когда сопротивление  $X_L = \infty$ , что соответствует разрыву цепи на зажимах катушки.

При частотах, меньших резонансной, реактивное сопротивление цепи имеет емкостный характер (отрицательно), поэтому и угол сдвига фаз в цепи отрицательный. Уменьшаясь с ростом частоты, он становится равным нулю при резонансе ( $\varphi_p = 0$ ), а затем меняет знак и увеличивается при дальнейшем увеличении частоты.

## Добротность контура

При резонансе напряжений отношение напряжения на индуктивности или емкости к напряжению, приложенному к цепи (напряжению источника), равно отношению волнового сопротивления к активному. Действительно, при резонансе сопротивления реактивных элементов

$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_B.$$

Поэтому

$$U_L = U_C = I Z_B = \frac{U}{R} Z_B; \quad U_C/U = U_L/U = Z_B/R.$$

Из этого выражения следует, что при  $Z_B > R$  напряжение на реактивных элементах больше напряжения источника.

Такое превышение может оказаться значительным, если реактивные сопротивления много больше активного и изоляция катушки или конденсатора может быть пробита. На практике подобный случай возможен, если на конце кабельной линии включается приемник, обладающий индуктивностью.

В радиотехнике качество резонансного контура считается тем выше, чем больше отношение  $Z_B/R$ , называемое добротностью контура  $Q$ :

$$Q = \frac{Z_B}{R} = \frac{\sqrt{L}}{R} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{\omega_p C R}. \quad (17.9)$$

Чем меньше мощность потерь энергии в контуре (этому соответствует меньшее значение  $R$ ), тем больше добротность контура.

Большемому значению добротности соответствуют больший ток  $I_p$  при резонансе и более острая резонансная кривая.

На рис. 17.5 показаны две резонансные кривые тока, построенные в относительных единицах при двух значениях добротности. По горизонтальной оси отложены отношения изменяющейся частоты источника энергии к резонансной частоте  $\omega/\omega_p$ , а по вертикаль-

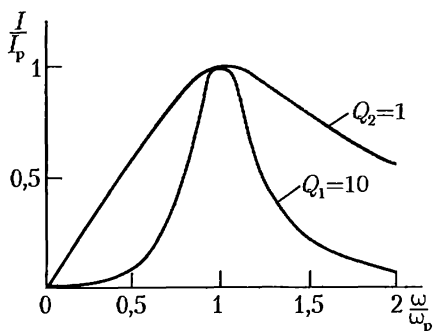


Рис. 17.5

ной — отношения тока при данной частоте к току при резонансной частоте  $I/I_p$ .

Все рассуждения о резонансе напряжений в идеализированной цепи можно распространить и на цепи, содержащие последовательно соединенные катушку и конденсатор с потерями. Как известно, реальные катушки и конденсатор могут быть представлены схемами последовательного со-

единения активного и реактивного сопротивлений (см. рис. 14.1). Активные сопротивления катушки и конденсатора можно рассматривать как часть общего активного сопротивления цепи  $R$ , тогда схема на рис. 17.4, а будет пригодна и в этом случае.

## Задачи

**Задача 17.3.** В сеть переменного тока последовательно включены резистор и конденсатор. Напряжение в цепи выражается уравнением; ток  $i = 5,64 \sin(\omega t - 30^\circ)$ .

Определить индуктивность катушки, которую можно включить в цепь, чтобы при частоте  $f = 200$  Гц возник резонанс напряжений, а также напряжение на конденсаторе до и после включения катушки.

**Задача 17.4.** В цепи, состоящей из катушки  $R$ ,  $L$  и конденсатора без потерь, при резонансе напряжение на катушке 125 В, напряжение на конденсаторе 110 В. Определить напряжение на зажимах всей цепи.

## 17.3. РЕЗОНАНС ТОКОВ

При рассмотрении параллельного соединения катушки и конденсатора (см. 14.3) был отмечен случай равенства активной и реактивной проводимостей  $B_L = B_C$  элементов, содержащих индуктивность и емкость.

В этом случае электрическая цепь находится в режиме резонанса токов, который характеризуется тем, что реактивная мощность цепи равна нулю, ток и напряжение совпадают по фазе ( $\varphi = 0$ ).

### Условия возникновения резонанса

Так же как и резонанс напряжений, резонанс токов возникает, когда частота источника энергии равна резонансной частоте  $\omega_p$ , а  $B_L = B_C$ .

Режим электрической цепи при параллельном соединении участков с индуктивностью и емкостью, характеризующийся равенством индуктивной и емкостной проводимостей, называют резонансом токов.

Сначала рассмотрим этот режим для схемы идеализированной цепи (рис. 17.6, а). В этой схеме параллельно резистору  $R$  включены идеальные катушки  $L$  и конденсатор  $C$ , потери энергии в которых не учитываются.

Реактивные проводимости зависят от частоты вынужденных колебаний. Для рассматриваемой схемы:

активная проводимость

$$G = 1/R;$$

реактивные проводимости

$$B_L = \frac{1}{\omega L}; \quad B_C = \omega C.$$

При резонансе токов

$$B_L = B_C; \quad \omega = \omega_p; \quad \frac{1}{\omega_p L} = \omega_p C.$$

Отсюда определяют резонансную частоту

$$\omega_p = 1/\sqrt{LC}.$$

Выражение для резонансной частоты в данном случае такое же, какое было получено при рассмотрении резонанса напряжений [см. формулу (17.8)] и для частот собственных колебаний в контуре без потерь.

Резонанс токов, так же как и резонанс напряжений, можно получить изменением параметров  $L$  и  $C$  или изменением частоты источника энергии.

## Резонансные кривые

На рис. 17.6, б показаны зависимости проводимостей от частоты. Полная проводимость цепи  $Y$  при резонансной частоте  $\omega_p$  оказывается наименьшей, равной активной проводимости  $G$ . При измене-

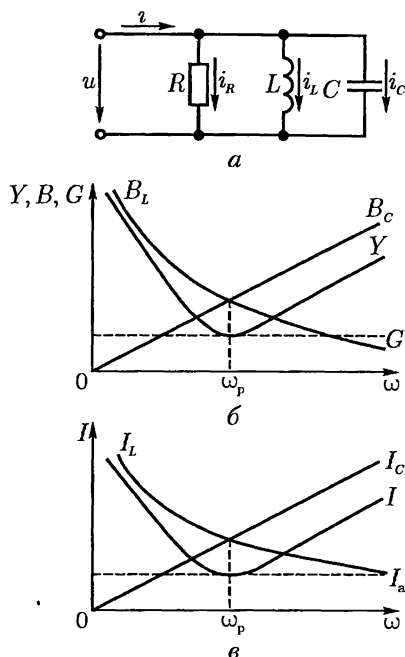


Рис. 17.6

нии частоты в обе стороны от резонансной полная проводимость увеличивается.

При заданном напряжении источника энергии ток в цепи пропорционален проводимости (рис. 17.6, в):  $I = UY$ , поэтому кривая  $I(\omega)$  по форме повторяет кривую  $Y(\omega)$ . Состояние резонанса токов характеризуется наименьшей величиной тока в цепи и равенством нулю угла сдвига фаз между напряжением и током ( $\varphi_p = 0$ ).

При резонансе токов отношение тока индуктивного или емкостного к току в неразветвленной части цепи равно отношению волновой проводимости  $Y_B = 1/Z_B = \sqrt{C/L}$  к активной проводимости цепи  $G$ .

Реактивные проводимости при резонансе

$$\omega_p C = \frac{1}{\omega_p L} = \frac{C}{\sqrt{LC}} = \sqrt{C/L} = Y_B.$$

Поэтому

$$I_L = I_C = UY_B = \frac{1}{G} Y_B, \quad I_L/I = I_C/I = Y_B/G.$$

### Добротность контура

При параллельном соединении элементов качество резонансной цепи считается тем выше, чем больше отношение  $Y_B/G$ , которое и в этом случае называется добротностью

$$Q = Y/G = \frac{\sqrt{C/L}}{G} = \frac{R}{\omega_p L} = \omega_p CR. \quad (17.10)$$

Чем меньше потери энергии в цепи (этому соответствует большая величина  $R$ ), тем больше добротность.

Параметры реальных катушек и конденсаторов ( $R, L, C$ ) измеряются и задаются в справочниках применительно к их схемам замещения с последовательным соединением активных и реактивных элементов (см. рис. 14.11, б).

Условие резонанса токов — равенство реактивных проводимостей обеих ветвей  $B_1 = B_2$  — остается справедливым, и в этом случае

$$B_1 = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}; \quad B_2 = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — активные сопротивления катушки и конденсатора с потерями.

Приравнивая реактивные проводимости, получим исходное уравнение для определения резонансной частоты:

$$\frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2},$$

или

$$\frac{\omega_p L}{R_1^2 + (\omega_p L)^2} = \frac{\frac{1}{\omega_p C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_p C}\right)^2},$$

откуда

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}. \quad (17.11)$$

Из этого выражения видно, что резонансная частота зависит от активных сопротивлений катушки и конденсатора. Если потери энергии в катушке и конденсаторе малы ( $R_1$  и  $R_2$  малы) и ими можно пренебречь, для резонансной частоты получается выражение, найденное ранее для идеализированной цепи.

### Задачи

**Задача 17.5.** Параллельно катушке с активным сопротивлением  $R = 4$  Ом и индуктивностью  $L = 0,01$  Гн присоединен конденсатор. В контуре возник резонанс при частоте  $f = 150$  Гц. Определить емкость конденсатора и общий ток в цепи при резонансе, если напряжение на ее зажимах  $U = 100$  В.

**Задача 17.6.** Определить резонансную частоту и добротность параллельного контура, состоящего из катушки  $R = 160$  Ом,  $L = 4$  мГн и конденсатора  $C = 0,1$  мкФ.

## 17.4. КОМПЕНСАЦИЯ РЕАКТИВНОЙ МОЩНОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ С ПОМОЩЬЮ КОНДЕНСАТОРОВ

В гл. 14 было отмечено, что в электрической цепи переменного тока, в которой имеются катушка индуктивности и конденсатор, включенные последовательно или параллельно, общая реактивная мощность цепи всегда меньше, чем реактивная мощность каждого из элементов.



Благодаря взаимному обмену энергией между катушкой и конденсатором (см. 14.1, 14.3 и рис. 14.5) источник частично или полностью освобождается от поставки реактивной энергии в цепь.

В этом случае говорят о компенсации реактивной мощности катушки реактивной мощностью конденсатора и наоборот (реактивные мощности  $Q_L$  и  $Q_C$  имеют противоположные знаки). Полная компенсация реактивной мощности имеет место при резонансе.

Компенсация реактивной мощности в электрических сетях имеет большое технико-экономическое значение. Далее кратко рассмотрены общие сведения по этому вопросу и принцип применения конденсаторов для компенсации реактивной мощности.

## Реактивная мощность электрических установок

Энергетический процесс в катушке индуктивности, включенной в цепь переменного тока, характеризуется активной мощностью  $P = UI \cos \varphi$  и реактивной мощностью  $Q = UI \sin \varphi$ .

В электрической схеме замещения такая катушка представлена активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  или активной проводимостью  $G$  и реактивной проводимостью  $Y$ .

В этом отношении катушке индуктивности подобны многочисленные устройства переменного тока: асинхронные двигатели, индукционные нагревательные установки, трансформаторы, воздушные линии и др.

Получая от генераторов электрическую энергию, эти устройства передают или преобразуют ее в другие виды энергии (активная мощность  $P$ ), т. е. выполняют те функции, для которых созданы.

Одновременно они обмениваются энергией с источниками (реактивная мощность  $Q$ ), что является процессом хотя и нежелательным, но неизбежным, так как без магнитного поля и периодического накопления энергии в нем перечисленные устройства работать не могут.

Если реактивная мощность устройства не равна нулю, то отношение  $Q/P = \operatorname{tg} \varphi \neq 0$ , а коэффициент мощности  $\cos \varphi < 1$ .

На каждом предприятии одновременно работают электродвигатели (их может быть десятки и сотни), трансформаторы и другие устройства. Чем больше их число и чем меньше их коэффициент мощности, тем больше общая реактивная мощность электрооборудования производственного участка, цеха, всего предприятия.

Величина общей реактивной мощности электрической установки или электрооборудования предприятия в целом зависит еще и от правильного выбора, степени загрузки электродвигателей, трансформаторов, от соблюдения правил эксплуатации электрооборудования.

Далее будет показано, что за счет реактивной мощности потребителей электрический ток в сетях оказывается больше, чем требуется по величине активной нагрузки. С этим связана одна из проблем проектирования и эксплуатации электрических сетей. При передаче электрической энергии, особенно на большие расстояния, из-за наличия индуктивных и емкостных сопротивлений в элементах сети переменного тока возникает также проблема поддержания заданного уровня напряжения на всех приемниках.

Для обеспечения оптимального значения тока и требуемых значений напряжения в сети необходимо иметь оптимальный баланс реактивных мощностей (индуктивной и емкостной).

### **Влияние величины реактивной мощности на технико-экономические показатели электроустановок**

Для выяснения влияния величины реактивной мощности на экономические показатели электротехнических установок рассмотрим приемник энергии (например, асинхронный электродвигатель), работающий с постоянной активной мощностью при постоянном напряжении в сети.

Ток в приемнике, а следовательно, и в проводах, соединяющих его с источником энергии, при этих условиях зависит от величины реактивной мощности  $Q$ :

$$I = \frac{S}{U} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{U}. \quad (17.12)$$

Чем больше реактивная мощность приемника, тем больший ток должен быть в самом приемнике, в генераторе, соединительных проводах, трансформаторе и других элементах сети электроснабжения.

Мощность тепловых потерь, согласно закону Ленца—Джоуля, пропорциональна квадрату тока и сопротивлению проводов:

$$\Delta P = I^2 R.$$

Очевидно, чем больше ток приемника, тем больше потери энергии во всех элементах электрической цепи.

Стоимость потерянной энергии входит в эксплуатационные расходы. Уменьшение реактивной мощности приемников ведет к уменьшению их токов, сокращению потерь энергии и эксплуатационных расходов.

Если электрическая установка спроектирована с относительно большей величиной реактивной мощности, то оборудование (коммутационная аппаратура, приборы контроля и т. д.) и провода необ-

ходимо выбрать на большие токи, чем при меньшей величине реактивной мощности.

Это значит, что оборудование должно быть установлено относительно больших размеров, а провода — большего сечения. Последнее повлечет за собой увеличение объема зданий, утяжеление фундаментов и опор и т. п.

Уменьшение реактивной мощности приемников энергии сокращает капитальные затраты.

Генераторы электрической энергии и трансформаторы характеризуются номинальной мощностью — произведением номинальных величин напряжения и тока:  $S_{\text{ном}} = U_{\text{ном}} I_{\text{ном}}$

Наиболее полное использование генераторов и трансформаторов соответствует режиму работы с номинальным током при номинальном напряжении (особые случаи, когда допускается некоторая перегрузка оборудования при эксплуатации, здесь не учитываются).

Величина активной мощности генератора равна активной мощности питающихся от него приемников.

Если реактивная мощность приемников равна нулю, то генератор может развивать активную мощность, равную его номинальной мощности, т. е. основная функция генератора — преобразование энергии — может быть выполнена наиболее полно, а первичный двигатель (например, турбина), также рассчитанный на номинальную мощность, будет работать с полной нагрузкой.

При наличии у приемников реактивной мощности активная мощность генератора меньше номинальной, хотя он работает при номинальных напряжении и токе. Таким образом, генератор и первичный двигатель по мощности недогружены, что приводит к снижению их коэффициента полезного действия.

## Компенсация реактивной мощности

Из приведенных рассуждений следует, что реактивную мощность установок, потребляющих электрическую энергию, надо по возможности сокращать.

На практике это достигается путем правильного выбора мощности электродвигателей переменного тока и трансформаторов, рациональной эксплуатации их без недогрузки и работы вхолостую. Эти и некоторые другие меры уменьшения реактивной мощности, связанные с выбором и эксплуатацией электрооборудования, называют естественными.

В тех случаях, когда естественные меры не могут обеспечить оптимальной величины реактивной мощности установки, принимают искусственные меры для ее компенсации.

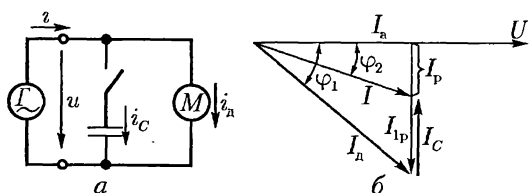


Рис. 17.7

Одной из таких мер является включение параллельно к приемникам батареи конденсаторов.

Для определения мощности и емкости батареи конденсаторов должны быть известны: напряжение сети  $U$ , реактивная мощность установки до ( $Q_1$ ) и после ( $Q_2$ ) компенсации.

Можно установить батарею конденсаторов мощностью  $Q_C = Q_1$ , тогда  $Q_2 = 0$ . Полная компенсация реактивной мощности освобождает сеть от реактивного тока.

Однако технико-экономические расчеты показывают, что полная компенсация в большинстве случаев не является оптимальным решением вопроса, так как компенсационное устройство оказывается более сложным и дорогим, чем при некоторой оптимальной величине реактивной мощности  $Q_2$ , которую определяют на основе технико-экономического сопоставления вариантов\*.

Мощность батареи конденсаторов

$$Q_C = Q_1 - Q_2,$$

емкость

$$C = \frac{Q_C}{\omega U^2}. \quad (17.13)$$

Сущность компенсации реактивной мощности с помощью конденсаторов видна из векторной диаграммы (рис. 17.7, б), построенной для схемы (рис. 17.7, а), на которой параллельно приемнику, например асинхронному двигателю (группе двигателей), может быть включена конденсаторная батарея. До включения конденсаторов ток в подводящих проводах  $I_n$  отстает по фазе от напряжения на угол  $\varphi_1$ . После включения батарей реактивная составляющая  $I_{rp}$  тока двигателя частично компенсируется емкостным током  $I_C$ , в связи с чем ток в подводящих проводах уменьшается до  $I$ , а угол сдвига фаз — до  $\varphi_2$  (в обменном энергетическом процессе между генератором и приемником участвует меньшее количество электромагнитной энергии).

\* Определение оптимальной величины  $Q_2$ , выбор вида компенсирующего устройства и места его установки в сети рассматриваются в специальных курсах.

Активная составляющая тока в проводах не изменяется, следовательно, по активной мощности режим цепи остается прежним:

$$I \cos \varphi_2 = I_d \cos \varphi_1.$$

Ток батареи конденсаторов имеет значение:

$$I_C = I_d \sin \varphi_1 - I \sin \varphi_2;$$

$$I_d = \frac{P}{U \cos \varphi_1}; \quad I = \frac{P}{U \cos \varphi_2},$$

где  $P$  — активная мощность приемника (в данном случае двигателя);

$$I_C = \frac{P}{U} \left( \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} - \frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_2} \right) = \frac{P}{U} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2).$$

Емкость батареи конденсаторов

$$C = \frac{I_C}{\omega U},$$

мощность

$$Q = UI_C.$$

Нетрудно заметить, что мощность конденсаторов можно найти, не подсчитывая тока  $I_C$ :

$$Q_C = P(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2). \quad (17.14)$$

### Задачи

**Задача 17.7.** К трансформатору номинальной мощностью  $S_{\text{ном}} = 100$  к·А и номинальным напряжением 220 В подключена группа электродвигателей, общая активная мощность которых  $P = 60$  кВт,  $\cos \varphi_1 = 0,6$  при частоте  $f = 50$  Гц (рис. 17.8, а). Если параллельно группе двигателей включить батарею конденсаторов, реактивная мощность установки (двигатели — батарея конденсаторов) уменьшится и соответственно уменьшится нагрузка трансформатора.

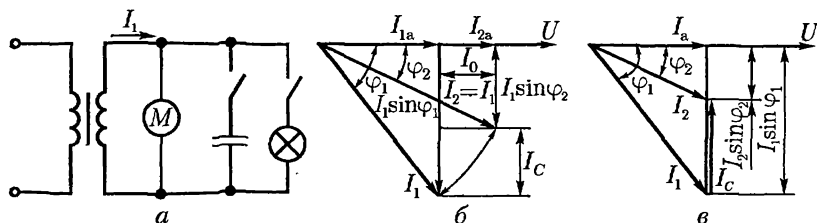


Рис. 17.8

Определить емкость и мощность батареи конденсаторов и дополнительную осветительную нагрузку, которые нужно подключить к трансформатору так, чтобы реактивная мощность установки уменьшилась до величины, при которой коэффициент мощности  $\cos \varphi_2 = 0,9$  при полной загрузке трансформатора.

Определить емкость и мощность батареи конденсаторов в том случае, когда  $\cos \varphi_2 = 0,9$  при отсутствии дополнительной осветительной нагрузки.

**Решение.** 1. В первоначальном режиме трансформатор был загружен до номинальной мощности

$$S = \frac{P_1}{\cos \varphi_1} = 60/0,6 = 100 \text{ кВ} \cdot \text{А} = S_{\text{ном}}.$$

Дополнительную осветительную нагрузку можно присоединить только за счет разгрузки трансформатора от части реактивной мощности путем включения батареи конденсаторов.

Согласно условию задачи, трансформатор после компенсации части реактивной мощности остается полностью загруженным, следовательно, при неизменном напряжении ток трансформатора должен остаться прежним:  $I_1 = I_2$ .

Из векторной диаграммы (рис. 17.8, б) следует выражение для тока конденсатора

$$I_C = I_1 \sin \varphi_1 - I_2 \sin \varphi_2 = I_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2);$$

$$\text{при } \cos \varphi_1 = 0,6 \quad \sin \varphi_1 = 0,8;$$

$$\text{при } \cos \varphi_2 = 0,9 \quad \sin \varphi_2 = 0,436.$$

Ток установки до компенсации реактивной мощности

$$I_1 = \frac{P_1}{U \cos \varphi_1} = \frac{60000}{220 \cdot 0,6} = 455 \text{ А}.$$

Ток батареи конденсаторов

$$I_C = 455 (0,8 - 0,436) = 165 \text{ А}.$$

Емкость батареи конденсаторов

$$C = \frac{I_C}{U \omega} = \frac{165 \cdot 10^6}{220 \cdot 314} = 2380 \text{ мкФ}.$$

Мощность батареи конденсаторов

$$Q_C = U^2 \omega C = 220^2 \cdot 314 \cdot 2380 \cdot 10^{-6} = 36220 \text{ вар} = 36,2 \text{ квар}.$$

Активный ток дополнительной осветительной нагрузки

$$I_o = I_{2a} - I_{1a} = I_2 \cos \varphi_2 - I_1 \cos \varphi_1 = 455(0,9 - 0,6) = 136 \text{ А}.$$

Мощность осветительной нагрузки

$$P_{\infty} = UI_{\infty} = 220 \cdot 136 = 30\,000 \text{ Вт} = 30 \text{ кВт.}$$

2. При отсутствии дополнительной осветительной нагрузки необходимый ток в батарее конденсаторов (рис. 17.8, в)

$$I_C = I_a \operatorname{tg} \varphi_1 - I_a \operatorname{tg} \varphi_2 = I_a (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2);$$

$$I_C = 272 \left( \frac{0,8}{0,6} - \frac{0,436}{0,9} \right) = 230 \text{ А.}$$

Емкость батареи конденсаторов

$$C = \frac{I_C}{U\omega} = \frac{230 \cdot 10^6}{220 \cdot 314} = 3330 \text{ мкФ.}$$

Мощность батареи конденсаторов

$$Q_C = U^2 \omega C = 220^2 \cdot 314 \cdot 3330 \cdot 10^{-6} = 50\,600 \text{ вар} = 50,6 \text{ квар.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Определить коэффициент мощности установки при отключении дополнительной осветительной нагрузки, если емкость батареи конденсаторов остается такой, какой она определена в варианте 1 задачи.

2. Какую номинальную мощность должен иметь трансформатор, чтобы при отсутствии батареи конденсаторов можно было достичь величины  $\cos \varphi = 0,9$  за счет включения дополнительной осветительной нагрузки? Какова величина этой дополнительной нагрузки?

3. Какую номинальную мощность должен иметь трансформатор, чтобы при отсутствии батареи конденсаторов можно было включить дополнительную осветительную нагрузку, подсчитанную при решении задачи? Какова при этом величина коэффициента мощности установки?

## ГЛАВА 18

# ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ТОКАХ И НАПРЯЖЕНИЯХ

Нередко возникает задача исследовать изменение режима одной ветви сложной электрической цепи при изменении электрических характеристик в другой ветви.

Решение такой задачи облегчается с помощью понятия о четырехполюснике, так как в анализе рассматриваются только две ветви, а режим остальной части цепи может оставаться неизвестным.

Такой метод применяется при исследовании линий электропередачи, трансформаторов, электрических машин, усилителей и др.

### 18.1. УРАВНЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Каждая из двух ветвей электрической цепи, которые предполагается рассмотреть во взаимосвязи, присоединены к остальной части цепи двумя зажимами или, как еще говорят, в двух полюсах (рис. 18.1, а).

Часть электрической цепи, имеющая две пары зажимов, одна из которых является входной, а другая — выходной, называется четырехполюсником.

Внутреннее содержание и схемы четырехполюсников могут быть разнообразны. Задача состоит в том, чтобы написать общие выражения, пригодные для любого четырехполюсника.

### Постановка задачи

Четырехполюсник, имеющий в своих ветвях источники электрической энергии, называется **активным**, а четырехполюсник, не имеющий в своих ветвях источников энергии, — **пассивным**.

Режим работы четырехполюсника относительно двух ветвей, которые присоединяются к его зажимам, вполне определен, если известны напряжения и токи на входе и выходе:  $u_1, u_2, i_1, i_2$ .

Задача ставится так: из четырех величин, определяющих режим четырехполюсника, две величины заданы; их можно рассматривать как заданные воздействия на цепь. Необходимо найти две другие величины, которые являются откликами на эти воздействия.



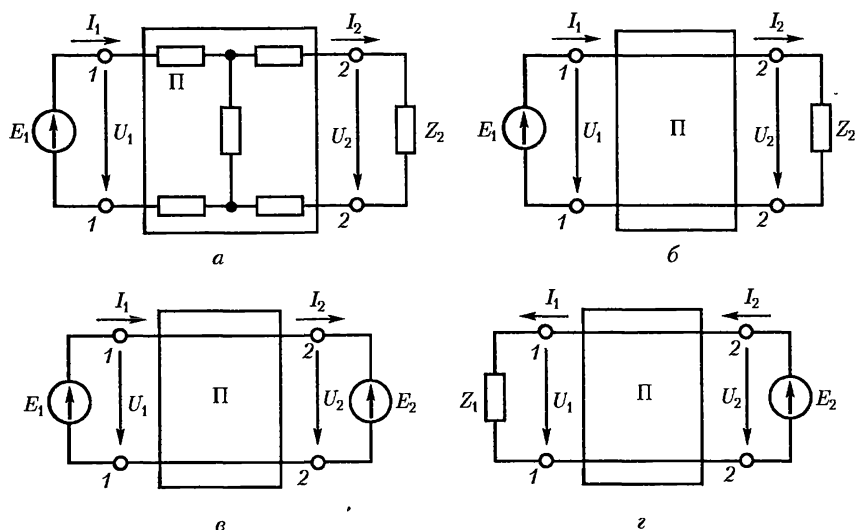


Рис. 18.1

На практике чаще приходится рассматривать схемы, в которых одна из ветвей, присоединенных к четырехполюснику, содержит источник энергии, а другая — приемник.

Зажимы, к которым присоединяется ветвь с источником, будем считать входными, а зажимы, к которым присоединяется приемник, — выходными.

Входными зажимами может быть любая пара зажимов — первичная 1-1 или вторичная 2-2 (рис. 18.1, б).

### Основные уравнения четырехполюсника

Обозначим комплексы напряжения и тока со стороны первичных зажимов  $\dot{U}_1, \dot{I}_1$ , со стороны вторичных зажимов —  $\dot{U}_2, \dot{I}_2$ ,  $\dot{U}_1 = \dot{E}_1$ ,  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \dot{Z}_2$ .

В режиме четырехполюсника ничего не изменится, если вместо приемника  $\dot{Z}_2$  ко вторичным зажимам присоединить источник, ЭДС которого  $\dot{E}_2 = -\dot{U}_2$  (рис. 18.1, в).

После такой замены можно применить метод наложения для нахождения зависимости между входными и выходными напряжениями и токами.

При коротком замыкании зажимов 2-2 (источник  $E_2$  исключен) частные токи в схеме вызывает ЭДС  $E_1$ . Токи пропорциональны напряжению  $U_1$ :

$$\dot{I}'_1 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_1; \quad \dot{I}'_2 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_1.$$

При наличии источника  $E_2$  и коротком замыкании зажимов 1-1 токи пропорциональны  $U_2$ :

$$\dot{I}_1'' = -\underline{Y}_{12}\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2'' = -\underline{Y}_{22}\dot{U}_2.$$

Коэффициенты пропорциональности имеют размерность проводимости:  $\underline{Y}_{11}$ ,  $\underline{Y}_{22}$  — входные проводимости;  $\underline{Y}_{21}$ ,  $\underline{Y}_{12}$  — взаимные проводимости.

В соответствии с принципом взаимности взаимные проводимости равны между собой:  $\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}$ .

Применяя принцип наложения токов, находим

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' + \dot{I}_1'', \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2'',$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 - \underline{Y}_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 - \underline{Y}_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

Из этих уравнений можно получить другие уравнения, в которых заданными можно считать напряжение и ток на выходе четырехполюсника, а искомыми — напряжение и ток на входе. Для этого систему (18.1) надо решить относительно  $\dot{U}_1, \dot{I}_1$ :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2. \end{aligned}} \quad (18.2)$$

В этих уравнениях комплексы  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$  называются коэффициентами или параметрами четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= \underline{Y}_{22}/\underline{Y}_{21}; \quad \underline{B} = 1/\underline{Y}_{21}; \\ \underline{C} &= \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}}; \quad \underline{D} = \underline{Y}_{11}/\underline{Y}_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (18.3)$$

Уравнения в форме (18.2) удобно применять в тех случаях, когда четырехполюсник выполняет роль передаточного звена между источником и приемником энергии.

### Свойства четырехполюсников

Между коэффициентами четырехполюсника имеется такая связь:

$$\boxed{\underline{AD} - \underline{BC} = 1.} \quad (18.4)$$

Это нетрудно доказать, если в формулу (18.4) подставить выражения (18.3).

Если поменять местами входные и выходные зажимы (рис. 18.1, з), то уравнения вида (18.1) можно записать, поменяв индексы при всех величинах:

$$\dot{I}_2 = \underline{Y}_{22}\dot{U}_2 - \underline{Y}_{21}\dot{U}_1;$$

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{12}\dot{U}_2 - \underline{Y}_{11}\dot{U}_1.$$

Решение этих уравнений относительно  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  дает

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \underline{D}\dot{U}_1 + \underline{B}\dot{I}_1; \\ \dot{I}_2 = \underline{C}\dot{U}_1 + \underline{A}\dot{I}_1. \end{cases} \quad (18.5)$$

Сопоставление (18.5) и (18.2) показывает, что при перемене местами входных и выходных зажимов в уравнениях четырехполюсника меняются местами коэффициенты  $\underline{A}$  и  $\underline{D}$ .

Отсюда следует, что при равенстве коэффициентов  $\underline{A}$  и  $\underline{D}$  четырехполюсник имеет одинаковую цепь со стороны той и другой пары зажимов. Такой четырехполюсник называется симметричным.

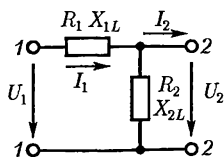
## Задачи

**Задача 18.1.** Определить коэффициенты  $A, B, C, D$  четырехполюсника, схема которого показана на рис. 18.2, а. Параметры схемы:  $R_1 = 20$  Ом,  $X_{1L} = 30$  Ом,  $R_2 = 5$  Ом,  $X_{2L} = 15$  Ом.

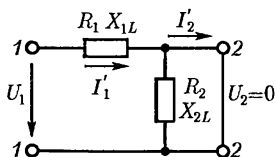
**Решение.** Для решения задачи воспользуемся методом наложения для определения входных и взаимных проводимостей со стороны первичных зажимов при коротком замыкании на выходе и со стороны вторичных зажимов при коротком замыкании на входе (рис. 18.2, в):

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\dot{I}'_1}{\dot{U}_1} = \frac{1}{R_1 + jX_{1L}} = \frac{1}{20 + j30};$$

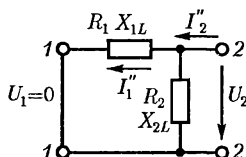
$$\underline{Y}_{2,1} = \dot{I}'_2 / \dot{U}_1 = \dot{i}'_1 / \dot{U}_1;$$



а



б



в

Рис. 18.2

так как  $I'_2 = I'_1$ , что видно из схемы рис. 18.2, б:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{2,1} &= \underline{Y}_{1,2} = \frac{1}{R_1 + jX_{1L}} = \frac{1}{20 + j30}; \\ \underline{Y}_{2,2} &= -\frac{I''_2}{\dot{U}_2} = \frac{1}{R_1 + jX_{1L}} + \frac{1}{R_2 + jX_{2L}}; \\ \underline{Y}_{2,2} &= \frac{1}{20 + j30} + \frac{1}{5 + j15} = \frac{5 + j9}{-70 + j90}; \\ A &= \frac{\underline{Y}_{2,2}}{\underline{Y}_{2,1}} = \frac{5 + j9}{-70 + j90}(20 + j30) = 3,2 - j0,6 = 3,26e^{-j10^\circ 37'}.\end{aligned}$$

По формулам (18.3) определить другие коэффициенты четырехполюсника.

**Задача 18.2.** Вычислить коэффициенты  $A, B, C, D$  четырехполюсника, схема которого показана на рис. 18.3. Дано:  $R_1 = 1000$  Ом,  $X_1 = 2000$  Ом,  $R_2 = 1000$  Ом,  $X_2 = 2500$  Ом.

## 18.2. РЕЖИМЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Для практики наибольший интерес представляет нагрузочный режим четырехполюсника. Однако раньше рассмотрим режимы холостого хода и короткого замыкания на выходе четырехполюсника, которые используются, в частности, для определения его параметров.

### Холостой ход и короткое замыкание

В режиме холостого хода на выходе четырехполюсника (рис. 18.4, а)  $\dot{I}_2 = 0$ ;  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2x}$ . При коротком замыкании вторичных зажимов (рис. 18.4, б)  $\dot{U}_2 = 0$ ;  $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2к}$ .

Из уравнений (18.2) следует

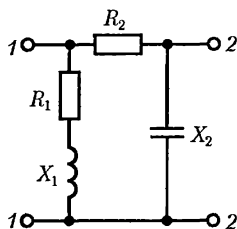


Рис. 18.3

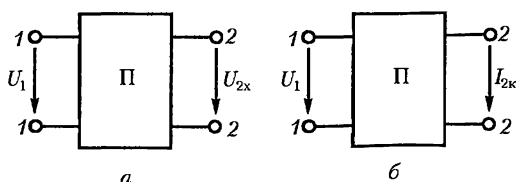


Рис. 18.4

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1x} &= \underline{A} \dot{U}_{2x}; & \dot{I}_{1x} &= \underline{C} \dot{U}_{2x}; \\ \dot{U}_{1k} &= \underline{B} \dot{I}_{2k}; & \dot{I}_{1k} &= \underline{D} \dot{I}_{2k}. \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

Из этих выражений предоставляется возможным выразить параметры четырехполюсника:

$$\underline{A} = \dot{U}_{1x} / \dot{U}_{2x}; \quad \underline{B} = \dot{U}_{1k} / \dot{I}_{2k}; \quad \underline{C} = \dot{I}_{1x} / \dot{U}_{2x}; \quad \underline{D} = \dot{I}_{1k} / \dot{I}_{2k}. \quad (18.7)$$

Если провести опыты холостого хода и короткого замыкания, измерить напряжения и токи (модули и фазы) на входе и выходе четырехполюсника, то параметры его легко определить по формулам (18.7).

Из опыта холостого хода можно также найти входное сопротивление при разомкнутых вторичных зажимах [см. (18.6)]:

$$\dot{U}_{1x} / \dot{I}_{1x} = \underline{Z}_{1x} = \underline{A} / \underline{C}. \quad (18.8)$$

Из опыта короткого замыкания [см. (18.6)] находят входное сопротивление при замкнутых накоротко вторичных зажимах:

$$\dot{U}_{1k} / \dot{I}_{1k} = \underline{Z}_{1k} = \underline{B} / \underline{D}. \quad (18.9)$$

Если известны внутренняя схема и сопротивления всех ветвей пассивного четырехполюсника, то параметры его можно найти расчетом, применяя известные методы преобразования схем. Сначала определяют входные сопротивления  $\underline{Z}_{1x}$  и  $\underline{Z}_{1k}$  и дополнительно — входное сопротивление со стороны вторичных зажимов при разомкнутых первичных зажимах ( $\dot{I}_1 = 0$ ). Из уравнений (18.5)

$$\underline{Z}_{2x} = \dot{U}_{2x} / \dot{I}_{2x} = \underline{D} / \underline{C}. \quad (18.10)$$

Совместным решением четырех уравнений (18.4), (18.8), (18.9), (18.10) определяют коэффициенты четырехполюсника.

В качестве контрольного можно использовать уравнение, полученное на основе режима короткого замыкания на первичной стороне.

Входное сопротивление со стороны вторичных зажимов при коротком замыкании на первичной стороне из (18.5) при  $\dot{U}_1 = 0$

$$\underline{Z}_{2k} = \dot{U}_{2k} / \dot{I}_{2k} = \underline{B} / \underline{A}.$$

## Режим при нагрузке

Напряжение и ток на входе четырехполюсника (18.2) состоят из двух слагаемых.

Учитывая выражения (18.7), основные уравнения четырехполюсника можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2 = \dot{U}_{1x} + \dot{U}_{1к}; \\ \dot{I}_1 &= \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2 = \dot{I}_{1x} + \dot{I}_{1к}. \end{aligned} \right\} \quad (18.11)$$

Из уравнений видно, что напряжение и ток на входе четырехполюсника в режиме при нагрузке определяют наложением соответствующих величин, известных по режимам холостого хода и короткого замыкания.

Рабочий режим четырехполюсника в некоторых случаях характеризуется входным сопротивлением со стороны первичных зажимов ( $\underline{Z}_{1вх}$ ) и со стороны вторичных зажимов ( $\underline{Z}_{2вх}$ ).

Разделим первое уравнение (18.2) на второе

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2}{\underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2}.$$

Но  $\dot{U}_2 = I_2 Z_2$ , поэтому

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{A}Z_2 + \underline{B}}{\underline{C}Z_2 + \underline{D}}, \quad (18.12)$$

где  $Z_2$  — сопротивление нагрузки на вторичной стороне.

Входное сопротивление со стороны вторичных зажимов найдем из уравнений (18.5)

$$\underline{Z}_{2вх} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\underline{D}\dot{U}_1 + \underline{B}\dot{I}_1}{\underline{C}\dot{U}_1 + \underline{A}\dot{I}_1}.$$

Учитывая, что  $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_1$ , где  $\underline{Z}_1$  — сопротивление нагрузки на первичной стороне, найдем

$$\underline{Z}_{2вх} = \frac{\underline{D}\underline{Z}_1 + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_1 + \underline{A}}. \quad (18.13)$$

### Задачи

**Задача 18.3.** Определить коэффициенты  $A, B, C, D$  четырехполюсника, схема которого показана на рис. 18.2, а. Параметры схемы по условию задачи 18.1:  $R_1 = 20$  Ом,  $X_{1L} = 30$  Ом,  $R_2 = 5$  Ом,  $X_{2L} = 15$  Ом.

**Решение.** В данном случае определим коэффициенты четырехполюсника на основе опытов холостого хода и короткого замыкания. Совместное решение уравнений (18.4), (18.8), (18.9), (18.10) дает:

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1BX}^2}{\underline{Z}_{1X}\underline{Z}_{2X} - \underline{Z}_{1K}\underline{Z}_{2X}}};$$

$$\underline{Z}_{1X} = R_1 + jX_{1L} + R_2 + jX_{2L} = 20 + j30 + 5 + j15 = 25 + j45;$$

$$\underline{Z}_{1K} = R_1 + jX_{1L} = 20 + j30;$$

$$\underline{Z}_{2X} = R_2 + jX_{2L} = 5 + j15;$$

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{(25 + j45)^2}{(25 + j45)(5 + j15) - (20 + j30)(5 + j15)}} = 3,26e^{-j10^\circ 37'}.$$

Вычислить другие коэффициенты четырехполюсника.

**Задача 18.4.** Определить коэффициенты четырехполюсника, эквивалентного воздушному трансформатору (см. рис. 16.8, а). Дано:  $R_1 = 2$  Ом,  $L_1 = 0,5$  мГн,  $R_2 = 3$  Ом,  $L_2 = 0,72$  мГн. Коэффициент связи между обмотками  $k = 0,5$ .

**Указание.** Схему рис. 18.4 следует предварительно заменить эквивалентной схемой замещения (см. 16.3).

### 18.3. СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ПАССИВНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Пассивный четырехполюсник, у которого сопротивления элементов схемы постоянны, можно привести к одной из эквивалентных схем замещения с тремя ветвями, соединенными звездой или треугольником.

#### Т-образная схема замещения

Если три ветви пассивного четырехполюсника соединить звездой, то получим Т-образную схему замещения (рис. 18.5, а).

Для этой схемы ток на входе

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_c = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2 + I_2 \underline{Z}_b}{\underline{Z}_c}; \\ \dot{I}_1 &= \dot{U}_2 / \underline{Z}_c + I_2 (1 + \underline{Z}_b / \underline{Z}_c). \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

Напряжение на входе

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_a + \dot{I}_2 \underline{Z}_b + \dot{U}_2.$$

Подставляя  $\dot{I}_1$  из (18.14), получим

$$\dot{U}_1 = [\dot{U}_2 / \underline{Z}_c + \dot{I}_2 (1 + \underline{Z}_b / \underline{Z}_c)] \underline{Z}_a + \dot{I}_2 \underline{Z}_b + \dot{U}_2,$$

или

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2(1 + \underline{Z}_a/\underline{Z}_c) + \dot{I}_2 \frac{\underline{Z}_a \underline{Z}_b + \underline{Z}_b \underline{Z}_c + \underline{Z}_c \underline{Z}_a}{\underline{Z}_c}. \quad (18.15)$$

Сопоставим полученные уравнения входных величин тока (18.14) и напряжения (18.15) с уравнениями четырехполюсника (18.2), найдем выражения коэффициентов Т-образной схемы замещения пассивного четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \underline{Z}_a/\underline{Z}_c; \quad \underline{B} = \frac{\underline{Z}_a \underline{Z}_b + \underline{Z}_b \underline{Z}_c + \underline{Z}_c \underline{Z}_a}{\underline{Z}_c}; \\ \underline{C} &= 1/\underline{Z}_c; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_b/\underline{Z}_c. \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

### П-образная схема замещения

В схеме рис. 18.5, а звезду сопротивлений  $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$  можно заменить эквивалентным треугольником сопротивлений  $\underline{Z}_{ab}, \underline{Z}_{bc}, \underline{Z}_{ca}$ . После такой замены получим эквивалентную П-образную схему замещения пассивного четырехполюсника (рис. 18.5, б).

Выразим входные величины этой схемы

$$\dot{U}_1 = (\dot{I}_2 + \dot{U}_2/\underline{Z}_{bc})\underline{Z}_{ab} + \dot{U}_2$$

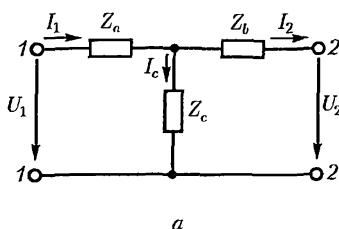
или

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2(1 + \underline{Z}_{ab}/\underline{Z}_{bc}) + \dot{I}_2 \underline{Z}_{ab}; \quad (18.17)$$

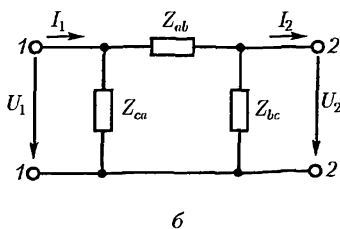
$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{U}_2/\underline{Z}_{ca} + \dot{I}_2 + \dot{U}_2/\underline{Z}_{bc} = \frac{\dot{U}_2(1 + \underline{Z}_{ab}/\underline{Z}_{bc})}{\underline{Z}_{ca}} + \\ &+ \dot{I}_2 \frac{\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ca}} + \dot{I}_2 + \dot{U}_2/\underline{Z}_{bc}, \end{aligned}$$

или

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{bc} \underline{Z}_{ca}} + \dot{I}_2(1 + \underline{Z}_{ab}/\underline{Z}_{ca}). \quad (18.18)$$



а



б

Рис. 18.5



Сопоставляя полученные уравнения напряжения (18.17) и тока (18.18) с основными уравнениями четырехполюсника (18.2), найдем выражения коэффициентов для П-образной схемы замещения пассивного четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \frac{\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{bc}}; & \underline{B} &= \underline{Z}_{ab}; \\ \underline{C} &= \frac{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{cb}}{\underline{Z}_{bc}\underline{Z}_{cb}}; & \underline{D} &= 1 + \frac{\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ca}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.19)$$

### Приведение любой схемы четырехполюсника к одной из эквивалентных схем

Параметры схем замещения и постоянные пассивного четырехполюсника связаны формулами (18.16) и (18.19). Из них нетрудно выразить сопротивления Т- и П-образных схем.

Параметры:

Т-образной схемы из (18.16)

$$\underline{Z}_a = (\underline{A} - 1)/\underline{C}; \quad \underline{Z}_b = (\underline{D} - 1)/\underline{C}; \quad \underline{Z}_c = 1/\underline{C}; \quad (18.20)$$

П-образной схемы из (18.19)

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{B}; \quad \underline{Z}_{bc} = \underline{B}/(\underline{A} - 1); \quad \underline{Z}_{ca} = \underline{B}/(\underline{D} - 1). \quad (18.21)$$

Отсюда следует путь приведения любой заданной схемы пассивного четырехполюсника к одной из эквивалентных схем:

1. Определить расчетом или на основе опыта коэффициенты  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$  заданного четырехполюсника.
2. По формулам (18.20) или (18.21) найти параметры эквивалентной схемы замещения.

Далее эквивалентную схему можно использовать для анализа заданного четырехполюсника наравне с исходной схемой.

### Задачи

**Задача 18.5.** Определить параметры Т-образной схемы замещения четырехполюсника (см. рис. 18.3). При решении задачи использовать результаты решения задачи 18.2.

**Задача 18.6.** Определить параметры П-образной схемы замещения четырехполюсника (см. рис. 18.2, а), используя результаты решения задачи 18.1.

## ГЛАВА 19

# КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

При проектировании электротехнических установок, например линий электропередачи, электрических двигателей и других устройств, представленных схемами замещения, возникает необходимость исследования режимов работы при изменении одного из параметров.

В таких случаях по данным расчетов строят графики изменения ряда электрических величин (тока, активной и реактивной мощностей, коэффициента мощности и т.д.) в зависимости от переменного параметра.

Применяя уже известные методы расчета цепей переменного тока, для построения графиков нужно много раз повторить решение одной и той же задачи. Трудоемкость и длительность такого способа очевидны.

В данном случае можно применить графический метод исследования электрических цепей переменного тока с помощью круговых диаграмм.

### 19.1. КРУГОВАЯ ДИАГРАММА НЕРАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМ РЕАКТИВНЫМ И ПЕРЕМЕННЫМ АКТИВНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ

Обоснование метода, порядок построения круговой диаграммы и определение по ней ряда электрических величин рассмотрим сначала для одной из простых цепей.

#### Обоснование метода

При последовательном соединении индуктивного сопротивления  $X_L$  и активного сопротивления  $R$  (рис. 19.1, а)

$$\dot{U} = R\dot{I} + jX_L\dot{I}.$$

Если действующая величина приложенного к цепи напряжения постоянна, а активное сопротивление изменяется, то соответственно будет изменяться ток в цепи: при  $R = 0$

$$\dot{I}_k = \frac{\dot{U}}{jX_L}.$$

Ток  $\dot{I}_k$  при коротком замыкании участка с переменным сопротивлением называется током короткого замыкания,  $R = \infty$  при  $I = 0$  (разрыв цепи). Таким образом, при изменении активного сопротивления от  $R = \infty$  до 0 ток в цепи изменяется от 0 до  $\dot{I}_k$ .

Промежуточные значения тока можно найти, разделив уравнение напряжений на  $jX_L$ :

$$\frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{R}{jX_L} \dot{I} + \dot{I},$$

или

$$\dot{I}_k = \dot{I} + \left( -j \frac{R}{X_L} \dot{I} \right).$$

Из последнего уравнения видно, что сумма двух векторов — вектора тока  $\mathbf{I}$  и отстающего от него на  $90^\circ$  вектора  $-j \frac{R}{X_L} \mathbf{I}$  — постоянна и равна току короткого замыкания. Это соответствует случаю, когда конец вектора тока перемещается по окружности, проходящей через начало вектора тока и конец вектора  $-j \frac{R}{X_L} \mathbf{I}$ , а вектор тока  $\mathbf{I}_k$  является диаметром этой окружности (рис. 19.1, б).

## Построение круговой диаграммы

Для построения окружности, которую называют круговой диаграммой токов, нужно определить ток короткого замыкания  $\dot{I}_k$ , отложить на чертеже в определенном масштабе  $M_i$  отрезок  $OA$ , соответствующий этому току, и построить на нем, как на диаметре, полуокружность. Ток короткого замыкания устанавливается в цепи при  $R = 0$ , поэтому является чисто индуктивным, отстает от напряжения на  $90^\circ$ . Исходя из этого, определяют направление вектора напряжения. Для выяснения зависимости тока и других величин от активного сопротивления нужно выполнить дополнительные построения — в некотором масштабе  $M_R$  по направлению вектора тока отложить индуктивное сопротивление  $X_L$ .

Можно, в частности, сопротивление  $X_L$  выразить тем же отрезком  $OA$ ; тогда масштаб сопротивлений  $M_R$  не будет произвольным:

$$\overline{OA} = I_k / M_i = X_L / M_R; \quad M_R = (X_L / I_k) M_i.$$

Из точки  $A$  в этом случае проводят прямую  $\overline{AR}$ , перпендикулярную вектору  $I_k$ . На этой прямой от точки  $A$  в том же масштабе  $M_R$  откладывают величины активного сопротивления  $R$ . Отложив сопротивление  $R$  отрезком  $\overline{AB}$  и проведя прямую  $\overline{OB}$ , получим треугольник сопротивлений, гипотенуза которого  $\overline{OB}$  выражает полное сопротивление цепи  $Z$ .

## Определение величин по круговой диаграмме

В точке  $C$  пересечения прямой  $\overline{OB}$  с круговой диаграммой лежит конец вектора тока, проведенного из точки  $O$ . Численное значение тока находят умножением длины отрезка  $\overline{OC}$  на масштаб токов  $I = \overline{OC} M_i$ .

Аналогично находят токи при других сопротивлениях  $R$  от 0 до  $\infty$ .

Проекция отрезка  $\overline{OC}$  на направления напряжения и тока короткого замыкания дают активную и реактивную составляющие тока в том же масштабе  $M_i$ :  $I_a = \overline{OE} M_i$ ,  $I_L = \overline{OD} M_i$ .

Отрезок  $\overline{OE}$  в масштабе мощности выражает активную мощность, а отрезок  $\overline{OD}$  — реактивную мощность цепи:

$$P = I_a U = \overline{OE} M_i U = \overline{OE} M_p;$$

$$Q = I_L U = \overline{OD} M_i U = \overline{OD} M_p;$$

где  $M_p = M_i U$  — масштаб мощности.

В масштабе мощности  $M_p$  отрезок  $\overline{OC}$  выражает полную мощность цепи. Если на отрезке  $\overline{OF}$ , выражающем в масштабе напряжений  $M_u$  полное напряжение цепи  $U$ , построить, как на диаметре, полуокружность, то можно определить активную и реактивную составляющие напряжения и коэффициент мощности  $\cos \varphi$ . Полуокружность  $OGF$  является круговой диаграммой напряжений. Отрезок  $\overline{OG}$ , совпадающий по направлению с вектором тока, в масштабе напряжений выражает активное напряжение  $U_R$ , а отрезок  $\overline{GF}$ , перпендикулярный вектору тока, — реактивное напряжение  $U_L$ . Точка  $G$ , в которой совмещаются конец вектора  $U_R$  и начало вектора  $U_L$ , находится в пересечении линии тока  $\overline{OC}$  с круговой диаграммой напряжений.

Этот вывод следует из подобия треугольников  $OGF$  и  $OCA$ :

$$\overline{OG}/\overline{OF} = \overline{CA}/\overline{OA}; \quad \overline{OG} = \frac{\overline{CAOF}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{R}{X_L} I U M_i}{M_i M_u I_k} = \frac{U_R}{M_u}.$$

Из отношения

$$\overline{GF}/\overline{OF} = \overline{OC}/\overline{OA}$$

следует, что

$$GF = U_L/M_u.$$

Отрезок  $\overline{OG}$  одновременно выражает коэффициент мощности:

$$\overline{OG} = \frac{U_R}{M_u} = \frac{U \cos \varphi}{M_u};$$

$$\cos \varphi = \frac{M_u}{U} \overline{OG} = M_\varphi \overline{OG},$$

где  $M_\varphi = M_u/U$  — масштаб коэффициента мощности.

При увеличении  $R$  от 0 до  $\infty$   $\cos \varphi$  увеличивается от 0 до 1, причем отрезок  $\overline{OF}$  в масштабе  $M_\varphi$  соответствует  $\cos \varphi = 1$ . Действительно, при  $R = \infty$  направление вектора тока будет совпадать с направлением вектора напряжения (длина вектора тока в этом случае равна нулю). Круговая диаграмма напряжений пересечет направление вектора тока в точке  $F$  (точка  $G$  по диаграмме переместится и совпадет с точкой  $F$ ).

Если отрезок  $OF$  разделить на 100 частей, то, совмещая отрезок  $\overline{OG}$  с прямой  $\overline{OF}$ , можно найти значения  $\cos \varphi$  с точностью до 0,01.

В таком же порядке строится круговая диаграмма и определяют величины, характеризующие неразветвленную цепь с переменным активным сопротивлением и постоянной емкостью.

Ток в этой цепи опережает напряжение в общем случае на угол  $\varphi$ , а при  $R = 0$  — на угол  $90^\circ$ . Поэтому круговая диаграмма располагается по другую сторону от вектора напряжения (на рис. 19.1, б круговую диаграмму нужно повернуть вокруг вектора напряжения на  $180^\circ$ ).

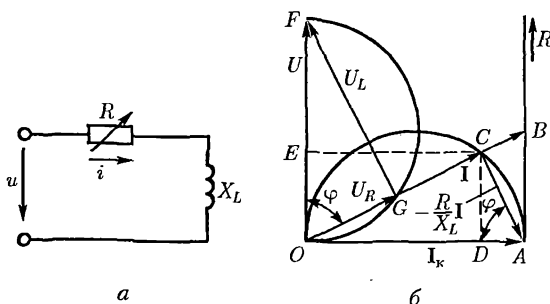


Рис. 19.1

## Задачи

**Задача 19.1.** Построить графики изменения тока, активной, реактивной и полной мощностей, активного и реактивного напряжений, коэффициента мощности при изменении активного сопротивления от 0 до 20 Ом в цепи рис. 19.2, а, для которой известны  $X_C = 10$  Ом,  $U = 200$  В.

**Решение.** Для решения задачи построим круговую диаграмму цепи и вычислим масштабы величин.

Ток короткого замыкания при  $R = 0$

$$I_k = U/X_C = 200/10 = 20 \text{ А.}$$

Выберем масштабы тока и напряжения:  $M_i = 2$  А/см;  $M_u = 20$  В/см. В этих масштабах рекомендуется построить на миллиметровой бумаге круговую диаграмму, подобную рис. 19.2, б.

Отрезок  $\overline{OA}$ , выражающий ток  $I_k$ , имеет длину

$$\overline{OA} = I_k/M_i = 20/2 = 10 \text{ см.}$$

Отложим отрезки  $\overline{OA}$  и  $\overline{OF}$  и проведем окружности на этих отрезках, как на диаметрах.

Считая, что отрезок  $\overline{OA}$  выражает также емкостное сопротивление, определим масштаб сопротивлений

$$M_R = \frac{X_C}{I_k} M_i = \frac{10 \cdot 2}{20} = 1 \text{ Ом/см.}$$

Масштаб мощности

$$M_p = M_i U = 2 \cdot 200 = 400 \text{ Вт/см.}$$

На рис. 19.2, б показано определение величин для двух значений активного сопротивления:  $R = 2$  Ом и  $R = 8$  Ом. Результаты определения при этих и других значениях сопротивления записаны в табл. 19.1.

Таблица 19.1

| $R$ , Ом | $Z$ , Ом | $I$ , А | $I_a$ , А | $I_C$ , А | $P$ , Вт | $Q$ , вар | $S$ , В·А | $U_a$ , В | $U_C$ , В | $\cos \varphi$ |
|----------|----------|---------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------|
| 0        | 10       | 20      | 0         | 20        | 0        | 4000      | 4000      | 0         | 200       | 0              |
| 2        | 10,3     | 19,6    | 3,8       | 19,2      | 760      | 3840      | 3920      | 34        | 196       | 0,17           |
| 4        | 10,8     | 18,6    | 7         | 17,2      | 1400     | 3440      | 3720      | 72        | 186       | 0,36           |
| 6        | 11,6     | 17,0    | 8,8       | 14,6      | 1800     | 2960      | 3480      | 100       | 172       | 0,52           |
| 8        | 12,8     | 15,6    | 9,8       | 12,4      | 1960     | 2440      | 3120      | 124       | 156       | 0,62           |
| 10       | 14,1     | 14,0    | 10        | 10        | 2000     | 2000      | 2820      | 141       | 141       | 0,705          |
| 15       | 18       | 11,2    | 9,6       | 6,4       | 1920     | 1280      | 2320      | 166       | 110       | 0,83           |
| 20       | 22,3     | 9,0     | 8,2       | 4,2       | 1640     | 840       | 1880      | 178       | 90        | 0,89           |
| $\infty$ | $\infty$ | 0       | 0         | 0         | 0        | 0         | 0         | 200       | 0         | 1              |

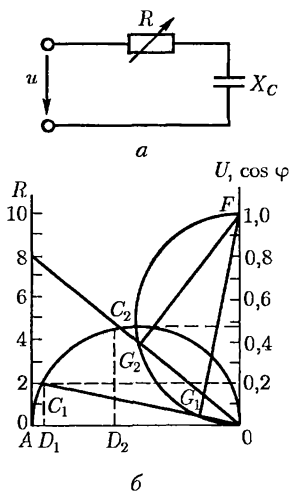


Рис. 19.2

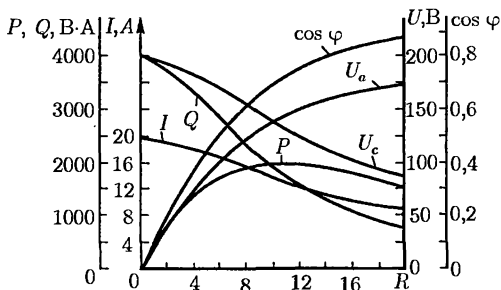


Рис. 19.3

На рис. 19.3 построены кривые согласно условию задачи.

**Задача 19.2.** Построить графики изменения тока, активной, реактивной и полной мощностей, активного, реактивного напряжений, коэффициента мощности при изменении активного сопротивления от 0 до 10 Ом в цепи рис. 19.1, а, для которой известны:  $X_L = 4$  Ом,  $U = 100$  В.

## 19.2. КРУГОВАЯ ДИАГРАММА НЕРАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМ АКТИВНЫМ И ПЕРЕМЕННЫМ РЕАКТИВНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ

Особенность этой цепи по сравнению с предыдущей состоит в том, что переменным в ней является реактивное сопротивление — индуктивное или емкостное. Порядок рассмотрения вопроса остается таким же.

### Обоснование метода

При последовательном соединении постоянного активного и переменного индуктивного сопротивлений (рис. 19.4, а) получается уравнение напряжений

$$\dot{U} = R\dot{I} + jX_L\dot{I}.$$

Ток короткого замыкания при  $X_L = 0$

$$\dot{I}_k = \dot{U}/R.$$

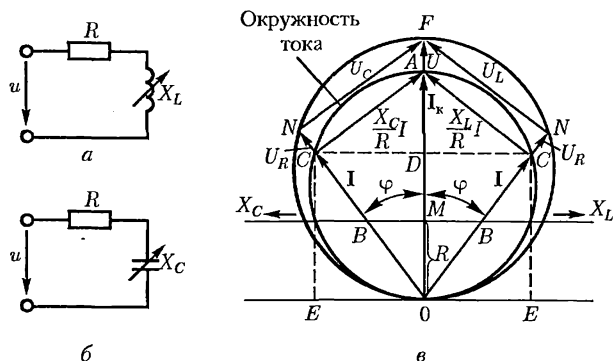


Рис. 19.4

При  $X_L = \infty$  ток в цепи  $I = 0$ .

Промежуточные величины токов найдем, разделив уравнение напряжений на  $R$ :

$$\frac{\dot{U}}{R} = \dot{I} + j \frac{X_L}{R} \dot{I},$$

или

$$\dot{I}_k = \dot{I} + j \frac{X_L}{R} \dot{I}.$$

Из последнего уравнения видно, что сумма вектора тока и вектора  $j \frac{X_L}{R} \dot{I}$ , опережающего ток на  $90^\circ$ , есть постоянная величина, равная току короткого замыкания.

Если на отрезке  $OA$ , выражающем в масштабе  $M_i$  ток короткого замыкания  $I_k$ , построить, как на диаметре, окружность, то сумму  $\dot{I} + j \frac{X_L}{R} \dot{I}$  можно выразить двумя хордами, пересекающимися на окружности под прямым углом (рис. 19.4, в).

Ток короткого замыкания является активным, поэтому с вектором тока совпадает по направлению вектор напряжения.

## Построение круговой диаграммы

Построение круговой диаграммы целесообразно начать, отложив вектор напряжения, а затем вектор тока  $I_k$  (отрезок  $OA$ ).

По линии тока  $I_k$  откладывают в произвольном масштабе  $M_R$  активное сопротивление  $R$  (отрезок  $OM$ ), а из точки  $M$  перпендикулярно  $OM$  проводят линию реактивного сопротивления  $X_L$ .



Такой же порядок построения круговой диаграммы пригоден и для цепи с постоянным активным и переменным емкостным сопротивлением (рис. 19.4, б). Ток в цепи с емкостью опережает напряжение, поэтому круговая диаграмма цепи с  $R$  и  $C$  располагается слева от вектора напряжения.

Если цепи (см. рис. 19.4, а, б) будут иметь одинаковые активные сопротивления и напряжения, то при одинаковых масштабах круговые диаграммы обеих цепей являются двумя половинами одной окружности. Линия реактивных сопротивлений в обоих случаях одна и та же, но индуктивные сопротивления откладываются вправо, а емкостные — влево от вектора напряжения.

### Определение величин по круговой диаграмме

Отложив реактивное сопротивление  $X$  в заданном масштабе отрезком  $\overline{MB}$  и проведя прямую  $\overline{OB}$  до пересечения с круговой диаграммой в точке  $C$ , получим вектор тока  $\overline{OC}$ . Отрезок  $\overline{OB}$  в масштабе  $M_R$  равен полному сопротивлению цепи:  $I = \overline{OC} M_i$ ;  $Z = \overline{OB} M_R$ .

Проекция отрезка  $\overline{OC}$  на направление напряжения (отрезок  $\overline{OD}$ ) и на перпендикуляр к нему (линия  $\overline{OE}$ ) дают активную и реактивную составляющие тока в том же масштабе  $M_i$ . Отрезок  $\overline{OD}$  в масштабе мощности выражает также активную мощность, а отрезок  $\overline{OE}$  — реактивную мощность. Отрезок  $\overline{OC}$  в масштабе  $M_p$  равен полной мощности цепи.

Масштаб мощности  $M_p = M_i U$ .

Для определения активного и реактивного напряжений и коэффициента мощности на отрезке  $\overline{OF}$ , выражающем напряжение в цепи, как на диаметре, построим окружность. Отрезок  $\overline{ON}$  в масштабе  $M_u$  дает активное напряжение, а отрезок  $\overline{NF}$  — реактивное напряжение цепи. Это следует из подобия треугольников  $ONF$  и  $OMB$ :

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OF}}; \quad \overline{ON} = \frac{\overline{OMOF}}{\overline{OB}} = \frac{RUM_R}{M_R M_u Z} = \frac{U \cos \varphi}{M_u} = \frac{U_R}{M_u};$$

из соотношения  $\frac{\overline{MB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{NF}}{\overline{OF}}$

$$\overline{NF} = \frac{\overline{MBOF}}{\overline{OB}} = \frac{X_L U M_R}{M_R M_u Z} = \frac{U \sin \varphi}{M_u} = \frac{U_L}{M_u}.$$

Отрезок  $\overline{ON}$  одновременно выражает коэффициент мощности

$$\overline{ON} = \frac{U \cos \varphi}{M_u}; \quad \cos \varphi = \frac{M_u \overline{ON}}{U} = M_\varphi \overline{ON},$$

где  $M_\varphi = M_u/U$  — масштаб коэффициента мощности.

Отрезок  $OF$  в масштабе  $M_\varphi$  соответствует  $\cos \varphi = 1$ . Разделив этот отрезок на 100 частей и совмещая отрезок  $\overline{ON}$  с направлением  $\overline{OF}$ , на шкале можно читать значения  $\cos \varphi$  с точностью до 0,01.

Если масштаб напряжения подобрать так, чтобы отрезок  $OF$  был равен  $OA$ , то круговая диаграмма напряжений совпадает с диаграммой токов. В этом случае не требуется проводить двух окружностей. Масштаб напряжения при заданном масштабе токов уже не может быть произвольным, а определяется из равенства

$$\overline{OA} = \frac{I_k}{M_i} = \frac{U}{M_u}; \quad M_u = M_i \frac{U}{I_k} = M_i R.$$

### Задачи

**Задача 19.3.** Построить круговую диаграмму цепи последовательного соединения катушки и резистора с переменным активным сопротивлением (рис. 19.5, а). Дано:  $R_k = 3$  Ом,  $X_k = 4$  Ом,  $R$  изменяется от 0 до  $\infty$ . При сопротивлениях  $R = 1, 5, 9, 17$  Ом определить по круговой диаграмме ток, активную, реактивную и полную мощности, коэффициент мощности катушки и всей цепи. Напряжение на зажимах цепи  $U = 160$  В.

**Решение.** Отнеся сопротивление  $R_k$  к нагрузке, определим расчетный ток короткого замыкания при  $R_k + R = 0$ :

$$I'_k = U/X_k = 160/4 = 40 \text{ А.}$$

Круговую диаграмму рекомендуется построить на листе миллиметровой бумаги.

Выберем масштабы: тока  $M_i = 4$  А/см, напряжения  $M_u = 20$  В/см, сопротивления  $M_R = 2$  Ом/см.

В этих масштабах отложим (рис. 19.5, б): ток  $I'_k$  — отрезок  $OA$ , напряжение  $U$  — отрезок  $OF$ , индуктивное сопротивление катушки  $X_k$  — отрезок  $OM$ .

Из точки  $M$  перпендикулярно току  $I'_k$  проведена прямая  $\overline{MR}$ , по которой от точки  $M$  отложен отрезок  $\overline{MM}_1$ , равный в масштабе  $M_R$  активному сопротивлению катушки  $R_k$ .

На отрезке  $OA$ , как на диаметре, построена круговая диаграмма токов (полуокружность  $O, C_2, C_1, A$ ).

Прямая, проведенная из точки  $O$  через точку  $M_1$  до пересечения с круговой диаграммой в точке  $C_1$ , дает значение тока в цепи при коротком замыкании участка с переменным активным сопротивлением  $I_k = \overline{OC}_1 M_i$ .

Дуга окружности между точками  $C_1$  и  $O$  является геометрическим местом концов векторов тока при изменении сопротивления  $R$  от 0 до  $\infty$ .



$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{KD_2}}{\overline{OD_2}}, \text{ но } \frac{\overline{MM_1}}{\overline{OM}} = \frac{R_k}{X_k} = \text{const};$$

$\overline{OD_2}$  в масштабе  $M_p$  есть реактивная мощность катушки при данном значении переменного сопротивления  $R$ . Поэтому

$$\frac{\overline{KD_2}}{Q/M_p} = \frac{R_k}{X_k} = \frac{1}{\text{tg } \varphi_k},$$

откуда

$$M_p \overline{KD_2} = \frac{Q}{\text{tg } \varphi_k} = P_k.$$

Отрезок  $\overline{D_2C_2}$  в масштабе  $M_p$  равен активной мощности цепи, а мощность в резисторе  $R$

$$P_2 = P - P_k = \overline{D_2C_2} M_p - \overline{KD_2} M_p = \overline{KC_2} M_p.$$

Отрезок  $\overline{OK}$  в масштабе  $M_p$  равен полной мощности катушки:

$$S_k = \overline{OK} M_p;$$

$$P_k = \overline{KD_2} M_p = 1 \cdot 640 = 640 \text{ Вт};$$

$$P_2 = \overline{KC_2} M_p = 2,4 \cdot 640 = 1540 \text{ Вт};$$

$$S_k = \overline{OK} M_p = 1,7 \cdot 640 = 1090 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Определить по круговой диаграмме те же величины для других значений  $R$ , заданных в условии задачи.

**Задача 19.4.** Построить круговую диаграмму для неразветвленной цепи, состоящей из активного сопротивления  $R = 10 \text{ Ом}$  и индуктивного сопротивления  $X_L$ , изменяющегося от 0 до 50 Ом при напряжении в цепи  $U = 100 \text{ В}$ . По круговой диаграмме найти ток, активную, реактивную и полную мощности, коэффициент мощности при значениях  $X_L = 0, 10, 20, 30, 40, 50 \text{ Ом}$ .

На основании полученных данных построить в прямоугольной системе координат график зависимости указанных величин от сопротивления  $X_L$ .

### 19.3. КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ

С помощью круговых диаграмм можно исследовать и разветвленные цепи — более сложные, чем рассмотренные в 19.1 и 19.2.

## Разветвленная цепь с переменным активным сопротивлением

На рис. 19.6, а, б изображены схема разветвленной цепи с двумя ветвями и ее круговая диаграмма. Сопротивление первой ветви  $Z_1 = R_1 + jX_{1L}$  постоянно.

Во второй ветви включены последовательно катушка  $Z_2 = R_2 + jX_{2L}$  и резистор с переменным сопротивлением  $R$ . При постоянном напряжении  $U$  режим первой ветви не меняется при изменении  $R$ . Вторая ветвь представляет собой неразветвленный участок, подобный схеме, рассмотренной при решении задачи 19.3.

Если рассмотреть эту ветвь отдельно, то построение круговой диаграммы можно считать известным. Особенность круговой диаграммы всей цепи обусловлена наличием первой ветви.

Ток в первой ветви остается постоянным, поэтому при холостом ходе во второй ветви  $(R = \infty) \cdot I_2 = 0$ , а общий ток  $\dot{I}_0 = \dot{I}_1$ .

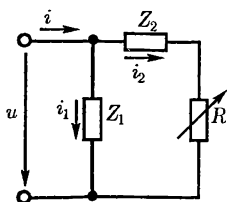
При коротком замыкании во второй ветви  $(R = 0) \dot{I}_2 = \dot{I}_{2к}$ , а общий ток  $\dot{I}_к = \dot{I}_1 + \dot{I}_{2к}$ .

Таким образом, при изменении сопротивления  $R$  от  $\infty$  до 0 ток в цепи изменяется от  $I_1$  до  $I_к$ , при этом конец вектора тока перемещается по дуге окружности, опирающейся на хорду  $I_{2к}$  (рис. 19.6, б).

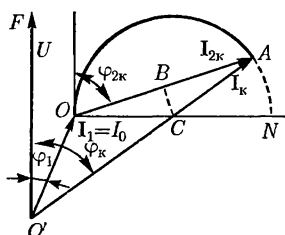
Порядок построения круговой диаграммы следующий.

Определяют токи  $I_1$  и  $I_{2к}$ . Выбирают масштабы напряжений и токов и проводят вектор общего напряжения  $U$  (отрезок  $O'F$ ) в произвольном направлении и вектор тока  $I_1$  под углом  $\varphi_1 = \arctg \frac{X_{1L}}{R_1}$  к вектору напряжения. Из конца вектора  $I_1$  проводят вектор  $I_{2к}$  (отрезок  $OA$ ) под углом  $\varphi_{2к}$  к вектору напряжения:

$$\varphi_{2к} = \arctg \frac{X_{2L}}{R_2}.$$



а



б

Рис. 19.6

На отрезке  $\overline{OA}$ , как на хорде, строят дугу окружности, центр которой  $C$  можно определить, проведя из середины хорды перпендикуляр  $\overline{BC}$  до пересечения с линией  $\overline{ON}$ , перпендикулярной вектору напряжения. Линия  $ON$  является диаметром окружности, что было установлено при построении круговой диаграммы (см. рис. 19.1, б).

Отрезок  $\overline{OA}$  в масштабе токов равен вектору общего тока при коротком замыкании сопротивления  $R$ .

### Разветвленная цепь с переменным реактивным сопротивлением

Для схемы рис. 19.7, а, которая от предыдущей отличается тем, что во второй ветви есть переменное индуктивное сопротивление, а активное сопротивление постоянно, круговая диаграмма построена на рис. 19.7, б.

Порядок построения диаграммы такой же: определяют токи  $I_1$  и  $I_{2к}$  ( $I_{2к}$  — ток во второй ветви при  $X_{2L} = 0$ ). После выбора масштабов тока и напряжения откладывают векторы токов  $I_1$  и  $I_{2к}$ . Круговую диаграмму строят на векторе  $I_{2к}$  (отрезок  $\overline{OA}$ ), как на диаметре.

В этой части построение круговой диаграммы не отличается от рис. 19.4, в.

Определение по круговым диаграммам величин, характеризующих режимы разветвленных цепей, показано далее на конкретных примерах.

### Задачи

**Задача 19.5.** Построить круговую диаграмму для цепи, схема которой показана на рис. 19.8, а, если  $Z_1 = 8 - j20$ ;  $Z_2 = 2 + j5$ ;  $U = 215$  В.

По круговой диаграмме определить токи в ветвях  $I_1$ ,  $I_2$ , общий ток  $I$ , активные, реактивные и полные мощности второй ветви ( $P_2$ ,  $Q_2$ ,  $S_2$ ) и всей

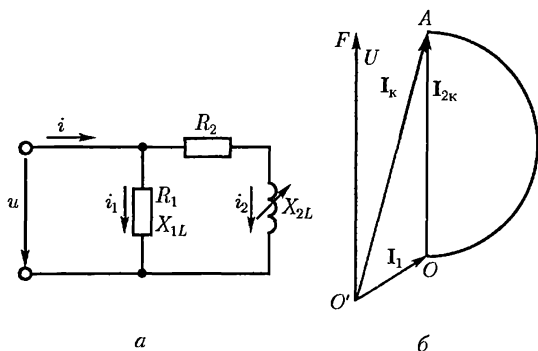


Рис. 19.7

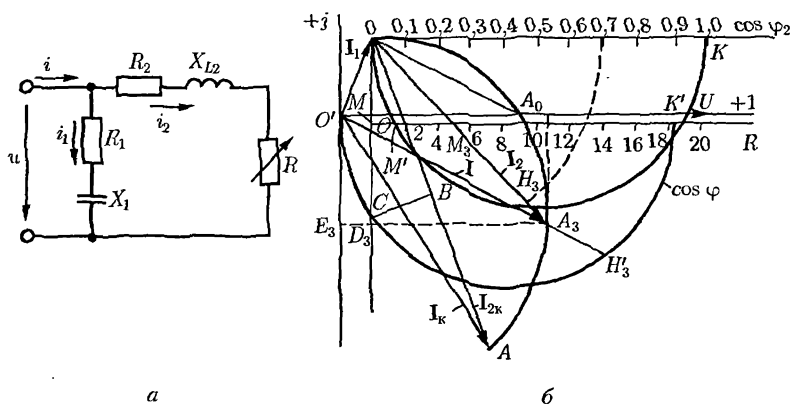


Рис. 19.8

цепи ( $P, Q, S$ ), коэффициенты мощности второй ветви  $\cos \varphi_2$  и всей цепи  $\cos \varphi$  при трех величинах активного сопротивления  $R = 3, 5, 10$  Ом. Определить сопротивление  $R$ , при котором в цепи наступит резонанс токов.

Решение. Ток в первой ветви

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{215}{8 - j20} = 10e^{j70^\circ} = 3,6 + j9,3.$$

Ток во второй ветви при  $R = 0$  (короткое замыкание)

$$\begin{aligned} \dot{I}_{2к} &= \dot{U}/Z_2 = \frac{215}{2 + j5} = \\ &= 40e^{-j70^\circ} = 14,4 - j37,2. \end{aligned}$$

Круговую диаграмму рекомендуется построить на листе миллиметровой бумаги. Выберем масштабы: тока  $M_i = 4$  А/см, напряжения  $M_u = 20$  В/см. В комплексной плоскости отложим векторы напряжения и токов  $\dot{I}_1, \dot{I}_{2к}$  (рис. 19.8, б).

Круговая диаграмма токов — дуга окружности, опирающаяся на хорду  $OA$  (вектор тока  $\dot{I}_{2к}$ ). Из середины хорды  $OA$  (точка  $B$ ) проведем перпендикуляр до пересечения в точке  $C$  с прямой, параллельной оси мнимых величин и проходящей через начало вектора  $\dot{I}_{2к}$ , (точка  $O$ ). Дуга  $OA$ , центр которой в точке  $C$ , является геометрическим местом концов векторов токов  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}$  при любых величинах активного сопротивления  $R$ . Для определения величин по условию задачи на линии  $\overline{OC}$  от точки  $O$  отложим в масштабе сопротивлений величину  $X_2$ . Выбираем  $M_R = 2$  Ом/см.

Отрезок  $\overline{OM}$ , выражающий сопротивление  $X_2$ , имеет длину

$$\overline{OM} = X_2/M_R = 5/2 = 2,5 \text{ см.}$$

От точки  $M$  проводим прямую, параллельную действительной оси, с которой совпадает направление вектора напряжения.

На этой прямой наносим шкалу активных сопротивлений. Отрезок  $MM' = 1$  см в масштабе  $M_R$  равен сопротивлению  $R_2 = 2$  Ом. От точки  $M'$  отсчитываются сопротивления  $R$ . При  $R = 3$  Ом сумма  $R + R_2 = 5$  Ом.

Отложив по шкале сопротивление 5 Ом, проведем через точку  $M_3$  прямую  $OA_3$  до пересечения с круговой диаграммой в точке  $A_3$ , а из точки  $O'$  — прямую  $O'A_3$ ;  $OA_3$  в масштабе  $M_i$  есть ток  $I_2$ , а  $O'A_3$  — ток  $I$ .

Измерение этих отрезков дает значения токов:  $I_2 = 30$  А,  $I = 28$  А.

Полная мощность второй ветви ( $S_2$ ) и всей цепи ( $S$ ) при постоянном напряжении пропорциональна току, поэтому отрезки  $OA_3$  и  $O'A_3$  в масштабе мощностей равны соответственно  $S_2$  и  $S$ .

Масштаб мощностей:  $M_p = M_i U = 4 \cdot 215 = 860$  Вт/см, поэтому  $S_2 = 6450$  В·А;  $S = 6020$  В·А.

Проекции отрезков  $OA_3$  и  $O'A_3$  на направление напряжения (действительная ось) в масштабе  $M_p$  равны активным мощностям:

$$P_2 = 4640 \text{ Вт}; P = 5440 \text{ Вт}.$$

Проекции тех же отрезков на направление, перпендикулярное напряжению, в масштабе  $M_p$  равны реактивным мощностям:  $Q_2 = 4580$  вар;  $Q = 2580$  вар.

Для определения коэффициентов мощности выполнены дополнительные построения. Из точки  $O$  проведена прямая, параллельная вектору напряжения. На этой прямой отложен отрезок  $OK$ , равный 10 произвольным единицам, например 10 см. На отрезке  $OK$ , как на диаметре, построена полуокружность, которая пересекается с вектором тока  $I_2$  (отрезок  $OA_3$ ) в точке  $H_3$ . Отрезок  $OH_3$  в выбранных единицах на прямой  $OK$  дает значение  $\cos \varphi$ . В данном случае масштаб  $\cos \varphi_2 M_\varphi = 0,1 \text{ см}^{-1}$ ;  $\cos \varphi_2 = OH_3 M_\varphi = 7 \cdot 0,1 = 0,7$ .

На отрезок  $OK$  удобно нанести шкалу и повернуть отрезок  $OH_3$  вокруг точки  $O$  до совпадения с направлением  $OK$ . Значение  $\cos \varphi_2$  можно подсчитать по шкале косинусов.

Аналогично проводят полуокружность  $\cos \varphi$ . Диаметром этой полуокружности является отрезок, отложенный в том же масштабе из точки  $O'$  вдоль направления вектора напряжения (отрезок  $O'K'$ ).

Отрезок  $O'H'$  в масштабе  $M_\varphi$  дает значение  $\cos \varphi = 0,9$ .

При резонансе токов общий ток  $I$  совпадает по фазе с напряжением  $U$ . Поэтому точка пересечения круговой диаграммы токов с вектором напряжения  $U$  является концом вектора тока (точка  $A_0$ ). Из точки  $O$  проведем отрезок  $OA_0$  до пересечения с линией сопротивлений. Искомое сопротивление  $R_0 = 7,6$  Ом.

По круговой диаграмме определить величины, указанные в условии задачи при сопротивлениях  $R = 5, 10$  Ом.

**Задача 19.6.** Построить круговую диаграмму схемы рис. 19.6, а, если известны  $Z_1 = 4 + j6$ ;  $Z_2 = 6 + j8$ ;  $U = 100$  В.



По круговой диаграмме определить токи  $I_2$ ,  $I$ , активную, реактивную и полную мощности второй ветви и всей цепи,  $\cos \varphi_2$  и  $\cos \varphi$  цепи при трех значениях активного сопротивления  $R = 0, 10, 20 \text{ Ом}$ .

## 19.4. ПОСТРОЕНИЕ КРУГОВОЙ ДИАГРАММЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОПЫТОВ ХОЛОСТОГО ХОДА И КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

Круговую диаграмму цепи можно построить по показаниям приборов, измерив те величины, которые являются исходными при построении.

### Неразветвленная цепь

В неразветвленных цепях, изображенных на рис. 19.1, а; 19.4, а, б, достаточно измерить напряжение и ток  $I_k$  при коротком замыкании между точками 2 и 2' (рис. 19.9, а, б).

Величина постоянного сопротивления определяется по показаниям приборов, отношение напряжения к току равно  $X_L$  в схеме рис. 19.9, а и  $R$  — в схеме рис. 19.9, б.

В схеме рис. 19.5, а нужно дополнительно измерить активную мощность при коротком замыкании (рис. 19.9, в).

По показаниям приборов определяют параметры катушки

$$Z_k = U/I_k; \cos \varphi_k = P_k/U_k.$$

### Разветвленная цепь

Для построения круговой диаграммы разветвленной цепи требуется провести опыты холостого хода и короткого замыкания (рис. 19.10).

При холостом ходе (разрыв цепи между точками 2 и 2') измеряют ток  $I_1$ , мощность  $P_1$  первой ветви и общее напряжение  $U$ . Определяют

$$\cos \varphi_1 = P_1/(UI_1).$$

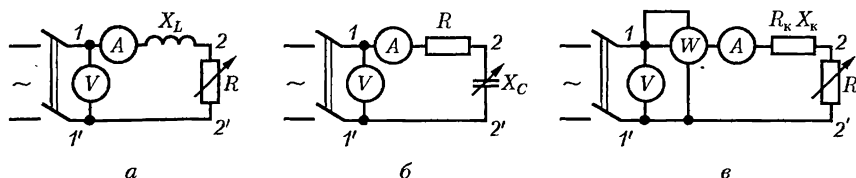


Рис. 19.9

При коротком замыкании между точками 2 и 2' измеряют ток  $I_k$ , мощность  $P_k$  всей цепи и общее напряжение  $U$ . Определяют

$$\cos \varphi_k = P_k / (U I_k).$$

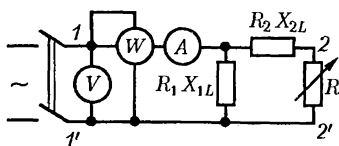


Рис. 19.10

Этих данных достаточно для построения круговой диаграммы токов.

### Задачи

**Задача 19.7.** Построить круговую диаграмму цепи рис. 19.11, а по результатам опытов холостого хода и короткого замыкания:

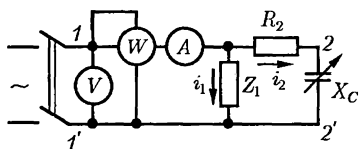
$$I_x = 6 \text{ A}; P_x = 432 \text{ Вт}; I_k = 16,4 \text{ A}; P_k = 1885 \text{ Вт}; U = 120 \text{ В}.$$

Пользуясь круговой диаграммой, построить кривые зависимости тока, активной, реактивной мощностей и  $\cos \varphi$  от сопротивления конденсатора  $X_C$ .

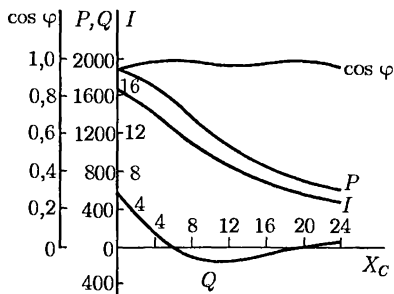
**Решение.** По показаниям приборов определим коэффициенты мощности первой ветви (холостой ход) и всей цепи при коротком замыкании участка 2 - 2':

$$\cos \varphi_x = \frac{P_x}{U I_x} = \frac{432}{120 \cdot 6} = 0,6;$$

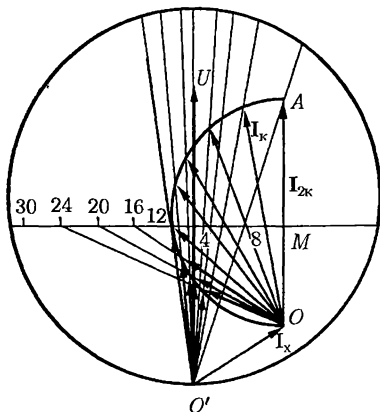
$$\varphi_x = 53^\circ; \sin \varphi_x = 0,8.$$



а



б



б

Рис. 19.11

Для того чтобы не пользоваться транспортиром при построении круговой диаграммы, можно определить активную и реактивную составляющие тока:

$$I_{a.x} = I_x \cos \varphi_x = 6 \cdot 0,6 = 3,6 \text{ A};$$

$$I_{p.x} = I_x \sin \varphi_x = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ A};$$

$$\cos \varphi_k = \frac{P_k}{UI_k} = \frac{1885}{120 \cdot 16,4} = 0,955.$$

Круговую диаграмму (рис. 19.11, б) рекомендуется построить на листе миллиметровой бумаги в следующем порядке.

Выбрать масштабы тока и напряжения (например,  $M_i = 2 \text{ A/см}$ ,  $M_u = 15 \text{ В/см}$ ) и отложить на чертеже векторы:  $U$  — в произвольном направлении, активные составляющие токов — вдоль вектора напряжения, реактивные — перпендикулярно ему, учитывая их индуктивный характер.

Построив векторы токов  $I_x$  и  $I_k$  провести вектор  $I_{2k}$  так, чтобы  $\dot{I}_x + \dot{I}_{2k} = \dot{I}_k$ .

На векторе  $I_{2k}$  (отрезок  $\overline{OA}$ ), как на диаметре, построить полуокружность токов слева от диаметра  $\overline{OA}$ , учитывая емкостный характер тока  $I_2$ . Из диаграммы следует, что  $I_{2k} = \overline{OA}$   $M_i = 12 \text{ A}$ .

Активное сопротивление во второй ветви

$$R_2 = U/I_{2k} = 120/12 = 10 \text{ Ом}.$$

Далее надо выбрать масштаб сопротивлений (например,  $M_R = 4 \text{ Ом/см}$ ) и отложить от точки  $O$  по направлению вектора тока  $I_{2k}$  величину активного сопротивления  $R_2$  (отрезок  $\overline{OM}$ ). Через точку  $M$  провести линию реактивных сопротивлений и нанести шкалу.

Значения, определенные по круговой диаграмме согласно условию задачи, записаны в табл. 19.2.

Таблица 19.2

| $X_c, \text{ Ом}$              | 0    | 2    | 4    | 6     | 8    | 12    | 16   | 20  | 24    |
|--------------------------------|------|------|------|-------|------|-------|------|-----|-------|
| $I, \text{ A}$                 | 16,4 | 15,4 | 14   | 12,4  | 11   | 8,6   | 7    | 6   | 5,2   |
| $P, \text{ Вт}$                | 1855 | 1820 | 1680 | 1490  | 1320 | 1030  | 840  | 720 | 650   |
| $Q, \text{ В} \cdot \text{ А}$ | 575  | 288  | 96   | -48   | -120 | -144  | -72  | 0   | 48    |
| $\cos \varphi$                 | 0,95 | 0,98 | 0,99 | 0,995 | 0,99 | 0,985 | 0,99 | 1   | 0,985 |

При  $X_c = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_c = 20 \text{ Ом}$  в цепи имеет место резонанс токов. Это видно из круговой диаграммы. Ток  $I$  совпадает по фазе с напряжением. На рис. 19.11, в построены графики согласно условию задачи.

**Задача 19.8.** Построить круговую диаграмму цепи рис. 19.7, а, если известны:  $R_1 = 12 \text{ Ом}$ ,  $X_{1L} = 9 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $U = 150 \text{ В}$ .

По круговой диаграмме построить графики зависимости тока, активной, реактивной мощностей и  $\cos \varphi$  цепи от  $X_{2L}$ , которое изменяется от 0 до  $\infty$ .

## ТРЕХФАЗНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ЦЕПИ

Основными приемниками электрической энергии как по количеству, так и по установленной мощности являются электродвигатели, применяемые для приведения в движение рабочих машин. Трехфазные асинхронные двигатели — наиболее простые, надежные и дешевые. Повсеместное применение их обусловило бурное развитие трехфазных систем — производства, передачи и распределения электрической энергии. Для этой цели применяются трехфазные генераторы, трансформаторы, линии передачи, распределительные сети.

### 20.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ТРЕХФАЗНЫХ СИСТЕМАХ

Многофазная система электрических цепей представляет собой совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе на углы, сумма которых равна  $2\pi$ , или  $360^\circ$ . Соответствующая этому определению система из трех цепей называется трехфазной.

#### Трехфазная система ЭДС

В трехфазном генераторе, в котором имеются три самостоятельные обмотки, сдвинутые относительно друг друга в пространстве на  $120^\circ$ , образуется трехфазная симметричная система ЭДС. Схематично это показано на рис. 20.1 применительно к генератору с одной парой полюсов на статоре и обмотками на роторе. Однако нужно заметить, что в реальных генераторах обмотка переменного тока неподвижна (расположена на статоре), а магнитные полюса вращаются (расположены на роторе). Такая конструкция генератора лучше, а принцип его работы не меняется.

Если число витков в обмотках одинаково, то при вращении ротора во всех обмотках наводятся ЭДС одинаковой величины. Начальные фазы этих ЭДС сдвинуты относительно друг друга на  $120^\circ$  в соответствии с пространственным расположением обмоток.

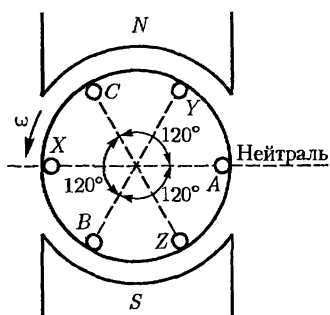


Рис. 20.1

Трехфазная симметричная система ЭДС — это совокупность трех ЭДС, имеющих одинаковую частоту и амплитуду, сдвинутых по фазе относительно друг друга на углы  $120^\circ$ .

Признаком несимметрии трехфазной системы ЭДС является неравенство амплитуд или неравенство углов сдвига фаз между каждой парой ЭДС.

На рис. 20.1 обмотки показаны в начальном положении ( $t=0$ ). При вращении ротора против часовой стрелки уравнения ЭДС можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t, \\ e_B &= E_m \sin(\omega t - 120^\circ); \\ e_C &= E_m \sin(\omega t - 240^\circ). \end{aligned} \right\} \quad (20.1)$$

Этим уравнениям соответствуют графики ЭДС и векторная диаграмма, изображенные на рис. 20.2, а, б.

Комплексы действующих значений этих ЭДС:

$$\dot{E}_A = E; \quad \dot{E}_B = E e^{-j120^\circ}; \quad \dot{E}_C = E e^{-j240^\circ}. \quad (20.2)$$

Если принять за исходный вектор ЭДС  $\dot{E}_A$ , то ЭДС  $\dot{E}_B$  отстает от  $\dot{E}_A$ , а ЭДС  $\dot{E}_C$  отстает от  $\dot{E}_B$ . Следовательно, максимальных значений ЭДС в фазах достигают в таком порядке: сначала в фазе А, затем в В и далее в С.

Векторы ЭДС вращаются против часовой стрелки, а мимо неподвижной оси  $+j$  они будут проходить в следующем порядке:

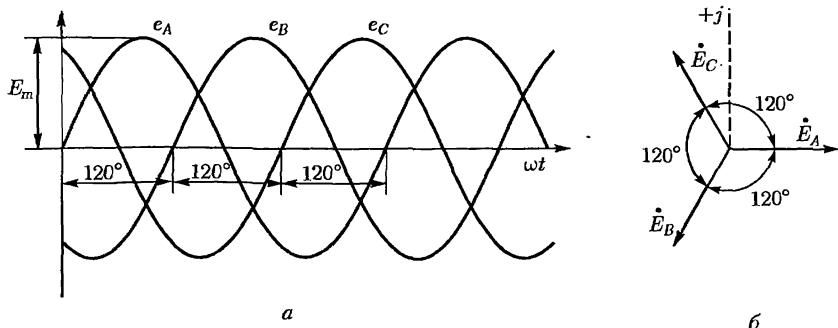


Рис. 20.2

$\dot{E}_A \rightarrow \dot{E}_B \rightarrow \dot{E}_C$ . Такой порядок чередования называется прямой последовательностью фаз. При обратном вращении ротора генератора получается обратная последовательность фаз. В дальнейшем при рассмотрении трехфазных систем принимается прямая последовательность фаз, которая считается нормальной.

## Несвязанная трехфазная система электрических цепей

На схемах замещения обмотки трехфазного генератора обозначают, как показано на рис. 20.3, а, и условно принимают направление ЭДС от конца к началу обмотки положительным.

Если каждую обмотку трехфазного генератора соединить своим приемником, образуются три независимые цепи, каждая со своим током. Одна такая цепь с ее элементами (обмотка генератора, приемник, соединительные провода) в практике называется фазой. Термин «фаза» в 12.2 употреблен в своем подлинном значении, которое остается в силе и для трехфазных цепей.

В несвязанной трехфазной системе генератор с приемником энергии соединяется шестью проводами. Большое число соединительных проводов — основной недостаток несвязанных систем, которые поэтому и не применяются. Сокращение числа соединительных проводов достигается в связанных системах, где обмотки генератора, как и отдельные фазы приемника, электрически связаны между собой и образуют трехфазные цепи.

Для этой цели выдающимся русским ученым М.О. Доливо-Добровольским (1862 — 1919) предложены две схемы соединения — звездой и треугольником, которые применяются и в настоящее время.

Трехфазная цепь называется с и м м е т р и ч н о й, если комплексы сопротивлений всех ее фаз одинаковы. Когда в такой цепи дейст-

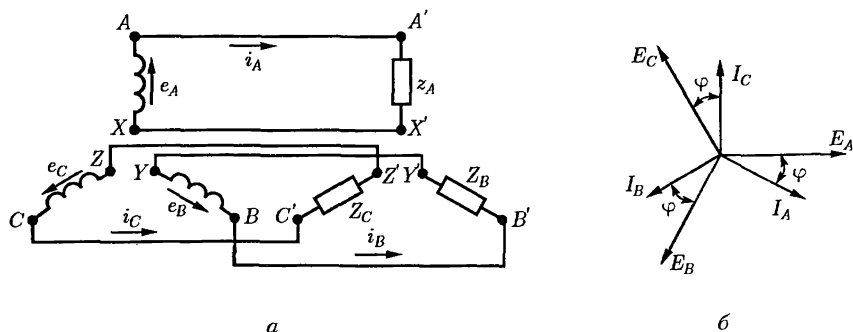


Рис. 20.3

вует симметричная система ЭДС, то токи в фазах равны по величине и сдвинуты по фазе на угол  $120^\circ$ , т.е. получается симметричная трехфазная система токов (рис. 20.3, б).

Нужно отметить, что приемники электрической энергии (электродвигатели, электролампы и т.п.) с генераторами, установленными на электростанциях, обычно непосредственно не связаны.

На пути электроэнергии от генератора к приемникам установлены трансформаторы, с помощью которых в электрической сети неоднократно изменяется напряжение. Для указанных приемников источником электрической энергии чаще всего служат трехфазные трансформаторы, которые по отношению к генераторам сами являются приемниками энергии. Поэтому далее все рассуждения будем относить к трехфазному источнику, подразумевая при этом генератор или трансформатор.

### Задачи

**Задача 20.1.** Доказать, что три вектора, каждый из которых является разностью двух смежных ЭДС в системе (20.2), взятых в порядке прямого и обратного следования фаз, представляют собой симметричную систему.

**Задача 20.2.** Пользуясь системой ЭДС (20.2), сравните модули комплексов двух ЭДС и их разности (или длины соответствующих векторов). Какой из них больше и во сколько раз?

## 20.2. СОЕДИНЕНИЕ ЗВЕЗДОЙ ПРИ СИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ

На рис. 20.4 показана связанная система при соединении фаз источника энергии и приемника звездой. Такую систему легко получить из несвязанной системы.

Концы обмоток источника  $X, Y, Z$  соединяются в общую точку  $N$ , называемую нулевой точкой, или нейтралью. Провода, соединяющие начала  $A, B$  и  $C$  обмоток источника с приемником (ли-

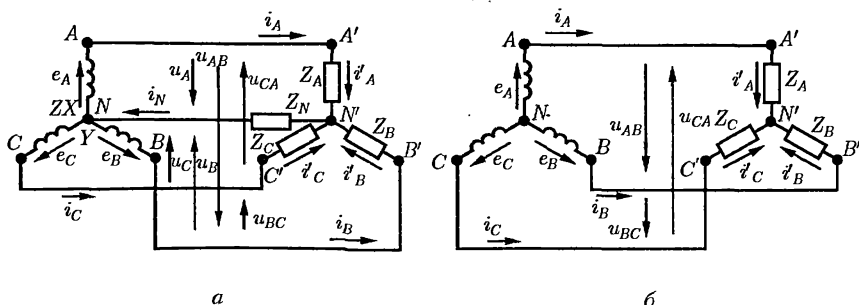


Рис. 20.4

нейные провода), сохраняются: три провода, присоединенных к концам обмоток, заменяются одним. Благодаря этому в приемнике также образуется нулевая точка  $N'$  (нейтраль). Нулевые точки источника энергии и приемника могут быть связаны проводом, который называется нулевым, или нейтральным (рис. 20.4, *а*). В этом случае получается связанная четырехпроводная трехфазная система электрических цепей.

Далее будет показано, что в симметричных трехфазных цепях можно отказаться от нулевого провода, так как ток в нем равен нулю. В этом случае связь между источником и приемником, соединенными звездой, можно осуществлять по трехпроводной схеме (рис. 20.4, *б*).

## Фазные напряжения

*Разность потенциалов между линейными зажимами и нейтралью называется фазным напряжением ( $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ ).*

Фазные напряжения источника есть напряжения между началами и концами фаз, они отличаются от ЭДС на величину падения напряжения в обмотках. Если сопротивлением обмоток можно пренебречь, то фазные напряжения источника равны соответствующим ЭДС. В симметричной системе они изображаются, так же как и ЭДС, тремя равными по величине векторами, сдвинутыми по фазе на  $120^\circ$  (рис. 20.5, *а*).

В четырехпроводной и симметричной трехпроводной цепях фазные напряжения в приемнике меньше, чем в источнике, на величину падения напряжения в соединительных проводах. Если сопротивлением проводов можно пренебречь, то фазные напряжения в приемнике считаются такими же, как в источнике.

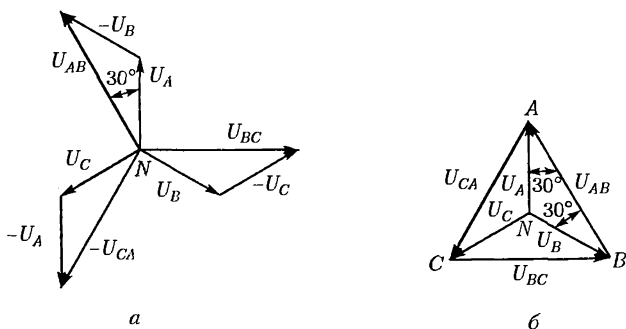


Рис. 20.5



## Линейные напряжения

Разность потенциалов между каждой парой линейных проводов называется линейным напряжением ( $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$ ).

Если принять потенциал нулевой точки  $N$  источника энергии равным нулю, то потенциалы его линейных зажимов:

$$V_A = u_A; \quad V_B = u_B; \quad V_C = u_C.$$

Линейные напряжения

$$u_{AB} = V_A - V_B = u_A - u_B;$$

$$u_{BC} = V_B - V_C = u_B - u_C;$$

$$u_{CA} = V_C - V_A = u_C - u_A.$$

Переходя к действующим значениям, напомним выражения в комплексной форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A - \dot{U}_B; \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B - \dot{U}_C; \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C - \dot{U}_A. \end{aligned} \right\} \quad (20.3)$$

Потенциалы линейных зажимов (или линейных проводов) в каждое мгновение отличаются друг от друга из-за наличия сдвига фаз между фазовыми напряжениями. Следовательно, линейные напряжения не равны нулю. Их можно определить аналитически по уравнениям (20.3) или графически с помощью векторной диаграммы (см. рис. 20.5).

Из векторной диаграммы видно, что при симметричной системе фазных напряжений система линейных напряжений тоже симметрична:  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$  равны по величине и сдвинуты относительно друг друга на  $120^\circ$ . Вместе с тем при прямой последовательности фаз звезда векторов линейных напряжений опережает на  $30^\circ$  звезду векторов фазных напряжений.

Векторную диаграмму удобно выполнить топографической, тогда каждой точке цепи соответствует определенная точка на диаграмме (рис. 20.5, б). Вектор, проведенный между двумя точками топографической диаграммы, выражает по величине и фазе напряжение между одноименными точками цепи.

Действующее значение линейных напряжений легко определяется по векторной диаграмме из треугольника, образованного векторами двух фазных и одного линейного напряжения, например,  $ANB$ :

$$U_{AB} = 2U_A \cos 30^\circ = U_A \sqrt{3}.$$

Обозначая все фазные напряжения  $U_{\phi}$ , а линейные напряжения  $U_{\text{л}}$ , получим общее соотношение между линейными и фазными напряжениями в симметричной системе:

$$\boxed{U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\phi}}. \quad (20.4)$$

## Фазные и линейные токи

В связанной системе (см. рис. 20.4, а), так же как и в несвязанной, каждая фаза представляет собой замкнутую цепь.

В соответствии с положительным направлением ЭДС в обмотках источника положительное направление токов в линейных проводах — от источника к приемнику, а в нулевом проводе — от приемника к источнику.

В трехфазных цепях различают фазные и линейные токи.

Токи в фазах источника и приемника называют **ф а з н ы м и** (на рис. 20.4 —  $i'_A, i'_B, i'_C$ ; общее обозначение  $i_{\phi}$ ). Токи в линейных проводах называют **л и н е й н ы м и** ( $i_A, i_B, i_C$ ; общее обозначение  $i_{\text{л}}$ ).

При соединении звездой в точках перехода из источника в линию и из линии в приемник нет разветвлений, поэтому фазные и линейные токи одинаковы между собой в каждой фазе:

$$\boxed{I_{\text{л}} = I_{\phi}}. \quad (20.5)$$

## Задачи

**Задача 20.3.** В каждой фазе трехфазного генератора наводится ЭДС  $E = 127$  В. Начертить схему, построить векторную диаграмму и определить линейные напряжения при холостом ходе, если в общую точку соединены зажимы: а)  $X, Y, Z$ ; б)  $X, Y, C$ ; в)  $X, B, Z$ ; г)  $X, B, C$ ; д)  $A, B, C$ . Буквами  $A, B, C$  обозначены начала, а  $X, Y, Z$  — концы обмоток.

**Р е ш е н и е.** Схема генератора и векторная диаграмма при соединении в общую точку зажимов  $X, Y, Z$  показаны на рис. 20.6, а, б. Из векторной диаграммы видно, что линейные напряжения одинаковы:

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\phi} = 1,73 \cdot 127 = 220 \text{ В.}$$

При соединении в общую точку зажимов  $X, Y, Z$  (рис. 20.7, а, б) фаза  $C$  включена началом в нулевой точке, поэтому вектор фазного напряжения этой фазы изображен на векторной диаграмме в положении, повернутом на  $180^\circ$  к нормальному, и обозначен  $U_Z$ . Из векторной диаграммы следует:  $U_{AB} = 220$  В,  $U_{BZ} = 127$  В,  $U_{ZA} = 127$  В.

Выполнить решение задачи для случаев «в», «г», «д».

**Задача 20.4.** Построить в прямоугольной системе координат графики мгновенных значений трех фазных и одного линейного напряжений для случаев «а» и «г» предыдущей задачи.

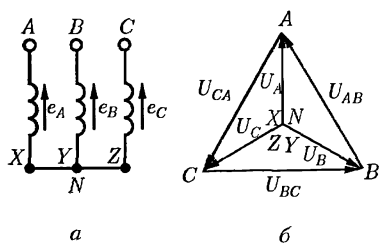


Рис. 20.6

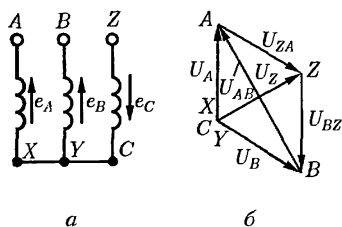


Рис. 20.7

**Указание.** Графики фазных напряжений построить методом вращения векторов на чертеже. В случае «а» построить график линейного напряжения  $U_{AB}$ , в случае «г» — линейного напряжения  $U_{AY}$ , используя построенные ранее графики фазных напряжений.

**Задача 20.5.** Написать в тригонометрической форме комплексы фазных и линейных напряжений симметричной трехфазной системы. Определить: а) сумму трех фазных напряжений, б) сумму трех линейных напряжений.

### 20.3. СОЕДИНЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОМ ПРИ СИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ

При соединении треугольником из трех обмоток источника образуется замкнутый на себя контур (рис. 20.8, а). Точно так же замкнутый контур создается из трех фаз приемника.

Общие точки двух фаз источника и двух фаз приемника соединяются между собой линейными проводами. Так образуется связанная трехфазная трехпроводная система, в которой каждая обмотка источника соединена с соответствующей фазой приемника парой линейных проводов, каждый из которых обеспечивает такую связь в двух смежных фазах.

#### Фазные и линейные напряжения

Соединение нескольких обмоток источника в замкнутый контур возможно лишь в том случае, если сумма всех ЭДС этого контура равна нулю.

Это требование выполняется при таком порядке соединения, когда конец предыдущей обмотки соединяется с началом следующей. Например, конец  $X$  фазы  $A$  соединен с началом фазы  $B$  в общей точке  $XB$ , конец  $Y$  фазы  $B$  соединен с началом фазы  $C$  в общей точке  $YC$  и конец  $Z$  фазы  $C$  соединен с началом фазы  $A$  в общей точке  $ZA$ .

Симметричная система ЭДС, действующих в контуре, имеет сумму, равную нулю (рис. 20.8, б):  $\vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C = 0$ .

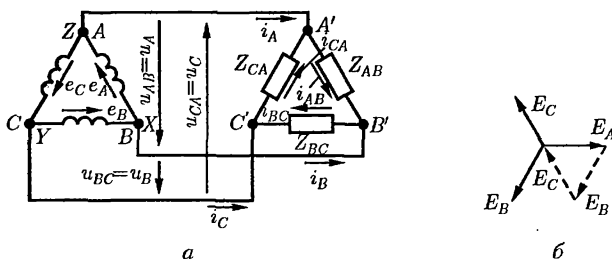


Рис. 20.8

В этом случае при холостом ходе источника ток в его обмотках отсутствует.

При несимметрии системы ЭДС их сумма не равна нулю, поэтому уже при холостом ходе в обмотках источника образуется ток, который может быть большим даже при малой несимметрии, так как сопротивление обмоток незначительно.

При неправильном включении обмоток, когда две соседние фазы соединены началами или концами (рис. 20.9), сумма ЭДС в контуре равна удвоенной величине ЭДС фазы.

Из схемы соединения треугольником видно, что фазные и линейные напряжения совпадают, так как конец одной фазы соединен с началом другой:

$$U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}. \quad (20.6)$$

Векторную диаграмму напряжений можно построить в виде звезды или в виде замкнутого треугольника векторов (рис. 20.10, а, б). В последнем случае диаграмма является топографической.

### Фазные и линейные токи

Каждая фаза приемника при соединении треугольником находится под линейным напряжением. Этим обусловлено наличие в

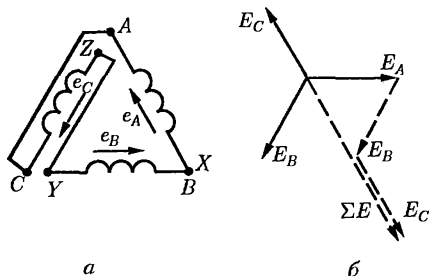


Рис. 20.9

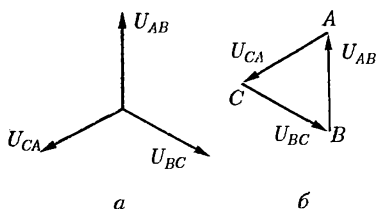


Рис. 20.10

приемнике фазных токов  $i_{AB}, i_{BC}, i_{CA}$ , положительное направление которых на схеме рис. 20.8 выбрано соответственно положительному направлению ЭДС в фазах источника.

Точки  $A', B', C'$  приемника, так же как и точки  $A, B, C$  источника, являются электрическими узлами, поэтому фазные токи отличаются от линейных  $i_A, i_B, i_C$ . Для узловых точек  $A, B, C$  можно написать уравнения в комплексной форме по первому закону Кирхгофа:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \end{aligned} \right\} \quad (20.7)$$

При симметричной нагрузке токи во всех фазах одинаковы. Звезда векторов линейных токов сдвинута относительно звезды фазных токов на  $30^\circ$  против вращения векторов, если последовательность фаз прямая (рис. 20.11, а).

Действующее значение линейных токов определяется по векторной диаграмме из равнобедренного треугольника, образованного векторами двух фазных и одного линейного токов, например из треугольника  $ANC$  (рис. 20.11, б):

$$I_A = 2I_{AB} \cos 30^\circ = I\sqrt{3}.$$

Обозначив все фазные токи  $I_\phi$ , а линейные токи  $I_n$ , получим общее соотношение между линейными и фазными токами в симметричной цепи:

$$I_n = \sqrt{3} I_\phi. \quad (20.8)$$

### Задачи

**Задача 20.6.** В каждой фазе трехфазного трансформатора наводится ЭДС  $E = 220$  В. Начертить схему, построить векторную диаграмму и оп-

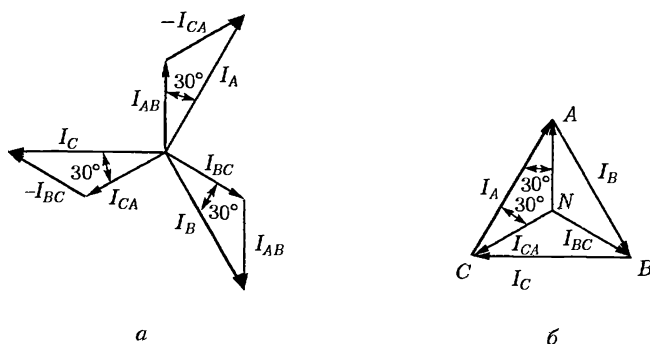


Рис. 20.11

ределить сумму ЭДС в контуре из трех обмоток, если между собой соединить зажимы: а)  $A, Z; B, X; C, Y$ ; б)  $A, Z; B, C; X, Y$ ; в)  $A, C; B, X; Z, Y$ ; г)  $A, Y; B, Z; C, X$ ;

**Задача 20.7.** Написать в тригонометрической форме комплексы фазных токов симметричной трехфазной системы. Определить сумму трех фазных токов.

**Задача 20.8.** Написать в алгебраической форме комплексы линейных токов симметричной трехфазной системы. Определить сумму трех линейных токов.

## 20.4. РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНЫХ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

Формулы (20.4) и (20.8), как уже отмечено, справедливы только для симметричных систем напряжений и токов.

Трехфазные электродвигатели имеют три одинаковые фазы обмотки, и создаваемая ими электрическая нагрузка симметрична. Несимметрию создают однофазные приемники, например лампы электрического освещения и другие бытовые электроприемники. Если при проектировании осветительную нагрузку разделить между фазами поровну, то в процессе эксплуатации нагрузка, как правило, будет несимметричной из-за неодновременности включения ламп.

При большом числе однофазных приемников несимметрия нагрузки, связанная с неодновременностью их включения, невелика, поэтому линии с напряжением 3; 6 кВ и выше, предназначенные для электроснабжения промышленных предприятий или определенного района (фидерные линии), выполняют трехпроводными независимо от схемы соединения групп приемников (звездой или треугольником).

Цель расчета состоит в определении токов в фазах приемника и проводах линии, а также мощности приемника в целом и в каждой фазе. Может быть поставлена и обратная задача.

### Соединение звездой

В симметричной цепи комплексы сопротивлений фаз приемника одинаковы ( $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$ ) и между зажимами приемника действует симметричная система линейных напряжений при любой схеме соединения источника (звездой или треугольником).

Поэтому на расчетной схеме источник (генератор или трансформатор) не показывают и говорят, что приемник включен в трехфазную сеть (см. рис. 21.3, а).

В симметричной цепи достаточно провести расчет одной фазы, так как токи и мощности во всех фазах одинаковы.

При известном линейном напряжении  $U_{\text{л}}$  фазное напряжение

$$U_{\text{ф}} = U_{\text{л}} / \sqrt{3}.$$

Фазный ток, равный линейному,

$$I_{\text{ф}} = I_{\text{л}} = U_{\text{ф}} / Z.$$

### Соединение треугольником

При соединении треугольником фазное напряжение  $U_{\text{ф}} = U_{\text{л}}$ .

Ток в фазе

$$I_{\text{ф}} = U_{\text{ф}} / Z.$$

Линейный ток

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\text{ф}}.$$

### Определение мощности

Мощность в каждой фазе трехфазной цепи определяется теми же формулами, которые применялись при расчете однофазных цепей.

При симметричной нагрузке фазные напряжения, токи и углы сдвига фаз между ними в каждой фазе одинаковы, поэтому при определении мощности цепи можно написать общие выражения:

|                                                                                                                                                                       |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $\begin{aligned} P &= 3 U_{\text{ф}} I_{\text{ф}} \cos \varphi; \\ Q &= 3 U_{\text{ф}} I_{\text{ф}} \sin \varphi; \\ S &= 3 U_{\text{ф}} I_{\text{ф}}. \end{aligned}$ | (20.9) |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|

Учитывая, что при соединении звездой

$$U_{\text{ф}} = U_{\text{л}} / \sqrt{3}; \quad I_{\text{ф}} = I_{\text{л}},$$

а при соединении треугольником

$$I_{\text{ф}} = I_{\text{л}} / \sqrt{3}; \quad U_{\text{ф}} = U_{\text{л}},$$

мощности можно определять через линейные значения напряжений и токов:

|                                                                                                                                                                                            |         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| $\begin{aligned} P &= \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi; \\ Q &= \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi; \\ S &= \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}. \end{aligned}$ | (20.10) |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|

При решении задачи символическим методом мощность определяется, так же как и в однофазных цепях, произведением соответствующих комплекса напряжения и сопряженного комплекса тока.

### Задачи

**Задача 20.9.** К трехфазному трансформатору с линейным напряжением на вторичной обмотке 380 В включены звездой электрические лампы мощностью 40 Вт каждая (по 100 шт. в фазе) и трехфазный двигатель мощностью 10 кВт, имеющий КПД 85 %.

Пренебрегая сопротивлением проводов, определить токи в линии.

**Решение.** Заданная нагрузка симметрична, так как в каждой фазе включены одинаковые по величине и характеру приемники: осветительная нагрузка  $P = 40 \cdot 100 = 4000$  Вт и одна фаза двигателя (рис. 20.12).

Расчет можно свести на одну фазу

$$U_{\phi} = U_{\text{л}} / \sqrt{3} = 380 / 1,73 = 220 \text{ В.}$$

Ток осветительной нагрузки

$$I_0 = P_{\phi} / U_{\phi} = 4000 / 220 = 18,2 \text{ А.}$$

Ток в фазе двигателя

$$I_{\text{д}} = \frac{P_{\text{д}}}{3 U_{\phi} \eta \cos \varphi} = \frac{10\,000}{3 \cdot 220 \cdot 0,85 \cdot 0,8} = 22,3 \text{ А.}$$

Для нахождения тока в линии нужно сложить токи ламп и двигателя. Эти токи по фазе не совпадают, поэтому разложим их на активные и реактивные составляющие и сложим одноименные составляющие.

Ток в лампах совпадает по фазе с напряжением, поэтому реактивный ток ламп  $I_{0, \text{р}} = 0$ , активный ток  $I_{0, \text{а}} = I_0 = 18,2 \text{ А}$ .

Активный ток в фазе двигателя

$$I_{\text{д, а}} = I_{\text{д}} \cos \varphi = 22,3 \cdot 0,8 = 17,8 \text{ А.}$$

Реактивный ток в фазе двигателя

$$I_{\text{д, р}} = I_{\text{д}} \sin \varphi = 22,3 \cdot 0,6 = 13,4 \text{ А.}$$

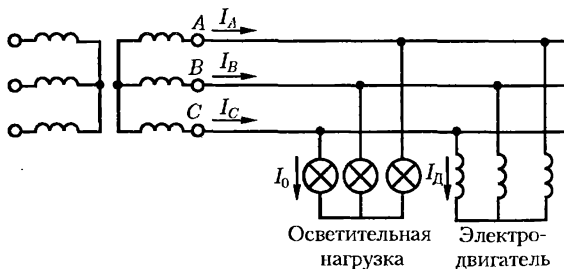


Рис. 20.12



Общий активный ток в линии

$$I_a = I_{\alpha, a} + I_{\text{д. а}} = 18,2 + 17,8 = 36 \text{ A.}$$

Общий реактивный ток в линии

$$I_p = I_{\text{д. р}} = 13,4 \text{ A.}$$

Ток в линии

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{36^2 + 13,4^2} = 38,5 \text{ A.}$$

**Задача 20.10.** Выполнить решение предыдущей задачи символическим методом.

*Указание.* По заданным значениям мощностей осветительной нагрузки двигателя определить расчетную проводимость одной фазы двигателя группы ламп, включенных в фазу, а затем проводимости фазы.

При определении проводимости фазы двигателя нужно учесть, что его номинальная мощность  $P_{\text{ном}} = 10 \text{ кВт}$  задана на валу. Электрическая мощность в зажимах двигателя:  $P = P_{\text{ном}}/\eta$ .

**Задача 20.11.** Приемник электрической энергии, соединенный звездой, имеет сопротивления  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = (29 + j18) \text{ Ом}$ .

Определить токи в проводах линии, с помощью которой приемник подключен к генератору с линейным напряжением 380 В, если каждый провод линии имеет сопротивление  $\underline{Z}_\text{л} = (1 + j2) \text{ Ом}$ .

Определить также активную, реактивную и полную мощности приемника.

**Задача 20.12.** Приемник электрической энергии, соединенный треугольником, имеет активное сопротивление  $R = 12 \text{ Ом}$  и емкость  $C = 199 \text{ мкФ}$ . Определить: токи в фазах приемника и в линии, с помощью которой приемник подключен к сети с линейным напряжением  $U = 220 \text{ В}$  и частотой  $f = 50 \text{ Гц}$ ; активную, реактивную и полную мощности приемника.

**Решение.** Емкостное сопротивление фазы приемника

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 199} = 16 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление фазы приемника

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ Ом.}$$

Фазное напряжение приемника

$$U_\phi = U_\text{л} = 220 \text{ В.}$$

Фазный ток

$$I_\phi = U_\phi / Z = 220/20 = 11 \text{ A.}$$

### Линейный ток

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\Phi} = \sqrt{3} \cdot 11 = 19 \text{ А.}$$

Мощность приемника:

активная

$$P = 3U_{\Phi}I_{\Phi} \cos \varphi = 3 \cdot 220 \cdot 11 \frac{12}{20} = 4356 \text{ Вт};$$

реактивная

$$S = 3U_{\Phi}I_{\Phi} \sin \varphi = 3 \cdot 220 \cdot 11 \frac{16}{20} = 5808 \text{ вар};$$

полная

$$S = 3U_{\Phi}I_{\Phi} = 3 \cdot 220 \cdot 11 = 7260 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

**Задача 20.13.** Трехфазный асинхронный двигатель, соединенный треугольником, при номинальном напряжении  $U_{\text{ном}} = 380 \text{ В}$  и номинальной нагрузке на валу имеет ток в фазе  $22 \text{ А}$ ,  $\cos \varphi = 0,8$ .

Определить активную и реактивную мощности двигателя на его зажимах и механическую мощность на валу, если его КПД  $\eta = 0,88$ . Какую мощность будет развивать этот двигатель, если его включить в ту же сеть, соединив звездой, а  $\cos \varphi$  и  $\eta$  считать неизменными?

**Задача 20.14.** Шесть резисторов, имеющих равные сопротивления по  $12 \text{ Ом}$ , соединены по три треугольником и звездой и включены в трехфазную сеть тремя проводами, сопротивление каждого из которых  $1 \text{ Ом}$  (см. рис. 21.6).

Определить фазные токи и напряжения приемников, если линейное напряжение в сети  $208 \text{ В}$ . Построить векторную диаграмму.

## ГЛАВА 21

# ТРЕХФАЗНЫЕ НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЦЕПИ

Трехфазная цепь несимметрична, если комплексы сопротивлений ее фаз неодинаковы.

Несимметричной может быть действующая в цепи система ЭДС (не равны модули ЭДС или фазовые сдвиги между каждой парой ЭДС).

Для расчета несимметричной цепи применяются различные методы в зависимости от ее схемы и вида несимметрии.

### 21.1. РАСЧЕТ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ ПРИ СОЕДИНЕНИИ ИСТОЧНИКА И ПРИЕМНИКА ЗВЕЗДОЙ

На схеме (см. рис. 20.4) видно, что при соединении звездой трехфазная система представляет собой электрическую цепь с двумя узлами — нейтральными точками  $N$  и  $N'$ . Наиболее удобным методом расчета в данном случае является метод узлового напряжения.

#### Определение токов

Рассмотрим сначала общий случай расчета цепи с нулевым проводом, сопротивление которого  $Z_N$ . При этом сделаем некоторые упрощения: сопротивления линейных проводов и фаз источников будем полагать равными нулю. Если указанные сопротивления нельзя считать равными нулю, их можно отнести к приемнику, прибавив к сопротивлениям последнего по правилам сложения комплексных.

При таком упрощении потенциалы линейных зажимов источника и приемника (например, точек  $A$  и  $A'$ ) можно считать одинаковыми.

Напряжение между нулевыми точками  $N$  и  $N'$ , или узловое напряжение,

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}. \quad (21.1)$$

Напряжения на фазах приемника:

$$\dot{U}'_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N; \quad \dot{U}'_B = \dot{E}_B - \dot{U}_N; \quad \dot{U}'_C = \dot{E}_C - \dot{U}_N, \quad (21.2)$$

а токи в фазах

$$\dot{I}_A = \dot{U}'_A / \underline{Z}_A; \quad \dot{I}_B = \dot{U}'_B / \underline{Z}_B; \quad \dot{I}_C = \dot{U}'_C / \underline{Z}_C. \quad (21.3)$$

Ток в нулевом проводе

$$\dot{I}_N = \dot{U}_N / \underline{Z}_N. \quad (21.4)$$

Для узловой точки  $N$  или  $N'$  справедливо также уравнение по первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N. \quad (21.5)$$

Это уравнение можно использовать как расчетное или проверочное.

Порядок расчета трехфазной цепи при соединении звездой, описанный ранее, пригоден и при отсутствии нулевого провода.

## Смещение нейтрали

На рис. 21.1 изображена топографическая диаграмма цепи рис. 20.4, а при несимметричной нагрузке.

При наличии сопротивления в нулевом проводе ( $Z_N \neq 0$ ) нулевая точка приемника на топографической диаграмме не совпадает с нулевой точкой источника. Поэтому напряжение  $U_N$  называют напряжением смещения нейтрали. Вследствие смещения нейтрали напряжения на фазах приемника оказываются неодинаковыми, несмотря на симметрию фазных напряжений источника (см. решение задачи 21.3).

Из формулы (21.1) видно, что симметрия фазных напряжений на нагрузке, когда  $U_N = 0$ , достигается в двух частных случаях.

1. При симметричной нагрузке, когда комплексы проводимостей фаз равны:  $\underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \underline{Y}$ . В этом случае в числителе проводимость  $\underline{Y}$  можно вынести за скобку, внутри которой складываются три вектора ЭДС источника, равных по величине и сдвинутых по фазе на  $120^\circ$ ; эта сумма равна нулю (см. рис. 20.8, б) и  $U_N = 0$ . Поэтому ток в нулевом проводе равен нулю [см. формулу (21.4)] и необходимость в этом проводе отпадает, а электроснабжение симметричных приемников осуществляется по трехпроводной системе.

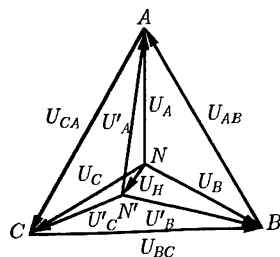


Рис. 21.1

2. В четырехпроводной системе, когда сопротивление нулевого провода равно нулю ( $Y_N = \infty$ ).

## Роль нулевого провода

Нулевой провод является уравнительным. Потенциалы нейтрали источника и приемника с помощью этого провода принудительно уравнены, а поэтому звезда векторов фазных напряжений приемника точно совпадает со звездой фазных напряжений источника.

Четырехпроводная система применяется в электрических сетях с напряжением 380/220 В при электроснабжении от общего источника силовой (электродвигатели) и осветительной (электролампы) нагрузки.

При несимметричной нагрузке обрыв нулевого провода ( $Z_N = \infty$ ) вызывает значительное изменение токов и фазных напряжений, что в большинстве случаев недопустимо. Поэтому в нулевой провод предохранители не устанавливаются.

## Определение мощности

При несимметричной нагрузке нужно определить мощность каждой фазы. Например, для фазы А:

$$P_A = U_A I_A \cos \varphi_A; \quad Q_A = U_A I_A \sin \varphi_A; \quad S_A = U_A I_A.$$

Аналогично определяются мощности других фаз.

Активная мощность всей трехфазной цепи равна сумме мощностей фаз

$$P = P_A + P_B + P_C. \quad (21.6)$$

Реактивная мощность цепи равна алгебраической сумме реактивных мощностей фаз:

$$Q = \sum Q_{\phi}. \quad (21.7)$$

В этой сумме реактивная мощность катушки считается положительной, а реактивная мощность конденсатора — отрицательной.

## Задачи

**Задача 21.1.** При соединении звездой с нулевым проводом определить фазные напряжения и токи в приемнике энергии, сопротивления которого заданы комплексами:

$$\underline{Z}_A = (8 + j4) \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_B = (8 - j4) \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_C = 5 \text{ Ом}.$$

Действующее значение ЭДС симметричной трехфазной системы 220 В. Сопротивление нулевого провода  $\underline{Z}_N = (0,5 + j1) \text{ Ом}$ .

Построить векторную диаграмму.

Сопротивлениями линейных проводов и внутренними сопротивлениями источника ЭДС пренебречь.

Решение. Схема, соответствующая условию задачи, показана на рис. 21.2, а.

Проводимости ветвей между узловыми точками  $NN'$ :

$$\underline{Y}_A = 1/\underline{Z}_A = 1/(8 + j4) = 0,1 - j0,05;$$

$$\underline{Y}_B = 1/\underline{Z}_B = 1/(8 - j4) = 0,1 + j0,05;$$

$$\underline{Y}_C = 1/\underline{Z}_C = 1/5 = 0,2;$$

$$\underline{Y}_N = 1/\underline{Z}_N = 1/(0,5 + j1) = 0,4 - j0,8.$$

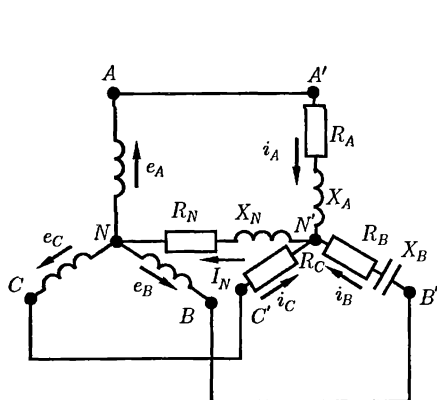
Комплексы ЭДС источника:

$$\dot{E}_A = 220; \quad \dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} = -110 - j190;$$

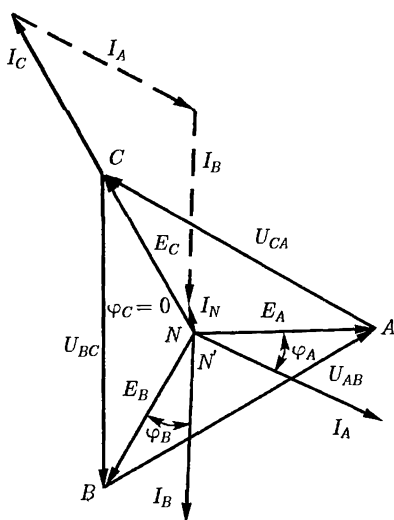
$$\dot{E}_C = 220e^{-j240^\circ} = -110 + j190.$$

Узловое напряжение

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} =$$



а



б

Рис. 21.2

$$= \frac{220(0,1 - j0,05) + (-110 - j190)(0,1 + j0,05) + (-110 + j190)0,2}{0,1 - j0,05 + 0,1 + j0,05 + 0,2 + 0,4 - j0,8} =$$

$$= -2,5 + j0,625.$$

Фазные напряжения приемника:

$$\dot{U}'_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N = 220 + 2,5 - j0,625 = 222,5 - j0,625;$$

$$\dot{U}'_B = \dot{E}_B - \dot{U}_N = -110 - j190 + 2,5 - j0,625 = -107,5 - j190,625;$$

$$\dot{U}'_C = \dot{E}_C - \dot{U}_N = -110 + j190 + 2,5 - j0,625 = -107,5 + j189,375;$$

Токи в фазах и нулевом проводе:

$$\dot{I}_A = \dot{U}'_A \underline{Y}_A = (222,5 - j0,625)(0,1 - j0,05) = 22,22 - j11,19;$$

$$\dot{I}_B = \dot{U}'_B \underline{Y}_B = (107,5 - j190,625)(0,1 + j0,05) = 1,22 - j24,44;$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}'_C \underline{Y}_C = (-107,5 + j189,375)0,2 = -21,5 + j37,88;$$

$$\dot{I}_N = \dot{U}'_N \underline{Y}_N(N) = (-2,5 + j0,625)(0,4 - j0,8) = -0,5 + j2,25.$$

Векторная диаграмма напряжений и токов показана на рис. 21.2, б.

**Задача 21.2.** Определить токи и фазные напряжения в приемнике по условию предыдущей задачи, но при отсутствии нулевого провода.

Построить графики фазных токов:  $I_A(\omega t)$ ,  $I_B(\omega t)$ ,  $I_C(\omega t)$ . Учитывая принятые условно-положительные направления токов, по графикам определить, какие из трех линейных проводов являются прямыми, а какие — обратными в моменты времени, соответствующие фазовым углам:  $\omega t$  90, 150, 180, 210 и 270°.

**Задача 21.3.** Электрические лампы соединены звездой в трехфазную сеть с линейным напряжением 380 В. В каждую фазу включено по 50 ламп с номинальной мощностью 60 Вт каждая, номинальным напряжением 220 В. Как изменяются фазные напряжения и токи при изменении нагрузки одной фазы от холостого хода до короткого замыкания при обрыве нулевого провода?

В каждом выбранном случае нагрузки построить векторную диаграмму, определить мощность всей трехфазной цепи.

**Решение.** Условию задачи соответствует схема рис. 21.3, а, на которой группа ламп в каждой фазе условно показана двумя лампами.

Оставляя постоянным число ламп в фазах В и С, будем менять его в фазе А. Подсчеты по условию задачи выполним для таких нагрузок в фазе А: 50, 25, 100 ламп, короткое замыкание, холостой ход.

1. При включении в каждую фазу по 50 одинаковых ламп нагрузка симметрична. Поэтому фазные напряжения на нагрузке равны фазным напряжениям в сети:  $U_\phi = U_n / \sqrt{3} = 380 / 1,73 = 220$  В.

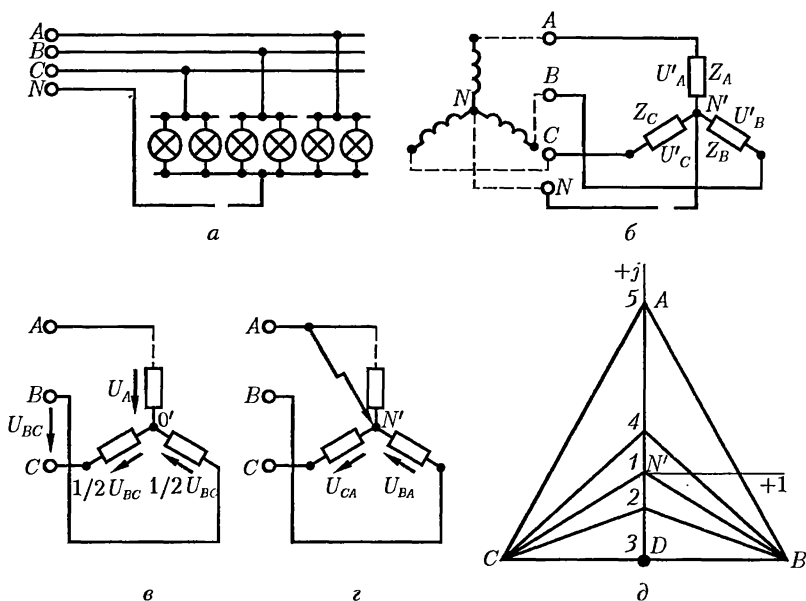


Рис. 21.3

Напряжение на лампах равно номинальному. В этом случае лампы работают с номинальной мощностью.

Это дает право определить фазные токи по заданной мощности ламп:  $I_\phi = P_\phi / U_\phi = (50 \cdot 60) / 220 = 13,6 \text{ A}$ .

При соединении звездой  $I_\phi = I_n$ , поэтому  $I_n = 13,6 \text{ A}$ . Общая мощность трехфазной цепи  $P = 3P_\phi = 3 \cdot 60 \cdot 50 = 9000 \text{ Вт}$ .

2. В фазе A включено 25 ламп.

При несимметричной нагрузке напряжения на лампах отличаются от фазных напряжений в сети. Поэтому определить токи по заданной мощности ламп нельзя, так как действительная мощность ламп и фазные напряжения их неизвестны. При решении задачи будем считать, что сопротивление ламп в накаливаемом состоянии нити практически не меняется при некотором изменении их мощности.

Сопротивление лампы в номинальном режиме

$$R_1 = U_{\text{ном}}^2 / P_{\text{ном}} = 220^2 / 60 = 800 \text{ Ом}.$$

Сопротивление фаз B и C при включении 50 ламп

$$R_B = R_C R_1 / n = 800 / 50 = 16 \text{ Ом}.$$

Сопротивление фазы A

$$R_A = R_1 / 25 = 800 / 25 = 32 \text{ Ом}.$$

Комплексы фазных напряжений в сети



$$\dot{U}_A = 220e^{j90^\circ} = j220; \quad \dot{U}_B = 220e^{-j30^\circ} = 190 - j110;$$

$$\dot{U}_C = 220e^{-j150^\circ} = -190 - j110.$$

Проводимости ветвей:

$$\underline{Y}_A = 1/32 \text{ См}; \quad \underline{Y}_B = \underline{Y}_C = 1/16 \text{ См}.$$

Смещение нейтрали

$$\dot{U}_N = \frac{j220 \cdot \frac{1}{32} + (190 - j110) \frac{1}{16} + (-190 - j110) \frac{1}{16}}{1/32 + 1/16 + 1/16} = -j44.$$

Напряжения фаз:

$$\dot{U}'_A = \dot{U}_A - \dot{U}_N = j220 + j44 = j264;$$

$$\dot{U}'_B = \dot{U}_B - \dot{U}_N = 190 - j110 + j44 = 190 - j66;$$

$$\dot{U}'_C = \dot{U}_C - \dot{U}_N = -190 - j110 + j44 = -190 - j66;$$

Токи в фазах:

$$\dot{I}_A = \dot{U}'_A \underline{Y}_A = j264 \cdot \frac{1}{32} = j8,25;$$

$$\dot{I}_B = \dot{U}'_B \underline{Y}_B = (190 - j66) \frac{1}{16} = 11,88 - j4,12;$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}'_C \underline{Y}_C = (-190 - j66) \frac{1}{16} = -11,88 - j4,12.$$

Мощность всех ламп в фазах:

$$P_A = \dot{U}'_A \dot{I}_A = j264(-j8,25) = 2180 \text{ Вт}.$$

$$P_B = \dot{U}'_B \dot{I}_B = (190 - j66)(11,88 + j4,12) = 2532 \text{ Вт}.$$

$$P_C = \dot{U}'_C \dot{I}_C = (-190 - j66)(-11,88 + j4,12) = 2532 \text{ Вт}.$$

Мощность одной лампы:

$$P_{1A} = \frac{P_A}{n_A} = \frac{2180}{25} = 87 \text{ Вт}.$$

$$P_{1B} = \frac{P_B}{n_B} = \frac{2532}{50} = 50,7 \text{ Вт}.$$

$$P_{1C} = \frac{P_C}{n_C} = \frac{2532}{50} = 50,7 \text{ Вт}.$$

$$P = P_A + P_B + P_C = 2180 + 2532 + 2532 = 7244 \text{ Вт.}$$

Векторная диаграмма напряжений для различной нагрузки фазы  $A$  показана на рис. 21.3,  $\partial$ .

Положение нулевой точки на диаграмме соответствует такой нагрузке фазы  $A$ : 1 — симметричная нагрузка (во всех фазах по 50 ламп), 2 — в фазе  $A$  25 ламп, 3 — фаза  $A$  разомкнута (холостой ход), 4 — в фазе  $A$  100 ламп, 5 — в фазе  $A$  короткое замыкание.

Выполните расчет трехфазной цепи для случаев нагрузки 3, 4, 5 подобно приведенному расчету для случая нагрузки 2, проверьте соответствие результатов расчета векторной диаграмме рис. 21.3,  $\partial$ .

Как видно, нулевая точка нагрузки при изменении проводимости фазы  $A$  перемещается на прямой  $\overline{AD}$ , которая является перпендикуляром, опущенным из точки  $A$  к вектору линейного напряжения  $U_{BC}$ . При холостом ходе фазы  $A$  (обрыв линейного провода в этой фазе) нулевая точка перемещается в точку  $D$  и напряжения на двух других фазах  $U_B$  и  $U_C$  по величине оказываются равными половине линейного напряжения  $U_{BC}$  (рис. 21.3,  $\partial$ ).

То же следует из схемы рис. 21.3,  $\partial$ . В рассматриваемом случае сопротивления фаз  $B$  и  $C$  оказываются включенными последовательно на линейное напряжение  $U_{BC}$ .

Сопротивления эти равны, поэтому линейное напряжение делится между двумя фазами поровну.

При коротком замыкании фазы  $A$  линейный провод этой фазы подводится непосредственно к нулевой точке нагрузки (рис. 21.3,  $\partial$ ). Поэтому лампы, включенные в фазы  $B$  и  $C$ , оказываются под линейным напряжением.

## 21.2. РАСЧЕТ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ ПРИ СОЕДИНЕНИИ ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Трехфазная цепь при соединении приемника треугольником и любой схеме соединения фаз источника имеет разветвленную многоконтурную схему (см., например, рис. 20.8,  $a$ ; 21.5).

Расчет такой цепи выполняется одним из известных методов с учетом состава ее элементов и схемы соединения.

### Соединение источника и приемника треугольником

Расчет сложной цепи (см. рис. 20.8,  $a$ ) значительно упрощается, если не принимать во внимание сопротивление проводов. В этом случае напряжения на фазах приемника равны соответствующим напряжениям источника и, как правило, представляют собой симметричную систему.

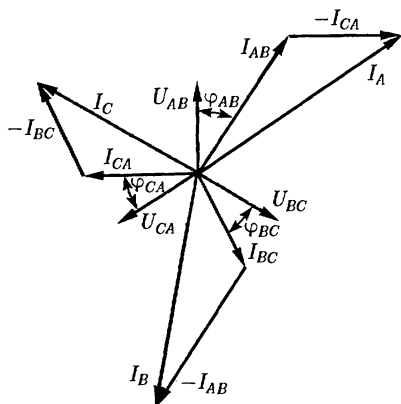


Рис. 21.4

Если трехфазная система напряжений, приложенных к приемнику, известна, то фазные токи в несимметричном приемнике определяются отдельно по формулам

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{AB} &= \dot{U}_{AB} / \underline{Z}_{AB}; \\ \dot{I}_{BC} &= \dot{U}_{BC} / \underline{Z}_{BC}; \\ \dot{I}_{CA} &= \dot{U}_{CA} / \underline{Z}_{CA}, \end{aligned} \right\} \quad (21.8)$$

где  $\underline{Z}_{AB}$ ,  $\underline{Z}_{BC}$ ,  $\underline{Z}_{CA}$  — полные сопротивления фаз.

Линейные токи можно определить графически, как показано на

рис. 21.4. Если задача решается в комплексной форме, линейные токи находят по формулам (20.7).

Мощность в несимметричной трехфазной цепи при соединении треугольником определяют по тем же формулам, что и при соединении звездой (21.6), (21.7).

## Преобразование звезды и треугольника сопротивлений в трехфазных цепях

Расчет трехфазных цепей при смешанном соединении (звездой и треугольником) с учетом сопротивлений проводов линии представляет значительные трудности.

В этих случаях упрощения достигаются благодаря применению метода взаимного преобразования звезды и треугольника (см. 4.5).

На рис. 21.5 приемник энергии соединен треугольником. С учетом сопротивления проводов линии ( $\underline{Z}'_A$ ,  $\underline{Z}'_B$ ,  $\underline{Z}'_C$ ) расчет такой це-

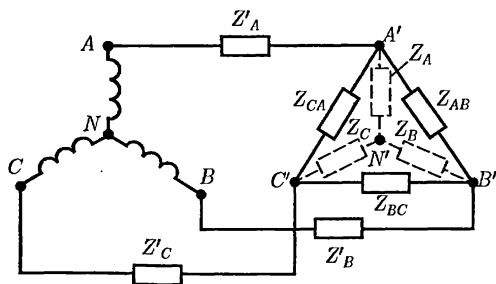


Рис. 21.5

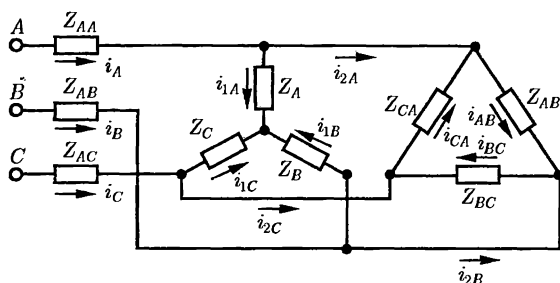


Рис. 21.6

пи удобно выполнить, заменив треугольник сопротивлений эквивалентной звездой. Общее сопротивление фазы определяется сложением сопротивлений проводов линии и эквивалентной звезды приемника.

Если в ходе расчета схемы со смешанным соединением приемников — звездой и треугольником (рис. 21.6) — необходимо определить общее сопротивление фазы, это делается преобразованием звезды в треугольник или треугольника в звезду.

При симметричной нагрузке можно преобразовать треугольник в звезду, а затем две звезды заменить одной. Последняя операция возможна только при симметричной нагрузке, когда фазные напряжения у этих «звезд» одинаковы (смещение нейтрали отсутствует). При несимметричной нагрузке звезду следует преобразовать в эквивалентный треугольник, а затем сложением соответствующих проводимостей определить общую проводимость каждой фазы.

Если в последнем случае требуется учесть сопротивление проводов, то общий треугольник еще раз приходится преобразовать в звезду и к сопротивлениям звезды прибавить сопротивления проводов линии.

## Задачи

**Задача 21.4.** Сопротивления фаз приемника  $\underline{Z}_{AB} = (8 + j4)$ ;  $\underline{Z}_{BC} = (8 - j4)$ ;  $\underline{Z}_{CA} = 5$  Ом подключены треугольником к трехфазному генератору, обмотки которого также соединены треугольником. Действующие значения симметричной системы ЭДС генератора 220 В. Пренебрегая сопротивлениями линейных проводов и обмоток генератора, определить фазные и линейные токи, активную, реактивную и полную мощности каждой фазы и всей цепи. Построить векторную диаграмму.

**Решение.** Схема рис. 20.8, а соответствует условию задачи. Если сопротивления линейных проводов и обмоток генератора считать равными нулю, то фазные напряжения приемника равны соответствующим ЭДС:

$$\dot{U}_{AB} = j220; \dot{U}_{BC} = 220e^{-j30^\circ} = 190 - j110; \dot{U}_{CA} = 220e^{-j150^\circ} = -190 - j110.$$

Фазные токи в приемнике:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{AB} &= \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{j220}{8 + j4} = 11 + j22; \\ \dot{I}_{BC} &= \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{190 - j110}{8 - j4} = 24,5 - j1,5; \\ \dot{I}_{CA} &= \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{-190 - j110}{5} = -38 - j22. \end{aligned}$$

Линейные токи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 11 + j22 + 38 + j22 = 49 + j44; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 24,5 - j1,5 - 11 - j22 = 13,5 - j23,5; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = -38 - j22 - 24,3 + j1,5 = -62,5 - j20,5. \end{aligned}$$

Сумма линейных токов

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 49 + j44 + 13,5 - j23,5 - 62,5 - j20,5 = 0.$$

Равенство нулю суммы линейных токов является общим свойством трехфазных трехпроводных цепей при соединении звездой и треугольником при симметричной и несимметричной нагрузках.

Мощности фаз:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{AB} &= \dot{U}_{AB} \dot{I}_{AB}^* = j220(11 - j22) = 4840 + j2420; \\ \underline{S}_{BC} &= \dot{U}_{BC} \dot{I}_{BC}^* = (190 - j110)(24,5 + j1,5) = 4840 - j2420; \\ \underline{S}_{CA} &= \dot{U}_{CA} \dot{I}_{CA}^* = (-190 - j110)(-38 + j22) = 12060. \end{aligned}$$

Общая мощность системы:

активная

$$P = 4840 + 4840 + 12060 = 21\,740 \text{ Вт},$$

реактивная

$$Q = 2420 - 2420 = 0.$$

Векторная диаграмма построена на рис. 21.7.

**Задача 21.5.** Приемник электрической энергии, соединенный треугольником, включен в сеть с линейным напряжением 120 В. Сопротивления фаз:  $R_{AB} = 5 \text{ Ом}$ ;  $R_{BC} = 6 \text{ Ом}$ ;  $X_{BC} = 8 \text{ Ом}$  (инд.);  $X_{CA} = 10 \text{ Ом}$  (емк.).

Начертить схему по условию задачи. Определить фазные и линейные токи, активную, реактивную и полную мощности в каждой фазе и всей цепи. Построить векторную диаграмму.

**Решение.** Схема цепи изображена на рис. 21.8, а.

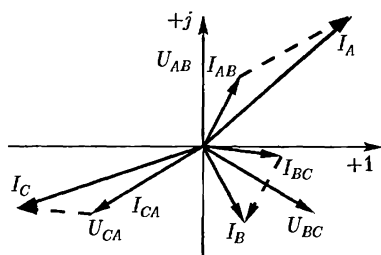


Рис. 21.7

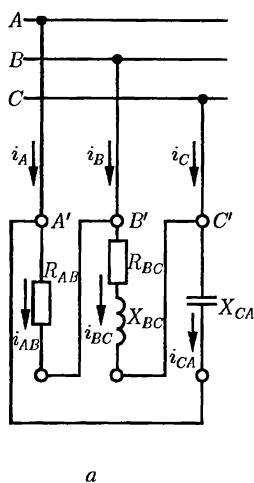
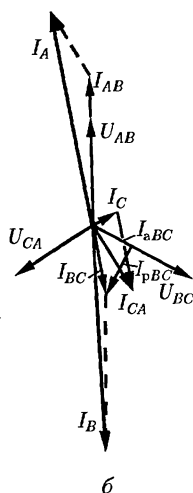


Рис. 21.8



Решим задачу без применения комплексных чисел. Токи в фазах:

$$I_{AB} = U_{AB}/Z_{AB} = 120/5 = 24 \text{ A};$$

$$I_{BC} = U_{BC}/Z_{BC} = 120/(\sqrt{6^2 + 8^2}) = 12 \text{ A};$$

$$I_{CA} = U_{CA}/Z_{CA} = 120/10 = 12 \text{ A}.$$

Линейные токи определим графически с помощью векторной диаграммы. Для этого найдем активные и реактивные токи фаз.

В фазе AB включено активное сопротивление, поэтому

$$I_{aAB} = 24 \text{ A}; I_{pAB} = 0.$$

В фазе BC последовательно соединены R и X\_L, поэтому

$$I_{aBC} = I_{BC} \cos \varphi_{BC} = 12 \frac{6}{10} = 7,2 \text{ A};$$

$$I_{pBC} = I_{BC} \sin \varphi_{BC} = 12 \frac{8}{10} = 9,6 \text{ A}.$$

В фазе CA включено емкостное сопротивление, следовательно,

$$I_{aCA} = 0; I_{pCA} = 12 \text{ A}.$$

Векторная диаграмма цепи показана на рис. 21.8, б. Для определения линейных токов постройте векторную диаграмму на листе миллиметровой бумаги в масштабах:  $M_i = 6 \text{ A/cm}$ ,  $M_u = 40 \text{ V/cm}$ .

Линейные токи:  $I_A = 34,5 \text{ A}$ ;  $I_B = 35,4 \text{ A}$ ;  $I_C = 5,7 \text{ A}$ .

Мощности фаз:

активные

$$P_{AB} = U_{AB} I_{aAB} = 120 \cdot 24 = 2880 \text{ Вт};$$

$$P_{BC} = U_{BC} I_{aBC} = 120 \cdot 7,2 = 864 \text{ Вт};$$

$$P_{CA} = U_{CA} I_{aCA} = 120 \cdot 0 = 0;$$

реактивные

$$Q_{AB} = U_{AB} I_{pAB} = 120 \cdot 0 = 0;$$

$$Q_{BC} = U_{BC} I_{pBC} = 120 \cdot 9,6 = 1152 \text{ вар};$$

$$Q_{CA} = U_{CA} I_{pCA} = 120 \cdot 12 = 1440 \text{ вар};$$

полные

$$S_{AB} = P_{AB} = 2880 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$S_{BC} = U_{BC} I_{BC} = 120 \cdot 12 = 1440 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$S_{CA} = Q_{CA} = 1440 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Мощность всей цепи:

активная

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 2880 + 864 + 0 = 3744 \text{ Вт};$$

реактивная

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 0 + 1152 - 1440 = -288 \text{ вар}.$$

Знак минус указывает на емкостный характер реактивной мощности цепи.

**Задача 21.6.** Задачу 21.4 решить без применения комплексных чисел графоаналитическим методом.

**Задача 21.7.** Решить задачу 21.5 символическим методом.

### 21.3. СИММЕТРИЧНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ

Несимметричную трехфазную систему токов (напряжений или других синусоидальных величин) можно представить в виде суммы трех симметричных систем.

Разложение несимметричной системы векторов на симметричные составляющие применяется для расчета и анализа несимметричных режимов в трехфазных цепях: при симметричной нагрузке, но несимметричной системе ЭДС, при однофазных и двухфазных

коротких замыканиях, при обрыве линейных проводов в цепях с симметричной системой ЭДС.

## Комплексы симметричных составляющих

Первая симметричная система имеет прямую последовательность фаз ( $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow C_1$ , рис. 21.9, а), вторая — обратную ( $A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow C_2$ , рис. 21.9, б). Третья система, называемая системой нулевой последовательности, состоит из трех равных величин, совпадающих по фазе ( $A_0, B_0, C_0$ , рис. 21.9, в).

Система величин:  
прямой последовательности

$$\dot{A}_1; \dot{B}_1 = \dot{A}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \dot{C}_1 = \dot{A}_1 e^{+j\frac{2\pi}{3}};$$

обратной последовательности

$$\dot{A}_2; \dot{B}_2 = \dot{A}_2 e^{+j\frac{2\pi}{3}}; \dot{C}_2 = \dot{A}_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}};$$

нулевой последовательности

$$\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0.$$

Умножение на  $e^{j\frac{2\pi}{3}}$  означает поворот вектора на  $120^\circ$  против движения часовой стрелки. Обозначим  $e^{j\frac{2\pi}{3}}$  через  $a$  и будем называть это выражение поворотным множителем.

Поворот вектора против часовой стрелки на  $240^\circ$  можно выразить умножением его на  $a^2$ .

Умножение вектора на  $a^3$  не меняет его положения:

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1; a^4 = a^3 a = a. \quad (21.9)$$

С помощью поворотного множителя  $a$  системы прямой и обратной последовательности можно записать так:

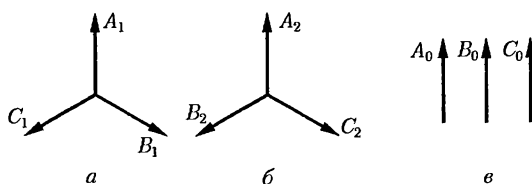


Рис. 21.9



$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_1; \dot{B}_1 = \dot{A}_1 a^2; \dot{C}_1 = \dot{A}_1 a; \\ \dot{A}_2; \dot{B}_2 = \dot{A}_2 a; \dot{C}_2 = \dot{A}_2 a^2. \end{aligned} \right\} \quad (21.10)$$

Сумма синусоидальных величин симметричной системы равна нулю, поэтому

$$1 + a + a^2 = 0. \quad (21.11)$$

### Разложение несимметричной системы на симметричные составляющие

Выразим комплексы несимметричной системы через симметричные составляющие:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0; \\ \dot{B} &= \dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_0; \\ \dot{C} &= \dot{C}_1 + \dot{C}_2 + \dot{C}_0. \end{aligned} \right\} \quad (21.12)$$

Если из этой системы уравнений можно однозначно определить симметричные составляющие через известные величины  $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$  несимметричной системы, то этим будет доказана возможность разложения несимметричной системы на три симметричные — прямой, обратной и нулевой последовательности.

Используя выражения (21.10), запишем систему уравнений (21.12) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0; \\ \dot{B} &= \dot{A}_1 a^2 + \dot{A}_2 a + \dot{A}_0; \\ \dot{C} &= \dot{A}_1 a + \dot{A}_2 a^2 + \dot{A}_0. \end{aligned} \right\} \quad (21.13)$$

Решение системы уравнений (21.13) позволяет найти симметричные составляющие  $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_0$ .

Сложим уравнения

$$\dot{A} + \dot{B} + \dot{C} = \dot{A}_1(1 + a^2 + a) + \dot{A}_2(1 + a + a^2) + 3\dot{A}_0.$$

Учитывая формулу (21.11), найдем

$$\dot{A}_0 = \frac{\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}}{3}. \quad (21.14)$$

Умножим второе уравнение в системе (21.13) на  $a$ , а третье — на  $a^2$  и сложим все уравнения:

$$\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0;$$

$$\dot{B}a = \dot{A}_1 a^3 + \dot{A}_2 a^2 + \dot{A}_0 a;$$

$$\dot{C}a^2 = \dot{A}_1 a^3 + \dot{A}_2 a^4 + \dot{A}_0 a^2;$$

---


$$\dot{A} + \dot{B}a + \dot{C}a^2 = \dot{A}_1 \cdot 3 + \dot{A}_2(1 + a^2 + a) + \dot{A}_0(1 + a + a^2),$$

откуда

$$\dot{A}_1 = \frac{\dot{A} + \dot{B}a + \dot{C}a^2}{3}. \quad (21.15)$$

Умножим второе уравнение в системе (21.13) на  $a^2$ , а третье — на  $a$  и сложим все уравнения:

$$\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0;$$

$$\dot{B}a^2 = \dot{A}_1 a^4 + \dot{A}_2 a^3 + \dot{A}_0 a^2;$$

$$\dot{C}a = \dot{A}_1 a^2 + \dot{A}_2 a^3 + \dot{A}_0 a;$$

---


$$\dot{A} + \dot{B}a^2 + \dot{C}a = \dot{A}_1(1 + a + a^2) + \dot{A}_2 \cdot 3 + \dot{A}_0(1 + a^2 + a),$$

откуда

$$\dot{A}_2 = \frac{\dot{A} + \dot{B}a^2 + \dot{C}a}{3}. \quad (21.16)$$

## Свойства трехфазных цепей

Отметим некоторые свойства трехфазных цепей в отношении симметричных составляющих токов и напряжений.

Степень несимметрии линейных напряжений оценивается коэффициентом несимметрии, т.е. отношением составляющей обратной последовательности к составляющей прямой последовательности:

$$\epsilon\% = 100 \frac{U_{2л}}{U_{1л}}. \quad (21.17)$$

Система линейных напряжений считается симметричной, если коэффициент несимметрии меньше 5%.

Предположим, что величины  $A, B, C$  в формуле (21.14) являются линейными токами в четырехпроводной системе. Сумма линейных токов равна току в нулевом проводе, поэтому составляющая тока

нулевой последовательности равна  $\frac{1}{3}$  тока в нулевом проводе. Отсюда следует, что ток в нулевом проводе можно найти, если утроить величину составляющей тока нулевой последовательности.

В трехпроводной системе сумма линейных токов равна нулю. Из формулы (21.14) следует, что линейные токи в этом случае не содержат составляющей нулевой последовательности. Это справедливо и для линейных напряжений трехфазной системы, сумма которых тоже равна нулю.

Отсутствие тока в одной или двух фазах при несимметричном режиме означает, что сумма трех симметричных составляющих токов в этих фазах равна нулю.

Например, на схеме рис. 21.10, а фазы В и С разомкнуты. Поэтому  $\dot{I}_B = \dot{I}_C = 0$ .

Согласно формулам (21.14)–(21.16), симметричные составляющие токов имеют следующие выражения:

прямой последовательности

$$\dot{I}_{1A} = \frac{\dot{I}_A + 0a + 0a^2}{3} = \frac{\dot{I}_A}{3};$$

обратной последовательности

$$\dot{I}_{2A} = \frac{\dot{I}_A + 0a^2 + 0a}{3} = \frac{\dot{I}_A}{3};$$

нулевой последовательности

$$\dot{I}_{0A} = \frac{\dot{I}_A + 0 + 0}{3} = \frac{\dot{I}_A}{3}.$$

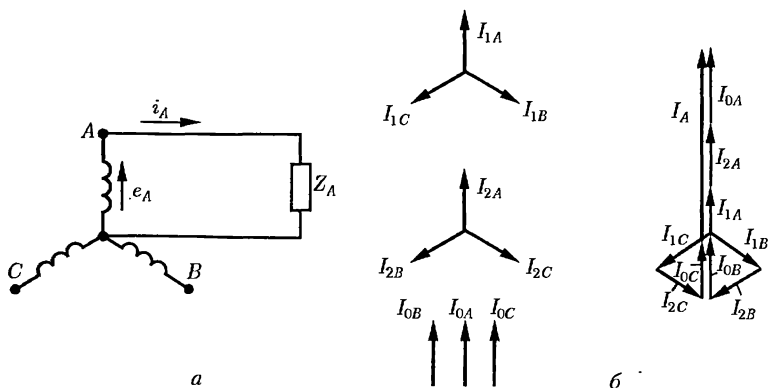


Рис. 21.10

На рис. 21.10, б показаны симметричные составляющие прямой, обратной и нулевой последовательности и их геометрическое сложение; в результате сложения получаем

$$\dot{I}_{1A} + \dot{I}_{2A} + \dot{I}_{0A} = \dot{I}_A;$$

$$\dot{I}_{1B} + \dot{I}_{2B} + \dot{I}_{0B} = 0;$$

$$\dot{I}_{1C} + \dot{I}_{2C} + \dot{I}_{0C} = 0.$$

### Задачи

**Задача 21.8.** В результате неправильной маркировки концов обмоток трехфазного трансформатора (начало фазы *A* вторичной обмотки помечено как конец) система линейных напряжений несимметрична. Определить симметричные составляющие линейных напряжений при соединении звездой, если фазные напряжения во вторичной обмотке 220 В.

**Решение.** Запишем комплексы фазных напряжений во вторичной обмотке:

$$\dot{U}_A = 220 e^{-j90^\circ} = -j220;$$

$$\dot{U}_B = 220 e^{-j30^\circ} = 190 - j110;$$

$$\dot{U}_C = 220 e^{-j150^\circ} = -190 - j110.$$

Вектор напряжения  $\dot{U}_A$  в соответствии с условием задачи повернут на  $180^\circ$ . Комплексы линейных напряжений:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = -j220 - 190 + j110 = -190 - j110;$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = 190 - j110 + 190 + j110 = 380;$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = -190 - j110 + j220 = -190 + j110.$$

Составляющие:  
нулевой последовательности

$$\dot{U}_{0AB} = \dot{U}_{0BC} = \dot{U}_{0CA} = \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA}}{3} = \frac{-190 - j110 + 380 - 190 + j110}{3} = 0;$$

прямой последовательности

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1AB} &= \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC}a + \dot{U}_{CA}a^2}{3} = \\ &= \frac{-190 - j110 + 380 e^{j120^\circ} + (-190 + j110)e^{j240^\circ}}{3} = \frac{-190 + j330}{3}; \end{aligned}$$

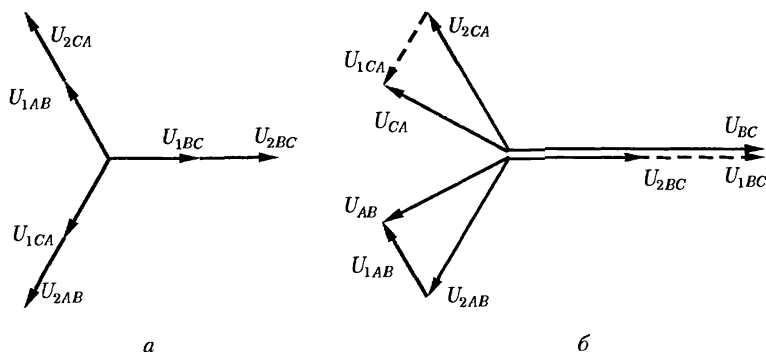


Рис. 21.11

$$\dot{U}_{1BC} = \dot{U}_{1AB} a^2 = \frac{380}{3};$$

$$\dot{U}_{1CA} = \dot{U}_{1AB} a = \frac{-190 - j330}{3};$$

обратной последовательности

$$\begin{aligned} \dot{U}_{2AB} &= \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC}a^2 + \dot{U}_{CA}a}{3} = \\ &= \frac{-190 - j110 + 380e^{j240^\circ} + (-190 + j110)e^{j120^\circ}}{3} = \frac{-380 - j660}{3}; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{2BC} = \dot{U}_{2AB} a = \frac{760}{3};$$

$$\dot{U}_{2CA} = \dot{U}_{2AB} a^2 = \frac{-380 - j660}{3}.$$

На рис. 21.11, а, б показаны векторы систем прямой и обратной последовательности и их сумма — система трех исходных векторов линейных напряжений.

**Задача 21.9.** Трехфазный электродвигатель, включенный в сеть с линейным напряжением 380 В при соединении звездой, имеет мощность на валу  $P_2 = 14$  кВт;  $\cos \varphi = 0,8$ ; КПД  $\eta = 0,85$ .

Определить симметричные составляющие токов в обмотке двигателя при обрыве линейного провода в фазе В.

**Решение.** При нормальной работе тока в фазе двигателя

$$I_\phi = \frac{P_2}{\sqrt{3}U_{\text{ном}}\eta\cos\varphi} = \frac{14\,000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,85 \cdot 0,8} = 31,4 \text{ А.}$$

При симметричной системе напряжений токи в фазах двигателя образуют симметричную систему (рис. 21.12, а). При обрыве линейного про-

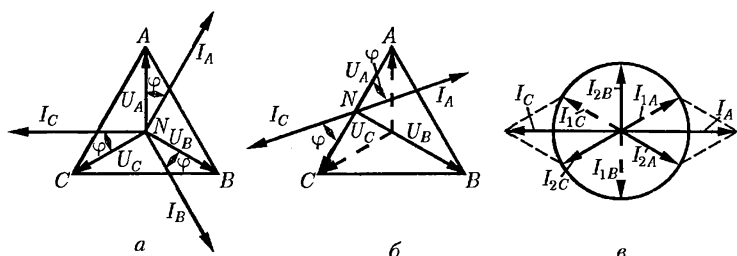


Рис. 21.12

вода *B* векторная диаграмма фазных напряжений и токов показана на рис. 21.12, б.

Ток в фазах *B* равен нулю ( $I_B = 0$ ).

Токи в фазах *A* и *C* равны по величине, но находятся в противофазе:  $I_A = -I_C$ .

Для определения значений токов  $I_A$  и  $I_C$  найдем расчетное сопротивление фазы двигателя при нормальном режиме, которое будем считать неизменным:

$$Z_\phi = U_\phi / I_\phi = 380 / \sqrt{3} \cdot 31,4 = 7 \text{ Ом.}$$

При обрыве линейного провода фазы *B* обмотки двух других фаз двигателя с одинаковым сопротивлением включены последовательно на линейное напряжение  $U_{CA}$ . Поэтому ток в фазах *A* и *C*

$$I_A = I_C = I = \frac{U_{CA}}{2Z_\phi} = \frac{380}{2 \cdot 7} = 27 \text{ А.}$$

Выразим токи в комплексной форме, полагая ток  $I_A$  совпадающим с положительным направлением действительной оси:  $\dot{I}_A = I$ ;  $I_C = -I$ ;  $I_B = 0$ .

Токи:

нулевой последовательности

$$\dot{I}_{0A} = \dot{I}_{0B} = \dot{I}_{0C} = \frac{\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C}{3} = \frac{I - I}{3} = 0;$$

прямой последовательности

$$\dot{I}_{1A} = \frac{\dot{I}_A + \dot{I}_B a + \dot{I}_C a^2}{3} = \frac{I + 0 - I e^{j240}}{3} = \frac{I}{3} \left( \frac{3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 13,5 + j 7,8;$$

$$\dot{I}_{1B} = \dot{I}_{1A} a^2; \quad \dot{I}_{1C} = \dot{I}_{1A} a;$$

обратной последовательности

$$\dot{I}_{2A} = \frac{\dot{I}_A + \dot{I}_B a^2 + \dot{I}_C a}{3} = \frac{I - I e^{j120}}{3} = 13,5 - j 7,8;$$

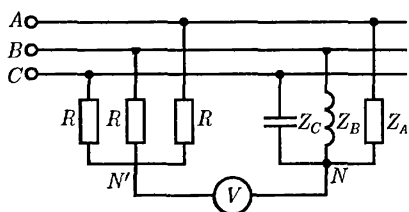


Рис. 21.13

$$\dot{I}_{2B} = \dot{I}_{2A}a; \quad \dot{I}_{2C} = \dot{I}_{2A}a^2.$$

На рис. 21.12, в изображены симметричные составляющие токов в двигателе при обрыве фазы.

Определите симметричные составляющие токов двигателя при коротком замыкании обмотки фазы C.

**Задача 21.10.** Двигатель, пара-

метры которого указаны в задаче 21.9, соединен треугольником и включен в сеть с линейным напряжением 220 В. Определите симметричные составляющие фазных и линейных токов при обрыве линейного провода A; при обрыве провода в фазе BC.

*Указание.* При включении двигателя в сеть с напряжением 220 В треугольником мощность его не изменится.

**Задача 21.11.** Приемник, соединенный звездой (рис. 21.13), имеет сопротивления фаз:  $Z_A = 10 \text{ Ом}$ ;  $Z_B = j 10 \text{ Ом}$ ;  $Z_C = -j 10 \text{ Ом}$ . Система линейных напряжений симметрична:  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 200 \text{ В}$ .

Докажите, что показание вольтметра равно величине нулевой составляющей фазных напряжений на приемнике. Определите эту величину.

## ГЛАВА 22

# ВРАЩАЮЩЕЕСЯ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

В гл. 20 было отмечено, что развитие трехфазных систем связано с широким применением электродвигателей переменного тока.

Принципы работы электрических машин переменного тока основаны на использовании вращающихся магнитных полей, которые получают с помощью многофазных (чаще всего трехфазных) систем.

Относительно простая возможность получения вращающегося магнитного поля является одним из основных достоинств многофазной системы.

### 22.1. ПОЛУЧЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Общее понятие о вращающемся магнитном поле можно получить, рассматривая рис. 12.3.

При неподвижном роторе генератора переменного тока магнитная индукция в воздушном зазоре под полюсом постоянна во времени, так как в обмотке возбуждения имеется постоянный ток. Однако в пространстве вдоль воздушного зазора магнитная индукция распределена по синусоидальному закону [см. формулу (12.3) и график рис. 12.2, б]. Когда ротор вращается с постоянной скоростью, магнитное поле во вращающемся полюсе по-прежнему постоянно во времени и неподвижно относительно полюса, но в каждой точке воздушного зазора магнитная индукция изменяется во времени также по синусоидальному закону.

При этом наибольшей величины  $B_m$  магнитная индукция достигает последовательно в каждой точке воздушного зазора, когда эта точка оказывается против середины полюса.

Относительно неподвижного статора магнитное поле вращается вместе с полюсами.

### Системы обмоток для получения магнитного поля

Вращающееся магнитное поле можно получить также с помощью неподвижной системы обмоток, если в них имеются синусои-



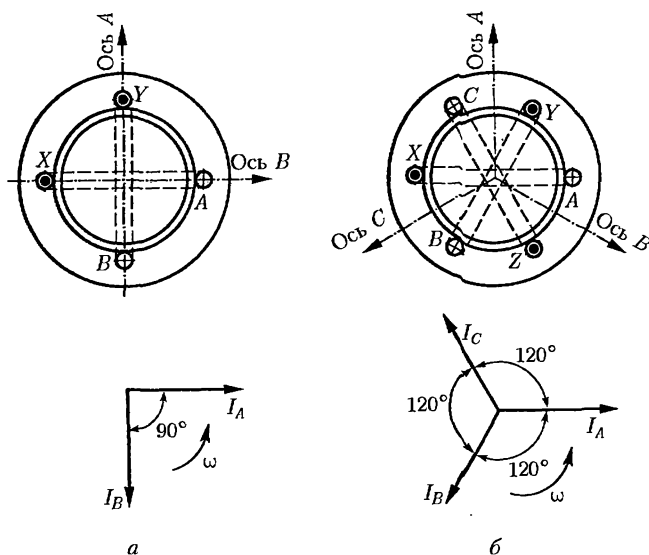


Рис. 22.1

дальные токи, не совпадающие по фазе. На рис. 22.1 схематично показаны две такие системы простейших обмоток: двухфазная (а) и трехфазная (б), имеющие по одной катушке на фазу. Оси катушек двухфазной системы взаимно перпендикулярны, оси катушек трехфазной системы пересекаются под углом  $120^\circ$  друг к другу. Синусоидальные токи в катушках имеют одинаковые амплитуды и частоту, но по фазе сдвинуты относительно друг друга в первом случае на  $90^\circ$ , а во втором — на  $120^\circ$ .

Стороны катушек, где начала витков, обозначены А, В, С. Противоположные стороны, где концы витков X, Y, Z, отстоят от соответствующих начал по окружности статора на  $180^\circ$ .

Условно-положительное направление токов в обмотках отмечено крестиками в начале витков и точками в конце. Этим условно-положительным направлениям токов по правилу буравчика соответствуют условно-положительные направления осей магнитных потоков, совпадающих с осями одноименных катушек.

Магнитное поле такой системы обмоток с токами образуется наложением полей отдельных фаз.

## Графики магнитной индукции магнитного поля

Наглядное представление о вращении магнитного поля дает рис. 22.2, где определено направление оси полюсов в различные мо-

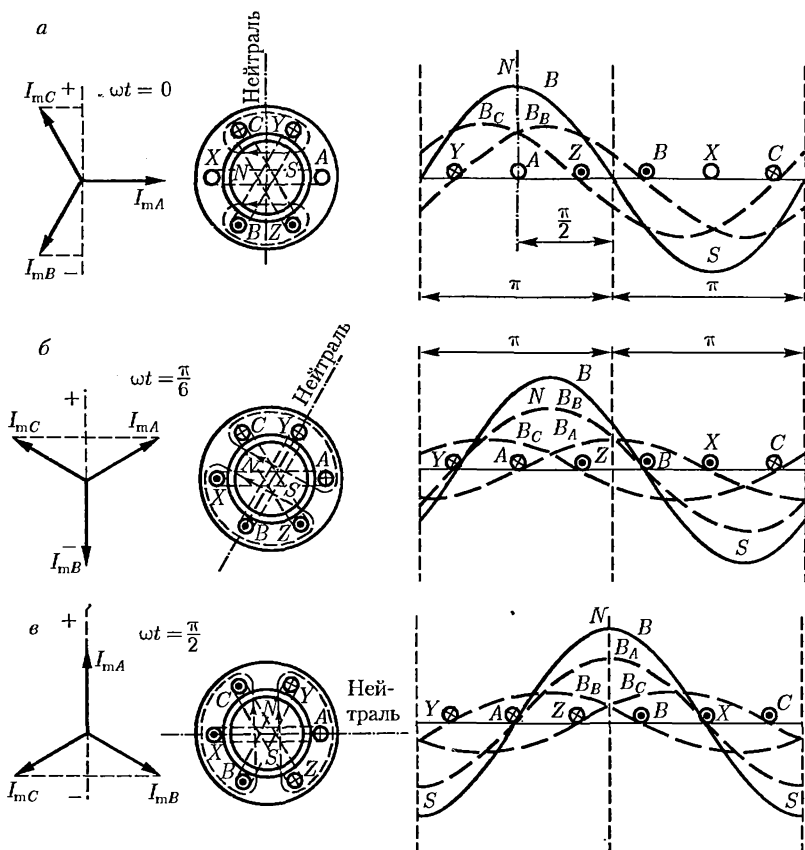


Рис. 22.2

менты времени и показаны графики магнитной индукции в воздушном зазоре поля каждой фазы и результирующего поля.

При  $\omega t = 0$  ток в фазе *A* равен нулю, ток в фазе *B* отрицательный, а ток в фазе *C* положительный. Это следует из уравнений токов и подтверждается векторной диаграммой рис. 22.2, *a*.

В соответствии со знаками токов отмечены их направления в проводниках в рассматриваемый момент времени.

Вся система проводников по направлению тока делится на две части: в одной из них направление тока отмечено крестиком, а в другой — точкой.

По правилу буравчика определены направления магнитных потоков каждой катушки в отдельности и результирующего потока. Результирующее магнитное поле условно изображено двумя линиями магнитной индукции (штриховые линии).

По направлению этих линий определяется положение полюсов. Слева от нейтрали находятся северный полюс ротора и южный полюс статора (линии магнитной индукции выходят из поверхности ротора в воздушный зазор и входят в поверхность статора). Справа от нейтрали находятся южный полюс ротора и северный полюс статора.

Для момента времени, соответствующего фазовому углу  $\omega t = \pi/2$ , такие же построения показаны на рис. 22.2, в. Ток в фазе *A* положительный, а в фазах *B* и *C* — отрицательный. Так же как и в предыдущем случае, система проводников делится на две части, в каждой из которых ток во всех проводниках направлен одинаково. Результирующее магнитное поле направлено по чертежу вверх.

Нетрудно заметить, что за время, соответствующее фазовому углу  $\pi/2$ , ось полюсов в пространстве повернулась, т. е. северный и южный магнитные полюса переместились относительно неподвижных обмоток на такой же угол  $\pi/2$ .

Проведя аналогичные рассуждения для последующих моментов времени, например соответствующих фазовым углам  $\pi$ ,  $\frac{3}{2}\pi$ ,  $2\pi$ , можно убедиться в том, что направление оси полюсов в каждом случае изменяется на  $90^\circ$ .

Изменение токов в фазах происходит не скачком, а плавно, по синусоидальному закону (векторы токов вращаются равномерно с угловой скоростью  $\omega$ ), поэтому и магнитное поле меняет свое направление не скачком, а равномерно, поворачиваясь при данной системе обмоток за один период тока на один оборот.

Подтверждением этому служит рис. 22.2, б, где определено направление оси полюсов при  $\omega t = \pi/6$ , т. е. при промежуточной величине фазового угла между 0 и  $90^\circ$ .

Интересно отметить, что в тот момент, когда ток в одной из фаз достигает наибольшего значения, ось полюсов результирующего магнитного поля совпадает с осью полюсов поля этой фазы (на рис. 22.2, в результирующее поле направлено так же, как поле фазы *A*, при этом ток в фазе *A* максимальный:  $i_A = I_m$ ).

На основании этого легко определить направление вращения магнитного поля.

При прямой последовательности токов в фазах максимумы их наступают в порядке  $A \rightarrow B \rightarrow C$ .

Если на статоре обмотки фаз расположены так, что обход их в указанном порядке совершается в направлении движения часовой стрелки, то и поле вращается в ту же сторону.

При обратной последовательности токов в фазах  $A \rightarrow B \rightarrow C$ , но при прежнем расположении обмоток поле вращается против движения часовой стрелки.

## Принцип действия синхронного и асинхронного электродвигателей

С помощью вращающегося магнитного поля электрическая энергия преобразуется в механическую. Для этой цели служат электрические трехфазные двигатели — синхронные и асинхронные, из которых наиболее распространены последние.

Поместим во вращающееся магнитное поле замкнутый виток в виде прямоугольной рамки (рис. 22.3, а).

При вращении поля проводники рамки пересекаются линиями магнитной индукции, в силу чего в них наводится ЭДС. Направление ЭДС определено по правилу правой руки и отмечено на рисунке крестиком и точкой.

Применяя правило правой руки, нужно учитывать относительное движение проводников рамки против вращающегося поля. Под действием ЭДС в рамке образуется ток такого же направления. Но проводники с током в магнитном поле испытывают действие электромагнитных сил, направленных в соответствии с правилом левой руки. Относительно оси рамки электромагнитные силы образуют момент, под действием которого рамка вращается в сторону вращения поля.

Частота вращения рамки всегда меньше скорости поля:  $n < n_0$  (рамка «скользит» относительно поля). Благодаря скольжению в рамке наводится ЭДС, образуются ток и электромагнитные силы.

Скольжение оценивается величиной  $s$  в процентах

$$s = \frac{n_0 - n}{n_0} 100. \quad (22.1)$$

Вращение рамки с частотой поля невозможно, так как при  $n = n_0$  поле не пересекает проводников рамки, не наводится ЭДС, отсутствуют ток и электромагнитные силы.

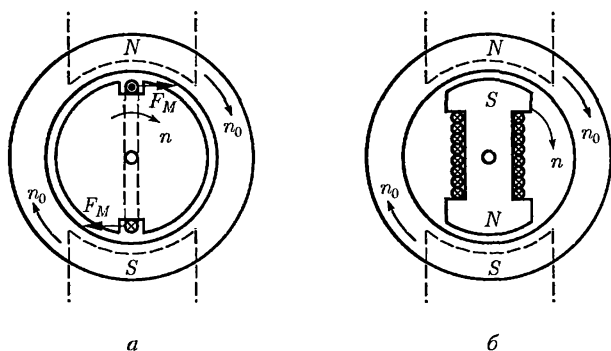


Рис. 22.3

Электрические двигатели, работающие по этому принципу, называют **асинхронными**.

Если вместо короткозамкнутой рамки в магнитном поле поместить постоянный магнит или электромагнит с постоянным током в его обмотке, то благодаря взаимодействию вращающегося поля с полем постоянного магнита образуется вращающий момент, также направленный в сторону вращения поля (рис. 22.3, б).

Постоянный магнит в постоянном магнитном поле стремится занять *положение, при котором ось полюсов магнита в направлении от южного полюса к северному совпадает с направлением внешнего поля*. Постоянный магнит «увлекается» за вращающимся полем, т. е. вращается в ту же сторону и с той же частотой, что и поле:  $n = n_0$ .

Электрические двигатели, работающие по такому принципу, называют **синхронными**.

### Задачи

**Задача 22.1.** Определить частоту вращения магнитного поля трехфазной системы обмоток с числом полюсов  $2p = 6$  при частоте тока  $f = 50$  Гц.

**Задача 22.2.** Обмотка статора трехфазного асинхронного двигателя образует две пары магнитных полюсов при токе в ней частотой 50 Гц. Определить скольжение ротора, который совершает 1460 об/мин.

**Задача 22.3.** Определить частоту вращения ротора асинхронного двигателя, если обмотка статора имеет восемь полюсов, частота тока 50 Гц, скольжение 4%.

## 22.2. ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Вращающееся магнитное поле образуется системой обмоток, сдвинутых в пространстве.

Для более полного представления об особенностях вращающегося магнитного поля рассмотрим магнитное поле одной фазы электрической машины.

### Магнитное поле однофазной обмотки при постоянном токе

Одна фаза трехфазной обмотки схематично показана на рис. 22.4, а, причем проводники ее распределены равномерно на  $\frac{1}{3}$  внутренней поверхности статора (распределенные обмотки наиболее распространены). Две другие фазы отдельно занимают такие же участки поверхности статора, так что в целом трехфазная обмотка

представляет собой систему проводников, равномерно распределенных вдоль воздушного зазора.

Плоскость, перпендикулярная оси магнитного потока, которой статор и ротор делятся на две части, называют нейтралью. На одной из них находится северный полюс, а на другой — южный (на рис. 22.4 обозначены полюса ротора).

Целесообразно также рассмотреть развертку статора, т. е. представить цилиндрическую поверхность статора разрезанной в одном месте по образующей и развернутой на плоскости (рис. 22.4, б).

Проведем вокруг части проводников катушки замкнутый контур 1-2-3-4 и напишем для него уравнение по закону полного тока

$$\sum Hl = IN_{\alpha},$$

где  $N_{\alpha}$  — число проводников с токами, сцепленных с выбранным контуром.

Магнитным сопротивлением стальной части магнитопровода можно пренебречь, так как  $\mu_a \gg \mu_0$ . Тогда в уравнение войдет магнитное напряжение только двух воздушных зазоров, в которых напряженность магнитного поля одинакова:

$$H_0 \cdot 2\Delta = IN_{\alpha}.$$

При равномерном расположении проводников

$$N_{\alpha} = N_1 \cdot 2\alpha,$$

где  $N_1$  — число проводников, приходящееся на единицу центрального угла окружности статора;

$$H_0 = \frac{IN_1 \cdot 2\alpha}{2\Delta};$$

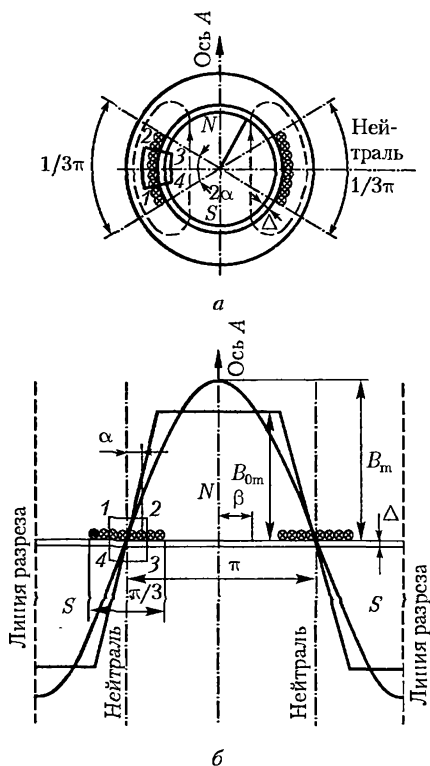


Рис. 22.4

$$B_0 = \mu_0 H_0 = \frac{\mu_0 I N_1}{\Delta} \alpha. \quad (22.2)$$

Из формулы (22.2) видно, что магнитная индукция в воздушном зазоре той части окружности статора, где располагаются проводники обмотки, изменяется пропорционально расстоянию от нейтрали, т.е. вдоль воздушного зазора, по прямолинейному закону.

При  $2\alpha = \pi/3$  магнитная индукция достигает наибольшей величины:

$$B_{0m} = \frac{\mu_0 I N_1 \pi}{6\Delta}.$$

Эта величина магнитной индукции в воздушном зазоре сохраняется на всем протяжении окружности статора, где нет проводников. Таким образом, однофазная обмотка образует одну пару магнитных полюсов ( $N$  и  $S$ ), а график распределения магнитной индукции представляет собой равнобедренную трапецию.

По форме такой график близок к синусоиде, поэтому для упрощения последующих выводов заменим действительный график синусоидальной кривой с амплитудой  $B_m$ , уравнение которой запишем относительно начала координат, расположенного на оси полюсов (ось  $A$ ):

$$B = B_m \cos \beta, \quad (22.3)$$

где  $\beta$  — угол по окружности статора, отсчитанный от оси  $A$  в положительном направлении (по часовой стрелке).

Замена трапецевидной кривой синусоидой в данном случае означает, что учитывается только составляющая основной частоты, а остальные составляющие в целях упрощения не учитываются (подробнее см. гл. 23).

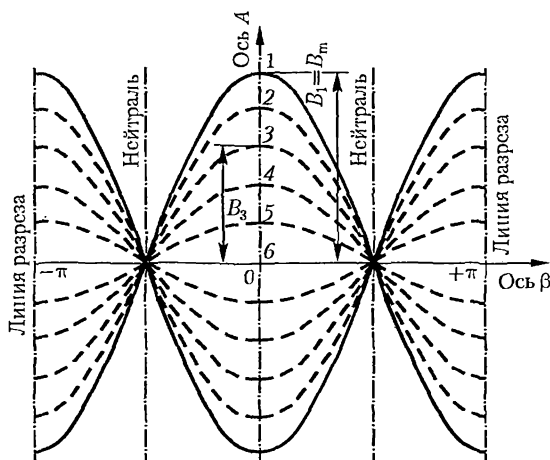
## Пульсирующее магнитное поле

При постоянном токе такое распределение магнитной индукции вдоль воздушного зазора сохраняется, пока имеется ток в катушке.

При переменном токе в катушке  $i = I_m \sin \omega t$  в любой момент времени пространственное распределение магнитной индукции остается синусоидальным. Но в каждой точке воздушного зазора величина ее изменяется с течением времени по тому же закону, по какому изменяется ток.

Магнитное поле в этом случае «пульсирует», поэтому оно и называется *пульсирующим*. В воздушном зазоре образуется *стоячая волна* магнитной индукции.

На рис. 22.5 показано распределение магнитной индукции в различные моменты времени (кривые 1...6).



Уравнение магнитной индукции пульсирующего поля легко получить, подставив в уравнение (22.3) выражение переменного тока:

$$B = B_m \sin \omega t \cos \beta, \quad (22.4)$$

где  $B_m$  — магнитная индукция на оси  $A$  при токе в обмотке  $i = I_m$  (кривая 1 на рис. 22.5). При том же токе  $I_m$  в обмотке в пункте, отстоящем от оси  $A$  по окружности на угол  $\beta = \pi/3$ , наибольшая величина магнитной индукции равна  $B_m \cos \frac{\pi}{3} = B_m/2$ .

При  $\beta = \pi/2$  магнитная индукция равна нулю при любом токе в катушке.

## Разложение пульсирующего магнитного поля на два вращающихся поля

Из тригонометрии известно, что

$$\sin \omega t \cos \beta = \frac{\sin(\omega t - \beta) + \sin(\omega t + \beta)}{2}.$$

Применив эту формулу, уравнение (22.4) можно написать в виде

$$B = \frac{B_m}{2} \sin(\omega t - \beta) + \frac{B_m}{2} \sin(\omega t + \beta) = B' + B''. \quad (22.5)$$

Отсюда видно, что пульсирующее магнитное поле можно представить в виде двух составляющих, каждая из которых является функцией двух переменных  $t$  и  $\beta$ . Первая составляющая  $B'$  имеет наибольшую величину при  $\omega t - \beta = \pi/2$  или в точке  $\beta = \omega t - \pi/2$ .



Наибольшая величина магнитной индукции не меняется, если одновременно изменяются  $\omega t$  и  $\beta$  так, что равенство  $\beta = \omega t - \pi/2$  не нарушается. Но увеличение угла  $\beta$  означает, что наибольшая величина магнитной индукции  $B_m/2$  имеет место не в одной и той же точке, как при постоянном токе в обмотке, а перемещается вдоль воздушного зазора в положительном направлении с угловой скоростью

$$\Omega_{np} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d(\omega t - \pi/2)}{dt} = \omega.$$

Эта составляющая пульсирующего поля представляет собой прямую волну магнитной индукции поля, вращающегося по часовой стрелке.

Составляющая  $B''$  представляет собой обратную волну магнитной индукции, так как она перемещается в обратном направлении против движения часовой стрелки. При  $\omega t + \beta = \pi/2$   $\beta = \pi/2 - \omega t$ .

Угловая скорость обратной волны

$$\Omega_{обр} = \frac{d\beta}{dt} = -\omega.$$

Такое изменение обеих составляющих магнитной индукции в каждой точке вдоль воздушного зазора можно представить синусоидальными графиками, перемещающимися по окружности статора с угловой скоростью  $\Omega$ , или вращающимися векторами  $B_m/2$  (рис. 22.6). На этом рисунке вращающиеся векторы составляющих магнитной индукции пульсирующего поля показаны в трех положениях:

1 — при токе в катушке  $i_1 = I_m$  магнитная индукция пульсирующего поля  $B_1 = B_m$ ;

3 — при токе в катушке  $i_3$  магнитная индукция  $B_3$ ;

6 — при токе в катушке  $i_6 = 0$  магнитная индукция  $B_6 = 0$ .

Этими же номерами отмечены графики магнитной индукции пульсирующего поля на рис. 22.5.

Если длина вращающегося вектора магнитной индукции не меняется ( $B_m/2 = \text{const}$ ), то вращающееся поле называется круговым.

Таким образом, пульсирующее магнитное поле можно разложить на два круговых, вращающихся в противоположные стороны с одинаковой частотой.

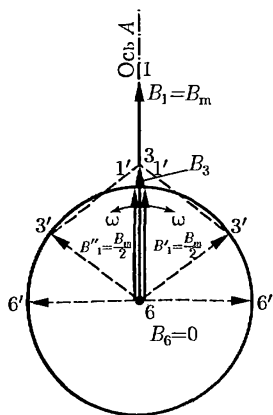


Рис. 22.6

## Задачи

**Задача 22.4.** Разложить в векторной форме пульсирующее поле каждой фазы трехфазной обмотки на два вращающихся и найти вектор магнитной индукции результирующего поля для моментов времени, соответствующих фазовым углам:  $\omega t = 0$ ;  $\omega t = \pi/2$ ;  $\omega t = \frac{3}{2}\pi$ .

**Решение.** Для фазового угла  $\omega t = 0$  построение выполнено на рис. 22.7.

Когда ток в фазе достигает наибольшей величины  $I_m$ , магнитная индукция пульсирующего поля этой фазы становится равной  $B_m$  (магнитная индукция принимается пропорциональной току). Вращающиеся составляющие пульсирующего поля имеют наибольшую величину магнитной индукции  $B' = B'' = B_m/2$ . На рис. 22.7, а показаны расположение обмоток и положительное направление оси пульсирующего магнитного потока каждой фазы.

Симметричная система векторов токов для момента времени  $\omega t = 0$  показана на рис. 22.7, б. При  $\omega t = 0$  ток  $i_A = 0$ , поэтому магнитное поле фазы А в данный момент времени отсутствует. Этому соответствует расположение векторов магнитной индукции двух вращающихся полей этой фазы — прямого и обратного, как показано на рис. 22.7, в. Ток в фазе В отстает от тока в фазе А на  $120^\circ$  и, как видно из векторной диаграммы, достигает отрицательного максимума, когда вектор  $I_B$  повернется на  $30^\circ$  (рис. 22.7, г). Таким образом, векторы магнитной индукции двух вращающихся полей фазы В расположатся под углом  $30^\circ$  к отрицательному направлению оси полюсов этой фазы, не дойдя до этого направления.

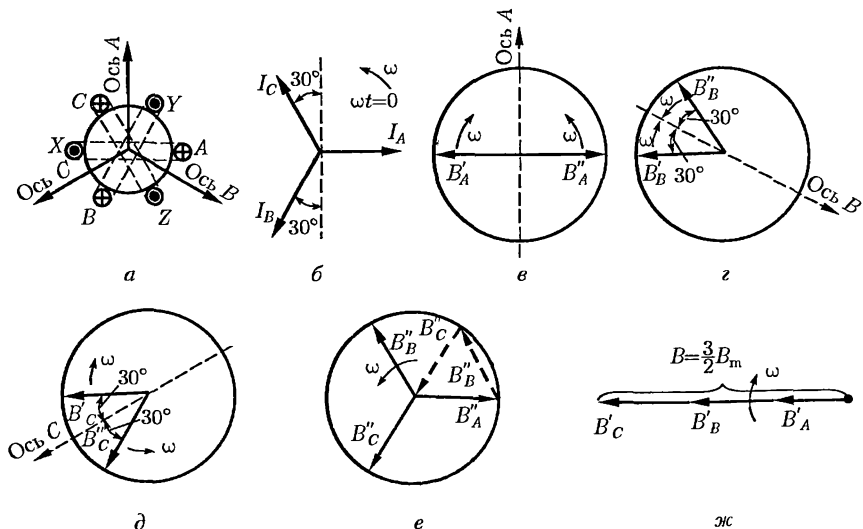


Рис. 22.7

Ток в фазе  $C$  опережает ток в фазе  $A$  на  $120^\circ$ . С того момента, когда ток в фазе  $C$  имел наибольшее положительное значение, вектор тока повернулся на  $30^\circ$ .

В соответствии с этим на рис. 22.7,  $d$  векторы вращающихся составляющих поля фазы  $C$  нанесены под углом  $30^\circ$  к положительному направлению оси полюсов фазы  $C$ , пройдя это направление.

Составляющие магнитной индукции поля каждой фазы, вращающиеся против движения часовой стрелки, сдвинуты относительно друг друга на  $120^\circ$ , т.е. образуют симметричную систему векторов, сумма которых равна нулю (рис. 22.7,  $e$ ).

Составляющие магнитной индукции поля каждой фазы, вращающиеся по часовой стрелке, направлены в одну сторону и складываются арифметически (рис. 22.7,  $ж$ ):

$$B = B_m/2 + B_m/2 + B_m/2 = \frac{3}{2} B_m.$$

Выполните аналогичные построения для двух других заданных значений  $\omega t$ .

## 22.3. УРАВНЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Особенности вращающегося магнитного поля выясняются наиболее полно с помощью аналитических выражений, которые трудно получить на базе предыдущих рассуждений.

### Вращающееся магнитное поле двухфазной обмотки

Уравнение магнитной индукции поля двухфазной обмотки можно получить, представив магнитную индукцию пульсирующего поля каждой фазы вращающимися составляющими. Учитывая пространственный сдвиг катушек обмотки на  $90^\circ$  и временной сдвиг токов в фазах на такой же угол, запишем при токах в фазах

$$i_A = I_m \sin \omega t \text{ и } i_B = I_m \sin(\omega t - 90^\circ):$$

$$B_A = B_m \sin \omega t \cos \beta = \frac{B_m}{2} \sin(\omega t - \beta) + \frac{B_m}{2} \sin(\omega t + \beta) = B'_A + B''_A;$$

$$\begin{aligned} B_B &= B_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{B_m}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ \frac{B_m}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = B'_B + B''_B. \end{aligned}$$

Сумма составляющих, вращающихся против положительного направления отсчета углов, равна нулю:

$$\begin{aligned} B_A'' + B_B'' &= \frac{B_m}{2} [\sin(\omega t + \beta) + \sin(\omega t + \beta - \pi)] = \\ &= \frac{B_m}{2} [\sin(\omega t + \beta) - \sin(\omega t + \beta)] = 0. \end{aligned}$$

Сумма составляющих магнитной индукции полей, вращающихся в прямом направлении, равна индукции результирующего поля двухфазной обмотки:

$$\begin{aligned} B &= B_A' + B_B' = \frac{B_m}{2} [\sin(\omega t - \beta) + \sin(\omega t - \beta)]; \\ B &= B_m \sin(\omega t - \beta). \end{aligned} \quad (22.6)$$

Из уравнения (22.6) видно, что двухфазная система обмоток (рис. 22.8, а), имеющая пространственный сдвиг фаз на  $90^\circ$  при временном сдвиге токов в них на такой же угол, создает вращающееся круговое магнитное поле.

На рис. 22.8 эти выводы подтверждаются векторными диаграммами.

Ток в фазе А  $i_A = 0$  при  $\omega t = 0$ , что видно из уравнения этого тока и векторной диаграммы на рис. 22.8, б. Магнитная индукция пульсирующего поля этой фазы на рис. 22.8, в представлена векторами двух ее одинаковых по величине составляющих  $B_A'$  и  $B_A''$ , вращающимися во взаимно-обратных направлениях. При  $\omega t = 0$  векторы направлены в противоположные стороны, а при  $\omega t = \pi/2$ , когда  $i_A = I_m$ , их направление совпадает с положительным направлением оси А.

Ток в фазе В при  $\omega t = 0$  имеет наибольшую отрицательную величину  $-I_A$ , поэтому векторы составляющих магнитной индукции пульсирующего поля этой фазы направлены одинаково в отрица-

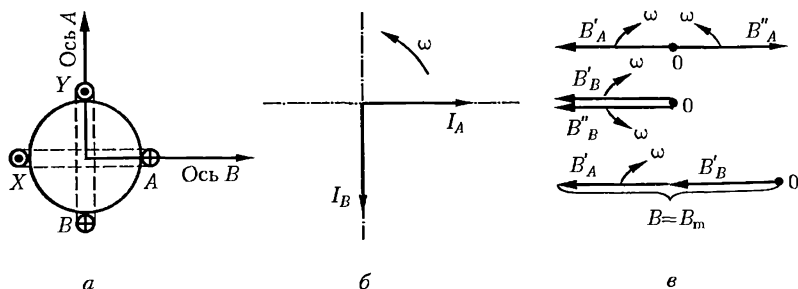


Рис. 22.8

тельном направлении оси В. Сумма векторов составляющих, вращающихся против часовой стрелки, равна нулю ( $B_A'' + B_B'' = 0$ ). Сумма векторов составляющих, вращающихся по часовой стрелке, равна вектору магнитной индукции результирующего поля ( $B_B' + B_A' = B$ ).

## Вращающееся магнитное поле трехфазной обмотки

Предположим, что токи в фазах трехфазной обмотки (см. рис. 22.1, б) изменяются согласно уравнениям

$$i_A = I_m \sin \omega t; \quad i_B = I_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad i_C = I_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right),$$

т.е. составляют симметричную систему токов.

Пульсирующее магнитное поле каждой фазы выразим его вращающимися составляющими, учитывая временной сдвиг токов в фазах и пространственный сдвиг осей магнитных потоков на  $120^\circ$ :

$$B_A = B_m \sin \omega t \cos \beta = \frac{B_m}{2} \sin(\omega t - \beta) + \frac{B_m}{2} \sin(\omega t + \beta) = B_A' + B_A'';$$

$$B_B = B_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \beta - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{B_m}{2} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} - \beta + \frac{2\pi}{3} \right) + \\ + \frac{B_m}{2} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} + \beta - \frac{2\pi}{3} \right) = B_B' + B_B'';$$

$$B_C = B_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \beta + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{B_m}{2} \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} - \beta - \frac{2\pi}{3} \right) + \\ + \frac{B_m}{2} \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} + \beta + \frac{2\pi}{3} \right) = B_C' + B_C''.$$

Магнитная индукция результирующего поля в любой точке воздушного зазора равна алгебраической сумме магнитных индукций от каждой обмотки, так как линии магнитной индукции выходят из стали в воздух под углом  $90^\circ$  к границе раздела сред:

$$B = B_A + B_B + B_C.$$

Сумма составляющих магнитной индукции  $B_A'' + B_B'' + B_C''$ , вращающихся против часовой стрелки (обратные волны), равна нулю, так как складываются три синусоидальные величины, сдвинутые по фазе относительно друг друга на  $120^\circ$  (см. рис. 20.8, б и решение задачи 22.4):

$$B'' = B''_A + B''_B + B''_C = \frac{B_m}{2} \left[ \sin(\omega t + \beta) + \right. \\ \left. + \sin\left(\omega t + \beta - \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t + \beta + \frac{4\pi}{3}\right) \right] = 0.$$

Магнитная индукция результирующего поля трехфазной обмотки равна сумме составляющих, вращающихся в положительном направлении (по часовой стрелке). Все эти составляющие равны друг другу:

$$B'_A = B'_B = B'_C = \frac{B_m}{2} \sin(\omega t - \beta).$$

Поэтому

$$B = \frac{3}{2} B_m \sin(\omega t - \beta). \quad (22.7)$$

Наибольшая величина магнитной индукции поля трехфазной обмотки (см. рис. 22.1, б), равная  $\frac{3}{2} B_m$ , перемещается по окружности вдоль воздушного зазора, т.е. вращается с угловой скоростью, равной угловой частоте:  $\Omega = \omega$  (при  $p > 1$  со скоростью  $\Omega = \omega/p$ ). При симметричном расположении трехфазной обмотки относительно окружности статора и при симметричной системе токов в ней магнитное поле круговое.

### **Зависимость частоты вращения магнитного поля от числа пар полюсов**

Обмотку каждой фазы можно выполнить из двух частей с шагом  $90^\circ$ , как показано на рис. 22.9, или из трех частей и более, располагая каждую из них соответственно на  $\frac{1}{2}$  или  $\frac{1}{3}$  окружности и т.д. Все рассуждения, ранее отнесенные к одной паре полюсов на полной окружности, остаются справедливыми и здесь, с той лишь разницей, что их нужно отнести теперь к одной паре полюсов на  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  окружности и т.д. Число пар полюсов на полной окружности будет 2, 3 или в общем случае  $p$ . Вдоль воздушного зазора магнитная индукция достигает наибольшего положительного значения  $p$  раз, поэтому уравнение ее нужно записать так:

$$B = B_m \sin \omega t \cos p\beta \quad (\text{относительно оси } A_1),$$

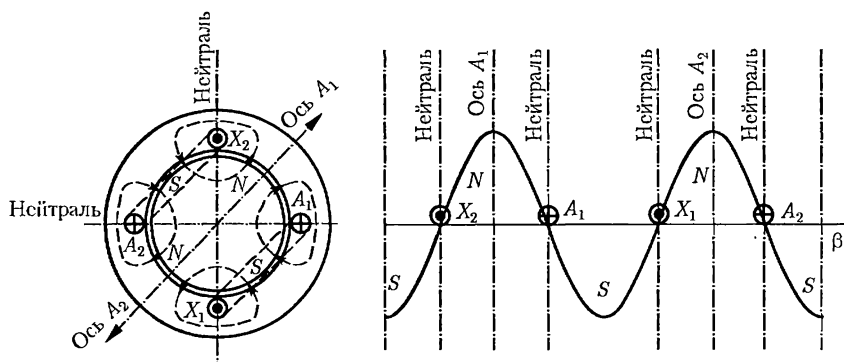


Рис. 22.9

или

$$B = \frac{B_m}{2} \sin(\omega t - p\beta) + \frac{B_m}{2} \sin(\omega t + p\beta).$$

Угловая скорость  $\Omega$  вращения составляющей магнитной индукции пульсирующего поля определяется, как и ранее, из условия

$$\omega t - p\beta = \frac{\pi}{2}; \quad \beta = \frac{\omega t}{p} - \frac{\pi}{2p}.$$

Отсюда

$$\Omega_{np} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{\omega}{p}. \quad (22.8)$$

Частота вращения магнитного поля обратно пропорциональна числу пар полюсов, образуемых обмоткой с током.

### Задачи

**Задача 22.5.** Построить кривую вращающегося магнитного поля, т.е. начертить геометрическое место концов вектора результирующей магнитной индукции поля двух катушек, сдвинутых в пространстве на угол  $90^\circ$ , в которых токи сдвинуты по фазе на угол  $\pi/2$ , а отношение амплитуд  $I_{mA}/I_{mB} = 2$ .

Магнитную индукцию считать пропорциональной току.

**Решение.** Оси магнитных потоков обеих катушек сохраняют неизменным свое направление в пространстве, так как катушки неподвижны (рис. 22.10, а). Поле каждой катушки пульсирующее; следовательно, вектор магнитной индукции направлен все время по одной прямой. Нанесем на чертеже две взаимно перпендикулярные прямые, представляющие собой оси пульсирующих магнитных потоков первой и второй катушек (рис. 22.10, в).

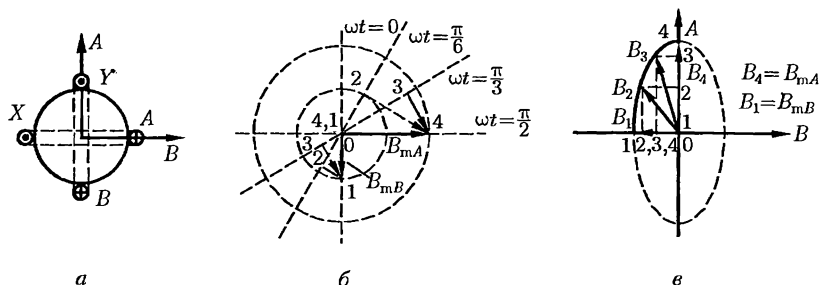


Рис. 22.10

Изменение векторов магнитной индукции обеих катушек можно проследить на временной векторной диаграмме (рис. 22.10, б).

Оба вектора  $B_{mA}$  и  $B_{mB}$  изображены при  $\omega t = 0$  с учетом заданного отношения амплитуд токов.

Оставляя неподвижными векторы, будем поворачивать ось времени по часовой стрелке.

Векторы индукции поля каждой катушки будем откладывать по осям магнитных потоков на рис. 22.10, в.

Магнитную индукцию результирующего поля находим векторным сложением ее составляющих:  $B_A, B_B$ .

Построение показывает, что конец вектора магнитной индукции результирующего поля описывает эллипс. Такое поле называется эллиптическим.

**Задача 22.6.** Построить кривую вращающегося магнитного поля по условию предыдущей задачи в двух случаях:

а) токи в катушках имеют одинаковые амплитуды, но ток  $I_A$  отстает по фазе на  $90^\circ$  от тока  $I_B$ ;

б) токи  $I_A$  и  $I_B$  имеют одинаковые амплитуды, но ток  $I_B$  отстает по фазе от  $I_A$  на  $60^\circ$ ; на  $120^\circ$ .



## ГЛАВА 23

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ТОКАМИ

В этой главе рассматриваются электрические цепи, в которых напряжения или токи изменяются с течением времени по периодическим законам, отличным от синусоидального.

В электрической цепи с линейными элементами несинусоидальный ток возникает, если в ней действует несинусоидальное напряжение (ЭДС).

Электромашинный генератор переменного тока может иметь кривую ЭДС, несколько отличную от синусоиды, вследствие несинусоидального распределения магнитной индукции под полюсом (см. рис. 22.4) или в связи с наличием пазов и зубцов в сердечниках статора и ротора.

Несинусоидальный ток и напряжение на отдельных участках цепи появляются и при синусоидальном напряжении источника, когда в цепи имеются элементы с нелинейной вольт-амперной характеристикой (см. рис. 24.2).

Ток в катушке с ферромагнитным сердечником получается несинусоидальным вследствие нелинейной зависимости между магнитным потоком и намагничивающим током (см. рис. 24.9).

### 23.1. НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ, ТОКИ И ИХ ВЫРАЖЕНИЯ

Несинусоидальные периодические функции, так же как и синусоидальные, наглядно изображаются в виде графиков. Для расчетов требуются аналитические выражения несинусоидальных функций.

#### Ряды Фурье

Аналитическое выражение несинусоидальной периодической функции осуществляется с помощью теоремы Фурье, согласно которой любая периодическая функция  $y(\omega t)$  может быть представлена в виде суммы ряда составляющих, из которых одна составляющая постоянная, а другие являются синусоидальными функциями с

кратными частотами (в дальнейшем они называются гармоническими составляющими или просто гармониками):

$$y = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + A_k(k\omega t + \psi_k), \quad (23.1)$$

где  $A_0$  — постоянная составляющая;  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  — амплитуды гармонических составляющих;  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_k$  — начальные фазы гармоник.

Первая гармоническая составляющая имеет период, равный периоду несинусоидальной кривой  $y(\omega t)$ . Она называется *первой*, или *основной*, *гармоникой*.

Все другие гармонические составляющие имеют частоты, в целое число раз больше частоты первой гармоники. Эти гармоники называют *высшими*. На рис. 23.1, *а* — *в* показаны несинусоидальные ЭДС, содержащие две синусоидальные составляющие — первую и третью — при различной величине начальной фазы третьей гармоники:

$$a) e = e_1 + e_3 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin 3\omega t,$$

$$б) e = e_1 + e_3 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin(3\omega t - 180^\circ);$$

$$с) e = e_1 + e_3 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin(3\omega t - \psi_3).$$

Выражение (23.1) можно преобразовать, применив известную из тригонометрии формулу синуса суммы двух углов:

$$A_k \sin(k\omega t + \psi_k) = A_k \sin k\omega t \cos \psi_k + A_k \cos k\omega t \sin \psi_k.$$

Обозначив постоянные величины

$$A_k \cos \psi_k = B_k, \quad A_k \sin \psi_k = C_k,$$

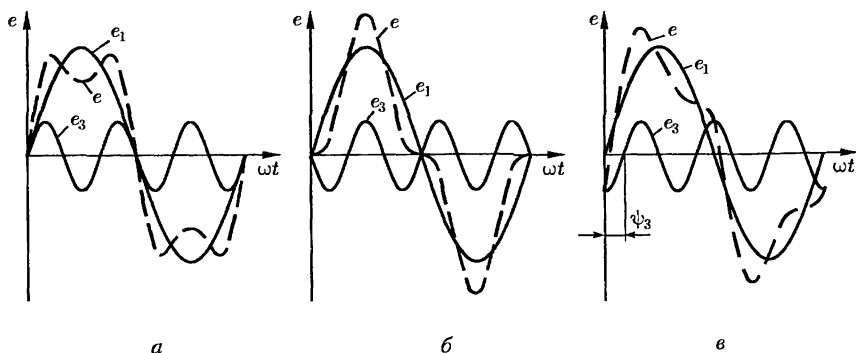


Рис. 23.1

получим

$$A_k \sin(k\omega t + \psi_k) = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t.$$

Применяя подобную запись ко всем гармоническим составляющим, несинусоидальную функцию можно выразить так:

$$y = A_0 + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots + B_k \sin k\omega t + \\ + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots + C_k \cos k\omega t. \quad (23.2)$$

Особенность такой записи состоит в том, что гармоники составляют ряд синусов и ряд косинусов с нулевыми начальными фазами.

## Коэффициенты ряда Фурье

Обратный переход от ряда (23.2) к ряду (23.1) нетрудно сделать, определив

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \psi_k = C_k/B_k. \quad (23.3)$$

При определении угла  $\psi_k$  нужно учитывать порознь знаки  $C_k$  и  $B_k$ , так как от них зависит величина угла. Например, при положительных  $C_k$  и  $B_k$  их отношение положительно, а угол лежит в первой четверти, при отрицательных  $C_k$  и  $B_k$  их отношение тоже положительно, но угол находится в третьей четверти.

При построении синусоид по оси абсцисс нужно откладывать начальную фазу  $k$ -й гармоники, пересчитав ее на масштаб основной гармоники, т. е. вместо  $\psi_k$  отложить  $\psi_k/k$ .

Это следует из того, что градуировка оси абсцисс дается в масштабе первой гармоники, поэтому на отрезке  $\omega t = 2\pi$  укладывается  $k$  полных циклов  $k$ -й гармоники.

Коэффициенты  $A_0$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  ряда (23.2) определяют с помощью следующих формул:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y d\omega t, \quad (23.4)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin k\omega t d\omega t, \quad (23.5)$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos k\omega t d\omega t. \quad (23.6)$$

Если закон изменения ординат несинусоидальной кривой можно выразить в виде уравнения, то выражения (23.4)–(23.6) позво-

ляют в большинстве случаев выполнить аналитически разложение ее в тригонометрический ряд вида (23.2) и далее, если нужно, перейти к ряду (23.1). Постоянная составляющая, как видно из формулы (23.4), является средним значением функции за ее период.

Таким образом, постоянная составляющая в тригонометрическом ряду отсутствует, если среднее за период значение функции равно нулю.

## Графоаналитический метод определения коэффициентов ряда Фурье

Коэффициенты ряда (23.2) можно определить графоаналитическим методом, который дает приближенные значения коэффициентов, но зато является более общим, так как не требует аналитического выражения разлагаемой в ряд функции.

Периодическая кривая вычерчивается на графике (рис. 23.2). На протяжении отрезка, соответствующего периоду, на равных расстояниях  $\Delta\omega t$  друг от друга проводятся ординаты кривой.

Коэффициент  $A_0$  — постоянная составляющая — определяется приближенным выражением

$$A_0 = \frac{\sum_1^m y}{m}, \quad (23.7)$$

где  $\sum y$  — алгебраическая сумма всех ординат, взятая за период;  $m$  — число ординат.

Выражение (23.7) следует из основного (23.4):

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y d\omega t \approx \frac{1}{2\pi} \sum_1^m y \Delta\omega t =$$

$$= \frac{\Delta\omega t \sum_1^m y}{2\pi} = \frac{\sum_1^m y}{m},$$

так как  $\Delta\omega t = 2\pi/m$ .

Результат определения  $A_0$  тем точнее, чем меньше будет взят интервал  $\Delta\omega t$  между ординатами.

Аналогично определяются коэффициенты  $B_k$  и  $C_k$  на основании выражений (23.5) и (23.6):

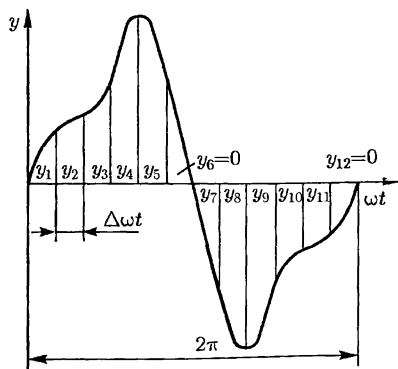


Рис. 23.2

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin k \omega t d \omega t \approx \frac{2}{m} \sum_1^m y \sin k \omega t, \quad (23.8)$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos k \omega t d \omega t \approx \frac{2}{m} \sum_1^m y \cos k \omega t. \quad (23.9)$$

### Задачи

**Задача 23.1.** Разложить в тригонометрический ряд графоаналитическим методом периодический ток, который получается в цепи рис. 22.3, а в результате однополупериодного выпрямления. Амплитуда тока  $I_m = 10$  А. Нагрузка — активная.

**Решение.** Построим график выпрямленного тока, разделим его на 12 частей с интервалом по оси абсцисс в  $30^\circ$  и проведем ординаты. Для определения постоянной составляющей  $I_0$  и коэффициентов  $B_1$  и  $C_1$  составим табл. 23.1.

Таблица 23.1

| Номер ординаты | $i$ , А | $\omega t$ , град | $\sin \omega t$ | $\cos \omega t$ | $i \sin \omega t$ | $i \cos \omega t$ |
|----------------|---------|-------------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------------|
| 1              | 8,6     | 30                | 0,5             | 0,86            | 4,3               | 7,4               |
| 2              | 5       | 60                | 0,86            | 0,5             | 4,3               | 2,5               |
| 3              | 0       | 90                | 1               | 0               | 0                 | 0                 |
| 4–9            | 0       | 120–270           | —               | —               | 0                 | 0                 |
| 10             | 5       | 300               | –0,86           | 0,5             | –4,3              | 2,5               |
| 11             | 8,6     | 330               | –0,5            | 0,86            | –4,3              | 7,4               |
| 12             | 10      | 360               | 0               | 1               | 0                 | 10                |
| Сумма          | 37,2    | —                 | —               | —               | 0                 | 29,8              |

График, подобный рис. 23.3, б, постройте в масштабе  $M_i = 5$  А/см на листе миллиметровой бумаги.

Ординаты найдены измерением по графику и занесены в таблицу. Все ординаты с 3-й по 9-ю равны нулю. Другие графы таблицы заполняются по результатам расчетов при  $k = 1$ , так как определяются коэффициенты основной (первой) гармоники.

Согласно формуле (23.7) постоянная составляющая выпрямленного тока

$$I_0 = \frac{\sum_1^m i}{m} = \frac{\sum_1^{12} i}{12} = \frac{37,2}{12} = 3,1 \text{ А.}$$

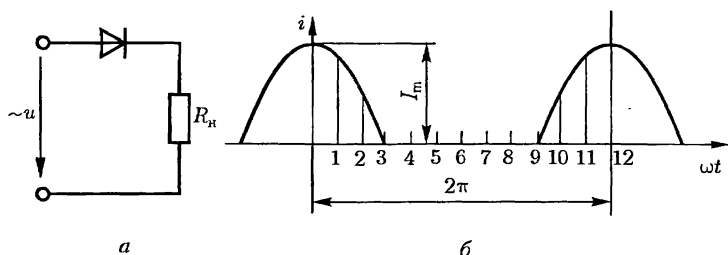


Рис. 23.3

По формулам (23.8) и (23.9) найдем

$$B_1 = \frac{2}{m} \sum_1^m i \sin k\omega t = 0;$$

$$C_1 = \frac{2}{m} \sum_1^m i \cos k\omega t = \frac{2}{12} \cdot 29,8 = 4,96.$$

Для определения коэффициентов  $C_k$  (второй и далее гармоник) составляют аналогичные таблицы.

Для определения коэффициента  $C_2$  составим табл. 23.2.

Таблица 23.2

| Номер ординаты | $i$ , А | $2\omega t$ , град | $\sin 2\omega t$ | $\cos 2\omega t$ | $i \sin 2\omega t$ | $i \cos 2\omega t$ |
|----------------|---------|--------------------|------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| 1              | 8,6     | 60                 | 0,86             | 0,5              | 7,4                | 4,3                |
| 2              | 5       | 120                | 0,86             | -0,5             | 4,3                | -2,5               |
| 3              | 0       | 180                | 0                | -1               | 0                  | 0                  |
| 4-9            | 0       | —                  | —                | —                | 0                  | 0                  |
| 10             | 5       | 600                | -0,86            | -0,5             | -4,3               | -2,5               |
| 11             | 8,6     | 660                | -0,86            | 0,5              | -7,4               | 4,3                |
| 12             | 10      | 720                | 0                | 1                | 0                  | 10                 |
| Сумма          | 37,2    | —                  | —                | —                | 0                  | 13,6               |

$$C_2 = \frac{2}{12} \cdot 13,6 = 2,26.$$

Для определения коэффициента  $C_3$  составим табл. 23.3.

Таблица 23.3

| Номер ординаты | $i$ , А | $3\omega t$ , град | $\sin 3\omega t$ | $\cos 3\omega t$ | $i \sin 3\omega t$ | $i \cos 3\omega t$ |
|----------------|---------|--------------------|------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| 1              | 8,6     | 90                 | 1                | 0                | 8,6                | 0                  |
| 2              | 5       | 180                | 0                | -1               | 0                  | -5                 |
| 3              | 0       | —                  | —                | —                | 0                  | 0                  |
| 4–9            | 0       | —                  | —                | —                | 0                  | 0                  |
| 10             | 5       | 900                | 0                | -1               | 0                  | -5                 |
| 11             | 8,6     | 990                | -1               | 0                | -8,6               | 0                  |
| 12             | 10      | 1080               | 0                | 1                | 0                  | 10                 |
| Сумма          | 37,2    | —                  | —                | —                | 0                  | 0                  |

$$C_3 = 0; B_3 = 0.$$

Таким образом, третья гармоника в составе ряда отсутствует.

В таком же порядке определены следующие коэффициенты:  $C_4 = -0,6$ ;  $C_5 = 0$ ;  $C_6 = 0,46$ .

При определении коэффициентов можно заметить, что в составе ряда отсутствуют не только синусы, но и нечетные гармоники, кроме первой, а знаки высших гармоник чередуются.

Ряд заданной функции имеет вид

$$i + 3,1 + 4,96 \cos \omega t + 2,26 \cos 2\omega t - 0,6 \cos 4\omega t + 0,46 \cos 6\omega t - \dots + \dots \quad (23.10)$$

**Задача 23.2.** Выполните разложение трапеции (см. рис. 23.7) графо-аналитическим методом:  $I_m = 10$  А;  $\alpha = 30^\circ$ .

Сравните полученный ряд с результатом решения задачи 23.3.

## 23.2. СИММЕТРИЧНЫЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Периодические функции, с которыми приходится встречаться в электротехнике, чаще всего имеют симметрию. Одни из них симметричны относительно оси абсцисс, другие — относительно оси ординат или начала координат.

Симметрия несинусоидальных кривых облегчает аналитическое их выражение.

### Функция, симметричная относительно оси абсцисс

На рис. 23.4 показан график функции, симметричной относительно оси абсцисс. Для такого графика

$$y(\omega t) = -y(\omega t + \pi). \quad (23.11)$$

При симметрии относительно оси абсцисс значения функции повторяются с обратным знаком через половину периода, поэтому отрицательная полуволна, сдвинутая на половину периода, является зеркальным отображением положительной полуволны.

Как будет показано далее (см. рис. 24.9), такую форму имеет кривая тока в катушке с ферромагнитным сердечником при синусоидальном напряжении.

В составе тригонометрического ряда функции, подчиняющейся соотношению (23.11), отсутствуют постоянная составляющая и гармонические четного порядка. В этом нетрудно убедиться, если записать ряды вида (23.1) для функций  $y(\omega t)$  и  $y(\omega t + \pi)$ :

$$\begin{aligned} y(\omega t) = & A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \\ & + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \end{aligned}$$

Функция  $y(\omega t + \pi)$  отличается от  $y(\omega t)$  тем, что все нечетные гармоники имеют отрицательный знак:

$$\begin{aligned} y(\omega t + \pi) = & A_0 - A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \\ & + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) - A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \end{aligned}$$

Согласно условию (23.11),

$$y(\omega t) + y(\omega t + \pi) = 0.$$

Тогда

$$2A_0 + 2A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + 2A_4 \sin(4\omega t + \psi_4) + \dots = 0.$$

При любом  $\omega t$  это равенство возможно, если  $A_0 = 0$ ,  $A_2 = 0$ ,  $A_4 = 0$  и т.д.

Таким образом, кривая, симметричная относительно оси абсцисс, выражается тригонометрическим рядом следующего вида:

$$\begin{aligned} y(\omega t) = & A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + A_5 \sin(5\omega t + \psi_5) + \\ & + A_7 \sin(7\omega t + \psi_7) + \dots, \end{aligned} \quad (23.12)$$

или

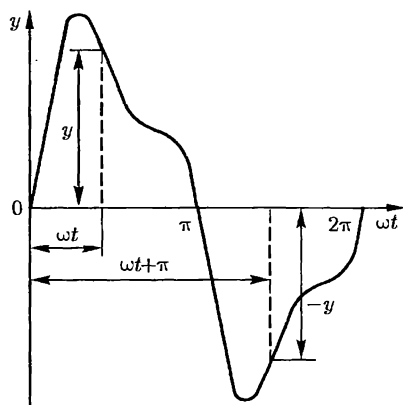


Рис. 23.4



$$y(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + B_5 \sin 5\omega t + \dots + C_1 \cos \omega t + C_3 \cos 3\omega t + C_5 \cos 5\omega t + \dots \quad (23.13)$$

### Функция, симметричная относительно оси ординат

Симметрию относительно оси ординат имеют кривые, у которых при изменении знака аргумента величина и знак функции не меняются (рис. 23.5):

$$y(\omega t) = y(-\omega t). \quad (23.14)$$

Такую симметрию имеет, например, ток в нагрузке схемы однополупериодного выпрямления (см. рис. 23.3).

Функция, симметричная относительно оси ординат, не содержит синусов:

$$y(\omega t) = A_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (23.15)$$

В этом можно убедиться без математического доказательства. Действительно, входящие в состав ряда (23.2) косинусы сим-

метричны относительно оси ординат, а синусы несимметричны. Если функция в целом симметрична относительно оси ординат, то это возможно лишь при отсутствии синусов. Наличие же постоянной составляющей не нарушает симметрии такого характера.

### Функция, симметричная относительно начала координат

Симметрия относительно начала координат (рис. 23.6) соответствует условию

$$y(\omega t) = -y(-\omega t). \quad (23.16)$$

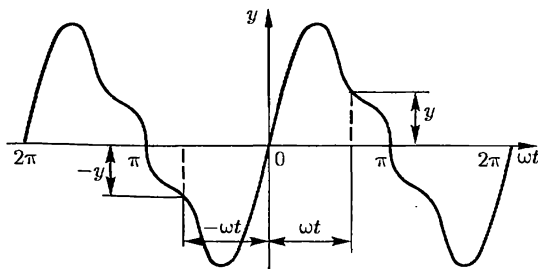


Рис. 23.6

В этом случае при изменении знака аргумента функция меняет знак, не меняя величины. Такая функция не содержит постоянной составляющей и косинусов.

Нетрудно заметить, что в данном случае в обеих половинах периода имеются две равные по величине ординаты с разными знаками. Поэтому среднее значение функции за период, или постоянная составляющая, равно нулю. Отсутствуют и несимметричные относительно начала координат косинусоидальные составляющие.

Функция имеет только ряд синусов, обладающих симметрией такого же характера, как и функция в целом:

$$y(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (23.17)$$

### Задачи

**Задача 23.3.** Разложить в тригонометрический ряд аналитическим методом периодическую функцию, имеющую вид трапеции (рис. 23.7).

**Решение.** Заданная кривая симметрична относительно оси абсцисс. Поэтому ряд этой функции не имеет постоянной составляющей и четных гармоник. Кроме того, кривая симметрична относительно начала координат, поэтому в ее ряду не содержится косинусов. Таким образом, для написания ряда нужно определить коэффициент  $B_k$ .

Выражение (23.5) для данного случая можно записать в таком виде:

$$B_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} e \sin \omega t d \omega t.$$

Это выражение записано с учетом симметрии трапеции, которая делится на четыре равных по площади участка. Каждый из них распространяется по оси абсцисс на  $\pi/2$ . Поэтому интегрирование ведется в пределах  $1/4$  периода и перед знаком интеграла ставится множитель 4.

На участке  $0 - \pi/2$  функция характеризуется разными уравнениями. В пределах  $0 - \alpha$   $e = \frac{E_m}{\alpha} \omega t$ .

В пределах  $\alpha - \pi/2$   $e = E_m$ . Тогда

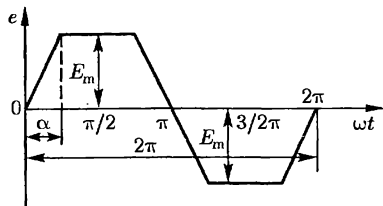


Рис. 23.7

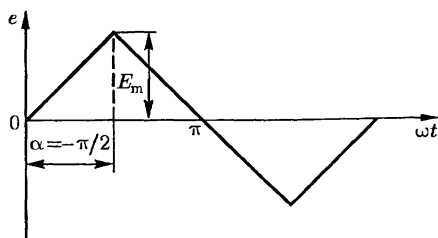


Рис. 23.8

$$B_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{E_m}{\alpha} \omega t \sin k \omega t d \omega t + \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi/2} E_m \sin k \omega t d \omega t;$$

$$\int \omega t \sin k \omega t d \omega t = \frac{\sin k \omega t}{k^2} - \frac{\omega t \cos k \omega t}{k} = \frac{\sin k \omega t - k \omega t \cos k \omega t}{k^2}.$$

Тогда

$$B_k = \frac{4E_m}{\pi \alpha k^2} (\sin k \omega t - k \omega t \cos k \omega t) \Big|_0^{\alpha} - \frac{4E_m}{\pi k} \cos k \omega t \Big|_{\alpha}^{\pi/2} = \frac{4E_m}{\pi \alpha k^2} (\sin k \alpha - k \alpha \cos k \alpha) - \\ - \frac{4E_m}{\pi k} \left( \cos \frac{k\pi}{2} - \cos k \alpha \right) = \frac{4E_m}{\pi k} \left( \frac{\sin k \alpha}{\alpha k} - \cos k \alpha + \cos \frac{k\pi}{2} + \cos k \alpha \right).$$

По условию симметрии  $k$  — целое нечетное число, поэтому  $\cos k \frac{\pi}{2} = 0$ ;

$$B_k = \frac{4E_m}{\pi \alpha k^2} \sin k \alpha. \quad (23.18)$$

Ряд, выражающий трапецию, имеет вид

$$e = \frac{4E_m}{\pi \alpha} \left( \sin \alpha \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right). \quad (23.19)$$

Из выражения (23.18) следует, что при  $\alpha = \frac{\pi}{k}$  ряд не содержит составляющих, кратных  $k$ . Например, если  $\alpha = 60^\circ$ , то не будет составляющих, кратных  $k = \pi/\alpha = 3$ , т.е. третьей, девятой и т.д. Такая кривая мало отличается от синусоиды.

Рассмотрим частные случаи:

а) угол  $\alpha = \pi/2$ .

В этом случае график функции имеет вид, показанный на рис. 23.8, а ряд этой функции получается из выражения (23.19) после подстановки значения  $\alpha = \pi/2$ :

$$e = \frac{8E_m}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right); \quad (23.20)$$

б) угол  $\alpha = 0$ .

В этом случае график функции имеет форму прямоугольника (рис. 23.9), а ряд ее находится также из выражения (23.19)

$$e = \frac{4E_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right) \quad (23.21)$$

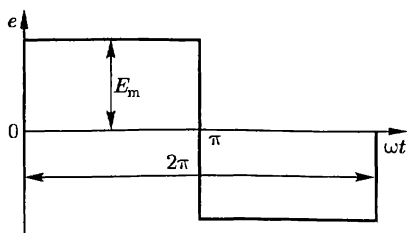


Рис. 23.9

**Задача 23.4.** Выполните разложение выпрямленного тока по условию задачи 23.1 аналитическим методом. Сравните полученный ряд с результатом решения задачи 23.1.

### 23.3. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА И МОЩНОСТЬ ЦЕПИ

При расчете электрических цепей с несинусоидальными токами и напряжениями определяют значения токов, напряжений и мощности. При этом используют понятие о действующих значениях несинусоидальных токов и напряжений.

#### Действующее значение несинусоидального тока

Как известно (см. 12.4), действующее значение синусоидального переменного тока численно равно такому постоянному току, при котором выделяется столько же теплоты, сколько при переменном токе в одном и том же резисторе за одинаковое время, равное одному периоду  $T$ . Из такого же условия определяют действующее значение переменного несинусоидального тока.

При этом нужно учесть, что несинусоидальный ток складывается из постоянной составляющей и ряда гармоник:

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \\ + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \quad (23.22)$$

Очевидно, общее количество теплоты, которое выделяется при несинусоидальном токе в некотором элементе цепи с сопротивлением  $R$  в течение одного периода  $T$ , будет равно сумме количеств теплоты от всех его составляющих. В данном случае предполагается, что сопротивление  $R$  не зависит от частоты, т. е. поверхностный эффект не учитывается:

$$Q = Q_0 + \sum Q_k, \quad (23.23)$$

где  $Q$  — теплота, выделяемая за один период  $T$  при несинусоидальном токе, действующее значение которого равно  $I$ :

$$Q = I^2 RT;$$

$Q_0$  — теплота, выделяемая за то же время при токе, равном постоянной составляющей:

$$Q_0 = I_0^2 RT.$$

За время периода  $T_k$  при токе, равном  $k$ -й составляющей, выделяется теплота

$$Q'_k = \int_0^{T_k} i_k^2 R dt = I_k^2 R T_k,$$

где  $I_k$  — действующее значение тока  $k$ -й гармоники.

За время, равное периоду основной гармоники, выделится в  $k$  раз больше теплоты:

$$Q_k = k Q'_k = I_k^2 R k T_k = I_k^2 R T.$$

После подстановки в (23.23) получим

$$I^2 R T = I_0^2 R T + I_1^2 R T + I_2^2 R T + \dots + I_k^2 R T, \quad (23.24)$$

или

$$I^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2.$$

Отсюда следует, что действующее значение несинусоидального тока является средней квадратичной из постоянной составляющей и действующих значений синусоидальных составляющих этого тока:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2}. \quad (23.25)$$

Аналогичное выражение можно получить и для действующего значения несинусоидального напряжения:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2}. \quad (23.26)$$

Действующие значения несинусоидальных токов и напряжений измеряются электроизмерительными приборами тепловой, электромагнитной и электродинамической систем.

Несинусоидальные периодические кривые характеризуются коэффициентом амплитуды и коэффициентом формы, определение которых было дано в 12.4, а также коэффициентом искажения  $d$ .

Коэффициент искажения равен отношению действующих значений основной гармоники и всей функции

$$d = A_1/A. \quad (23.27)$$

Для синусоиды  $d = 1$ .

Для треугольной формы кривой (см. рис. 23.8)  $d \approx 0,99$ , а для прямоугольной формы (см. рис. 23.9)  $d = 0,9$ .

## Мощность в электрической цепи при несинусоидальном токе

Выражение (23.24) дает основание для определения активной (средней за период  $T$ ) мощности в цепи при несинусоидальном токе.

Слагаемые в правой части этого выражения определяют энергию, соответствующую каждой составляющей тока и выделяемую в цепи за время  $T$ .

После сокращения на  $T$  получим уравнение активных мощностей:

$$I^2 R = I_0^2 R + I_1^2 R + I_2^2 R + \dots + I_k^2 R \quad (23.28)$$

или

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k. \quad (23.29)$$

*Активная мощность в цепи несинусоидального тока равна сумме активных мощностей, соответствующих постоянной составляющей и отдельным гармоникам. Этот вывод распространяется на любые цепи (линейные и нелинейные), так как формулу (23.29) можно получить из общего определения активной мощности как среднего значения мощности за период:*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (23.30)$$

### Задачи

**Задача 23.5.** Определить действующее значение несинусоидального тока, выраженного уравнением (23.10) (см. решение задачи 23.1).

**Решение.** Согласно решению задачи 23.1, составляющие заданного тока имеют следующие значения.

Постоянная составляющая  $I_0 = 3,1$  А.

Амплитуда основной гармоники  $I_{1m} = 4,96$  А. Амплитуды высших гармоник:  $I_{2m} = 2,26$  А;  $I_{4m} = 0,6$  А;  $I_{6m} = 0,46$  А.

Действующие значения гармоник

$$I_1 = I_{1m} / \sqrt{2} = 4,96 / 1,41 = 3,52 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{2,26}{1,41} = 1,6 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{0,6}{1,41} = 0,42 \text{ А}; I_6 = \frac{0,46}{1,41} = 0,32 \text{ А}.$$

Действующее значение несинусоидального тока

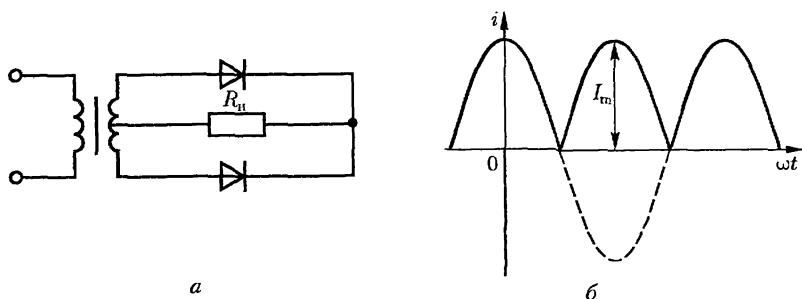


Рис. 23.10

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_4^2 + I_6^2} = \\ = \sqrt{3,1^2 + 3,52^2 + 1,6^2 + 0,42^2 + 0,32^2} \approx 5 \text{ A.}$$

Определите действующее значение того же несинусоидального тока по разложению его в ряд, выполненному аналитическим способом (см. задачу 23.4)

$$i = \frac{2I_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right).$$

**Задача 23.6.** Определить действующий ток и постоянную составляющую тока в нагрузочном сопротивлении  $R_n$  схемы двухполупериодного выпрямления (рис. 23.10, а)  $I_m = 10 \text{ A}$ . Ряд выпрямленного тока (рис. 23.10, б)

$$i = \frac{4I_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t \dots \right).$$

Проверьте решение по формуле

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 d\omega t}.$$

## 23.4. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ЭДС И ТОКАМИ

Цели и задачи расчета электрических цепей с несинусоидальными токами не отличаются от тех, которые были указаны для цепей постоянного тока и цепей с синусоидальными напряжениями и токами.

## Применение принципа наложения

Расчет линейной электрической цепи с несинусоидальными ЭДС выполняется на основе принципа наложения.

Применение принципа наложения обусловлено возможностью представления несинусоидальной ЭДС в виде суммы постоянной и синусоидальных составляющих

$$e = E_0 + e_1 + e_2 + e_3 + \dots$$

Источник несинусоидальной ЭДС можно представить как последовательное соединение источника постоянной ЭДС и источников синусоидальных ЭДС с соответствующими частотами.

Рассматривая действие каждого источника в отдельности, можно определить составляющие тока во всех участках цепи, выполняя расчет известными методами.

Мгновенное значение общего тока в любом участке цепи равно алгебраической сумме мгновенных токов от каждого источника:  $i = I_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots$

Следовательно, расчет линейной цепи с несинусоидальной ЭДС сводится к решению нескольких задач: определение одной постоянной составляющей и ряда синусоидальных составляющих тока, число которых равно числу синусоидальных составляющих ЭДС.

Решая эти задачи, нужно помнить, что реактивные сопротивления зависят от частоты. Поэтому для каждой гармонической составляющей нужно определять сопротивления цепи.

## Сопротивление цепи

Индуктивное и емкостное сопротивления для первой гармоники находят по известным формулам (см. гл. 13).

Те же сопротивления для  $k$ -й гармоники отличаются от сопротивлений для первой в  $k$  раз:

$$X_{kL} = \omega_k X_L = k\omega_1 L = kX_{1L};$$
$$X_{kC} = \frac{1}{\omega_k C} = \frac{1}{k\omega_1 C} = \frac{X_{1C}}{k}.$$

Активное сопротивление из-за поверхностного эффекта тоже зависит от частоты. Но для невысоких частот и малых сечений проводов активное сопротивление можно считать постоянным, равным сопротивлению для постоянного тока.

Реактивное сопротивление конденсатора уменьшается с ростом частоты, поэтому даже при напряжении, близком к синусоидальному, составляющие тока высших гармоник могут достигать значи-



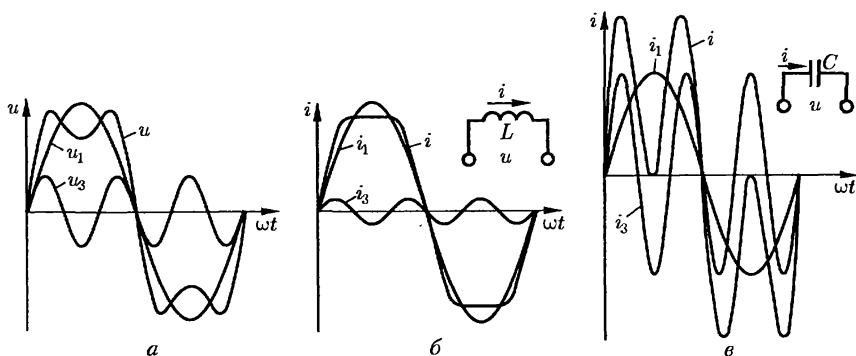


Рис. 23.11

тельных величин. Благодаря этому кривая тока при емкостной нагрузке больше отличается от синусоиды, чем кривая напряжения. При индуктивной нагрузке кривая тока ближе к синусоиде, чем кривая напряжения, так как с ростом частоты индуктивное сопротивление растет и высшие гармоники проявляются слабее. Это положение иллюстрируется рис. 23.11, на котором изображены графики напряжения (а) и тока — в цепи с индуктивностью (б) и в цепи с емкостью (в). Одинаковое для обеих цепей несинусоидальное напряжение содержит первую и третью гармоники.

Сопротивления для первой гармоники тока приняты также одинаковыми  $\left( X_{1L} = X_{1C}, \text{ т.е. } \omega L = \frac{1}{\omega C} \right)$ . Сопротивление для третьей

гармоники в цепи:

с индуктивностью

$$X_{3L} = 3\omega L = 3X_{1L},$$

с емкостью

$$X_{3C} = \frac{1}{3\omega C} = \frac{X_{1C}}{3}.$$

При таком соотношении сопротивлений первые гармоники тока в обеих цепях одинаковы, третья гармоника тока в цепи с индуктивностью меньше третьей гармоники тока в цепи с емкостью в девять раз.

### Замечание о применении векторных диаграмм

При определении синусоидальных составляющих тока можно пользоваться символическим методом и строить векторные диа-

граммы. В то же время общий ток нельзя определять сложением комплексов или векторов составляющих разных частот.

Такое сложение синусоидальных величин возможно лишь тогда, когда они имеют одинаковую частоту. В этом случае соответствующие векторы вращаются с одинаковой частотой, а их взаимное расположение на чертеже не меняется. Векторы, изображающие синусоидальные величины разных частот, вращаются с разными угловыми скоростями, поэтому их взаимное расположение на чертеже непрерывно изменяется и сложение таких векторов невозможно.

Иногда для упрощения расчетов несинусоидальные токи и напряжения заменяют эквивалентными синусоидальными, имеющими такие же действующие значения.

Благодаря такой замене можно использовать векторные диаграммы и полученные на их основе расчетные формулы. Например, активную мощность можно представить произведением действующих значений несинусоидальных напряжения, тока и коэффициента мощности  $\lambda$ :

$$P = UI\lambda,$$

причем  $\lambda = \cos \varphi_z$ , где  $\varphi_z$  — условный угол сдвига фаз между эквивалентными синусоидами напряжения и тока.

### Задачи

**Задача 23.7.** Катушка с активным сопротивлением  $R = 18$  Ом и индуктивностью  $L = 0,0383$  Гн соединена последовательно с конденсатором  $C = 88,5$  мкФ (рис. 23.12). На зажимах цепи действует напряжение  $u = 200 + 300 \sin 314t + 150 \sin 3 \cdot 314t$ .

Найти выражение мгновенных значений и действующие значения тока, напряжений на катушке и конденсаторе. Определить активную мощность в цепи.

**Решение.** Сопротивление цепи для постоянной составляющей тока равно бесконечности, так как в цепи имеется конденсатор. Постоянная составляющая тока равна нулю:  $I_0 = 0$ .

Сопротивления цепи для первой гармоники:

$$R = 18 \text{ Ом}; \quad X_{1L} = \omega_1 L = 314 \cdot 0,0383 = 12 \text{ Ом};$$

$$X_{1C} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{10^6}{314 \cdot 88,5} = 36 \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{R^2 + (X_{1L} - X_{1C})^2} = \\ &= \sqrt{18^2 + (12 - 36)^2} = 30 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Реактивное сопротивление току первой гармоники имеет емкостный характер:

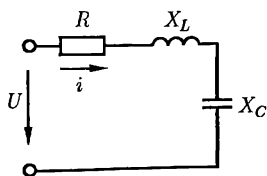


Рис. 23.12

$$\cos \varphi_1 = R/Z_1 = 18/30 = 0,6; \quad \varphi_1 = 53^\circ.$$

Амплитуда тока первой гармоники

$$I_{1m} = U_{1m}/Z_1 = 300/30 = 10 \text{ A}.$$

Сопrotивление цепи для третьей гармоники

$$\begin{aligned} Z_3 &= \sqrt{R^2 + (X_{3L} - X_{3C})^2} = \sqrt{R^2 + \left(X_{1L} \cdot 3 - \frac{X_{1C}}{3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{18^2 + \left(12 \cdot 3 - \frac{36}{3}\right)^2} = 30 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Реактивное сопротивление току третьей гармоники имеет индуктивный характер:

$$\cos \varphi_3 = R/Z_3 = 18/30 = 0,6; \quad \varphi_3 = 53^\circ.$$

Амплитуда тока третьей гармоники

$$I_{3m} = U_{3m}/Z_3 = 150/30 = 5 \text{ A}.$$

Действующие значения токов:  
первой и третьей гармоник

$$I_1 = U_{1m}/\sqrt{2} = 10/1,41 = 7,1 \text{ A}; \quad I_3 = I_{3m}/\sqrt{2} = 5/1,41 = 3,55 \text{ A};$$

общего тока

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2 + \dots} = \sqrt{0 + 7,1^2 + 3,55^2} = 7,95 \text{ A}.$$

Уравнение общего тока

$$i = 10 \sin(314t + 53^\circ) + 5 \sin(3 \cdot 314t - 53^\circ).$$

Для определения напряжения на катушке найдем сопротивления катушки токам первой и третьей гармоник:

$$Z_{1к} = \sqrt{R^2 + X_{1L}^2} = \sqrt{18^2 + 12^2} = 21,6 \text{ Ом};$$

$$Z_{3к} = \sqrt{R^2 + X_{3L}^2} = \sqrt{18^2 + (12 \cdot 3)^2} = 40,3 \text{ Ом};$$

$$\cos \varphi_{1к} = R/Z_{1к} = 18/21,6 = 0,834, \quad \varphi_{1к} = 34^\circ;$$

$$\cos \varphi_{3к} = R/Z_{3к} = 18/40,3 = 0,447, \quad \varphi_{3к} = 63^\circ.$$

Амплитуды первой и третьей гармоник напряжения на катушке:

$$U_{1мк} = I_{1мк} Z_{1к} = 10 \cdot 21,6 = 216 \text{ В},$$

$$U_{3мк} = I_{3мк} Z_{3к} = 5 \cdot 40,3 = 201,5 \text{ В.}$$

Уравнение напряжения на катушке

$$u_k = 216 \sin(314t + 53^\circ + 34^\circ) + 201,5 \sin(3 \cdot 314t - 53^\circ + 63^\circ);$$

$$u_k = 216 \sin(314t + 87^\circ) + 201,5 \sin(3 \cdot 314t + 10^\circ).$$

Напряжение на конденсаторе состоит из постоянной составляющей, первой и третьей гармоник. Постоянная составляющая напряжения на конденсаторе равна постоянной составляющей напряжения сети, как напряжение между точками разрыва цепи:

$$U_{0C} = U_0 = 200 \text{ В.}$$

Первая гармоника

$$U_{1мC} = I_{1м} X_{1C} = 10 \cdot 36 = 360 \text{ В.}$$

Третья гармоника

$$U_{3мC} = I_{3м} X_{3C} = 5 \cdot \frac{36}{3} = 60 \text{ В.}$$

Уравнение напряжения на конденсаторе

$$u_C = 200 + 360 \sin(314t + 53^\circ - 90^\circ) + 60 \sin(3 \cdot 314t - 53^\circ - 90^\circ);$$

$$u_C = 200 + 360 \sin(314t - 37^\circ) + 60 \sin(3 \cdot 314t - 143^\circ).$$

Действующие напряжения на катушке и конденсаторе:

$$U_k = \sqrt{\left(\frac{U_{1мк}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{3мк}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{216}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{201,5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 210 \text{ В;}$$

$$U_C = \sqrt{U_{0C}^2 + U_{1C}^2 + U_{3C}^2} = \sqrt{200^2 + \left(\frac{360}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2} = 326 \text{ В.}$$

Активная мощность в цепи:

$$P = P_0 + P_1 + P_3;$$

$$P_0 = U_0 I_0 = 200 \cdot 0 = 0;$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = \frac{300}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot 0,6 = \frac{3000}{2} \cdot 0,6 = 900 \text{ Вт;}$$

$$P_3 = U_3 I_3 \cos \varphi_3 = \frac{150}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot 0,6 = \frac{750}{2} \cdot 0,6 = 225 \text{ Вт;}$$

$$P = 900 + 225 = 1125 \text{ Вт.}$$

**Задача 23.8.** Выполните решение по условию предыдущей задачи, если на зажимах цепи действует напряжение, которое выражается уравнением (23.20) при  $E_m = 148 \text{ В}$ ,  $\omega = 314 \text{ рад/с}$ .

## 23.5. ВЫСШИЕ ГАРМОНИКИ В ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЯХ

Трехфазные цепи в отношении высших гармоник напряжений и токов имеют некоторые особенности.

Рассмотрим известные схемы соединения трехфазных систем при несинусоидальных напряжениях. При этом будем полагать, что напряжения не содержат постоянных составляющих и четных гармоник, т.е. рассматриваются кривые напряжения, симметричные относительно оси абсцисс, которые в практике встречаются наиболее часто.

### Симметричные составляющие гармоник

Симметричная трехфазная система напряжений, как известно, характеризуется тем, что кривые напряжений во всех фазах по форме одинаковы, но сдвинуты на одну треть периода ( $2\pi/3$ ).

Основную гармонику напряжений можно выразить системой трех уравнений:

$$\begin{cases} u_{1A} = U_{1m} \sin \omega t; \\ u_{1B} = U_{1m} \sin(\omega t - 2\pi/3); \\ u_{1C} = U_{1m} \sin(\omega t + 2\pi/3). \end{cases}$$

Система уравнений для  $k$ -х гармоник фазного напряжения отличается от предыдущей тем, что аргумент синусоидальной функции увеличен в  $k$  раз:

$$\begin{aligned} u_{kA} &= U_{km} \sin k\omega t; \\ u_{kB} &= U_{km} \sin\left(k\omega t - \frac{2\pi k}{3}\right); \\ u_{kC} &= U_{km} \sin\left(k\omega t + \frac{2\pi k}{3}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала гармоники, кратные трем, т.е. положим  $k = 3n$ , где  $n$  — целое число:

$$\begin{aligned} u_{kA} &= U_{km} \sin 3n\omega t; \\ u_{kB} &= U_{km} \sin(3n\omega t - 2\pi n) = U_{km} \sin 3n\omega t; \end{aligned}$$

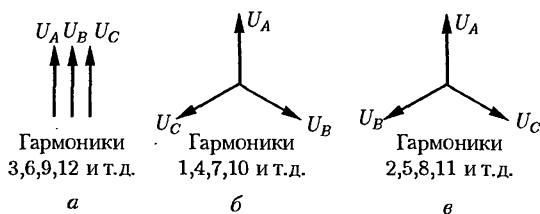


Рис. 23.13

$$u_{kC} = U_{km} \sin(3n\omega t + 2\pi n) = U_{km} \sin 3n\omega t.$$

Напряжения во всех фазах одинаковы и совпадают по фазе, так как сдвиг на полный период (или целое число периодов  $2\pi n$ ) равнозначен отсутствию сдвига.

Гармоники, кратные трем, т.е. 3, 6, 9, 12 и т.д., образуют симметричную систему нулевой последовательности.

На рис. 23.13, а гармоники напряжения, кратные трем, показаны тремя одинаковыми векторами, совпадающими по направлению.

Если  $k = 3n + 1$ , то напряжение  $u_B$  отстает по фазе от  $u_A$  на угол  $2\pi/3$ , а  $u_C$  опережает  $u_A$  на такой же угол.

Например, четвертые гармоники фазных напряжений ( $k = 4$ ) выражаются уравнениями

$$u_{4A} = U_{4m} \sin 4\omega t;$$

$$u_{4B} = U_{4m} \sin \left[ 4\omega t - \frac{2\pi(3+1)}{3} \right] = U_{4m} \sin \left( 4\omega t - \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$u_{4C} = U_{4m} \sin \left[ 4\omega t + \frac{2\pi(3+1)}{3} \right] = U_{4m} \sin \left( 4\omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Следовательно, гармоники 1, 4, 7, 10, 13 и т.д. образуют симметричную систему прямой последовательности.

На рис. 23.13, б показана векторная диаграмма напряжений этих гармоник. Векторы диаграммы нужно представлять вращающимися против движения часовой стрелки с угловой скоростью  $k\omega$ , при этом порядок следования векторов прямой такой за вектором  $U_A$  следует вектор  $U_B$ , а затем  $U_C$ .

Полагая  $k = 3n - 1$ , нетрудно установить, что напряжение  $u_B$  опережает  $u_A$  по фазе на угол  $2\pi/3$ , а  $u_C$  отстает от  $u_A$  на такой же угол. Например, пятые ( $k = 5$ ) гармоники фазных напряжений имеют уравнения:

$$u_{5A} = U_{5m} \sin 5\omega t;$$

$$u_{5B} = U_{5m} \sin \left[ 5\omega t - \frac{2\pi(6-1)}{3} \right] = U_{5m} \sin \left( 5\omega t - \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$u_{5C} = U_{5m} \sin \left[ 5\omega t + \frac{2\pi(6-1)}{3} \right] = U_{5m} \sin \left( 5\omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Гармоники 2, 5, 8, 11, 14 и т.д. образуют симметричную систему обратной последовательности. Порядок следования векторов диаграммы на рис. 23.13, в при вращении их против движения часовой стрелки обратный: за вектором  $U_A$  следует  $U_C$  и далее  $U_B$  (следование векторов в прямом порядке  $U_A \rightarrow U_B \rightarrow U_C$  соответствует вращению их в обратном направлении по движению часовой стрелки).

Если напряжения фаз имеют одинаковые постоянные составляющие, то в совокупности их можно рассматривать как составляющую нулевой последовательности при частоте, равной нулю.

### Соединение звездой

При соединении обмоток источника звездой (рис. 23.14) линейные напряжения равны разностям фазных напряжений двух смежных фаз.

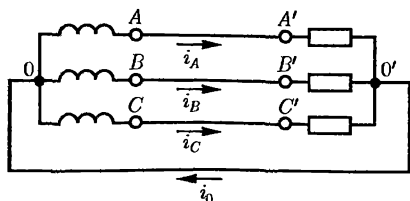
Совпадая по фазе, гармоники фазных напряжений, кратные трем ( $k=3; 6; 9; \dots$ ), при вычитании дадут нуль. Поэтому в линейных напряжениях гармоники, кратные трем, отсутствуют.

По этой причине при несинусоидальных напряжениях:  $U_n/U_\phi < \sqrt{3}$ .

Действительно,

$$\left. \begin{aligned} U_\phi &= \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_9^2 + U_{11}^2 + \dots}; \\ U_n &= \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_{11}^2 + \dots} \end{aligned} \right\} \quad (23.31)$$

Рассматривая симметричную нагрузку, соединенную звездой, отметим два случая.



1. При наличии нулевого провода третьи гармоники фазных токов складываются, образуя ток в нулевом проводе:  $I_{03} = 3I_3$ .

Это также относится и к высшим гармоникам, кратным трем. Все остальные гармоники, обра-

зуя системы прямой или обратной последовательности, в сумме дают нуль.

Таким образом, при симметричной нагрузке в нулевом проводе имеется ток, равный утроенной сумме токов высших гармоник нулевой последовательности:

$$I_0 = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots} \quad (23.32)$$

2. При отсутствии нулевого провода сумма фазных токов в любом случае равна нулю, поэтому в составе фазных токов гармоники, кратные трем, должны отсутствовать. Следовательно, фазные напряжения на нагрузке не могут содержать гармоник, кратных трем.

Для токов нулевой последовательности отсутствие нулевого провода означает разрыв в цепи на участке между нулевыми точками источника и приемника. Таким образом, между нулевыми точками образуется напряжение (смещение нейтрали) каждой гармоники, кратной трем, причем величина смещения равна величине этой гармоники в фазном напряжении источника.

Учитывая все гармоники, вызывающие смещение, получим напряжение между нулевыми точками источника и приемника даже при симметричной нагрузке:

$$U_0 = \sqrt{U_3^2 + U_9^2 + U_{15}^2 + \dots} \quad (23.33)$$

Такое смещение нейтрали, связанное с действием гармоник тока, кратных трем, может наблюдаться в электрических сетях напряжением 6–35 кВ с изолированной нейтралью.

## Соединение треугольником

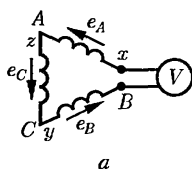
Обмотки генератора или трансформатора, соединенные треугольником (рис. 23.15), образуют замкнутый контур. Результирующая ЭДС трех фаз в этом контуре равна нулю, если ЭДС каждой фазы не имеет гармоник, кратных трем, так как трехфазная система ЭДС каждой гармоники является симметричной системой прямой или обратной последовательности.

При наличии в ЭДС обмоток гармоник, кратных трем, последние образуют системы нулевой последовательности, поэтому результирующая ЭДС гармоники, кратной трем, будет равна утроенной ЭДС одной фазы.

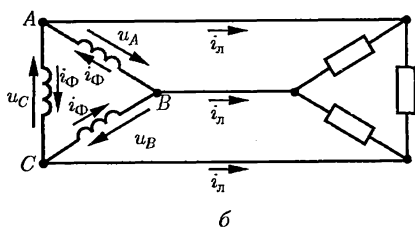
Например, результирующая ЭДС третьей гармоники  $E'_3 = 3E_3$ .

Вольтметр, включенный последовательно в контур обмоток источника (рис. 23.15, а), покажет общее напряжение





а



б

Рис. 23.15

$$U = 3\sqrt{E_3^2 + E_9^2 + E_{15}^2 + \dots} \quad (23.34)$$

В замкнутом треугольнике обмоток источника без нагрузки (внешняя цепь источника разомкнута) результирующая ЭДС гармоник, кратных трем, вызывает ток, который условно назовем внутренним или уравнительным (рис. 23.15, б).

В обмотках нагруженного источника кроме тока нагрузки существует тот же уравнительный ток гармоник, кратных трем.

Уравнительный ток вызывает

в обмотках источника падения напряжения, уравнивающие ЭДС этих гармоник.

Результирующая ЭДС гармоник, не кратных трем, является фазным (и линейным) напряжением источника при отсутствии нагрузки:

$$U_{\phi} = \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + \dots} \quad (23.35)$$

Отсутствие в напряжении источника гармоник, кратных трем, является причиной отсутствия этих гармоник в токах внешней цепи.

Таким образом, фазный ток генератора

$$I_{\phi} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_9^2 + \dots}, \quad (23.36)$$

линейный ток во внешней цепи

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3}\sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots} \quad (23.37)$$

Нетрудно заметить, что  $I_{\text{л}}/I_{\phi} < \sqrt{3}$ .

Уравнительный ток в обмотках источника вызывает дополнительный их нагрев, поэтому соединение треугольником обмоток генераторов обычно не применяется.

## Задачи

**Задача 23.9.** ЭДС в фазе вторичной обмотки трехфазного трансформатора содержит 1, 3, 5 и 7-ю гармоники с амплитудами  $E_{1\text{м}} = 141$  В,  $E_{3\text{м}} = 56,4$  В,  $E_{5\text{м}} = 28,2$  В,  $E_{7\text{м}} = 14,1$  В и начальными фазами, равными нулю. Определить показания вольтметров, включенных, как в схемах рис. 23.16, а, б, в. Вольтметр показывает действующее напряжение.

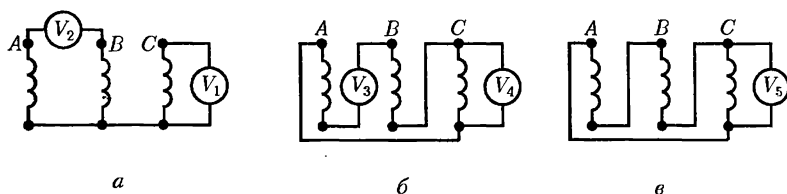


Рис. 23.16

Решение. Уравнение ЭДС в фазе

$$e = 141 \sin \omega t + 56,4 \sin 3\omega t + 28,2 \sin 5\omega t + 14,1 \sin 7\omega t.$$

Действующие значения составляющих ЭДС:

$$E_1 = E_{1m}/\sqrt{2} = 141/1,41 = 100 \text{ В}; \quad E_3 = E_{3m}/\sqrt{2} = 56,4/1,41 = 40 \text{ В};$$

$$E_5 = E_{5m}/\sqrt{2} = 28,2/1,41 = 20 \text{ В}; \quad E_7 = E_{7m}/\sqrt{2} = 14,1/1,41 = 10 \text{ В}.$$

Вольтметр  $V_1$  включен на фазное напряжение при соединении звездой без нагрузки

$$U_1 = U_\phi = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_7^2} = \sqrt{100^2 + 40^2 + 20^2 + 10^2} = 110 \text{ В}.$$

Вольтметр  $V_2$  при тех же условиях измеряет линейное напряжение, в составе которого отсутствует третья гармоника:

$$U_2 = U_\pi = \sqrt{3} \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2} = \sqrt{3} \sqrt{100^2 + 20^2 + 10^2} = 177,2 \text{ В}.$$

При соединении треугольником по схеме рис. 23.16, б контур из обмоток трансформатора замкнут через вольтметр  $V_3$ , т.е. через большое сопротивление.

Практически сумма всех составляющих напряжения трех обмоток приложена к вольтметру. Но гармоники 1, 5, 7, не кратные трем, в сумме дают нуль. Гармоники 3, кратные трем, образуют системы нулевой последовательности, поэтому  $U_3 = 3E_3 = 3 \cdot 40 = 120 \text{ В}$ .

Определите показания вольтметров  $V_4$  и  $V_5$ .

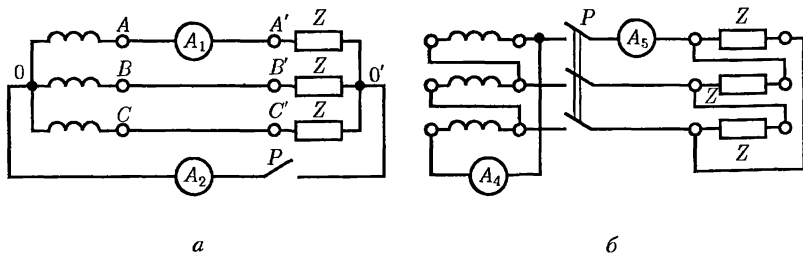


Рис. 23.17

**Задача 23.10.** Определить показания амперметров в схемах рис. 23.17 (при замкнутом и разомкнутом рубильнике  $P$ ), если в обмотках трансформатора действует симметричная система ЭДС, заданных в предыдущей задаче, а сопротивление нагрузки в фазе выражается комплексом  $\underline{Z} = (8 + j5)$  Ом. Сопротивление фазы генератора  $+j1$  Ом.

**Решение.** При соединении звездой по схеме рис. 23.17, а с замкнутым рубильником, т.е. с нулевым проводом, амперметр  $A$  показывает сумму токов нулевой последовательности. В данном случае это будет утроенный ток третьей гармоники, так как нагрузка симметрична:

$$I_2 = 3I_3 = 3 \frac{E_3}{Z_3},$$

где  $Z_3$  — полное сопротивление фазы для третьей гармоники:

$$\underline{Z}_3 = 8 + j6 \cdot 3 = 8 + j18; \quad \underline{Z}_3 = 19,7 \text{ Ом};$$

$$I_2 = 3 \frac{40}{19,7} = 6,1 \text{ А}.$$

Амперметр  $A_1$  покажет действующее значение общего тока в фазе:

$$I_{1\phi} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2}.$$

Определите действующие токи всех гармоник, учитывая изменение реактивного сопротивления в зависимости от частоты, и показание амперметра  $A_1$ .

При разомкнутом рубильнике показание амперметра  $A_2 = 0$ .

Ток в фазе нужно определить, выполнив для каждой гармоники расчет цепи известными методами.

Для 1, 5, 7-й гармоник цепь представляет собой симметричную трехфазную систему, поэтому достаточно определить ток в фазе по формуле  $I_k = E_k / Z_k$ .

Третьи гармоники фазных напряжений образуют систему нулевой последовательности. В данном случае следует определить напряжение между нулевыми точками  $U_0$ . Для третьей гармоники отсутствие нулевого провода соответствует разрыву цепи, поэтому  $U_0 = E_3$ , а ток третьей гармоники в фазе равен нулю.

При соединении треугольником по схеме 23.17, б и при разомкнутом рубильнике амперметр  $A_4$  показывает ток в контуре из обмоток трансформатора, создаваемый третьей гармоникой ЭДС всех фаз.

При замкнутом рубильнике амперметр  $A_4$  показывает фазный, а амперметр  $A_5$  — линейный ток в трехфазной системе. Эти токи определите по формулам (23.36) и (23.37), предварительно найдя действующие токи каждой гармоники.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

В цепях постоянного и переменного токов широко применяют элементы с нелинейной вольт-амперной характеристикой  $u(i)$ . Их активное сопротивление  $R$  зависит от тока и напряжения.

При переменном токе можно использовать и нелинейные реактивные элементы. К таким элементам относятся катушки и трансформаторы с ферромагнитными сердечниками, имеющие нелинейную зависимость магнитного потока от тока  $\Phi(i)$ , конденсаторы с сегнето-диэлектриками, у которых заряд нелинейно связан с напряжением  $Q(u)$ .

С помощью нелинейных активных сопротивлений с несимметричной вольт-амперной характеристикой можно осуществлять выпрямление напряжения и тока, так как в кривых напряжений и токов цепи появляются постоянные составляющие, которые можно выделить.

В цепи с синусоидальным источником питания нелинейные реактивные элементы, имеющие, как правило, симметричную вольт-амперную характеристику, вносят искажение в форму кривых напряжений и токов, т.е. вызывают появление высших гармоник, из которых наиболее резко выделяется третья. Можно отфильтровать одну из высших гармоник и таким образом осуществить умножение частоты.

Совместное применение активных и реактивных нелинейных элементов, а также неоднородных источников питания (ЭДС разной частоты, постоянных ЭДС вместе с переменными) значительно увеличивает число практических задач, успешно решаемых в различных отраслях техники (радиоэлектронике, автоматике и др.).

Кроме уже отмеченных задач решаются, например, такие, как усиление напряжения и мощности, генерирование колебаний различной формы, модулирование колебаний и т.д.

## 24.1. ТОКИ В ЦЕПИ С ВЕНТИЛЯМИ

*Вентилем* называют элемент цепи, обладающий односторонней проводимостью (полупроводниковые диоды, ртутные вентили, газотроны и электровакуумные лампы).

## Вольт-амперные характеристики и схемы замещения вентиля

У идеального вентиля при одной полярности напряжения сопротивление равно нулю, а при другой (обратной) — бесконечности. Его вольт-амперная характеристика состоит из двух участков (рис. 24.1, *а*). Один из них совпадает с отрицательной осью  $i$ , другой — с положительной осью  $i$ .

Характеристика реального вентиля (рис. 24.1, *б*) указывает на то, что его сопротивление в одном направлении мало, а в другом велико, но в обоих случаях оценивается конечными величинами.

Реальную характеристику вентильного сопротивления можно приближенно представить в виде ломаной линии, как на рис. 24.1, *в* или *г*.

Для полупроводниковых диодов и электронных ламп более подходит характеристика рис. 24.1, *в*, а для ртутных вентиляй и газотронов — характеристика рис. 24.1, *г*. Такая замена реальных вольт-амперных характеристик позволяет составить простую электрическую схему замещения вентиля.

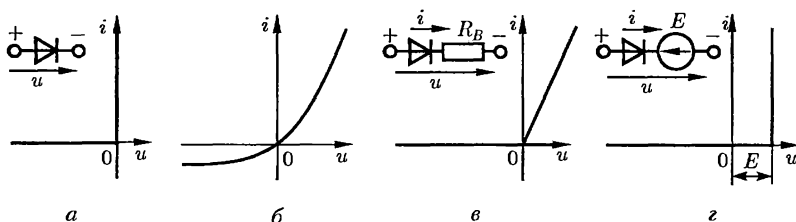


Рис. 24.1

Цепь из последовательно соединенных идеального вентиля и элемента с активным сопротивлением имеет вольт-амперную характеристику рис. 24.1, *в*, характеристика рис. 24.1, *г* соответствует цепи из идеального вентиля и источника постоянной ЭДС.

### Ток в цепи с вентилем

На рис. 24.2 показана кривая тока в цепи с нелинейной вольт-амперной характеристикой (для примера взята цепь с полупроводниковым диодом) при синусоидальной форме действующего в ней напряжения.

Каждому мгновенному напряжению  $u$  соответствует по характеристике  $i(u)$  ток  $i$ . Определяя эти величины, как показано на рисунке, и откладывая их в координатах  $i, t$ , можно построить кривую тока в функции времени  $i(t)$ .

В данном случае кривая тока имеет положительные и отрицательные полуволны, но положительные во много раз больше отрицательных.

Построим кривую тока в цепи последовательно соединенных реального вентиля и элемента с линейным сопротивлением  $R$  при синусоидальном напряжении источника питания  $u = U_m \sin \omega t$ .

На рис. 24.3 изображены вольт-амперные характеристики вентилей и элемента цепи с сопротивлением  $R$ .

Для этой схемы справедливо уравнение напряжений

$$u = U_m \sin \omega t = u_B + u_R = u_B + iR.$$

На основании этого уравнения построена вольт-амперная характеристика всей цепи  $i(u)$  путем суммирования падений напряжения на вентиле ( $u_B$ ) и постоянном сопротивлении ( $u_R = iR$ ) при различных значениях тока.

На том же чертеже в координатах  $u, t$  построена кривая напряжения и функции времени  $u(t)$ .

Чем больше амплитуда напряжения источника, тем сильнее отличаются положительная и отрицательная полуволны тока в цепи с вентилем.

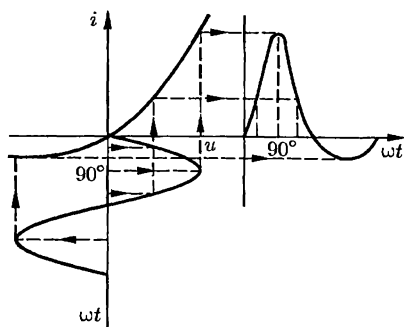


Рис. 24.2

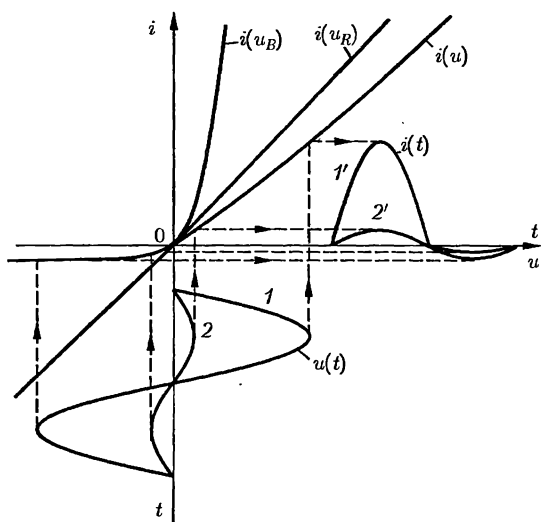


Рис. 24.3

При достаточно больших значениях  $u$  отрицательную полуволну тока можно не принимать во внимание и считать, что кривая тока состоит только из положительных полуволн (кривые 1 и 1' на рис. 24.3).

Кривая тока такого вида наряду с гармоническими имеет постоянную составляющую (см. гл. 23) тем большей величины, чем больше напряжение источника и чем больше вольт-амперная характеристика приближается к идеальной.

При малой амплитуде напряжения источника прямая и обратная полуволны тока могут оказаться близкими по величине (кривые 2 и 2'). В этом случае выпрямляющее действие вентильного сопротивления незначительно.

### Электрический вентиль в цепи с неоднородными источниками питания

Включение вентиля в цепь с неоднородными источниками питания открывает новые возможности технического применения нелинейных цепей.

В цепи рис. 24.4, а при наличии вентиля действуют две ЭДС: переменная  $e = E_m \sin \omega t$  и постоянная  $E_0$ .

На рис. 24.4, б представлена вольт-амперная характеристика, показанная на рис. 24.1, в, и там же в координатах  $u(\omega t)$  построена зависимость напряжения от времени.

При  $E_0 = 0$  напряжение  $u_2$  совпадает с синусоидальной ЭДС  $e_2$  (кривая 2); это напряжение вызывает в цепи ток (кривая 2').

При включении в сеть отрицательной постоянной ЭДС  $E_0 = -E_{03}$  напряжение в цепи  $u_2 = E_{03} + E_m \sin \omega t$ .

На графике это отражается перенесением оси  $\omega t$  влево на величину  $E_{03}$ . Введение постоянной ЭДС изменило форму тока (кривая

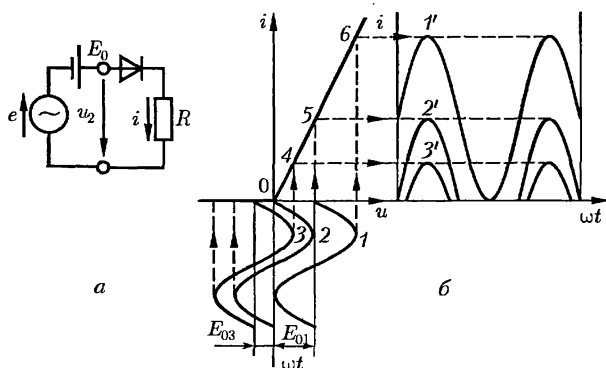


Рис. 24.4

3'); следовательно, изменились (уменьшились) постоянная и переменная составляющие тока.

Если в цепь включить постоянную ЭДС  $E_{01}$  такой величины, чтобы результирующее напряжение оставалось все время положительным, то кривая тока по форме совпадает с кривой напряжения (кривые 1 и 1').

Таким образом, можно, изменяя постоянную ЭДС, управлять переменной составляющей тока.

## Задачи

**Задача 24.1.** Построить график зависимости постоянной составляющей тока от величины постоянной ЭДС  $E_0$  в цепи, схема которой изображена на рис. 24.5, а.

Переменная ЭДС  $e$  выражается уравнением  $e = 100 \sin 314t$ .

Нагрузочное сопротивление  $R_n = 1000$  Ом.

Вольт-амперная характеристика выпрямительного элемента представлена на рис. 24.5, б кривой  $i(u_B)$ .

**Решение.** Для упрощения решения задачи реальная вольт-амперная характеристика на рис. 24.5, б заменена идеальной (штриховая линия). На том же чертеже нанесена вольт-амперная характеристика нагрузочного сопротивления — прямая  $i(u_n)$  и построена вольт-амперная характеристика цепи  $i(u)$ . Из этой характеристики следует, что общее сопротивление цепи  $R_B + R_n = 5000$  Ом.

На рис. 24.6 по общей вольт-амперной характеристике цепи построены кривые тока при двух величинах постоянной ЭДС:  $E_0 = 0$ ;  $E_0 = -40$  В.

Из построения видно, что при  $E = 0$  в течение первого полупериода кривая тока представляет собой синусоидальную функцию  $i = I_m \sin \omega t$ , а во вторую половину периода ток равен нулю.

При  $E_0 = -40$  В кривая тока в течение части периода (от  $\varphi_0$  до  $180^\circ - \varphi_0$ ) также представляет собой синусоидальную функцию, но относительно другой оси абсцисс  $\omega t'$ , отстоящей от первоначальной оси на  $-\varphi_0$ .

Величина  $i_0 = I_m \sin \varphi_0$ .

Угол  $\varphi_0$ , который назовем углом отсечки, зависит от величины  $E_0$ .

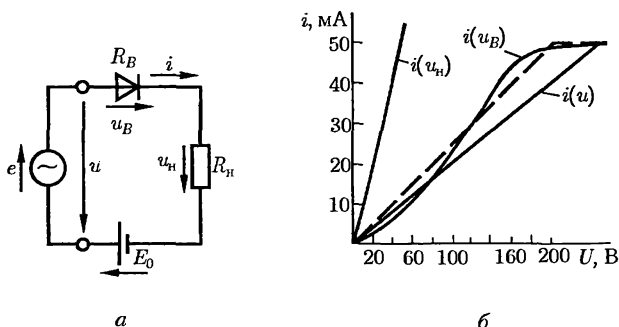


Рис. 24.5



Из графиков напряжений следует, что  $E_0 = -U_m \sin \varphi_0$ , а  $\sin \varphi_0 = \frac{E_0}{U_m}$ .

Найдем выражение постоянной составляющей тока в общем виде. В первоначальных осях координат уравнение тока можно записать так:

$$i = -i_0 + I_m \sin \omega t,$$

$$i = I_m \sin \omega t - I_m \sin \varphi_0 = I_m (\sin \omega t - \sin \varphi_0).$$

Постоянная составляющая тока определяется выражением (23.4)

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i d\omega t.$$

Ток  $i$  — положительный при изменении фазового угла от  $\varphi_0$  до  $\pi - \varphi_0$ . При всех других фазовых углах в пределах периода ток равен нулю.

Поэтому

$$I_0 = \frac{I_m}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} (\sin \omega t - \sin \varphi_0) d\omega t = \frac{I_m}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} \sin \omega t d\omega t - \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} \sin \varphi_0 d\omega t;$$

$$I_0 = \frac{I_m}{2\pi} [2 \cos \varphi_0 + (2\varphi_0 - \pi) \sin \varphi_0].$$

В последнем выражении  $I_m$  — амплитуда синусоидального тока при однополупериодном выпрямлении, т.е. при  $E_0 = 0$  и  $\varphi_0 = 0$

$$I_m = \frac{U_m}{R_b + R_h} = \frac{100 \cdot 10^3}{4000 + 1000} = 20 \text{ мА}.$$

В этом случае  $I_0 = I_m / \pi = 20 / \pi = 6,7 \text{ мА}$ .

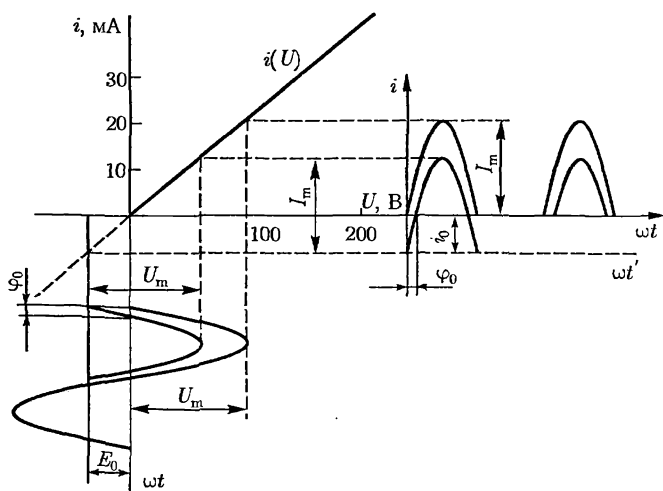


Рис. 24.6

При  $\varphi_0 = \pi/2$   $I_0 = 0$ .

Для построения графика  $I_0(E_0)$  вычислите  $I_0$  и  $E_0$  при различных углах отсечки  $\varphi_0$ :  $\pm \pi/2$ ;  $\pm \pi/3$ ;  $\pm \pi/6$ .

График  $I_0(E_0)$  построен на рис. 24.7.

**Задача 24.2.** По данным условия задачи 24.1 построить график зависимости амплитуды первой гармоники тока от величины постоянной ЭДС —  $I_{1m}(E_0)$ .

Для определения амплитуды первой гармоники тока  $I_{1m}$  рекомендуется взять те же углы  $\varphi_0$ , что и при построении кривой (см. рис. 24.7) и использовать формулы (23.3), (23.5), (23.6).

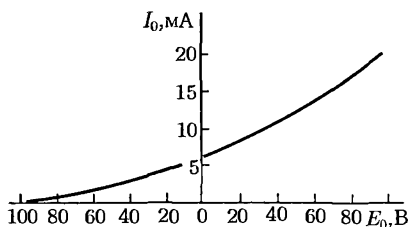


Рис. 24.7

## 24.2. ЭДС, МАГНИТНЫЙ ПОТОК И ТОК В ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Магнитный поток и намагничивающий ток катушки с ферромагнитным сердечником связаны между собой нелинейной характеристикой  $\Phi(i)$  [магнитная проницаемость ферромагнитных материалов не постоянна (см. рис. 8.31)], поэтому индуктивность катушки с сердечником изменяется в зависимости от тока. Это является причиной различия по форме кривой намагничивающего тока и кривой напряжения.

### Идеализированная катушка с ферромагнитным сердечником

Рассмотрим электромагнитные процессы в идеализированной катушке, пренебрегая активным сопротивлением ее обмотки и не учитывая потери энергии в сердечнике (рис. 24.8); напряжение, приложенное к такой катушке, уравновешивается только ЭДС самоиндукции:  $u = -e$ .

При синусоидальном напряжении источника ЭДС в катушке может быть только синусоидальной. Но синусоидальная ЭДС может вводиться магнитным потоком синусоидальной формы, что следует из формулы (10.2). Если

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t,$$

то

$$\begin{aligned} e &= -N \frac{d\Phi}{dt} = -N\Phi_m \omega \cos \omega t = \\ &= E_m \sin(\omega t - 90^\circ). \end{aligned}$$

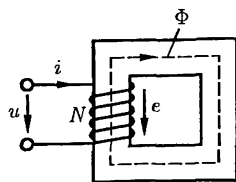


Рис. 24.8

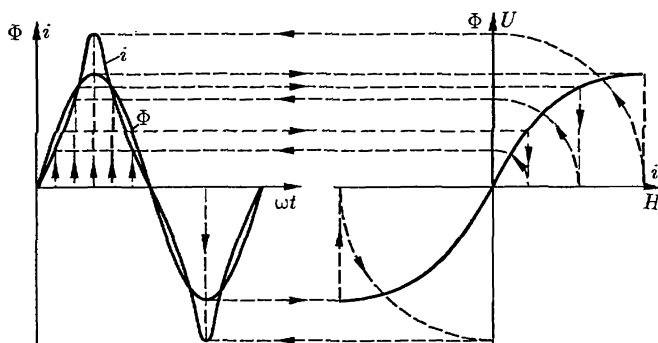


Рис. 24.9

Амплитуда ЭДС

$$E_m = 2\pi f \Phi_m N,$$

а действующее значение

$$E = E_m / \sqrt{2} = \sqrt{2} \pi N f \Phi_m,$$

или

$$E = 4,44 N f \Phi_m. \quad (24.1)$$

Кривая циклического намагничивания сердечника  $\Phi(i)$  без потерь от гистерезиса и вихревых токов изображена на рис. 24.9. Эта кривая подобна основной кривой намагничивания материала сердечника  $B(H)$ , так как магнитный поток  $\Phi = BS$ , а ток в катушке  $i = \frac{HI}{N}$  согласно закону полного тока. На рис. 24.9 для ряда мгновенных значений синусоидального потока определены соответствующие намагничивающие токи; затем проведена кривая  $i(\omega t)$ , которая, будучи периодической, сильно отличается от синусоиды.

Рассматривая кривую  $i(\omega t)$ , легко убедиться в том, что в составе гармоник тока особенно выделяется третья гармоника (ср. кривую тока с кривой ЭДС на рис. 23.1, б).

### Векторная диаграмма идеализированной катушки

Действующий ток  $I$  определяется формулой (23.25) или с использованием поправочного коэффициента формулой

$$I = \frac{i_m}{k_n \sqrt{2}}, \quad (24.2)$$

где  $i_m$  — амплитуда основной кривой тока.

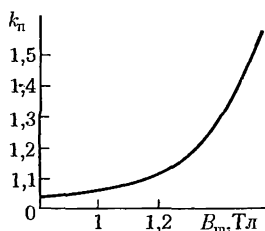


Рис. 24.10

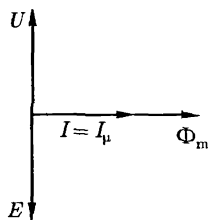


Рис. 24.11

Для катушек с сердечником из электротехнической (трансформаторной) стали коэффициент  $k_n$  находится по кривой рис. 24.10, на котором показана его зависимость от максимальной величины магнитной индукции; при  $B \leq 1$  Тл коэффициент  $k_n$  близок к единице, а при  $B > 1,4$  Тл быстро увеличивается.

Таким образом, не учитывая магнитных потерь в сердечнике и потерь в обмотке, получим совпадение начальных фаз синусоидального магнитного потока и несинусоидального тока. Заменив реальный ток катушки его первой гармоникой  $i_1$  (или эквивалентным синусоидальным током  $i_s$  с такой же действующей величиной, как и несинусоидальный ток), можно построить векторную диаграмму катушки с ферромагнитным сердечником (рис. 24.11). Векторы тока  $I$  и потока  $\Phi_m$  совпадают по фазе; ЭДС самоиндукции  $E$  отстает, а напряжение  $U$  на катушке опережает магнитный поток на  $90^\circ$ . Ток в идеализированной катушке является реактивным. Он не сопровождается преобразованием электрической энергии в другой вид энергии (активная составляющая тока  $I_a = 0$ ), но создает магнитное поле в сердечнике. Поэтому его называют **магнитным током**  $I = I_\mu$ .

### Магнитный поток и ЭДС самоиндукции при синусоидальном токе в идеализированной катушке

При увеличении амплитуды напряжения на катушке амплитуда и действующее значение тока в ней будут возрастать быстрее. В результате вольт-амперная характеристика катушки с ферромагнитным сердечником оказывается нелинейной; по форме она повторяет кривую намагничивания сердечника (см. рис. 24.9).

При синусоидальном токе в обмотке катушки магнитный поток, ЭДС и направление несинусоидальны, что показывает построение кривой на рис. 24.12. График магнитного потока имеет притупленную форму, близкую к трапеции.

ЭДС и напряжение на катушке имеют более заостренную форму, чем синусоида (рис. 24.13).

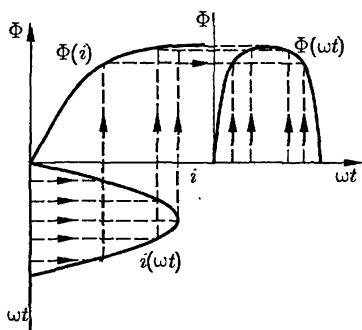


Рис. 24.12

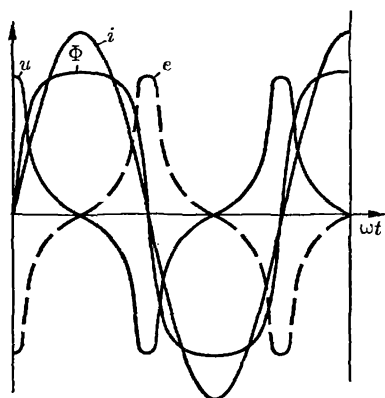


Рис. 24.13

### Задачи

**Задача 24.3.** Пользуясь графиком рис. 24.10, определить, как отличается действующее значение тока в катушке с сердечником из электротехнической стали при  $B_m = 1,4$  Тл от действующего значения синусоидального тока при той же амплитуде.

**Задача 24.4.** Катушка с числом витков  $N = 400$  намотана на сердечник из электротехнической стали марки 1311. Размеры сердечника даны на рис. 24.14. Пренебрегая потерями энергии в сердечнике, а также активным сопротивлением и потоком рассеяния, построить кривую тока в катушке, если напряжение на ее зажимах выражается уравнением  $u = 169 \sin 314t$ .

**Решение.** Согласно условию задачи активное сопротивление обмотки и магнитный поток рассеяния можно считать равными нулю. При этих условиях напряжение на зажимах катушки равно ЭДС, наводимой основным магнитным потоком в сердечнике:  $u = -e$ .

Для определения амплитуды магнитного потока воспользуемся формулой (24.1):  $E = 4,44Nf\Phi_m$ .

Из уравнения напряжения известны

$$E_m = 169 \text{ В}; \quad \omega = 314 \text{ рад/с};$$

$$E = 169/\sqrt{2} = 120 \text{ В};$$

$$f = 314/(2\pi) = 50 \text{ Гц};$$

$$\Phi_m = \frac{E}{4,44Nf} =$$

$$= \frac{120}{4,44 \cdot 400 \cdot 50} = 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}.$$

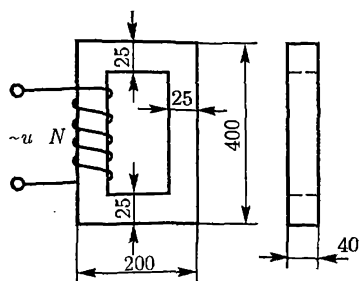


Рис. 24.14

Графические построения выполните самостоятельно в следующем порядке.

1. По кривой  $B(H)$  прил. 4 постройте кривую  $\Phi(i)$  сердечника заданных размеров, используя формулы

$$\Phi = BS; \quad H = \frac{iN}{l}.$$

2. Кривую тока постройте так, как это показано на рис. 24.9.

3. Определите по чертежу максимальное значение тока и его действующее значение по формуле (24.2).

4. Постройте векторную диаграмму катушки со стальным сердечником.

### 24.3. ВЛИЯНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА И ВИХРЕВЫХ ТОКОВ НА ТОК КАТУШКИ С ФЕРРОМАГНИТНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

Магнитный гистерезис вносит дополнительные изменения в форму кривой намагничивающего тока. Эти изменения обусловлены тем, что при увеличении магнитного потока ход кривой тока определяется восходящей, а при уменьшении потока — нисходящей ветвью петли гистерезиса.

#### Ток в катушке с учетом магнитного гистерезиса

На рис. 24.15 изображен график  $\Phi(i)$  зависимости магнитного потока от намагничивающего тока катушки с ферромагнитным сердечником (петля магнитного гистерезиса). Петля гистерезиса, полученная при медленном циклическом изменении намагничивающего тока, называется статическо й.

На том же рисунке дана кривая тока  $i(\omega t)$ , показывающая, что при увеличении магнитного потока кривая тока идет выше, а при уменьшении потока — ниже кривой, построенной при тех же условиях на рис. 24.9 по основной кривой намагничивания. Кроме того, начальные фазы потока и тока не совпадают (угол сдвига  $\delta$ ), в связи

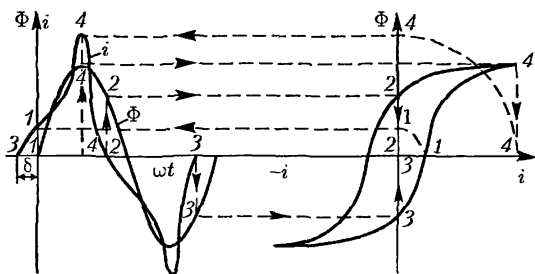


Рис. 24.15

с чем первая гармоника тока (или эквивалентный ток) отстает от приложенного напряжения на угол  $\varphi < 90^\circ$ .

## Энергия магнитного поля катушки

Наличие сдвига по фазе между током и напряжением, меньшего  $90^\circ$ , указывает на то, что активная мощность в цепи не равна нулю даже в том случае, если активное сопротивление обмотки катушки  $R = 0$ .

Следовательно, ток катушки из-за потерь на гистерезис имеет активную составляющую, а средняя мощность за период не равна нулю.

В данном случае активная мощность характеризует расход энергии на перемагничивание ферромагнитного сердечника.

Изменение энергии магнитного поля  $dW_m$  выражается площадью элементарного прямоугольника со сторонами  $i$  и  $d\Psi$  [см. формулу (11.12) и графическое определение энергии магнитного поля катушки без сердечника в 11.3]. Следовательно,

$$dW_m = i d\Psi.$$

Энергия магнитного поля, запасенная при увеличении тока в катушке, определяется площадью, ограниченной кривой  $\Psi(i)$  и осью ординат (рис. 24.16):

$$W_m = \int i d\Psi.$$

Рассмотрим цикл перемагничивания сердечника, начиная с точки 1, когда  $i = 0$  и  $B = -B_r$  (рис. 24.17, а).

Для размагничивания сердечника от  $-B_r$  до 0 и последующего намагничивания до  $B_m$  затрачивается энергия, которая определяется площадью, ограниченной контуром 1-2-3-4-0-1. Эта площадь непосредственно оп-

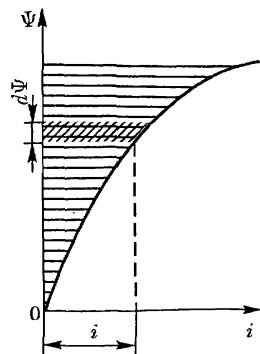


Рис. 24.16

ределяет величину  $\int_{-B_r}^{-B_m} H dB$ , но  $dB$  пропорционально  $d\Psi$ , а  $H$  пропорционально  $i$ .

На всем протяжении рассматриваемой части петли магнитного гистерезиса (1-2-3) напряженность поля  $H$  и приращения магнитного потокосцепления  $\Delta\Psi$  положительны.

При размагничивании от  $B_m$  до  $+B_r$  (участок 3-5) напряженность поля по-прежнему положительна, а приращения потокосцепления отрицательны. Площадь, ограниченную

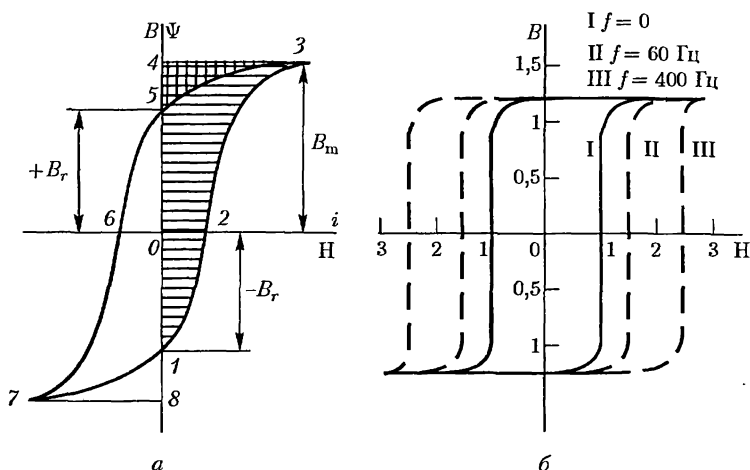


Рис. 24.17

контуром 3–4–5–3, нужно считать отрицательной. Энергия, пропорциональная этой площади, возвращается источнику. На участке 5–6–7 петли гистерезиса напряженность поля и приращения потокоцепления отрицательны. Площадь, ограниченная контуром 5–6–7–8–1–0–5, положительна. Это означает, что энергия опять потребляется от источника. Размагничивание на участке 7–1 сопровождается возвращением энергии источнику в количестве, пропорциональном площади 7–8–1–7.

Таким образом, энергия, израсходованная в единице объема ферромагнитного сердечника за один цикл перемагничивания, определяется площадью, ограниченной петлей магнитного гистерезиса.

## Потери энергии в ферромагнитном сердечнике катушки

При достаточно быстром изменении намагничивающего тока в ферромагнитном сердечнике возникают вихревые токи (см. 10.4).

Вихревые токи создают намагничивающую силу, направленную навстречу намагничивающей силе обмотки с током  $i$ , поэтому изменения магнитной индукции и магнитного потока в сердечнике как бы задерживаются: те же величины магнитной индукции и потока получаются при большем намагничивающем токе в обмотке. Это значит, что при переменном токе в обмотке петля магнитного гистерезиса шире статической петли в связи с действием вихревых токов. Петля магнитного гистерезиса, соответствующая переменному намагничивающему току, называется *динамической*.

На рис. 24.17, б показаны динамические кривые намагничивания сплава железо-никель при различных частотах тока. Вихревые токи



увеличиваются с ростом частоты перемagnичивания, удельной проводимости и магнитной проницаемости материала сердечника, при этом динамическая петля расширяется.

Возникновение вихревых токов вызывает дополнительный расход энергии в сердечнике. Энергия, израсходованная на перемagnичивание сердечника и поддержание в нем вихревых токов, преобразуется в теплоту. Эту энергию называют **магнитными потерями** или потерями в стали — по названию наиболее применяемого ферромагнитного материала.

Мощность магнитных потерь  $P_m$  пропорциональна площади динамической петли магнитного гистерезиса. Ее обычно определяют по формуле

$$P_m = P_{уд} G,$$

где  $G$  — масса ферромагнитного сердечника, кг;  $P_{уд}$  — удельная мощность потерь в стали, Вт/кг.

Зависимости  $P_{уд}$  от магнитной индукции  $B$  при данной частоте для различных ферромагнитных материалов приводятся в справочных таблицах.

### Векторная диаграмма катушки с учетом потерь энергии в сердечнике

Зная магнитные потери, найдем активную составляющую эквивалентного тока катушки

$$I_a = P_m / U. \quad (24.3)$$

Упрощенная векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником (без учета активного сопротивления обмотки и магнитного рассеяния) дана на рис. 24.18. При построении диаграммы в произвольном направлении отложен вектор напряжения  $U$ . Под прямым углом к нему откладывается вектор магнитного потока  $\Phi_m$ , который отстает по фазе от напряжения на  $90^\circ$ . От потока на  $90^\circ$  отстает ЭДС, величина которой  $E$  равна величине  $U$ .

Активная составляющая тока совпадает по фазе с напряжением, а полный ток катушки отстает от напряжения на угол  $\varphi$ :

$$\cos \varphi = P_m / (UI).$$

Реактивная составляющая тока катушки  $I_\mu$ , совпадающая по фазе с магнитным потоком, называется **намагничивающим током**

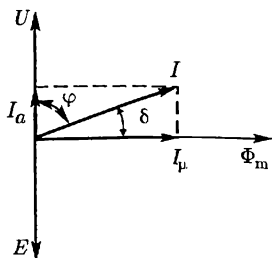


Рис. 24.18

$$I_{\mu} = \sqrt{I^2 - I_a^2}. \quad (24.4)$$

Угол  $\delta$  между векторами полного тока катушки и магнитного потока называется углом потерь:

$$\operatorname{tg} \delta = I_a / I_{\mu}. \quad (24.5)$$

### Задачи

**Задача 24.5.** Определить действующий ток и коэффициент мощности катушки задачи 24.4 при наличии в сердечнике воздушных зазоров в стыках, общая (эквивалентная) длина которых  $\delta = 0,5$  мм. Сопротивление обмотки и магнитное рассеяние не учитывать. Толщина листов сердечника 0,5 мм. Удельные потери в стали  $P_{\text{уд}} = 7,9$  Вт/кг.

**Решение.** Наибольшее значение магнитного потока определено при решении задачи 24.4:

$$\Phi_m = 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Наибольшая магнитная индукция

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = \frac{1,35 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = 1,35 \text{ Тл.}$$

Магнитная цепь катушки состоит из двух участков: стального сердечника, длина которого по средней линии  $l_{\text{ст}} = 110$  см, и воздушного зазора  $\delta = 0,5$  мм.

Согласно закону полного тока,

$$H_{\text{ст}} l_{\text{ст}} + H_0 \delta = I_{\mu m} N,$$

где  $H_{\text{ст}}$ ,  $H_0$  — напряженность магнитного поля в стали и воздушном зазоре;  $I_{\mu m}$  — амплитуда намагничивающей составляющей тока катушки.

По прил. 4 при  $B = 1,35$  Тл

$$H_{\text{ст}} = 13,4 \text{ А/см} = 1340 \text{ А/см};$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1,35}{2\pi \cdot 10^{-7}} = 108 \cdot 10^4 \text{ А/м};$$

$$I_{\mu m} N = 1340 \cdot 110 \cdot 10^{-2} + 108 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 2020 \text{ А.}$$

Действующее значение намагничивающего тока определяем по формуле (24.2)

$$I_{\mu} = \frac{I_{\mu m}}{k_n \sqrt{2}} = \frac{5,05}{1,24 \cdot 1,41} = 2,88 \text{ А,}$$

где

$$I_{\mu m} = 2020/400 = 5,05 \text{ А.}$$

Для определения активной составляющей тока  $I_a$  нужно найти потери в стали. Масса сердечника

$$GV_{\gamma_{ст}} = 110 \cdot 10 \cdot 7,8 \cdot 10^{-3} = 8,6 \text{ кг},$$

$$P_m = P_{\gamma_d} G = 7,9 \cdot 8,6 = 68 \text{ Вт}.$$

Активная составляющая тока

$$I_a = P_m / U = 68 / 120 = 0,56 \text{ А}.$$

Ток в обмотке

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_\mu^2} = \sqrt{0,56^2 + 2,88^2} = 2,94 \text{ А}.$$

Коэффициент мощности катушки

$$\cos \varphi = I_a / I = 0,56 / 2,94 = 0,19.$$

**Задача 24.6.** По данным условия задачи 24.5 и используя ее решение, построить зависимость тока в катушке от величины воздушного зазора в стальном сердечнике при неизменном действующем значении напряжения на ее зажимах.

Для расчета взять следующие длины воздушного зазора  $\delta$ : 1, 2, 5, 10 мм.

Построить векторную диаграмму катушки при воздушном зазоре в ее сердечнике  $\delta = 2$  мм.

#### 24.4. ПОЛНАЯ ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА И СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ КАТУШКИ С ФЕРРОМАГНИТНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

При построении упрощенной векторной диаграммы (см. рис. 24.18) не учитывались активное сопротивление обмотки и магнитное рассеяние.

Однако в практике расчетов и эксплуатации электромагнитных устройств (электрических машин, трансформаторов, электроаппаратуры и т. д.) эти факторы имеют существенное значение и ими во многих случаях пренебрегать нельзя.

#### Потери энергии в обмотке катушки

Энергия, потребляемая катушкой, расходуется на покрытие не только магнитных потерь (потерь в ферромагнитном сердечнике), но и электрических (потерь в обмотке).

Мощность электрических потерь — их часто называют потерями в меди — пропорциональна квадрату тока и активному сопротивлению обмотки  $R$ :

$$P_{\text{э}} = I^2 R. \quad (24.6)$$

Таким образом, активная мощность катушки

$$P = P_{\text{м}} + P_{\text{э}}, \quad (24.7)$$

а активная составляющая тока

$$I_{\text{а}} = P/U. \quad (24.8)$$

## Магнитное рассеяние

Когда не учитывается магнитное рассеяние, предполагается, что магнитный поток катушки полностью замыкается по ферромагнитному сердечнику. Действительно, большая часть линий магнитной индукции замыкается по сердечнику, образуя основной магнитный поток  $\Phi$ .

Но магнитное поле существует и в пространстве, окружающем сердечник, что можно изобразить линиями магнитной индукции, проведенными полностью или частично вне сердечника, в воздухе (рис. 24.19).

Эти линии характеризуют другой магнитный поток  $\Phi_s$ , который называется потоком рассеяния.

Оба магнитных потока создаются одним и тем же током катушки, но из-за различия сред рассматриваются и определяются отдельно.

Основной магнитный поток  $\Phi$  не пропорционален току, так как связан с ним нелинейной кривой намагничивания ферромагнитного сердечника. Поэтому ЭДС в катушке, наводимая основным потоком, определяется по формуле (24.1):  $E = 4,44 N f \Phi_{\text{м}}$ .

Магнитный поток рассеяния  $\Phi_s$  пропорционален току, так как магнитная проницаемость воздуха постоянна. ЭДС  $E_s$ , наводимая

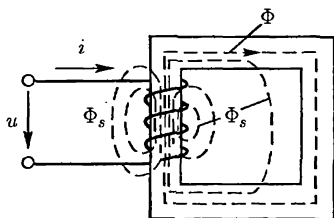


Рис. 24.19

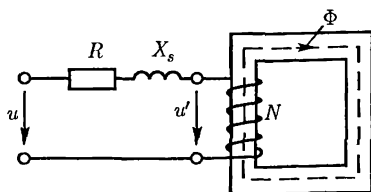


Рис. 24.20

в катушке потоком рассеяния, пропорциональна скорости изменения тока:

$$e_s = -L_s \frac{di}{dt}.$$

Поэтому

$$E_s = -i\omega L_s = -IX_s,$$

где  $X_s$  — индуктивное сопротивление рассеяния.

### Полная векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником

Напряжение  $U$ , приложенное к катушке, состоит из трех составляющих: первая ( $U' = -\dot{E}$ ) уравнивает ЭДС основного потока; вторая ( $U'_s = -\dot{E}_s = j\dot{I}X_s$ ) уравнивает ЭДС потока рассеяния, т.е. является падением напряжения в индуктивном сопротивлении рассеяния; третья ( $\dot{U}_a = \dot{I}R$ ) есть падение напряжения в активном сопротивлении обмотки

$$\dot{U} = \dot{U}' + \dot{U}_s + \dot{U}_a,$$

или

$$\dot{U} = -\dot{E} + j\dot{I}X_s + \dot{I}R. \quad (24.9)$$

Этому уравнению соответствует электрическая схема рис. 24.20, на которой активное сопротивление  $R$  и индуктивное сопротивление рассеяния  $X_s$  как бы отделены от катушки, которая после отделения может рассматриваться без активного сопротивления и без рассеяния при напряжении на ее зажимах  $U'$ .

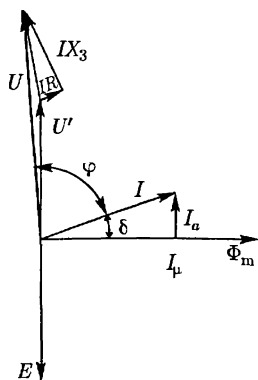


Рис. 24.21

Уравнениям (24.9) соответствует также векторная диаграмма рис. 24.21, которая отличается от диаграммы рис. 24.18 наличием векторов падения напряжения в активном и реактивном сопротивлениях катушки.

Таким образом, реальную катушку можно заменить цепью последовательного соединения идеализированной катушки (без активного сопротивления и без рассеяния), к которой приложено напряжение  $U'$  и двух линейных сопротивлений: активного  $R$  и индуктивного  $X_s$ .

## Схемы замещения катушки с ферромагнитным сердечником

При решении практических задач для идеализированной катушки можно составить схему замещения с постоянными (при данном напряжении на катушке) величинами сопротивлений: активного  $R_m$  и индуктивного  $X_m$ , соединенными последовательно (рис. 24.22, а).

При этом потери в ферромагнитном сердечнике  $P_m$  заменяют равными электрическими потерями в активном сопротивлении:

$$R_m = \frac{P_m}{I^2} = \frac{U'}{I} \cos \varphi, \quad (24.10)$$

а  $X_m$  определяют из уравнения

$$X_m = \frac{U'}{I} \sin \varphi. \quad (24.11)$$

Вместо последовательного соединения  $R_m$ ,  $X_m$  можно включить параллельно две ветви (рис. 24.22, б).

В первой ветви, содержащей активную проводимость  $G_m$ , ток равен активной составляющей тока катушки  $I_a$ :

$$G_m = P_m / (U')^2 = I_a / U' = R_m / (R_m^2 + X_m^2). \quad (24.12)$$

Вторая ветвь содержит реактивную проводимость  $B_m$  и намагничивающий ток  $I_m$ :

$$B_m = I_m / U' = X_m / (R_m^2 + X_m^2). \quad (24.13)$$

Нетрудно заметить, что обе схемы замещения полностью соответствуют уравнению (24.9) и векторной диаграмме рис. 24.21.

Величины сопротивления  $R_m$  и  $X_m$ , постоянные при одном действующем напряжении  $U$  на катушке, должны быть изменены, если это напряжение изменится.

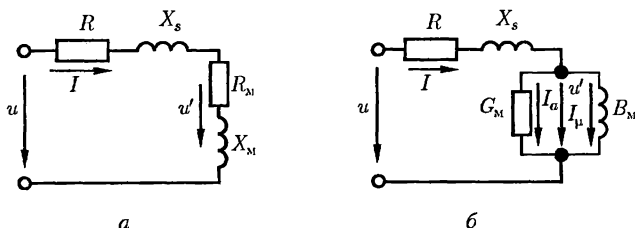


Рис. 24.22

## Задачи

**Задача 24.7.** Катушка, имеющая  $N = 300$  витков, включается в сеть переменного тока с напряжением  $U = 200$  В и частотой  $f = 50$  Гц. Катушку можно надеть на стальной сердечник или снять. При отсутствии стального сердечника активная мощность катушки  $P_1 = 500$  Вт, а ток  $I_1 = 12$  А. При наличии стального сердечника установлено, что активная мощность и ток уменьшаются до  $P_2 = 300$  Вт,  $I_2 = 5$  А.

Определить ЭДС  $E$ , амплитуду магнитного потока  $\Phi_m$ , коэффициент мощности  $\cos \varphi$ , мощность потерь в обмотке  $P_{\text{с}}$ , мощность потерь в сердечнике  $P_{\text{м}}$ , намагничивающую составляющую тока и построить векторную диаграмму в двух случаях: при отсутствии и наличии сердечника внутри катушки.

*Примечание.* Магнитным потоком рассеяния при наличии стального сердечника пренебречь.

**Решение.** При отсутствии стального сердечника коэффициент мощности

$$\cos \varphi_1 = \frac{P_1}{U_1 I_1} = \frac{500}{220 \cdot 12} = 0,19.$$

Активное сопротивление

$$R = \frac{U}{I_1} \cos \varphi_1 = \frac{220}{12} \cdot 0,19 = 3,48 \text{ Ом}.$$

Падение напряжения в активном сопротивлении

$$U_{a1} = I_1 R = 12 \cdot 3,48 = 41,8 \text{ В}.$$

Напряжение  $U'_1$ , уравновешивающее ЭДС в катушке  $E_1$ , определяется на основании векторной диаграммы из треугольника напряжений (рис. 24.23):

$$U'_1 = \sqrt{U_1^2 - U_{a1}^2} = \sqrt{220^2 - 41,8^2} = 216 \text{ В};$$

$$E_1 = U_1 = 216 \text{ В}.$$

Амплитуда магнитного потока

$$\Phi_m = \frac{E_1}{4,44 N f} = \frac{216}{4,44 \cdot 300 \cdot 50} = 3,25 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}.$$

При отсутствии стального сердечника мощность магнитных потерь  $P_{\text{м}} = 0$ , а мощность потерь в меди равна общей активной мощности катушки:  $P_{\text{с}} = P_1 = 500$  Вт.

Составляющая тока, обусловленная потерями в стали,  $I_a = 0$ , а намагничивающая составляющая тока совпадает с полным током катушки  $I_{\mu} = I_1 = 12$  А.

При наличии стального сердечника

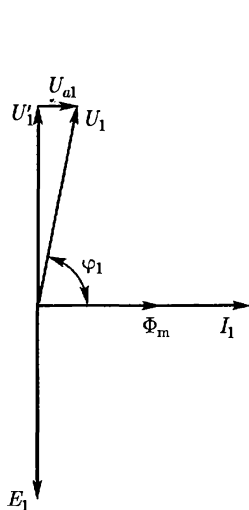


Рис. 24.23

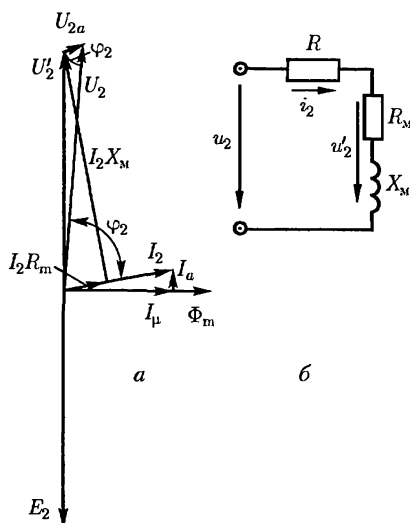


Рис. 24.24

$$\cos \varphi_2 = \frac{P_2}{U_2 I_2} = \frac{300}{220 \cdot 5} = 0,274.$$

Мощность потерь в меди  $P_{\text{с}2} = I_2^2 R = 5^2 \cdot 3,48 = 87$  Вт.

Мощность потерь в стали  $P_{\text{м}} = P_2 - P_{\text{с}2} = 3000 - 87 = 213$  Вт.

Падение напряжения в активном сопротивлении

$$U_{2a} = IR = 5 \cdot 3,48 = 17,4 \text{ В.}$$

ЭДС катушки и составляющая общего напряжения, уравновешивающая эту ЭДС из треугольника напряжений (см. векторную диаграмму рис. 24.24, а), по теореме косинусов

$$E_2 = U_2' = \sqrt{U_2^2 + U_{2a}^2 - 2U_2 U_{2a} \cos \varphi_2} = \sqrt{220^2 + 17,4^2 - 2 \cdot 220 \cdot 17,4 \cdot 0,274} = 218 \text{ В.}$$

Составляющая тока, обусловленная потерями в стали,

$$I_a = P_{\text{м}} / U_2 = 213 / 218 = 0,977 \text{ А.}$$

Намагничивающая составляющая тока

$$I_{\mu} = \sqrt{I^2 - I_a^2} = \sqrt{5^2 - 0,977^2} = 4,9 \text{ А.}$$

Амплитуда магнитного потока

$$\Phi_{\text{м}} = \frac{E_2}{4,44 N f} = \frac{218}{4,44 \cdot 300 \cdot 50} = 3,27 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$



Векторная диаграмма построена в следующем порядке.

В произвольном направлении отложен вектор напряжения на катушке  $U_2$  и под углом  $\varphi_2$  к нему — вектор тока с учетом, что ток отстает от напряжения. Параллельно вектору тока из конца вектора напряжения отложен отрезок, выражающий величину падения напряжения  $U_{2a}$  в активном сопротивлении обмотки. Разность векторов  $U_2 - U_{2a} = U'_2$  дает вектор напряжения, уравнивающего ЭДС катушки.

В сторону, противоположную направлению вектора  $U'_2$ , отложен равный ему вектор ЭДС  $E_2$ .

Перпендикулярно вектору  $E_2$  проведены опережающий его по фазе вектор магнитного потока  $\Phi_m$  и совпадающий по фазе с потоком вектор намагничивающего тока  $I_\mu$ .

Перпендикулярно вектору тока  $I_\mu$  из конца его отложен вектор тока  $I_a$ , конец которого совпадает с концом вектора общего тока  $I_2$ , так как  $I_2 = I_a + I_\mu$ .

Напряжение  $U'_2$ , ЭДС  $E_2$  можно определить с помощью схемы замещения катушки со стальным сердечником при последовательном соединении элементов (рис. 24.24, б).

На этой схеме напряжение  $U'_2$  приложено к участку последовательно соединенных активного сопротивления  $R_m$  и индуктивного сопротивления  $X_m$ .

Активное сопротивление должно быть взято такой величины, чтобы при заданном токе в катушке мощность в этом сопротивлении была равна мощности потерь в стальном сердечнике:

$$R_m = P_m / I_2^2 = 213 / 5^2 = 8,52 \text{ Ом.}$$

Индуктивное сопротивление  $X_m$  должно быть взято таким, чтобы векторная сумма падений напряжения в сопротивлениях  $X_m$  и  $R_m$  была равна напряжению  $U'_2$ .

Из схемы замещения следует:

$$[(R + R_m)^2 + X_m^2] I_2^2 = U_2^2;$$

$$[(3,48 + 8,52)^2 + X_m^2] 5^2 = 220^2.$$

Отсюда  $X_m = 42,3 \text{ Ом}$ , тогда

$$U'_2 = I_2 \sqrt{R_m^2 + X_m^2} = 5 \sqrt{8,52^2 + 42,3^2} = 218 \text{ В.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Почему магнитный поток катушки в цепи переменного тока остается примерно одинаковым при отсутствии и наличии стального сердечника?

2. Почему при наличии стального сердечника ток в катушке значительно меньше, чем при отсутствии его при том же напряжении в сети?

3. Почему уменьшилась мощность потерь в катушке после введения стального сердечника, несмотря на то, что к потерям в меди добавились потери в стали?

4. Определите параметры схемы замещения с параллельным соединением элементов  $G_m$  и  $B_m$ .

**Задача 24.8.** Предыдущую задачу решить с учетом магнитного рассеяния катушки со стальным сердечником, если известно, что индуктивное сопротивление рассеяния  $X_s = 3 \text{ Ом}$ .

**Указание.** Напряжение  $U'$  найти двумя способами: графически, т.е. построением векторной диаграммы, и аналитически, составив схему замещения с последовательным соединением элементов.

## 24.5. ПРИМЕНЕНИЕ КАТУШЕК С ФЕРРОМАГНИТНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

В практике широко применяются элементы с нелинейной зависимостью магнитного потока от тока  $\Phi(i)$ .

Рассмотренные ранее вопросы, относящиеся к катушкам с ферромагнитным сердечником, имеют общий характер независимо от назначения и условий их работы в электрических цепях.

Дополнительно рассмотрим некоторые явления, лежащие в основе практического применения катушек с ферромагнитным сердечником.

### Феррорезонанс

В цепи с линейными элементами при постоянной частоте источника питания резонанс достигается непосредственным изменением индуктивности или емкости (см. гл. 17).

Если индуктивность или емкость нелинейны, то резонанс может наступать при изменении тока в цепи или приложенного напряжения без какой-либо регулировки катушки и конденсатора.

Индуктивность или емкость такой нелинейной цепи изменяется в связи с изменением тока или напряжения, что ведет к изменению ее собственной частоты, которая может принять величину, равную частоте вынужденных колебаний источника.

В цепях, содержащих катушку со стальным сердечником и конденсатор, резонансные явления, связанные с нелинейным характером индуктивности, называют **феррорезонансом**.

Рассмотрим это явление, пренебрегая потерями в ферромагнитном сердечнике и считая ток синусоидальным.

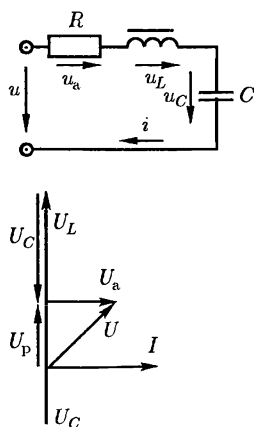


Рис. 24.25

При последовательном соединении конденсатора и катушки с сердечником (рис. 24.25) ток в цепи отстает от индуктивного напряжения на  $90^\circ$  и опережает емкостное напряжение тоже на  $90^\circ$ . Таким образом, векторы напряжения  $\dot{U}_L$  и  $\dot{U}_C$  находятся в противофазе.

Напряжение источника питания уравнивается суммой активного и реактивных падений напряжения:

$$\dot{U} = \dot{U}_a + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{U}_a + \dot{U}_p. \quad (24.14)$$

В этой сумме общее реактивное напряжение  $\dot{U}_p$  цепи по абсолютной величине равно разности реактивных напряжений катушки и конденсатора:  $\dot{U}_p = \dot{U}_L - \dot{U}_C$ .

Выразим графически зависимость между напряжением цепи  $U$  и током  $I$ , пользуясь уравнением (24.14).

В 24.2 было отмечено, что вольт-амперная характеристика катушки по форме повторяет кривую намагничивания (рис. 24.26). Вольт-амперная характеристика конденсатора — это прямая, проходящая через начало координат:

$$U_C = I \frac{1}{\omega C}.$$

Величину емкости можно подобрать так, что прямая  $U_C(I)$  пересечет кривую  $U_L(I)$ .

Точка пересечения  $A$  является точкой резонанса, который при последовательном соединении катушки и конденсатора называется феррорезонансом напряжений. В этой точке величины  $U_L$  и  $U_C$  одинаковы, а их разность  $U_p$  равна нулю.

На рис. 24.26 построена также вольт-амперная характеристика цепи с учетом активного напряжения  $U_a = IR$ .

Общее напряжение определяется выражением

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}.$$

Из графика  $U(I)$  видно, что с увеличением тока напряжение сначала растет (участок 0–2), затем падает, достигая минимума в точке резонанса 3, а далее снова растет (участок 3–4).

Практически такую кривую можно получить опытным путем, если имеется возможность непрерывного увеличения тока при постоянном напряжении источника, т.е. когда в цепи кроме катушки и конденсатора последовательно включен резистор с большим регулируемым сопротивлением.

При непрерывном увеличении напряжения источника в цепи (см. рис. 24.25) ток плавно растет до  $I_2$  (рис. 24.27), а затем скачком увеличивается до  $I_4$  и далее плавно растет.

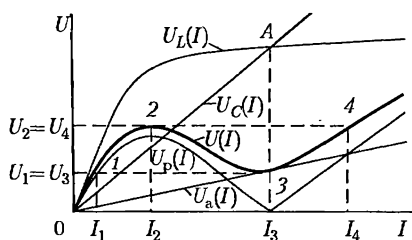


Рис. 24.26

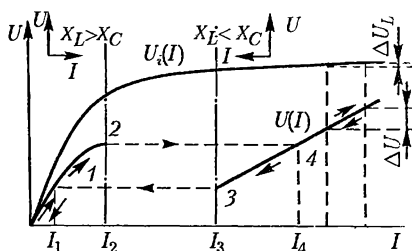


Рис. 24.27

При уменьшении напряжения ток плавно уменьшается до  $I_3$ , а затем скачком до  $I_1$  и снова падает плавно.

Скачкообразное изменение тока сопровождается изменением на  $180^\circ$  фазы тока по отношению к напряжению (опрокидывание фазы).

После точки резонанса, т.е. при напряжениях источника, больших напряжения опрокидывания фазы, напряжение на катушке изменяется мало, что связано с переходом по характеристике намагничивания в область магнитного насыщения. Это используется в практике для стабилизации напряжения.

Пусть входное напряжение  $U$  изменилось на  $\Delta U$  (см. рис. 24.27). При этом напряжение на катушке изменилось лишь незначительно (на  $\Delta U_L$ ). Таким образом, на нагрузке, подключенной параллельно катушке, напряжение остается практически постоянным.

Стабилизаторы напряжения, работающие по такому принципу, называются **феррорезонансными**.

При параллельном соединении конденсатора и катушки со стальным сердечником в цепи может возникнуть феррорезонанс токов.

### Катушка с ферромагнитным сердечником при одновременном намагничивании постоянным и переменным током

Возможности практического использования нелинейной зависимости  $\Phi(i)$  между магнитным потоком и намагничивающим током катушки с ферромагнитным сердечником значительно расширяются, если сердечник намагничивается одновременно переменным и постоянным током. Такое намагничивание можно осуществить, если на сердечнике кроме основной обмотки  $N_1$ , включенной в цепь переменного тока, имеется дополнительная обмотка  $N_0$  с постоянным током  $I_0$  (рис. 24.28, а).

Предположим, что к обмотке  $N_1$  приложено синусоидальное напряжение. В этом случае при малом активном сопротивлении об-

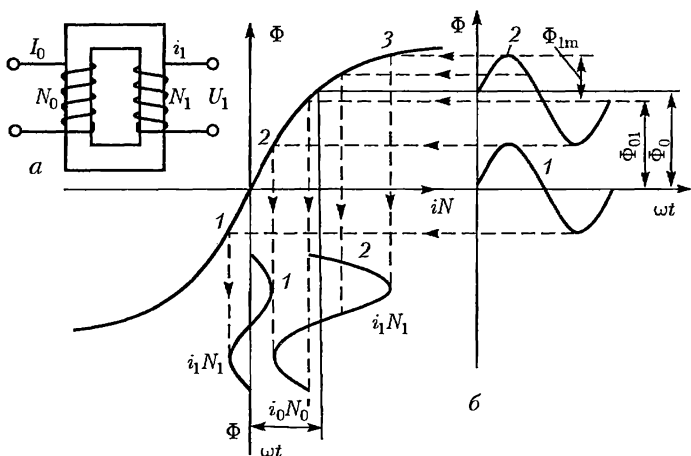


Рис. 24.28

мотки переменная составляющая магнитного потока может быть только синусоидальной (см. 24.2).

Кроме синусоидальной составляющей магнитного потока, обусловленной намагничивающей силой  $i_1 N_1$  основной обмотки, намагничивающей силой  $I_0 N_0$  обмотки постоянного подмагничивания в сердечнике создается постоянный поток  $\Phi_{01}$ .

Таким образом, магнитный поток в сердечнике выражается суммой

$$\Phi = \Phi_{01} + \Phi_{1m} \sin \omega t.$$

Построение на рис. 24.28, б показывает, что при наличии подмагничивания сердечника постоянным током переменный ток в обмотке значительно больше, чем при отсутствии подмагничивания (ср. кривые 2 и 1). Изменяя постоянный ток в обмотке подмагничивания  $N_0$  (управляющая цепь), можно изменять ток в основной обмотке  $N_1$  (управляемая цепь).

Нужно отметить, что постоянная составляющая магнитного потока  $\Phi_{01}$  оказывается меньше того потока  $\Phi_0$ , который создается в сердечнике намагничивающей силой  $I_0 N_0$  при отсутствии переменного тока в обмотке. Обмотка переменного тока оказывает некоторое размагничивающее действие.

Общая намагничивающая сила в сердечнике определяется суммой:

$$F = I_0 N_0 + i_1 N_1.$$

При отсутствии постоянной составляющей намагничивающей силы  $I_0 N_0$  и синусоидальном напряжении на зажимах обмотки  $N_1$

график тока в ней по форме близок к синусоиде, так как изменение тока  $i_1$  находится в пределах прямолинейной части кривой намагничивания, т. е. не захватывает области магнитного насыщения.

При подмагничивании постоянным током переменный ток в обмотке  $N_1$  при том же напряжении на ее зажимах увеличивается и по форме отличается от синусоиды тем больше, чем больше намагничивающая сила  $I_0 N_0$ . Изменение тока в управляемой цепи (обмотка  $N_1$ ) в зависимости от постоянного тока в управляющей цепи (обмотка  $N_0$ ) объясняется тем, что рабочий участок по кривой намагничивания перемещается в область магнитного насыщения (на рис. 24.28, б этот участок находится между точками 2 и 3).

## Дроссели насыщения

Катушка с ферромагнитным сердечником, предназначенным для работы в цепи переменного тока при дополнительном подмагничивании постоянным током, называется дросселем насыщения.

Использование таких дросселей для управления и регулирования в электрических цепях переменного тока основано на изменении индуктивного сопротивления катушки подмагничиванием постоянным током.

Схема дросселя насыщения, изображенная на рис. 24.28, а, имеет большой недостаток. Переменный магнитный поток наводит в управляющей обмотке  $N_0$  переменную ЭДС, что является причиной переменного тока, искажающего рассмотренную картину процесса.

Для устранения этого недостатка дроссель насыщения выполняют на двух одинаковых сердечниках (рис. 24.29).

Обмотки управления  $N_0$  соединяют между собой последовательно встречно, обмотки переменного тока  $N_1$  — последовательно согласно. При таком соединении одинаковых обмоток переменные ЭДС, наводимые в управляющих обмотках, направлены противо-

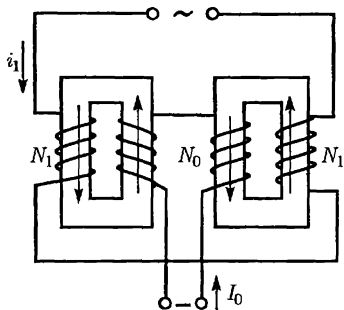


Рис. 24.29

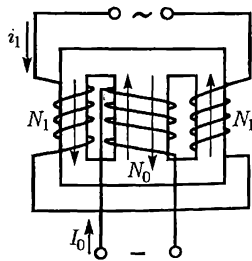


Рис. 24.30

положно, а результирующая ЭДС в управляющей цепи равна нулю.

Аналогичный результат достигается в дросселе с трехстержневым сердечником (рис. 24.30). Управляющая обмотка  $N_0$  расположена на среднем стержне, а обмотка переменного тока  $N_1$  разделена на две одинаковые части, которые расположены на крайних стержнях и соединены последовательно согласно. При таком включении переменные составляющие магнитного потока в среднем стержне направлены противоположно, поэтому результирующий переменный поток в нем равен нулю и переменная ЭДС в управляющей обмотке не наводится.

В дросселях насыщения нет движущихся частей, они позволяют плавно регулировать ток или напряжение в электрической цепи переменного тока, мощность которой значительно больше мощности цепи управления.

### Принцип работы магнитного усилителя

Дроссели насыщения применяются в различных схемах магнитных усилителей мощности, тока или напряжения.

На рис. 24.31 изображена простейшая схема магнитного усилителя с трехстержневым дросселем насыщения. В цепи переменного тока усилителя последовательно включены рабочая обмотка  $N_1$  и нагрузка с сопротивлением  $R_n$ .

Основной характеристикой магнитного усилителя является коэффициент усиления  $K_y$  — отношение приращения выходной мощности к вызвавшему его приращению входной мощности:

$$K_y = \frac{\Delta P_n}{\Delta P_0} = \frac{I_1^2 R_n}{I_0^2 R_0}.$$

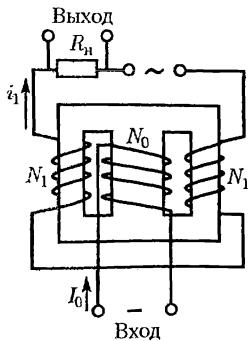


Рис. 24.31

При отсутствии постоянного тока в управляющей цепи ферромагнитный сердечник магнито не насыщен, поэтому индуктивное сопротивление рабочей обмотки  $N_1$  велико, а ток  $i_1$  относительно мал. При подаче сигнала на управляющую обмотку сердечник насыщается, магнитная проницаемость материала сердечника уменьшается, в результате чего индуктивное сопротивление обмотки  $N_1$  уменьшается, а ток в рабочей цепи увеличивается. Благодаря этому увеличиваются мощность и напряжение на нагрузке.

Дроссели насыщения, предназначенные для магнитных усилителей, выполняются на сердечниках из ферромагнитных сплавов, которые характеризуются большой магнитной проницаемостью в слабом магнитном поле и насыщаются при небольшом увеличении напряженности магнитного поля (см., например, кривую намагничивания на рис. 24.17, б).

Благодаря большой величине магнитной проницаемости при отсутствии постоянного подмагничивания (при холостом ходе) усилитель имеет малый ток холостого хода в рабочей обмотке и малые потери энергии. Переход сердечника в состояние магнитного насыщения при подаче слабого сигнала позволяет получить большой коэффициент усиления ( $K_y = 10^3 \dots 10^6$ ).

### Задачи

**Задача 24.9.** Построить график тока в катушке задачи 24.4, если на сердечник кроме основной обмотки намотана обмотка подмагничивания  $N_0 = 200$  витков с постоянным током  $I_0 = 5$  А.

**Задача 24.10.** В катушке со стальным сердечником при постоянном напряжении 40 В ток  $I = 10$  А, а при переменном напряжении 220 В и частоте  $f = 50$  Гц ток  $I = 2$  А,  $\cos \varphi = 0,12$ .

Определить мощность потерь в обмотке и сердечнике.



## ГЛАВА 25

# ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В предыдущих главах электрические цепи постоянного и переменного токов и их расчет рассмотрены в установившемся режиме, т.е. при установившихся напряжениях и токах.

В установившемся режиме напряжения и токи во всех участках электрической цепи остаются неизменными в течение сколь угодно большого промежутка времени. В понятие неизменных напряжений и токов в данном случае включаются не только постоянные, но и синусоидальные напряжения и токи с постоянными амплитудой и частотой.

По условиям эксплуатации и характеру работы электроустановок или по другим (в том числе случайным) причинам изменяются режимы в электрических цепях.

Для перехода от одного установившегося режима к другому требуется некоторый переходный период, в течение которого изменяются величины токов и напряжений в электрической цепи. С большей или меньшей скоростью эти величины приходят в соответствие с условиями нового режима.

В последующих параграфах для переходных периодов в некоторых простых цепях найдены зависимости тока и напряжения от времени, позволяющие определить их величины в любой момент.

### 25.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ

Для изучения переходных процессов в простой или сложной цепи необходимо рассмотреть общие сведения о них. В числе таких сведений отметим причины возникновения переходных процессов, основные определения и два закона коммутации, на которых основаны исследования переходных процессов.

#### Причины возникновения переходных процессов

Переходные процессы возникают вследствие изменения ЭДС в цепи, напряжения, приложенного к цепи, или в связи с изменением ее параметров — сопротивления, индуктивности или емкости.

Непосредственными причинами возникновения переходных процессов могут быть: коммутационные изменения режимов, т. е. включение и выключение источников питания, приемников энергии; короткие замыкания на участках электрических цепей; изменения механической нагрузки электродвигателей и др.

**Электромагнитные процессы, происходящие в электрических цепях при переходе от одного установившегося режима к другому, называют переходными процессами.**

**Электрические токи, напряжения в цепи во время переходного процесса называют переходными токами или напряжениями.**

Продолжительность переходных процессов в электрических цепях (переходный период) чаще всего составляет десятые и сотые доли секунды. Однако знание характера их очень важно, так как и за малое время возможны резкие увеличения токов и напряжений, которые могут оказаться опасными для электрических установок.

В устройствах связи, автоматики, счетно-решающей техники, радиотехники с помощью переходных процессов формируются импульсы — сигналы, несущие определенную информацию.

Излучение переходных процессов в этих устройствах необходимо для оценки тех изменений, которые они могут внести в электрические сигналы.

Соотношение длительностей установившихся и переходных режимов может быть самым различным и зависит от условий эксплуатации и назначения электрических цепей. Одни из них по продолжительности практически все время работают в установившемся режиме (двигатели с длительной неменяющейся нагрузкой, лампы электрического освещения), другие, наоборот, непрерывно находятся в переходном режиме (двигатели с повторно-кратковременной нагрузкой, линии связи во время передачи информации, импульсные устройства автоматики, счетно-решающие машины в период работы).

## **Первый закон коммутации**

Первый закон коммутации применяется к цепям, обладающим индуктивностью.

**Ток в индуктивности не может измениться скачком. Поэтому мгновенный ток в ветви с индуктивностью в первый момент переходного периода остается таким, каким он был в последний момент предшествующего установившегося режима.**

Справедливость первого закона коммутации следует из простых рассуждений, которые изложим применительно к случаю включения катушки индуктивности на постоянное напряжение  $U$  (рис. 25.1).

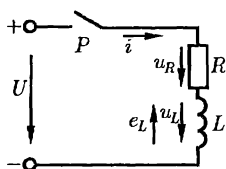


Рис. 25.1

До замыкания рубильника  $P$  установившийся режим характеризуется тем, что ток в цепи, напряжения активное  $u_R$  и индуктивное  $u_L$  равны нулю.

С момента замыкания рубильника возникает переходный процесс, в течение которого ток в катушке увеличивается до некоторой величины  $i = I$ , изменяются и напряжения  $u_R$  и  $u_L$ .

Электрическое состояние цепи по схеме рис. 25.1 в любой момент переходного периода характеризуется уравнением

$$U = u_R + u_L = iR + L \frac{di}{dt}. \quad (25.1)$$

Это уравнение выражает баланс напряжений в цепи: часть приложенного к цепи напряжения компенсирует падение напряжения в сопротивлении ( $iR$ ), а другая часть  $\left( L \frac{di}{dt} \right)$  уравнивает возникающую при изменении тока ЭДС самоиндукции.

В установившемся режиме при замкнутом рубильнике  $P$  ток в цепи постоянный, т.е. скорость изменения тока равна нулю:  $\frac{di}{dt} = 0$ , поэтому и индуктивное напряжение  $u_L$  равно нулю. Напряжение источника полностью приложено к сопротивлению  $R$ , и ток в цепи определяется согласно закону Ома:

$$i_y = I = U/R. \quad (25.2)$$

Предположим, что переходный период отсутствует и ток в катушке мгновенно ( $dt = 0$ ) увеличился от 0 до конечной величины  $I$ . Тогда скорость изменения тока должна быть равна бесконечности  $\left( \frac{di}{dt} = \infty \right)$ . Но это противоречит уравнению (25.1), в котором напряжение источника  $U$  — конечная величина. Изменение тока скачком означало бы также, что энергия магнитного поля катушки увеличилась скачком от 0 до  $W_m = LI^2/2$ . Для мгновенного изменения запаса энергии в магнитном поле цепи требуется источник бесконечно большой мощности  $P = \frac{dW_m}{dt} = \infty$ , это лишено физического смысла.

Из первого закона коммутации следует, что в начальный момент после замыкания рубильника (при  $t = 0$ ) ток в цепи равен нулю ( $i_0 = 0$ ), падение напряжения в сопротивлении  $i_0 R = 0$ , а индуктивное напряжение — напряжению источника  $u_{0L} = U$  и цепь как бы разомкнута индуктивностью.

## Второй закон коммутации

Второй закон коммутации применяется к цепям, обладающим емкостью.

**Напряжение на емкости не может измениться скачком. Поэтому напряжение на емкости в первый момент переходного периода остается таким, каким оно было в последний момент предшествующего установившегося режима.**

Рассуждения, подтверждающие второй закон коммутации, приведем применительно к случаю зарядки конденсатора через резистор (включение цепи с  $R$  и  $C$  на постоянное напряжение, рис. 25.2). До замыкания рубильника  $P$  установившийся режим характеризуется тем, что ток в цепи, напряжения на резисторе и конденсаторе равны нулю.

С момента замыкания рубильника возникает переходный процесс, в течение которого напряжение на конденсаторе увеличивается до напряжения источника  $U$  (конденсатор заряжается), изменяются ток в цепи и напряжение на резисторе.

Электрическое состояние цепи (рис. 25.2) в любой момент переходного периода характеризуется уравнением, составленным по второму закону Кирхгофа:

$$U = u_C + u_R = u_C + iR.$$

Ток в цепи пропорционален скорости изменения напряжения на конденсаторе:

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (25.3)$$

Учитывая это, получаем

$$U = u_C + RC \frac{du_C}{dt}. \quad (25.4)$$

Приложенное к цепи напряжение (напряжение источника) делится на две части: одна из них  $\left( RC \frac{du_C}{dt} \right)$  ком-

пенсировует падение напряжения в резисторе, а другая ( $u_C$ ) равна напряжению в конденсаторе.

В установившемся режиме при замкнутом рубильнике  $P$  напряжение на конденсаторе не изменяется, т.е. скорость изменения напряжения на конденсаторе равна нулю  $\left( \frac{du_C}{dt} \right)$ , поэто-

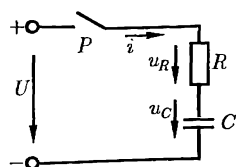


Рис. 25.2

му и ток в цепи равен нулю ( $i_y = 0$ ). Напряжение на резисторе равно нулю, и, следовательно, напряжение источника полностью приложено к конденсатору:  $u_{Cy} = U$  (т.е. цепь разомкнута конденсатором).

Доказательства существования переходного периода при зарядке конденсатора аналогичны тем, которые были ранее приведены для цепи с катушкой индуктивности.

Предположим, что в момент замыкания рубильника  $P$  напряжение на конденсаторе изменилось скачком от 0 до  $U$ . Такое предположение означает конечное изменение напряжения за время, равное нулю, т.е.  $\frac{du_C}{dt} = \infty$ , что противоречит уравнению (25.4), в котором напряжение источника — конечная величина. Кроме того, при изменении напряжения на конденсаторе скачком энергия электрического поля должна увеличиться мгновенно от 0 до  $W_э = \frac{CU^2}{2}$ . Для такого скачкообразного изменения энергии требуется источник бесконечно большой мощности, чего в действительности быть не может.

Из второго закона коммутации следует, что в начальный момент переходного периода (при  $t = 0$ ) напряжение на конденсаторе равно нулю ( $u_{C0} = 0$ ) (конденсатор как бы замкнут накоротко). Напряжение на резисторе равно напряжению источника  $i_0 R = U$ , а ток в цепи  $i_0 = U/R$ .

## Задачи

**Задача 25.1.** В цепи рис. 25.1 напряжение источника  $U = 100$  В. Определить напряжения  $U_R$  и  $U_L$ : а) в первый момент после включения рубильника  $P$ ; б) в установившихся режимах при включенном и выключенном положениях рубильника  $P$ .

**Задача 25.2.** В цепи рис. 25.1 напряжение источника  $U = 60$  В, параметры цепи:  $R = 3$  Ом,  $L = 12,7$  мГн.

Определить ток в цепи: а) в первый момент после включения рубильника  $P$ ; б) в установившихся режимах после включения и выключения рубильника  $P$ .

**Задача 25.3.** В цепи рис. 25.2 напряжение источника  $V = 60$  В. Определить напряжения  $U_R$  и  $U_C$ : а) в первый момент после включения рубильника  $P$ ; б) в установившихся режимах после включения и выключения рубильника  $P$ .

**Задача 25.4.** В цепи рис. 25.2 напряжение  $U = 90$  В, параметры цепи:  $R = 6$  Ом,  $C = 398$  мкФ. Определить ток в цепи: а) в первый момент после включения рубильника  $P$ ; б) в установившихся режимах после включения и выключения рубильника  $P$ .

## 25.2. ВКЛЮЧЕНИЕ КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ НА ПОСТОЯННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

После включения катушки к источнику постоянного напряжения ток в цепи рис. 25.1 увеличивается, но не мгновенно. Перейдем к более подробному анализу переходного процесса.

### График переходного тока

Закон изменения тока в катушке после замыкания рубильника в схеме рис. 25.1 можно выяснить, используя уравнение (25.1) в преобразованном виде:

$$\frac{di}{dt} = \frac{U - iR}{L}. \quad (25.5)$$

В первый момент переходного периода ток в цепи с  $R$  и  $L$  равен нулю ( $i_0 = 0$ ).

Поэтому независимо от величины сопротивления  $R$  скорость изменения тока в начальный момент переходного периода выражается отношением напряжения к индуктивности:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{U}{L}. \quad (25.6)$$

Из этого выражения следует, что сразу после включения цепи ток начинает увеличиваться по линейному закону с наибольшей в данных условиях скоростью.

Но так происходит лишь в начальный момент переходного периода. Как только в цепи появился ток, хоть и малого значения, одновременно возникло падение напряжения  $iR$  [см. уравнение (25.1)], а индуктивное напряжение соответственно уменьшилось. Уменьшение индуктивного напряжения немедленно вызовет снижение скорости изменения тока.

Таким образом, рассматриваемый переходный процесс в катушке (при постоянных величинах  $U$ ,  $R$ ,  $L$ ) отличается тем, что с увеличением тока уменьшается скорость его изменения. По этой причине график тока (кривая  $i$  на рис. 25.3) с течением времени все

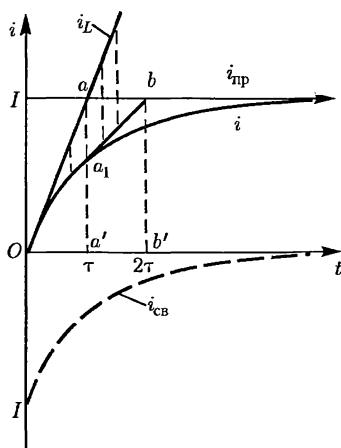


Рис. 25.3

более отклоняется от прямой  $i_L$ , которая соответствует начальной скорости переходного процесса. Прямая  $i_L$ , как нетрудно заметить, является касательной к кривой переходного тока  $i$  реальной цепи, а наклон ее к оси абсцисс характеризует наибольшую скорость изменения тока, возможную при заданных условиях.

Теоретически переходный процесс продолжается бесконечно долго, а ток в цепи асимптотически стремится к установившемуся  $I = U/R$ .

## Постоянная времени электрической цепи

Если предположить, что при наличии в цепи сопротивления  $R$  ток изменялся бы по линейному закону с наибольшей скоростью (прямая  $i_L$ ), то установившегося значения  $I$  он достиг бы за наименьшее время  $t = \tau$ . Этот промежуток времени является важной характеристикой и называется постоянной времени электрической цепи.

Постоянную времени можно определить графически (рис. 25.3). Для этого нужно провести касательную  $Oa$  к кривой тока в начале координат; точку  $a$  пересечения касательной с асимптотой спроецировать на ось времени. Отрезок  $Oa'$  в масштабе времени выражает постоянную времени  $\tau$ .

Такую же длину имеет отрезок  $a'b'$ , который можно получить, если провести касательную к кривой тока в любой точке  $a_1$ , найти точку  $b$  пересечения касательной с асимптотой и спроецировать точки  $a_1$  и  $b$  на ось времени.

Из рис. 25.3 можно получить аналитическое выражение для определения постоянной времени. Прямая  $Oa$  представляет собой график изменения тока ( $i_L$ ) в идеальной катушке без сопротивления.

Это следует из уравнения (25.5):  
при  $R = 0$

$$\frac{di}{dt} = \frac{U}{L}; \quad di = \frac{U}{L} dt.$$

Отсюда

$$i = \frac{U}{L} t.$$

По графику  $i_L(t)$  при  $t = \tau$   $i = I$ .

Так как  $U = IR$ , то постоянная времени

$$\tau = L/R. \quad (25.7)$$

Постоянная времени, как видно из последней формулы, определяется только параметрами  $R$ ,  $L$  данной цепи.

## Уравнение кривой переходного тока

Уравнение кривой переходного тока в катушке после замыкания рубильника в схеме рис. 25.1 можно получить, используя уравнение (25.1) в таком виде:

$$\frac{di}{\frac{U}{R} - i} = \frac{R}{L} dt.$$

Проинтегрируем обе части этого дифференциального уравнения:

$$\int \frac{di}{i - \frac{U}{R}} = - \int \frac{R}{L} dt.$$

В результате интегрирования получим

$$\ln \left( i - \frac{U}{R} \right) - \ln K_2 = - \frac{R}{L} t,$$

или

$$\ln \frac{i - \frac{U}{R}}{K_2} = - \frac{R}{L} t$$

(постоянная интегрирования взята в форме  $\ln K_2$  для упрощения окончательного выражения переходного тока). Потенцируя, находим

$$i - \frac{U}{R} = K_2 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Постоянная интегрирования  $K_2$  определяется из начальных условий: согласно первому закону коммутации, в начальный момент переходного периода ток в цепи равен нулю, так как он был равен нулю в последний момент до включения рубильника.

Подставив в последнее равенство  $t = 0$  и  $i = 0$ , найдем

$$K_2 = - \frac{U}{R}.$$



Определив  $K_2$  из начальных условий, получим окончательно уравнение для переходного тока

$$i = \frac{U}{L} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = I \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (25.8)$$

В этом уравнении  $\tau = L/R$  — уже известная постоянная времени цепи.

Уравнению (25.8) соответствует график переходного тока (кривая  $i$  на рис. 25.3).

Как было отмечено, переходный процесс продолжается бесконечно долго. Это подтверждается уравнением (25.8), согласно которому ток устанавливается при  $t = \infty$ . В практике переходный период считается законченным по истечении времени, равного  $(4 \dots 5)\tau$ , когда ток отличается от установившегося примерно на 1%.

## Принужденная и свободная составляющие переходного тока

Из уравнения (25.8) видно, что переходный ток можно рассматривать как алгебраическую сумму двух составляющих:

$$i = I - Ie^{-\frac{t}{\tau}} = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

*Первая составляющая* представляет собой ток, установившийся в цепи по окончании переходного процесса (прямая  $i_{\text{пр}}$  на рис. 25.3):

$$i_{\text{пр}} = I = U/R. \quad (25.9)$$

Этот ток определяется непрерывным действием постоянного напряжения  $U$  в переходном и установившемся режимах. Его принято называть **принужденным током**.

*Вторая составляющая* возникает в начале переходного процесса и постепенно затухает до нуля, после чего переходный процесс считается законченным (кривая  $i_{\text{св}}$  на рис. 25.3). Эта составляющая переходного тока называется **с в о б о д н ы м т о к о м**. Он изменяется по закону

$$i_{\text{св}} = -Ie^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (25.10)$$

Из уравнения (25.10) следует:

**постоянная времени электрической цепи равна интервалу времени, в течение которого свободный ток в этой цепи убывает в  $e$  раз.**

График переходного тока (см. рис. 25.3) можно получить, сложив графики принужденного и свободного токов. Однако нужно помнить, что физически реальным в течение переходного процесса является общий ток, постепенно нарастающий от начального ( $i = 0$ ) до установившегося ( $i = I$ ).

Одновременно с увеличением тока происходит процесс постепенного изменения (в данном случае накопления) энергии

$$W_m = \frac{Li^2}{2} \text{ в магнитном поле.}$$

## Влияние напряжения и параметров цепи на переходный процесс

Переходный процесс при включении цепи с  $R$  и  $L$  на постоянное напряжение  $U$  характеризуют три показателя: установившийся ток, начальная скорость изменения тока и постоянная времени цепи [см. формулы (25.2), (25.6), (25.7)].

Используя эти выражения, можно проследить влияние напряжения источника и параметров цепи на переходный процесс (имеются в виду изменения напряжения или параметров цепи до начала переходного процесса).

Установившийся ток и начальная скорость изменения тока зависят от напряжения, а постоянная времени цепи, характеризующая продолжительность переходного процесса, не зависит.

Эти заключения отражены на рис. 25.4: графики установившегося тока проведены на разном уровне, а касательные к кривой тока наклонены к оси времени под разными углами. При этом постоянная времени не изменилась ( $\tau_2 = \tau_1$ ).

Продолжительность переходного процесса в обоих случаях одинакова, несмотря на то, что скорость изменения тока разная. Это обстоятельство не должно вызывать сомнения: при изменении напряжения ток увеличивается с другой скоростью, но и стремится к другому установившемуся значению.

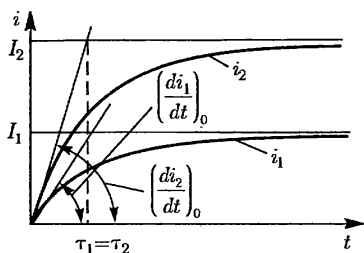


Рис. 25.4

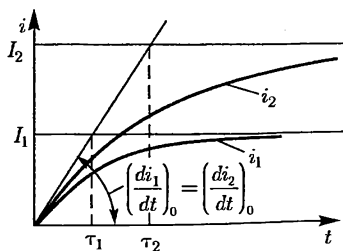


Рис. 25.5

При изменении сопротивления  $R$  в цепи изменяются установившийся ток и постоянная времени. Начальная скорость изменения тока от сопротивления  $R$  не зависит.

В соответствии с этими выводами на рис. 25.5 проведены две асимптоты ( $I_1$  и  $I_2$ ) и одна общая касательная к графикам переходного тока в начале координат:

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_0 = \left(\frac{di_2}{dt}\right)_0.$$

Касательная пересекает асимптоты в точках с разными координатами не только по оси токов, но и по оси времени, что подтверждает предыдущий вывод о зависимости постоянной времени от сопротивления  $R$ .

Из этого нетрудно сделать заключение о том, как влияет сопротивление на продолжительность переходного процесса.

Изменение индуктивности не сказывается на величине установившегося тока, но начальная скорость изменения тока и постоянная времени изменяются. Поэтому на рис. 25.6 проведены одна (общая) асимптота и две касательные в начале координат к графикам переходного тока. Касательные пересекают асимптоту в двух точках и отмечают величины постоянных времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , соответствующих двум величинам индуктивности цепи.

В данном случае переходные токи стремятся к одинаковому установившемуся значению с разной скоростью, поэтому продолжительность переходного процесса неодинакова.

## Задачи

**Задача 25.5.** В цепи рис. 25.1 напряжение источника  $U = 120$  В, параметры цепи:  $R = 6$  Ом,  $L = 24$  мГн.

Определить ток и скорость изменения тока в начальный момент переходного периода; постоянную времени цепи; ток и энергию магнитного поля в установившемся режиме при замкнутом рубильнике  $P$ .

**Задача 25.6.** Как изменятся величины, определяемые по условию

задачи 25.5, если: а) индуктивность цепи уменьшить в два раза; б) напряжение  $V$  увеличить в два раза; в) сопротивление цепи увеличить в два раза.

**Задача 25.7.** По данным условия задачи 25.5 определить мгновенные значения переходного тока в моменты времени  $t_1 = 4 \cdot 10^{-3}$  с,  $t_2 = 8 \cdot 10^{-3}$  с после замыкания рубильника  $P$ .

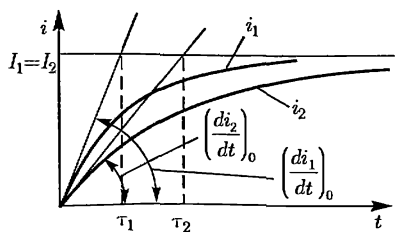


Рис. 25.6

## 25.3. ОТКЛЮЧЕНИЕ КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ ОТ ИСТОЧНИКА ПОСТОЯННОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Отключение приемников электрической энергии от источника или от сети осуществляется в большинстве случаев разрывом цепи в одной или нескольких точках. Встречаются случаи, когда элементы цепи, обладающие большой индуктивностью, при разрыве цепи одновременно замыкаются накоротко или на разрядное сопротивление.

### Размыкание электрической цепи с катушкой индуктивности

При замыкании электрической цепи с катушкой индуктивности (рис. 25.7, а) в момент разрыва цепи напряжение между расходящимися контактами выключателя  $B$  резко увеличивается от нуля до  $U + u_L$ . Скорость изменения тока в момент разрыва цепи  $\frac{di}{dt} \rightarrow \infty$ ,

поэтому значение  $u_L = \frac{L di}{dt}$  может быть весьма большим. Воздуш-

ный промежуток между контактами пробивается и образуется искра. Таким образом, ток в цепи сохраняется некоторое время после начала расхождения контактов. При большой мощности источника искровой разряд может перейти в дуговой. Для гашения электрической дуги отключающие аппараты, как правило, снабжаются дугогасительными приспособлениями, конструкция которых зависит от мощности цепи и рабочего напряжения установки.

В некоторых случаях (например, при выключении обмоток возбуждения электрических машин) напряжение может достигать значений, опасных для изоляции. Значительного повышения напряжения можно избежать, если одновременно с отключением индуктивной катушки от источника замкнуть ее на разрядное сопротивление (рис. 25.7, б)\*.

### Изменение тока в катушке, замкнутой на разрядное сопротивление

Переходный процесс в замкнутом контуре катушка — разрядное сопротивление отличается от процесса в цепи рис. 25.7, а тем, что

---

\* По подобной схеме работают, например, автоматы гашения поля (АГП) генераторов на электростанциях. При внутренних повреждениях в генераторе необходимо как можно скорее отключить его от сети и «погасить» магнитное поле. Для этого и служит АГП, с помощью которого обмотка возбуждения замыкается на разрядное сопротивление и отключается от возбуждателя.

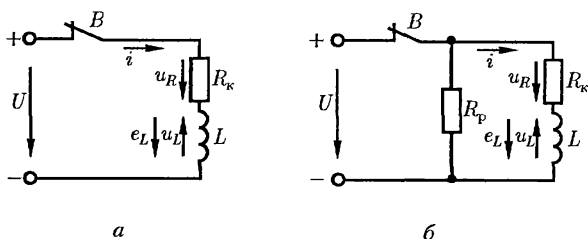


Рис. 25.7

скорость изменения тока  $\frac{di}{dt}$  зависит от параметров цепи

$R = R_k + R_p$  и  $L$ . Соответствующим подбором разрядного сопротивления величина ее может быть ограничена.

При включении катушки на постоянное напряжение по схемам рис. 25.1 или 25.7, б катушка является приемником энергии. Ток  $i$  и ЭДС самоиндукции  $e_L$  имеют противоположные направления, что соответствует накоплению энергии в магнитном поле катушки за счет энергии источника.

После отключения цепи от источника энергии (рис. 25.7, б) в образовавшемся короткозамкнутом контуре ток не может уменьшиться мгновенно до нуля, а поддерживается в течение переходного периода, пока имеется энергия в магнитном поле катушки.

Запас энергии в магнитном поле непрерывно уменьшается, так как в активном сопротивлении цепи  $R$  совершается необратимый процесс превращения электрической энергии в тепловую.

Таким образом, во время переходного процесса катушка является источником электрической энергии с электродвижущей силой самоиндукции  $e_L$ , которая возникает и поддерживается в связи с уменьшением тока. Это подтверждается и изменением направления ЭДС самоиндукции, которое теперь совпадает с направлением тока.

Закон изменения тока при выключении катушки (как и при ее включении) определяется параметрами  $R$  и  $L$ . Еще до подробного анализа уравнения тока, который приведен далее, можно отметить обстоятельства, позволяющие судить о характере уменьшения тока в катушке.

В начальный момент переходного периода значение тока  $i = I = U/R_k$  в катушке сохраняется в соответствии с первым законом коммутации. В дальнейшем после отключения источника энергии принужденная составляющая переходного тока отсутствует, поэтому переходный ток является свободным током. Возникновение свободного тока связано с изменением запаса энергии в магнитном поле, подобно тому как при увеличении тока в катушке изменением энергии в магнитном поле определяется свободная состав-

ляющая тока (см. рис. 25.3). Отличие заключается лишь в том, что при включении катушки энергия в магнитном поле накапливалась, а теперь она расходуется. С этим и связано изменение направления свободного тока, которое всегда совпадает с направлением ЭДС самоиндукции.

Предположим, что сопротивление  $R = R_k + R_p$  короткозамкнутого контура в схеме рис. 25.7, б равно сопротивлению цепи при включении катушки по схеме рис. 25.1 и индуктивности одинаковы. В этом случае график тока в цепи рис. 25.7, б после замыкания ее накоротко можно получить, повернув на  $180^\circ$  вокруг

оси времени график  $i_{1cb}$  свободного тока при включении катушки (ср. рис. 25.3 и 25.8, где показаны также графики установившегося  $i_{1y}$  и переходного  $i_1$  токов при включении катушки).

Касательная к графику тока (рис. 25.8) в точке с координатами  $t = 0, i = I$  отсечет на оси времени отрезок  $\tau$ , выражающий постоянную времени цепи, которая и в данном случае аналитически определяется формулой (25.7).

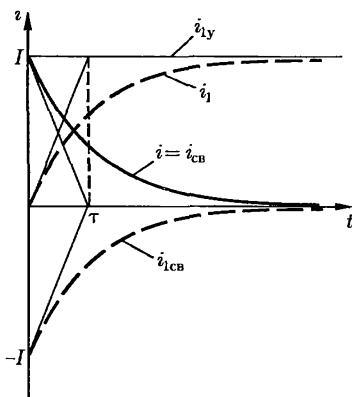


Рис. 25.8

## Уравнение переходного тока

Значение переходного тока в короткозамкнутой катушке можно определить из уравнения (25.1), если учесть, что  $U = 0$ :

$$i = -\frac{L}{R} \frac{di}{dt}.$$

После разделения переменных получим

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt,$$

а после интегрирования обеих частей уравнения —

$$\ln i - \ln K_3 = -\frac{R}{L} t,$$

где  $K_3$  — постоянная интегрирования, отсюда

$$i = K_3 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

В установившемся режиме, предшествующем отключению катушки от источника, и в начальный момент переходного периода ( $t = 0$ ) ток  $i_0 = I = U/R$ .

Учитывая это, из начальных условий найдем  $K_3$ :

$$i_0 = I = K_3 e^0,$$

следовательно,

$$K_3 = I = U/R.$$

Таким образом, уравнение тока в переходный период имеет вид

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = I e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (25.11)$$

где  $\tau = L/R$  — постоянная времени короткозамкнутой цепи.

В короткозамкнутой катушке ток уменьшается по экспоненциальному закону от  $i_0 = I$  до установившегося  $i_y = 0$ .

Сравнивая (25.11) с выражением свободного тока в катушке при ее включении на постоянное напряжение (25.10), убеждаемся, что они одинаковы, если не учитывать изменение знака.

Длительность переходного процесса, как и при включении катушки, теоретически равна бесконечности, а практически ток принимается равным нулю при  $t = (4 \dots 5)\tau$ .

Вопрос о влиянии начального тока  $I$  и параметров цепи на продолжительность переходного процесса можно проанализировать аналогично тому, как это сделано в 25.2 для случая включения катушки.

Основными характеристиками переходного процесса являются: начальный ток  $I = U/R$ ; начальная скорость изменения тока

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{d}{dt} \left( I e^{-\frac{t}{\tau}} \right)_{t=0} = -\frac{I}{\tau} = -\frac{U}{L};$$

постоянная времени цепи  $\tau = L/R$ .

Нетрудно заметить, что выражения этих характеристик совпадают соответственно с формулами (25.2), (25.6) и (25.7). Изменился лишь знак в формуле начальной скорости изменения тока. Но это объясняется просто: ток теперь не увеличивается, а уменьшается, и касательная к кривой тока наклонена к оси времени под углом, большим  $90^\circ$ .

## Задачи

**Задача 25.8.** Построить графики тока в цепи рис. 25.7, б после размыкания выключателя В при следующих условиях:

- а)  $U = 100 \text{ В}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $R_k = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_p = 0 \text{ Ом}$ ,  
 б)  $U = 150 \text{ В}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $R_k = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_p = 0 \text{ Ом}$ ,  
 в)  $U = 100 \text{ В}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $R_k = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_p = 10 \text{ Ом}$ ,  
 г)  $U = 100 \text{ В}$ ,  $L = 0,2 \text{ Гн}$ ,  $R_k = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_p = 0 \text{ Ом}$ .

**Задача 25.9.** Катушка с параметрами  $R = 0,5 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$  соединена параллельно с резистором  $R_p = 10 \text{ Ом}$  и включена к источнику постоянного напряжения  $U = 2 \text{ В}$ . Определить ЭДС самоиндукции в катушке в момент отключения цепи от источника.

## 25.4. ИЗМЕНЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ЦЕПИ С ИНДУКТИВНОСТЬЮ

При включении катушки индуктивности, обладающей параметрами  $R$ ,  $L$ , сопротивление цепи уменьшается скачком от  $\infty$  до  $R$ , а при выключении оно увеличивается от  $R$  до  $\infty$ .

В соответствии с такими изменениями сопротивления ток в цепи за время переходного периода увеличивается от 0 до 1 или уменьшается от 1 до 0.

При скачкообразном изменении сопротивления цепи в конечных пределах тоже возникает переходный процесс, который в общих чертах подобен уже рассмотренным процессам.

Некоторые особенности его обусловлены тем, что при уменьшении сопротивления ток увеличивается начиная с некоторой конечной величины, а при увеличении сопротивления ток уменьшается не до нуля.

### Уменьшение сопротивления в цепи

При разомкнутом рубильнике  $P$  в цепи с последовательно соединенными сопротивлением  $R_1$  и катушкой  $R_2$ ,  $L$  (рис. 25.9) установившийся ток

$$I_1 = U / (R_1 + R_2).$$

После замыкания рубильника сопротивление в цепи внезапно уменьшается до  $R_2$ , а ток постепенно увеличивается до  $I_2 = U / R_2$ .

Переходный процесс от первого режима ко второму отличается от рассмотренного в 25.2 тем, что ток в цепи увеличивается не от нуля, а от величины  $I_1$ . Однако закон изменения тока от  $I_1$  до  $I_2$  такой же.

Вследствие уменьшения сопротивления в цепи возникает добавочный свободный ток, начальная величина которого определяется в соответствии с первым законом коммутации:  $i_{св0} = I_1 - I_2$ .



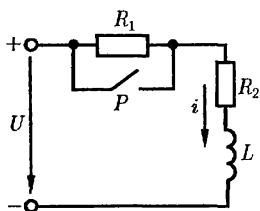


Рис. 25.9

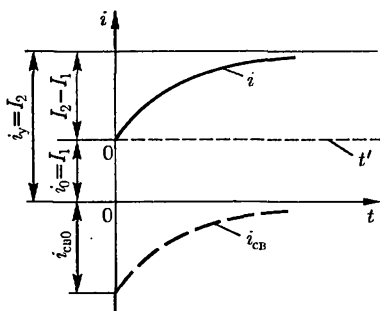


Рис. 25.10

Если к принужденному току  $i_{\text{пр}} = I_2$  прибавить свободный ток  $i_{\text{св}0} = I_1 - I_2$ , то получим переходный ток, который в начальный момент сохраняет свое предыдущее значение  $I_1$ :

$$i_0 = i_{\text{пр}0} + i_{\text{св}0} = I_2 + I_1 - I_2 = I_1.$$

Свободный ток уменьшается в течение переходного процесса до нуля по известному закону (рис. 25.10). По аналогии с формулой (25.11) имеем

$$i_{\text{св}} = i_{\text{св}0} e^{-\frac{t}{\tau_2}} = (I_1 - I_2) e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

или

$$i_{\text{св}} = -(I_2 - I_1) e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

где  $\tau_2 = L/R_2$ ;

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = I_2 - (I_2 - I_1) e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (25.12)$$

### Увеличение сопротивления в цепи

Обратный переход от второго режима к первому совершается после размыкания рубильника. Сопротивление цепи внезапно увеличивается, а ток от  $I_2$  уменьшается по экспоненциальному закону, стремясь к установившейся величине  $I_1$  (рис. 25.11).

Принужденная составляющая переходного тока  $i_{\text{пр}} = I_1$ .

Свободная составляющая, по аналогии с формулой (25.11),

$$i_{\text{св}} = (I_2 - I_1) e^{-\frac{t}{\tau_1}},$$

где

$$\tau_1 = \frac{L}{R_1 + R_2}.$$

## Уравнение переходного тока

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = I_1 + (I_2 - I_1)e^{-\frac{t}{\tau_1}}. \quad (25.13)$$

### Задачи

**Задача 25.10.** В цепи (по схеме рис. 25.9)  $U = 60$  В,  $R_1 = 6$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом. Определить ток, напряжения

$U_L$ ,  $U_{R1}$ ,  $U_{R2}$  в следующих случаях: а) в установившемся режиме перед замыканием рубильника  $P$ ; б) в начальный момент ( $t = 0$ ) переходного режима после размыкания рубильника  $P$ ; в) в установившемся режиме перед замыканием рубильника  $P$ ; г) в первый момент переходного режима после замыкания рубильника  $P$ .

**Задача 25.11.** Катушка электромагнитного реле, имеющая сопротивление  $R = 4$  Ом, индуктивность  $L = 1$  Гн, работает при постоянном напряжении  $U = 24$  В.

Какое сопротивление следует включить параллельно катушке, чтобы в момент ее отключения ЭДС самоиндукции превышала рабочее напряжение не более чем в два раза?

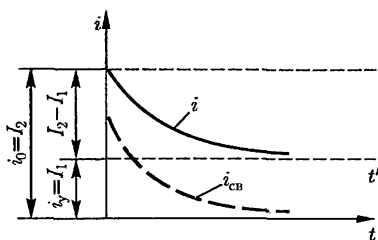


Рис. 25.11

## 25.5. ЗАРЯДКА КОНДЕНСАТОРА

Анализ процесса зарядки конденсатора от источника постоянно го напряжения во многом совпадает с анализом переходного процесса после включения катушки на постоянное напряжение, так как исходные уравнения (25.1) и (25.4) по своей структуре аналогичны.

### Уравнение кривых переходного тока и напряжения на конденсаторе

Закон изменения напряжения на конденсаторе и зарядного тока можно найти, решив дифференциальное уравнение (25.4). Путем разделения переменных это уравнение приводится к виду, удобному для интегрирования

$$\frac{du_C}{U - u_C} = \frac{dt}{RC}.$$

Интегрирование и последующие преобразования, выполненные в том же порядке, как в 25.2 для цепи с катушкой индуктивности, приводят к решению уравнения в виде

$$u_C = U + K_4 e^{-\frac{t}{RC}},$$

где  $K_4$  — постоянная интегрирования.

Из начальных условий ( $t = 0, u_{C0} = 0$ ) находим  $K_4 = -U$ .

Уравнение кривой напряжения на конденсаторе принимает вид

$$u_C = U(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (25.14)$$

Уравнение зарядного тока легко найти из предыдущего уравнения (25.14), если учесть выражение (25.3)

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} \left[ U(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \right] = \frac{CU}{RC} e^{-\frac{t}{RC}},$$

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (25.15)$$

В дальнейшем для анализа переходных процессов при зарядке конденсаторов потребуется выражение скорости изменения напряжения на конденсаторе в начальный момент времени. Это выражение нетрудно получить, используя формулы (25.3) и (25.15):

$$\left( \frac{du_C}{dt} \right)_0 = \frac{i_0}{C} = \frac{U}{RC}. \quad (25.16)$$

Графики зависимости напряжения на конденсаторе  $u_C$  и зарядного тока  $i_3$  от времени изображены на рис. 25.12.

Как видно из этих графиков, скорость увеличения напряжения на конденсаторе и скорость уменьшения зарядного тока непрерывно снижаются. Напряжение  $u_C$  и зарядный ток асимптотически стремятся к своим пределам:  $u_C$  — к значению напряжения источника  $U$ , а ток  $i$  — к нулю.

Теоретически переходный процесс продолжается бесконечно долго, что подтверждают уравнения (25.14) и (25.15) ( $u_C = U$  и  $i = 0$  при  $t = \infty$ ). Однако практически считают, что переходный процесс заканчивается за время, равное  $(4 \dots 5)\tau$ . Величина  $\tau$  в уравнениях (25.14) и (25.15) — постоянная времени цепи

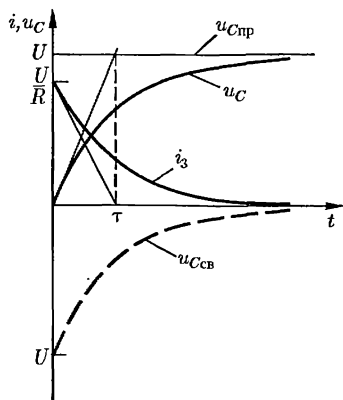


Рис. 25.12

$$\tau = RC. \quad (25.17)$$

Постоянная времени, которая зависит от параметров цепи  $R$ ,  $C$ , как и в цепи с индуктивностью, является показателем продолжительности переходного процесса.

В уравнении (25.14) можно выделить принужденную и свободную составляющие напряжения на конденсаторе:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}}; \\ u_{C\text{пр}} &= U_{Cy} = U; \end{aligned} \right\} \quad (25.18)$$

$$u_{C\text{св}} = -U e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (25.19)$$

Зарядный ток состоит только из свободной составляющей

$$i = i_{\text{св}} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (25.20)$$

а принужденная составляющая  $i_{\text{пр}} = i_y = 0$ .

### Влияние напряжения источника и параметров цепи на переходный процесс

Переходный процесс при зарядке конденсатора от источника постоянного напряжения характеризуют три показателя: установившееся напряжение на конденсаторе; начальная скорость изменения напряжения; постоянная времени [см. формулы (25.18), (25.16), (25.18)].

Используя их выражения, можно проследить влияние напряжения заряжающего источника и параметров цепи на переходный процесс (имеется в виду изменение напряжения или параметров цепи до начала переходного процесса).

При изменении напряжения источника изменяются установившееся напряжение на конденсаторе и начальная скорость изменения напряжения, а постоянная времени цепи, характеризующая длительность переходного процесса, от напряжения не зависит. На рис. 25.13 построены соответственно двум различным напряжениям источника  $U_1$  и  $U_2$  два графика изменения напряжения на конденсаторе 1 и 2 и две касательные к ним в начале координат, имеющие разные углы наклона к оси времени.

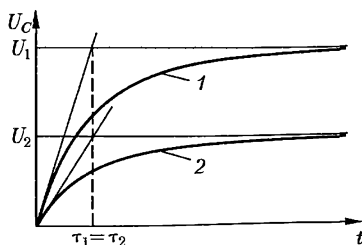


Рис. 25.13

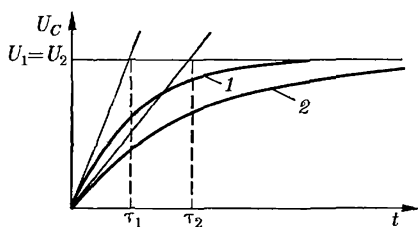


Рис. 25.14

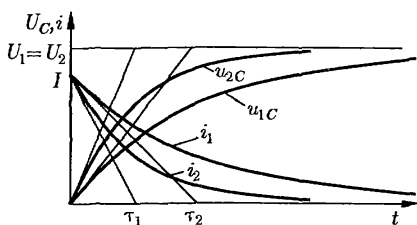


Рис. 25.15

Продолжительность переходного периода в обоих случаях одинакова, так как напряжения на конденсаторе изменяются с разными скоростями, стремясь к разным установившимся величинам.

Сопротивление входит в выражения начальной скорости изменения напряжения на конденсаторе (25.16) и постоянной времени цепи (25.17), а установившееся напряжение на конденсаторе от сопротивления не зависит. В соответствии с этим на рис. 25.14 проведены одна общая асимптота ( $U_1 = U_2$ ) и две касательные в начале координат к графикам переходного напряжения на конденсаторе.

Касательные пересекают асимптоту в двух точках, при этом отмечают две величины постоянной времени:  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . На том же рисунке показаны кривые 1 и 2 изменения напряжения на конденсаторе  $u_C$ , соответствующие двум величинам сопротивления в цепи. По этим графикам нетрудно сделать заключение о влиянии сопротивления на переходный процесс заряда конденсатора.

Изменение емкости влияет на продолжительность переходного процесса так же, как изменение сопротивления (рис. 25.15). К такому заключению можно прийти, применяя для анализа те же выражения (25.16), (25.17), (25.18). Однако имеется разница в энергетической характеристике процесса: при изменении емкости меняется конечный запас энергии в электрическом поле цепи, а при изменении сопротивления — количество электрической энергии, преобразованной в теплоту.

## Задачи

**Задача 25.12.** Как изменится продолжительность переходного процесса (реальная) в цепи рис. 25.2, если изменить одну из следующих величин: а) напряжение источника увеличить в два раза, б) сопротивление  $R$  уменьшить в два раза, в) емкость  $C$  увеличить в два раза.

**Задача 25.13.** Конденсатор емкостью  $C = 10 \text{ мкФ}$  заряжается через резистор, сопротивление которого  $R = 9 \text{ Ом}$ , по схеме рис. 25.16 (переключатель  $\Pi$  в положении 1) от источника электрической энергии с ЭДС  $E = 100 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r = 1 \text{ Ом}$  (на схеме не показано). Через промежуток времени, равный удвоенной величине постоянной времени цепи зарядки, переключатель  $\Pi$  переведен в положение 2.

Определить энергию, израсходованную в резисторе за время зарядки конденсатора.

Решение. Закон изменения напряжения на конденсаторе в процессе зарядки

$$u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

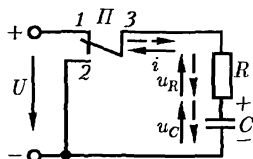


Рис. 25.16

К моменту переключения рубильника напряжение  $u_C$  достигает значения

$$u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau_3}}) = E(1 - e^{-2}) = 0,8647E = 86,47 \text{ В}.$$

Закон изменения тока в процессе зарядки конденсатора

$$i_3 = \frac{E}{R + r} e^{-\frac{t}{\tau_3}} = 10e^{-\frac{t}{\tau_3}}.$$

Энергия, израсходованная в сопротивлении  $R$  при зарядке конденсатора,

$$W_1 = \int_0^{2\tau_3} i_3^2 R dt = R \int_0^{2\tau_3} i_3^2 dt;$$

$$W_1 = 9 \cdot 10^2 \int_0^{2\tau_3} e^{-\frac{2t}{\tau_3}} dt = \frac{900\tau_3}{2} \left[ -e^{-\frac{2t}{\tau_3}} \right]_0^{2\tau_3} = 450\tau_3(1 - e^{-4}) = 450\tau_3(1 - 0,01832);$$

$$\tau_3 = (R + r)C = 10 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 10^{-4} \text{ с};$$

$$W_1 \approx 450 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Определите энергию, выделенную в резисторе, если конденсатор заряжался в течение времени  $t = 3\tau_3$  ( $\tau_3$  — постоянная времени цепи зарядки).

2. Определите скорость изменения напряжения на конденсаторе при зарядке в моменты времени  $t_1 = 0$ ;  $t_2 = \tau_3$ ;  $t_3 = 3\tau_3$ .

## 25.6. РАЗРЯДКА КОНДЕНСАТОРА НА СОПРОТИВЛЕНИЕ

Переходный процесс при разрядке конденсатора рассмотрим по схеме рис. 25.16, предполагая, что заряженный до напряжения  $u_{Cy} = U$  конденсатор емкостью  $C$  отключается от источника энергии и его обкладки замыкаются на сопротивление  $R$  (переключатель  $P$  в положении 2).

## Переходный процесс при разрядке конденсатора

После переключения по схеме рис. 25.16 конденсатор не может разрядиться мгновенно, т. е. напряжение  $u_C$  не может уменьшиться скачком до нуля, а поддерживается в течение переходного периода за счет энергии, накопленной в электрическом поле конденсатора.

При этом в активном сопротивлении  $R$  совершается необратимый процесс превращения электрической энергии в тепловую. Запас энергии в электрическом поле непрерывно сокращается, а вместе с этим уменьшается и напряжение на конденсаторе. Во время переходного периода конденсатор является источником энергии.

Характер изменения напряжения на конденсаторе при его разрядке можно установить пока без математического анализа несложными рассуждениями, предположив, что конденсатор замкнут на то же сопротивление  $R$ , через которое он заряжается.

В начальный момент переходного периода значение напряжения на конденсаторе сохраняется, как и следует из второго закона коммутации. В дальнейшем закон уменьшения напряжения  $u_C$  будет определяться изменением энергии в электрическом поле конденсатора, подобно тому как при зарядке изменением энергии электрического поля определяется свободная составляющая напряжения на конденсаторе (см. рис. 25.12).

Отличие заключается лишь в том, что при зарядке энергия в электрическом поле накапливалась, а при разрядке она расходуется. Выражением этого отличия служит изменение направления разрядного тока в конденсаторе по сравнению с зарядным током (на рис. 25.16 направления тока, напряжений на конденсаторе и резисторе при разрядке показаны сплошными, а при зарядке — пунктирными стрелками).

График разрядного тока можно получить, повернув график зарядного тока на  $180^\circ$  вокруг оси времени (рис. 25.17).

Так же можно получить график напряжения на конденсаторе, который по форме повторяет график свободной составляющей напряжения на конденсаторе при зарядке (на рис. 25.17 графики, относящиеся к процессу зарядки, показаны пунктиром, а графики при разрядке — сплошными линиями). Касательная к графику  $u_C$  в точке с координатами  $t = 0$ ,  $u_C = U$  отсечет на оси времени отрезок  $\tau$ , вы-

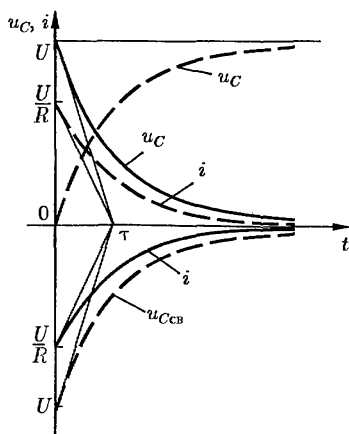


Рис. 25.17

ражающий постоянную времени цепи, которая и при разрядке алгебраически определяется формулой (25.17).

### Уравнение напряжения на конденсаторе и тока в цепи при разрядке конденсатора

Для математического анализа переходного процесса при разрядке конденсатора исходным является уравнение (25.4), в котором для этого случая напряжение источника нужно считать равным нулю

$$0 = u_C + RC \frac{du_C}{dt};$$

отсюда

$$u_C = -RC \frac{du_C}{dt}.$$

После разделения переменных получим

$$\frac{du_C}{u_C} = -\frac{dt}{RC}.$$

После интегрирования

$$\ln u_C - \ln K_5 = -\frac{t}{RC}.$$

Отсюда

$$u_C = K_5 e^{-\frac{t}{RC}},$$

где  $K_5$  — постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий: при  $t = 0$   $u_{C0} = U$ .

Подставляя начальные условия в последнее уравнение, найдем  $K_5 = U$ .

Следовательно, напряжение на конденсаторе при разрядке выражается уравнением

$$u_C = U e^{-\frac{t}{RC}} = U e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (25.21)$$

где  $\tau = RC$  — постоянная времени цепи при разрядке конденсатора.

Итак, напряжение на конденсаторе при разрядке уменьшается по экспоненциальному закону от  $u_{C0} = U$  до установившегося  $u_{Cy} = 0$ .

Сравнивая формулу (25.21) с выражением свободного напряжения на конденсаторе при зарядке [см. формулу (25.19)], убеждаемся в том, что они одинаковы, если не учитывать изменения знака.



Длительность переходного процесса, как и при зарядке, теоретически равна бесконечности, а практически разрядка считается законченной при  $t = (4 \dots 5)\tau$ .

Для разрядного тока выражение получается на основе закона Ома:

$$i = -\frac{u_C}{R} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (25.22)$$

Вопрос о влиянии начального напряжения и параметров цепи на продолжительность переходного процесса можно проанализировать, используя три основные характеристики переходного процесса: начальное напряжение на емкости  $u_{C0} = U$ ; начальную скорость изменения  $u_C$ :

$$\left(\frac{du_C}{dt}\right)_0 = \frac{d}{dt}(Ue^{-\frac{t}{\tau}})_{t=0} = -\frac{U}{\tau} = -\frac{U}{RC};$$

постоянную времени  $\tau = RC$ .

Эти выражения совпадают соответственно с формулами (25.16), (25.17), (25.18). Только знак в формуле начальной скорости изменился на обратный. Объясняется это тем, что конденсатор теперь разряжается, а не заряжается, и напряжение  $u_C$  уменьшается, а не увеличивается, поэтому касательная к кривой  $u_C$  в начальный момент наклонена к оси времени под углом, большим  $90^\circ$ .

## Задачи

**Задача 25.14.** Напряжение на зажимах источника в схеме рис. 25.16  $U = 100$  В. После окончания процесса зарядки конденсатора переключатель  $\Pi$  переведен из положения 1 в нейтральное положение, а затем в положение 2.

Найти напряжение между контактами переключателя  $\Pi$  ( $U_{13}$  и  $U_{23}$ ) в следующих случаях: а) переключатель в положении 1; б) переключатель в нейтральном положении; в) переключатель в положении 2 — разрядка конденсатора закончена.

**Задача 25.15.** Согласно условию задачи 25.13, после периода зарядки конденсатора  $t = 2\tau_3$ , переключатель  $\Pi$  переведен из положения 1 в положение 2.

Определить энергию, израсходованную в цепи за время разрядки конденсатора.

**Решение.** При разрядке конденсатора энергия, израсходованная в элементе цепи с сопротивлением  $R$ , равна убыли энергии электрического поля конденсатора в одно и то же время.

Энергия электрического поля к концу зарядки конденсатора.

$$W_3 = \frac{CU^2}{2} = \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 86,47^2}{2} = 375 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Вся эта энергия выделяется в виде теплоты в сопротивлении при разрядке конденсатора. Таким образом, общая энергия, выделенная в сопротивлении  $R$  при зарядке и разрядке, составляет

$$W = W_1 + W_2 = (450 + 375) \cdot 10^{-4} = 825 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

### Дополнительные вопросы к задаче

1. Определите энергию, выделенную в резисторе  $R$ , если конденсатор заряжался в течение времени  $t_3 = 3\tau_3$ , а разряжался в течение времени  $t_p = 2\tau_p$ , после чего цепь разрядки была разомкнута;  $\tau_3$  и  $\tau_p$  — постоянные времени цепи при зарядке и разрядке конденсатора.

2. Определите скорость изменения тока при разрядке конденсатора в начальный момент времени и при  $t = \tau_p$ .

## 25.7. ВКЛЮЧЕНИЕ КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ НА СИНУСОИДАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Изменение напряжения источника во время переходного процесса влияет на характер переходного тока. При анализе переходного процесса в цепи переменного тока приходится, кроме того, учитывать сдвиг фаз между напряжением и установившимся током, начальную фазу напряжения или, иначе говоря, мгновенное напряжение источника в момент включения цепи.

Однако переходные процессы в цепях постоянного и переменного токов одинаковы: они возникают при переходе от одного установившегося режима к другому при несоответствии запасов энергии в электрическом и магнитном полях цепи условиям нового режима. В течение переходного режима это несоответствие устраняется изменением энергии полей.

### Уравнение переходного тока

После включения участка электрической цепи с активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  на синусоидальное напряжение (рис. 25.18) начинается переходный период, к концу которого в цепи устанавливается синусоидальный ток.

Момент включения цепи будем полагать началом отсчета времени ( $t = 0$ ).

Пусть приложенное напряжение изменяется по закону

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi), \quad (25.23)$$

где  $\psi$  — начальная фаза. В момент включения цепи напряжение имеет величину

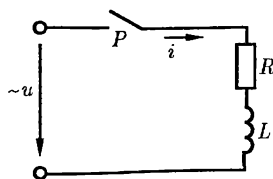


Рис. 25.18

$$u_0 = U_m \sin \psi. \quad (25.24)$$

Ток в цепи после ее включения представляется суммой принужденной и свободной составляющих:  $i = i_{np} + i_{св}$ .

В установившемся режиме синусоидальный ток в катушке сдвинут по фазе относительно напряжения на угол  $\varphi$ , определяемый соотношением активного и индуктивного сопротивлений катушки. Установившийся ток, как известно, является принужденной составляющей переходного тока:

$$i_y = i_{np} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad (25.25)$$

где

$$I_m = U_m / Z; \quad Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = X_L / R.$$

Свободная составляющая переходного тока не зависит от формы приложенного напряжения и изменяется по такому же закону [см. формулу (25.10)], что и при включении катушки на постоянное напряжение, равное мгновенному напряжению источника ( $u_0$ ) в момент включения цепи ( $t = 0$ ):

$$i_{св} = K_6 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (25.26)$$

где  $K_6$  — постоянная интегрирования, равная свободной составляющей тока при  $t = 0$ , т.е.  $K_6 = i_{0св}$ ;  $\tau = L/R$  — постоянная времени цепи.

Таким образом, переходный ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + K_6 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Постоянную  $K_6$  находят с помощью первого закона коммутации: в начальный момент ( $t = 0$ ) ток в цепи равен нулю, так как ранее цепь была разомкнута и ток в катушке скачком измениться не может.

Поэтому

$$i_0 = i_{0np} + i_{0св} = 0,$$

отсюда следует, что  $i_{0св} = -i_{0np}$ .

Из (25.25)

$$i_{0np} = I_m \sin(\psi - \varphi). \quad (25.27)$$

Следовательно,

$$i_{0св} = K_6 = -I_m \sin(\psi - \varphi). \quad (25.28)$$

Уравнение свободной составляющей

$$i_{св} = -I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (25.29)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (25.30)$$

Графики переходного тока и его составляющих показаны на рис. 25.19.

### Влияние на переходный процесс начальной фазы приложенного напряжения

Рассматривая рис. 25.19, можно заметить, что изменения установившегося и переходного токов носят колебательный характер, причем колебания установившегося тока совершаются около оси  $\omega t$ , а переходного тока — около кривой  $i_{св}(t)$ . Обусловлено это тем, что свободная составляющая переходного тока, внося искажения, как бы смещает график синусоидального тока и искривляет его ось. Степень искажения зависит от того, в какой момент включена цепь, так как в выражение свободной составляющей (25.29) входит начальная фаза приложенного к цепи напряжения.

Если включение катушки произошло в момент, когда принужденная составляющая переходного тока равна нулю [т.е. при  $\psi = \varphi$ , см. формулу (25.27)], то свободная составляющая не возникает: согласно (25.27), при  $\psi = \varphi$   $i_{св} = 0$ . Иначе говоря, в этом случае переходный период отсутствует и в цепи с первого момента после включения наступает установившийся режим (рис. 25.20).

Наибольшее значение свободного тока в начальный момент времени может быть равно амплитуде установившегося тока. Это имеет место при  $\psi = \varphi + 90^\circ$ , когда в момент включения цепи принужденная составляющая тока равна амплитуде  $I_m$  (рис. 25.21)

$$i_{0св} = -I_m \sin(\varphi + 90^\circ - \varphi) = -I_m.$$

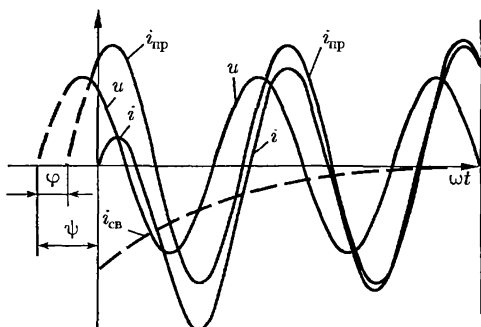


Рис. 25.19

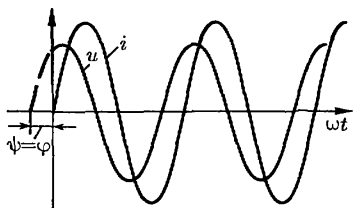


Рис. 25.20

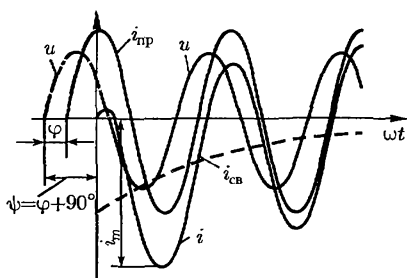


Рис. 25.21

В этом случае свободная составляющая переходного тока затухает быстрее или медленнее в зависимости от величины постоянной времени цепи, а переходный ток в соответствии с этим приближается к установившемуся.

В цепях с большой постоянной времени (с большой индуктивностью и малым сопротивлением) свободная составляющая переходного тока затухает медленно, поэтому переходный ток в течение первого полупериода достигает величины, равной почти удвоенной амплитуде установившегося тока:  $i_m \approx 2I_m$ .

### Задачи

**Задача 25.16.** Катушка с параметрами  $R = 3,14$  Ом,  $L = 0,01$  Гн включается к источнику синусоидального напряжения частотой 50 Гц. Какой должна быть начальная фаза этого напряжения, чтобы сразу после включения наступил принужденный режим?

**Задача 25.17.** Катушка с параметрами  $R = 6$  Ом и  $L = 25,5$  мГн включается на синусоидальное напряжение  $U = 120$  В при частоте 50 Гц. Построить график зависимости переходного тока от времени, если включение цепи произошло в момент времени, соответствующий начальной фазе приложенного напряжения  $\psi = 120^\circ$ .

## 25.8. КОРОТКОЕ ЗАМЫКАНИЕ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

При внезапном коротком замыкании скачком уменьшается сопротивление цепи  $Z$ . Переходный процесс, возникающий в результате изменения сопротивления, рассмотрим на схеме рис. 25.22, где электрическая нагрузка, представленная сопротивлением  $Z_n$ , подключена через сопротивление  $Z_n$  к источнику синусоидального напряжения с постоянной амплитудой и неизменной частотой. Такой схемой замещения можно представить реаль-

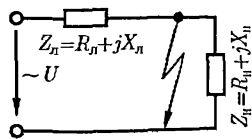


Рис. 25.22

ную цепь, в которой к шинам трансформаторной подстанции через линию ( $Z_{\text{л}}$ ) подключена группа потребителей электрической энергии ( $Z_{\text{н}}$ ).

## Уравнение кривой переходного тока

Предположим, что сопротивление цепи изменилось в результате короткого замыкания в конце линии, как показано на рис. 25.22. При этом будем считать, что синусоидальное напряжение источника остается неизменным по амплитуде\*.

До короткого замыкания установившийся режим характеризуется напряжением  $\dot{U}$  и током

$$\dot{I}_1 = \dot{U} / (\underline{Z}_{\text{л}} + \underline{Z}_{\text{н}}).$$

Уравнение напряжения, приложенного к цепи,

$$u = U_{\text{м}} \sin(\omega t + \psi), \quad (25.31)$$

где  $\psi$  — фазовый угол, определяющий напряжение в начальный момент короткого замыкания ( $t = 0$ ).

Установившийся ток до короткого замыкания отстает от напряжения на угол  $\varphi_1 > 0$ , зависящий от параметров линии и нагрузки:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_{\text{л}} + X_{\text{н}}}{R_{\text{л}} + R_{\text{н}}}.$$

В этом случае уравнение тока

$$i_1 = I_{1\text{м}} \sin(\omega t + \psi - \varphi_1). \quad (25.32)$$

Установившийся режим после короткого замыкания характеризуется тем же напряжением  $U$  и током

$$\dot{I}_2 = \dot{U} / \underline{Z}_{\text{л}}.$$

Уравнение установившегося тока

$$i_2 = I_{2\text{м}} \sin(\omega t + \psi - \varphi_2), \quad (25.33)$$

где  $\varphi_2$  — угол сдвига фаз напряжения и установившегося тока короткого замыкания, определяемый соотношением активного и реактивного сопротивлений короткозамкнутой цепи:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = X_{\text{л}} / R_{\text{л}}.$$

---

\* Принятое условие неизменности амплитуды напряжения соответствует короткому замыканию на участке, отделенном от мощных источников питания большим сопротивлением.

Переходный ток в короткозамкнутой линии представим суммой принужденной и свободной составляющих:  $i_k = i_{пр} + i_{св}$  ( $i_{пр} = i_2$  — установившийся ток короткого замыкания).

Свободная составляющая тока изменяется по тому же закону, по которому она изменяется в цепи по схеме рис. 25.9 при уменьшении сопротивления:

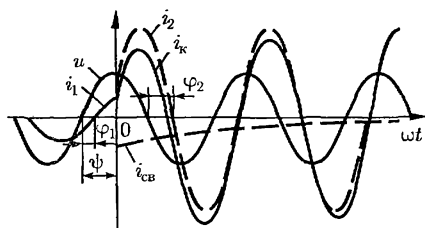


Рис. 25.23

$$i_{св} = -K_7 e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad (25.34)$$

где  $\tau_2$  — постоянная времени короткозамкнутой цепи:

$$\tau_2 = L_{\lambda} / R_{\lambda};$$

$K_7$  — постоянная величина, определяемая из начальных условий.

В начальный момент переходного периода, согласно первому закону коммутации,  $i_{k0} = i_{10}$ , следовательно,

$$i_{k0} = i_{пр0} + i_{св0} = I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2) - K_7 = I_{1m} \sin(\psi - \varphi_1).$$

Отсюда

$$K_7 = I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2) - I_{1m} \sin(\psi - \varphi_1). \quad (25.35)$$

Свободная составляющая переходного тока, согласно уравнению (25.34),

$$i_{св} = [I_{1m} \sin(\psi - \varphi_1) - I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2)] e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (25.36)$$

Переходный ток короткого замыкания выражается уравнением

$$i_k = I_{2m} \sin(\omega t + \psi + \varphi_2) + [I_{1m} \sin(\psi - \varphi_1) - I_{2m} \sin(\psi - \varphi_2)] e^{-\frac{t}{\tau_2}}.$$

На рис. 25.23 показаны графики напряжения и тока в цепи до и после короткого замыкания.

### Влияние начальной фазы напряжения на переходный процесс короткого замыкания

Ток короткого замыкания, как уже отмечено, складывается из двух составляющих — *принужденной* составляющей, равной устано-

вившемуся току короткого замыкания, и свободной составляющей, затухающей благодаря наличию в цепи активного сопротивления.

Принужденная составляющая изменяется по синусоидальному закону, и поэтому ее называют периодической составляющей, а свободная составляющая не изменяет знака,

и ее называют аperiodической составляющей тока короткого замыкания.

Начальную величину свободной составляющей определяют из уравнения (25.36)

$$i_{0\text{св}} = I_{1\text{м}} \sin(\psi - \varphi_1) - \\ - I_{2\text{м}} \sin(\psi - \varphi_2).$$

Она зависит от начальной фазы напряжения  $\psi$ , т.е. от момента возникновения короткого замыкания.

Наиболее сложным случаем является короткое замыкание в момент, когда мгновенное напряжение на зажимах цепи равно нулю ( $\psi = 0$ ), а сопротивление цепи короткого замыкания чисто индуктивное ( $\varphi_2 = 90^\circ$ ). Соответствующий график тока короткого замыкания показан на рис. 25.24.

В реальных электрических сетях индуктивное сопротивление цепи короткого замыкания во многих случаях значительно больше активного, поэтому при расчете токов короткого замыкания активное сопротивление часто не учитывают. При этом условии свободная составляющая переходного тока в момент  $t = 0$  близка к наибольшей возможной величине, равной амплитуде периодической составляющей. Если активное сопротивление цепи короткого замыкания мало, свободная составляющая затухает медленно, поэтому в самом неблагоприятном случае за время, приблизительно равное полупериоду, ток короткого замыкания достигает своего наибольшего значения, близкого к удвоенной амплитуде установившегося тока короткого замыкания.

Наибольший мгновенный ток короткого замыкания называют ударным током ( $i_{\text{уд}}$ ).

Свободная составляющая тока короткого замыкания затухает тем быстрее, чем меньше постоянная времени цепи короткого замыкания  $\tau_2$ , т.е. чем больше активное сопротивление и меньше индуктивность.

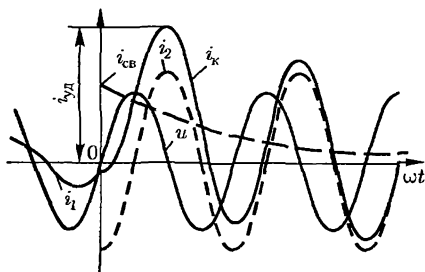


Рис. 25.24



Параметры цепей короткого замыкания в реальных электроустановках обычно такие, что свободная составляющая тока короткого замыкания заметно проявляется в течение  $0,1-0,2$  с.

### Задачи

**Задача 25.18.** Начертить графики тока короткого замыкания и его составляющих в цепи рис. 25.22 при следующих условиях (по рис. 25.23):  $\psi = 60, 30, 90^\circ$ . Амплитуды установившихся токов до и после короткого замыкания отличаются в пять раз.

**Задача 25.19.** Катушка с параметрами  $R = 10$  Ом,  $L = 0,05$  Гн включается в сеть синусоидального напряжения  $U = 115,5$  В,  $f = 50$  Гц.

Определить ток в цепи спустя полпериода после включения при условии, что в момент включения принужденный ток имел отрицательный максимум.

## ГЛАВА 26

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Каждый элемент электрической цепи (резистор, катушка, конденсатор) имеет конечные размеры, и его можно представить как совокупность малых однородных частей, в которых совершаются интересующие нас электромагнитные процессы — преобразование энергии в теплоту, накопление энергии в магнитном и электрических полях. Иначе говоря, все устройства имеют распределенные параметры — сопротивление, индуктивность, емкость.

При изучении электрических цепей до сих пор мы не учитывали размеры устройств, предполагая, что параметры  $R$ ,  $L$ ,  $C$  сосредоточены, т. е. представляли в расчетной схеме каждый элемент в целом.

Такой подход к анализу электрических цепей принимают тогда, когда рассматривают и изучают внешние связи между элементами. В тех случаях, когда требуется выявить соотношения внутри устройства, соответствующий элемент рассматривается как объект с распределенными параметрами. Таким объектом может быть обмотка электрической машины, трансформатора, антенна радиотехнического устройства и др.

**Электрическая цепь с распределенными параметрами** — это цепь, в которой сопротивления, проводимости, индуктивности и емкости распределены вдоль цепи.

Наглядным примером цепи с распределенными параметрами является электрическая длинная линия.

### 26.1. УРАВНЕНИЯ ДЛИННОЙ ЛИНИИ

Длинные линии строят для передачи электрической энергии, для электросвязи (передачи информации). Их рассматривают как объекты с распределенными параметрами при низких частотах и длине в десятки и сотни километров.

В радиотехнике при высоких частотах распределение парамет-

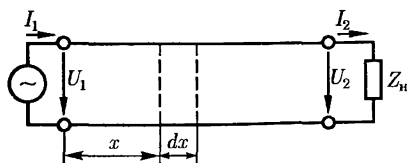


Рис. 26.1

ров по длине учитывают в более коротких участках проводов (единицы и доли метра), например в антеннах.

## Схемы замещения длинных линий

На рис. 26.1 изображена схема электрической цепи, состоящей из источника и приемника электрической энергии, связанных двухпроводной линией. Эту цепь можно рассматривать неразветвленной, с одинаковым током во всех ее элементах, если не учитывать двух обстоятельств: скорость распространения электромагнитных возмущений конечна; имеются токи, обусловленные емкостью между проводами (емкостный ток) и проводимостью изоляции (ток утечки через изоляцию).

В данном случае первое обстоятельство можно не учитывать, так как скорость распространения электромагнитных возмущений действительно велика (в вакууме равна скорости света). Емкостные токи и токи утечки пропорциональны напряжению между проводами; кроме того, емкостный ток увеличивается с ростом частоты, так как уменьшается емкостное сопротивление. Поэтому при высоком напряжении или большой частоте, а также при большой длине линии емкостные токи и токи утечки становятся значительными по величине и их нельзя исключить из расчета.

Токи между проводами существуют на сколь угодно малом отрезке линии, поэтому ток в проводах уменьшается по мере удаления от начала линии.

Вдоль линии напряжение между проводами тоже неодинаково. Оно уменьшается в направлении от начала к концу линии, так как растет падение напряжения, обусловленное активным и индуктивным сопротивлениями проводов.

Для расчета можно составить схему замещения линии, изображенную на рис. 26.2. На схеме замещения бесконечно малый участок двухпроводной линии длиной  $dx$  представлен ячейкой с активным сопротивлением  $R_0 dx$  прямого и обратного проводов, индуктивностью  $L_0 dx$ , проводимостью  $G_0 dx$  и емкостью  $C_0 dx$  между проводами. Вся линия изображается электрической схемой последова-

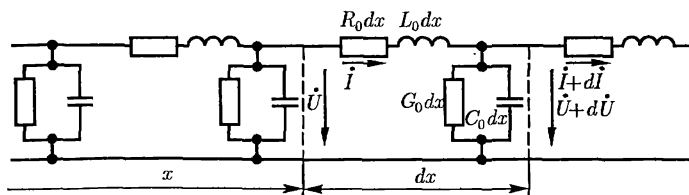


Рис. 26.2

тельного соединения таких ячеек. Активное сопротивление, индуктивность, проводимость и емкость считают равномерно распределенными вдоль линий, а  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $G_0$ ,  $C_0$  — величины этих параметров на единицу длины.

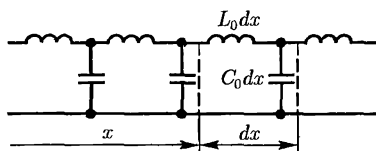


Рис. 26.3

Линия с равномерным распределением параметров называется однородной. Реальные линии можно считать однородными лишь приближенно, так как параметры их все же распределены неравномерно. Например, проводимость воздушной линии сосредоточена в основном на опорах, а благодаря провесу проводов емкость по отношению к земле вдоль пролета неодинакова.

В зависимости от целей и требуемой точности расчета можно учитывать все четыре параметра или некоторые из них. Так, при рассмотрении линии электропередачи напряжением до 35 кВ и при частоте 50 Гц часто не учитывают емкостные токи и токи утечки, т. е. считают равными нулю параметры  $G_0$  и  $C_0$ .

При высокой частоте (например, в радиотехнических устройствах) или при коротких импульсах напряжения в линиях, возникающих от грозовых разрядов, емкостные токи между проводами могут быть сравнительно большими и ими пренебрегать нельзя.

Вместе с тем при высокой частоте и малой длине линии в отдельных случаях можно пренебречь активным сопротивлением  $R_0$  и проводимостью  $G_0$ .

При таком упрощении получается линия без потерь, схема замещения которой показана на рис. 26.3.

## Основные уравнения длинной линии

При синусоидальном напряжении источника питания напряжение и ток в линии на любом расстоянии  $x$  от ее начала изменяются во времени. Вместе с тем напряжение и ток изменяются вдоль линии. Установившийся режим в длинной линии представляется довольно сложной пространственно-временной картиной, для изучения которой необходимо получить аналитическую зависимость напряжения и тока от двух независимых переменных — времени и расстояния.

Решить такую задачу можно используя схему замещения однородной линии (см. рис. 26.2). На схеме кроме параметров некоторого элемента длины линии  $dx$  обозначены напряжение и ток в начале и конце этого элемента, расположенного на расстоянии  $x$  от начала линии.

Падение напряжения в элементе длины  $dx$  линии

$$\dot{U} - (\dot{U} + d\dot{U}) = -d\dot{U} = \dot{I}R_0 dx + \dot{I}j\omega L_0 dx.$$

Разность токов в начале и конце того же элемента равна сумме тока утечки и емкостного тока:

$$\dot{I} - (\dot{I} + d\dot{I}) = -d\dot{I} = \dot{U}G_0 dx + \dot{U}j\omega C_0 dx.$$

Из этих выражений получают дифференциальные уравнения однородной линии, в которые входят комплексы токов и напряжений, изменяющихся во времени по синусоидальному закону, а также их производные по переменной координате  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\dot{U}}{dx} &= (R_0 + j\omega L_0)\dot{I} = \underline{Z}_0 \dot{I}; \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} &= (G_0 + j\omega C_0)\dot{U} = \underline{Y}_0 \dot{U}, \end{aligned} \right\} \quad (26.1)$$

где  $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$  — полное сопротивление единицы длины линии (определяется продольными параметрами линии);  $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$  — полная проводимость единицы длины линии (определяется поперечными параметрами линии).

Продольные  $R_0$ ,  $L_0$  и поперечные  $G_0$ ,  $C_0$  параметры линии характеризуют совершенно различные физические явления, поэтому между собой не связаны.

Далее можно составить уравнения, в которых переменными будут напряжение или ток. Для этого дифференцируем по  $x$  уравнения (26.1):

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \frac{d\dot{I}}{dx}; \quad -\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = \underline{Y}_0 \frac{d\dot{U}}{dx};$$

учитывая выражения (26.1), получим линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{U}; \quad \frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{I}. \quad (26.2)$$

Решением первого уравнения из (26.2) является выражение

$$\dot{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{+\gamma x}. \quad (26.3)$$

Уравнение тока получим из (26.1) и (26.3):

$$\dot{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{+\gamma x}). \quad (26.4)$$

## Характеристики длинной линии

В выражениях (26.3) и (26.4)  $\underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$  — постоянные коэффициенты, определяемые условиями в начале или конце линии;  $\gamma$  — коэффициент распространения электромагнитной волны по линии (коэффициенты выражаются комплексными числами):

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (26.5)$$

Учитывая формулу (26.5), запишем другое уравнение тока:

$$\dot{I} = \frac{\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{+\gamma x}),$$

или

$$\dot{I} = \frac{(\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{+\gamma x})}{\underline{Z}_c}, \quad (26.6)$$

где величина

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} e^{j\theta} \quad (26.7)$$

имеет размерность сопротивления и называется волновым сопротивлением линии.

Постоянные коэффициенты  $\underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$  нетрудно найти, если известен режим в начале линии, т.е. даны  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$ .

Из уравнений (26.3) и (26.6) при  $x = 0$

$$\dot{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad \dot{I}_1 = \frac{\underline{A}_1 - \underline{A}_2}{\underline{Z}_c}.$$

Отсюда

$$\underline{A}_1 = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_c}{2}; \quad \underline{A}_2 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_c}{2}. \quad (26.8)$$

Отношение комплекса напряжения к комплексу тока в начале линии называется входным сопротивлением линии.

Входное сопротивление линии при нагрузке  $\underline{Z}_2$  можно определить через входные сопротивления при холостом ходе  $\underline{Z}_x$  и коротком замыкании  $\underline{Z}_k$ :

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_x \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_k}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_x}. \quad (26.9)$$

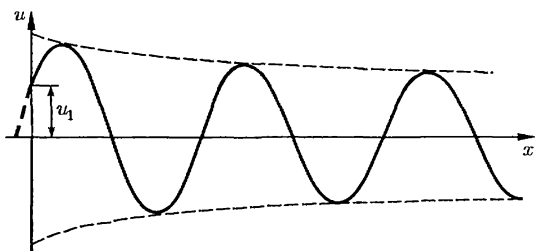


Рис. 26.4

Коэффициент распространения электромагнитной волны  $\underline{\gamma}$  как комплексную величину можно представить в алгебраической форме  $\underline{\gamma} = \delta + j\beta$ .

Этот коэффициент, имея два слагаемых, характеризует две стороны электромагнитного процесса в линии: затухание амплитуд и изменение фазы напряжения и тока в зависимости от расстояния от начала линии.

В соответствии с этим действительная часть комплекса  $\delta$  называется коэффициентом затухания, а мнимая часть  $\beta$  — коэффициентом фазы.

Коэффициент затухания  $\delta$  показывает степень затухания амплитуды колебаний при распространении волны на единицу длины.

На рис. 26.4 показан график распределения напряжения вдоль линии в некоторый фиксированный момент времени. Из графика видно, что напряжение вдоль линии распределено по периодическому закону, а амплитуды напряжения затухают по экспоненциальному закону в направлении от начала к концу линии.

## Задачи

**Задача 26.1.** Трехфазная линия электропередачи длиной  $l = 900$  км имеет первичные параметры:  $R_0 = 0,08$  Ом/км,  $Z_0 = 1,336 \cdot 10^{-3}$  Гн/км,  $C_0 = 8,6 \cdot 10^{-9}$  Ф/км,  $G_0 = 3,75 \cdot 10^{-8}$  См/км.

Нагрузка в конце линии  $P_2 = 300$  МВт,  $U_2 = 380$  кВ,  $\cos \varphi_2 = 1$ , частота  $f = 50$  Гц.

Определить вторичные параметры линии ( $Z_c, \underline{\gamma}$ ), напряжение и ток на ее входе.

*План решения.*

1. Комплексы «продольного» сопротивления и «поперечной» проводимости [см. формулы (26.1)].

2. Волновое сопротивление линии — по формуле (26.7).

3. Коэффициент распространения — по формуле (26.5).

4. Коэффициент затухания и коэффициент фазы — по формуле  $\underline{\gamma} = \delta + j\beta$ .

5. Ток в конце линии — по формуле (20.9).

6. Напряжение и ток в начале линии — по формулам (26.3) и (26.6), которые следует записать при условии, что расстояния вдоль линии отсчитываются от конца линии:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \underline{A}_3 e^{-\gamma l} + \underline{A}_4 e^{\gamma l}; \\ I_1 &= \frac{\underline{A}_3 e^{-\gamma l} - \underline{A}_4 e^{\gamma l}}{\underline{Z}_c}.\end{aligned}$$

При этом

$$e^{\gamma l} = e^{(\delta + j\beta)l} = e^{\delta l} e^{j\beta l}.$$

Коэффициенты  $\underline{A}_3$  и  $\underline{A}_4$  определяют по формулам (26.8) при замене величин напряжения и тока в начале линии этими величинами в конце линии

$$\underline{A}_3 = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_c}{2}, \quad \underline{A}_4 = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_c}{2}.$$

Выполнить вычисления по данному плану.

**Задача 26.2.** Для длинной линии электропередачи определены полное сопротивление единицы длины  $\underline{Z}_0$  и полная проводимость единицы длины  $\underline{Y}_0$ . Являются ли эти величины взаимно обратными? Что выражает их произведение и отношение первого к второму?

## 26.2. УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ В ДЛИННОЙ ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ

Линия без потерь, как уже было отмечено, не имеет активных сопротивлений  $R_0$  и проводимости  $G_0$ .

В радиотехнике длинные линии с малыми потерями встречаются часто, поэтому рассмотрение линии при  $R_0 = 0$  и  $G_0 = 0$  имеет практическое значение.

### Уравнения длинной линии без потерь

Согласно формулам (26.5) и (26.9), для линии без потерь коэффициент затухания  $\delta = 0$ , а коэффициент распространения волны оказывается равным коэффициенту фазы:

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad \gamma = j\beta = j\omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Поэтому график распределения напряжения вдоль линии в некоторый фиксированный момент времени представляет собой синусоиду. Амплитуда напряжения вдоль линии остается постоянной (рис. 26.5).



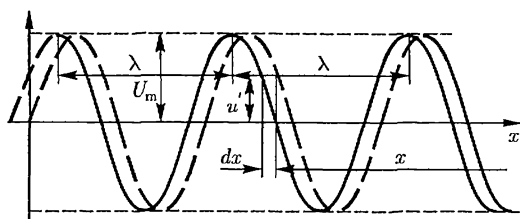


Рис. 26.5

Волновое сопротивление [см. формулу (26.7)]

$$\underline{Z}_c = \sqrt{L_0/C_0} Z_c \text{ при } \theta = 0. \quad (26.10)$$

Уравнения напряжения и тока в линии без потерь, согласно уравнениям (26.3), (26.6),

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \underline{A}_1 e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 e^{j\beta x}; \\ \dot{I} &= \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{-j\beta x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{j\beta x}. \end{aligned} \right\} \quad (26.11)$$

Вместо коэффициента  $\underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$  подставим их значения из (26.8), определенные по известным величинам напряжения  $U_1$  и тока  $I_1$  в начале линии ( $x = 0$ ). Кроме того, сделаем замену:

$$e^{-j\beta x} = \cos \beta x - j \sin \beta x;$$

$$e^{j\beta x} = \cos \beta x + j \sin \beta x.$$

После преобразования из уравнений (26.11) получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 \cos \beta x + j \dot{I}_1 \underline{Z}_c \sin \beta x; \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 \cos \beta x - j \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (26.12)$$

Из этих уравнений можно также получить выражения напряжения и тока в любой точке линии, если известны напряжение  $U_2$  и ток  $I_2$  в конце линии, при условии отсчета расстояния от конца линии:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x + j \dot{I}_2 \underline{Z}_c \sin \beta x; \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (26.13)$$

С помощью уравнений (26.12) и (26.13) можно исследовать различные режимы длинной линии без потерь.

## Холостой ход

При холостом ходе линии ( $I_2 = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x; \\ \dot{I} &= j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \sin \beta x = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} e^{j90^\circ} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (26.14)$$

Напряжение и ток вдоль линии в любой момент времени распределены по синусоидальному закону, причем в пунктах, где напряжение равно нулю, ток имеет наибольшую величину, а в пунктах с наибольшим напряжением ток равен нулю (рис. 26.6, а, б).

Точки линии, в которых напряжение или ток равны нулю, называются узлами, а точки с наибольшей величиной напряжения или тока — пучностями.

Таким образом, узлы напряжения по месту расположения на линии совпадают с пучностями тока, а пучности напряжения — с узлами тока.

Положение узлов напряжения и пучностей тока найдем, приравняв нулю напряжение в первом уравнении (26.14):  $U = 0$  при  $\beta x = k + \frac{\pi}{2}$ , где  $k$  — любое целое число или нуль, т.е.  $\beta x = \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi$

и т. д.

Положение на линии узлов тока и пучностей напряжения определяется из второго уравнения (26.14) при  $I = 0$ .

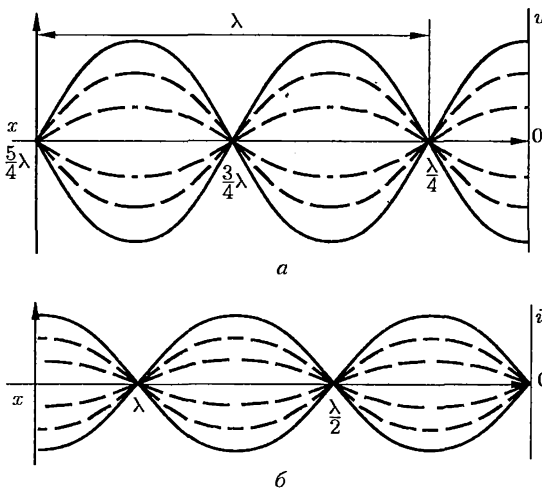


Рис. 26.6

Напряжение и ток, распределяясь вдоль линии по синусоидальному закону без затухания, по такому же закону изменяются во времени.

## Короткое замыкание

Аналогичная картина наблюдается и при коротком замыкании конца линии без потерь. Отличие электромагнитных процессов в линии без потерь в режимах холостого хода и короткого замыкания состоит лишь в том, что изменяется расположение пучностей и узлов напряжения и тока по длине линии: в тех пунктах, где при холостом ходе находятся пучности напряжения и узлы тока, при коротком замыкании обнаруживаются пучности тока и узлы напряжения. В частности, *в конце разомкнутой линии имеется пучность напряжения и узел тока ( $I_2 = 0$ ), а в конце короткозамкнутой линии имеются пучность тока и узел напряжения ( $U_2 = 0$ ).*

## Стоячая волна

Пусть вектор напряжения в конце разомкнутой линии направлен по действительной оси комплексной плоскости, т.е. начальная временная фаза напряжения равна нулю:

$$u_2 = U_{2m} \sin \omega t \text{ или } \dot{U}_2 = U_2.$$

В этом случае мгновенные значения напряжения и тока в линии можно выразить уравнениями

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{2m} \cos \beta x \sin \omega t, \\ i &= \frac{U_{2m}}{Z_c} \sin \beta x \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (26.15)$$

При  $\omega t = 0$  во всех точках линии напряжение отсутствует ( $u = 0$ ). Затем напряжение растет во всех пунктах линии, кроме узлов, и при  $\omega t = \pi/2$  достигает амплитуды.

Но эта амплитуда напряжения во всех пунктах линии разная. В месте пучности напряжение достигает наибольшего значения  $U_{2m}$ , а в узле оно всегда равно нулю.

Электромагнитный процесс, подчиняющийся уравнениям (26.15), называется *стоячей волной*, характерной особенностью которой является неподвижность узлов и пучностей на линии.

## Бегущая волна

Из тригонометрии известно, что

$$\cos \beta x \sin \omega t = \frac{\sin(\omega t + \beta x) + \sin(\omega t - \beta x)}{2}.$$

Следовательно, напряжение и ток в линии можно представить суммой двух составляющих, каждая из которых является уравнением бегущей волны:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t + \beta x) + \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t - \beta x), \\ i &= \frac{U_{2m}}{2Z_c} \sin(\omega t + \beta x) - \frac{U_{2m}}{2Z_c} \sin(\omega t - \beta x). \end{aligned} \right\} \quad (26.16)$$

Первое слагаемое в этих уравнениях — прямая волна, распространяющаяся от начала к концу линии; второе — обратная волна с такой же амплитудой.

В этом можно убедиться, рассмотрев подробно одну из составляющих, например первую в уравнении напряжения.

Предположим, что некоторая величина напряжения  $u'$  в момент времени  $t$  имеет место в пункте, пространственное положение которого определяется расстоянием  $x$  от конца (или начала) линии (см. рис. 26.5)

$$u' = u(t, x) = \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t + \beta x).$$

Распространение волны напряжения означает, что через бесконечно малый промежуток времени  $dt$  такое же напряжение  $u'$  возникает в другом пункте линии, отстоящем от первого на бесконечно малое расстояние  $dx$ :

$$u' = u(t + dt, x + dx) = \frac{U_{2m}}{2} \sin[\omega(t + dt) + \beta(x + dx)].$$

Равенство напряжений в моменты времени, отстоящие на  $dt$ , возможно при равенстве аргументов синусов в обоих уравнениях, т.е. при

$$\omega t + \beta x = \omega t + \omega dt + \beta x + \beta dx.$$

Отсюда

$$\omega dt + \beta dx = 0$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta} = v. \quad (26.17)$$

Отношение  $\frac{dx}{dt}$  характеризует скорость распространения волны напряжения вдоль линии и называется фазовой скоростью волны.

Знак минус указывает на то, что волна движется от начала к концу линии (расстояние  $x$  уменьшается).

Аналогично можно показать, что вторая составляющая напряжения в уравнении (26.16) представляет собой волну, распространяющуюся в обратном направлении ( $x$  увеличивается).

Волна, распространяющаяся от начала к концу линии, называется прямой или падающей, а волна, распространяющаяся в обратном направлении (от конца линии к началу), — обратной или отраженной.

Те же рассуждения можно отнести к составляющим тока во втором уравнении (26.16).

Таким образом, стоячая волна напряжения представляет собой сумму, а волна тока — разность прямой (падающей) и обратной (отраженной) волн одинаковой амплитуды.

### Волновое сопротивление. Длина волны

Уравнения (26.16) запишем в таком виде:

$$\begin{aligned} u &= u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}; \\ i &= u_{\text{пад}}/Z_c - u_{\text{отр}}/Z_c = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$Z_c = u_{\text{пад}}/i_{\text{пад}} = u_{\text{отр}}/i_{\text{отр}}.$$

Волновое сопротивление линии выражается отношением напряжения к току падающих волн или аналогичным отношением для отраженных волн.

Волновое сопротивление линии можно определить через входные сопротивления при холостом ходе и коротком замыкании

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_x \underline{Z}_k}. \quad (26.18)$$

Большой интерес представляет также расстояние, на которое бегущая волна распространяется за время одного периода синусоидально изменяющегося напряжения или тока.

Из формулы (26.17) видно, что фазовая скорость постоянна, поэтому  $x = \omega t/\beta$ .

Путь, пройденный волной за время периода  $T = 2\pi/\omega$ , называется длиной волны

$$\lambda = vT = \omega T/\beta = 2\pi/\beta.$$

В линии без потерь фазовая скорость

$$v = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_0 C_0}, \quad (26.19)$$

а длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{f\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (26.20)$$

Найдем величину фазовой скорости для воздушной линии без потерь, подставляя в формулу (26.19)  $L_0$  и  $C_0$  двухпроводной линии, определенные ранее [см. формулы (7.31), (8.29)]:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c_0.$$

Фазовая скорость электромагнитной волны в воздушной линии без потерь равна скорости света.

Если среда, в которой распространяется электромагнитная волна, характеризуется величинами диэлектрической  $\epsilon_r$  и магнитной проницаемости  $\mu_r$ , то

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}} = C_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}.$$

Принимая  $v = C_0$ , при частоте  $f = 50$  Гц получим длину волны  $\lambda = C_0/f = (3 \cdot 10^8)/50 = 6000$  км.

Нетрудно заметить, что при частоте  $f = 50$  Гц в реальных линиях электропередачи 6–220 кВ, длина которых значительно меньше 6000 км, укладывается только небольшая часть длины волны. Поэтому волнообразное изменение напряжения и тока вдоль этих линий при такой частоте практически не наблюдается.

В линиях дальних передач с номинальным напряжением 500 кВ и более изменения величины напряжения вдоль линии становятся заметными и приходится принимать меры к его выравниванию. С увеличением частоты длина волны уменьшается. В технике связи, где применяются высокие частоты, длина волны может быть во много раз меньше длины линии.

## Задачи

**Задача 26.3.** В конце двухпроводной линии без потерь напряжение  $U_2 \neq 600$  В при холостом ходе. Определить напряжение и ток в начале линии,

если известны: волновое сопротивление  $Z_c = 600$  Ом, длина линии 24 км, коэффициент распространения  $\gamma = j\,0,01$  1/км.

*План решения.*

1. Напряжение в начале линии по первой формуле (26.13) при  $I_2 = 0$ .

2. Ток в начале линии по второй формуле (26.13).

Выполнить подсчеты по данному плану.

**Д о п о л н и т е л ь н о е   з а д а н и е:** определить напряжение и ток в начале линии при коротком замыкании на конце, где ток  $I = 4$  А.

**Задача 26.4.** Определить, как отличаются фазовые скорости распространения электромагнитной волны в воздушной и кабельной линиях.

## 26.3. НАГРУЗОЧНЫЕ РЕЖИМЫ ДЛИННОЙ ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ

Кроме крайних режимов холостого хода и короткого замыкания для практики еще более интересными являются нагрузочные режимы, когда в конце линии включается приемник электромагнитной энергии. Из различных нагрузочных режимов рассмотрим режимы с согласованной и несогласованной активными нагрузками.

### Режим с согласованной нагрузкой

Режим в линии называется **с о г л а с о в а н н ы м**, если сопротивление нагрузки в конце линии равно ее волновому сопротивлению:  $Z_2 = Z_c$ . В этом случае  $Z_2 = \dot{I}_2 Z_c$ , а уравнения (26.13) записывают так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x + j \dot{U}_2 \sin \beta x = \dot{U}_2 (\cos \beta x + j \sin \beta x); \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta x + j \dot{I}_2 \sin \beta x = \dot{I}_2 (\cos \beta x + j \sin \beta x). \end{aligned} \right\} \quad (26.21)$$

Учитывая, что

$$\cos \beta x + j \sin \beta x = e^{j\beta x},$$

уравнения (26.21) можно записать в виде

$$\dot{U} = \dot{U}_2 e^{j\beta x}; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 e^{j\beta x}. \quad (26.22)$$

Предположим, что синусоидальное напряжение в конце линии имеет начальную фазу  $\psi = 0$ , тогда  $\dot{U} = \dot{U}_{2m} e^{j\omega t}$ .

Если нагрузка линии активная ( $R_2 = Z_c$ ), ток и напряжение совпадают по фазе:  $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2m} e^{j\omega t}$ .

Уравнения напряжения и тока в линии:

$$\dot{U} = U_{2m} e^{j(\omega t + \beta x)}; \quad \dot{I} = I_{2m} e^{j(\omega t + \beta x)}. \quad (26.23)$$

В этом случае мгновенные значения напряжения и тока в любом пункте линии на расстоянии  $x$  от ее концов определяются уравнениями

$$u = U_{2m} \sin(\omega t + \beta x); \quad i = I_{2m} \sin(\omega t + \beta x). \quad (26.24)$$

Это уравнения бегущих волн напряжения и тока, распространяющихся от начала к концу линии (прямые волны) с фазовой скоростью  $v = \omega/\beta$ .

При согласованной нагрузке отраженных волн в линии нет, следовательно, энергия, которую несет падающая электромагнитная волна, полностью поглощается в нагрузке.

### Режим с несогласованной нагрузкой

Нагрузка линии называется несогласованной, если нагрузочное сопротивление в конце линии  $\underline{Z}_2$  отличается от волнового сопротивления  $\underline{Z}_c$ , т.е.  $\underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_c$ .

Рассмотрим случай, когда линия замкнута на активное сопротивление  $R_2 > Z_c$ . Напряжение в конце линии определяется произведением  $U_2 = I_2 R_2$ . Уравнения (26.13) для этого случая

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_2}{R_2} Z_c \sin \beta x; \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}_2}{R_2} \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (26.25)$$

Отношение  $Z_c/R_2 = k$  называется коэффициентом бегущей волны.

С введением этого коэффициента уравнения (26.25) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta x + jk \dot{U}_2 \sin \beta x; \\ \dot{I} &= k \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta x. \end{aligned}$$

Вместо  $\cos \beta x$  в уравнении напряжения и  $\sin \beta x$  в уравнении тока подставим тождественные им выражения:

$$\begin{aligned} \cos \beta x &= k \cos \beta x + (1 - k) \cos \beta x; \\ \sin \beta x &= k \sin \beta x + (1 - k) \sin \beta x. \end{aligned}$$

После подстановки получим



$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= k\dot{U}_2(\cos \beta x + j \sin \beta x) + (1 - k)\dot{U}_2 \cos \beta x; \\ \dot{I} &= k\frac{\dot{U}_2}{Z_c}(\cos \beta x + j \sin \beta x) + (1 - k)\frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (26.26)$$

Первые слагаемые в этих уравнениях аналогичны уравнениям (26.21). Анализ их ранее показал, что они выражают бегущие волны напряжения и тока. Вторые слагаемые аналогичны уравнениям (26.14), которые являются уравнениями стоячих волн. Опуская промежуточные выводы, выполненные ранее для бегущих и стоячих волн, напишем уравнения для мгновенных значений напряжения и тока при несогласованной нагрузке:

$$\left. \begin{aligned} u &= kU_{2m} \sin(\omega t + \beta x) + (1 - k)U_{2m} \cos \beta x \sin \omega t; \\ i &= k\frac{U_{2m}}{Z_c} \sin(\omega t + \beta x) + (1 - k)\frac{U_{2m}}{Z_c} \sin \beta x \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (26.27)$$

Таким образом, режим в линии без потерь при несогласованной нагрузке можно рассматривать как наложение бегущих и стоячих волн напряжения и тока.

Наличие бегущих волн в направлении от начала к концу линии указывает на потребление энергии в нагрузке. Однако потребляется лишь часть энергии электромагнитной волны, другая часть отражается от конца линии.

Режимы холостого хода и с согласованной нагрузкой линии без потерь являются частными случаями, соответствующими значениям коэффициента бегущей волны  $k = 0$  (холостой ход) и  $k = 1$  (согласованная нагрузка).

## Коэффициенты отражения и преломления

Представление электромагнитного процесса в линии как наложение прямых (падающих) и обратных (отраженных) волн напряжения и тока возможно не только в рассмотренных частных случаях. Оно соответствует общим уравнениям напряжения и тока в линии (26.12), в правой части которых записана сумма (разность) двух составляющих.

При анализе электромагнитных процессов в длинных линиях вводится понятие о коэффициенте отражения  $\rho$ , который равен отношению комплекса напряжения отраженной волны к комплексу напряжения падающей волны или аналогичному отношению комплексов токов:

$$\rho = \dot{U}_{\text{отр}} / \dot{U}_{\text{пад}} = \dot{I}_{\text{отр}} / \dot{I}_{\text{пад}}.$$

Выразим напряжение и ток в конце линии их падающими и отраженными составляющими в соответствии с уравнениями (26.11):

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{2\text{пад}} + \dot{U}_{2\text{отр}} = \dot{I}_2 R_2; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{Z_c} - \frac{\dot{U}_{2\text{отр}}}{Z_c}.$$

При совместном решении этих уравнений найдем коэффициент отражения:

$$\rho = \frac{\dot{I}_{2\text{отр}}}{\dot{I}_{2\text{пад}}} = \frac{\dot{U}_{2\text{отр}}}{\dot{U}_{2\text{пад}}} = \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c}. \quad (26.28)$$

Подставим найденное выражение  $\rho$  в уравнения напряжения  $U_2$  и тока  $I_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{U}_{2\text{пад}} + \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c} \dot{U}_{2\text{пад}} = \frac{2\dot{U}_{2\text{пад}}}{1 + \frac{Z_c}{R_2}}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{Z_c} - \rho \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{Z_c} = \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{Z_c} \left( 1 - \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c} \right) = \frac{2\dot{I}_{2\text{пад}}}{1 + \frac{R_2}{Z_c}}. \end{aligned} \right\} \quad (26.29)$$

Множители

$$m_u = \frac{2}{1 + \frac{Z_c}{R_2}} = \frac{2R_2}{R_2 + Z_c}; \quad m_i = \frac{2}{1 + \frac{R_2}{Z_c}} = \frac{2Z_c}{Z_c + R_2}. \quad (26.30)$$

называются коэффициентами преломления волн напряжения (тока).

Согласно выражениям (26.29), коэффициент преломления равен отношению комплексов напряжения (тока) в рассматриваемом пункте линии к комплексу напряжения (тока) падающей волны

$$m = \dot{U}_2 / \dot{U}_{2\text{пад}} = \dot{I}_2 / \dot{I}_{2\text{пад}}.$$

Анализ этих формул показывает:

1) при холостом ходе линии ( $R_2 = \infty$ ) коэффициент отражения  $\rho = 1$ , а коэффициенты преломления в конце линии  $m_u = 2$ ,  $m_i = 0$ ; напряжение в конце линии равно удвоенной величине напряжения падающей волны, а ток равен нулю:  $\dot{U}_2 = m_u \dot{U}_{2\text{пад}} = 2\dot{U}_{\text{пад}}$ ;  $\dot{I}_2 = m_i \times \dot{I}_{2\text{пад}} = 0$ ;

2) при коротком замыкании линии ( $R_2 = 0$ ) коэффициент отражения  $\rho = -1$ ; коэффициент преломления  $m_u = 0$ ;  $m_i = 2$ ; напряжение в конце линии равно нулю, а ток равен удвоенной величине тока падающей волны:  $\dot{U}_2 = 0$ ;  $\dot{I}_2 = 2\dot{I}_{2\text{пад}}$ ;

3) при согласованной нагрузке ( $R_2 = Z_c$ ) коэффициент отражения  $\rho = 0$ , коэффициент преломления  $m_u = 0$ ;  $m_i = 1$ ; напряжение и ток в конце линии равны своим падающим составляющим:  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2\text{пад}}$ ;  $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2\text{пад}}$ ; несогласованной активной нагрузке ( $R_2 > Z_c$ ) коэффициент отражения

$$\rho = \frac{1 - k}{1 + k}; \quad 0 < \rho < 1,$$

где  $k$  — коэффициент бегущей волны;

$$\dot{U}_2 = \frac{2\dot{U}_{2\text{пад}}}{1 + k} \quad \text{или} \quad \dot{U}_{\text{пад}} < \dot{U}_2 < 2\dot{U}_{\text{пад}};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{2\dot{I}_{2\text{пад}}}{\frac{1 + k}{k}} \quad \text{или} \quad \dot{I}_{2\text{пад}} > \dot{I}_2 > 0.$$

### Задачи

**Задача 26.5.** Найти все величины по условию задачи 26.1, если считать линию без потерь ( $R_0 = 0$ ,  $G_0 = 0$ ).

**Задача 26.6.** Двухпроводная линия без потерь имеет следующие параметры:  $L_0 = 1,96$  мГн/км,  $C_0 = 5,7 \cdot 10^{-3}$  мкФ/км. Линия нагружена на конце активным сопротивлением, равным волновому  $R_2 = Z_c$ . Ток в нагрузке  $I_2 = 17,6$  А. Определить напряжение и ток в начале линии.

## 26.4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ФРОНТОМ ПО ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ

Как было показано в предыдущих параграфах, установившийся режим в длинной линии при синусоидальном изменении напряжения и тока удобно представить наложением прямых и обратных электромагнитных волн.

Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами тоже рассматриваются как движение прямых и отраженных волн, возникающих после включения или отключения какого-либо участка, при передаче телемеханических или телефонно-телеграфных сигналов по линиям связи и т. п.

Переходные процессы могут быть также следствием изменения внешних магнитных и электрических полей, связанных с грозowymi явлениями.

## Электромагнитная волна с прямоугольным фронтом

В цепи с сосредоточенными параметрами переходный процесс начинается и протекает одновременно во всех ее элементах. Особенностью переходного процесса в длинной линии является то, что появившееся в некоторой точке возмущение распространяется по линии с определенной скоростью, поэтому переходный процесс в данном пункте линии начинается тем позднее, чем он дальше от места возмущения.

При переходных процессах в цепях с распределенными параметрами (линии, обмотки электрических машин и трансформаторов) могут возникать электромагнитные волны различной формы.

Качественную сторону явления распространения электромагнитной волны рассмотрим на примере волны с прямоугольным фронтом (рис. 26.7) в линии без потерь.

Для такой волны характерно то, что во всех пунктах линии, расположенных до фронта волны, напряжение и ток равны нулю, а в пунктах линии, расположенных за фронтом волны, напряжение и ток постоянны.

Распространение электромагнитной волны с прямоугольным фронтом означает, что напряжение и ток последовательно в каждом пункте линии изменяются скачком. Как было показано ранее, такое изменение напряжения и тока в цепях, обладающих емкостью и индуктивностью, невозможно, так как требует источника бесконечно большой мощности. Таких источников не существует, поэтому волну с прямоугольным фронтом нужно рассматривать как некоторую идеализацию реального процесса.

Электрические и магнитные явления в линии — это две стороны единого электромагнитного процесса. Однако эти явления удобно рассматривать отдельно, т.е. выделять из электромагнитной волны волну напряжения и волну тока.

В 26.1 были записаны в комплексной форме уравнения (26.1) для синусоидального изменения

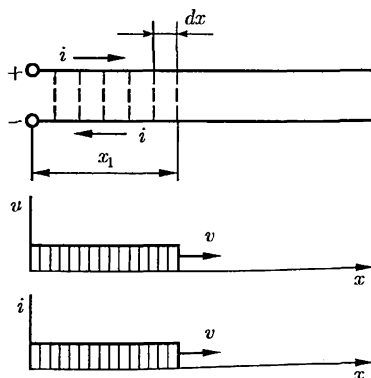


Рис. 26.7

напряжения и тока. Те же уравнения для мгновенных значений напряжения и тока в однородной линии без потерь имеют вид

$$-\frac{du}{dx} = L_0 \frac{di}{dt}; \quad -\frac{di}{dx} = C_0 \frac{du}{dt}. \quad (26.31)$$

Решением этих уравнений в общем виде являются функции

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x - vt) + f_2(x + vt) = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}, \\ i &= \frac{1}{Z_c} f_1(x - vt) - \frac{1}{Z_c} f_2(x + vt) = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}}, \end{aligned} \right\} \quad (26.32)$$

где  $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$  — скорость распространения электромагнитной вол-

ны вдоль линии; эта величина, называемая волновой скоростью, численно равна фазовой скорости [см. формулу (26.19)];  $Z_c$  — волновое сопротивление линии.

Уравнения (26.32) по своей структуре подобны уравнениям (26.16), поэтому любой электромагнитный переходный процесс в линии можно рассматривать как наложение прямых и обратных волн напряжения и тока. Физический смысл переходных процессов в линии удобно выяснить на простейших примерах.

### Подключение источника постоянного напряжения $U_0$ к бесконечно длинной линии

После включения источника вдоль линии будет распространяться волна с прямоугольным фронтом, заряжающая ее последовательно (от одного пункта к другому) до напряжения  $U_0$ . На поверхности проводов появляется заряд, величина которого на единице длины  $Q_0 = C_0 U_0$ .

Если за время  $dt$  волна переместилась на расстояние  $dx$ , линия получает дополнительный заряд  $dQ = C_0 U_0 dx$ .

Этот заряд как бы распространяется по проводам от источника вдоль линии до точки  $x$ , в которой находится в данный момент фронт волны; при этом образуется ток

$$i = \frac{dQ}{dt} = C_0 U_0 \frac{dx}{dt} = C_0 U_0 v = I_0.$$

Один провод заряжается положительно, а другой (обратный) — отрицательно, что соответствует противоположному направлению токов в них (см. рис. 26.7).

На отрезке линии длиной  $dx$ , около фронта волны, возникновение электрического поля сопровождается током смещения между

проводами. Таким образом, цепь оказывается замкнутой. При движении волны она удлиняется, но ток остается постоянным и равным  $I_0$ .

Контур, по которому замыкается ток, пронизывается магнитным потоком, направленным, согласно правилу буравчика, в плоскостях, перпендикулярных осям проводов.

Перемещение волны на  $dx$  сопровождается увеличением магнитного потока на величину

$$d\Phi = L_0 I_0 dx = L_0 I_0 v dt$$

и наведением в контуре ЭДС самоиндукции

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_0 I_0 \frac{dx}{dt} = -L_0 I_0 v.$$

ЭДС самоиндукции направлена против тока, т. е. у фронта волны она направлена навстречу напряжению  $U_0$  и равна ему по величине  $U_0 = L_0 I_0 v$ .

Отношение напряжения к току дает величину волнового сопротивления линии

$$\frac{U_0}{I_0} = L_0 v = L_0 \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_c.$$

Энергия, отдаваемая источником в линию за единицу времени,  $P = U_0 I_0$ .

На отрезке линии длиной, равной единице, запасается энергия  $\frac{C_0 U_0^2}{2}$  в электрическом,  $\frac{L_0 I_0^2}{2}$  — в магнитном полях.

Согласно закону сохранения энергии, мощность источника должна быть равна энергии, запасаемой в электромагнитном поле линии за 1 с:

$$U_0 I_0 = \left( \frac{C_0 U_0^2}{2} + \frac{L_0 I_0^2}{2} \right) v,$$

где  $v$  — скорость электромагнитной волны, равная расстоянию, которое пробегает волна за 1 с, создавая на своем пути электрическое и магнитное поля.

### **Включение источника постоянного напряжения на линию конечной длины**

Пользуясь выводами, полученными ранее, рассмотрим движение волн с учетом возможных отражений от конца линии.

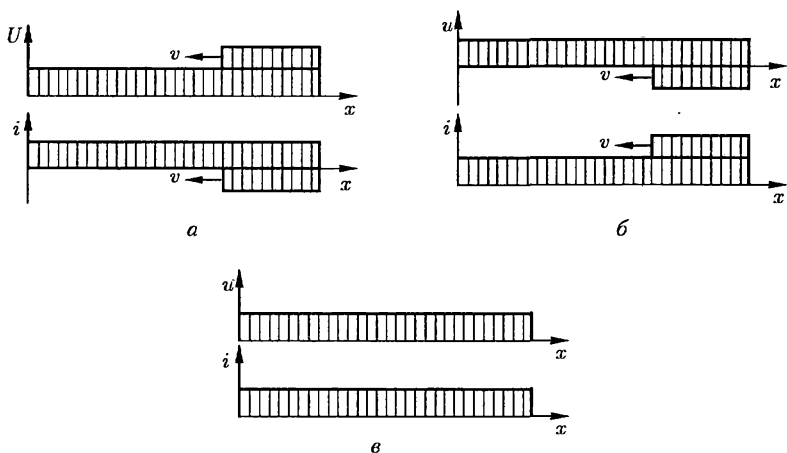


Рис. 26.8

Если линия разомкнута на конце, то коэффициенты отражения  $\rho$  и преломления  $m$ , согласно формулам (26.28) и (26.30), оказываются равными:  $\rho = 1$ ;  $m_u = 2$ ;  $m_i = 0$ . Следовательно,  $u_2 = 2U_{\text{пад}}$ ;  $i_2 = 0$ .

Отраженная волна напряжения накладывается на падающую, в результате чего напряжение на линии удваивается (рис. 26.8, а).

При этом энергия электромагнитной волны преобразуется в энергию электрического поля.

При коротком замыкании конца линии  $\rho = -1$ ;  $m_u = 0$ ;  $m_i = 2$ .

Отраженная волна напряжения компенсирует падающую волну ( $u_2 = 0$ ), а ток в линии удваивается (рис. 26.8, б). Этот процесс сопровождается переходом всей энергии волны в энергию магнитного поля.

При согласованной нагрузке ( $R_2 = Z_c$ )  $\rho = 0$ ;  $u_2 = U_{\text{пад}}$ ;  $i_2 = I_{\text{пад}}$ .

Отраженных волн нет, а энергия волны полностью поглощается нагрузкой (рис. 26.8, в).

## Задачи

**Задача 26.7.** Доказать, что величины энергии электрического и магнитного полей волны с прямоугольным фронтом равны между собой.

**Задача 26.8.** Начертить графики движения по линии волн с прямоугольным фронтом в следующих случаях: а) при холостом ходе линии; б) при коротком замыкании линии; в) при согласованной нагрузке линии.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отрасль науки и техники, определяемая термином «электротехника», связана с применением электрических и магнитных явлений для практических целей. Эта отрасль охватывает очень широкий круг вопросов и задач, из числа которых можно выделить теоретические и прикладные; четкую границу между ними провести непросто, однако в учебном процессе подготовки специалистов нередко можно встретить такие выражения: «теоретическая электротехника», «прикладная электротехника», «общая электротехника» и т. п.

Учебный курс «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) входит в учебные планы большой группы электроэнергетических, электромашиностроительных, приборостроительных и радиотехнических специальностей учреждений среднего профессионального образования. При подготовке техников-электриков, электромехаников, радиотехников изучением курса ТОЭ создается теоретическая база для изучения последующих прикладных учебных курсов, которые вместе составляют содержание специальности.

Закончив изучение курса ТОЭ, можно приступить к изучению прикладных курсов по специальности. Но, как показывает опыт, учебник ТОЭ еще долго остается настольной книгой учащихся, а затем и специалистов. Изучение электротехники, как и многих других технических наук, дается нелегко. Это не должно останавливать самостоятельную работу с учебником, так как не зря говорят: «дорогу осилит идущий».



## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

### Глава 1

1.2.  $2 \cdot 10^{-7}$  Кл. 1.3. 0,25 Н. 1.4. 0,34 Н (при вершине  $90^\circ$ ). 1.6. а) 100 В, 0; 6) 75 В, -25 В; в) 50 В, -50 В. 1.7. При  $t_1 = 0$ ,  $U_{1,2} = 86,5$  В,  $U_{2,3} = -173$  В,  $U_{3,1} = 86,5$  В.

### Глава 2

2.1.  $J_1 < J_2$ ;  $Q_1 = Q_2$ . 2.4. 10 А. 2.5. 40 А, 14,8 А. 2.7.  $70^\circ\text{C}$ . 2.8. 4,09 Ом; 4,45 Ом; 5,17 Ом.

### Глава 3

3.6. 1 кВт, 4 руб. 3.7. 5 А/мм<sup>2</sup>. 3.9. 2,5 А; 48 Ом. 3.10. 10 кВт; 45,5 А. 3.11. 27 В; 0,648 кВт·ч. 3.13. 17,25 В; 0,96; 4,4 руб. 3.14. 48 В; 92 Вт; 0,958. 3.15. 111,8 В. 3.16. 7,25 Вт.

### Глава 4

4.4.  $I_1 = 1,2$  А. 4.5. 9,5 Вт. 4.6.  $U_2 = 124,2$  В;  $P_2 = 6210$  Вт. 4.9.  $P_2 = 1300$  Вт;  $\eta = 0,963$ . 4.11.  $P_2 = 1330$  Вт;  $\eta = 0,843$ . 4.13.  $I_1 = 16,3$  А;  $I_2 = 0,3$  А;  $I_3 = 10,25$  А;  $I = 5,75$  А. 4.14.  $I_1 = 10$  А;  $I_2 = 4$  А;  $\eta = 0,97$ . 4.15.  $E = 80$  В;  $P_1 = 400$  Вт. 4.16.  $U_{BC} = 12$  В;  $I_{BC} = 2/3$  А.

### Глава 5

5.1.  $I_{1,4} = 5$  А;  $I_{2,3} = 4$  А;  $I_1 = 1$  А; 5.2. Токи в источниках  $I_1 = 3,64$  А;  $I_2 = 5,64$  А; 5.6. При  $R_{bc} = 18$  Ом,  $I_{bc} = 2/3$  А;  $P = 8$  Вт.

### Глава 6

6.9.  $I_1 = 53,5$  мА;  $I_2 = 32,5$  мА;  $I_3 = 21$  мА.

### Глава 7

7.1.  $E_4 = 115$  В/м;  $E_6 = 268,5$  В/м;  $E_7 = 230$  В/м;  $E_8 = 940$  В/м. 7.2.  $10^{-10}$  Кл. 7.4. 62,5 В/м. 7.5. а)  $122,5 \cdot 10^{-11}$  Н; 6)  $49 \cdot 10^{-11}$  Н. 7.6. 32 В/м. 7.7. а)  $4/9 \cdot 10^{-10}$  Кл; 6)  $2/9 \cdot 10^{-10}$  Кл. 7.10.  $C_v = 8 \cdot 10^{-10}$  Ф;  $E_v = 45,2$  кВ/см;  $C_n = 16 \cdot 10^{-10}$  Ф;  $E_n = E$ . 7.11.  $C = 19,25$  пФ; 412 кВ/см; 2,74 кВ/см. 7.14. а)  $13,8 \cdot 10^{-6}$  Кл;  $49,6 \cdot 10^4$  В/м;  $248 \cdot 10^4$  В/м; 6)  $9,92 \times 10^4$  В/м;  $49,6 \cdot 10^4$  В/м. 7.15. Между обкладками стекло:  $6,9 \cdot 10^{-7}$  Кл;  $49,6 \cdot 10^4$  В/м;  $248 \cdot 10^4$  В/м. 7.17.  $C = 25$  пФ;  $U_1 = 6$  кВ;  $U_2 = 14$  кВ;  $K = 1,07$ . 7.20.  $Q_1 = 12 \cdot 10^{-3}$  Кл,  $U_2 = 600$  В. 7.21.  $C_1 = 30$  мкФ;  $U_1 = 400$  В.

### Глава 8

8.5.  $B_A = 2 \cdot 10^{-3}$  Тл;  $B_B = 10^{-3}$  Тл;  $B_C = 2/3 \cdot 10^{-3}$  Тл. 8.6.  $4,84 \times 10^{-7} \frac{1}{r}$  Тл. 8.7. а)  $6,28 \cdot 10^{-2}$  Тл; 2,04%. 8.8.  $1,1 \cdot 10^{-2}$  Тл;  $0,5 \cdot 10^{-2}$  Тл. 8.9. При  $r = 4$  мм,  $B = 6,4 \cdot 10^{-3}$  Тл; при  $r = 20$  мм,  $B = 2 \cdot 10^{-3}$  Тл. 8.12.  $18 \cdot 10^{-6}$  Вб. 8.13. а) 0,768 Дж; 6) 2,304 Дж. 8.14.  $\Psi_1 = 3,6$  Вб;  $\Psi_2 = 0,72$  Вб. 8.15.  $N = 1000$ ;  $L = 10^{-3}$  Гн. 8.16.  $M = 0,27$  Гн. 8.17. Дополнительные вопросы: 1) 3,2%. 2)  $15,5 \cdot 10^{-4}$  Вб. 8.18.  $\Phi = 10^{-5}$  Вб.

**8.19.**  $8,27 \cdot 10^{-4}$  Гн. **8.20.**  $L_1 = 0,524$  мГн;  $M = 0,146$  мГн. **8.23.**  $L_0 = 10$  мГн;  $\Phi_c = 0,039$  Вб. **8.25.**  $\approx 1^\circ 40'$ ;  $2700$  А/см;  $0,34$  Тл.

#### Глава 9

**9.4.**  $29,3 \cdot 10^{-4}$  Вб;  $2,06 \cdot 10^5$  1/Гн. **9.6.** 181 вит.

#### Глава 10

**10.3.** а) 4 А; б) 6 А; в) 5 А; г) 5 А. **10.4.** 4,15 В; 4,8 В. **10.5.** 10 А; 180 Вт. **10.6.** 31,5 м/с при  $\alpha = 45^\circ$ . **10.7.** 2 Тл. **10.10.** 200 Вт; 190 Вт · ч; 23 В. **10.12.** 7730 витков. **10.13.** 66,6 А/с; 1,5 Вб. **10.14.** 2 Ом.

#### Глава 11

**11.2.**  $E$  не изменится,  $W_3$  увеличится в 1,2 раза. **11.3.**  $360 \text{ см}^2$ ; 2 см. **11.4.**  $E = 28$  кВ/см;  $K = 1,07$ . При  $U = \text{const}$  после внесения картона емкость увеличится в 1,18 раза;  $K = 0,91$  — конденсатор будет пробит. **11.5.** 30 см. **11.6.**  $96 \cdot 10^{-4}$  Дж;  $4 \cdot 10^5$  В/м. **11.7.**  $E$  и  $W_3$  уменьшатся в 1,2 раза. **11.8.** Дополнительные вопросы: 1)  $45,9 \cdot 10^{-3}$  Дж;  $41,6 \cdot 10^{-3}$  Дж; 2)  $108 \cdot 10^{-3}$  Дж;  $13,6 \cdot 10^{-3}$  Дж. **11.9.** Дополнительные вопросы: 1)  $19 \cdot 10^{-3}$  Дж;  $11 \cdot 10^{-3}$  Дж; 2)  $12 \cdot 10^{-3}$  Дж;  $3 \cdot 10^{-3}$  Дж. **11.10.**  $3,3 \cdot 10^{-5}$  Дж. **11.11.**  $F_B = F_C = 124,5$  Н. **11.12.**  $F_A = 120$  Н;  $F_B = 89$  Н;  $F_C = 31,3$  Н. **11.13.** 2116,8 Н.

#### Глава 12

**12.2.**  $e = 14\,000 \sin(314t + 30^\circ)$ . **12.3.** 1500 об/мин. **12.5.**  $T = 0,02$  с;  $i = 8,65$  А при  $\omega t = 30^\circ$ . **12.11.**  $E_m = 1878$  В,  $T = 2/3 \cdot 10^{-2}$  с;  $\varphi = 0$ . **12.12.**  $\approx 6300$  В; 315 В.

#### Глава 13

**13.1.** 0,5 кВт. **13.2.** 7,5 А. **13.3.** 448 Вт; 1344 Вт. **13.5.** 800 вар. **13.6.** 690 Вт. **13.8.** 1800 вар. **13.9.** 20 мкФ; 275 квар; 870 Дж. **13.11.** При  $f = 25$  Гц;  $P = 2320$  Вт;  $Q = 1545$  вар;  $S = 2780$  В · А. **13.12.**  $G = 0,04$  См;  $B_L = 0,03$  См. **13.13.**  $R = 10$  Ом;  $X_C = 28$  Ом. **13.14.** 224 В; 10 000 Ом.

#### Глава 14

**14.2.** 10 А; 583 В; 500 В; 3кВт; 4 квар. **14.4.**  $I = 10$  А. **14.6.**  $I = 5$  А;  $I_k = 9,9$  А;  $I_c = 8,6$  А.

#### Глава 15

**15.1.**  $Z = 21,15e^{j45^\circ}$ . **15.2.**  $Z = 10,6e^{j49^\circ}$ . **15.4.**  $I = 10$  А.

#### Глава 16

**16.2.**  $\underline{Z}_C = 6 + j20$ ;  $\underline{Z}_B = 6 + j12$ . **16.4.**  $I = 3,06$  А. **16.5.**  $U = 120$  В. **16.6.**  $U_1 = 100$  В.

#### Глава 17

**17.1.**  $C = 15,4$  пФ. **17.2.**  $(0,55 \dots 1,6) \cdot 10^6$  Гц. **17.3.**  $L = 20,3$  мГн; 104 В; 208 В. **17.4.**  $U = 60$  В. **17.5.**  $C = 96$  мкФ;  $I = 3,85$  А. **17.6.**  $\omega_p = 3 \cdot 10^4$  рад/с;  $Q = 1,25$ . **17.7.** Дополнительные вопросы: 1)  $\cos \varphi = 0,8$ ; 2) 183 кВ · А; 105 кВт; 3) 120 кВ · А,  $\cos \varphi = 0,75$ .

#### Глава 18

**18.2.**  $A = 1,075e^{j21^\circ 50'}$ . **18.4.**  $A = 2 + j6$ .

### Глава 20

**20.3.** в) 127 В, 127 В, 220 В; г) 127 В, 220 В, 127 В; д) 220 В, 220 В.  
**20.5.** а) 0; б) 0. **20.6.** а) 0; б) 440 В; в) 440 В; г) 0. **20.7.** 0. **20.8.** 0. **20.11.** 6,1 А; 3237 Вт, 2010 вар; 3810 В · А. **20.13.** При соединении треугольником  $P = 20$  кВт,  $P_m = 17,6$  кВт; при соединении звездой  $P_m = 5,86$  кВт. **20.14.** В резисторах, соединенных звездой, 7,5 А, 90 В; в резисторах, соединенных треугольником, 13 А, 156 В.

### Глава 21

**21.2.**  $I_A = 24,8$  А,  $I_B = 24,8$  А,  $I_C = 43,5$  А,  $U'_A = 224$  В,  $U'_B = 223$  В,  $U'_C = 212$  В. **21.11.** 84 В.

### Глава 22

**22.1.** 1000 об/мин. **22.2.** 2,66%. **22.3.** 720 об/мин.

### Глава 23

**23.6.**  $I = 7,1$  А;  $I_0 = 6,37$  А. **23.8.**  $I = 2,84$  А,  $P = 146,6$  Вт.

### Глава 24

**24.10.** 16 Вт; 36,8 Вт.

### Глава 25

**25.1.** а)  $U_R = 0$ ;  $U_L = 100$  В. **25.2.** б)  $I = 20$  А;  $I = 0$ . **25.3.** а)  $U_R = 60$  В;  $U_C = 0$ . **25.4.** б)  $I = 0$ ;  $I = 0$ . **25.5.**  $i_0 = 0$ ;  $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = 5 \cdot 10^3$  А/с;  $\tau = 4 \cdot 10^{-3}$  с;  $W_m = 4,8$  Дж. **25.7.**  $i_1 = 12,64$  А;  $i_2 = 17,28$  А. **25.9.** 42 В. **25.10.** а)  $I = 15$  А; б)  $U_{R1} = 90$  В; в)  $U_{R2} = 24$  В; г)  $U_L = 36$  В. **25.11.** 4 Ом. **25.16.**  $\pi/4$ . **25.19.** 13,65 А.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

### Изоляционные материалы

| Материал                         | Относительная<br>диэлектрическая<br>проницаемость | Пробивная<br>напряженность,<br>$10^6$ В/м | Удельное<br>электрическое<br>сопротивление при<br>20 °С, Ом·м |
|----------------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Бумага:                          |                                                   |                                           |                                                               |
| кабельная сухая                  | 2,3–3,5                                           | 6–9                                       | $10^{11}$ – $10^{12}$                                         |
| пропитанная маслом               | 3,5–3,7                                           | 10–25                                     | $10^{13}$                                                     |
| парафинированная                 | 4,3                                               | 10–25                                     | —                                                             |
| Вода дистиллирован-<br>ная       | 80                                                | —                                         | —                                                             |
| Воздух                           | 1,0                                               | —                                         | —                                                             |
| Ткань лакированная               | 3,5–5,0                                           | 32–45                                     | $10^{10}$ – $10^{11}$                                         |
| Масло минеральное                | 2,2                                               | 7–12                                      | —                                                             |
| Миканит                          | 4,6–6,0                                           | 15–20                                     | $10^{13}$                                                     |
| Мрамор                           | 8–10                                              | 3,5–5,5                                   | $10^7$ – $10^8$                                               |
| Парафин                          | 2–2,2                                             | 15–30                                     | $10^{13}$ – $10^8$                                            |
| Электроизоляцион-<br>ный картон: |                                                   |                                           |                                                               |
| сухой                            | 2,5–4                                             | 8–10                                      | $10^7$ – $10^{11}$                                            |
| пропитанный маслом               | 4–5                                               | 12–27                                     | $10^{10}$ – $10^{11}$                                         |
| Резина                           | 3–6                                               | 15–20                                     | —                                                             |
| Слюда:                           |                                                   |                                           |                                                               |
| мусковит                         | 6–7,5                                             | 120–200                                   | $10^{12}$ – $10^{13}$                                         |
| флогопит                         | 4–6                                               | 80–150                                    | $10^{10}$ – $10^{12}$                                         |
| Стекло                           | 5,5–10                                            | 10–40                                     | $10^9$ – $10^{13}$                                            |

## Проводниковые материалы

| Материал   | Плотность,<br>$10^3 \text{ кг/м}^3$ | Удельная<br>проводимость,<br>$10^6 \text{ См/м}$ | Удельное<br>сопротивление,<br>$10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ | Температурный<br>коэффициент<br>сопротивления,<br>$^{\circ}\text{C}^{-1}$ |
|------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Алюминий   | 2,7                                 | 34                                               | 0,029                                                           | 0,004                                                                     |
| Константан | 8,8                                 | 2                                                | 0,40—0,51                                                       | 0,00005                                                                   |
| Медь       | 8,9                                 | 57                                               | 0,0175                                                          | 0,004                                                                     |
| Манганин   | 8,14                                | 2,4                                              | 0,42                                                            | 0,000015                                                                  |
| Нихром     | 8,2                                 | 0,9                                              | 1,1                                                             | 0,0003                                                                    |
| Сталь      | 7,85                                | 10—5                                             | 0,1—0,2                                                         | 0,005                                                                     |
| Фехраль    | 7,6                                 | 0,83                                             | 1,2                                                             | 0,0002                                                                    |

## Допустимые плотности токов для проводов и некоторых видов намоток

| Вид намотки или условия<br>размещения провода                      | Допустимая плотность тока,<br>$\text{А/мм}^2$ |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| Одиночный провод в закрытом помещении<br>сечением, $\text{мм}^2$ : |                                               |
| 5                                                                  | 10                                            |
| 10                                                                 | 7                                             |
| 50                                                                 | 4                                             |
| 100                                                                | 3                                             |
| Катушка с однорядной намоткой                                      | 3—5                                           |
| Катушка с многорядной намоткой при<br>мощностях:                   |                                               |
| малых (до 10 Вт)                                                   | 2—3                                           |
| средних (до 1 кВт)                                                 | 1,8—2,5                                       |
| больших                                                            | 1,2—1,8                                       |

## Характеристики намагничивания сталей

| В, Тл | Марка стали            |               |                |                | В, Тл | Марка стали            |               |                |                |
|-------|------------------------|---------------|----------------|----------------|-------|------------------------|---------------|----------------|----------------|
|       | 1211,<br>1212,<br>1311 | 1511,<br>1512 | литая<br>сталь | пермен-<br>дюр |       | 1211,<br>1212,<br>1311 | 1511,<br>1512 | литая<br>сталь | пермен-<br>дюр |
|       | H, А/м                 |               |                |                |       | H, А/м                 |               |                |                |
| 0,10  | —                      | 40            | 80             | 57             | 1,0   | 502                    | 300           | 920            | 97             |
| 0,20  | —                      | 50            | 160            | 70             | 1,05  | 570                    | 340           | 1004           | 100            |
| 0,30  | —                      | 60            | 240            | 73             | 1,10  | 647                    | 395           | 1090           | 105            |
| 0,40  | 140                    | 70            | 320            | 76             | 1,15  | 739                    | 460           | 1187           | 110            |
| 0,45  | 152                    | 75            | 360            | 79             | 1,20  | 840                    | 540           | 1290           | 115            |
| 0,50  | 171                    | 85            | 400            | 82             | 1,25  | 976                    | 640           | 1430           | 120            |
| 0,55  | 191                    | 94            | 443            | —              | 1,30  | 1140                   | 770           | 1590           | 125            |
| 0,60  | 211                    | 110           | 448            | 85             | 1,35  | 1340                   | 970           | 1810           | 132            |
| 0,65  | 236                    | 127           | 535            | —              | 1,40  | 1580                   | 1300          | 2090           | 140            |
| 0,70  | 261                    | 145           | 584            | 88             | 1,45  | 1950                   | 1830          | 2440           | 150            |
| 0,75  | 287                    | 165           | 632            | —              | 1,50  | 2500                   | 2750          | 2890           | 162            |
| 0,80  | 318                    | 185           | 682            | 91             | 1,55  | 3280                   | 3850          | 3430           | 180            |
| 0,85  | 362                    | 210           | 745            | —              | 1,60  | 4370                   | 5150          | 4100           | 200            |
| 0,90  | 397                    | 235           | 798            | 94             | 1,65  | 5880                   | 6950          | 4870           | 225            |
| 0,95  | 447                    | 270           | 850            | —              | 1,70  | 7780                   | 8900          | 5750           | 260            |

## Комплексы сопротивлений

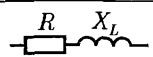
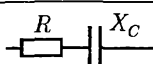
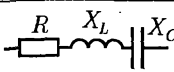
| Схема                                                                              | Комплекс сопротивлений                             | Схема                                                                               | Комплекс сопротивлений                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
|  | $\underline{Z} = r + jx_L = Ze^{j\varphi}$         |  | $\underline{Z} = R = Ze^{j0^\circ}$       |
|  | $\underline{Z} = r + jx_C = Ze^{j\varphi}$         |  | $\underline{Z} = jx_L = Ze^{j90^\circ}$   |
|  | $\underline{Z} = r + j(x_L - x_C) = Ze^{j\varphi}$ |  | $\underline{Z} = -jx_C = Ze^{-j90^\circ}$ |

Таблица тригонометрических функций

| Угол, град | sin    | tg     | ctg    | cos    | Угол, град |
|------------|--------|--------|--------|--------|------------|
| 1          | 0,0175 | 0,0175 | 57,290 | 0,9998 | 89         |
| 2          | 0,0349 | 0,0346 | 28,636 | 0,9994 | 88         |
| 3          | 0,0523 | 0,0524 | 19,081 | 0,9986 | 87         |
| 4          | 0,0698 | 0,0699 | 14,301 | 0,9976 | 86         |
| 5          | 0,0872 | 0,0875 | 11,430 | 0,9962 | 85         |
| 6          | 0,1045 | 0,1051 | 9,5144 | 0,9945 | 84         |
| 7          | 0,1219 | 0,1228 | 8,1443 | 0,9925 | 83         |
| 8          | 0,1392 | 0,1405 | 7,1154 | 0,9903 | 82         |
| 9          | 0,1564 | 0,1584 | 6,3138 | 0,9877 | 81         |
| 10         | 0,1736 | 0,1763 | 5,6713 | 0,9848 | 80         |
| 11         | 0,1908 | 0,1944 | 5,1446 | 0,9816 | 79         |
| 12         | 0,2079 | 0,2126 | 4,7046 | 0,9781 | 78         |
| 13         | 0,2250 | 0,2309 | 4,3315 | 0,9744 | 77         |
| 14         | 0,2419 | 0,2493 | 4,0108 | 0,9703 | 76         |
| 15         | 0,2588 | 0,2679 | 3,7321 | 0,9659 | 75         |
| 16         | 0,2756 | 0,2867 | 3,4874 | 0,9613 | 74         |
| 17         | 0,2924 | 0,3057 | 3,2709 | 0,9563 | 73         |
| 18         | 0,3090 | 0,3249 | 3,0777 | 0,9511 | 72         |
| 19         | 0,3256 | 0,3443 | 2,9042 | 0,9455 | 71         |
| 20         | 0,3420 | 0,3640 | 2,7475 | 0,9397 | 70         |
| 21         | 0,3584 | 0,3839 | 2,6051 | 0,9336 | 69         |
| 22         | 0,3746 | 0,4040 | 2,4751 | 0,9272 | 68         |
| 23         | 0,3907 | 0,4245 | 2,3559 | 0,9205 | 67         |
| 24         | 0,4067 | 0,4452 | 2,2460 | 0,9135 | 66         |
| 25         | 0,4246 | 0,4663 | 2,1445 | 0,9063 | 65         |

| Угол, град | sin    | tg     | ctg    | cos    | Угол, град |
|------------|--------|--------|--------|--------|------------|
| 26         | 0,4384 | 0,4877 | 2,0503 | 0,8988 | 64         |
| 27         | 0,4540 | 0,5095 | 1,9626 | 0,8910 | 63         |
| 28         | 0,4695 | 0,5317 | 1,8807 | 0,8829 | 62         |
| 29         | 0,4848 | 0,5543 | 1,8040 | 0,8746 | 61         |
| 30         | 0,5000 | 0,5774 | 1,7320 | 0,8660 | 60         |
| 31         | 0,5150 | 0,6009 | 1,6643 | 0,8572 | 59         |
| 32         | 0,5299 | 0,6249 | 1,6003 | 0,8480 | 58         |
| 33         | 0,5446 | 0,6494 | 1,5395 | 0,8387 | 57         |
| 34         | 0,5592 | 0,7645 | 1,4826 | 0,8290 | 56         |
| 35         | 0,5736 | 0,7002 | 1,4281 | 0,8192 | 55         |
| 36         | 0,5878 | 0,7265 | 1,3764 | 0,8090 | 54         |
| 37         | 0,6018 | 0,7536 | 1,3270 | 0,7986 | 53         |
| 38         | 0,6157 | 0,7813 | 1,2799 | 0,7880 | 52         |
| 39         | 0,6293 | 0,8098 | 1,2349 | 0,7771 | 51         |
| 40         | 0,6428 | 0,8391 | 1,1918 | 0,7670 | 50         |
| 41         | 0,6561 | 0,8693 | 1,1504 | 0,7547 | 49         |
| 42         | 0,6691 | 0,9004 | 1,1006 | 0,7431 | 48         |
| 43         | 0,6820 | 0,9325 | 1,0724 | 0,7314 | 47         |
| 44         | 0,6947 | 0,9657 | 1,0355 | 0,7193 | 46         |
| 45         | 0,7071 | 0,0000 | 1,0000 | 0,7071 | 45         |
| Угол, град | cos    | ctg    | tg     | sin    | Угол, град |



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Попов В. С.** Теоретическая электротехника. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 544 с.
2. **Нейман Р. Л., Демирчян К. С.** Теоретические основы электротехники. — М.; Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд., 1981. — 416 с.
3. **Зевеке Г. В., Ионкин П. А.** и др. Основы теории цепей. — М.: Энергия, 1975. — 752 с.
4. **Зернов Н. В., Карпов В. Г.** Теория радиотехнических цепей. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.
5. **Бессонов Л. А.** Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 1978. — 750 с.
6. **Каплянский А. Е.** и др. Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 1972. — 448 с.
7. **Толстов Ю. Г., Теврюков А. А.** Теория электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1971. — 295 с.
8. **Яворский Б. М., Пинский А. А.** Основы физики. — М.: Наука, 1972. — Т. 2. — 730 с.
9. **Константинов В. И.** и др. Сборник задач по теоретической электротехнике. — М.: Энергия, 1971. — 240 с.
10. **Зайчик М. Ю.** Сборник задач и упражнений по теоретической электротехнике. — М.: Энергия, 1978. — 176 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие .....                                                                                       | 3   |
| Введение .....                                                                                          | 4   |
| Глава 1. Начальные сведения об электрическом поле .....                                                 | 10  |
| 1.1. Основные характеристики электрического поля .....                                                  | 10  |
| 1.2. Энергия, затраченная на перемещение зряженных частиц<br>в электрическом поле .....                 | 16  |
| Глава 2. Электрический ток .....                                                                        | 23  |
| 2.1. Электрический ток в проводниках .....                                                              | 23  |
| 2.2. Электрическое сопротивление. Закон Ома .....                                                       | 27  |
| 2.3. Электрический ток в вакууме .....                                                                  | 30  |
| 2.4. Электрический ток в газах .....                                                                    | 34  |
| 2.5. Электрический ток в полупроводниках .....                                                          | 38  |
| Глава 3. Электрическая цепь .....                                                                       | 44  |
| 3.1. Элементы и схемы электрических цепей .....                                                         | 44  |
| 3.2. Получение электрической энергии из других видов энергии .....                                      | 47  |
| 3.3. Преобразование электрической энергии в другие виды энергии ..                                      | 55  |
| 3.4. Режимы электрических цепей .....                                                                   | 58  |
| 3.5. Схемы замещения электрических цепей .....                                                          | 63  |
| Глава 4. Расчет электрических цепей постоянного тока .....                                              | 66  |
| 4.1. Законы Кирхгофа .....                                                                              | 66  |
| 4.2. Неразветвленная электрическая цепь .....                                                           | 69  |
| 4.3. Разветвленная электрическая Цепь с двумя узлами .....                                              | 74  |
| 4.4. Расчет электрических цепей методом эквивалентных<br>сопротивлений (метод «свертывания» цепи) ..... | 82  |
| 4.5. Метод преобразования треугольника и звезды сопротивлений .....                                     | 84  |
| Глава 5. Некоторые методы анализа сложных электрических цепей .....                                     | 88  |
| 5.1. Метод узловых и контурных уравнений .....                                                          | 88  |
| 5.2. Метод наложения токов .....                                                                        | 90  |
| 5.3. Метод эквивалентного генератора .....                                                              | 96  |
| 5.4. Метод контурных токов .....                                                                        | 100 |
| 5.5. Метод узловых напряжений .....                                                                     | 103 |
| Глава 6. Нелинейные электрические цепи постоянного тока .....                                           | 106 |
| 6.1. Эквивалентные схемы простейших нелинейных цепей .....                                              | 106 |
| 6.2. Графический расчет нелинейных электрических цепей .....                                            | 110 |
| 6.3. Примеры упрощения схем нелинейных цепей .....                                                      | 114 |
| Глава 7. Расчет электрических полей .....                                                               | 120 |
| 7.1. Применение закона Кулона для расчета электрического поля .....                                     | 120 |
| 7.2. Теорема Гаусса и ее применение .....                                                               | 124 |
| 7.3. Электрическое поле в однородном диэлектрике .....                                                  | 129 |
| 7.4. Вычисление электрической емкости .....                                                             | 135 |
| 7.5. Электрическая прочность диэлектрика .....                                                          | 139 |
| 7.6. Соединения конденсаторов .....                                                                     | 144 |
| Глава 8. Магнитное поле .....                                                                           | 149 |
| 8.1. Закон Ампера. Магнитная индукция .....                                                             | 149 |

|                                                                                                         |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.2. Примеры расчета магнитных полей<br>с использованием закона Био — Савара . . . . .                  | 155        |
| 8.3. Расчет симметричных магнитных полей . . . . .                                                      | 159        |
| 8.4. Магнитный поток и потокосцепление . . . . .                                                        | 163        |
| 8.5. Индуктивность собственная и взаимная . . . . .                                                     | 168        |
| 8.6. Вычисление индуктивностей . . . . .                                                                | 172        |
| 8.7. Магнитные свойства вещества . . . . .                                                              | 175        |
| 8.8. Закон полного тока и его применение . . . . .                                                      | 181        |
| 8.9. Свойства и применение ферромагнитных материалов . . . . .                                          | 184        |
| <b>Глава 9. Магнитные цепи . . . . .</b>                                                                | <b>190</b> |
| 9.1. Расчет неразветвленной однородной магнитной цепи . . . . .                                         | 190        |
| 9.2. Расчет неразветвленной неоднородной магнитной цепи . . . . .                                       | 195        |
| 9.3. Расчет разветвленной магнитной цепи . . . . .                                                      | 201        |
| 9.4. Постоянные магниты . . . . .                                                                       | 206        |
| <b>Глава 10. Электромагнитная индукция . . . . .</b>                                                    | <b>209</b> |
| 10.1. Закон электромагнитной индукции . . . . .                                                         | 209        |
| 10.2. Наведение ЭДС в проводнике, движущемся в магнитном поле . . . . .                                 | 214        |
| 10.3. Взаимное преобразование механической<br>и электрической энергии . . . . .                         | 219        |
| 10.4. ЭДС самоиндукции и взаимоиנדукции . . . . .                                                       | 224        |
| <b>Глава 11. Энергия электрического и магнитного полей . . . . .</b>                                    | <b>229</b> |
| 11.1. Энергия электрического поля . . . . .                                                             | 229        |
| 11.2. Механические силы в электрическом поле . . . . .                                                  | 232        |
| 11.3. Энергия магнитного поля . . . . .                                                                 | 235        |
| 11.4. Механические силы в магнитном поле . . . . .                                                      | 240        |
| <b>Глава 12. Синусоидальные ЭДС и ток . . . . .</b>                                                     | <b>246</b> |
| 12.1. Получение синусоидальной ЭДС . . . . .                                                            | 246        |
| 12.2. Уравнения и графики синусоидальных величин . . . . .                                              | 251        |
| 12.3. Векторные диаграммы . . . . .                                                                     | 255        |
| 12.4. Действующее и среднее значения переменного тока . . . . .                                         | 259        |
| <b>Глава 13. Элементы и параметры электрических цепей переменного тока . . . . .</b>                    | <b>265</b> |
| 13.1. Цепь с активным сопротивлением . . . . .                                                          | 265        |
| 13.2. Цепь с индуктивностью . . . . .                                                                   | 269        |
| 13.3. Цепь с емкостью . . . . .                                                                         | 274        |
| 13.4. Цепь с реальной катушкой индуктивности . . . . .                                                  | 278        |
| 13.5. Цепь с реальным конденсатором . . . . .                                                           | 286        |
| <b>Глава 14. Расчет электрических цепей переменного тока<br/>с помощью векторных диаграмм . . . . .</b> | <b>291</b> |
| 14.1. Последовательное соединение катушки и конденсатора . . . . .                                      | 291        |
| 14.2. Расчет неразветвленных цепей переменного тока . . . . .                                           | 296        |
| 14.3. Параллельное соединение катушки и конденсатора . . . . .                                          | 302        |
| 14.4. Расчет цепей с параллельным соединением ветвей . . . . .                                          | 307        |
| <b>Глава 15. Символический метод . . . . .</b>                                                          | <b>314</b> |
| 15.1. Выражение характеристик электрических цепей<br>комплексными числами . . . . .                     | 314        |
| 15.2. Основные уравнения электрических цепей<br>в комплексной форме . . . . .                           | 320        |
| <b>Глава 16. Электрические цепи с взаимной индуктивностью . . . . .</b>                                 | <b>325</b> |
| 16.1. Взаимоиндуктивное сопротивление . . . . .                                                         | 325        |
| 16.2. Расчет электрических цепей с взаимной индуктивностью . . . . .                                    | 329        |
| 16.3. Трансформатор без ферромагнитного сердечника . . . . .                                            | 333        |

|                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Глава 17. Резонанс в электрических цепях .....                                                                       | 336 |
| 17.1. Колебательный контур .....                                                                                     | 336 |
| 17.2. Резонанс напряжений .....                                                                                      | 341 |
| 17.3. Резонанс токов .....                                                                                           | 344 |
| 17.4. Компенсация реактивной мощности<br>в электрических сетях с помощью конденсаторов .....                         | 347 |
| Глава 18. Четырехполюсники при переменных токах и напряжениях .....                                                  | 355 |
| 18.1. Уравнения четырехполюсника .....                                                                               | 355 |
| 18.2. Режимы четырехполюсника .....                                                                                  | 359 |
| 18.3. Схемы замещения пассивного четырехполюсника .....                                                              | 362 |
| Глава 19. Круговые диаграммы .....                                                                                   | 365 |
| 19.1. Круговая диаграмма неразветвленной цепи с постоянным<br>реактивным и переменным активным сопротивлениями ..... | 365 |
| 19.2. Круговая диаграмма неразветвленной цепи с постоянным<br>активным и переменным реактивным сопротивлениями ..... | 370 |
| 19.3. Круговые диаграммы разветвленных цепей .....                                                                   | 375 |
| 19.4. Построение круговой диаграммы по результатам опытов<br>холостого хода и короткого замыкания .....              | 380 |
| Глава 20. Трехфазные симметричные цепи .....                                                                         | 383 |
| 20.1. Общие сведения о трехфазных системах .....                                                                     | 383 |
| 20.2. Соединение звездой при симметричной нагрузке .....                                                             | 386 |
| 20.3. Соединение треугольником при симметричной нагрузке .....                                                       | 390 |
| 20.4. Расчет симметричных трехфазных цепей .....                                                                     | 393 |
| Глава 21. Трехфазные несимметричные цепи .....                                                                       | 398 |
| 21.1. Расчет несимметричной трехфазной цепи при соединении<br>источника и приемника звездой .....                    | 398 |
| 21.2. Расчет несимметричной трехфазной цепи при соединении<br>треугольником .....                                    | 405 |
| 21.3. Симметричные составляющие несимметричной<br>трехфазной системы .....                                           | 410 |
| Глава 22. Вращающееся магнитное поле .....                                                                           | 419 |
| 22.1. Получение вращающегося магнитного поля .....                                                                   | 419 |
| 22.2. Пульсирующее магнитное поле .....                                                                              | 424 |
| 22.3. Уравнения вращающегося магнитного поля .....                                                                   | 430 |
| Глава 23. Электрические цепи с несинусоидальными<br>напряжениями и токами .....                                      | 436 |
| 23.1. Несинусоидальные напряжения, токи и их выражения .....                                                         | 436 |
| 23.2. Симметричные несинусоидальные функции .....                                                                    | 442 |
| 23.3. Действующее значение несинусоидального тока<br>и мощность цепи .....                                           | 447 |
| 23.4. Расчет электрических цепей с несинусоидальными ЭДС<br>и токами .....                                           | 450 |
| 23.5. Высшие гармоники в трехфазных цепях .....                                                                      | 456 |
| Глава 24. Нелинейные цепи переменного тока .....                                                                     | 463 |
| 24.1. Токи в цепи с вентилями .....                                                                                  | 463 |
| 24.2. ЭДС, магнитный поток и ток в цепи<br>с нелинейной индуктивностью .....                                         | 469 |
| 24.3. Влияние гистерезиса и вихревых токов на ток катушки<br>с ферромагнитным сердечником .....                      | 473 |
| 24.4. Полная векторная диаграмма и схемы замещения катушки<br>с ферромагнитным сердечником .....                     | 478 |

|                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 24.5. Применение катушек с ферромагнитным сердечником .....                                       | 485 |
| Глава 25. Переходные процессы в электрических цепях<br>с сосредоточенными параметрами. ....       | 492 |
| 25.1. Общие сведения о переходных процессах. ....                                                 | 492 |
| 25.2. Включение катушки индуктивности<br>на постоянное напряжение .....                           | 497 |
| 25.3. Отключение катушки индуктивности<br>от источника постоянного напряжения .....               | 503 |
| 25.4. Изменение сопротивления в цепи с индуктивностью .....                                       | 507 |
| 25.5. Зарядка конденсатора .....                                                                  | 509 |
| 25.6. Разрядка конденсатора на сопротивление .....                                                | 513 |
| 25.7. Включение катушки индуктивности<br>на синусоидальное напряжение .....                       | 517 |
| 25.8. Короткое замыкание в цепи переменного тока .....                                            | 520 |
| Глава 26. Электрические цепи с распределенными параметрами. ....                                  | 525 |
| 26.1. Уравнения длинной линии. ....                                                               | 525 |
| 26.2. Установившийся режим в длинной линии без потерь .....                                       | 531 |
| 26.3. Нагрузочные режимы длинной линии без потерь .....                                           | 538 |
| 26.4. Распространение электромагнитной волны<br>с прямоугольным фронтом по линии без потерь. .... | 542 |
| Заключение .....                                                                                  | 547 |
| Ответы к задачам .....                                                                            | 548 |
| Приложения .....                                                                                  | 551 |
| Список литературы .....                                                                           | 556 |