

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ**

**Национальный технический университет  
„Харьковский политехнический институт”**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к выполнению лабораторных работ по курсу  
“Основы теории вероятностей и математической статистики”**

Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу  
«Основы теории вероятностей и математической статистики» / Сост.  
Н.В. Савченко. – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2013. – 128 с.

Составитель Н.В. Савченко

Рецензент О.В. Серая

Кафедра системы информации

**Харьков НТУ “ХПИ” 2013**

---

## Общие указания

---

Настоящий курс содержит основные положения теории вероятностей и математической статистики, а также описание основных методов и идей, используемых в теоретико-вероятностных рассуждениях. Представленные методы иллюстрируются простыми приемами, что помогает в дальнейшем самостоятельно решать задания практического характера, сводя их к известной схеме.

Для успешного усвоения данного курса необходимы: знания традиционного курса математического анализа, в частности, умение интегрировать, дифференцировать. Слушатель должен быть знаком с элементами теории меры, с понятием интеграла по мере на абстрактном пространстве и его простейшими свойствами.

Целью преподавания данного курса является обеспечение необходимыми знаниями и привитие навыков прикладного характера для работы с основными понятиями теории вероятностей и математической статистики.

Задачи изучения настоящего курса состоят в следующем: закрепить и развить знания, полученные при изучении разделов математики, на которые опирается данный курс; подготовить необходимый уровень знаний для успешного освоения курсов, которые опираются на знание основ теории вероятности и математической статистики, таких как статистическая радиофизика, квантовая механика, планирование эксперимента и др.

Пособие содержит описание 8-ми лабораторных работ по курсу «Основы теории вероятностей и математической статистики» с использованием программирования на JavaScript. Это позволило организовать выполнение этих работ удаленно на сайте курса <http://dl.kpi.kharkov.ua/techn/nvs10/>. Для рисования графиков в некоторых лабораторных работах используется flash-приложение, написанное автором данного пособия. Открытость кода позволяет легко вносить изменения в код программ. Предложенный подход позволяет решать задачи без использования специальных программ.

---

## 1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ

---

### 1.1. Цель работы

Изучить понятие «пространство элементарных событий» и разработать компьютерную программу для наглядного представления этого понятия.

### 1.2. Краткие теоретические сведения [1]

Событием (или «случайным событием») называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события. Вероятность события  $A$  обозначается  $P(A)$ ,  $P$  или  $p$ . Достоверным называется событие  $U$ , которое в результате опыта непременно должно произойти.  $P(U) = 1$ . Невозможным называется событие  $V$ , которое в результате опыта не может произойти.  $P(V) = 0$ . Вероятность любого события  $A$  заключена между нулем и единицей:  $0 < P(A) < 1$ .

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них. Несколько событий в данном опыте называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе. Несколько событий в данном опыте называются равновероятными, если по условиям симметрии опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое. Если несколько событий: 1) образуют полную группу; 2) несовместны; 3) равновероятными, то они называются случаями («шансами»).

Случай называется благоприятным событию, если появление этого случая влечет за собой появление события.

Если результаты опыта сводятся к схеме случаев, то вероятность события  $A$  вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где  $n$  – общее число случаев;  $m$  – число случаев, благоприятных событию  $A$ . Пространство элементарных событий – множество  $\Omega$  всех различных исходов случайного эксперимента.

Элемент этого множества  $\omega \in \Omega$  называется элементарным событием или исходом. Пространство элементарных событий называется дискретным, если число его элементов конечно или счетное. Любое пространство элементарных событий не являющееся дискретным, называется недискретным, и при этом, если наблюдаемыми результатами (нельзя произносить случайными событиями) являются точки того или иного числового арифметического или координатного пространства, то пространство называется непрерывным (континуум).

Пространство элементарных событий  $\Omega$  вместе с алгеброй событий  $F$  и вероятностью  $P$  образует тройку  $(\Omega, F, P)$ , которая называется вероятностным пространством.

В теории вероятностей элементарные события или события-атомы – это исходы случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один. Множество всех элементарных событий обычно обозначается  $\Omega$ . Всякое подмножество множества  $\Omega$  элементарных событий называется случайным событием. Говорят, что в результате эксперимента произошло случайное событие  $A \subset \Omega$ , если (элементарный) исход эксперимента является элементом  $A$ .

В определении вероятностного пространства на множестве случайных событий вводится сигма-аддитивная конечная мера, называемая вероятностью.

Элементарные события могут иметь вероятности, которые строго положительны, нули, неопределенны, или любая комбинация из этих вариантов. Например, любое дискретное вероятностное распределение определяется вероятностями того, что может быть названо элементарными событиями. Напротив, все элементарные события имеют вероятность нуль для непрерывного распределения. Смешанные распределения, не будучи ни непрерывными, ни дискретными, могут содержать атомы, которые могут мыслиться как элементарные (то есть события-атомы) события с ненулевой вероятностью. В теории меры в определении вероятностного пространства вероятность произвольного элементарного события не могла быть определена до тех пор, пока математики не увидели различие между пространством исходов  $S$  и событиями, которые представляют интерес, и которые определяются как элементы  $\sigma$ -алгебры событий из  $S$ .

Формально говоря, элементарное событие – это подмножество пространства исходов случайного эксперимента, которое состоит только из одного элемента; то есть элементарное событие – это всё ещё множество, но не сам элемент. Однако элементарные события обычно записываются как элементы, а не как множества с целью упрощения, когда это не может вызвать недоразумения.

Примеры пространств исходов эксперимента,  $\Omega$ , и элементарных событий:

Если объекты счетные, а пространство исходов  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  (натуральные числа), то элементарные события – это любые множества  $\{k\}$ , где  $k \in \mathbb{N}$ .

Если монета бросается дважды,  $\Omega = \{OO, OP, PO, PP\}$ ,  $O$  для орла, а  $P$  для решки, то элементарные события:  $\{OO\}$ ,  $\{OP\}$ ,  $\{PO\}$  и  $\{PP\}$ .

### 1.3. Порядок выполнения работы

Составить компьютерную программу для наглядного представления пространства элементарных при подбрасывании двух правильных многогранников.

Правильный многогранник или платоново тело – это выпуклый многогранник, состоящий из одинаковых правильных многоугольников и обладающий пространственной симметрией. Эйлером была выведена формула, связывающая число вершин ( $V$ ), граней ( $\Gamma$ ) и рёбер ( $P$ ) любого выпуклого многогранника простым соотношением:  $V + \Gamma = P + 2$ .

Многогранник	Вид	Вершины	Рёбра	Грани
Тетраэдр		4	6	4
Куб		8	12	6
Октаэдр		6	12	8
Додекаэдр		20	30	12
Икосаэдр		12	30	20

Правильные многогранники известны с древнейших времён. Их орнаментные модели можно найти на резных каменных шарах, созданных в период позднего неолита, в Шотландии, как минимум за 1000 лет до Платона. В костях, которыми люди играли на заре цивилизации, уже угадываются формы правильных многогранников.

В значительной мере правильные многогранники были изучены древними греками. Некоторые источники (такие как Прокл Диадок) приписывают

честь их открытия Пифагору. Другие утверждают, что ему были знакомы только тетраэдр, куб и додекаэдр, а честь открытия октаэдра и икосаэдра принадлежит Теэтету Афинскому, современнику Платона. В любом случае, Теэтет дал математическое описание всем пяти правильным многогранникам и первое известное доказательство того, что их ровно пять.

#### Программу реализовать:

- интерфейсная часть на языке разметки гипертекста HTML [13];
- функциональная часть на си-подобном языке JavaScript [23].

#### Интерфейсная часть должна включать:

- заголовок с указанием названия работы, информации об авторе, времени разработки;
- выпадающие меню для задания типов двух многогранников;
- динамически отображаемую таблицу результатов;
- отображение в таблице результатов событий, представляющих подмножества множества элементарных событий.

На рис. 1.2 приведен возможный вид интерфейса.

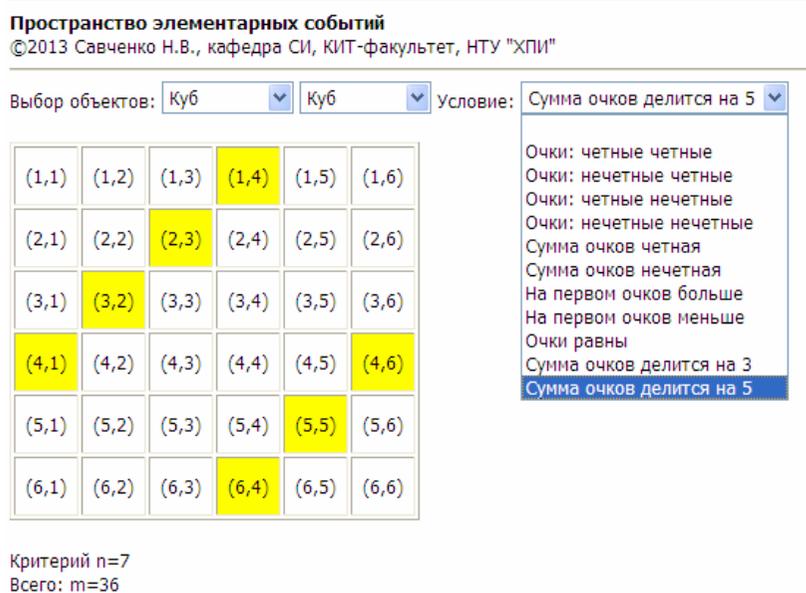


Рис. 1.2. Интерфейс программы «Пространство элементарных событий».

#### 1.4. Содержание отчета

Печатный отчет должен соответствовать требованиям по оформлению документов такого типа и содержать следующую информацию:

1. Титульный лист.
2. Название лабораторной работы.
3. Тема лабораторной работы.
4. Краткое описание метода выполнения.
5. Блок-схема алгоритма решения поставленной задачи.
6. Краткое объяснение интерфейса программы.
7. Листинг кода программы.
8. Результаты контрольных расчетов.
9. Развернутые ответы на контрольные вопросы.
10. Краткие выводы.

#### 1.5. Контрольные вопросы

1. Образуют ли полную группу следующие группы событий:
  - а) опыт – бросание монеты; события: A1 – появление герба; A2 – появление цифры;
  - б) опыт – бросание двух монет; события: B1 – появление двух гербов; B2 – появление двух цифр;
  - в) опыт – два выстрела по мишени; события: A0 – ни одного попадания; A1 – одно попадание; A2 – два попадания;
  - г) опыт – два выстрела по мишени; события: C1 – хотя бы одно попадание; C2 – хотя бы один промах;
  - д) опыт – вынимание карты из колоды; события: D1 – появление карты червонной масти; D2 – появление карты бубновой масти; D3 – появление карты трефовой масти?
2. Являются ли несовместными следующие события:
  - а) опыт – бросание монеты; события: A1 – появление герба; A2 – появление цифры;
  - б) опыт – бросание двух монет; события: B1 – появление герба на первой монете; B2 – появление цифры на второй монете;
  - в) опыт – два выстрела по мишени; события: C0 – ни одного попадания; C1 – одно попадание; C2 – два попадания;
  - г) опыт – два выстрела по мишени; события: D1 – хотя бы одно попадание; D2 – хотя бы один промах;
  - д) опыт – вынимание двух карт из колоды; события: E1 – появление двух черных карт; E2 – появление туза; E3 – появление дамы?
3. Являются ли равновозможными следующие события:

- а) опыт – бросание симметричной монеты; события: A1 – появление герба; A2 – появление цифры;
- б) опыт – бросание неправильной (погнутой) монеты; события: B1 – появление герба; B2 – появление цифры;
- в) опыт – выстрел по мишени; события: C1 – попадание; C2 – промах;
- г) опыт – бросание двух монет; события: D1 – появление двух гербов; D2 – появление двух цифр; D3 – появление одного герба и одной цифры;
- д) опыт – вынимание одной карты из колоды; события: E1 – появление карты червонной масти; E2 – появление карты бубновой масти; E3 – появление карты трефовой масти;
- е) опыт – бросание игральной кости; события: F1 – появление не менее трех очков; F2 – появление не более четырех очков?

---

## 2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ СХЕМЕ

---

### 2.1. Цель работы

Изучить классическое определение вероятностей и разработать компьютерную программу для расчета вероятностей, требующих подсчета комбинаторных конфигураций.

### 2.2. Краткие теоретические сведения [1]

Классическая вероятностная схема – схема урн. Во многих случаях вероятностное пространство строится на основе проведения аналогии между описываемым экспериментом и какой-либо хорошо изученной моделью случайного эксперимента с известным распределением вероятностей. Таковы, например, опыты, сводящиеся к классической или геометрической схеме, которые подробно рассматриваются далее.

Всякий эксперимент, удовлетворяющий тому условию, что соответствующее ему множество  $\Omega$  представляет собой конечное множество равновероятных исходов ( т.е.

$P(w_1) = P(w_2) = \dots = P(w_n) = \frac{1}{n}$ ), называется классической схемой или

схемой урн. В силу конечности  $n$  алгебра событий совпадает с множеством всех подмножеств множества  $n$  (включая и пустое множество). Поэтому любое событие вида  $A = \{w_{k_1}, w_{k_2}, \dots, w_{k_m}\} \subset \Omega$  наблюдаемо в таком эксперименте, и вероятность его осуществления определяется по формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{m}{n},$$

где  $N(A) = m$  – число элементов множества  $A$  (число всех благоприятствующих событию  $A$  исходов),  $N(\Omega) = n$  – число элементов множества  $\Omega$  (число всех исходов эксперимента).

Классическая схема является математической формализацией опытов, в которых элементарные исходы обладают определенной симметрией по отношению к условиям опыта, так что нет оснований считать какой-либо из исходов более вероятным, чем другой. Таким свойством, например, обладают опыты по извлечению наудачу определенного числа шаров из урны, содержащей заданное количество неразличимых на ощупь шаров. (Отсюда и название – схема урн.)

Решение вероятностных задач на классическую схему часто облегчается использованием комбинаторных формул. Каждая из комбинаторных формул определяет общее число элементарных исходов в некотором опыте, состоящем в выборе наудачу  $m$  элементов из  $n$  различных элементов исходного множества  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . При этом в постановке каждого такого опыта строго оговорено, каким способом производится выбор и что понимается под различными выборками.

Существуют две принципиально различные схемы выбора. В первой схеме выбор осуществляется без возвращения элементов (это значит, что отбираются либо сразу все  $m$  элементов, либо последовательно по одному элементу, причем каждый отобранный элемент исключается из исходного множества). Во второй схеме выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге и тщательным перемешиванием исходного множества перед следующим выбором. После того как выбор тем или иным способом осуществлен, отобранные элементы (или их номера) могут быть либо упорядочены (т.е. выложены в последовательную цепочку), либо нет. В результате получают следующие четыре различные постановки эксперимента по выбору наудачу  $m$  элементов из общего числа  $n$  различных элементов множества  $E$ .

**Схема выбора, приводящая к сочетаниям.** Если опыт состоит в выборе  $m$  элементов без возвращения и без упорядочивания, то различными исходами следует считать  $m$ -элементные подмножества множества  $E$ , имеющие различный состав. Получаемые при этом комбинации элементов (элементарные исходы) носят название сочетания из  $n$  элементов по  $m$ , а их

общее число  $N(\Omega)$  определяется по формуле  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ . Для чисел

$C_n^m$ , называемых также биномиальными коэффициентами, справедливы следующие тождества, часто оказывающиеся полезными при решении задач:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \text{ (свойство симметрии),}$$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}, C_n^0 = 1 \text{ (рекуррентное соотношение),}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 1 \text{ (следствие биномиальной формулы}$$

Ньютона).

**Пример.** Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают три изделия для контроля. Найти вероятности следующих событий:  $A = \{\text{в полученной выборке ровно одно изделие бракованное}\}$ ,  $B = \{\text{в полученной выборке нет ни одного бракованного изделия}\}$ .

Занумеруем изделия числами от 1 до 10, и пусть множество номеров  $E_1 = \{1, 2, \dots, 7\}$  соответствует годным изделиям, а множество номеров  $E_2 = \{8, 9, 10\}$  – бракованным изделиям.

Согласно описанию эксперимента производится выбор без возвращения и без упорядочивания трех элементов из множества  $E = E_1 \cup E_2 = \{1, 2, \dots, 10\}$ . Поэтому  $N(\Omega) = C_{10}^3 = 120$ .

Событию  $A$  благоприятствуют только такие исходы, когда один элемент выборки принадлежит  $E_2$ , а остальные два элемента – множеству  $E_1$ . По формуле прямого произведения множеств получаем, что число всех таких исходов  $N(A) = C_3^1 \cdot C_7^2 = 63$ , поэтому

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}.$$

Событию  $B$  благоприятствуют только такие исходы, когда все три отобранных элемента принадлежат множеству  $E_1$ , поэтому  $N(B) = C_7^3 = 35$ . Отсюда следует, что

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{7}{24}.$$

**Схема выбора, приводящая к размещениям.** Если опыт состоит в выборе  $m$  элементов без возвращения, но с упорядочиванием их по мере выбора в последовательную цепочку, то различными исходами данного опыта будут упорядоченные  $m$ -элементные подмножества множества  $E$ , отличающиеся либо набором элементов, либо порядком их следования. Получаемые при этом комбинации элементов (элементарные исходы) называются размещениями из  $n$  элементов по  $m$ , а их общее число определяется

формулой  $N(\Omega) = A_n^m = C_n^m \cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!}$ . В частном случае  $m = n$  опыт

фактически состоит в произвольном упорядочивании множества  $E$ , т.е. сводится к случайной перестановке элементов всего множества. При этом

$$N(\Omega) = A_n^n = n!$$

**Пример.** Множество  $E$  состоит из 10 первых букв русского алфавита. Опыт состоит в выборе без возвращения 4 букв и записи слова в порядке поступления букв. Сколько 4-буквенных слов может быть получено в данном опыте? Какова вероятность того, что наудачу составленное слово будет оканчиваться буквой а?

$N(\Omega)$  – число всех 4-буквенных слов в данном опыте – равно числу 4-элементных упорядоченных подмножеств из 10 элементов, т.е.

$$N(\Omega) = A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пусть событие  $A = \{\text{наудачу составленное слово из 4 букв множества } E \text{ оканчивается буквой а}\}$ .

Число элементов множества  $A$  равно числу способов разместить на три оставшиеся места по одному символу из 9 (символ а исключен из рассмотрения, поскольку его место уже определено); таким образом,

$$N(A) = A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504 \text{ и } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{504}{5040} = \frac{1}{10}.$$

**Схема выбора, приводящая к сочетаниям с повторениями.** Если опыт состоит в выборе с возвращением  $m$  элементов множества  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , но без последующего упорядочивания, то различными исходами

такого опыта будут всевозможные  $m$ -элементные наборы, отличающиеся составом. При этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Например, при  $m = 4$  наборы  $\{e_1, e_2, e_1, e_1\}$  и  $\{e_2, e_1, e_1, e_1\}$  неразличимы для данного эксперимента, а набор  $\{e_1, e_1, e_3, e_1\}$  отличен от любого из предыдущих. Получающиеся в результате данного опыта комбинации называются сочетаниями с повторениями, а их общее число определяется формулой  $N(\Omega) = C_{n+m-1}^m$ .

**Пример.** В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т.д.; всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятности следующих событий:  $A = \{\text{заказаны книги из различных разделов науки}\}$ ,  $B = \{\text{заказаны книги из одного и того же раздела науки}\}$ .

Число всех равновероятных исходов данного эксперимента равно, очевидно, числу сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, т.е.

$N(\Omega) = C_{16+4-1}^4 = C_{19}^4$ . Число исходов, благоприятствующих событию  $A$ , равно числу способов отобрать без возвращения четыре элемента из 16, поэтому

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{C_{16}^4}{C_{19}^4} = \frac{455}{969} \approx 0.47.$$

Число исходов, благоприятствующих событию  $B$ , равно числу способов выбрать один элемент из шестнадцати, поэтому

$$P(A) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_{16}^1}{C_{19}^4} = \frac{16}{969} \approx 0.016.$$

**Схема выбора, приводящая к размещениям с повторениями.** Если выбор  $m$  элементов из множества  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  производится с возвращением и с упорядочиванием их в последовательную цепочку, то различными исходами будут всевозможные  $m$ -элементные наборы (вообще говоря, с повторениями), отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их следования. Например, при  $m = 4$  множества  $w_1 = \{e_1, e_1, e_2, e_1\}$ ,  $w_2 = \{e_2, e_1, e_1, e_1\}$  и  $w_3 = \{e_1, e_1, e_3, e_1\}$  являются различными исходами

данного опыта. Получаемые в результате комбинации называются размещениями с повторениями, а их общее число определяется формулой

$$N(\Omega) = n^m.$$

**Пример.** 7 одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам? Какова вероятность того, что в результате данного опыта первая лунка окажется пустой (при этом может оказаться пустой и еще какая-либо лунка)?

Занумеруем лунки и шарики. Можно считать, что опыт состоит в 7-кратном выборе с возвращением номера лунки и записи 7-буквенного слова. При этом каждому порядковому номеру буквы (номеру шарика) будет поставлена в соответствие одна из четырех букв алфавита (номер лунки).

Так, например, слово

1	1	3	1	4	4	2
1	2	3	4	5	6	7

означает, что в первую лунку попали шары № 1, №2 и №4, во вторую лунку – шар № 7, в третью – шар № 3, в четвертую – шары № 5 и № 6. Таким образом, число всех способов распределить 7 шариков по 4 лункам равно числу различных 7-буквенных слов из алфавита в 4 буквы, т.е.  $N(\Omega) = 4^7$ .

Событие  $A = \{\text{первая лунка окажется пустой}\}$  соответствует такому выбору, когда символ 1 (номер первой лунки) удален из алфавита. Поэтому

$$N(A) = 3^7 \text{ и } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0.133.$$

### 2.3. Порядок выполнения работы

Разработать компьютерную программу, которую можно использовать для облегчения расчета вероятностей, требующих подсчета комбинаторных конфигураций.

**Программу реализовать:**

- интерфейсная часть на языке разметки гипертекста HTML [13];
- функциональная часть на си-подобном языке JavaScript [23].

**Интерфейсная часть должна включать:**

- заголовок с указанием названия работы, информации об авторе, времени разработки;
- выпадающие меню для задания нескольких тестовых задач;
- поле для отображения результатов расчета;
- в псевдокоде программы должна быть предусмотрена возможность расчета числа сочетаний, размещений и функция вычисления значения факториала заданного числа.

На рис. 2.1 приведен возможный вид интерфейса.

**Вычисление вероятностей на базе подсчета числа комбинаторных конфигураций**  
© 2013 Савченко Н.В., кафедра СИ, НТУ "ХПИ", Новая Водолага - Харьков

Пример Зад. 1. стр. 20 Фадеева Л.Н. и др. ТВ и МС. Зад. и упр. М. Эксмо, 2006

Комментарий = // Комментарий,  $C_n^k = \text{fc}(n,k)$ ,  $A_n^k = \text{fa}(n,k)$ ,  $n! = \text{ff}(n)$ , Вывод(res)=fp(res).

Очистить //В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбраны 3 фрукта. Какова вероятность того, что все три фрукта - апельсины?

Выполнить //Решение: Число элементарных исходов n равно числу способов выбрать 3 элемента из 9 (неупорядоченная выборка), т.е.  $n = C(9,3)$ . Число благоприятных исходов m равно числу способов выбора трех апельсинов из имеющихся пяти, т.е.  $m = C(5,3)$ .

//P(A)=C(5,3)/C(9,3)

fp(P(A)=+Math.round(fc(5,3)/fc(9,3)\*1000)/1000);

x P(A)=0.119

Рис. 2.1. Интерфейс программы «Вычисление вероятностей на базе подсчета числа комбинаторных конфигураций».

### 2.4. Содержание отчета

Печатный отчет должен соответствовать требованиям по оформлению документов такого типа и содержать следующую информацию:

1. Титульный лист.
2. Название лабораторной работы.
3. Тема лабораторной работы.
4. Краткое описание метода выполнения.

5. Блок-схема алгоритма решения поставленной задачи.
6. Краткое объяснение интерфейса программы.
7. Листинг кода программы.
8. Результаты контрольных расчетов.
9. Развернутые ответы на контрольные вопросы.
10. Краткие выводы.

## 2.5. Контрольные вопросы

1. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности следующих событий:  $A = \{\text{будут выбраны одни третьекурсники}\}$ ,  $B = \{\text{все первокурсники попадут на конференцию}\}$ ,  $C = \{\text{не будет выбрано ни одного второкурсника}\}$ .
2. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятности следующих событий:  $A = \{\text{в полученной выборке все карты бубновой масти}\}$ ,  $B = \{\text{окажется хотя бы один туз}\}$ ,  $C = \{\text{появятся ровно 2 пики}\}$ .
3. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятности следующих событий:  $A = \{\text{появится число 123}\}$ ,  $B = \{\text{появится число, не содержащее цифры 3}\}$ .
4. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал: а) пирожные одного вида; б) пирожные разных видов; в) по два пирожных различных видов.
5. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий:  $A = \{\text{четыре последние цифры телефонного номера одинаковы}\}$ ,  $B = \{\text{все цифры различны}\}$ .

---

## 3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

---

### 3.1. Цель работы

Изучить понятие условной вероятности, формулы полной вероятности и Байеса и разработать компьютерную программу для облегчения расчетов по этим формулам.

### 3.2. Краткие теоретические сведения [1]

Условной вероятностью события  $A$  при наличии  $B$  называется вероятность события  $A$ , вычисленная при условии, что событие  $B$  произошло. Эта вероятность обозначается  $P(A|B)$ . Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:  $P(AB) = P(A)P(B|A)$  или  $P(AB) = P(B)P(A|B)$ . Для независимых событий  $A$  и  $B$   $P(AB) = P(A)P(B)$ .

Если об обстановке опыта можно сделать  $n$  исключаящих друг друга предположений (гипотез)  $H_1, H_2, \dots, H_n$  и если событие  $A$  может появиться только при одной из этих гипотез, то вероятность события  $A$  вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)$$

$$\text{или } P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i),$$

где  $P(H_i)$  – вероятность гипотезы  $P(A|H_i)$  – условная вероятность события  $A$  при этой гипотезе.

Если до опыта вероятности гипотез были  $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ , а в результате опыта появилось событие  $A$ , то с учетом этого события

«новые», т.е. условные, вероятности гипотез вычисляются по формуле

$$\text{Бейеса: } P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A | H_i)}, i = 1, 2, \dots, n$$

Если после опыта, закончившегося появлением события  $A$ , производится еще один опыт, в котором может появиться или не появиться событие  $B$ , то вероятность (условная) этого последнего события вычисляется по формуле полной вероятности, в которую подставлены не прежние вероятности гипотез  $P(H_i)$ , а новые  $P(H_i | A)$ :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(H_i | A)P(B | H_i, A).$$

Пример. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой  $a$  белых шаров и  $b$  черных; во второй  $c$  белых и  $d$  черных; в третьей только белые шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Пусть событие  $A$  – появление белого шара. Формулируем гипотезы:

$H_1$  – выбор первой урны;

$H_2$  – выбор второй урны;

$H_3$  – выбор третьей урны.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3};$$

$$P(A | H_1) = \frac{a}{a+b}; P(A | H_2) = \frac{c}{c+d}; P(A | H_3) = 1;$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{1}{3} \cdot \frac{c}{c+d} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \left( \frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1 \right).$$

### 3.3. Порядок выполнения работы

Разработать компьютерную программу для облегчения расчетов по формулам полной вероятности и Бейеса.

### Программу реализовать:

- интерфейсная часть на языке разметки гипертекста HTML [13];
- функциональная часть на си-подобном языке JavaScript [23].

### Интерфейсная часть должна включать:

- заголовок с указанием названия работы, информации об авторе, времени разработки;
- выпадающие меню для задания нескольких тестовых задач;
- поле для отображения результатов расчета;
- выпадающее меню для задания числа гипотез.

На рис. 3.1 приведен возможный вид интерфейса.

### Формула полной вероятности. Формула Байеса

© 2013 Савченко Н.В., кафедра СИ, НТУ "ХПИ", Новая Водолага - Харьков

Число гипотез

Пример

Трое преподавателей принимают экзамен в группе из 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй - 3, а третий - 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся студентам различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго - только 10%, зато у третьего 70%. Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

Условие: ⋮

$P(H_1) = 6/30$	$P(A H_1) = 0.4$
$P(H_2) = 3/30$	$P(A H_2) = 0.1$
$P(H_3) = 21/30$	$P(A H_3) = 0.7$

Формула Байеса

$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = 0.58$

---

$P(H_1|A) = P(H_1)P(A|H_1)/P(A) = 0.138$   
 $P(H_2|A) = P(H_2)P(A|H_2)/P(A) = 0.017$   
 $P(H_3|A) = P(H_3)P(A|H_3)/P(A) = 0.845$

---

$P(H_1|\neg A) = P(H_1)P(\neg A|H_1)/P(\neg A) = 0.286$   
 $P(H_2|\neg A) = P(H_2)P(\neg A|H_2)/P(\neg A) = 0.214$   
 $P(H_3|\neg A) = P(H_3)P(\neg A|H_3)/P(\neg A) = 0.5$

Рис. 3.1. Интерфейс программы «Вычисление вероятностей на базе подсчета числа комбинаторных конфигураций».

### 3.4. Содержание отчета

Печатный отчет должен соответствовать требованиям по оформлению документов такого типа и содержать следующую информацию:

1. Титульный лист.
2. Название лабораторной работы.
3. Тема лабораторной работы.
4. Краткое описание метода выполнения.
5. Блок-схема алгоритма решения поставленной задачи.
6. Краткое объяснение интерфейса программы.
7. Листинг кода программы.
8. Результаты контрольных расчетов.
9. Развернутые ответы на контрольные вопросы.
10. Краткие выводы.

### 3.5. Контрольные вопросы

1. Известно, что 80% продукции – стандартно. Упрощенный контроль признает годной стандартную продукцию с вероятностью 0,9 и нестандартную с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что признанное годным изделие – стандартно.
2. На двух станках производят детали, причем на втором в два раза больше, чем на первом. Вероятность брака на первом станке – 0,1; на втором – 0,2. Найти вероятность того, что произвольно взятая деталь бракованная.
3. В телеграфном сообщении "точка" и "тире" встречаются в соотношении 4:3. Известно, что искажаются 25 % "точек" и 20 % тире. Найти вероятность того, что принят переданный сигнал, если принято "тире".
4. Вероятность того, что недельный оборот торговца мороженым превысит 2 000 руб., при солнечной погоде равна 80%, при переменной облачности – 50%, а при дождливой погоде – 10%. Найти вероятность того, что на следующей неделе оборот превысит 2 000 руб., если вероятность солнечной погоды в данное время года составляет 20%, вероятность переменной облачности и вероятность дождливой погоды – по 40%.
5. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% – государственные органы, 20% – другие банки, остальные – физические лица. Вероятности того, что взятый кредит не будет возвращен, составляют 0,01, 0,05 и 0,2 соответственно. Определить, какая доля кредитов в среднем не возвращается.

Решение. Пусть событие  $A$  состоит в том, что взятый кредит не возвращается, гипотеза  $H_1$  – в том, что запрос на этот кредит поступил от государственного органа, гипотеза  $H_2$  – в том, что запрос на кредит поступил от другого банка, гипотеза  $H_3$  – в том, что запрос на кредит поступил от физического лица.

По условию вероятности гипотез составляют  $P(H_1)=0,1$ ,  $P(H_2)=0,2$ ,  $P(H_3)=1-P(H_1)-P(H_2)=0,7$ .

Апостериорные вероятности, в свою очередь, по условию равны  $P(A|H_1) = 0,01$ ,  $P(A|H_2)=0,05$ ,  $P(A|H_3)=0,2$ . По формуле полной вероятности

$P(A)=P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)+ P(A|H_3)P(H_3) = 0,01 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,151$ .

---

#### 4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА БЮФФОНА

---

##### 4.1. Цель работы

Изучить задачу Буффона и разработать компьютерную программу для виртуального моделирования эксперимента Буффона.

##### 4.2. Краткие теоретические сведения [1]

Если пространство элементарных событий содержит бесконечное множество элементов и ему можно поставить в соответствие некоторое геометрическое пространство, а вероятность каждого события зависит только от меры этого события, а не от его положения, то говорят, что на этом пространстве определена геометрическая вероятность. При этом вероятность каждого события  $A$  есть отношение меры  $A$  к мере  $U$  пространства элементарных событий. Под мерой понимается

- в одномерном пространстве – длина;
- в двумерном пространстве – площадь;
- в трехмерном пространстве – объем.

Таким образом, геометрическая вероятность означает, что

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(U)}.$$

Геометрическое определение вероятности часто используется в методах Монте-Карло, например, для приближённого вычисления значений многократных определённых интегралов.

Пример: Игла Буффона. Стол разграфлен параллельными линиями на расстоянии  $2a$ , на стол случайным образом бросается игла длиной  $2L$ ,  $L < a$ . Какова вероятность того, что игла пересечет какую-то линию?

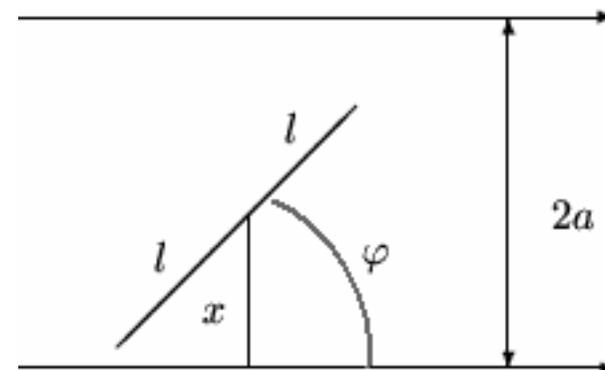


Рис. 4.1. Геометрия Буффона.

Возможные положения иглы (отрезка) на плоскости полностью определяются положением середины иглы и углом поворота иглы относительно какого-либо направления. Причем две эти переменные (положение центра и угол поворота) меняются независимо друг от друга.

Обозначим через  $x \in [0, a]$  расстояние от середины иглы до ближайшей прямой, а через  $\varphi \in [0, \pi]$  – угол между каким-то направлением прямой и иглой. Множество возможных положений иглы целиком определяется выбором наудачу точки из прямоугольника  $\Omega = [0, a] \times [0, \pi]$ .

Игла пересекает ближайшую прямую, если координаты выбранной наудачу точки удовлетворяют неравенству:  $x \leq l \sin \varphi$

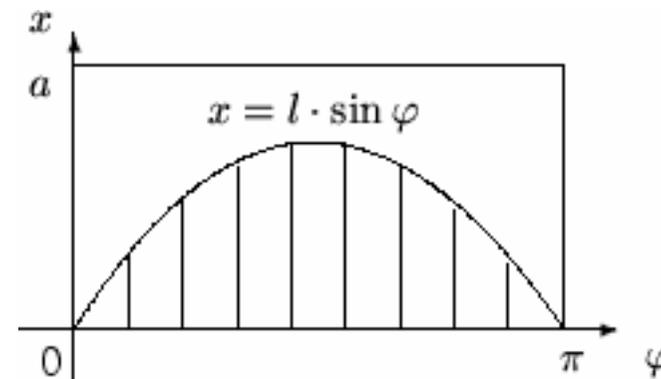


Рис. 4.2. Пространство элементарных событий задачи Буффона.

Площадь области  $A \subset \Omega$ , точки которой удовлетворяют такому неравенству, равна

$$\mu(A) = \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = -l \cdot \cos \varphi \Big|_0^{\pi} = 2l.$$

И так как  $\mu(A) = a\pi$ , то искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{2l}{a\pi}.$$

#### 4.3. Порядок выполнения работы

Разработать компьютерную программу для виртуального моделирования эксперимента Буффона для вычисления числа  $\pi$ .

**Программу реализовать:**

- интерфейсная часть на языке разметки гипертекста HTML [13];
- функциональная часть на си-подобном языке JavaScript [23].

**Интерфейсная часть должна включать:**

- заголовок с указанием названия работы, информации об авторе, времени разработки;
- общую информацию о моделируемом процессе;
- поле для отображения результатов расчета в наглядном графическом и числовом виде;
- выпадающее меню для задания количества игл, относительной длине игл.

На рис. 4.3 приведен возможный вид интерфейса.

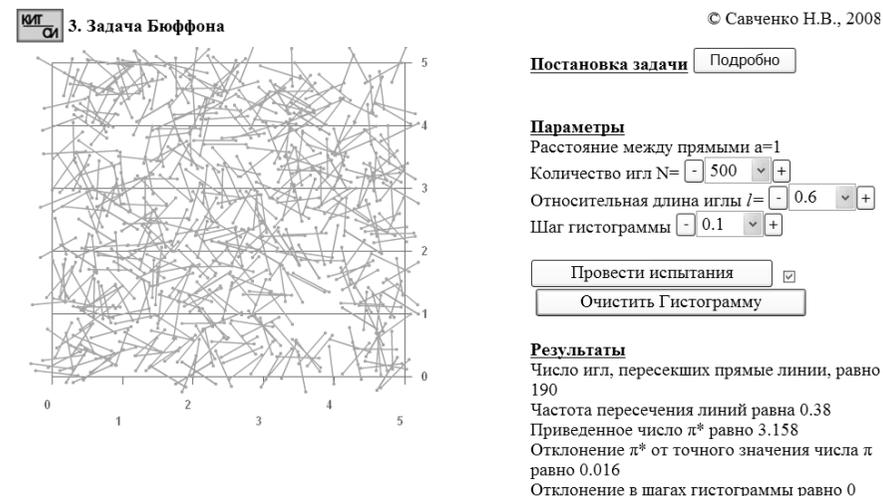


Рис.4.3. Интерфейс программы «Задача Буффона».

#### 4.4. Содержание отчета

Печатный отчет должен соответствовать требованиям по оформлению документов такого типа и содержать следующую информацию:

1. Титульный лист.
2. Название лабораторной работы.
3. Тема лабораторной работы.
4. Краткое описание метода выполнения.
5. Блок-схема алгоритма решения поставленной задачи.
6. Краткое объяснение интерфейса программы.
7. Листинг кода программы.
8. Результаты контрольных расчетов.
9. Развернутые ответы на контрольные вопросы.
10. Краткие выводы.

#### 4.5. Контрольные вопросы

1. В прямоугольник  $5 \times 4$  см<sup>2</sup> вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?
2. Какова вероятность Вашей встречи с другом, если вы договорились встретиться в определенном месте, с 12.00 до 13.00 часов и ждете, друг друга в течение 5 минут?

3. На отрезок АВ длины  $L$ , брошена точка М так, что любое ее положение на отрезке равновозможно. Найти вероятность того, что меньший из отрезков (АМ или МВ) имеет длину большую, чем  $L/3$ .
4. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше трех, не превзойдет трех, а их произведение будет не больше  $2/7$ ?
5. В круге случайным образом выбирается точка. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит вписанному в круг квадрату.
6. В круге случайным образом выбирается точка. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит вписанному в круг равностороннему треугольнику.
7. Точку наудачу бросили на отрезок  $[0; 2]$ . Какова вероятность ее попадания в отрезок  $[0,5; 1,4]$ ?
8. На шарик нанесена сетка географических координат. Шарик брошен на плоскость. Предполагается, что выпадение областей, имеющих равную площадь, равновероятны. Какова вероятность того, что:
  - а) шарик прикоснется к плоскости точкой, которая находится в области между 0-м и 90-м градусами восточной долготы;
  - б) шарик прикоснется к плоскости точкой, которая находится между 45-м и 90-м градусами северной широты;
  - в) меньшая дуга большего круга, соединяющая точку касания с северным полюсом, будет меньше  $a$ .
9. На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии  $2a$ . На плоскость наудачу брошена монета радиуса  $r < a$ . Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых?
10. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата  $a$  бросается наудачу монета диаметра  $2r < a$ . Найти вероятность того, что:
  - а) монета попадет целиком внутрь одного квадрата;
  - б) монета пересечет не более одной стороны квадрата.

11. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса  $R$ , Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти вероятность того, что:
  - а) точка находится от центра на расстоянии меньшем  $r (r < R)$ ;
  - б) меньший угол между заданным направлением и прямой, соединяющей точку с началом координат, не превосходит  $a$ .
12. На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наудачу выбирается точка. Вероятность выбора точки на любой дуге окружности зависит только от длины этой дуги и пропорциональна ей. Найти вероятность того, Что:
  - а) проекция точки на диаметр (ось абсцисс) находится от центра на расстоянии, не превышающем  $r (r < 1)$ ;
  - б) расстояние от выбранной точки до точки с координатами  $(1,0)$  не превышает  $r$ .

## 5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

### 5.1. Цель работы

Изучить дискретное распределение Бернулли и разработать компьютерную программу для изучения свойств этого распределения.

### 5.2. Краткие теоретические сведения [1]

Биномиальным является распределение числа  $m$  появлений события  $F$  при  $n$  независимых испытаниях, при каждом из которых вероятность появления события остается постоянной, т. е. равной одной и той же постоянной величине  $p$ , а вероятность противоположного события:  $q = 1 - p$ .

Биномиальное распределение – представляет возможность решить задачу, когда имеется совокупность из  $N$  экземпляров, из которых  $M = pN$  обладают некоторым признаком  $A$ , а остальные  $N - M = qN$  не обладают им.

Как известно, признаки, которые можно охарактеризовать двумя исходами, называются альтернативными. Если есть несколько равных групп (проб) единиц с альтернативными признаками, возникает вопрос, сколько таких проб с данным признаком пробы и сколько без этого признака у отдельных единиц. Для такой характеристики используются следующие обозначения:

$n$  – общее число равновеликих проб, взятых для обследования;

$m$  – число проб с наличием данного признака;

$p$  – доля единиц, обладающих данным признаком, в каждой пробе;

$q$  – доля единиц, не обладающих этим признаком.

Например, в каждом десятке случайно отобранных изделий могут встретиться 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 бракованных. В одном десятке их не будет совсем (0), в другом – их будет 1 и т. д. В результате получится распределение, в котором будет варьировать число единиц с данным признаком (здесь – числа бракованных изделий в отдельных равночисленных пробах, а в качестве весов – число соответствующих проб).

Число бракованных изделий в пробах	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число проб	3	4	9	2	1	1	0	0	0	0	0

Распределение равночисленных групп с альтернативным признаком по числу единиц в каждой группе называется **биномиальным**. Это название объясняется, с одной стороны, альтернативным характером признака, а с другой – тем, что закономерность таких распределений связана с коэффициентами разложения бинома Ньютона.

Биномиальное распределение имеет вид:

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Зная приближенно величину  $p$  и число единиц в группе  $n$ , можно получить с помощью бинома следующие данные:

при  $m = 0$  – ожидаемую долю равночисленных групп, в которых ни одна из единиц не обладает данным признаком;

при  $m = 1$  – долю групп, в которых только одна единица имеет этот признак;

при любом  $m$  – долю групп, в которых  $m$  единиц обладает альтернативным признаком.

Пример. Среди продукции определенного, вида встречается 10% брака. Взято 100 проб – по 5 изделий в каждой пробе. Определить ожидаемое число проб, в которых будет 0, 1, 2, 3, 4, 5 бракованных изделий.

Подобную задачу решают, используя биномиальное распределение. Доля проб, в которых не будет бракованных изделий, определится по биному при  $m = 0$ ,  $n = 5$ ,  $p = 0,1$ ,  $q = 0,9$ .

$$P = \frac{5!}{0!(5-0)!} 0,1^0 0,9^{5-0} = 0.59049$$

Она равна 0,59049. Доля проб, в которых окажется одно бракованное изделие, вычисляется при тех же данных ( $m = 1$ ); она равна 0.32805. Доля проб с двумя бракованными изделиями составит 0,07290, с тремя – 0,00810,

с четырьмя – 0,00045, с пятью – 0,00001. Умножив эти доли на 100 (число взятых проб) и округлив до целых, получим, что из 100 проб в 59 пробах не должно быть ни одной бракованной единицы, в 33 – по 1 бракованной единице, в 7 пробах – по две и в 1 пробе – три бракованные единицы. Появление проб с четырьмя и пятью бракованными единицами маловероятно.

Можно подсчитать, что при извлечении 1000 проб одна проба будет с четырьмя бракованными изделиями. И только отобрав 10 000 проб, можно ожидать, что одна из них будет содержать все пять бракованных изделий. Биномиальное распределение – распределение дискретной величины, поскольку величины  $m$  могут принимать только вполне определенные целые значения 0, 1, 2, 3, ...,  $m$ . Оно широко используется в теории вероятностей для определения вероятности события при  $n$  испытаниях, если известно число проведенных испытаний  $n$  и вероятность появления события при одном испытании  $p$ . Здесь число возможных испытаний и их вероятности выступают как случайные величины с дискретными вариантами. Вероятности этих вариантов и определяются по биномиальному закону.

График биномиального распределения, на котором по оси абсцисс откладываются числа наступления события, а по оси ординат – вероятности этих чисел, представляет собой ломаную линию. Форма графика зависит от значений  $p$  и  $n$ . Если  $p = q$ , т. е.  $p = 0,5$ , то график симметричен. Если  $p$  мало, график распределения будет скошенным.

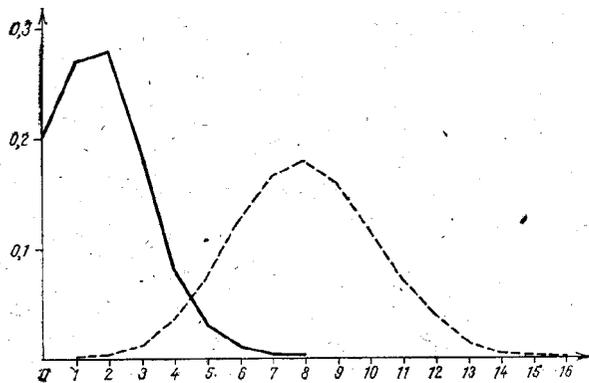


Рис.5.1. График биномиального распределения

Закон биномиального распределения называют также законом Бернулли.

Пример. Определить вероятность того, что из 100 изделий 10 окажутся бракованными, если известно, что в партии приблизительно 5% брака. Вероятность равна:

$$P = \frac{100!}{10!(100 - 10)!} 0,05^{10} 0,95^{90} = 0.0167$$

### Распределение Пуассона (закон малых чисел).

Распределение Пуассона является частным случаем биномиального распределения и используется в случаях, когда увеличение числа испытаний  $n$  приводит к тому, что вероятность появления одиночного события  $p$  значительно уменьшается ( $p < 0,1$ ). При этом произведение  $np$  сохраняет постоянное значение и обозначается  $\lambda$ .

$$P_n(m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$$

Следует отметить, что для случайных величин, распределенных по закону Пуассона, параметр  $\lambda$  характеризует дисперсию, математическое ожидание и среднее значение случайной величины, т.е.  $\lambda = a = \sigma^2 = x$ .

Пример. Оператор сотовой связи провел наблюдение за 1000 абонентов своей сети. В течении одного часа фиксировалось количество звонков, которое совершил каждый из абонентов и получилось следующее распределение.

Число звонков	Число абонентов при регистрации	Общее число звонков	Теоретическое число абонентов
0	600	0	613
1	320	320	300
2	70	140	74
3	10	30	12
4	0	0	1
	1000	490	1000

Так как среднее число звонков у 1000 абонентов  $\bar{x} = \frac{490}{1000} = 0,49$ ,

теоретический расчет числа абонентов в течении часа не совершавших звонков производится по формуле:

$$P_0 = 1000 \frac{e^{-0.49} 0.49^0}{0!} = 613$$

совершивших один звонок – по формуле

$$P_1 = 1000 \frac{e^{-0.49} 0.49^1}{1!} = 300$$

и т. д.

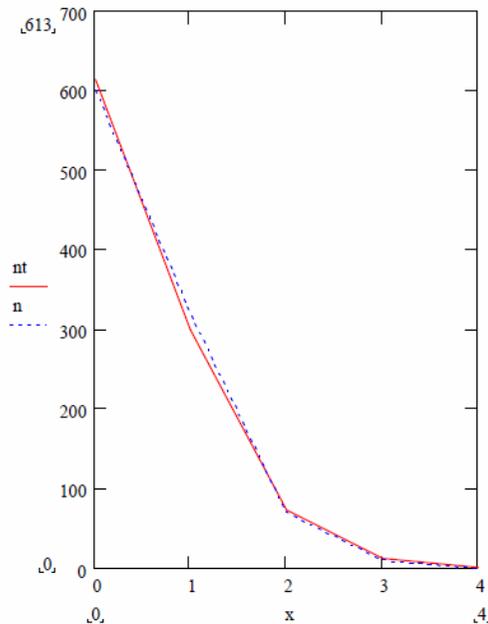


Рис.5.2.

Сравнивая изображение фактических и теоретических данных, видим почти полное совпадение той и другой кривой.

Опыты называются независимыми, если вероятность того или иного исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Независимые опыты могут производиться как в одинаковых условиях, так и в различных. В первом случае вероятность появления какого-то события  $A$  во всех опытах одна и та же, во втором случае она меняется от

опыта к опыту.

**Частная теорема о повторении опытов.** Если производится  $n$  независимых опытов в одинаковых условиях, причем в каждом из них с вероятностью  $p$  появляется событие  $A$ , то вероятность  $P_{m,n}$  того, что событие  $A$  произойдет в этих  $n$  опытах ровно  $m$  раз, выражается формулой

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n),$$

где  $q = 1 - p$ .

Эта формула выражает так называемое биномиальное распределение вероятностей.

Вероятность хотя бы одного появления события  $A$  при  $n$  независимых опытах в одинаковых условиях равна

$$P_{1,n} = 1 - q^n.$$

**Общая теорема о повторении опытов.** Если производится  $n$  независимых опытов в различных условиях, причем вероятность события  $A$  в  $i$ -м опыте равна  $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ , то вероятность  $P_{m,n}$  того, что событие  $A$  появится в этих опытах ровно  $m$  раз, равна коэффициенту при  $z^m$  в разложении по степеням  $z$  производящей функции:

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i z), \quad \text{где } q_i = 1 - p_i.$$

Вероятность хотя бы одного появления события  $A$  при  $n$  независимых опытах в различных условиях равна

$$R_{1,n} = 1 - \prod_{i=1}^n q_i.$$

Для любых условий (как одинаковых, так и различных)

$$\sum_{m=0}^n P_{m,n} = 1.$$

п

"pP = 1.

ш=0

Вероятность  $R_{k,n}$  того, что при  $p$  опытах событие  $A$  появится не менее  $k$  раз, выражается формулой

$$R_{k,n} = \sum_{m=k}^n P_{m,n} \text{ или } R_{k,n} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_{m,n}$$

Теоремы о повторении опытов, как частная, так и общая, допускают обобщение на тот случай, когда в результате каждого опыта возможны не два исхода ( $A$  и  $\bar{A}$ ), а несколько исходов.

Если производится  $n$  независимых опытов в одинаковых условиях, причем каждый опыт может иметь  $k$  исключающих друг друга исходов

$A_1, A_2, \dots, A_k$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ( $\sum_{i=1}^k p_i$ ), то вероятность того,

что в  $m_1$  опытах появится событие  $A_1$ , в  $m_2$  опытах – событие  $A_2$  и т.д., в  $m_k$

опытах – событие  $A_k$  ( $\sum_{i=1}^k m_i = n$ ) выражается формулой

$$P_{m_1, m_2, \dots, m_k; n} = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$$

Если условия опытов различны, т.е. в  $i$ -м опыте событие  $A_j$  имеет вероятность  $p_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k$ ), то вероятность  $P_{m_1, m_2, \dots, m_k; n}$  вычисляется как коэффициент при члене, содержащем  $z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_k^{m_k}$  в разложении по степеням  $z_1, z_2, \dots, z_k$  производящей функции:

$$\varphi_n(z_1, z_2, \dots, z_k) = \prod_{i=1}^n (p_{1i} z_1 + p_{2i} z_2 + \dots + p_{ki} z_k).$$

### 5.3. Порядок выполнения работы

Разработать компьютерную программу для изучения свойств дискретного распределения в схеме Бернулли.

#### Программу реализовать:

- интерфейсная часть на языке разметки гипертекста HTML [13];
- функциональная часть на си-подобном языке JavaScript [23].

#### Интерфейсная часть должна включать:

- заголовок с указанием названия работы, информации об авторе, времени разработки;
- общую информацию о методе вычисления;
- поле для отображения результатов расчета в виде таблицы;
- поле для отображения результатов в графическом виде;
- выпадающее меню для задания числа испытаний и вероятности успеха.

На рис. 5.3 приведен возможный вид интерфейса.

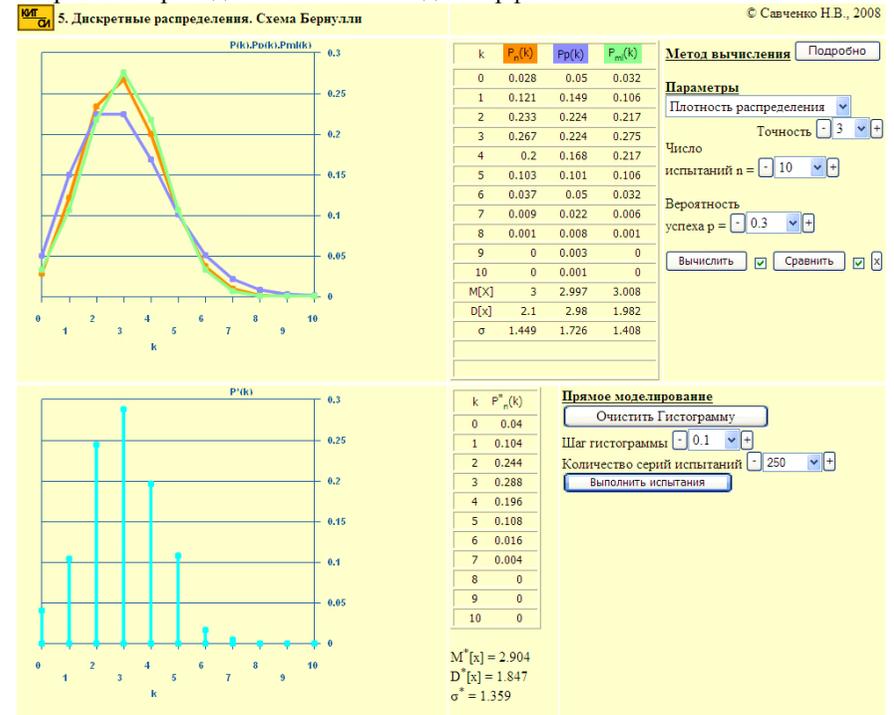


Рис.5.3. Интерфейс программы «Распределение Бернулли».

#### 5.4. Содержание отчета

Печатный отчет должен соответствовать требованиям по оформлению документов такого типа и содержать следующую информацию:

1. Титульный лист.
2. Название лабораторной работы.
3. Тема лабораторной работы.
4. Краткое описание метода выполнения.
5. Блок-схема алгоритма решения поставленной задачи.
6. Краткое объяснение интерфейса программы.
7. Листинг кода программы.
8. Результаты контрольных расчетов.
9. Развернутые ответы на контрольные вопросы.
10. Краткие выводы.

#### 5.5. Контрольные вопросы

1. Стоимость проезда в автобусе равна 3 руб., месячный проездной билет на автобус стоит 120 руб., а штраф за безбилетный проезд составляет 10 руб. Петя 24 раза в месяц ездит на автобусе в институт и обратно. Он не покупает проездного билета, никогда не платит за проезд и считает, что вероятность быть пойманным и заплатить штраф равна 0,05. Сравнить стоимость проездного билета с наиболее вероятной величиной штрафа за 48 поездок.
2. Найти вероятность появления ровно 5 гербов при 10-кратном бросании монеты.
3. Среди 12 проверяемых ревизором договоров семь оформлены неправильно. Найти вероятность того, что среди пяти договоров, произвольно отобранных ревизором для проверки, окажутся неправильно оформленными: а) ровно три договора; б) не менее трёх договоров.
4. Что вероятнее: выиграть в бильярд у равносильного противника три партии из четырёх или пять партий из восьми?
5. Банк имеет пять отделений. Ежедневно с вероятностью 0,3 каждое отделение, независимо от других, может заказать на следующий день крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Найти вероятности

следующих событий: а) поступили ровно две заявки; б) поступила хотя бы одна заявка; в) среди поступивших двух заявок есть заявка от первого отделения.

6. Игральную кость бросают пять раз. Найти вероятность того, что дважды появится число, кратное трём.
7. Известно, что из числа зрителей определённой телепрограммы 70% смотрят и рекламные блоки. Группы, состоящие из трёх наугад выбранных телезрителей, опрашивают относительно содержания рекламного блока. Рассчитать вероятности числа лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки.
8. В брокерской конторе для стимулирования прибыльности торговли применяется следующая система премирования сотрудников. Если сотрудник не достигал установленного дневного уровня прибыли на протяжении более трёх дней за две недели (10 рабочих дней), он теряет свою премию. Вероятность того, что сотрудник выполнит требуемую норму прибыли, составляет 0,85. Найти число премий, потерянных 100 сотрудниками этой брокерской конторы за год (50 рабочих недель).
9. Завод изготавливает изделия, каждое из которых должно подвергаться четырем видам испытаний. Первое испытание изделие проходит благополучно с вероятностью 0,9; второе – с вероятностью 0,95; третье – с вероятностью 0,8 и четвертое – с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что изделие пройдет благополучно: А – все четыре испытания; В – ровно два испытания (из четырех); С – не менее двух испытаний (из четырех).
10. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0,2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,3 – шатеном, с вероятностью 0,4 – блондином и с вероятностью 0,1 – рыжим. Выбирается наугад группа из шести человек. Найти вероятности следующих событий: А – в составе группы не меньше четырех блондинов; В – в составе группы хотя бы один рыжий; С – в составе группы равное число блондинов и шатенов.

---

## 6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

---

### 6.1. Цель работы

Изучить непрерывное распределение Гаусса и разработать компьютерную программу для изучения свойств этого распределения.

### 6.2. Краткие теоретические сведения [1]

Нормальное распределение – одно из важнейших распределений в теории вероятностей.

Термин принадлежит Карлу Пирсону (K.Pearson). Встречаются также названия: второй закон Лапласа, закон Гаусса, лапласовское распределение, гауссовское распределение, распределение Лапласа-Гаусса, распределение Гаусса-Лапласа. Эти названия применяется как по отношению к распределениям вероятностей случайных величин, так и по отношению к совместным распределениям вероятностей нескольких случайных величин – к многомерным распределениям случайных векторов.

Общее определение нормального распределения обычно сводится к одномерному случаю.

Распределение вероятностей случайной величины  $x$  называется нормальным, если оно имеет плотность вероятности вида

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2 / 2\sigma^2}$$

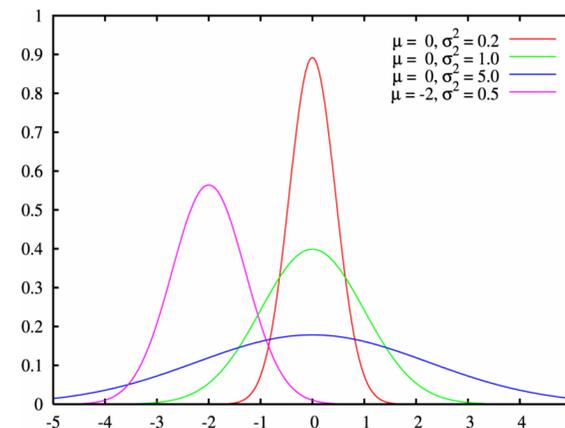


Рис.6.1 Графики плотности нормального распределения при различных значениях параметров.

Семейство нормальных распределений зависит от двух параметров  $m$  и  $\sigma > 0$ , где

$$m = E x$$

– математическое ожидание, медиана и мода распределения, а

$$\sigma^2 = D x$$

– дисперсия нормальной случайной величины.

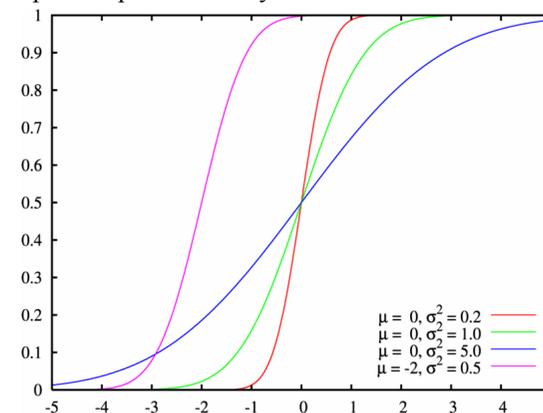


Рис.6.2 Графики функции нормального распределения при различных значениях параметров.

Характеристическая функция одномерной нормальной случайной величины имеет вид

$$f(t) = Ee^{ixt} = e^{imt - \sigma^2 t^2 / 2}.$$

Кривая нормальной плотности  $y = f(x)$  симметрична относительно ординаты, проходящей через точку  $x = m$ , и имеет в этой точке единственный максимум, равный  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ . Изменение  $\sigma$  меняет форму кривой: с уменьшением  $\sigma$  кривая нормальной плотности становится более островершинной; изменение  $m$  при постоянном параметре  $\sigma$  вызывает смещение кривой вдоль оси абсцисс, не меняя формы кривой. Площадь, заключённая под кривой нормальной плотности всегда равна единице.

При  $m = 0$ ,  $\sigma = 1$  распределение называется *стандартным нормальным распределением* и соответствующая функция распределения принимает вид

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

В общем (нестандартном) случае нормальная функция распределения вычисляется через стандартную по формуле

$$F(x; m, \sigma) = \Phi((x - m) / \sigma).$$

Функция стандартного нормального распределения (и несколько её производных) протабулированы.

Для нормального распределения

$$P(|x - m| > k\sigma) = 1 - \Phi(k) + \Phi(-k)$$

– вероятность данного неравенства убывает достаточно быстро с ростом  $k$ .

Нормальное распределение встречается в большом числе приложений. Важность нормального распределения во многих областях науки, например, в математической статистике и статистической физике вытекает из центральной предельной теоремы теории вероятностей. Если результат наблюдения является суммой многих случайных слабо взаимозависимых величин, каждая из которых вносит малый вклад относительно общей суммы, то при увеличении числа слагаемых распределение централизованного и нормированного результата стремится к нормальному распределению. Этот закон теории вероятностей имеет следствием широкое распространение нормального распределения, что и стало одной из причин его наименования. Например, следующие случайные величины хорошо моделируются нормальным распределением:

- отклонение при стрельбе
- погрешности измерений (однако, погрешности некоторых измерительных приборов имеют не нормальные распределения)
- некоторые характеристики живых организмов в популяции

Такое широкое распространение этого распределения связано с тем, что оно является бесконечно делимым непрерывным распределением с конечной дисперсией. Поэтому к нему в пределе приближаются некоторые другие, например, биномиальное и Пуассоновское. Этим распределением моделируются многие не детерминированные физические процессы. Простейшие приближённые методы моделирования основываются на центральной предельной теореме. Именно, если сложить несколько независимых одинаково распределённых величин с конечной дисперсией, то сумма будет распределена примерно нормально.

Например, если сложить 12 независимых стандартно равномерно распределённых случайных величин, получим приближённое стандартное нормальное распределение. Для программного генерирования нормально распределённых псевдослучайных величин предпочтительнее использовать преобразование Бокса – Муллера. Оно позволяет генерировать одну нормально распределённую величину на базе одной равномерно распределённой.

Моментами и абсолютными моментами случайной величины  $X$  называются математические ожидания  $X^p$  и  $|X|^p$  соответственно. Если математическое ожидание случайной величины  $\mu = 0$ , то эти параметры называются *центральными моментами*. В большинстве случаев представляют интерес моменты для целых  $p$ . Если случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение, то для неё существуют (конечны) моменты при всех  $p$  с действительной частью больше  $-1$ . Для неотрицательных целых  $p$ , центральные моменты таковы:

$$E[X^p] = \begin{cases} 0, & p = 2n + 1 \\ \sigma^p (p-1)!!, & p = 2n \end{cases}$$

Здесь  $n!!$  означает двойной факториал, то есть произведение всех нечетных от  $n$  до 1.

Центральные абсолютные моменты для неотрицательных целых  $p$  таковы:

$$E[|X|^p] = \sigma^p (p-1)!! \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad p = 2n + 1 \\ 1, \quad p = 2n \end{array} \right\} = \sigma^p \frac{2^{p/2} \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}}.$$

Последняя формула справедлива также для произвольных значений параметра  $p > 1$ .

Нормальное распределение является бесконечно делимым. Если случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы и имеют нормальное распределение с математическими ожиданиями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и дисперсиями  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$  соответственно, то  $X_1 + X_2$  также имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $\mu_1 + \mu_2$  и дисперсией  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ . Отсюда вытекает, что нормальная случайная величина представима как сумма произвольного числа независимых нормальных случайных величин.

Нормальное распределение является непрерывным распределением с максимальной энтропией при заданном математическом ожидании и дисперсии.

Многомерное нормальное распределение используется при исследовании свойств личности человека в психологии и психиатрии. В частности, для моделирования процесса демократических выборов.

При практическом решении задач о нормально распределенных случайных величинах важно иметь формулы для вычисления вероятности попадания величины в некоторый интервал. Пусть  $X$  распределена по нормальному закону с параметрами  $\mu$  и  $\sigma$ , тогда вероятность того, что  $X$  примет значение, принадлежащее интервалу  $(\alpha, \beta)$ , равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right).$$

Здесь  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$  – функция Лапласа.

В случае, когда данный интервал  $(\alpha, \beta)$  симметричен относительно математического ожидания, то есть может быть представлен как  $(\alpha, \beta) = (m - \delta, m + \delta)$ , формула принимает следующий вид:  $P(|X - m| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$ .

Используя предыдущую формулу и таблицу значений функции Лапласа, можно вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от своего математического ожидания по абсолютной величине не превысит 3 средних квадратичных отклонений:  $P(|X - m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973 = 99,73\%$  (событие практически достоверное). Этот факт обычно формулируют в следующем виде:

Правило трех сигм. Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратичного отклонения.

Пример. Случайная величина имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $\mu = 10$  и средним квадратичным отклонением  $\sigma = 5$ . Найти вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу  $(5, 25)$ . Решение. По условию имеем:  $m = 10$ ,  $\sigma = 5$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 25$ . Подставляем в формулу:

$$P(5 < X < 25) = \Phi((25-10)/5) - \Phi((5-10)/5) = \Phi(3) - \Phi(-1) = \Phi(3) + \Phi(1) = 0,4986 + 0,3413 = 0,8399.$$

### 6.3. Порядок выполнения работы

Разработать компьютерную программу для изучения свойств нормального распределения.

#### Программу реализовать:

- интерфейсная часть на языке разметки гипертекста HTML [13];
- функциональная часть на си-подобном языке JavaScript [23].

#### Интерфейсная часть должна включать:

- заголовок с указанием названия работы, информации об авторе, времени разработки;
- общую информацию о методе вычисления;
- поле для отображения результатов расчета в виде таблицы;
- поле для отображения результатов в графическом виде;
- выпадающее меню для задания числа испытаний и вероятности успеха.

На рис. 6.3 приведен возможный вид интерфейса.

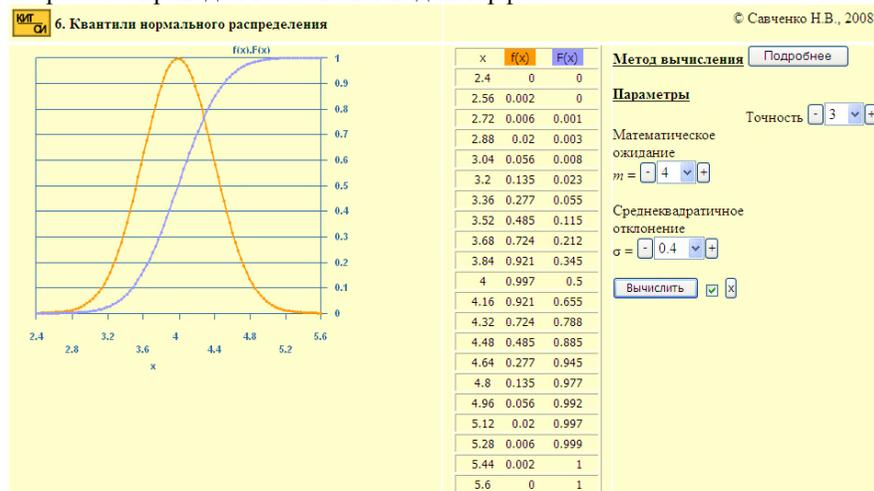


Рис.6.3. Интерфейс программы «Нормальное распределение».

### 6.4. Содержание отчета

Печатный отчет должен соответствовать требованиям по оформлению документов такого типа и содержать следующую информацию:

1. Титульный лист.
2. Название лабораторной работы.
3. Тема лабораторной работы.
4. Краткое описание метода выполнения.
5. Блок-схема алгоритма решения поставленной задачи.
6. Краткое объяснение интерфейса программы.
7. Листинг кода программы.
8. Результаты контрольных расчетов.
9. Развернутые ответы на контрольные вопросы.
10. Краткие выводы.

### 6.5. Контрольные вопросы

1. Случайная величина  $X$  подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией 4. Найдем выражение для плотности вероятности этой случайной величины.
2. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения, с гарантией на 15 лет и средним квадратичным отклонением, равным 3 годам. Определим вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет.
3. Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $m = 0$ ,  $\sigma = 1$ . Что больше:  $P\{-0,5 < \xi < -0,1\}$  или  $P\{1 < \xi < 2\}$ ?
4. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических (одного знака) погрешностей. Случайные погрешности взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением  $\sigma = 20$  г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с погрешностью, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.
5. Используя свойства кривой плотности вероятности случайной величины  $X$ , подчиненной нормальному закону распределения,

найдите ее математическое ожидание, если известно, что  $P(-\infty < X < -3) = P(G < X < +\infty)$ . Сделайте чертеж.

6. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически; их средняя масса равна 1,06 кг. Найти стандартное отклонение, если 5% коробок имеют массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.
7. Случайная величина  $X$  подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием,  $\mu = 50$ . Определите дисперсию случайной величины  $X$ , если известно, что вероятность принятия случайной величиной значения в интервале  $]150; 60[$  равна 0,3413.
8. Случайная величина  $X$  подчинена нормальному закону распределения с параметрами  $m = 0$  и  $\sigma = 2$ . Найдите интервал  $]\alpha; \beta[$ , в котором эта случайная величина принимает свои возможные значения с вероятностью 0,61, если известно, что  $\alpha = -\beta$ .
9. Дан ряд распределения случайной величины  $\xi$ :

$\xi$	2	4	6	8
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Найти: а) начальные и центральные моменты первых четырех порядков; б) асимметрию и эксцесс этой случайной величины.

10. Случайная величина эксцентриситета детали имеет распределение Рэлея:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x \geq 0.$$

Найти: а) плотность вероятности случайной величины; б) ее моду и медиану.

11. Для закона распределения  $N(1,1)$  найти вероятность попадания случайной величины в интервал  $(0, 1)$ .
12. Можно ли подобрать постоянную  $c$  так, чтобы функция  $cx^{-3}$  определяла плотность распределения вероятностей на:
  - а) луче  $[1, +\infty)$ ;
  - б) луче  $[0, +\infty)$ ;
  - в) отрезке  $[-2, -1]$ .

## 7. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА. № 7. ВЫБОРОЧНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 7.1. Цель работы

Изучить тему о выборочных числовых характеристиках в математической статистике и разработать компьютерную программу для расчета этих характеристик.

### 7.2. Краткие теоретические сведения

Статистические исследования начинаются со сбора данных. Для этого производится  $n$  опытов (наблюдений) и регистрируются их результаты. Если  $x_i$  – значение исследуемой случайной величины  $X$ , полученное в  $i$ -м опыте, то последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется выборкой. Число опытов  $n$  называется объемом выборки. Выборка является исходным материалом для всех дальнейших статистических выводов о случайной величине  $X$ .

Если элементы выборки записать в порядке их возрастания, то полученная последовательность будет называться вариационным рядом. Разность между максимальным и минимальным элементами выборки называют размахом выборки. Если в выборке объема  $n$  элемент  $x_i$  встречается  $n_i$  раз, то число  $n_i$  называют частотой элемента  $x_i$ , а последовательность пар  $(x_i, n_i)$  – статистическим рядом. Обычно статистический ряд записывают в виде таблицы, первая строка которой содержит элементы  $x_i$ , а вторая – их частоты  $n_i$ .

При большом объеме выборки ее элементы объединяют в группы (разряды), представляя результаты опытов в виде группированной выборки. Для этого весь интервал значений выборки разбивают на  $k$  частичных интервалов или разрядов; в зависимости от объема выборки число интервалов  $k$  берется от 6 до 20. Затем для каждого интервала  $[a_i; a_{i+1})$  подсчитывают число  $m_i$  значений выборки, попавших в этот интервал. Очередное значение  $x_i$  относится к  $i$ -му интервалу, если  $a_i < x_i < a_{i+1}$ .

Числа  $m_i$  называются частотами. Результат этой группировки сводится в таблицу. Наряду с частотами одновременно подсчитываются и заносятся в таблицу представители интервалов, в качестве которых обычно

берут середины интервалов  $z_i = (a_i + a_{i+1})/2$ , относительные частоты

$$p_i^* = m_i/n \text{ и плотности относительных частот } f_i^* = \frac{m_i}{n(a_{i+1} - a_i)}. \text{ Для}$$

контроля правильности вычислений следует проверить равенства  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$  и  $p_1^* + p_2^* + \dots + p_n^* = 1$

**Статистической** или **эмпирической функцией распределения** случайной величины  $X$  по имеющейся выборке называется функция  $F^*(x)$  равная относительной частоте события  $\{X < x\}$ , то есть  $F^*(x) = n_x/n$ , где  $n_x$  – число значений в выборке, меньших  $x$ ;  $n$  – объем выборки.

Гистограммой называется совокупность прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы, а высоты равны соответствующим плотностям относительных частот. Если середины верхних сторон прямоугольников соединить ломаной линией, то полученная ломанная называется **полигоном**. Гистограмма и полигон могут служить некоторым приближением графика неизвестной плотности распределения  $f(x)$  случайной величины  $X$ . Точность приближения возрастает с ростом объема выборки и количества частичных интервалов.

Для генеральной совокупности объема  $N$  с распределенным количественным признаком  $X$  также можно ввести числовые характеристики.

Чаще всего применяются три основных характеристики.

Генеральное среднее – среднее арифметическое значений признака  $X$  генеральной совокупности:

$$\bar{x}_G = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}.$$

Если в генеральной совокупности значения признака  $x_1, x_2, \dots, x_k$  имеют частоты  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , причем  $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ , то

$$\bar{x}_G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i N_i = \sum_{i=1}^k p_i x_i = M(X),$$

где  $p_i = \frac{N_i}{N}$  – вероятности появления признака  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

Генеральная дисперсия – среднее по генеральной совокупности значение квадрата отклонения  $x_i - \bar{x}_G$ ,

$$D_G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_G)^2 N_i = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - \bar{x}_G)^2.$$

Генеральное среднее квадратическое отклонение –  $\sigma_G = \sqrt{D_G}$ .

Употребляется также термин стандартное отклонение.

Оценкой моды  $d_x$  унимодального (одновершинного) распределения является элемент выборки, встречающийся с наибольшей частотой. Оценкой медианы  $h_x$  называют число, которое делит вариационный ряд на две части, содержащие равное число элементов.

Если объем выборки нечетное число (т.е.  $n = 2k+1$ ), то  $\bar{h} = x_{k+1}$ , т.е. является элементом вариационного ряда со средним номером. Если же  $n = 2k$ , то  $\bar{h} = (x_{k+1} + x_k)/2$ .

Оценки начальных и центральных моментов 1-го порядка вычисляются по формулам

$$\bar{a}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^l, \quad \bar{\mu}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^l, \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

По группированной выборке оценки моментов вычисляются по формулам

$$\bar{\alpha}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^l m_i, \quad \bar{\mu}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^l m_i, \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

Форма распределения случайной величины  $X$  характеризуется коэффициентами асимметрии и эксцесса, оценки которых вычисляются по

$$\text{формулам } \bar{A}_x = \frac{\bar{\mu}_3}{\bar{\sigma}_x^3}, \quad \bar{E}_x = \frac{\bar{\mu}_4}{\bar{\sigma}_x^4} - 3.$$

### 7.3. Порядок выполнения работы

Составить компьютерную программу нахождения выборочных числовых характеристик. Программу реализовать:

- интерфейсная часть на языке разметки гипертекста HTML [3];
- функциональная часть на си-подобном языке JavaScript [4].

Интерфейсная часть должна включать:

- заголовок с указанием названия работы, информации об авторе, времени разработки;
- поля ввода исходных данных;
- возможность проверки работоспособности программы на тестовых примерах;
- поле вывода результатов расчета.

На рис. 7.1 приведен возможный вид интерфейса.

#### Выборочные числовые характеристики

© 2013 Савченко н.в., НТУ "ХПИ", Харьков, Новая Водолага

Вычислить Точность 2 Пример Фадеева 2006, стр. 125, Зад. 29

В таблице приведены сгруппированные данные о коэффициентах соотношения заемных и собственных средств на 100 малых предприятиях региона. Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, среднее квадратичное отклонение, выборочную моду.

$x_i =$	5.1	$n_i =$	5
	5.2		8
	5.3		12
	5.4		20
	5.5		26
	5.6		15
	5.7		10
	5.8		4

Выборочное среднее равно 5.46

Выборочная дисперсия равна 0.03

Выборочное среднее квадратичное отклонение равно 0.17

Выборочная мода равна 5.5

Рис. 7.1. Интерфейс программы «Выборочные характеристики».

### 7.4. Содержание отчета

Печатный отчет должен соответствовать требованиям по оформлению документов такого типа и содержать следующую информацию:

- Титульный лист.
- Название лабораторной работы.
- Тема лабораторной работы.
- Краткое описание метода выполнения.
- Блок-схема алгоритма решения поставленной задачи.
- Краткое объяснение интерфейса программы.
- Листинг кода программы.
- Результаты контрольных расчетов.
- Развернутые ответы на контрольные вопросы.
- Краткие выводы.

#### 7.5. Контрольные вопросы

- Найти:
  - выборочную среднюю;
  - выборочную дисперсию;
  - выборочное среднее квадратическое отклонение
 по данному статистическому распределению выборки (в первой строке указаны выборочные варианты  $x_i$ , а во второй – соответственные частоты  $n_i$  количественного признака  $X$ ).

$x_i$	45	50	55	60	65	70	75
$n_i$	4	6	10	40	20	12	8

- Вычислить выборочные средние и дисперсии группированных выборок:

Границы	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
Интервалов						
Частота $m_i$	8	14	40	26	6	4

- На одном из участков шоссе было проведено измерение средней скорости движения автомобилей. Результаты сведены в следующую таблицу:

Скорость	61-65	65-69	69-73	73-77	77-81
Количество автомобилей	1	4	5	8	14

Вычислить выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса распределения.

---

## 8. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. РЕГРЕССИЯ

---

### 8.1. Цель работы

Изучить тему об использовании метода наименьших квадратов при вычислении регрессии и разработать компьютерную программу для расчета линейных моделей.

### 8.2. Краткие теоретические сведения

**Метод наименьших квадратов (МНК, OLS, Ordinary Least Squares)** – один из базовых методов регрессионного анализа для оценки неизвестных параметров регрессионных моделей по выборочным данным. Метод основан на минимизации суммы квадратов остатков регрессии. Необходимо отметить, что собственно методом наименьших квадратов можно назвать метод решения задачи в любой области, если решение заключается или удовлетворяет некоторому критерию минимизации суммы квадратов некоторых функций от искомых переменных. Поэтому метод наименьших квадратов может применяться также для приближённого представления (аппроксимации) заданной функции другими (более простыми) функциями, при нахождении совокупности величин, удовлетворяющих уравнениям или ограничениям, количество которых превышает количество этих величин и т. д.

Пусть задана некоторая (параметрическая) модель вероятностной (регрессионной) зависимости между (объясняемой) переменной  $y$  и множеством факторов (объясняющих переменных)  $x$

$$y = f(x, b) + \varepsilon,$$

где  $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$  – вектор неизвестных параметров модели  $\varepsilon$  – случайная ошибка модели.

Пусть также имеются выборочные наблюдения значений указанных переменных. Пусть  $t$  – номер наблюдения ( $t = 1..n$ ). Тогда  $y_t, x_t$  – значения переменных в  $t$ -м наблюдении. Тогда при заданных значениях параметров  $b$  можно рассчитать теоретические (модельные) значения объясняемой переменной  $y$ :  $\hat{y}_t = f(x_t, b)$ .

Тогда можно рассчитать остатки регрессионной модели – разницу между наблюдаемыми значениями объясняемой переменной и теоретическими (модельными, оцененными):

$$e_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - f(x_t, b).$$

Величина остатков зависит от значений параметров  $b$ .

Сущность МНК (обычного, классического) заключается в том, чтобы найти такие параметры  $b$ , при которых сумма квадратов остатков  $RSS(b)$  (Residual Sum of Squares) будет минимальной:

$$\hat{b}_{OLS} = \arg \min_b RSS(b),$$

$$RSS(b) = e^T e = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, b))^2.$$

В общем случае решение этой задачи может осуществляться численными методами оптимизации (минимизации). В этом случае говорят о нелинейном МНК (NLS или NLLS – Non-Linear Least Squares). Во многих случаях можно получить аналитическое решение. Для решения задачи минимизации необходимо найти стационарные точки функции  $RSS(b)$ , продифференцировав её по неизвестным параметрам  $b$ , приравняв производные к нулю и решив полученную систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, b)) \frac{\partial f(x_i, b)}{\partial b} = 0$$

Если случайные ошибки модели имеют нормальное распределение, имеют одинаковую дисперсию и некоррелированы между собой, МНК-оценки параметров совпадают с оценками метода максимального правдоподобия (ММП).

### МНК в случае линейной модели

Пусть регрессионная зависимость является линейной:

$$y_i = \sum_{j=1}^n b_j x_{ij} + \varepsilon = x_i^T b + \varepsilon_i$$

Пусть  $y$  – вектор-столбец наблюдений объясняемой переменной, а  $X$  – это  $(n \times k)$ -матрица наблюдений факторов (строки матрицы – векторы значений факторов в данном наблюдении, по столбцам – вектор значений данного фактора во всех наблюдениях). Матричное представление линейной модели имеет вид:

$$y = Xb + \varepsilon.$$

Тогда вектор оценок объясняемой переменной и вектор остатков регрессии будут равны

$$\hat{y} = Xb, e = y - \hat{y} = y - Xb$$

соответственно сумма квадратов остатков регрессии будет равна

$$RSS = e^T e = (y - Xb)^T (y - Xb).$$

Дифференцируя эту функцию по вектору параметров и приравняв производные к нулю, получим систему уравнений (в матричной форме):

$$(X^T X)b = X^T y.$$

В расшифрованной матричной форме эта система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \sum x_{t1}^2 & \sum x_{t1}x_{t2} & \sum x_{t1}x_{t3} & \dots & \sum x_{t1}x_{tk} \\ \sum x_{t2}x_{t1} & \sum x_{t2}^2 & \sum x_{t2}x_{t3} & \dots & \sum x_{t2}x_{tk} \\ \sum x_{t3}x_{t1} & \sum x_{t3}x_{t2} & \sum x_{t3}^2 & \dots & \sum x_{t3}x_{tk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{tk}x_{t1} & \sum x_{tk}x_{t2} & \sum x_{tk}x_{t3} & \dots & \sum x_{tk}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_{t1}y_t \\ \sum x_{t2}y_t \\ \sum x_{t3}y_t \\ \dots \\ \sum x_{tk}y_t \end{pmatrix},$$

где все суммы берутся по всем допустимым значениям  $t$ .

Если в модель включена константа (как обычно), то  $x_{i1} = 1$  при всех  $t$ , поэтому в левом верхнем углу матрицы системы уравнений находится количество наблюдений  $n$ , а в остальных элементах первой строки и первого столбца – просто суммы значений переменных:  $\sum x_{ij}$  и первый элемент правой части системы –  $\sum y_i$ . Решение этой системы уравнений и дает общую формулу МНК-оценок для линейной модели:

$$\hat{b}_{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T y = \left(\frac{1}{n} X^T X\right)^{-1} \frac{1}{n} X^T y = V_x^{-1} C_{xy}$$

Для аналитических целей оказывается полезным последнее представление этой формулы (в системе уравнений при делении на  $n$ , вместо сумм фигурируют средние арифметические). Если в регрессионной модели данные центрированы, то в этом представлении первая матрица имеет смысл выборочной ковариационной матрицы факторов, а вторая – вектор ковариаций факторов с зависимой переменной. Если кроме того данные ещё и нормированы на СКО (то есть в конечном итоге стандартизированы), то первая матрица имеет смысл выборочной корреляционной матрицы факторов, второй вектор – вектора выборочных корреляций факторов с зависимой переменной.

Немаловажное свойство МНК-оценок для моделей с константой – линия построенной регрессии проходит через центр тяжести выборочных данных, то есть выполняется равенство:

$$\bar{y} = \hat{b}_1 + \sum_{j=2}^n \hat{b}_j \bar{x}_j$$

В частности, в крайнем случае, когда единственным регрессором является константа, получаем, что МНК-оценка единственного параметра (собственно константы) равна среднему значению объясняемой переменной. То есть среднее арифметическое, известное своими хорошими

свойствами из законов больших чисел, также является МНК-оценкой – удовлетворяет критерию минимума суммы квадратов отклонений от неё.

### Простейшие частные случаи

В случае парной линейной регрессии  $y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$ , когда оценивается линейная зависимость одной переменной от другой, формулы расчета упрощаются (можно обойтись без матричной алгебры). Система уравнений имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix}$$

Отсюда несложно найти оценки коэффициентов:

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{Cov(x, y)}{Var(x)} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \\ \hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} \end{cases}$$

Несмотря на то что в общем случае модели с константой предпочтительней, в некоторых случаях из теоретических соображений известно, что константа  $a$  должна быть равна нулю. Например, в физике зависимость между напряжением и силой тока имеет вид  $U = IR$ ; измеряя напряжение и силу тока, необходимо оценить сопротивление. В таком случае речь идёт о модели  $y = bx$ . В этом случае вместо системы уравнений имеем единственное уравнение

$$\left(\sum x_i^2\right)b = \sum x_i y_i$$

Следовательно, формула оценки единственного коэффициента имеет вид

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}$$

### Свойства МНК-оценок

В первую очередь, отметим, что для линейных моделей МНК-оценки являются линейными оценками, как это следует из вышеприведённой формулы. Для несмещённости МНК-оценок необходимо и достаточно выполнения важнейшего условия регрессионного анализа:

условное по факторам математическое ожидание случайной ошибки должно быть равно нулю. Данное условие, в частности, выполнено, если

1. математическое ожидание случайных ошибок равно нулю, и
2. факторы и случайные ошибки – независимые случайные величины.

Первое условие можно считать выполненным всегда для моделей с константой, так как константа берёт на себя ненулевое математическое ожидание ошибок (поэтому модели с константой в общем случае предпочтительнее).

Второе условие – условие экзогенности факторов – принципиальное. Если это свойство не выполнено, то можно считать, что практически любые оценки будут крайне неудовлетворительными: они не будут даже состоятельными (то есть даже очень большой объём данных не позволяет получить качественные оценки в этом случае). В классическом случае делается более сильное предположение о детерминированности факторов, в отличие от случайной ошибки, что автоматически означает выполнение условия экзогенности. В общем случае для состоятельности оценок достаточно выполнения условия экзогенности вместе со сходимостью матрицы  $V_{xk}$  некоторой невырожденной матрице при увеличении объёма выборки до бесконечности.

Для того, чтобы кроме состоятельности и несмещённости, оценки (обычного) МНК были ещё и эффективными (наилучшими в классе линейных несмещённых оценок) необходимо выполнение дополнительных свойств случайной ошибки:

- Постоянная (одинаковая) дисперсия случайных ошибок во всех наблюдениях (отсутствие гетероскедастичности):

$$V(\varepsilon_i) = \sigma^2 = const$$

- Отсутствие корреляции (автокорреляции) случайных ошибок в разных наблюдениях между собой

$$\forall i, j = 1..n, i \neq j \text{ cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$$

Данные предположения можно сформулировать для ковариационной матрицы вектора случайных ошибок  $V(\varepsilon) = \sigma^2 I$ .

Линейная модель, удовлетворяющая таким условиям, называется классической. МНК-оценки для классической линейной регрессии являются несмещёнными, состоятельными и наиболее эффективными оценками в классе всех линейных несмещённых оценок (в англоязычной литературе иногда употребляют аббревиатуру BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) – наилучшая линейная несмещённая оценка; в отечественной литературе чаще приводится теорема Гаусса – Маркова). Как нетрудно

показать, ковариационная матрица вектора оценок коэффициентов будет равна:

$$V(\hat{\beta}_{OLS}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

Эффективность означает, что эта ковариационная матрица является «минимальной» (любая линейная комбинация коэффициентов, и в частности сами коэффициенты, имеют минимальную дисперсию), то есть в классе линейных несмещенных оценок оценки МНК- наилучшие.

Диагональные элементы этой матрицы – дисперсии оценок коэффициентов – важные параметры качества полученных оценок. Однако рассчитать ковариационную матрицу невозможно, поскольку дисперсия случайных ошибок неизвестна. Можно доказать, что несмещенной и состоятельной (для классической линейной модели) оценкой дисперсии случайных ошибок является величина:

$$s^2 = \frac{RSS}{n - k}$$

Подставив данное значение в формулу для ковариационной матрицы и получим оценку ковариационной матрицы. Полученные оценки также являются несмещенными и состоятельными. Важно также то, что оценка дисперсии ошибок (а значит и дисперсий коэффициентов) и оценки параметров модели являются независимыми случайными величинами, что позволяет получить тестовые статистики для проверки гипотез о коэффициентах модели.

Необходимо отметить, что если классические предположения не выполнены, МНК-оценки параметров не являются наиболее эффективными оценками (оставаясь несмещенными и состоятельными). Однако, ещё более ухудшается оценка ковариационной матрицы – она становится смещенной и несостоятельной. Это означает, что статистические выводы о качестве построенной модели в таком случае могут быть крайне недостоверными.

Одним из вариантов решения последней проблемы является применение специальных оценок ковариационной матрицы, которые являются состоятельными при нарушениях классических предположений (стандартные ошибки в форме Уайта и стандартные ошибки в форме Ньюи-Уеста). Другой подход заключается в применении так называемого обобщенного МНК.

### 8.3. Порядок выполнения работы

Составить компьютерную программу нахождения регрессии для линейной модели. Программу реализовать:

- интерфейсная часть на языке разметки гипертекста HTML [3];
- функциональная часть на си-подобном языке JavaScript [4].

Интерфейсная часть должна включать:

- заголовок с указанием названия работы, информации об авторе, времени разработки;
- поля ввода исходных данных;
- возможность проверки работоспособности программы на тестовых примерах;
- поле вывода результатов расчета.

На рис. 8.1 приведен возможный вид интерфейса.

**Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия**  
© 2013 Савченко н.в., НТУ "ХПИ", Харьков, Новая Водолага

Вычислить Точность 2 Пример Фадеева 2006, стр. 175, Зад. 1

В таблице представлены данные о производстве электроэнергии в России за 1998-2003 гг. Провести линейную регрессию производства по годам и сделать прогноз на 2004 г.

x = 1998  
1999  
2000  
2001  
2002  
2003

y = 827  
846  
878  
891  
891  
915

x<sub>0</sub> = 2004

**Исходные данные**

1.	1998	827
2.	1999	846
3.	2000	878
4.	2001	891
5.	2002	891
6.	2003	915

**Уравнение линейной регрессии  $y = a + bx$  или  $y = y_s + b(x - x_s)$**

**Объем выборки равен 6**

**Среднее значение x равно 2000.5**

**Среднее значение y равно 874.67**

**Коэффициент a равен -32733.73**

**Коэффициент b равен 16.8**

**Значение y(2004) = 933.47**

Рис. 8.1. Интерфейс программы «Метод наименьших квадратов. Линейная

регрессия».

#### 8.4. Содержание отчета

Печатный отчет должен соответствовать требованиям по оформлению документов такого типа и содержать следующую информацию:

1. Титульный лист.
2. Название лабораторной работы.
3. Тема лабораторной работы.
4. Краткое описание метода выполнения.
5. Блок-схема алгоритма решения поставленной задачи.
6. Краткое объяснение интерфейса программы.
7. Листинг кода программы.
8. Результаты контрольных расчетов.
9. Развернутые ответы на контрольные вопросы.
10. Краткие выводы.

#### 8.5. Контрольные вопросы

1. Годовые прибыли фирмы (в тыс. долл.) за 5 лет представлены в таблице.

Год	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й
Прибыль	99	112	120	135	144

Провести линейную регрессию и дать прогноз на следующий год.

2. В таблице представлены данные за 10 лет о трудоемкости производства 1 т. цемента (нормо-смен).

Год	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
трудоемкость	7,9	8,3	7,5	6,9	7,2	6,5	5,8	4,9	5,1	4,4

Провести линейную регрессию и дать прогноз на следующий год.

3. В таблице представлены данные о производстве электроэнергии за 1998-2003 гг.

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Производство Млрд. кВт-ч	827	846	878	891	891	915

Провести линейную регрессию производства по годам и сделать прогноз на 2004 г.

#### Контрольные вопросы

##### 1. Алгебра событий

1. Что изучает теория вероятностей?
2. Опишите понятие эксперимента в классической схеме событий. Дайте определения случайного, невозможного, достоверного событий.
3. Дайте определение противоположных событий.
4. Сформулируйте определения суммы и произведения событий.
5. Что такое полная группа событий?
6. Какие события называются несовместными?
7. Что такое эквивалентные, равновозможные события?
8. Что такое элементарное событие?
9. Покажите на диаграммах Венна изображение событий, указанных в предыдущих вопросах 3, 4, 5, 6.
10. Напишите первый распределительный закон и формулы де Моргана.
11. Сформулируйте понятия элементарного события, пространства элементарных событий, события в рамках аксиоматической схемы событий.
12. Сформулируйте аксиомы алгебры (поля) событий.

##### 2. Вероятность

1. Каким условиям должен удовлетворять классический эксперимент с равновозможными случаями? Приведите примеры реальных экспериментов, удовлетворяющих этим требованиям.
2. Дайте классическое определение вероятности.
3. Сформулируйте свойства вероятности.
4. Что изучает комбинаторика? Что такое соединения?
5. Сформулируйте комбинаторный принцип «умножения».
6. Дайте определение размещений из  $n$  элементов по  $k$  элементов. Чему равно их число? Приведите примеры.
7. Дайте определение перестановок из  $n$  элементов. Напишите формулу для их числа. Приведите примеры.
8. Дайте определение сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  элементов. Чему равно их число? Приведите примеры.
9. Дайте определение размещений с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  элементов. Напишите формулу для их числа. Приведите примеры.
10. Дайте определение перестановок с повторениями из  $n$  элементов, различающихся по типу:  $n_1$  элементов первого типа и так далее,  $n_k$  элементов  $k$ -го типа. Чему равно их число?

11. В чем состоит урновая схема?
12. Сформулируйте геометрическое определение вероятности.
13. Сформулируйте статистическое определение вероятности. Перечислите свойства относительной частоты.
14. Сформулируйте аксиоматическое определение вероятности.
15. Что такое вероятностное пространство?

### 3. Алгебра вероятности

1. Напишите формулу, выражающую правило сложения вероятностей для  $n$  попарно несовместных событий.
2. Напишите формулу, выражающую правило сложения вероятностей для двух любых событий.
3. Что такое условная вероятность? По какой формуле она вычисляется?
4. Напишите формулу, выражающую теорему умножения вероятностей для двух любых событий. Как она обобщается для случая  $n$  любых событий?
5. Какие два события называются взаимно независимыми? Как записать условие их взаимной независимости?
6. Дайте определение взаимной независимости  $n$  событий.
7. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для  $n$  взаимно независимых событий.
8. Напишите формулу, выражающую теорему сложения вероятностей для  $n$  взаимно независимых событий.
9. Напишите формулы полной вероятности и Байеса.
10. В чем состоит схема Бернулли последовательности  $n$  независимых событий.
11. Напишите формулу для биномиальной вероятности. Вероятностью какого события она является?
12. Сформулируйте теорему Пуассона для предела биномиальной вероятности.
13. Что такое нормированная функция Лапласа? Изобразите ее график и график ее производной.
14. Напишите локальную и интегральную приближенные формулы Муавра–Лапласа для биномиальных вероятностей и их сумм.

### 4. Случайные величины и их числовые характеристики

1. Дайте общее определение случайной величины. Приведите, примеры реальных случайных величин.
2. Сформулируйте определение дискретной случайной величины. Опишите все известные Вам формы задания закона распределения дискретной случайной величины.

3. Какие случайные величины называются непрерывными?
4. Запишите формулы, выражающие функцию распределения через плотность и наоборот.
5. Какую информацию о распределении заключает в себе плотность распределения вероятностей.
6. Чему равна вероятность попадания значения непрерывной случайной величины в заданную точку?
7. Может ли равняться нулю вероятность попадания значения непрерывной случайной величины в заданный промежуток?
8. Запишите формулы, задающие законы распределения биномиальный, Пуассона и геометрический.
9. Как соотносятся между собой биномиальный закон и закон Пуассона?
10. Запишите плотности распределений вероятностей для равномерного, показательного, нормального законов.
11. Что такое числовая характеристика случайной величины?
12. Дайте определение математического ожидания случайной величины и сформулируйте его свойства. Для какой цели применяется это понятие?
13. Что такое дисперсия случайной величины? Сформулируйте свойства дисперсии. Что характеризует дисперсия?
14. Что такое мода и медиана непрерывной случайной величины?
15. Что такое начальные и центральные моменты случайной величины? Чему равен центральный момент первого порядка?

### 5. Двумерные случайные векторы

1. Сформулируйте определение двумерного случайного вектора.
2. Что такое функция распределения двумерного случайного вектора?
3. Какой двумерный случайный вектор называется дискретным? Что является его полной вероятностной характеристикой?
4. Запишите условия согласованности для двумерного дискретного случайного вектора. Какой цели они служат?
5. Дайте определение непрерывного двумерного случайного вектора.
6. Как соотносятся между собой плотность распределения и функция распределения двумерного непрерывного случайного вектора?
7. Запишите условия согласованности для двумерного непрерывного случайного вектора через функции распределения и через плотности.
8. Какие две случайные величины называются независимыми?
9. Сформулируйте необходимое и достаточное условие независимости двух случайных величин в дискретном и непрерывном случаях.
10. Перечислите свойства математического ожидания, известные из предыдущей главы, и новые.
11. Сформулируйте свойства дисперсии.

12. Что такое корреляционный момент (ковариация) и коэффициент корреляции? Какую роль он выполняет?
13. Сформулируйте свойства коэффициента корреляции.
14. Если коэффициент корреляции  $\rho_{XY}$  равен нулю, то, что можно сказать о зависимости между случайными величинами  $X$  и  $Y$ ?

#### 6. Функции случайных величин

1. Сформулируйте основную задачу, которая ставится при изучении функции случайных величин.
2. По какому закону распределена линейная функция  $Y=aX+b$  нормально распределенного аргумента? Запишите плотность вероятности случайной величины  $Y$ .
3. Достаточно ли для нахождения распределения заданной функции случайных аргументов предварительной информации о распределении этих аргументов: а) в случае, когда они взаимно независимы; б) в общем случае?
4. Каким образом связано распределение хи-квадрат с нормальным распределением?
5. Изобразить характерный вид кривой плотности распределения  $\chi^2(n)$  для  $n>4$ . Сравните между собой среднее значение случайной величины  $\chi^2(n)$  с ее модой. Попытайтесь центрировать и нормировать случайную величину  $\chi^2(n)$ .
6. Что такое стьюдентово отношение с  $n$  степенями свободы? Какой вид имеет кривая плотности распределения Стьюдента и как трансформируется она при увеличении  $n$ .
7. Чем объяснить, что для распределения Стьюдента не существуют конечные моменты порядка  $n$  и выше, а для распределения  $\chi^2(n)$  существуют моменты любого порядка?
8. Почему таблица квантилей распределения Стьюдента обычно ограничена числом степеней свободы  $n$  порядка, нескольких десятков?
9. Как вводится распределение Фишера? Почему оно тесно связано с нормальным распределением?
10. Какое свойство распределения Фишера позволяет наполовину сократить таблицу его квантилей?
11. Что означает композиционная устойчивость данного закона? Приведите примеры дискретных и непрерывных распределений, обладающих композиционной устойчивостью.

#### 7. Условные распределения. Регрессии

1. Что значит задать условное распределение случайной величины  $Y$  при фиксированном значении  $X = x_i$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) в дискретном случае?

2. Как вводится условная функция распределения и условная плотность в случае непрерывных случайных величин?
3. Дайте определение условного математического ожидания  $M_{XY}$ . Какой механический и вероятностный смысл линии регрессии  $Y$  на  $x$ ?
4. В чем состоит свойство минимальности линий регрессии?
5. Что представляют линии регрессии для нормального закона на плоскости? Какова геометрическая роль коэффициента корреляции?
6. Как связан знак коэффициента корреляции с характером регрессионных зависимостей в случае линейной корреляции
7. В чем различие между функциональной и вероятностной (стохастической) зависимостями между случайными величинами?

#### 8. Предельные теоремы

1. Напишите первое и второе неравенства Чебышева.
2. Сформулируйте теорему Чебышева и отметьте ее важный частный случай для одинаково распределенных слагаемых.
3. Дайте определение сходимости по вероятности для последовательности случайных величин.
4. Сформулируйте теорему Чебышева, используя понятие сходимости по вероятности.
5. Сформулируйте теорему Бернулли о приближении относительной частоты к вероятности события.
6. Сформулируйте центральную предельную теорему для случая одинаково распределенных слагаемых.
7. Как с помощью центральной предельной теоремы можно объяснить распределение ошибки измерения по нормальному закону?
8. Как вывести интегральную теорему Муавра-Лапласа из центральной предельной теоремы?

#### 9. Случайные процессы

1. Что такое случайная функция?
2. Что называется сечением случайной функции?
3. Как определяется понятие «реализация случайной функции»?
4. Приведите определение случайного процесса.
5. Дайте определение траектории случайного процесса.
6. Что такое  $n$ -мерное распределение процесса?
7. Приведите определения сходимости в среднем и сходимости по вероятности. Как связаны между собой эти виды сходимости?
8. Дайте определение условного среднего и определение регрессии в терминах евклидова пространства случайных величин.
9. Как определяется понятие «эмпирический процесс»?

10. Что такое простейший поток отказов?
11. Какой процесс называется телеграфным сигналом?
12. Приведите определение процесса Винера.
13. Перечислите известные Вам виды случайных процессов и дайте их определения.
14. Как определяется понятие «пуассоновский ансамбль»?
15. Дайте аксиоматическое определение процесса Пуассона. Как связан этот процесс с простейшим потоком отказов?
16. Как определяется понятие «броуновское движение»? Как связал этот процесс с процессом Винера?

### 10. Дискретные цепи Маркова

1. Дайте определение дискретной цепи Маркова.
2. Какая дискретная цепь называется однородной?
3. Запишите матрицу переходных вероятностей  $\pi$ .
4. Выведите формулу для матрицы переходных вероятностей  $\pi(k)$  за  $k$  шагов.
5. Какое состояние марковской системы называется несущественным?
6. Какие существенные состояния марковской системы называются сообщающимися?
7. Какая цепь Маркова, называется неразложимой?
8. Какая цепь Маркова называется эргодической?
9. Что такое финальные вероятности?

### Математическая статистика

#### 11. Выборка и характеристики ее распределения

1. Как в математической статистике применяются понятия и методы ТВ?
2. Сформулируйте основные задачи математической статистики.
3. Что такое генеральная совокупность? С помощью каких характеристик она может быть описана?
4. Что такое выборка, и какова ее роль?
5. Сформулируйте определение простого случайного выбора. Укажите его достоинства.
6. Какие требования предъявляются к выборке?
7. Дайте определения вариационного и статистического рядов. Как графически изображается статистический ряд?
8. Дайте определение эмпирической функции распределения. Как она изображается графически и в каком отношении находится к генеральной функции распределения?
9. Напишите формулы для четырех выборочных числовых характеристик рассеяния. Каково их назначение для симметричного распределения?

10. Дайте определения выборочных асимметрии и эксцесса. Что они характеризуют?
11. Как образуется группированный статистический ряд?
12. Что такое гистограмма? Что она характеризует?
13. Какие свойства операций математического ожидания и дисперсии используются в доказательстве сходимости по вероятности выборочных моментов к генеральным моментам?
14. Какие результаты из теории вероятностей применяются при изучении асимптотического поведения выборочных моментов?

#### 12. Теория точечного оценивания числовых характеристик и параметров распределений

1. Что такое точечная оценка параметра или числовой характеристики распределения?
2. Сформулируйте понятие состоятельной оценки.
3. Какая оценка называется несмещенной?
4. Выборочное среднее  $\bar{X}$  будет ли состоятельной и несмещенной оценкой генерального математического ожидания? Можно ли то же самое сказать про выборочную дисперсию  $s^2$  по отношению к генеральной дисперсии  $\sigma^2$ ?
5. Что такое эффективная и асимптотически эффективная оценки?
6. Какая оценка называется робастной?
7. Сформулируйте определение функции и уравнения правдоподобия для случая непрерывной генеральной совокупности, имеющей плотность распределения с одним параметром.
8. Что такое оценка максимального правдоподобия параметра распределения генеральной совокупности?
9. Опишите метод моментов для получения оценок параметров распределения.
10. Опишите системный метод точечного оценивания числовых характеристик положения и рассеяния для случая нормального распределения.
11. Среди оценок центра нормального распределения  $\bar{X}$ ,  $med$ ,  $tq$ ,  $tR$  укажите наиболее и наименее эффективную. Какие из них являются робастными?
12. Среди несмещенных оценок  $\sigma$  для нормального распределения  $s'$ ,  $d^*$ ,  $q^*$ ,  $R^*$  укажите наиболее и наименее эффективную. Какая из них является робастной?

#### 13. Интервальное оценивание числовых характеристик и параметров распределения

1. Сформулируйте определение доверительного интервала.

2. Как соотносятся между собой точечные и интервальные оценки одной и той же величины?
3. Как связаны между собой доверительная вероятность и уровень значимости?
4. Напишите статистику Стюдента. По какому закону она распределена? Как используется это закон для построения доверительного интервала для математического ожидания нормальной генеральной совокупности?
5. Как используется закон хи-квадрат при построении доверительного интервала для среднего квадратического отклонения нормальной генеральной совокупности?
6. Почему при интервальном оценивании математического ожидания  $m$  и среднего квадратического отклонения  $\sigma$  при большом объеме выборки из произвольной генеральной совокупности применяется функция Лапласа? Как найти квантили нормального распределения?

#### 14. Проверка статистических гипотез

1. Сформулируйте основные, статистические гипотезы и укажите практические ситуации, в которых они возникают.
2. Дайте определение статистической гипотезы.
3. Что такое критерий значимости и статистика критерия?
4. Что такое гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ .
5. Дайте, определение уровня значимости и критической области критерия.
6. Укажите какую-нибудь статистику критерия для проверки гипотезы о заданной вероятности события.
7. Что такое критерий согласия?
8. Сформулируйте, общую схему проверки статистических гипотез.
9. Что такое ошибки 1-го и 2-го рода?
10. Что такое односторонний и двусторонний критерии?
11. Сформулируйте определения мощности и функции мощности критерия.
12. Кратко сформулируйте общие идеи и методик применения важнейшего критерия хи-квадрат для проверки гипотезы о законе распределения генеральной совокупности.
13. Приведите статистику критерия согласия Колмогорова.
14. Сформулируйте критерий Смирнова для проверки гипотезы однородности двух выборок.
15. Запишите две статистики критерия аномальности результатов наблюдений.

16. Сформулируйте критерий проверки равенства дисперсий двух генеральных совокупностей.
17. Как проверяется гипотеза о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей?

#### 15. Регрессионный анализ

1. Что такое отклик, факторы, регрессия?
2. Запишите линейную многофакторную регрессионную модель.
3. Запишите простую линейную регрессию.
4. В чем заключается метод наименьших квадратов в применении к простой линейной регрессии?
5. Запишите формулу для остаточной регрессии  $s_2$ , которая является несмещенной оценкой дисперсии  $\sigma^2$  отклика  $Y$ .
6. Для чего применяется коридор ошибок простой линейной регрессии? Как он выглядит на чертеже?
7. В чем состоит проблема адекватности простой линейной регрессии? Как она решается? Что такое дисперсия воспроизводимости и дисперсия неадекватности? Как записывается отношение Фишера?

#### 16. Корреляционный анализ

1. Что такое корреляционный анализ?
2. Дайте определение выборочного коэффициента корреляции. Каковы его свойства?
3. Как проверяется гипотеза об отсутствии связи между двумя случайными величинами, имеющими совместное нормальное распределение? Опишите 3 способа проверки.
4. Запишите формулу для квадрантного (знакового) коэффициента корреляции.
5. В каких случаях применяется ранговый коэффициент корреляции Спирмена? Запишите формулу для его вычисления.
6. Что такое выборочный коэффициент корреляции между двумя событиями? Когда он применяется?
7. Для чего нужен частный выборочный коэффициент корреляции?
8. Дайте определения генерального и выборочного множественных коэффициентов корреляции. Для какой цели применяется выборочный множественный коэффициент корреляции?

## Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. Для вузов/ Е.С. Вентцель.– 10-е изд., стер.– М.: Высш. Шк., 2006.– 576 с.
2. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. вузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 448 с.
3. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 1994.– 112 с.
4. Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов.– 2-е изд., испр. и доп.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.– 1989.– 320 с.
5. Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: Учебное пособие.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 328 с.

Дискретные распределения					
	Наименование распределения	Возможные значения	Вероятность	Математическое ожидание	Дисперсия
1	Биномиальное	$0, 1, \dots, n$	$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	$np$	$npq$
2	Гипергеометрическое	$0, 1, 2, \dots, \min(M, n)$	$P_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	$n \frac{M}{N}$	$\frac{M(N-M)n(N-n)}{N^2(N-1)}$
3	Пуассона	$0, 1, 2, \dots$	$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	$\lambda$	$\lambda$
4	Геометрическое	$0, 1, 2, \dots$	$P_m = pq^{m-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
5	Отрицательное биномиальное	$r, r+1, \dots$	$P_m = C_{m-1}^{r-1} p^r q^{m-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{qr}{p^2}$

Непрерывные распределения						
	Наименование распределения	Область значений	Плотность распределения	Математическое ожидание	Дисперсия	Мода
1	Равномерное	$(a, b)$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	-
2	Нормальное	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$a$	$\sigma^2$	$a$
3	Логарифмически нормальное	$(0, \infty)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$	$e^{a-\sigma^2}$
4	Вейбулла	$(0, \infty)$	$\alpha c x^{\alpha-1} e^{-cx^\alpha}$	$\frac{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\frac{1}{c^\alpha}}$	$\frac{\Gamma(1+\frac{2}{\alpha})-\Gamma^2(1+\frac{1}{\alpha})}{\frac{2}{c^\alpha}}$	при $\alpha > 1$ $\sqrt[\alpha]{\frac{\alpha-1}{c\alpha}}$
5	Гамма	$(0, \infty)$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$-\alpha \leq 1$ $\frac{\alpha-1}{\beta} (\alpha > 1)$
6	Показательное	$(0, \infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	-
7	Хи-квадрат	$(0, \infty)$	$\frac{k}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} e^{-\frac{x}{2}}$	$k$	$2k$	$k-2$
8	Бета	$(0,1)$	$x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	$\frac{a-1}{a+b-2}$
9	Стюдента	$(-\infty, \infty)$	$[2^{-\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \sqrt{\pi n}]^{-1} \times$ $\times (1 + \frac{x^2}{2})^{-\frac{n+1}{2}}$	$0$	$\frac{1}{n-2}$	$0$
10	Фишера	$(0, \infty)$	$\frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} \times$ $\times \left(1 + \frac{n_1}{n_2} x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$	$\frac{n_2}{n_2-2}$	$\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$	$\frac{(n_1-2)n_2}{2n_1^2+n_2}$

---

**Код программы 1**

---

```
<style>
.s1 {font-size:10pt; font-family:Tahoma}
</style>
<div class="s1">
<hr>
<b>Пространство элементарных событий</b>
<br>&copy;2013 Савченко Н.В., кафедра СИ, КИТ-факультет, НТУ "ХПИ"
<hr>
Выбор объектов:
<select name="sel1" class="s1" onchange="f1()">
<option value="2">Монета</option>
<option value="4">Тетраэдр</option>
<option value="6" selected>Куб</option>
<option value="8">Октаэдр</option>
<option value="12">Додекаэдр</option>
<option value="20">Икосаэдр</option>
</select>

<select name="sel2" class="s1" onchange="f1()">
<option value="2">Монета</option>
<option value="4">Тетраэдр</option>
<option value="6" selected>Куб</option>
<option value="8">Октаэдр</option>
<option value="12">Додекаэдр</option>
<option value="20">Икосаэдр</option>
</select>

Условие:
<select name="sel3" class="s1" onchange="f1()">
<option value="0" selected></option>
<option value="1">Очки: четные четные</option>
<option value="2">Очки: нечетные четные</option>
<option value="3">Очки: четные нечетные</option>
<option value="4">Очки: нечетные нечетные</option>
<option value="5">Сумма очков четная</option>
<option value="6">Сумма очков нечетная</option>
<option value="7">На первом очков больше</option>
<option value="8">На первом очков меньше</option>
<option value="9">Очки равны</option>
```

```
<option value="10">Сумма очков делится на 3</option>
<option value="11">Сумма очков делится на 5</option>
</select>
```

```
<p><span ID="res"></span>
<p><span ID="res1"></span>
```

```
</div>
<script>
f1();
function f1()
{
document.all.res.innerHTML="";
document.all.res1.innerHTML="";
```

```
var n1,n2,i,j,sum, par;
```

```
n1=1*document.all.sel1.value;
n2=1*document.all.sel2.value;
par=1*document.all.sel3.value;
```

```
sum="";
sum+="<table class=s1 spacing=1 cellpadding=1 border=1>"
m=0;m1=0;
for (i=1;i<=n1;i++)
{
sum+="<tr>"
for (j=1;j<=n2;j++)
{
flag=1;
if(par==1 && (i % 2==0) && (j % 2==0)) {flag=0; m1++; sum+="<td
width=40 height=40 align=center bgcolor=yellow>("+i+", "+j+")</td>"};
if(par==2 && (i % 2!=0) && (j % 2==0)) {flag=0; m1++; sum+="<td
width=40 height=40 align=center bgcolor=yellow>("+i+", "+j+")</td>"};
if(par==3 && (i % 2==0) && (j % 2!=0)) {flag=0; m1++; sum+="<td
width=40 height=40 align=center bgcolor=yellow>("+i+", "+j+")</td>"};
if(par==4 && (i % 2!=0) && (j % 2!=0)) {flag=0; m1++; sum+="<td
width=40 height=40 align=center bgcolor=yellow>("+i+", "+j+")</td>"};
if(par==5 && ((i+j) % 2==0)) {flag=0; m1++; sum+="<td width=40
height=40 align=center bgcolor=yellow>("+i+", "+j+")</td>"};
```

```

if(par==6 && ((i+j) % 2!=0)) {flag=0; m1++; sum+="<td width=40
height=40 align=center bgcolor=yellow>("+i+", "+j+")</td>"};
if(par==7 && (i>j)) {flag=0; m1++; sum+="<td width=40 height=40
align=center bgcolor=yellow>("+i+", "+j+")</td>"};
if(par==8 && (i<j)) {flag=0; m1++; sum+="<td width=40 height=40
align=center bgcolor=yellow>("+i+", "+j+")</td>"};
if(par==9 && (i==j)) {flag=0; m1++; sum+="<td width=40 height=40
align=center bgcolor=yellow>("+i+", "+j+")</td>"};
if(par==10 && ((i+j) % 3==0)) {flag=0; m1++; sum+="<td width=40
height=40 align=center bgcolor=yellow>("+i+", "+j+")</td>"};
if(par==11 && ((i+j) % 5==0)) {flag=0; m1++; sum+="<td width=40
height=40 align=center bgcolor=yellow>("+i+", "+j+")</td>"};

```

```

if(flag==1)          sum+="<td          width=40          height=40
align=center>("+i+", "+j+")</td>";
m++;
}
sum+="</tr>"
}
sum+="</table>"

```

```

document.all.res.innerHTML=sum;
document.all.res1.innerHTML="Куперий n="+m1+"<br>Всего: m="+m;
}
</script>

```

---

**Код программы 2**

---

```

<style>
.s1 {font-size:10pt; font-family:Tahoma}
</style>
<div class="s1">
<hr>
<!--
Эпиграф.
- Стой! Кто идет?
- Смена.
-->
<b>Вычисление вероятностей на базе подсчета числа комбинаторных
конфигурций</b>
<br>© 2013 Савченко Н.В., кафедра СИ, НТУ "ХПИ", Новая Водолага -
Харьков
<hr>
<input type="button" name="but2" value="Пример" class="s1"
onclick="f_prim(1*document.all.sel2.value)">
<select name="sel2" class="s1">
<option value="0" selected></option>
<option value="1">Зад. 1. стр. 20 Фадеева Л.Н. и др. ТВ и МС. Зад. у упр.
М. Эксмо, 2006</option>
<option value="2">Зад. 3. стр. 21 Фадеева Л.Н. и др. ТВ и МС. Зад. у упр.
М. Эксмо, 2006</option>
</select>
<table border=0 width=100% class=s1 cellpadding=0 cellspacing=0>
<tr>
<td colspan=2 valign="top">
Комментарий = // Комментарий,
C<sub>n</sub><sup>k</sup>=fс(n,k),
A<sub>n</sub><sup>k</sup>=fа(n,k),
n!=ff(n),
Вывод(res)=fp(res).
</td></tr>
<tr>
<td valign="top">
<input type="button" name="but3" value="Очистить" class="s1"
onclick="f_cls()">
<br><br><br><br><br>

```

```

<input type="button" name="but1" value="Выполнить" class="s1"
onclick="f_calc()">
</td><td valign="top">
<textarea name="txt0" class="s1" rows=14 cols=74></textarea>
</td></tr>
<tr><td valign="top"> </td>
<td valign="top" bgcolor="#ffffcc"><span ID="res"></span></td>
</tr>
</table>
</div>
<script>
function fc(n,k)
{
if(k>n) return 0;
if(k==0) return 1;
if(k==1) return n;
return fc(n-1,k)+fc(n-1,k-1);
}
function fa(n,k)
{
var i,p=1;
for(i=1;i<=k;i++) p*=i;
return p*fc(n,k);
}
function ff(k)
{
var i,p=1;
for(i=1;i<=k;i++) p*=i;
return p;
}
function f_calc()
{
var rc,sprog=document.all.txt0.value;
rc=eval(sprog);
}
function fp(s)
{
document.all.res.innerHTML+=s+"<br>";
}
function f_prim(par1)
{

```

```

if (par1==0) return;
document.all.res.innerHTML="";
if (par1==1)
{
document.all.txt0.value="//В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу
выбраны 3 фрукта. Какова вероятность того, что все три фрукта -
апельсины?"
document.all.txt0.value+="\n\nРешение: Число элементарных исходов n
равно числу способов выбрать 3 элемента из 9 (неупорядоченная выборка),
т.е. n=C(9,3)."
document.all.txt0.value+="Число благоприятных исходов t равно числу
способов выбора трех апельсинов из имеющихся пяти, т.е. t=C(5,3). "
document.all.txt0.value+="\n\nP(A)=C(5,3)/C(9,3)\n\n";
document.all.txt0.value+="fp('P(A)='+Math.round(fc(5,3)/fc(9,3)*1000)/1000);"
;
}
if (par1==2)
{
document.all.txt0.value="//Найти вероятность того, что в восьмизначном
числе ровно 4 цифры совпадают, а остальные различны."
document.all.txt0.value+="\n\nРешение: В числе 5 различных цифр, одна из
которых повторяется. Число способов ее выбора равна 10."
document.all.txt0.value+=" Эта цифра занимает любые 4 места в числе,
т.е. число способов равно C(8,4)."
document.all.txt0.value+=" Оставшиеся 4 места занимают различные
цифры из неиспользованных 9, при этом важен порядок следования цифр, а
значит число способов четырех цифр равно A(9,4)."
document.all.txt0.value+=" Число благоприятствующих исходов
t=10C(8,4)A(9,4), а число способов составления восьмизначных чисел
равно n=9*10^7."
document.all.txt0.value+="\n\nP(A)=10C(8,4)A(9,4)/(9*10^7)\n\n";
document.all.txt0.value+="fp('P(A)='+Math.round(10*fc(8,4)*fa(9,4)/9/1e+7*1
000)/1000);"
}}
function f_cls()
{
document.all.res.innerHTML="";
document.all.txt0.value="";
document.all.sel2.value=0;
}
</script>

```

### Код программы 3

```
<style>
.s1 {font-size:10pt; font-family:Tahoma}
</style>
<div class="s1">
<hr>
<!--
Эпиграф.
- Стой! Кто идет?
- Смена.
-->
<b>Формула полной вероятности. Формула Байеса</b>
<br>© 2013 Савченко Н.В., кафедра СИ, НТУ "ХПИ", Новая Водолага -
Харьков
<hr>
<input type="button" name="but1" value="Число гипотез" class="s1"
onclick="f_cgyp()">
<select name="sel1" class="s1">
<option value="2">2</option>
<option value="3" selected>3</option>
<option value="4">4</option>
<option value="5">5</option>
</select>
<br><input type="button" name="but2" value="Пример" class="s1"
onclick="f_prim(1*document.all.sel2.value)">
<select name="sel2" class="s1">
<option value="0" selected></option>
<option value="1">Зад. 5. стр. 31 Фадеева Л.Н. и др. ТВ и МС. Зад. и
ynp.</option>
</select>
<br>Условие:
<textarea name="txt0" class="s1" rows=7 cols=80></textarea>
<table border=0 width=100% class=s1 cellpadding=5 cellspacing=0>
<tr>
<td valign="top"><span ID="res"> </span></td>
</tr><tr>
<td valign="top"><span ID="res1"> </span></td>
</tr>
</table>
</div>
```

```
<script>
var pgyp;
function f_prim(par1)
{
var i,i1,sum="";
if (par1==0) return;
if (par1==1)
{
document.all.txt0.value="Трое преподавателей принимают экзамен в группе
из 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй - 3, а
третий - 21 студента (выбор студентов производится случайным
образом из списка)."
document.all.txt0.value+=" Отношение трех экзаменаторов к слабо
подготовившимся студентам различное: шансы таких студентов сдать
экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго - только 10%, зато
у третьего 70%. Найти вероятность того, что слабо подготовившийся
студент сдаст экзамен."
pgyp=3;
document.all.sel1.value=pgyp;
for(i=0;i<pgyp;i++)
{
i1=i+1;
sum+="P(H<sub>" +i1+"</sub>)=<input type='text' name='txt"+i1+"'
size=15 value=">";
sum+=" P(A|H<sub>" +i1+"</sub>)=<input type='text' name='txtp"+i1+"'
size=15 value="><br>";
}
sum+="<br><input type='button' name='but3' value='Вычислить полную
вероятность' class='s1' onclick='f_calc()'> Формула Байеса <input
type='checkbox' name='ch1' checked> "
document.all.res.innerHTML=sum;

document.all.txt1.value="6/30";
document.all.txtp1.value="0.4";

document.all.txt2.value="3/30";
document.all.txtp2.value="0.1";

document.all.txt3.value="21/30";
document.all.txtp3.value="0.7";
```

```

}
}
function f_calc()
{
var i,i1,sum,sum1,a,b,sum2;
pgyp=1*document.all.sel1.value;
sum="P(A)=";
for(i=0;i<pgyp;i++)
{
i1=i+1;
sum+="P(H<sub>" +i1+"</sub>)P(A|H<sub>" +i1+"</sub>)" ;
if(i1!=pgyp) sum+=" + "
}
sum+=" = ";

sum1=0.0;
for(i=0;i<pgyp;i++)
{
i1=i+1;
a=eval(eval("document.all.txt"+i1+".value"));
b=eval(eval("document.all.txtp"+i1+".value"));
sum1+=a*b;
}
document.all.res1.innerHTML=sum+sum1;
if(document.all.ch1.checked)
{
document.all.res1.innerHTML+="<hr>"

sum2="";
for(i=0;i<pgyp;i++)
{
i1=i+1;
a=eval(eval("document.all.txt"+i1+".value"));
b=eval(eval("document.all.txtp"+i1+".value"));
sum2+="P(H<sub>" +i1+"</sub>|A)=P(H<sub>" +i1+"</sub>)P(A|H<sub>"
+i1+"</sub>)/P(A) = "+Math.round(a*b/sum1*1000)/1000+"<br>";
}
document.all.res1.innerHTML+=sum2

sum2="<hr>";
for(i=0;i<pgyp;i++)

```

```

{
i1=i+1;
a=eval(eval("document.all.txt"+i1+".value"));
b=eval(eval("document.all.txtp"+i1+".value"));
sum2+="P(H<sub>" +i1+"</sub>|¬A)=P(H<sub>" +i1+"</sub>)P(¬A|H<sub>"
b>" +i1+"</sub>)/P(¬A) = "+Math.round(a*(1-b)/(1-
sum1)*1000)/1000+"<br>";
}
document.all.res1.innerHTML+=sum2

}

}
function f_crgyp()
{
var i,i1,sum="";
document.all.res1.innerHTML="";
document.all.res.innerHTML="";
document.all.txt0.value="";
document.all.sel2.value=0;
pgyp=1*document.all.sel1.value;
for(i=0;i<pgyp;i++)
{
i1=i+1;
sum+="P(H<sub>" +i1+"</sub>)=<input type='text' name='txt'+i1+'\"
size=15 value='>";
sum+=" P(A|H<sub>" +i1+"</sub>)=<input type='text' name='txtp'+i1+'\"
size=15 value='><br>";
}
sum+="<br><input type='button' name='but3' value='Вычислить полную
вероятность' class='s1' onclick='f_calc()'> Формула Байеса <input
type='checkbox' name='ch1' checked> "
document.all.res.innerHTML=sum;
}
</script>

```

#### Код программы 4

```
<style>
.s1 {font-size:12pt;font-family:Times New Roman;}
.s1a {font-size:10pt;font-family:Tahoma;}
</style>
<table border=0 width=100% class=s1>
<tr>
<td bgcolor=ffffcc valign=top>

<b>3. Задача Бюффона</b>
</td>
<td bgcolor=ffffcc valign=top align=right>
© Савченко Н.В., 2008
</td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor=ffffcc valign=top width=50%>
<span ID=gr1> </span>
</td>
<td bgcolor=ffffcc valign=top>
<b><u>Постановка задачи</u></b>
<input type="button" name="b_1" value="Подробнее" onclick="f_id(1)"
class=nsh>
<div ID="n_1"> Плоскость разграфлена параллельными прямыми,
отстоящими друг от друга на расстоянии  $a$ .
На плоскость наудачу бросаются иглы длины  $l$  ( $l < a$ ). Найдите
вероятность того, что игла
пересечет какую-нибудь прямую. (Гнеденко Б.В. Курс теории
вероятностей)
</div>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
<p><b><u>Параметры</u></b>
<br>Расстояние между прямыми  $a=1$ 
<br>Количество игл  $N=$ 
<input type="button" value="-" class=s1a onclick="f_ch_sel(-1,'sel1')"><select
name="sel1" class=s1 onchange="f_change_par()">
<option value="5">5</option>
<option value="10">10</option>
<option value="20">20</option>
```

```
<option value="50">50</option>
<option value="100">100</option>
<option value="200" selected>200</option>
<option value="500">500</option>
<option value="1000">1000</option>
<option value="2000">2000</option>
</select><input type="button" value="+" class=s1a
onclick="f_ch_sel(1,'sel1')">
<br>Относительная длина иглы  $l$ 
<input type="button" value="-" class=s1a onclick="f_ch_sel(-1,'sel2')"><select
name="sel2" class=s1 onchange="f_change_par()">
<option value="0.1"> 0.1</option>
<option value="0.2"> 0.2</option>
<option value="0.3"> 0.3</option>
<option value="0.4"> 0.4</option>
<option value="0.5"> 0.5</option>
<option value="0.6" selected> 0.6</option>
<option value="0.7"> 0.7</option>
<option value="0.8"> 0.8</option>
<option value="0.9"> 0.9</option>
<option value="1.0"> 0.99 </option>
</select><input type="button" value="+" class=s1a
onclick="f_ch_sel(1,'sel2')">
<br>Шаг гистограммы
<input type="button" value="-" class=s1a onclick="f_ch_sel(-1,'sel3')"><select
name="sel3" class=s1 onchange="f_change_par()">
<option value="0.05"> 0.05</option>
<option value="0.1" selected> 0.1</option>
<option value="0.15"> 0.15</option>
<option value="0.2"> 0.2</option>
<option value="0.25"> 0.25 </option>
<option value="0.3"> 0.3</option>
</select><input type="button" value="+" class=s1a
onclick="f_ch_sel(1,'sel3')">
<p><input type="button" value="Провести испытания" class=s1
onclick="graph1()">
<input type="checkbox" name="chb1" class=s1>
<input type="button" value="Очистить Гистограмму" class=s1
onclick="clr_buf()"/>
```

```

<p><b><u>Результаты</u></b>
<br><span ID=res1> </span>
</td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor=#ffffcc valign=top><span ID=gr2> </span></td>
<td bgcolor=#ffffcc valign=top>
<b><u>Гистограмма</u></b>
<br><span ID=res2> </span>
</td>
</tr>
</table>

```

```

<script>
var pgr = new Array(10);
var maxbuf=21,initbuf=-10;
var bufx = new Array(21);
var bufy = new Array(21);
var bufy1 = new Array(21);

var sumx,summx,sumy,summy;

```

```

buf_init();
graph1();

```

```

function buf_init()
{
var i;
for (i=0;i<maxbuf;i++)
{
bufy[i]=0;
bufy1[i]=0;
bufx[i]=initbuf+i;
}
}

```

```

function clr_buf()
{
buf_init();
document.all.res2.innerHTML="";
document.all.gr2.innerHTML="";

```

```

}

function add_buf(gx)
{
var sbuf="",sumbuf=0;
var max_value_buf1=0;
var smx=0, sdx=0;

for (i=0;i<maxbuf;i++)
if (gx==bufx[i])
{
bufy[i]++;
break;
}
for (i=0;i<maxbuf;i++) sumbuf+=bufy[i];

for (i=0;i<maxbuf;i++)
{
bufy1[i]=bufy[i]/sumbuf;
bufy1[i]=Math.round(bufy1[i]*100)/100;
}

for (i=0;i<maxbuf;i++) if (bufy1[i]>max_value_buf1)
max_value_buf1=bufy1[i];

// Вычисляем математическое ожидание
for (i=0;i<maxbuf;i++) smx+=bufx[i]*bufy1[i];

// Вычисляем математическое дисперсию
for (i=0;i<maxbuf;i++) sdx+=(bufx[i]-smx)*(bufx[i]-smx)*bufy1[i];

sdx=Math.sqrt(sdx)

sbuf="<b>M[x]="+Math.round(smx*100)/100+"
?="+Math.round(sdx*100)/100+"</b><br>";
sbuf+="<table rules=rows cellpadding=1 cellspacing=0 class=s1a>"
sbuf+="<td align=center>Интервалы"</td>"
sbuf+="<td align=center>Количество<br>наблюдений"</td>"

```

```

sbuf+="<td align=center>Частоты"+"</td>"

for (i=0;i<maxbuf;i++)
{
sbuf+="<tr>"
sbuf+="<td align=center>" +bufx[i]+"</td>"
sbuf+="<td align=center>" +bufy[i]+"</td>"
sbuf+="<td align=center>" +bufy1[i]+"</td>"
sbuf+="</tr>"
}

sbuf+="</table>"
document.all.res2.innerHTML=sbuf;

pgr[2]="-10|-9|-8|-7|-6|-5|-4|-3|-2|-1|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9|10";
pgr[3]="0.0|0.1|0.2|0.3|0.4|0.5|0.6|0.7|0.8|0.9|1.0";

if (max_value_buf1<0.7) pgr[3]="0.0|0.1|0.2|0.3|0.4|0.5|0.6|0.7";
if (max_value_buf1<0.5) pgr[3]="0.0|0.1|0.2|0.3|0.4|0.5";
if (max_value_buf1<0.3) pgr[3]="0.0|0.1|0.2|0.3";

pgr[5]="9999ff";
pgr[6]="Номер интервала";
pgr[7]="Частота           "+Math.round(smx*100)/100+"
?" +Math.round(sdx*100)/100;

pgr[8]="ff9900";
pgr[9]=2;
sumx="";
sumy="";
for (i=0;i<maxbuf;i++)
{
sumx+=bufx[i]+" ";
sumy+=bufy1[i]+" ";
}
pgr[0]=sumx;
pgr[1]=sumy;
pgr[4]=maxbuf+" ";
getArg("gr2")

}

```

```

function graph1()
{
var x1,y1,x2,y2;
var a=1.00, l=0.75;
var i,num=200,p=0,pi,phi,x,y,a05=a*0.5,l05;
var dx=5,dy=5,dxi,dyi;
var dg,dg05;
pi=Math.PI;

num=1*document.all.sel1.options[document.all.sel1.selectedIndex].value;
l=1*document.all.sel2.options[document.all.sel2.selectedIndex].value;
l05=l*0.5;
dg=1*document.all.sel3.options[document.all.sel3.selectedIndex].value;
dg05=dg*0.5;

pgr[2]="0.0|1.0|2.0|3.0|4.0|5.0";
pgr[3]="0.0|1.0|2.0|3.0|4.0|5.0";
pgr[5]="";
pgr[6]="";
pgr[7]="";
pgr[8]="red";
pgr[9]=2;
sumx="";
sumy="";
numx=""
for(i=0;i<num;i++)
{
phi=pi*Math.random();
x=dx*Math.random();
y=dy*Math.random();

sin1=Math.sin(phi);
cos1=Math.cos(phi)

y1=x+l05*sin1;
y2=x-l05*sin1;
y1t=Math.floor(y1)
y2t=Math.floor(y2)
yt=Math.abs(y2t-y1t)
x1=y+l05*cos1;

```

```

x2=y-105*cos1;

sumx+=Math.round(x1*100)/100+"|";
sumx+=Math.round(x2*100)/100+"|";

sumy+=Math.round(y1*100)/100+"|";
sumy+=Math.round(y2*100)/100+"|";
numx+="2|"

if (yt>0)
{
p++;
pgr[5]+="9999ff|";
}
else
{
pgr[5]+="ff9900|";
}
}

pgr[0]=sumx;
pgr[1]=sumy;
pgr[4]=numx;
getArg("gr1")

sres="Число угл, пересекиших прямые линии, равно "+p
p/=num;
sres+="<br>Частота пересечения линий равна "+Math.round(p*1000)/1000
p=2*l/a/p;
sres+="<br>Приведенное число ?* равно "+Math.round(p*1000)/1000
p=p-Math.PI
dpi=p;
s_dpi=1; if (dpi<0) s_dpi=-1;
dpi=Math.abs(dpi);
if (dpi<=dg05)
ndpi=0
else
ndpi=Math.round((dpi-dg05)/dg+0.5)
ndpi*=s_dpi;

```

```

sres+="<br>Отклонение ?* от точного значения числа ? равно
"+Math.round(p*1000)/1000
sres+="<br>Отклонение в шагах гистограммы равно "+ndpi
document.all.res1.innerHTML=sres;
add_buf(ndpi);
}

function getArg(s1)
{
s="<OBJECT classid='clsid:D27CDB6E-AE6D-11cf-96B8-444553540000'
codebase='http://download.macromedia.com/pub/shockwave/cabs/flash/swflash.
cab#version=6,0,0,0' WIDTH='450' HEIGHT='380' id='lgraph3' ALIGN="
border=0>"
s+="<PARAM NAME=movie VALUE='lgraph3.swf'>"
s+="<PARAM NAME=flashvars VALUE='s_dx="+pgr[9]+"&s_xmas="+pgr[0]+"&s_ymas="+pgr[1]+"&s_xm
t="+pgr[2]+"&s_ymt="+pgr[3]+"&s_nmas="+pgr[4]+"&s_bgcol="+pgr[5]
+"&text1="+pgr[6]+"&text2="+pgr[7]+"&bgcol2="+pgr[8]+"&'>"
s+="<PARAM NAME=loop VALUE=false>"
s+="<PARAM NAME=quality VALUE=high>"
s+="<PARAM NAME=bgcolor VALUE=#FFFFFFcc>"
s+="</OBJECT>"
eval("document.all."+s1+".innerHTML=s");
}

function f_change_par()
{
document.all.gr1.innerHTML="";
document.all.res1.innerHTML="";
clr_buf();
if (document.all.chb1.checked) graph1();
}

function f_ch_sel(tsh, namesel)
{
var maxsel=eval("document.all."+namesel+".length")-1
var curtsh=eval("document.all."+namesel+".selectedIndex")
if (tsh==1 && curtsh<maxsel)
{
eval("document.all."+namesel+".selectedIndex++")
f_change_par()
}
}

```

```

}
if (tsh== -1 && curtsh > 0)
{
eval("document.all."+namesel+".selectedIndex--")
f_change_par()
}
}
var flag_1=true;
s_1=document.all.n_1.innerHTML;document.all.n_1.innerHTML="";
function f_id(pk)
{
if (eval("flag_"+pk))
{eval("document.all.n_"+pk+".innerHTML=s_"+pk);
eval("document.all.b_"+pk+".value='Свернуть'");
eval("flag_"+pk+"=false");}
else {eval("document.all.n_"+pk+".innerHTML="");
eval("document.all.b_"+pk+".value='Подробнее'");
eval("flag_"+pk+"=true");
}
}
}
</script>

```

---

### Код программы 5

---

```

<style>
.s1 {font-size:12pt;font-family:Times New Roman;}
.s1a {font-size:10pt;font-family:Tahoma;}
</style>
<table border=0 width=100% class=s1 cellpadding=5>
<tr>
<td bgcolor=ffffff valign=top width=50%>

<b>5. Дискретные распределения. Схема Бернулли</b>
</td>
<td bgcolor=ffffff valign=top width=50% align=right>
© Савченко Н.В., 2008
</td>
</tr></table>
<table border=0 width=100% class=s1 cellpadding=2>
<tr>
<td bgcolor=ffffff valign=top width=50%><span ID="gr1"></span></td>
<td bgcolor=ffffff valign=top><span ID=res1></span></td>
<td bgcolor=ffffff valign=top><b><u>Метод вычисления</u></b>
<input type="button" name="b_1" value="Подробнее" onclick="f_id(1)"
class=nsh><div ID="n_1">
<i> Производится последовательность  $n$  независимых испытаний, в
каждом из которых событие  $A$ 
может произойти с одной и той же вероятностью  $p$ . Вероятность
 $P_{n}(k)$  того, что событие
 $A$  произойдет при  $k$  каких-то испытаниях, а при остальных  $n-k$  не
произойдет, равна
<br><center> $P_{n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ 
</center>
Здесь  $C_{n}^k$  означает число сочетаний из  $n$  по  $k$ .
<br> При неограниченном возрастании числа испытаний  $n$  и уменьшении
вероятности  $p$  события  $A$  так, что  $np = \lambda$  остается постоянной,
вероятность
 $P_{n}(k)$  при  $k=0, 1, 2, \dots$  стремится к пределу (формула
Пуассона)
<br><center> $\Pi(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 
</center>
<br> (Локальная теорема Муавра-Лапласа). Если число независимых
испытаний

```

*n* неограниченно возрастает, а вероятность появления события в каждом из испытаний постоянно и отлична

от нуля и единицы, вероятность появления ровно *k* событий в *n* испытаниях приближенно равна

```
<br>
```

Функция распределения дискретной случайной величины определяется как

```
<br><center></center>
```

```
</i>
```

```
</div>
```

```
<b><u>Параметры</u></b>
```

```
<br><select name="sel6" class=s1 onchange="f_change_par()">
```

```
<option value="0" selected> Плотность распределения </option>
```

```
<option value="1"> Функция распределения</option>
```

```
</select>
```

```
<div align=right>
```

```
Точность
```

```
<input type="button" value="-" class=s1a onclick="f_ch_sel(-1,'sel2')"><select name="sel2" class=s1 onchange="f_change_par()">
```

```
<option value="10"> 1</option>
```

```
<option value="100"> 2</option>
```

```
<option value="1000" selected>3 </option>
```

```
<option value="10000">4</option>
```

```
<option value="100000">5</option>
```

```
<option value="1000000">6</option>
```

```
</select><input type="button" value="+" class=s1a onclick="f_ch_sel(1,'sel2')"></div>
```

Число<br>испытаний *n* =

```
<input type="button" value="-" class=s1a onclick="f_ch_sel(-1,'sel1')"><select name="sel1" class=s1 onchange="f_change_par()">
```

```
<option value="4"> 4</option>
```

```
<option value="6"> 6</option>
```

```
<option value="8"> 8</option>
```

```
<option value="10" selected> 10</option>
```

```
<option value="12">12</option>
```

```
<option value="16">16</option>
```

```
<option value="18">18</option>
```

```
<option value="20">20</option>
```

```
<option value="50">50</option>
```

```
<option value="100">100</option>
```

```
<option value="400">400 </option>
```

```
</select><input type="button" value="+" class=s1a onclick="f_ch_sel(1,'sel1')">
```

```
<p>Вероятность<br>успеха p =
```

```
<input type="button" value="-" class=s1a onclick="f_ch_sel(-1,'sel3')"><select name="sel3" class=s1 onchange="f_change_par()">
```

```
<option value="0.01"> 0.01 </option>
```

```
<option value="0.1"> 0.1</option>
```

```
<option value="0.2"> 0.2</option>
```

```
<option value="0.3"> 0.3</option>
```

```
<option value="0.4" selected> 0.4</option>
```

```
<option value="0.5"> 0.5</option>
```

```
<option value="0.6"> 0.6</option>
```

```
<option value="0.7"> 0.7</option>
```

```
<option value="0.8"> 0.8</option>
```

```
<option value="0.9"> 0.9</option>
```

```
<option value="0.99"> 0.99</option>
```

```
</select><input type="button" value="+" class=s1a onclick="f_ch_sel(1,'sel3')">
```

```
<p><input type="button" value="Вычислить" class=s1a onclick="clr1();f_calc()">
```

```
<input type="checkbox" name="chb1" class=s1>
```

```
<input type="button" value="Сравнить" class=s1a
```

```
onclick="clr1();f_comp_calc()">
```

```
<input type="checkbox" name="chb2" class=s1>
```

```
<input type="button" value="x" class=s1a onclick="clr1()">
```

```
</td>
```

```
</tr>
```

```
</table><table border=0 width=100% class=s1 cellpadding=2>
```

```
<tr>
```

```
<td bgcolor=ffffcc valign=top width=50%><span ID=gr2></span></td>
```

```
<td bgcolor=ffffcc valign=top><span ID=res2></span></td>
```

```
<td bgcolor=ffffcc valign=top>
```

```
<u><b>Прямое моделирование</b></u>
```

```
<br><input type="button" value="Очистить Гистограмму" class=s1 onclick="clr_buf()">
```

```
<br>Шаг гистограммы
```

```
<input type="button" value="-" class=s1a onclick="f_ch_sel(-1,'sel5')"><select name="sel5" class=s1 onchange="f_change_par()">
```

```

<option value="0.05"> 0.05</option>
<option value="0.1" selected> 0.1</option>
<option value="0.15"> 0.15</option>
<option value="0.2"> 0.2</option>
<option value="0.25"> 0.25 </option>
<option value="0.3"> 0.3</option>
</select><input      type="button"      value="+"      class=s1a
onclick="f_ch_sel(1,'sel5')">

```

```

<br>Количество серий испытаний
<input type="button" value="-" class=s1a onclick="f_ch_sel(-1,'sel4')"><select
name="sel4" class=s1">
<option value="10"> 10</option>
<option value="50"> 50</option>
<option value="100"> 100</option>
<option value="250" selected> 250</option>
<option value="500"> 500</option>
<option value="1000"> 1000</option>
<option value="2000"> 2000</option>
<option value="5000"> 5000</option>
<option value="10000"> 10000 </option>
</select><input      type="button"      value="+"      class=s1a
onclick="f_ch_sel(1,'sel4')">
<br><input type="button" value="Выполнить испытания" class=s1a
onclick="f_calc1()">

```

```

</td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor=#ffffcc valign=top><span ID=gr3> </span></td>
<td bgcolor=#ffffcc valign=top colspan=2>
<span ID=res3> </span>
</td>
</tr>
</table>

```

```

<script>
var pgr = new Array(10);
var maxbuf=21,initbuf=-10;
var bufx = new Array(21);
var bufy = new Array(21);
var bufy1 = new Array(21);

```

```

buf_init()

var flag_1=true;
//var flag_2=true;
//var flag_3=true;
s_1=document.all.n_1.innerHTML;document.all.n_1.innerHTML="";
//s_2=document.all.n_2.innerHTML;document.all.n_2.innerHTML="";
//s_3=document.all.n_3.innerHTML;document.all.n_3.innerHTML="";

```

```

function f_id(pk)
{
if (eval("flag_"+pk))
{eval("document.all.n_"+pk+".innerHTML=s_"+pk);
eval("document.all.b_"+pk+".value='Свернуть');
eval("flag_"+pk+"=false");}
else {eval("document.all.n_"+pk+".innerHTML="");
eval("document.all.b_"+pk+".value='Подробнее');
eval("flag_"+pk+"=true");
}
}

```

```

function getArg(s1)
{
s="<OBJECT      classid='clsid:D27CDB6E-AE6D-11cf-96B8-444553540000'
codebase='http://download.macromedia.com/pub/shockwave/cabs/flash/swflash.
cab#version=6,0,0,0' WIDTH='450' HEIGHT='380' id='lgraph3' ALIGN="
border=0>"
s+="<PARAM NAME=movie VALUE='lgraph3.swf'"
s+="<PARAM      NAME=flashvars
VALUE='s_dx="+pgr[9]+"&s_xmas="+pgr[0]+"&s_ymas="+pgr[1]+"&s_xm
t="+pgr[2]+"&s_ymt="+pgr[3]+"&s_nmas="+pgr[4]+"&s_bgcol="+pgr[5]
+"&text1="+pgr[6]+"&text2="+pgr[7]+"&bgcol2="+pgr[8]+"&'>"
s+="<PARAM NAME=loop VALUE=false>"
s+="<PARAM NAME=quality VALUE=high>"
s+="<PARAM NAME=bgcolor VALUE=#FFFFcc>"
s+="</OBJECT>"
eval("document.all."+s1+".innerHTML=s");
}

```

```

function fzn(t)

```

```

{
var z;
z=1*document.all.sel2.options[document.all.sel2.selectedIndex].value;
return Math.round(t*z)/z;
}
function f_ch_sel(tsh, namesel)
{
var maxsel=eval("document.all."+namesel+".length")-1
var curtsh=eval("document.all."+namesel+".selectedIndex")
if (tsh==1 && curtsh<maxsel)
{
eval("document.all."+namesel+".selectedIndex++")
f_change_par()
}
if (tsh==-1 && curtsh>0)
{
eval("document.all."+namesel+".selectedIndex--")
f_change_par()
}
}

function clr1()
{
document.all.res1.innerHTML=""
document.all.gr1.innerHTML=""
}

function f_comp_calc()
{
var mp = new Array (501);
var mp1 = new Array (501);
var mp2 = new Array (501);

clr1();

var n,p,k,sbuf1="",maxy;
var mxp=0,mxp1=0,mxp2=0,dxp=0,dxp1=0,dxp2=0;

n=1*document.all.sel1.options[document.all.sel1.selectedIndex].value;
p=1*document.all.sel3.options[document.all.sel3.selectedIndex].value;
for (k=0;k<=n;k++)

```

```

{
mp[k]=pbinom(n,k,p);
mxp+=k*mp[k];

mp1[k]=dpois(n,k,p);
mxp1+=k*mp1[k];

mp2[k]=dmuar(n,k,p);
mxp2+=k*mp2[k];
}

for (k=0;k<=n;k++)
{
dxp+=(k-mxp)*(k-mxp)*mp[k];
dxp1+=(k-mxp1)*(k-mxp1)*mp1[k];
dxp2+=(k-mxp2)*(k-mxp2)*mp2[k];
}
namep="P";

if (document.all.sel6.selectedIndex==1)
{
for (k=1;k<=n;k++) mp[k]+=mp[k-1];
for (k=1;k<=n;k++) mp1[k]+=mp1[k-1];
for (k=1;k<=n;k++) mp2[k]+=mp2[k-1];
namep="Φ";
}

sbuf1+="<table rules=rows cellpadding=1 cellspacing=2 class=s1a
align=center>";
sbuf1+="<tr><td> </td><td align=center>k</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=center bgcolor=ff9900> "+namep+"<sub>n</sub>(k)
</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=center bgcolor=9999ff> "+namep+"p(k) </td><td>
</td>";
sbuf1+="<td align=center bgcolor=99ff99> "+namep+"<sub>m1</sub>(k)
</td><td> </td><tr>";

for (k=0;k<=n;k++)
{
sbuf1+="<tr><td> </td><td align=center>"+k+"</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right>"+fzn(mp[k])+"</td><td> </td>";

```

```

sbuf1+="<td align=right>"+fzn(mp1[k])+"</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right>"+fzn(mp2[k])+"</td><td> </td></tr>";
}

sbuf1+="<tr><td> </td><td align=center>M[X]</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right>"+fzn(mxp)+"</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right>"+fzn(mxp1)+"</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right>"+fzn(mxp2)+"</td><td> </td></tr>";

sbuf1+="<tr><td> </td><td align=center>D[x]</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right>"+fzn(dxp)+"</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right>"+fzn(dxp1)+"</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right>"+fzn(dxp2)+"</td><td> </td></tr>";

sbuf1+="<tr><td> </td><td align=center>?</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right>"+fzn(Math.sqrt(dxp))+"</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right>"+fzn(Math.sqrt(dxp1))+"</td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right>"+fzn(Math.sqrt(dxp2))+"</td><td> </td></tr>";

for (kk=0;kk<2;kk++)
{
sbuf1+="<tr><td> </td><td align=center> </td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right> </td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right> </td><td> </td>";
sbuf1+="<td align=right> </td><td> </td></tr>";
}
sbuf1+="</table>";

pgr[2]="0"
stp=1; pgr[9]=5;
if (n>=20 && n<=50) {stp=5; pgr[9]=3;}
if (n>=51 && n<=100) {stp=10; pgr[9]=2;}
if (n>=101 && n<=500) {stp=25; pgr[9]=1;}

for (k=1;k<n;k++) if (k % stp == 0) pgr[2]+=k+"|";
pgr[2]+=n;

maxv=mp[0];
for (k=1;k<=n;k++) if (mp[k]>maxv) maxv=mp[k];
for (k=0;k<=n;k++) if (mp1[k]>maxv) maxv=mp1[k];

```

```

for (k=0;k<=n;k++) if (mp2[k]>maxv) maxv=mp2[k];

yst=0.1; if (maxv<=0.3) yst=0.05
num_sc_y=Math.ceil(maxv/yst)
pgr[3]="0.0"
for (k=1;k<num_sc_y;k++) pgr[3]+=yst*k+"|";
pgr[3]+=yst*k;

pgr[6]="k";

pgr[7]="P(k),Pp(k),Pml(k)";

if (document.all.sel6.selectedIndex==1) pgr[7]="Φ(k),Φp(k),Φml(k)";

pgr[8]="ff9900";

pgr[0]="";
pgr[1]="";
pgr[4]="";
pgr[5]="ff9900|";
if (document.all.sel6.selectedIndex==0)
{
for (k=0;k<=n;k++)
{
pgr[0]+=k+"|";
pgr[1]+=mp[k]+"|";
}
}
pgr[4]+=n+1+"|";

pgr[5]="9999ff|";
for (k=0;k<=n;k++)
{
pgr[0]+=k+"|";
pgr[1]+=mp1[k]+"|";
}
pgr[4]+=n+1+"|";

pgr[5]="99ff99|";
for (k=0;k<=n;k++)
{
pgr[0]+=k+"|";

```

```

pgr[1]+=mp2[k]+"|";
}
pgr[4]+=n+1+"|";
}
if (document.all.sel6.selectedIndex==1)
{
for (k=0;k<n-1;k++)
{
pgr[0]+=k+"|"+(k+1)+"|"+(k+1)+"|";
pgr[1]+=mp[k]+"|"+mp[k]+"|"+mp[k+1]+"|";
pgr[4]+="3|";
pgr[5]+="ff9900|";
}
pgr[0]+=k+"|"+(k+1)+"|";
pgr[1]+=mp[k]+"|"+mp[k]+"|";
pgr[4]+="2|";
pgr[5]+="ff9900|";

for (k=0;k<n-1;k++)
{
pgr[0]+=k+"|"+(k+1)+"|"+(k+1)+"|";
pgr[1]+=mp1[k]+"|"+mp1[k]+"|"+mp1[k+1]+"|";
pgr[4]+="3|";
pgr[5]+="9999ff|";
}
pgr[0]+=k+"|"+(k+1)+"|";
pgr[1]+=mp1[k]+"|"+mp1[k]+"|";
pgr[4]+="2|";
pgr[5]+="9999ff|";

for (k=0;k<n-1;k++)
{
pgr[0]+=k+"|"+(k+1)+"|"+(k+1)+"|";
pgr[1]+=mp2[k]+"|"+mp2[k]+"|"+mp2[k+1]+"|";
pgr[4]+="3|";
pgr[5]+="99ff99|";
}
pgr[0]+=k+"|"+(k+1)+"|";
pgr[1]+=mp2[k]+"|"+mp2[k]+"|";
pgr[4]+="2|";
pgr[5]+="99ff99|";

```

```

}
getArg("gr1")
document.all.res1.innerHTML=sbuf1;
}

function dpois(n,k,p)
{
var l,j,sdpois=1.0;
l=n*p;
for (j=1;j<=k;j++) sdpois*=l/j;
return sdpois*Math.exp(-l);
}

function dmuar(n,k,p)
{
var x;
x=(k-n*p)/Math.sqrt(n*p*(1-p))
return Math.exp(-x*x/2)/Math.sqrt(2*Math.PI*n*p*(1-p));
}

function f_calc()
{
var mp = new Array (501);
var n,p,k,sbuf="",maxv;
var mx=0.0,dx=0.0;

clr1();

n=1*document.all.sel1.options[document.all.sel1.selectedIndex].value;
p=1*document.all.sel3.options[document.all.sel3.selectedIndex].value;
for (k=0;k<=n;k++)
{
mp[k]=pbinom(n,k,p);
}

for (k=0;k<=n;k++)
mx+=mp[k]*k;

for (k=0;k<=n;k++)

```

```

dx+=(k-mx)*(k-mx)*mp[k];

namep="P";
if (document.all.sel6.selectedIndex==1)
{
for (k=1;k<=n;k++) mp[k]+=mp[k-1];
namep="Φ";
}

sbuf+="<table rules=rows cellpadding=1 cellspacing=2 class=s1a
align=center>";
sbuf+="<tr><td> </td><td align=center>k</td><td> </td></tr>";
sbuf+="<td align=center>"+namep+"<sub>n</sub>(k)</td><td>
</td></tr>";
for (k=0;k<=n;k++)
{
sbuf+="<tr><td> </td><td align=center>"+k+"</td><td> </td>";
sbuf+="<td align=right>"+fzn(mp[k])+"</td><td> </td></tr>";
}
sbuf+="<tr><td> </td><td align=center>M[x]</td><td> </td>";
sbuf+="<td align=right>"+fzn(mx)+"</td><td> </td></tr>";
sbuf+="<tr><td> </td><td align=center>D[x]</td><td> </td>";
sbuf+="<td align=right>"+fzn(dx)+"</td><td> </td></tr>";
sbuf+="<tr><td> </td><td align=center>?</td><td> </td>";
sbuf+="<td align=right>"+fzn(Math.sqrt(dx))+"</td><td> </td></tr>";
sbuf+="<tr><td> </td><td align=center>np</td><td> </td>";
sbuf+="<td align=right>"+fzn(n*p)+"</td><td> </td></tr>";
sbuf+="<tr><td> </td><td align=center>npq</td><td> </td>";
sbuf+="<td align=right>"+fzn(n*p*(1-p))+"</td><td> </td></tr>";

sbuf+="</table>";

pgr[2]="0|";
stp=1; pgr[9]=5;
if (n>=20 && n<=50) {stp=5; pgr[9]=3;}
if (n>=51 && n<=100) {stp=10; pgr[9]=2;}
if (n>=101 && n<=500) {stp=25; pgr[9]=1;}

for (k=1;k<n;k++) if (k % stp == 0) pgr[2]+="k+|";
pgr[2]+="n;

```

```

maxv=mp[0];

for (k=1;k<=n;k++) if (mp[k]>maxv) maxv=mp[k];
yst=0.1;
if (maxv<=0.30) yst=0.05
num_sc_y=Math.ceil(maxv/yst)
pgr[3]="0.0|";
for (k=1;k<num_sc_y;k++) pgr[3]+="yst*k+|";
pgr[3]+="yst*k;

pgr[5]="";
pgr[6]="k";
pgr[7]="P(k)";

if (document.all.sel6.selectedIndex==1) pgr[7]="Φ(k)";

pgr[8]="ff9900";

pgr[0]="";
pgr[1]="";
pgr[4]="";

if (document.all.sel6.selectedIndex==0)
{
for (k=0;k<=n;k++)
{
pgr[0]+="k+|"+k+|";
pgr[1]+="0|"+mp[k]+|";
pgr[4]+="2|";
pgr[5]+="9999ff|";
}
}
if (document.all.sel6.selectedIndex==1)
{
for (k=0;k<n-1;k++)
{
pgr[0]+="k+|"+(k+1)+|"+(k+1)+|";
pgr[1]+="mp[k]+|"+mp[k]+|"+mp[k+1]+|";
pgr[4]+="3|";
}
}

```

```

pgr[5]+="9999ff";
}
pgr[0]+=k+"|"+(k+1)+"|";
pgr[1]+=mp[k]+"|"+mp[k]+"|";
pgr[4]+="2|";
pgr[5]+="9999ff";
}

getArg("gr1")
document.all.res1.innerHTML=sbuf;
}

```

```

function f_calc1()
{
var mp = new Array (501);
var mp1 = new Array (501);
var n,p,k,sbuf="",maxv;
var mx=0.0,dx=0.0;
var i,nn,npp;

n=1*document.all.sel1.options[document.all.sel1.selectedIndex].value;
p=1*document.all.sel3.options[document.all.sel3.selectedIndex].value;
nn=1*document.all.sel4.options[document.all.sel4.selectedIndex].value;
for (k=0;k<=n;k++) mp[k]=0.0;

for (i=0;i<nn;i++)
{
npp=0;
for (k=0;k<=n;k++) {if (Math.random()>1-p) npp++;}
mp[npp]++;
}
for (k=0;k<=n;k++)
{
mp1[k]=mp[k]/nn;

mp[k]=fzn(mp1[k])
}

```

```

sbuf+="<table rules=rows cellpadding=1 cellspacing=2 class=s1a>";
sbuf+="<tr><td> </td><td align=center>k</td><td> </td>";

```

```

sbuf+="<td align=center>P<sup>*</sup><sub>n</sub>(k)</td><td>
</td></tr>";
for (k=0;k<=n;k++)
{
sbuf+="<tr><td> </td><td align=center>"+k+"</td><td> </td>";
sbuf+="<td align=right>"+mp[k]+"</td><td> </td></tr>";
}
sbuf+="</table>";

```

```

for (k=0;k<=n;k++) mx+=mp1[k]*k;

```

```

sbuf+="<br>M<sup>*</sup>[x] = "+fzn(mx);

```

```

for (k=0;k<=n;k++) dx+=(k-mx)*(k-mx)*mp1[k];

```

```

sbuf+="<br>D<sup>*</sup>[x] = "+fzn(dx);
sbuf+="<br>?<sup>*</sup> = "+fzn(Math.sqrt(dx));

```

```

document.all.res2.innerHTML=sbuf;

```

```

pgr[2]="0|"
stp=1; pgr[9]=5;
if (n>=20 && n<=50) {stp=5; pgr[9]=3;}
if (n>=51 && n<=100) {stp=10; pgr[9]=2;}
if (n>=101 && n<=500) {stp=25; pgr[9]=1;}

```

```

for (k=1;k<=n;k++) if (k % stp == 0) pgr[2]+=k+"|";
pgr[2]+=n;

```

```

maxv=mp[0];
for (k=1;k<=n;k++) if (mp[k]>maxv) maxv=mp[k];
yst=0.1; if (maxv<1.5) yst=0.05
num_sc_y=Math.ceil(maxv/yst)
pgr[3]="0.0|"
for (k=1;k<num_sc_y;k++) pgr[3]+=yst*k+"|";
pgr[3]+=yst*k;

```

```

pgr[5]="";
pgr[6]="k";
pgr[7]="P*(k)";

```

```

pgr[8]="ff9900";
pgr[0]="";
pgr[1]="";
pgr[4]="";
for (k=0;k<=n;k++)
{
pgr[0]+=k+"|"+k+"|";
pgr[1]+="0|"+mp[k]+"|";
pgr[4]+="2|";
pgr[5]+="00ffff|";
}
getArg("gr2")

dg=1*document.all.sel5.options[document.all.sel5.selectedIndex].value;
dg05=dg*0.5;
p1=mx-p*n;
dpi=p1;
s_dpi=1; if (dpi<0) s_dpi=-1;
d_pi=Math.abs(dpi);
if (dpi<=dg05)
ndpi=0
else
ndpi=Math.round((dpi-dg05)/dg+0.5)
ndpi*=s_dpi;
add_buf(ndpi);

}

function f_change_par()
{
document.all.res1.innerHTML=""
document.all.gr1.innerHTML=""
document.all.res2.innerHTML=""
document.all.gr2.innerHTML=""
document.all.res3.innerHTML=""
document.all.gr3.innerHTML=""
buf_init()
if (document.all.chb1.checked && document.all.chb2.checked)
{clr1();f_comp_calc()}
else
if (document.all.chb1.checked) {clr1();f_calc()}

```

```

}
function clr_buf()
{
buf_init();
document.all.res3.innerHTML=""
document.all.gr3.innerHTML=""
}

function add_buf(gx)
{
var sbuf="",sumbuf=0;
var max_value_buf1=0;
var smx=0, sdx=0;

for (i=0;i<maxbuf;i++)
if (gx==bufx[i])
{
bufy[i]++;
break;
}
for (i=0;i<maxbuf;i++) sumbuf+=bufy[i];

for (i=0;i<maxbuf;i++)
{
bufy1[i]=bufy[i]/sumbuf;
bufy1[i]=Math.round(bufy1[i]*100)/100;
}

for (i=0;i<maxbuf;i++) if (bufy1[i]>max_value_buf1)
max_value_buf1=bufy1[i];

// Вычисляем математическое ожидание
for (i=0;i<maxbuf;i++) smx+=bufx[i]*bufy1[i];

// Вычисляем математическое дисперсию
for (i=0;i<maxbuf;i++) sdx+=(bufx[i]-smx)*(bufx[i]-smx)*bufy1[i];

sdx=Math.sqrt(sdx)

```

```

sbuf+="<b>M[x]="+Math.round(smx*100)/100+"
?="+Math.round(sdx*100)/100+"</b><br>";
sbuf+="<table rules=rows cellpadding=1 cellspacing=0 class=s1a>"
sbuf+="<tr><td align=center>Интервалы"+</td>"
sbuf+="<td align=center>Количество<br>наблюдений"+</td>"
sbuf+="<td align=center>Частоты"+</td></td>"

```

```

for (i=0;i<maxbuf;i++)
{
sbuf+="<tr>"
sbuf+="<td align=center>"+bufx[i]+</td>"
sbuf+="<td align=center>"+bufy[i]+</td>"
sbuf+="<td align=center>"+bufy1[i]+</td>"
sbuf+="</tr>"
}

```

```

sbuf+="</table>"
document.all.res3.innerHTML=sbuf;

```

```

pgr[2]="-10|-9|-8|-7|-6|-5|-4|-3|-2|-1|0|1|2|3|4|5|6|7|8|9|10";
pgr[3]="0.0|0.1|0.2|0.3|0.4|0.5|0.6|0.7|0.8|0.9|1.0";

```

```

if (max_value_buf1<0.7) pgr[3]="0.0|0.1|0.2|0.3|0.4|0.5|0.6|0.7";
if (max_value_buf1<0.5) pgr[3]="0.0|0.1|0.2|0.3|0.4|0.5";
if (max_value_buf1<0.3) pgr[3]="0.0|0.1|0.2|0.3";

```

```

pgr[5]="33ff99";
pgr[6]="Номер интервала";
pgr[7]="Частота "+M[x]+"+fzn(smx)+" ?="+fzn(sdx);

```

```

pgr[8]="ff9900";
pgr[9]=2;
sumx="";
sumy="";
for (i=0;i<maxbuf;i++)
{
sumx+=bufx[i]+"|";
sumy+=bufy1[i]+"|";
}

```

```

}
pgr[0]=sumx;
pgr[1]=sumy;
pgr[4]=maxbuf+"|";
getArg("gr3")

```

```

}

```

```

function buf_init()
{
var i;
for (i=0;i<maxbuf;i++)
{
bufy[i]=0;
bufy1[i]=0;
bufx[i]=initbuf+i;
}
}

```

```

function pbinom(nb, kb, pb)
{
var i, pbi=1.0;
for (i=1; i<=kb; i++) pbi*=pb*(nb-i+1)/i;
for (i=1; i<=nb-kb; i++) pbi*=1-pb;
return pbi;
}
</script>

```

## Код программы 6

```
<style>
.s1 {font-size:12pt;font-family:Times New Roman;}
.s1a {font-size:10pt;font-family:Tahoma;}
</style>
<table border=0 width=100% class=s1 cellpadding=5>
<tr>
<td bgcolor=ffffcc valign=top width=50%>

<b>6. Квантили нормального распределения</b></td>
<td bgcolor=ffffcc valign=top align=right>© Савченко Н.В., 2008</td>
</tr>
<table>
<table border=0 width=100% class=s1 cellpadding=0>
<tr>
<td bgcolor=ffffcc valign=top width=50%>
<span ID="gr1"></span>
</td>
<td bgcolor=ffffcc valign=top>
<span ID=res1> </span>
</td>
<td bgcolor=ffffcc valign=top colspan=2>
<b><u>Метод вычисления</u></b>
<input type="button" name="b_1" value="Подробнее" onclick="f_id(1)"
class=nsh>
<div ID="n_1">
<br>
<br>
</i>
</div>
<b><u>Параметры</u></b>
<div align=right>Точность
<input type="button" value="-" class=s1a onclick="f_ch_sel(-1,'sel2')"><select
name="sel2" class=s1 onchange="f_change_par()">
<option value="10"> 1</option>
<option value="100"> 2</option>
<option value="1000" selected>3 </option>
<option value="10000">4</option>
<option value="100000">5</option>
<option value="1000000">6</option>
```

```
</select><input type="button" value="+" class=s1a
onclick="f_ch_sel(1,'sel2')"></div>
```

```
Математическое<br>ожидаие <br><i>m</i> =
<input type="button" value="-" class=s1a onclick="f_ch_sel(-1,'sel1')"><select
name="sel1" class=s1 onchange="f_change_par()">
<option value="-5"> -5</option>
<option value="-4"> -4</option>
<option value="-3"> -3</option>
<option value="-2"> -2</option>
<option value="-1"> -1</option>
<option value="0"> 0</option>
<option value="1"> 1</option>
<option value="2"> 2</option>
<option value="3"> 3</option>
<option value="4" selected> 4</option>
<option value="5">5</option>
<option value="6">6</option>
<option value="7">7</option>
<option value="8">8</option>
<option value="9">9</option>
<option value="10">10</option>
</select><input type="button" value="+" class=s1a
onclick="f_ch_sel(1,'sel1')">
<p>Среднеквадратичное<br>отклонение <br>? =
<input type="button" value="-" class=s1a onclick="f_ch_sel(-1,'sel3')"><select
name="sel3" class=s1 onchange="f_change_par()">
<option value="0.01"> 0.01</option>
<option value="0.1"> 0.1</option>
<option value="0.2"> 0.2</option>
<option value="0.3"> 0.3</option>
<option value="0.4" selected> 0.4</option>
<option value="0.5"> 0.5</option>
<option value="0.6"> 0.6</option>
<option value="0.7"> 0.7</option>
<option value="0.8"> 0.8</option>
<option value="0.9"> 0.9</option>
<option value="1.0"> 1</option>
<option value="2.0"> 2</option>
<option value="3.0"> 3</option>
<option value="4.0"> 4</option>
```

```

<option value="5.0"> 5</option>
</select><input type="button" value="+" class=s1a
onclick="f_ch_sel(1,'sel3')">
<p><input type="button" value="Вычислить" class=s1a
onclick="clr1();f_calc()">
<input type="checkbox" name="chb1" class=s1>
<input type="button" value="x" class=s1a onclick="f_change_par()">
</div>
</td>
</tr>

```

```
</table>
```

```

<script>
var pgr = new Array(10);

```

```

var flag_1=true;
//var flag_2=true;
//var flag_3=true;
s_1=document.all.n_1.innerHTML;document.all.n_1.innerHTML="";
//s_2=document.all.n_2.innerHTML;document.all.n_2.innerHTML="";
//s_3=document.all.n_3.innerHTML;document.all.n_3.innerHTML="";

```

```

function f_id(pk)
{
if (eval("flag_"+pk))
{eval("document.all.n_"+pk+".innerHTML=s_"+pk);
eval("document.all.b_"+pk+".value='Свернуть');
eval("flag_"+pk+"=false");}
else {eval("document.all.n_"+pk+".innerHTML="");
eval("document.all.b_"+pk+".value='Подробнее');
eval("flag_"+pk+"=true");}
}
}

```

```

function getArg(s1)
{
s="<OBJECT classid='clsid:D27CDB6E-AE6D-11cf-96B8-444553540000'
codebase='http://download.macromedia.com/pub/shockwave/cabs/flash/swflash.
cab#version=6,0,0,0' WIDTH='450' HEIGHT='380' id='lgraph3' ALIGN="
border=0>"

```

```

s+="<PARAM NAME=movie VALUE='lgraph3.swf">"
s+="<PARAM NAME=flashvars
VALUE='s_dx="+pgr[9]+"&s_xmas="+pgr[0]+"&s_ymas="+pgr[1]+"&s_xm
t="+pgr[2]+"&s_ymt="+pgr[3]+"&s_nmas="+pgr[4]+"&s_bgcol="+pgr[5]
+"&text1="+pgr[6]+"&text2="+pgr[7]+"&bgcol2="+pgr[8]+"&'>"
s+="<PARAM NAME=loop VALUE=false">"
s+="<PARAM NAME=quality VALUE=high">"
s+="<PARAM NAME=bgcolor VALUE=#FFFFFFcc">"
s+="</OBJECT>"
eval("document.all."+s1+".innerHTML=s");
}

```

```

function fzn(t)
{
var z;
z=1*document.all.sel2.options[document.all.sel2.selectedIndex].value;
return Math.round(t*z)/z;
}
function clr1()
{
document.all.res1.innerHTML="";document.all.gr1.innerHTML="
}
function f_change_par()
{
document.all.gr1.innerHTML=""
document.all.res1.innerHTML=""
if (document.all.chb1.checked) {clr1();f_calc();}
}

```

```

function f_ch_sel(tsh, namesel)
{
var maxsel=eval("document.all."+namesel+".length")-1
var curtsh=eval("document.all."+namesel+".selectedIndex")
if (tsh==1 && curtsh<maxsel)
{
eval("document.all."+namesel+".selectedIndex++")
f_change_par()
}
if (tsh==-1 && curtsh>0)
{
eval("document.all."+namesel+".selectedIndex--")
}
}

```

```

f_change_par()
{
}

function gaus(x)
{
var x,a,b,n=200,h,s,i,xi;
a=0.0;
b=x;
h=(b-a)/n;
s=0.5+0.5*Math.exp(-b*b/2.0);
for(i=1;i<n;i++)
{
xi=a+i*h;
s+=Math.exp(-xi*xi/2.0);
}
s*=h;
s*=1.0/Math.sqrt(2*Math.PI);
return s;
}

function f_calc()
{
var mp = new Array (501);
var mp1 = new Array (501);

var mpx = new Array (501);

var n,k,sbuf="",maxv,xk;

zm=1*document.all.sel1.options[document.all.sel1.selectedIndex].value;
zd=1*document.all.sel3.options[document.all.sel3.selectedIndex].value;
a=1*fzn(zm-4*zd)
b=1*fzn(zm+4*zd)

n=21;
zxst=(b-a)/(n-1);
mpx[k]=a;
for (k=0;k<n-1;k++) mpx[k]=fzn(a+k*zxst);
mpx[n-1]=b;

```

```

for (k=0;k<n;k++)
{
xk=(mpx[k]-zm)/zd
mp[k]= Math.exp(-xk*xk/2)/zd/Math.sqrt(2*Math.PI);
mp1[k]= gaus(xk)+0.5;
}

sbuf+="<table rules=rows cellpadding=1 cellspacing=2 class=s1a
align=center>";
sbuf+="<tr><td> </td><td align=center>x</td><td> </td>";
sbuf+="<td align=center bgcolor=#FF9900>f(x)</td><td> </td>";
sbuf+="<td align=center bgcolor=#9999FF>F(x)</td><td> </td></tr>";
for (k=0;k<n;k++)
{
sbuf+="<tr><td> </td><td align=center>" + mpx[k] + "</td><td> </td>";
sbuf+="<td align=right>" + fzn(mpx[k]) + "</td><td> </td>";
sbuf+="<td align=right>" + fzn(mp1[k]) + "</td><td> </td></tr>";
}
sbuf+="</table>";
document.all.res1.innerHTML=sbuf;

n=101;
zxst=(b-a)/(n-1);

mpx[k]=a;
for (k=0;k<n-1;k++) mpx[k]=fzn(a+k*zxst);
mpx[n-1]=b;

for (k=0;k<n;k++)
{
xk=(mpx[k]-zm)/zd
mp[k]= Math.exp(-xk*xk/2)/zd/Math.sqrt(2*Math.PI);
mp1[k]= gaus(xk)+0.5;
}

maxv=mp[0];
for (k=1;k<n;k++) if (mp[k]>maxv) maxv=mp[k];
for (k=0;k<n;k++) if (mp1[k]>maxv) maxv=mp1[k];

yst=0.1;

```

```

if (maxv<=0.30) yst=0.05
if (maxv>2) yst=Math.ceil(maxv)/10;

num_sc_y=Math.ceil(maxv/yst)

pgr[3]="0.0"
for (k=1;k<num_sc_y;k++) pgr[3]+=fzn(yst*k)+"|";
pgr[3]+=fzn(yst*k);

pgr[2]="";
for (k=-4;k<4;k++) pgr[2]+=zm+k*zd+"|";
pgr[2]+=zm+4*zd;

pgr[5]="FF9900|9999FF";
pgr[6]="x";
pgr[7]="f(x).F(x)";
pgr[8]="ff0000";
pgr[9]=2;
pgr[0]="";
pgr[1]="";
pgr[4]=n+"|"+n;

for (k=0;k<n;k++)
{
pgr[0]+=fzn(mpx[k])+"|";
pgr[1]+=fzn(mpI[k])+"|";
}

for (k=0;k<n;k++)
{
pgr[0]+=fzn(mpx[k])+"|";
pgr[1]+=fzn(mpI[k])+"|";
}

getArg("gr1")

}

</script>

```

---

### Код программы 7

---

```

<!--
Эпиграф.
- Стой! Кто идет?
- Смена.
-->
<style>
.s1 {font-family:Tahoma;font-size:10pt;}
.s1a {font-family:Tahoma;font-size:10pt;width:250px;}
</style>

<div class="s1" style="margin: 0px 0px 0px 0px; padding: 0px 0px 0px
0px;"><hr>
<b>Выборочные числовые характеристики</b>
<br>© 2013 Савченко н.в., НТУ "ХПИ", Харьков, Новая Водолага
<hr>
</div>
<table border=0 cellpadding=1 cellspacing=0 class=s1>
<tr>
<td colspan=4 align=right>
<input type="button" value="Вычислить" name="but4" onclick="f_calc()">
Точность
<select name='sel2' class='s1'>
<option value='0'>0</option>
<option value='1'>1</option>
<option value='2' selected>2</option>
<option value='3'>3</option>
<option value='4'>4</option>
<option value='5'>5</option>
<option value='6'>6</option>
</select>

<input type="button" value="Пример" name="but1"
onclick="f_prim(document.all.sel1.value)">

<select name='sel1' class='s1'>
<option value='0' selected>Фадеева 2006, стр. 125, Зад. 29</option>
<option value='1'>Фадеева 2006, стр. 125, Зад. 30</option>
</select>

```

```

<br>
<textarea id="txt3" cols="72" rows="6" class=s1></textarea>
<input type="button" value="x" name="but5"
onclick="document.all.txt3.value="">
</td>
</tr>
<tr>
<td valign="top">x<sub>i</sub>=</td>
<td valign="top"><textarea id="txt1" cols="30" rows="10"
class=s1></textarea>
<input type="button" value="x" name="but2"
onclick="document.all.txt1.value="">
</td>
<td valign="top">n<sub>i</sub>=</td>
<td valign="top"><textarea id="txt2" cols="30" rows="10"
class=s1></textarea>
<input type="button" value="x" name="but3"
onclick="document.all.txt2.value="">
</td>
</tr>
<td colspan=2 valign=top><span id="res2"> </span></td>
<td colspan=2 valign=top><span id="res1"> </span></td>
</tr>
</table>
</div>
<script>
function f_prim(par)
{
var s_ni="", s_xi="", s_info="";
document.all.res1.innerHTML="";
document.all.res2.innerHTML="";
if (par==0)
{
s_xi="5.1\n5.2\n5.3\n5.4\n5.5\n5.6\n5.7\n5.8";
s_ni="5\n8\n12\n20\n26\n15\n10\n4";
s_info="В таблице приведены сгруппированные данные о коэффициентах
соотношения заемных и собственных средств на 100 малых предприятиях
региона. Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, среднее
квадратичное отклонение, выборочную моду."
}
}

```

```

if (par==1)
{
s_xi="0\n1\n2\n3\n4\n5\n6\n7\n8\n9\n10\n11\n12\n14";
s_ni="57\n203\n383\n525\n532\n408\n273\n139\n45\n27\n10\n4\n1\n1";
s_info="Проведено исследование посещаемости популярного интернет-
сайта. В течение многих часов регистрируются число посетителей,
посетивших сайт в течение данного часа. Результаты исследования
представлены в таблице. Найти выборочное среднее, выборочную
дисперсию, среднее квадратичное отклонение, выборочную моду."
}
document.all.txt1.value=s_xi;
document.all.txt2.value=s_ni;
document.all.txt3.value=s_info;
}
function f_calc()
{
var s_xi,s_ni,mxi,mni,i,l,num,xsr,disp,sofk,mu3,mu4,ass,eks,sum1;
document.all.res1.innerHTML="";
s_xi=document.all.txt1.value;
s_ni=document.all.txt2.value;
if (s_xi.length==0) {alert("Набор данных xi пуст!"); return}
if (s_ni.length==0) {alert("Набор данных ni пуст!"); return}
s_xi=f_tr(s_xi);
s_ni=f_tr(s_ni);
mxi=s_xi.split(" ");
mni=s_ni.split(" ");
l=mxi.length;
i=mni.length;
if (l==0) {alert("Набор данных xi пуст!"); return}
if (i==0) {alert("Набор данных ni пуст!"); return}
if (l!=i) {alert("Длина массивов данных xi и ni не совпадает!"); return}
for(i=0;i<l;i++)
{
if (isNaN(mxi[i])) {alert("Неправильное входное данные xi["+i+"]="+mxi[i]);
return}
mxi[i]=1*mxi[i];
if (isNaN(mni[i])) {alert("Неправильное входное данные ni["+i+"]="+mni[i]);
return}
mni[i]=1*mni[i];
}
sum1="<b>Исходные данные<b>";
}

```

```

document.all.res2.innerHTML=sum1;
sum1="<table border=0 width=50% cellpadding=1 cellspacing=0 class=s1
align=center>"
for(i=0;i<l;i++)
sum1+="<tr><td
align=right>"+(i+1)+"</td><td
align=right>"+mxi[i]+"</td><td align=right>"+mni[i]+"</td></tr>"
sum1+="</table>"
document.all.res2.innerHTML+=sum1;
xsr=0;
num=0;
for(i=0;i<l;i++)
{
xsr+=mxi[i]*mni[i];
num+=mni[i];
}
xsr/=num;
document.all.res1.innerHTML="<b>Выборочное среднее равно</b>"
+f_pre(xsr);
disp=0;
for(i=0;i<l;i++) disp+=mxi[i]*mxi[i]*mni[i];
disp=disp/num*xsr;
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Выборочная дисперсия равна</b>"
+f_pre(disp);
sotk=Math.sqrt(disp);
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Выборочное среднее
квадратическое отклонение равно</b>" +f_pre(sotk);

if(l>1)
{
if (mni[0]>mni[1])
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Выборочная мода равна</b>"
+f_pre(mxi[0]);
for(i=1;i<l-1;i++)
if (mni[i]>mni[i-1] && mni[i]>mni[i+1])
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Выборочная мода равна</b>"
+f_pre(mxi[i]);
if (mni[l-1]>mni[l-2])
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Выборочная мода равна</b>"
+f_pre(mxi[l-1]);
}
mu3=0;

```

```

mu4=0;
for(i=0;i<l;i++)
{
mu3+=(mxi[i]-xsr)*(mxi[i]-xsr)*(mxi[i]-xsr)*mni[i];
mu4+=(mxi[i]-xsr)*(mxi[i]-xsr)*(mxi[i]-xsr)*(mxi[i]-xsr)*mni[i];
}
mu3/=num;
mu4/=num;
ass=mu3/(sotk*sotk*sotk);
eks=mu4/(sotk*sotk*sotk*sotk)-3;
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Выборочный коэффициент
асимметрии равен</b>" +f_pre(ass);
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Экцесс вариационного ряда
равен</b>" +f_pre(eks);
}

function f_tr(s)
{
var i,l,sum,flag=true;
l=s.length;
sum="";
for(i=0;i<l;i++) s.charCodeAt(i)==13 || s.charCodeAt(i)==10 ? sum+=" " :
sum+=s.charAt(i);
s=sum;
sum="";
for(i=0;i<l;i++)
{
if (s.charAt(i)!=" ") {sum+=s.charAt(i); flag=true;}
if (s.charAt(i)==" " && flag) {sum+=s.charAt(i); flag=false;}
}
return sum;
}

function f_pre(x)
{
var n=1*document.all.sel2.value;
n=Math.pow(10,n);
return Math.round(x*n)/n;
}

</script>

```

## Код программы 8

```
<!--  
Эпиграф.  
- Стой! Кто идет?  
- Смена.  
-->  
<style>  
.s1 {font-family:Tahoma;font-size:10pt;}  
.s1a {font-family:Tahoma;font-size:10pt;width:250px;}  
</style>  
  
<div class="s1" style="margin: 0px 0px 0px 0px; padding: 0px 0px 0px  
0px;"><hr>  
<b>Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия</b>  
<br>© 2013 Савченко н.в., НТУ "ХПИ", Харьков, Новая Водолага  
<hr>  
</div>  
<table border=0 cellpadding=1 cellspacing=0 class=s1>  
<tr>  
<td colspan=4 align=right>  
<input type="button" value="Вычислить" name="but4" onclick="f_calc()">  
Точность  
<select name='sel2' class='s1'>  
<option value='0'>0</option>  
<option value='1'>1</option>  
<option value='2' selected>2</option>  
<option value='3'>3</option>  
<option value='4'>4</option>  
<option value='5'>5</option>  
<option value='6'>6</option>  
</select>  
  
<input type="button" value="Пример" name="but1"  
onclick="f_prim(document.all.sel1.value)">  
  
<select name='sel1' class='s1'>  
<option value='0' selected>Фадеева 2006, сmp. 175, Зад. 1</option>  
<option value='1'>Фадеева 2006, сmp. 178, Зад. 5</option>  
</select>  
<br>
```

```
<textarea id="txt3" cols="72" rows="6" class=s1></textarea>  
<input type="button" value="x" name="but5"  
onclick="document.all.txt3.value="">  
</td>  
</tr>  
<tr>  
<td valign="top">x<sub>i</sub>=</td>  
<td valign="top"><textarea id="txt1" cols="30" rows="10"  
class=s1></textarea>  
<input type="button" value="x" name="but2"  
onclick="document.all.txt1.value="">  
</td>  
<td valign="top">y<sub>i</sub>=</td>  
<td valign="top"><textarea id="txt2" cols="30" rows="10"  
class=s1></textarea>  
<input type="button" value="x" name="but3"  
onclick="document.all.txt2.value="">  
<br>x<sub>0</sub>=<input type="text" value="" name="txt4">  
</td>  
</tr>  
<tr>  
<td colspan=2 valign=top><span id="res2"> </span></td>  
<td colspan=2 valign=top><span id="res1"> </span></td>  
</tr>  
</table>  
</div>  
  
<script>  
  
function f_prim(par)  
{  
var s_ni="", s_xi="", s_info="", s_x="";  
document.all.res1.innerHTML="";  
document.all.res2.innerHTML="";  
if (par==0)  
{  
s_xi="1998\n1999\n2000\n2001\n2002\n2003";  
s_ni="827\n846\n878\n891\n891\n915";  
s_info="В таблице представлены данные о производстве электроэнергии в  
России за 1998-2003 гг. Провести линейную регрессию производства по  
годам и сделать прогноз на 2004 г."  
}
```

```

s_x=2004;
}
if (par==1)
{
s_xi="1951\n1952\n1953\n1954\n1955\n1956\n1957\n1958\n1959\n1960\n1961\n1962\n1963\n1964\n1965\n1966\n1967\n1968\n1969\n1970";
s_ni="7.4\n8.6\n7.8\n7.7\n8.4\n9.9\n8.4\n11.1\n10.4\n10.9\n10.7\n10.9\n8.3\n11.4\n9.5\n13.7\n12.1\n14.0\n13.2\n15.6";
s_info="В таблице представлены данные об урожайности зерновых культур в СССР (ц/га) за 1951-1970 гг. Провести линейную регрессию урожайности по годам."
s_x=2013;
}
document.all.txt1.value=s_xi;
document.all.txt2.value=s_ni;
document.all.txt3.value=s_info;
document.all.txt4.value=s_x;
}

function f_calc()
{
var s_xi,s_ni,mxi,mni,i,l,num,xsr,disp,sotk,mu3,mu4,ass,eks,sum1;
document.all.res1.innerHTML="";
s_xi=document.all.txt1.value;
s_ni=document.all.txt2.value;
if (s_xi.length==0) {alert("Набор данных xi пуст!"); return}
if (s_ni.length==0) {alert("Набор данных ni пуст!"); return}
s_xi=f_tr(s_xi);
s_ni=f_tr(s_ni);
mxi=s_xi.split(" ");
mni=s_ni.split(" ");
l=mxi.length;
i=mni.length;
if (l==0) {alert("Набор данных xi пуст!"); return}
if (i==0) {alert("Набор данных ni пуст!"); return}
if (l!=i) {alert("Длина массивов данных xi и ni не совпадает!"); return}
for(i=0;i<l;i++)
{
if (isNaN(mxi[i])) {alert("Неправильное входное данные xi["+i+"]="+mxi[i]); return}
mxi[i]=1*mxi[i];

```

```

if (isNaN(mni[i])) {alert("Неправильное входное данные ni["+i+"]="+mni[i]); return}
mni[i]=1*mni[i];
}
sum1="<b>Исходные данные<b>";

document.all.res2.innerHTML=sum1;
sum1="<table border=0 width=50% cellpadding=1 cellspacing=0 class=s1 align=center>"
for(i=0;i<l;i++)
sum1+="<tr><td align=right>"+(i+1)+".</td><td align=right>"+mxi[i]+"</td><td align=right>"+mni[i]+"</td></tr>"

sum1+="</table>"
document.all.res2.innerHTML+=sum1;

var xs,ys,b,a;
xs=0;
ys=0;
for(i=0;i<l;i++)
{
xs+=mxi[i];
ys+=mni[i];
}

xs/=l; ys/=l;
a=0;
b=0;
for(i=0;i<l;i++)
{
a+=(mni[i]-ys)*(mxi[i]-xs);
b+=(mxi[i]-xs)*(mxi[i]-xs);
}

b=a/b;
a=ys-b*xs;
document.all.res1.innerHTML="<b>Уравнение линейной регрессии  $y=a+bx$  или  $y=ys+b(x-xs)$ </b> ";
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Объем выборки равен</b> "+f_pre(l);

```

```

document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Среднее значение x равно</b>
"+f_pre(xs);
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Среднее значение y равно</b>
"+f_pre(ys);
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Коэффициент a равен</b>
"+f_pre(a);
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Коэффициент b равен</b>
"+f_pre(b);

```

```

if(document.all.txt4.value!="")
{
var x0=1*document.all.txt4.value;
var y0=a+b*x0;
document.all.res1.innerHTML+="<p><b>Значение y("x0+)"= </b>
"+f_pre(y0);
}
}

```

```

function f_tr(s)
{
var i,l,sum,flag=true;
l=s.length;
sum="";
for(i=0;i<l;i++) s.charCodeAt(i)==13 || s.charCodeAt(i)==10 ? sum+=" " :
sum+=s.charAt(i);
s=sum;
sum="";
for(i=0;i<l;i++)
{
if (s.charAt(i)!=" ") {sum+=s.charAt(i); flag=true;}
if (s.charAt(i)==" " && flag) {sum+=s.charAt(i); flag=false;}
}
return sum;
}

```

```

function f_pre(x)
{
var n=1*document.all.sel2.value;
n=Math.pow(10,n);
return Math.round(x*n)/n;
}

```

```
</script>
```

## СОДЕРЖАНИЕ

	<b>Общие указания</b>	3
1.	<b>ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ</b>	4
2.	<b>КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ СХЕМЕ</b>	10
3.	<b>ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА</b>	18
4.	<b>МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА БЮФФОНА</b>	23
5.	<b>РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЕРНУЛЛИ</b>	29
6.	<b>НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ</b>	39
7.	<b>ВЫБОРОЧНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ</b>	48
8.	<b>МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. РЕГРЕССИЯ</b>	54
	<b>Контрольные вопросы</b>	62
	<b>Литература</b>	71
	<b>Код программы 1</b>	73
	<b>Код программы 2</b>	76
	<b>Код программы 3</b>	79
	<b>Код программы 4</b>	83
	<b>Код программы 5</b>	92
	<b>Код программы 6</b>	111
	<b>Код программы 7</b>	118
	<b>Код программы 8</b>	123