

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ

ВВЕДЕНИЕ. СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА КООРДИНАТ И ВРЕМЕНИ

Начальные установки. Учебной программой по дисциплине “*Геодезические основы карт*” на лекции отводится 18 часов – 9 лекций. На семинары и практические занятия учебной программой предусмотрено в два раза больше времени – 36 часов. Основной упор делается на самостоятельное изучение дисциплины – 54 часа. Поэтому в каждой приводимой ниже лекции материала больше, чем это можно изложить за два академических часа. Собственно говоря, каждая лекция – это самостоятельная тема. В аудитории на лекциях рассматриваются лишь основные положения выбранной темы. Углубление темы будет продолжено на семинарах и практических занятиях. Студенты, используя конспекты лекций и рекомендуемую литературу, *самостоятельно* полностью прорабатывают лекционный материал, готовятся к устному опросу и решению тестов по проверке усвоения материала, к выполнению практических занятий, оформлению и сдаче выполненных практических работ, к подготовке обстоятельных рефератов и презентаций по ним. В конечном счёте – к подготовке к экзамену. Позвольте пожелать Вам успеха в изучении этой важной дисциплины!

Содержание курса. Учебные пособия. Курс называется “*Геодезические основы карт*”. В соответствии с ГОСТ по картографическим терминам и определениям [11, п. 91]

|| **Геодезическая основа карты** (кратко - **геодезическая основа**) - это совокупность геодезических данных, необходимых для создания карты.

Обычно эта дисциплина опирается на разделы высшей геодезии и обязательно содержит материал по созданию и закреплению на местности опорных геодезических сетей.

Одним из ранних учебных пособий для студентов-картографов была книга Б.Н. Рабиновича “*Основы построения опорных геодезических сетей*”, 1948 г. В 1954 г. вышло её второе издание. Учебное пособие составлено с учетом мнений выдающихся ученых: Ф.Н. Красовского, А.А. Изотова, П.С. Закатова, К.А. Салищева и др. В книге излагаются вопросы высшей геодезии и практической астрономии. Рассмотрены методы и приборы высокоточных базисных, угловых и нивелирных измерений. Основной упор делался на теорию и практику построения в СССР государственных геодезических сетей.

В 1975 г. в МГУ имени М.В. Ломоносова издано учебное пособие А.П. Тищенко “*Геодезические основы карт*”, а в 1984 г. в МИИГАиК – учебник З.С. Хаимова “*Основы высшей геодезии*” для студентов картографической специальности. В этих работах учитывались новейшие достижения в области геодезии, актуальные и для картографии.

В последние десятилетия произошли принципиальные изменения в геодезии и картографии. В практику вошли глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС). Создаваемые при их помощи высокоточные векторные геодезические сети практически вытеснили традиционные методы триангуляции, полигонометрии и трилатерации. В картографии классические методы создания и использования географических карт уступили место геоинформационным технологиям. В практику вошли географические информационные системы. Компьютер и его окружение оказались в центре внимания картографов. Цифровые пространственные данные, которые заносятся в компьютер и хранятся в базах данных, должны иметь пространственную привязку в той или иной координатной системе отсчета. Поэтому земные системы отсчета и математические операции с координатами разных систем стали важнейшей частью дисциплины “*Геодезические основы карт*”. На географическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова издан ряд новых учебных пособий, которые подготовил проф. Б.Б. Серапинас: “*Геодезические основы карт*”, 2001 г., “*Практикум по геодезическим основам карт*”, 2008 г., “*Основы спутникового позиционирования*”, 2012 г.

Существенное влияние на содержание данного курса и последовательность его изложения имели кардинальные решения 24-й Генеральной ассамблеи Международного астрономиче-

ского союза (IAU) 2000 г. по небесным и земным координатным системам отсчёта и системам счёта времени. Основное содержание Лекции 1 – системы отсчёта координат и времени.

Небесные и земные системы отсчёта. Международный астрономический союз IAU (*International Astronomical Union*) в 2000 г. конкретизировал понятия о системах отсчёта для Земли и для Солнечной системы [29, 30]. В рамках общей теории относительности рассмотрены *системы отсчёта*, иначе *опорные системы* (англ. *reference system*). Они образуют концептуальную базу определения положения и движений объектов в пространстве и во времени. Их практической реализацией являются *отсчётные (опорные) основы* (англ. *reference frame*) – каталоги координат позиций и параметры движений физически закреплённых точек; на земной поверхности этим точкам соответствуют пункты опорных геодезических сетей. В примечании ниже приведены эти определения на языке оригинала¹.

Итак, система отсчёта – это *теоретическая концепция*, содержащая представления о системах счёта координат и времени, о параметрах Земли, необходимых для их введения, и отображения по установлению этих систем в рассматриваемом пространстве.

Результатом практической реализации этой концепции является закреплённая в пространстве *отсчётная основа*. В случае наземных измерений это опорная геодезическая сеть, пункты которой определены в выбранной системе координат, созданы каталоги координат R_{t_1} на эпоху t_1 , а также определены скорости изменения координат \dot{R}_{t_1} ². По этим данным можно вычислить координаты на эпоху t_2 :

$$R_{t_2} = R_{t_1} + (t_2 - t_1)\dot{R}_{t_1}.$$

Международный астрономический союз IAU установил ряд небесных и земных систем пространственно-временного отсчёта. Кратко перечислим эти системы, ориентируясь на международное их понимание и толкование (рис. 1).

- **Барицентрическая небесная система отсчёта BCRS** (*Barycentric Celestial Reference System*) предназначена для установления в рамках общей теории относительности пространственно-временных координат для Солнечной системы.
- **Международная небесная система отсчёта ICRS** (*International Celestial Reference System*) - конкретная реализация BCRS. Её начало, барицентр, находится в центре масс Солнечной системы. Координатные оси зафиксированы в пространстве относительно координат удалённых внегалактических радиоисточников, собственные движения которых практически не наблюдаемы. Координатная система не зависит от эпохи и положений эклиптики или экватора.
- **Международная небесная отсчётная основа ICRF** (*International Celestial Reference Frame*). Практическая реализация ICRS, представляет собой каталог позиций сотен внегалактических радиоисточников, закрепляющих положения координатных осей системы; основана на данных фундаментальных каталогов и наблюдений, выполненных методом радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой - РСДБ.

¹ **Reference system:** theoretical concept of a system of coordinates, including time and standards necessary to specify the bases used to define the position and motion of objects in time and space [30].

Reference frame: practical realization of a reference system, usually as a catalog of positions and motions of a certain number of fiducial points. For instance, the ICRF is the realization of the ICRS, where the ICRF points have no proper motions [30].

² Изменения координат вектора R_{t_1} обусловлены скоростью изменения (1) начала координат R_0 , (2) различия линейных масштабов m и (3) матрицы углов поворота координатных осей W :

$$\dot{R}_{t_1} = \dot{R}_0 + m\dot{R}_{t_1} + \dot{W}R_{t_1}.$$

Relationship between TRS's. URL: http://itrf.ensg.ign.fr/rel_trs.php (дата обращения 01.06.2015).

- **Геоцентрическая небесная система отсчета GCRS (Geocentric Celestial Reference System).** Геоцентрическая система пространственно-временных координат в рамках общей теории относительности. Небесные системы *BCRS* и *GCRS* взаимосвязаны, их соответствующие координатные оси параллельны и неподвижны относительно внегалактических радиоисточников. Система не участвует в суточном вращении Земли.
- **Геоцентрическая земная система отсчета GTRS (Geocentric Terrestrial Reference System).** Геоцентрическая система пространственно-временных координат в рамках общей теории относительности. Участвует в суточном вращении Земли. Земная система *GTRS* взаимосвязана с небесной системой *GCRS*. Она введена взамен *Условной земной системы отсчета CTRS (Conventional Terrestrial Reference System)*.
- **Международная земная система отсчёта ITRS (International Terrestrial Reference System).** Специфический представитель *GTRS*. Именно *ITRS* рекомендуется для определения позиций и параметров движений объектов на Земле и в околоземном пространстве. Это полноценная международная геоцентрическая система координат. Поддерживается Международной службой вращения Земли *IERS*, и в мире является основной. Служба *IERS* создана в 1987 г. Международным астрономическим союзом *IAU* и Международным союзом геодезии и геофизики *IUGG* [31]. Начало её работы – 1 января 1988 г. При сохранении аббревиатуры *IERS* она в 2003 г. переименована в Международную службу вращения Земли и земных систем отсчёта (*International Earth Rotation and Reference Systems Service*).
- **Международная земная отсчётная основа ITRF (International Terrestrial Reference Frame).** Практическая реализация *ITRS*. Ежегодно новейшими методами космической геодезии формируется и уточняется координатная основа. Используются технологии: 1) наблюдения внегалактических точечных радиоисточников методом радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой – РСДБ (*VLBI - Very Long Baseline Interferometry*), 2) позиционирования системами ГЛОНАСС и *GPS*, 3) лазерной локации Луны (*LLR-Lunar Laser Ranging*), 4) лазерной локации искусственных спутников Земли (*SLR - Satellite Laser Ranging*) и 5) измерения доплеровской спутниковой системой ДОРИС (*DORIS - Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite*). В мире построено около 4000 пунктов *ITRF*. Вследствие геодинамических процессов, координаты пунктов изменяются в среднем со скоростью ~ 2–4 см/год, в отдельных регионах даже быстрее. Поэтому координаты постоянно обновляются, а в каталогах указывается год их реализации. Например, координатная отсчётная основа эпохи 1989 г. будет обозначена как *ITRF-89*. С 1988 по 2008 гг., за исключением 1995 г., реализовано 12 вариантов: с *ITRF-88* по *ITRF-2008*. На сайте [32] имеются параметры, относящиеся к разным версиям Международной земной отсчётной основы *ITRF*.
- **Небесная промежуточная система отсчёта CIRS (Celestial Intermediate Reference System) и Земная промежуточная система отсчёта TIRS (Terrestrial Intermediate Reference System).** Это геоцентрические системы отсчета. Их объединяет единый небесный промежуточный полюс *CIP (Celestial Intermediate Pole)*. Полюсу *CIP* соответствует небесный промежуточный экватор. Действуют с 1 января 2003 г. Введены для взаимосвязи *GCRS* и *ITRS*. Полюс *CIP* близок к истинному (мгновенному) полюсу. Он движется относительно полюса *ITRS* вследствие перемещений оси вращения в теле Земли и перемещается относительно полюса *GCRS* из-за прецессии и нутации.
Промежуточные системы введены с учётом того, что результаты наблюдений, выполняемые при помощи РСДБ, ГНСС и других современных средств, практически не зависят от погрешностей, обусловленных использованием в прежних небесных системах отсчёта экватора, эклиптики и точки весеннего равноденствия.

На промежуточном экваторе установлены так называемые «невращающиеся начала отсчёта» (*non-rotating origin*): небесное промежуточное начало *CIO* (*Celestial Intermediate Origin*) и земное промежуточное начало *TIO* (*Terrestrial Intermediate Origin*).

В настоящее время точка *CIO* очень близка к нулевому меридиану *GCRS* и в промежутке 1900-2100 гг. останется в этом положении.

Точка *TIO*, начало счёта долгот в земной системе *TIRS*, очень близка к нулевому меридиану *ITRS* и в промежутке 1900-2100 гг. останется в этом положении.

Полус *CIP*, точки на его экваторе *TIO* и *CIO* обозначают меридианы в промежуточных системах. Угол, измеряемый по промежуточному экватору между этими точками, определяет угол вращения Земли *ERA* (*Earth Rotation Angle*). Этот угол объединяет меридианы небесных и земных нулевых долгот.

Для трансформирования координат из *ITRS* в *GCRS* необходимо знать положение полюса *CIP* в *GCRS*, положение полюса *CIP* в *ITRS* и угол вращения Земли *ERA*.

Введением полюса *CIP* отменяется ранее применявшийся небесный эфемеридный полюс *CEP* (*Celestial Ephemeris Pole*) [28, 29].

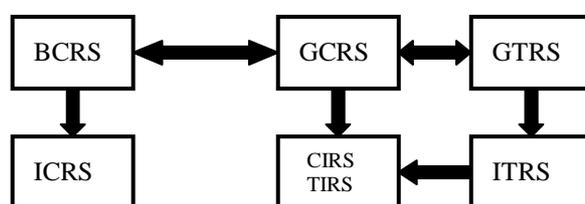


Рис. 1. Взаимосвязи небесных и земных систем отсчёта

Геоцентр. Во многих небесных и земных системах начало координат располагается в центре масс Земли – *геоцентре*. Такие координаты называют геоцентрическими. При этом учитывается стабильность геоцентра и движения земной оси в теле Земли и относительно звёзд. Оценки стабильности геоцентра определены по результатам наблюдений внегалактических точечных радиоисточников, по данным лазерной локации искусственных спутников Земли, измерений системами ГЛОНАСС, *GPS* и др. Эти исследования показывают, что смещения геоцентра колеблются от нескольких миллиметров до первых сантиметров [26]. Колебания носят сложный характер, но преобладают годовые и полугодовые гармоника, отражающие приливные явления [3].

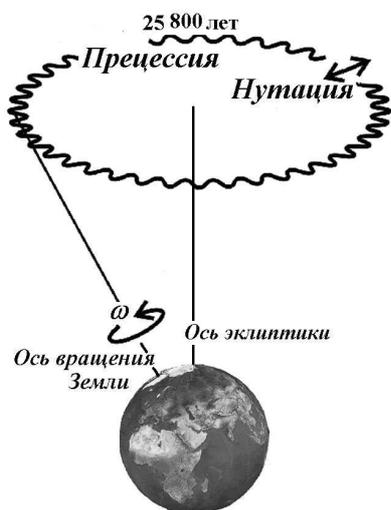


Рис. 2. Прецессия и нутация земной оси; ω - угловая скорость вращения Земли; ось эклиптики – перпендикуляр к плоскости орбиты Земли

Прецессия (от лат. *praecessio* – опережающее движение). Из-за эллипсоидальности и наличия экваториального избытка масс материальные точки Земли, расположенные ближе к Луне и Солнцу, испытывают притяжение более сильное, нежели удаленные от них точки. Силы притяжения пытаются совместить плоскость экватора Земли с плоскостью её орбиты, однако из-за вращения Земли этого не происходит. Возникает момент сил, заставляющий ось вращения Земли примерно за 25 800 лет описывать в пространстве конусообразную поверхность (рис. 2). Эти перемещения напоминают круговые движения оси вращающегося волчка. Ось конуса является осью эклиптики – перпендикуляр к плоскости земной орбиты. Полюс Мира перемещается на небесной сфере по окружности, угловой радиус которой равен $23^{\circ}26'$ и меняется за тысячелетия от $21^{\circ}58'$ до

24°36'. В наше время северной полярной является звезда α созвездия Малой Медведицы. 4500 лет назад над северным полюсом была звезда α из созвездия Дракона. Через 2000 лет полярными станут звезды созвездия Цефей, а через 12 000 – звезды созвездия Лиры (рис. 3) [22]. Прецессию открыл во II в. до н. э. греческий астроном Гиппарх. Ее сущность объяснил Ньютон.

Нутация (от лат. *Nutatio* – колебание). Из-за непрерывного изменения взаимного положения Земли, Солнца и Луны на прецессионное перемещение земной оси вращения накладываются периодические колебания, называемые нутацией. Нутация состоит из целого ряда колебательных движений с периодами 18,67 года, 1 года, 1/2 года, 27,32 суток, 13,66 суток и т.д. Амплитуда гармоника периода 18,67 лет не превышает 9". Явление нутации и ее главный период открыл английский астроном Дж. Брайлей (1726-1747).

Движение земных полюсов. Ось вращения не занимает неизменного положения в теле Земли. Это явление известно как *движение полюсов Земли*.

Движения полюсов были предсказаны ещё Л. Эйлером, обнаружены в Пулковской обсерватории астрономом М. Нюренем, исследованы немецким астрономом Ф. Кюстнером, американским астрономом С. Чандлером и др. Движение мгновенной оси вращения Земли имеет сложный периодический характер, и обусловлено влиянием упругих и вязких свойств литосферы, действием земных, морских и океанических приливов, вызываемых притяжением

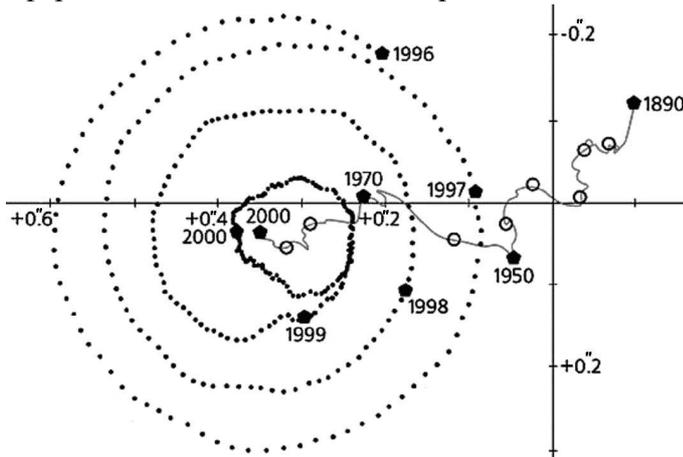


Рис. 4. Движения Северного полюса; периодические - точечные линии, поступательные - сплошная линия

~0,1 м/год в направлении меридианов с западной долготой 70-80° (рис. 4).

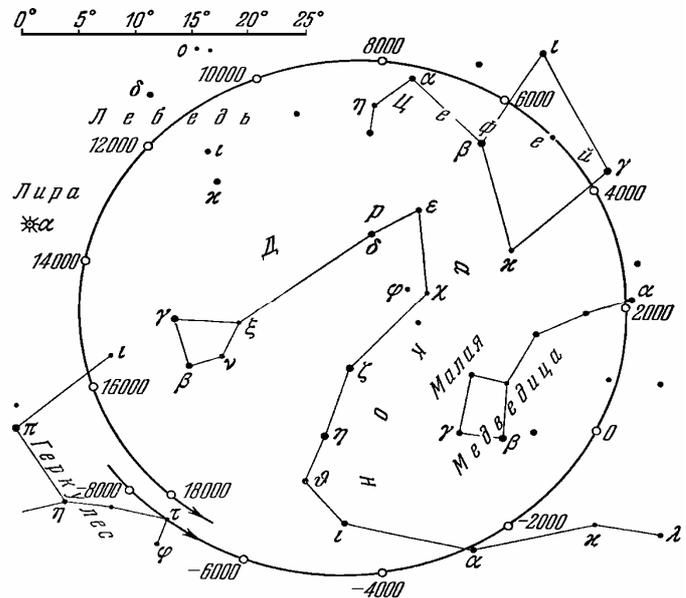


Рис. 3. Перемещения северного полюса среди звёзд из-за прецессии (вид с Земли) [22]

Солнца и Луны, сезонных изменений нагрузки на поверхность Земли из-за дождя, нарастания и таяния снегового и ледового покрова, сброса растениями листвы, изменения массы и уровня грунтовых вод, перемещений масс атмосферы и масс воды в океанах. Перемещения полюса происходят вокруг своего среднего положения по спиралеподобной траектории, называемой *полодией*, не выходящей из квадрата со сторонами 20 м. Так называемый период Чандлера составляет ~428-435 суток; амплитуда колебаний ~6 м, а её суточные изменения ~5 см.

Наряду с периодическими колебаниями наблюдается поступательное движение Северного полюса со скоростью

Поэтому координатная ось Z ориентируется по линии, соответствующей положению земной оси в некоторую эпоху. Этим задаётся экватор и устанавливается единый счёт широт. Введением начального меридиана определяется единый счёт долгот.

Международная ГНСС служба IGS. Большой вклад в изучение Земли и развитие координатных систем отсчёта вносит сеть станций службы *IGS (International GNSS Service)* [4, 13, 34-37]. Активная её деятельность началась в 1994 г. Работу *IGS* поддерживают на добровольной основе свыше 200 организаций мира.

В службу *IGS* входят станции непрерывного слежения, а также центры сбора и центры анализа данных. На станциях слежения приёмниками *GPS/ГЛОНАСС* собираются «сырые» данные. Их передают в операционные центры для перевода в формат обмена *RINEX*. После этого их отправляют в региональные центры, а затем и в глобальные центры. Операционные центры имеются в Европе (Германия, Италия, Нидерланды, Франция), Америке (США, Канада), Азии (Япония), Африке (ЮАР), Австралии. На данный момент их 17. Имеется 6 региональных центров (Австралия, Европа, США), 4 глобальных центра – два в США, по одному во Франции и в Корею, и 10 центров анализа данных (Германия 2, Чехия 1, Швейцария 1, Канада 1, США 5).

Работают два глобальных центра по развитию международной отсчётной основы *ITRF* (Великобритания и США) и 18 центров по развитию региональных геодезических основ (14 в странах Европы, по одному в Австралии, Канаде, США и Японии).

Служба *IGS* собирает, архивирует и распространяет уточненные эфемериды спутников *GPS* и *ГЛОНАСС*, параметры вращения Земли, координаты и скорости смещения станций *IGS*, поправки в шкалы времени спутниковых станций, оценки задержек сигналов в атмосфере и др. Данные *IGS* используются также для построения опорных геодезических сетей, при этом для обмена данными служит специальный формат *SINEX*.

В 2011 г. *IGS* создала собственную новую отсчётную основу *IGS-08*, базирующуюся исключительно на переработанных данных *GNSS*-наблюдений и *ITRF-2008*.

Земные координатные системы отсчёта. Они представляют особый интерес: ведь процесс измерений выполняется в установленной на Земле *системе отсчёта* [14, 23, 24].

Земные системы отсчёта классифицируют по территориальному охвату, выделяя глобальные (общеземные), региональные (объединяют несколько государств), национальные (государственные) и местные. Они реализуются в ходе сотрудничества многих стран (международные), стран отдельного региона (региональные), силами одного государства (общеземные, национальные), или силами отдельных организаций (местные). Примером общеземной международной системы является *ITRS* и её отсчётная основа *ITRF* [32].

Созданы также **общеземные системы отсчёта** для обеспечения работ ГНСС.

- **Мировая геодезическая система WGS-84** (*World Geodetic System*, 1984) и её геоцентрическая геодезическая сеть **G-1150**. Она обеспечивает работу *GPS*. Ей предшествовали более ранние варианты. Усилиями армии США на базе астрономо-геодезических, гравиметрических и спутниковых измерений создана модель *WGS-60*, а затем модели *WGS-66* и *WGS-72*. При этом *WGS-72* уже опирались на данные Мировой спутниковой триангуляционной сети и доплеровские измерения *TRANSIT*. В начале 1980-х годов появилась новая система геодезических параметров *GRS-80* [33]. Получены также новые результаты лазерной локации спутников, интерферометрии со сверхдлинной базой, спутниковой альтиметрии и др. В результате образована модель *WGS-84* [21].

Отсчётная основа *WGS-84* установлена в 1987 г. Её дальнейшие улучшения производились благодаря обширным *GPS* измерениям. В 1994 г. усовершенствования геодезической основы *WGS-84* пришлось на начало 730-ой *GPS*-недели. Она получила обозначение *G-730*. В 1996 г. с началом 873-ой *GPS*-недели создана новая усовершенствованная геодезическая основа *G-873*. Она стала очень близкой к *ITRF-96*. В 2002 г. произведено третье уточнение – *G-1150*. По среднему квадратическому критерию различия между координатами *WGS-84 (G-1150)* и *ITRF-2000* составляют ~1 см. На этом

уровне точности отсчетные основы *WGS-84* и *ITRF* одинаковы. В настоящее время по составу параметров *ITRS* и *WGS-84* практически идентичны [4].

- **Общеземная система отсчёта Параметры Земли ПЗ-90.** Система отсчета создана в России без интеграции с западными странами. Её координаты закреплены пунктами *Космической геодезической сети* КГС, которая создана по фотографическим, доплеровским, дальномерным и альтиметрическим наблюдениям геодезических спутников ГЕОИК-1, ЭТАЛОН, ГЛОНАСС и др. Первоначально КГС имела 26 пунктов на территории СССР и 7 пунктов в Антарктиде. Погрешность взаимного положения пунктов при расстояниях между ними до 10 000 км не более 30 см.

ПЗ-90 постановлением правительства РФ с 2002 г. введена в качестве единой государственной системы отсчета в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов КА и решения навигационных задач. В ней работала ГЛОНАСС. По распоряжению правительства России от 2007 г. спутники ГЛОНАСС были переведены на новую уточнённую версию ПЗ-90.02. Она довольно близка к системам *ITRF-2000* и *WGS-84*. Отличалась от них лишь сдвигом начала координат примерно на 0,4 м.

Следующая уточненная версия введена постановлением правительства от 28 декабря 2012 г. Обозначается как ПЗ-90.11. Эта система отсчёта опирается на пункты государственной геоцентрической геодезической сети РФ 2011 г. [2, 4-7, 9, 13, 18-20]. По уровню точности, ориентации осей координат и положению их начала ПЗ-90.11 соответствует *ITRS* и *ITRF* [1].

- **Отсчётная земная основа европейской спутниковой системы Галилео GTRF** (*Galileo Terrestrial Reference Frame*) изначально тождественна *ITRF* и является подсистемой *ITRS*.
- Интерес представляет также отсчётная основа спутников КНР *Бэйдоу/Compass* [38].

Ниже приведены примеры земных систем отсчёта регионального уровня.

- **Европейская земная система отсчета ETRS** (*European Terrestrial Reference System*) и отсчетная основа *ETRF* (*European Terrestrial Reference Frame*). Пункты сети установлены посредством высокоточных и непрерывных наблюдений спутников *GPS*/ГЛОНАСС. Эта региональная система отсчета является подсистемой *ITRS* и очень близка к *WGS-84*. Система объединяет все геодезические сети Европы, включая сети стран Балтии и Турции. В рамках системы *ETRS* имеет место Европейская постоянно действующая геодезическая сеть *EPN*. Введена также единая система счета высот на базе двух нивелирных сетей континентального уровня – центральноевропейских и западноевропейских государств в Амстердамской 1973 г. системе высот и государств бывшего СССР и Восточной Европы в Балтийской системе высот 1977 г. [2, 12].
- **Североамериканская система NAD-83** (*North American Datum, 1983*). Современная региональная система отсчета плановых координат *NAD-83* пришла на смену устаревшей системе *NAD-27* (*The North American datum, 1927*), установленной на эллипсоиде Кларка 1866 г. с исходным пунктом *Meades Ranch* в штате Канзас. Высота геоида в исходном пункте была принята равной нулю. Отсчётная система *NAD-83* на основе параметров *GRS-80* устанавливает единую систему координат для США, Канады, Мексики и стран Центральной Америки. Она основана на геодезической сети из 250 000 пунктов, включая 600 доплеровских станций. Ее точность повышена современными измерениями *GPS*-приемниками. Прямоугольные координаты пунктов *NAD-83* близки к их значениям в системе *WGS-84*.
- **Североамериканская система высотных дат NAVD-88** (*North American vertical datum, 1988*). Введена взамен устаревшей 1929 г. высотной основы *NGVD-29* (*The na-*

tional geodetic vertical datum, 1929). При этом общая нивелирная сеть была увеличена примерно на 625 000 км. Новая высотная опора установлена на основе обработки (уравнивания) нивелирных сетей Канады, Мексики и США.

- **Австралийская система** — **GDA-94** (*Geocentric Datum of Australia*, 1994). Геоцентрическая система координат, принятая для всей Австралии. Построена на основе отсчётной основы *ITRF-92* и отнесена к эпохе 1 января 1994 г.

Все координатные системы регионального уровня входят в виде подсистем в общеземную систему *ITRS* или *WGS-84*. Центры пунктов, закреплённые в верхнем слое земной коры, вследствие геодинамических процессов находятся в непрерывном изменении. В глобальном масштабе эти перемещения разнородны и происходят с разными скоростями. Это создаёт определённые трудности в поддержании глобальной координатной основы с должной точностью на современном уровне. Региональные же системы охватывают меньшие территории и их движения более однородны. Следовательно, их координатные основы легче поддерживать на соответствующем жестком уровне. Региональные отсчётные основы постепенно смещаются и разворачиваются по отношению к общей земной основе.

- **Геоцентрическая государственная система координат России ГСК-2011**. Постановлением Правительства РФ от 28 декабря 2012 г введена новая единая государственная система координат ГСК-2011, предназначенная для использования при осуществлении геодезических и картографических работ. Система координат ГСК-2011 закреплена пунктами фундаментальной астрономо-геодезической сети ФАГС. Прежние системы координат СК-42, СК-95 и развитые в пределах субъектов РФ местные системы координат применяются лишь до 1 января 2017 г. Фактически на одних и тех же станциях наблюдений расхождения координат между ГСК-2011 и *ITRF* остаются в пределах 1...3 см; в ГСК-2011 использован новый эллипсоид, размер и форма которого близки к таковым в гравиметрическом эллипсоиде, что имеет значение при вычислении нормальных высот [1, 4, 9, 12, 17, 24].

Системы счета времени. Основу составляют: 1) Всемирное время *UT1* (*UT* - *Universal Time* - всемирное среднее солнечное время Гринвичского меридиана); *UT1* – время *UT*, исправленное за смещения мгновенного полюса относительно принятого его среднего положения; 2) Международное атомное время *TAI* (*Time Atomic International*) и 3) Всемирное координированное время *UTC* (*Universal Coordinated Time*).

- **Всемирное время *UT1*** определяется вращением Земли и соответствует углу ее поворота вокруг оси *CIP*. Фактически оно находится из наблюдений суточных движений далеких радиоисточников методом РСДБ. Практически может быть получено из разности (*UT1-UTC*), регулярно предоставляемой Международной службой вращения Земли и систем отсчета *IERS*.
- **Международное атомное время *TAI*** установлено Международным бюро времени на основе показаний атомных часов в различных учреждениях в соответствии с определением секунды как единицы времени в Международной системе единиц *SI*. При этом использованы отсчёты около 300 атомных часов метрологических лабораторий свыше 50 стран.
- **Всемирное координированное время *UTC*** введено для согласования равномерной шкалы атомного времени с неравномерной шкалой фактически наблюдаемого всемирного времени *UT1*. *UTC* – атомное равномерно текущее время, корректируется на 1 с, когда отклонение от *UT1* превышает 0,9 секунды. Коррекция выполняется в последнюю секунду 30 июня или 31 декабря, или в обе даты. Поэтому шкалы *UTC* и *TAI*

различаются только целым числом секунд. В 1972 г. разность ($TAI - UTC$) составляла $+10^s$, в 1982 г. – $+21^s$, в 1992 г. – $+27^s$, в 2002 г. – $+32^s$, в 2012 г. – $+35^s$, а в 2015 г. – $+36^s$. Продолжительность суток UTC растёт, скорость вращения Земли убывает.

Повышение точности наблюдений привело к необходимости, в соответствии с общей теорией относительности, создания нескольких шкал времени. Это обусловлено различиями гравитационных потенциалов в центре масс Солнечной системы, в центре масс Земли и на поверхности Земли.

- **Земное время TT (Terrestrial Time)** – соответствует времени, наблюдаемому на вращающемся геоиде. Введено в 1991 г. (взамен применявшегося с 1979 г. земного динамического времени TDT). Это время используется в качестве независимого аргумента в расчетах геоцентрических эфемерид спутников. Практически время TT определяется по атомной шкале TAI :

$$TT = TAI + 32,184 \text{ с} .$$

- **Геоцентрическое координатное время TCG (Geocentric Coordinate Time)** отнесено к центру масс Земли и предназначено для системы отсчета $GCRS$. Оно линейно связано с земным временем TT .
- **Барицентрическое координатное время TCB (Barycentric Coordinate Time)** предназначено для системы отсчета $BCRS$ в качестве аргумента в расчётах движений космических аппаратов в удалении от Земли.

Отмеченные шкалы времени тождественны на уровне точности одной миллисекунды. Это очень большая величина. За 1 мс радиоволна проходит путь почти в 300 км, а интервал меньший в миллион раз изменяет расстояние на 0,3 м.

Системы земных координат, используемые в картографо-геодезических задачах [25]:

- **географические координаты;**
- **координаты в плоскости геодезической проекции;**
- **координаты в трёхмерном пространстве;**
- **высоты** над земным эллипсоидом и в поле силы тяжести Земли.

Системы географических координат – широта и долгота. Эти термины ввёл Гиппарх во II в. до н. э. Широта и долгота - угловые величины, определяющие положение любой точки относительно экватора и начального меридиана. Различают широты и долготы астрономические, отнесенные к реальной планете, а также сферические и эллипсоидальные, применяемые соответственно в шарообразной и сфероидической моделях Земли. По мнению известного геодезиста проф. А.А. Изотова, все эти системы координат “могут быть объединены общим названием системы географических координат”, ибо “эти системы имеют важное значение для географического изучения поверхности Земли” [10, с. 16-17, 27].

|| **Астрономическая широта** (φ) – угол, образованный *отвесной линией* в данной точке и плоскостью, перпендикулярной к оси вращения Земли.

|| **Астрономическая долгота** (λ) – двугранный угол между плоскостями астрономических меридианов текущей точки и начального меридиана.

|| **Астрономический меридиан** образуется сечением земной поверхности плоскостью, проходящей через отвесную линию в данной точке параллельно оси вращения Земли.

³ Time Scales. <http://stjarnhimlen.se/comp/time.html> (Дата обращения 3 июля 2015)

|| **Астрономический азимут** (a) — угол в горизонтальной плоскости, в плоскости, перпендикулярной к отвесной линии, отсчитываемый от северного направления астрономического меридиана по часовой стрелке до заданного направления.

Таким образом, астрономические координаты отнесены к *отвесной линии* и *оси вращения* Земли. Их получают из астрономических наблюдений.

Сферическая широта и сферическая долгота используются, когда Земля аппроксимируется шаром. Один диаметр шара совмещается с осью вращения Земли. При этом полагается, что земной шар однороден по строению, и все отвесные линии проходят через его центр. Иначе, **сферические широты и долготы автоматически приравниваются соответственно астрономическим широтам и долготам**. отождествление сферических координат с астрономическими координатами указывает на практический путь их определения непосредственно из астрономических наблюдений небесных светил.

Для указания направлений используется **географический азимут** – угол в горизонтальной плоскости (плоскости, перпендикулярной к нормали в данной точке шара), отсчитываемый от северного направления географического меридиана по часовой стрелке до заданного направления. Для определения расстояний используется **ортодромия** – кратчайшее расстояние между двумя точками на сфере (отсчитываемое по дуге большой окружности, центр которой находится в центре земного шара).

Эллипсоидальные координаты. Более точной моделью земного тела, вращающегося вокруг некоторой оси, является не шар, а сфероид.

|| **Сфероид** – фигура, которую приняло бы тело, находясь только под влиянием сил взаимного тяготения его частиц и центробежной силы вращения.

Простейшим из сфероидов является эллипсоид вращения с малым сжатием вдоль полярной оси.

|| **Эллипсоид вращения** – геометрическое тело, которое образуется при вращении эллипса вокруг его малой оси.

Отвесная линия, нормаль к эллипсоиду вращения и его радиус-вектор – это три разные линии в пространстве. Поэтому при работе с земным эллипсоидом понятие географических координат приходится уточнять; в каждой точке земного пространства имеют место координаты:

- астрономические, отнесенные к отвесной линии;
- геодезические, отнесенные к нормали к эллипсоиду;
- геоцентрические, связанные с радиус-вектором эллипсоида.

Геодезические координаты. Положение любой точки на эллипсоиде вращения определяется геодезической широтой и геодезической долготой.

|| **Геодезическая широта** (B) – угол, образованный нормалью к поверхности земного эллипсоида в данной точке и плоскостью его экватора.
 || **Геодезический меридиан** определяется плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности земного эллипсоида вращения в данной точке и его малую ось.
 || **Геодезическая долгота** (L) – двугранный угол между плоскостями меридиана данной точки и начального меридиана.

Отвесная линия и нормаль к эллипсоиду не совпадают. Поэтому, чтобы перейти от астрономических координат к геодезическим, надо знать угол между нормалью и отвесной линией, называемый *уклонением отвеса в геометрическом толковании*.

Для указания направлений и расстояний используется геодезический азимут и кратчайшая линия на эллипсоиде вращения.

Геодезический азимут (A) – двугранный угол между плоскостью геодезического меридиана данной точки и плоскостью, проходящей через нормаль в ней и содержащей данное направление, отсчитываемый от направления на север по часовой стрелке.

Кратчайшая линия – линия кратчайшего расстояния между двумя точками на поверхности эллипсоида вращения; она является частью *геодезической линии*. На эллипсоиде вращения геодезическая линия в общем случае описывает бесконечное число витков, последовательно касаясь соответствующих параллелей в северном и южном полушароиде и на каждом витке пересекая экватор в разных точках. При этом в каждой точке геодезической линии произведение радиуса параллели (r) на синус азимута (A) линии есть величина постоянная:

$$r \sin A = \text{const} .$$

Меридианы и экватор являются частными случаями геодезической линии. В навигации используется также линия постоянного азимута – *локсодромия*.

Геоцентрические координаты. Их определяют – радиус-вектор, геоцентрические широта и долгота. При этом полагается, что центр эллипсоида совмещен с центром масс Земли, а его ось вращения – с осью вращения Земли.

Геоцентрический радиус-вектор (ρ) – отрезок прямой, соединяющий начало координат с определяемой точкой.

Геоцентрическая широта (Φ) – угол между радиус-вектором и плоскостью экватора эллипсоида.

Геоцентрическая долгота (L) совпадает с геодезической долготой.

Система координат в плоскости геодезической проекции. Плоские геодезические прямоугольные координаты (x, y) строятся в равноугольных проекциях, называемых *геодезическими*. В подавляющем большинстве случаев координаты вычисляются в *равноугольных поперечных цилиндрических* проекциях, обладающих свойствами:

- в каждой точке проекции масштаб длин по любым направлениям одинаков;
- в пределах выделенной зоны искажения малы и их учет прост;
- зоны ограничены меридианами;
- число зон по сравнению с другими равноугольными проекциями минимально;
- все зоны единообразны;
- возможно распространение системы плоских координат на весь земной шар.

Эти проекции применяются в различных версиях. Все версии имеют одинаковые основные характеристики и формулы. Различия версий, применяемых в разных странах, заключаются в выборе начала счета координат, значениях средних меридианов зон, ширине зон и значениях масштаба длин на среднем меридиане. В РФ наибольшее прикладное значение получили две системы плоских прямоугольных координат – координаты в проекции *Гаусса-Крюгера* и координаты в проекции *UTM*.

Геоцентрические прямоугольные координаты в трёхмерном пространстве. Начало координат расположено в геоцентре. Одну из координатных осей ориентируют по направлению, близком оси вращения Земли. Эту ось невозможно ориентировать точно вдоль оси вращения Земли, ибо из-за *прецессии* и *нутации* она перемещается в космическом пространстве относительно звёзд, а из-за *движения полюсов* перемещается и в теле планеты. Система отсчёта координат вводится в соответствии с рекомендациями Международной службы вращения Земли и земных систем отсчёта *IERS*.

В 1967 г. было решено приводить координаты мгновенного полюса к среднему его положению за 1900–1905 гг. Эта точка получила название *Международного условного начала* – **МУН** (*CIO - Conventional International Origin*). Её положение было закреплено координатами пяти станций, на которых выполнялись точные астрономические измерения. Две из этих станций находились в США, по одной в Италии, Узбекистане и Японии. В последующие годы количество станций увеличилось, изменился их состав, а некоторые перестали существовать. Поэтому по рекомендации *IERS* было введено понятие *Условного земного полюса* – **СТП** (*Conventional Terrestrial Pole*) (рис. 5). Позже *IERS* его переименовала в *IERS опорный полюс* – **IRP** (*IERS Reference Pole*). Был установлен нулевой *IERS опорный меридиан* – **IRM** (*IERS Reference Meridian*). Они соответствуют определениям *Международного бюро времени ВИИ* (*Bureau International de l'Heure*) эпохи 1984.



Рис. 5. Мгновенный и условный полюса Земли

Итак, система отсчёта координат вводится в соответствии с правилами *IERS* (рис. 6):

- начало прямоугольной системы координат в геоцентре;
- единица длины – метр системы *SI*, время – геоцентрическое координатное *TCG*;
- ось *Z* ориентируется на полюс *IRP*, ось *X* лежит на пересечении плоскости экватора с плоскостью нулевого меридиана *IRM*, ось *Y* перпендикулярна к двум первым осям, направлена на восток и образует правую систему координат;
- движения земной коры не влияют на пространственную ориентацию координатных осей.

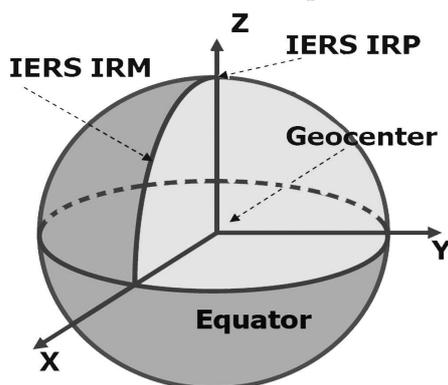


Рис. 6. Система отсчёта координат, устанавливаемая по правилам *IERS*

В некоторых системах отсчета центры эллипсоидов не совпадают с центром масс Земли. Так, эллипсоид Красовского смещен с центра масс Земли на полторы с лишним сотни метров. В этом случае говорят, что имеют место *квазигеоцентрические* координаты.

Топоцентрические координаты в трёхмерном пространстве. Находят применение *топоцентрические* координаты – *прямоугольные* и *полярные* (азимут, зенитное расстояние и топоцентрическое расстояние). Начало топоцентрической системы координат помещено в какой-либо точке поверхности Земли, как правило, над эллипсоидом. Одна из координатных осей ориентирована вдоль нормали к эллипсоиду. Две другие оси лежат в плоскости геодезического горизонта, т. е. в плоскости, перпендикулярной нормали к эллипсоиду.

При этом одна из них расположена в плоскости меридиана и направлена в сторону северного полюса. Другая ось - перпендикулярна к первым двум и направлена в сторону увеличения восточной долготы.

Например, топоцентрическая система координат используется в ГНСС измерениях: в начальной точке расположен центр антенны спутникового приёмника, а в конечной точке – центр антенны спутникового передатчика. Азимут *A* и зенитное расстояние *Z* показывают, где находится спутник на небосводе. Вычисление зенитных расстояний спутников и азимутов направлений необходимо для планирования измерений и для того, чтобы иметь представление, где расположен спутник в момент наблюдений.

Высоты над земным эллипсоидом и высоты в поле силы тяжести Земли. Для определения точек над эллипсоидом используется *геодезическая высота* (*H*) – расстояние, отсчитываемое по нормали от поверхности эллипсоида до определяемой точки.

Однако, все материальные объекты подвержены воздействию силы тяжести. Поэтому в повседневной практике пользуются не геодезической высотой, а высотами, связанными с силой тяжести Земли. Системы счёта высот должны учитывать силу тяжести и особенности ее распределения. Для этого должны выполняться условия: 1) высоты пунктов должны быть однозначно определены независимо от трасс нивелирования; 2) высоты должны вычисляться лишь по измерениям без привлечения гипотез о внутреннем строении Земли; 3) система счёта высот должна обеспечивать строгий способ нахождения геодезических высот. В разных странах наибольшее распространение получили две системы:

- *Ортометрическая высота*, определяется над уровнем моря (над геоидом). Если H геодезическая высота точки физической поверхности Земли, H^s - ортометрическая высота, ζ^g – высота геоида над эллипсоидом, то

$$H = H^s + \zeta^g .$$

Все эти высоты расположены в теле Земли под физической поверхностью. Поэтому без гипотез о внутреннем строении Земли решить строго это уравнение невозможно.

- *Нормальная высота* определяется в гравитационном поле, создаваемом моделью, так называемой *Нормальной Земли*. Если H^y - нормальная высота над эллипсоидом, вычисляемая по результатам нивелирования, измерениям силы тяжести и данным гравитационной модели Нормальной Земли, ζ^y - аномалия высоты, определяемая разностью нормального и реального потенциалов силы тяжести, то для высот можно записать:

$$H = H^y + \zeta^y .$$

Эти высоты находят математически строго лишь по измерениям на поверхности Земли и без привлечения гипотез о её внутреннем строении [15, 16].

Спутниковое нивелирование. Нормальные высоты, как известно, получают геометрическим нивелированием. Но их можно определять и по данным высокоточного позиционирования – *спутниковым нивелированием*. При помощи ГНСС для точек земной поверхности определяют геодезические высоты H . При известной аномалии высоты нормальную высоту получают из уравнения:

$$H^y = H - \zeta^y .$$

Существуют разные способы определения аномалии высоты. Популярен способ интерполяции её на определяемый пункт с окружающих пунктов, на которых она уже известна. Точность спутникового нивелирования соответствует точности нивелировок IV-III классов.

Международные работы по совершенствованию систем отсчёта и отсчётных основ. В 2003 г. на XXIII Генеральной ассамблее Международного союза геодезии и геофизики принято решение о создании Глобальной геодезической системы наблюдений *GGOS (Global Geodetic Observation System)*. Цель этого проекта повышение точности и стабильности единой отсчетной основы Земли, а также изучение ее гравитационного и магнитного полей, атмосферы, деформаций поверхности суши, изменений уровня Мирового океана и др. В состав космического сегмента системы войдет свыше 100 спутников ГНСС. Наземный сегмент будет включать не менее 40 станций с приемной спутниковой аппаратурой, лазерными дальномерами, приборами для измерения силы тяжести, другими геодезическими приборами. Завершение создания системы планируется к 2020 г.

Актуальной является проблема приведения высот к единой отсчетной поверхности. На Земле действует несколько вертикальных систем отсчета, отнесенных к уровням местных морей. Хотя нули всех исходных пунктов в целом близки к среднему уровню океанов, все же это разные и взаимно несвязанные системы. Проблема приведения высот к единой отсчетной поверхности практически еще не решена. В последние годы мировая научная обществен-

ность прилагает определенные усилия в направлении теоретического и практического решения этой проблемы.

Ведутся исследовательские работы по созданию Глобальной вертикальной отсчётной основы – *GVRF* (*Global Vertical Reference Frame*). Разработана методика реализации такой системы на основе региональных вертикальных отсчётных основ Северной Америки, Австралии, Франции и Бразилии [27].

Для решения проблемы введения единой отсчётной поверхности нужен единый общеземной эллипсоид с известным на его поверхности значением нормальной силы тяжести [8]. В рассматриваемом случае не будет фиксированного, закрепленного исходного пункта типа Кронштадтского футштока, в котором нормальная высота равна нулю. Систему счёта высот закрепит совокупность геодезических пунктов, в которых известны геодезическая высота H , нормальная высота H^N и аномалия высоты ζ^N .

Источники информации Лекции 1

1. Андреев В.К. Роль и место в исследованиях по геодезическому обеспечению системы ГЛОНАСС в рамках НИР «Развитие» государственных единых систем координат ГСК-2011 и ПЗ-90, высокоточного определения координат и гравитационного поля Земли. [Электронный ресурс] URL: http://www.glonass-center.ru/aboutIAC/Report%20by%20Andreev_4.pdf (дата обращения 3.02.2014).
2. Бойков В. В., Галазин В. Ф., Каплан Б. Л и др. Опыт создания геоцентрической системы координат ПЗ-90 // Геодезия и картография. 1993. № 11. С.17–21.
3. Валеев С. Г., Клейков А.А., Кузин С.П., Татевян С.К., Фасхутдинова В.А. Исследования динамики геоцентра по результатам анализа измерений спутниковых систем DORIS и GPS // Геодезия и картография. 2011, № 12. С. 1–10.
4. Вдовин В.С. Доклад на заседании секции №3 НТС ФГУП ЦНИИмаш по вопросу «Общий замысел геодезических направлений исследований в рамках НИР «Развитие»» от 28 мая 2013 года. ФГУП «ЦНИИмаш», г. Королев. [Электронный ресурс] (дата посещения 22.07.2014). URL: http://www.glonass-center.ru/aboutIAC/Report%20by%20Vdovin_2.pdf
5. Герасимов А.П. Спутниковые геодезические сети. М.: 000 “Изд-во Проспект.” 2012. - 176 с.
6. Горобец В. П., Демьянов Г. В., Майоров А. Н., Побединский Г. Г. Современное состояние и направления развития геодезического обеспечения РФ. Системы координат. // Геопрофи. 2013. № 6. С. 4–9.
7. Горобец В. П., Демьянов Г. В., Майоров А. Н., Побединский Г. Г. Результаты построения государственной геоцентрической системы координат Российской Федерации в рамках Федеральной целевой программы «ГЛОНАСС» // Геодезия и картография. 2012. N 2. С. 53–57.
8. Демьянов Г. В., Майоров А. Н., Юркина М. И. Построение общеземной системы нормальных высот // Геодезия и картография. 2009. № 1. с. 12-16.
9. Единая государственная общеземная геоцентрическая система координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11): история создания, перспективы использования. [Электронный ресурс] URL: http://www.atminst.ru/up_files/seminar_28-05-2013_doklad1.pdf (дата обращения 3.02.2014).
10. Изотов А.А., Зубинский В.И., Макаренко Н.Л., Микиша А.М. Основы спутниковой геодезии. - М.: Недра. 1974. - 320 с.
11. Картография. Термины и определения. ГОСТ 21667–76. Издание официальное. Москва. Государственный комитет СССР по стандартам. - 44 с.
12. Кафтан В. И. Европейские исследователи оценивают возможности геодезического использования ГЛОНАСС // Геодезия и картография. 2007. № 4. С. 21–23
13. Матвеев А. Ю., Федоров Д. В., Гребнев В. П., Лукин В. В., Fritsche M., Richter A., Dietrich R. Высокоточные временные ряды координат, полученные из GNSS-наблюдений в Антарктиде: 1. Геодезические определения // Геодезия и картография. 2012. N 11. С. 17–23.
14. Национальный стандарт Российской Федерации ГОСТ Р 52572 2006. Географические информационные системы. Координатная основа. Общие требования. М.: Стандартинформ, 2006. - 11 с.
15. Огородова Л.В. Теория Молоденского и геоид // Геодезия и картография. 2013. N 8. С. 2–7.
16. Огородова Л.В. Высшая геодезия. Часть 3. Теоретическая геодезия: Учебник для вузов. - М.: Геодезкартиздат. 2006. 384 с.

17. Основные положения о государственной геодезической сети РФ. [Электронный ресурс]. URL: <http://astrgeo.wl.dvgu.ru/Arx/OGGS.doc> (дата обращения 31.01.2014).
18. Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90). М.: Координационный научно-информационный центр. – 36 с.
19. Постановление Правительства Российской Федерации от 28 декабря 2012 г. № 1463. О ЕДИНЫХ ГОСУДАРСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ. [Электронный ресурс]. URL: http://meteo.ru/npa/2012/2012_1_23.pdf (дата обращения 19.08.2014).
20. Правительство Российской Федерации. Постановление от 28 декабря 2012г. № 1463. О единых государственных системах координат. URL: <http://gis-lab.info/docs/law/statecoord-2012.doc> (дата обращения 3.02.2014).
21. Руководство по Всемирной геодезической системе - 1984 (WGS-84). Международная организация Гражданской авиации. Издание 2. 2002. URL: http://www.aviadocs.net/icaodocs/Docs/ICAO_Doc9674.pdf (дата обращения 3.02.2014).
22. Селешников С. И. История календаря и хронология. - М.: Наука. 1972. 224 с.
23. Серапинас Б. Б. Земная система отсчета и её составные части // Геопрофи. 2009. №1. С. 49–53.
24. Серапинас Б. Б. Практикум по геодезическим основам карт. Учебное пособие. М.: Географический факультет МГУ. 2008. - 146 с.
25. Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт: Учебное пособие. М.: Изд-во Моск. Ун-та. 2001. 133 с.
26. Татевян С.К. Проблемы построения земной координатной основы // Геодезия и картография. 2009. № 4. С. 9–13.
27. Burša M. et al. A Global Vertical Reference Frame Based on Four Regional Vertical Datums. // Studia Geophysica et Geodaetica. July 2004, Volume 48, Issue 3, pp 493-502. URL: <http://www.springerlink.com/content/t23g447131178up1/> (дата обращения 3.02.2014).
28. Capitaine Nicole. Implementing the IAU 2006 resolutions in the transformation between celestial and terrestrial systems. Observatoire de Paris, SYRTE/UMR8630–CNRS, France. IERS Workshop on Conventions, VIPM, September 2007. URL: <http://www.bipm.org/utils/en/events/iers/Capitaine.pdf> (дата обращения 08.07.2015).
29. IAU Resolutions adopted the 24th General Assembly (Manchester, August 2000). URL: http://syrtre.obspm.fr/IAU_resolutions/Resol-UAI.htm (дата обращения 14.01.2014).
30. IAU 2006 NFA GLOSSARY, latest revision: 20 November 2007. URL: http://syrtre.obspm.fr/iau/iauWGnfaTemp/IAU2000_NFA_Glossary.pdf (дата обращения 14.01.2014).
31. International Earth Rotation and Reference Systems Service. URL: <http://www.iers.org/> (дата обращения 25.07.2014).
32. ITRF 2008. URL: http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF_solutions/2008/ (дата обращения 26.07.2014).
33. Moritz. H. GEODETIC REFERENCE SYSTEM 1980 [Электронный ресурс] URL: <http://geodeticsscience.org/course/refpapers/00740128.pdf> (дата обращения 3.02.2014).
34. The International GNSS Service (IGS). URL: <http://igsceb.jpl.nasa.gov/> (дата обращения 31.01.2014).
35. The International GNSS Service (IGS). Network list. URL: <http://igsceb.jpl.nasa.gov/network/list.html> (дата обращения 31.01.2014).
36. The International GNSS Service (IGS). Net index. URL: <http://igsceb.jpl.nasa.gov/network/netindex.html> (дата обращения 31.01.2014).
37. The International GNSS Service (IGS). IGS Products. URL: <http://igsceb.jpl.nasa.gov/components/prods.html> (дата обращения 31.01.2014).
38. Yuanxi Yang. Chinese Geodetic Coordinate Reference Frame 2000. URL: <http://www.oosa.unvienna.org/pdf/icg/2009/icg-4/40d.pdf> (дата обращения 31.01.2014).

Контрольные вопросы

1. Что означают понятия *система отсчёта* и *отсчетная основа*?
2. Какие системы отсчёта обозначают аббревиатуры *BCRS*, *ICRS*, *GCRS*, *GTRS*, *ITRS* и как они взаимно связаны?
3. Какую роль в установлении систем отсчёта выполняют внегалактические радиоточники?
4. Назначение и содержание *WGS-84*.

5. Что означают обозначения *G-730*, *G-873*, *G-1150* и к какой отсчётной основе они относятся?
6. Почему создаются и используются на базе международных общеземных систем отсчёта региональные системы *ETRS*, *NAD-83*, *NAVD-88*, *GDA-94*?
7. Какие знаете версии системы параметров Земли ПЗ-90?
8. Назначение и задачи Международной службы *IGS*.
9. Характеристика ГСК-2011.
10. *UTI*, *TAI*, *UTC* – особенности этих систем счёта времени.
11. Особенности шкал счёта времени *TT*, *TCG* и *TCB*.
12. Какие системы координат могут быть объединены общим названием *географические координаты*?
13. Какими свойствами должны обладать геодезические проекции, применяемые для введения плоских координат?
14. В чём различие геоцентрических и топоцентрических координат?
15. Что такое *прецессия* и *нутация*? Чем они обусловлены?
16. Что понимается под *движением полюсов Земли*?
17. Какие рекомендации *IERS* по установлению систем отсчёта координат?
18. Поясните смысл системы *GGOS*.
19. Какие особенности геодезических высот и почему их не применяют в повседневной жизни?
20. В чём принципиальное различие нормальных и ортометрических высот?
21. Какие предполагаются работы по созданию *GVRF*?

Темы рефератов и презентаций

1. Международная общеземная система отсчёта *ITRS* и её отсчётная основа *ITRF*.
2. Общеземные системы отсчёта для обеспечения работ *GPS*, ГЛОНАСС, *Галилео* и *Compass*.
3. Международная ГНСС служба - *IGS*.
4. Представления о движениях материков на основе анализа карт векторов перемещений пунктов *IGS* и *ITRF*.
5. Системы отсчета регионального уровня: Европейская - *ETRS*, Североамериканская - *NAD-83*, Австралийская — *GDA-94*.
6. Системы координат России: СК-42, СК-63, СК-95, местные системы и новая единая государственная система координат ГСК-2011.
7. Проект и программа Глобальной геодезической системы наблюдений *GGOS*.
8. Трансформирование координат РФ из СК-42, СК-63, СК-95, местных систем в новую единую государственную систему координат ГСК-2011 (обзор методов).
9. Проблема развития единой Глобальной вертикальной отсчётной основы – *GVRF*.
10. Спутниковое нивелирование, способы определения аномалий высот.
11. Геодезические параметры *GRS-1980*, *WGS-84*, ПЗ-90.11, ГСК-2011 и их сравнительный анализ.
12. Плановые и высотные государственные геодезические сети СССР и РФ. История создания и перспективы развития.
13. Гравиметрические сети, абсолютные и относительные способы измерений силы тяжести.
14. Методы триангуляции и трилатерации построения опорных геодезических сетей.
15. Метод спутниковой триангуляции.
16. Доплеровские методы в построении геодезических сетей.
17. Метод радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой – РСДБ, его значение для построения общеземных опорных сетей.

18. Использование геодезических комплексов ГЕОИК.
19. Использование ГНСС при построении геодезических опорных сетей.
20. Закрепление пунктов ГГС на местности.
21. Погрешности геодезических измерений и характеристики их точности.

Перечень лекций

- I. Введение. Системы отсчёта координат и времени.
- II. Определения координат и времени методами геодезической астрономии.
- III. Земная сфера и сфероид.
- IV. Вычисления координат на сфере и на сфероиде.
- V. Теоретические основы плоских координат.
- VI. Пространственные координаты.
- VII. Гравитационное поле. Связь координат. Высоты.
- VIII. Опорные геодезические сети.
- IX. Уравнивание геодезических сетей.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ И ВРЕМЕНИ МЕТОДАМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Астрономические координаты. Астрономические координаты определяются относительно отвесной линии и оси вращения Земли без знания ее фигуры (см. Лекция 1). Это астрономические широта, долгота и азимут. Ознакомимся с принципами их определения [4].

Небесная сфера, ее главные линии и точки. В геодезической астрономии важным математическим инструментом, с помощью которого производят расчеты, является небесная сфера. Ее центр совпадает с началом используемых координат, а радиус может быть произвольным и обычно его принимают равным единице.

Рассмотрим основные точки и линии на небесной сфере (рис. 2.1). Через центр небесной сферы O проведена прямая, параллельная местной вертикали, — отвесной линии.

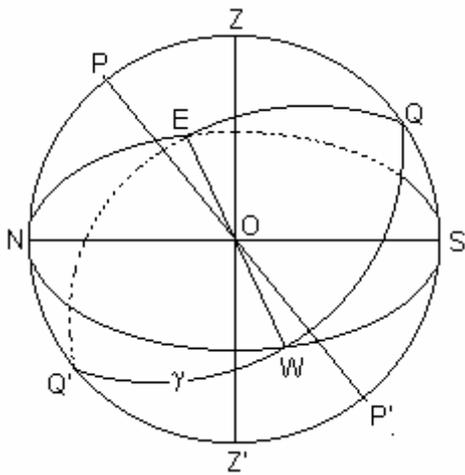


Рис. 2.1. Главные линии и точки небесной сферы

линия пересекает сферу над головой наблюдателя в точке Z — зените, и в диаметрально противоположной точке Z' — надире. Плоскость, проходящая через центр O перпендикулярно линии ZZ' , пересекает небесную сферу по большому кругу, называемому *астрономическим горизонтом*. Прямую, проведенную через центр сферы O параллельно оси суточного вращения Земли, называют *осью мира*. Она пересекает сферу в *полюсах мира* — северном P и южном P' . Северным называется тот полюс мира, с которого видно, что вращение Земли происходит против часовой стрелки. Сечение небесной сферы плоскостью, проходящей через центр O перпендикулярно оси мира PP' , определяет большой круг QWQ' — *небесный экватор*. Плоскость, проходящую через ось мира PP' и вертикаль ZZ' , называют *плоскостью небесного меридиана*. В сечении с небесной сферой она дает большой круг — *небесный меридиан*. Плоскости небесного меридиана и астрономического горизонта пересекаются по полуденной линии NS . Точку N , расположенную ближе к северному полюсу P , называют *точкой севера*, а диаметрально противоположную точку S — *точкой юга*. На линии пересечения астрономического горизонта и небесного экватора расположены точка запада W и точка востока E . Большой круг, образованный сечением небесной сферы плоскостью, проходящей через вертикаль ZZ' , называют *вертикалом*. Вертикал, проходящий через точки востока и запада, называют *первым вертикалом*.

Пересечение небесной сферы плоскостью, проходящей через её центр параллельно плоскости орбиты годового обращения Земли около Солнца, образует большой круг — *эклиптику* (рис.2.2). Эклиптика пересекает небесный экватор в точках весеннего равноденствия и осеннего равноденствия. В годовом видимом движении Солнце 21 марта переходит точку весеннего

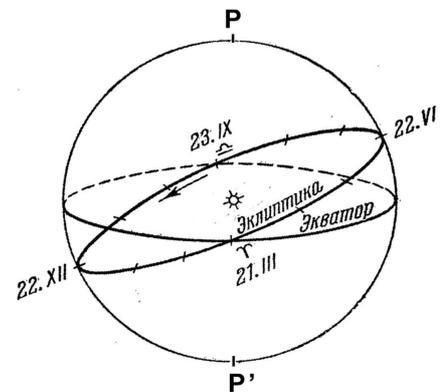


Рис. 2.2. Видимое движение Солнца по эклиптике [3, с. 23]

равноденствия. В годовом видимом движении Солнце 21 марта переходит точку весеннего

равноденствия (γ) из южного небесного полушария в северное. Плоскость эклиптики наклонена к плоскости небесного экватора и острый угол наклона в настоящее время приближенно равен $23^\circ 26'$.

По решению Международного астрономического союза с 1998 г. положение точки весеннего равноденствия определяют посредством внегалактических радиоисточников, не привязываясь к эклиптике.

Горизонтальная система координат. Основной линией в ней является направление местной вертикали ZZ' , а основной плоскостью — плоскость астрономического горизонта NWS (рис. 2.3). Положение светила σ на небесной сфере определяется астрономическим азимутом a и высотой h или зенитным расстоянием z . Азимутом a считается двугранный угол между плоскостями небесного меридиана и вертикала светила σ . Его отсчитывают от точки юга S в направлении точки запада W от 0 до 360° , или от точки юга к западу и к востоку от 0 до $\pm 180^\circ$.

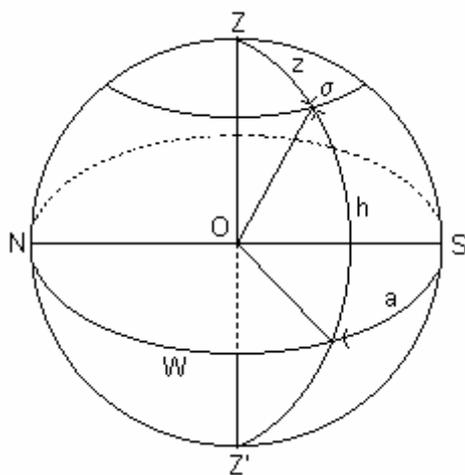


Рис. 2.3. Горизонтальная система координат

В дальнейшем, как это принято в геодезии, астрономический азимут a будем отсчитывать от точки севера N . Высоту h образует угол над астрономическим горизонтом от 0 до $\pm 90^\circ$, а зенитное расстояние z — угол, отсчитываемый от направления на зенит Z от 0 до 180° .

$$z + h = 90^\circ.$$

Круг равных высот (равных зенитных расстояний) называют *альмукунтаратом*. Положение светила определяется пересечением вертикала с альмукунтаратом.

Горизонтальные координаты удобны тем, что их можно измерить прибором типа теодолита.

Экваториальные системы координат. Основной плоскостью является плоскость небесного экватора. Различают первую и вторую экваториальные координатные системы. Большой круг, проходящий через ось мира и объект σ , называют *часовым кругом* или *кругом склонений*, а малый круг, проведенный через σ параллельно плоскости небесного экватора, — *суточной* или *небесной параллелью* (рис. 2.4). Небесное светило в видимом движении за сутки дважды пересекает меридиан: ближе к зениту в точке *верхней кульминации*, и ближе к надиру — в точке *нижней кульминации*. В Северном полушарии Земли при верхней кульминации светило проходит между Северным полюсом мира и точкой юга и имеет наибольшую высоту над горизонтом.

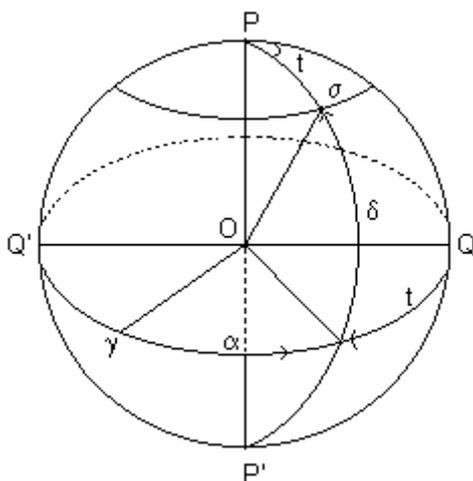


Рис. 2.4. Экваториальные координаты

В первой экваториальной координатной системе положение светила на небесной сфере определяется часовым углом t и склонением δ . Часовой угол измеряют двугранным углом между плоскостями круга склонений и небесного меридиана и отсчитывают от южной точки экватора по его дуге на запад от 0 до 24^h (часов) или от 0 до 360° . Склонение определяют углом между направлением из центра небесной сферы на объект σ и плоскостью небесного экватора. Измеряют склонение от 0 до $\pm 90^\circ$ — со знаком плюс в северной и со знаком минус в южной частях небесной сферы. Вследствие суточного вращения небесной сферы, ча-

совой угол объекта непрерывно изменяется.

Во второй экваториальной координатной системе положение светила на небесной сфере определяется *прямым восхождением* α и *склонением* δ . Прямое восхождение измеряется двугранным углом между плоскостями кругов склонений данного светила и точки весеннего равноденствия γ и отсчитывается по дуге экватора от точки весеннего равноденствия против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса, от 0 до 24^h (от 0 до 360°). Экваториальные координаты α и δ не зависят от суточного вращения небесной сферы.* По ним можно построить глобус звёздного неба на подобие того, как по долготам и широтам строится глобус Земли.

Изменения астрономических координат. В первой экваториальной и горизонтальной системах координаты изменяются во времени из-за суточного вращения Земли. Помимо этого все небесные координаты подвержены изменениям во времени по следующим причинам:

- 1) смещения систем отсчета относительно звезд (*прецессия* и *нутация*) и относительно тела Земли (*движение полюсов*); эти явления рассмотрены в Лекции 1.
- 2) собственного движения светил в пространстве;
- 3) физических явлений, искажающих наблюдения (*абберация*, *параллакс*, *рефракция*, *отклонение световых и радио лучей в гравитационном поле*).

Собственное движение светил. Движение светил и Солнечной системы в пространстве ведет к изменению их взаимного положения и наблюдаемых с Земли координат α и δ звезд на небесной сфере. Для большого числа светил видимые собственные движения невелики, меньше 0,1" в год, и только для наиболее близких к нам звезд эти изменения могут достигать нескольких секунд, максимум 10" в год.

Абберация. Абберация — явление, состоящее в изменении направления светового луча, идущего от небесного светила, вследствие конечной скорости света и движения наблюдателя относительно светила. Абберация вызывает смещение видимого положения светила на небесной сфере в направлении движения наблюдателя. Требуется некоторый промежуток времени τ , чтобы пройти лучу со скоростью c расстояние от объектива M до креста сетки нитей N трубы астрономического прибора. За это время со скоростью v наблюдатель с инструментом переместится поступательным движением на отрезок MP (рис. 2.5). Чтобы после этого увидеть светило σ наблюдателю придётся наклонить трубу по линии NP на видимое положение объекта в точке небесной сферы σ_1 . Если u — угол между направлением движения наблюдателя и видимым направлением на светило, a — угол, на который наблюдатель наклоняет трубу, чтобы её ориентировать по линии NP , то

$$\frac{MP}{\sin a} = \frac{MN}{\sin u}; \quad \frac{v\tau}{\sin a} = \frac{c\tau}{\sin u}.$$

Учитывая малость угла a , получаем:

$$a'' = \rho'' \frac{v}{c} \sin u = k \sin u,$$

где $\rho'' = 206265$, k — коэффициент абберации.

Различают абберации, связанные с годичным и суточным движением Земли. Скорость движения Земли вокруг Солнца около 30 км/с, поэтому для годичной абберации $k = 20,5''$. Для суточной абберации наибольшее значение коэффициента k на экваторе, где он может достигнуть 0,3".

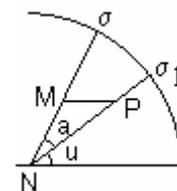


Рис. 2.5. Абберация

* Рассматривается классический случай отсчёта прямых восхождений от точки весеннего равноденствия. В лекции 1 рассматривался случай счёта прямых восхождений в системе *CIRS* от точки *CIO*, используемый при трансформировании координат из земной системы отсчёта *ITRS* в небесную систему отсчёта *GCRS*.

Известна также вековая аберрация, обусловленная движением солнечной системы вокруг центра Галактики.

Параллакс. Под параллаксом в астрономии понимают видимое изменение положения светила на небесной сфере вследствие перемещения наблюдателя. Различают параллакс, обусловленный вращением Земли (*суточный параллакс*), обращением Земли вокруг Солнца (*годовой параллакс*) и движением Солнечной системы в Галактике (*вековой параллакс*).

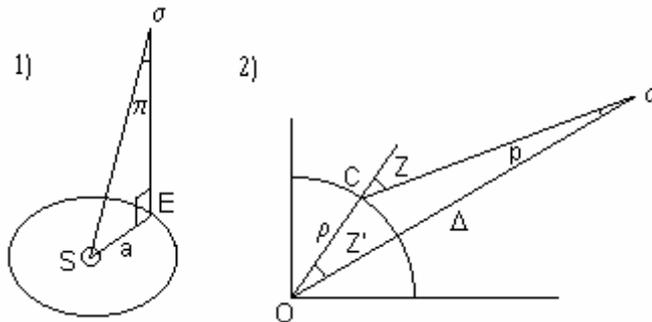


Рис. 2.6. Параллакс: 1) годичный, 2) суточный

Годичный параллакс светила σ определяется углом π , под которым виден отрезок a между барицентром S и геоцентром E (рис. 2.6.1). Годичный параллакс звезд не превышает $0,8''$ и обычно менее $0,1''$.

Суточный параллакс обнаруживается только при наблюдении близких небесных тел — Солнца, Луны, планет. Согласно рис. 2.6.2 зенитные расстояния Z' и Z , наблюдаемые соответственно с центра Земли O и с точки C на ее поверхности, различаются на величину параллакса p . Если ρ — радиус-вектор точки C , Δ — расстояние до небесного тела от центра Земли, p'' - число угловых секунд в радиане, то по теореме синусов и малости параллакса p , получаем:

$$p'' = \frac{\rho}{\Delta} \rho'' \sin Z.$$

Максимальный параллакс для Солнца $p = 8,794''$; для Луны $p = 57' 02,7''$. Они соответствуют расстояниям до Солнца 149 597 871 км и до Луны 384 403 км.

Астрономическая рефракция. Астрономическая рефракция — явление, приводящее к смещению изображения небесного объекта вследствие преломления светового луча в земной атмосфере (тропосфере). По этой причине истинное зенитное расстояние Z и измеряемое значение Z' различаются на угол r , определяющий влияние астрономической рефракции (рис. 2.7):

$$Z = Z' + r.$$

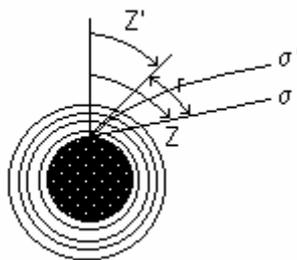


Рис. 2.7. Астрономическая рефракция

В первом приближении при нормальных метеорологических условиях поправка за астрономическую рефракцию может быть определена по формуле Лапласа:

$$r = 60,27'' \operatorname{tg} Z' - 0,067'' \operatorname{tg}^3 Z'.$$

Эта формула показывает, что лучи, идущие от светила в зените, не искривляются ($Z'=0$). В то же время поправка за рефракцию быстро растет по мере приближения объекта наблюдения к горизонту, когда световые лучи преодолевают наибольшую толщину атмосферы и испытывают максимальное искривление. По этой причине при высотах светил менее 10° астрономических наблюдений не производят.

При использовании радиоволн учитывается влияние не только тропосферы, но и ионосферы. Влияние ионосферы практически исключается измерениями на двух радиочастотах.

Помимо ионосферы радиоволна распространяется через межзвездное пространство, которое также является плазмой [2, §6.1.4].

Отклонение световых и радио лучей в гравитационном поле. Свет от звезд распространяется в гравитационном поле, которое создается другими звездами, Солнцем, планета-

ми и т.д. Для вычисления гравитационного отклонения луча света необходимо знать массу тела, расстояние до него от Земли и его координаты на небесной сфере. Вычисление отклонения луча света в поле тяготения солнечной системы не представляет особой сложности. Учет гравитационного поля звезд нашей Галактики на распространение света или радиоволн не может быть выполнен достаточно точно: до большинства звезд не известны расстояния, не точно известны их массы, существуют невидимые тела, составляющие значительную массу Галактики.

Максимальное отклонение луча света при касании лучом поверхности Солнца по расчётам составляет $1,75''$, по опытным данным – $1,3 \div 2,7''$ [2, § 6.5].

Каталоги координат. Из непосредственных наблюдений светил после введения в измеренные величины поправок за рефракцию, параллакс (для Солнца и планет) и суточную аберрацию получают *видимые* положения светил. Исключив из них влияние годичной аберрации, вычисляют *истинные* координаты светил α и δ на момент наблюдений. Вводят поправку за нутацию и получают *средние* координаты на данный момент времени. Учитывая влияние прецессии и собственное движение звезд, относят средние координаты на начало года, любую дату или на какую-нибудь эпоху. Полученные таким образом средние координаты светил сводят в каталоги, отнесенные к определенной эпохе.

Каталоги координат составлялись с древних времен. Известны каталоги *Гиппарха* (125 г. до н. э., 1022 звезды, точность около $15'$), *Улугбека* (1438 г., 1017 звезд), *Тихо Браге* (1602 г., 1005 звезд, точность $2'$), *фундаментальные каталоги FK*. Первый фундаментальный каталог содержал 539 ярких звёзд. Опубликован в 1879 г. Каталоги последовательно совершенствовались. С 1964 г. до середины 80-х гг. применялся *FK-4*, обобщавший 149 частных каталогов. Содержал данные о 1535 ярких звездах. В 1983 г. завершены работы по составлению фундаментального каталога *FK-5* эпохи равноденствия 2000,0 (обобщено 250 современных каталогов, 3500 основных звезд). Последний на данный момент фундаментальный каталог *FK-6* объединяет результаты наземных наблюдений и данные, полученные с помощью астрометрического спутника *Hipparcos*.

Для повседневных астрономических работ на основе фундаментальных каталогов в России публикуют *Астрономические ежегодники*, содержащие координаты сотен ярких звезд и подробные таблицы Солнца, Луны и планет.

Счет времени в астрономии основан на определении часового угла светил.

Солнечное время. Смены дня и ночи, связанные с восходом и заходом Солнца, привели к появлению солнечного времени. Промежуток времени между двумя последовательными *нижними кульминациями* центра видимого диска Солнца на одном и том же меридиане называют *солнечными истинными сутками*. *Солнечное местное истинное* время определяется часовым углом центра видимого диска истинного Солнца t_{\odot} , увеличенным на 12 часов.

Часовой угол центра диска истинного Солнца в течение года не остается пропорциональным соответствующим углам поворота Земли вокруг своей оси. Поэтому перешли от неравномерного солнечного *истинного* времени к *среднему* солнечному времени t . Оно определяется *средним экваториальным* Солнцем, которое движется по экватору со средней скоростью движения истинного Солнца по эклиптике. Разность часовых углов истинного Солнца и среднего экваториального Солнца называют *уравнением времени (E)*:

$$E = t_{\odot} - t + 12^h .$$

Уравнение времени позволяет перейти от наблюдаемого солнечного истинного времени к вычисляемому среднему солнечному экваториальному времени. Значения E с точностью в date до нескольких суток даны в табл. 2.1.

Местное среднее солнечное время Гринвичского меридиана называют *всемирным временем* и обозначают английской аббревиатурой *UT (Universal Time)*. Из астрономических на-

блюдений звезд получают всемирное время, обозначаемое $UT0$. Это время, исправленное за смещения мгновенного полюса относительно принятого его среднего положения, обозначают $UT1$. Время $UT1$, исправленное за сезонные вариации, обозначают $UT2$. Практически всемирное время $UT1$ определяется углом поворота Земли вокруг оси CIP (см. Лекция 1).

Таблица 2.1

Значения уравнения времени E

Дата	uE	Дата	E
11 Февраля	$-14^m 22^s$	27 Июля	$-6^m 23^s$
16 Апреля	0 00	2 Сентября	0 00
15 Мая	+3 47	4 Ноября	+16 23
15 Июня	0 00	25 Декабря	0 00

Средне солнечное время местного меридиана (m) и Гринвичского меридиана ($UT1$) взаимосвязаны соотношениями:

$$m = T + u' = UT1 + \lambda,$$

где T - показания часов, u' - поправка к показаниям часов (разность между точным временем в какой-либо момент и показанием часов в этот же момент), исправленная за их ход (изменение поправки во времени, например, за сутки), λ астрономическая долгота места наблюдения, положительная к востоку от Гринвича и отрицательная к западу от него [5, с.124-126].

Звездное время. Для каждого меридиана существует свое *местное звездное время* s ; на меридиане наблюдений оно измеряется часовым углом точки весеннего равноденствия:

$$s = t_\gamma.$$

Промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями (обычно верхними) точки весеннего равноденствия называют *звездными сутками*.

При наблюдении часового угла t светила с прямым восхождением α в момент T показаний хронометра и поправке u к его показаниям, звездное время s равно (рис. 2.4):

$$s = T + u = \alpha + t.$$

Поправка находится при известном значении часового угла светила.

$$u = \alpha + t - T.$$

В верхней кульминации часовой угол $t = 0$, в нижней кульминации $t = 12^h$, и поправка в эти моменты определяется формулами, используемыми для её нахождения:

$$u = \alpha - T, \quad u = \alpha - T + 12.$$

Учитывается также *ход часов* - изменение поправки за сутки.

Особо выделяют звездное время на меридиане Гринвича - *гринвичское звездное время* GST (*Greenwich Sidereal Time*). Оно связано с местным звездным временем соотношением:

$$s = GST + \lambda,$$

где λ , как и в случае солнечного времени, астрономическая долгота места наблюдения.

Если нутация учитывается, наблюдения относятся к истинному равноденствию, звездное время называется истинным, обозначается как $GAST$ (*Greenwich Apparent Sidereal Time*). Если нутация не учитывается, то речь идёт о среднем звездном времени - обозначается как $GMST$ (*Greenwich Mean Sidereal Time*).

Если найдено среднее гринвичское время $GMST$, местное звездное время на меридиане долготы λ получается по формуле:

$$s = GMST + \lambda.$$

Перевод среднего времени в звездное время и наоборот. Земля вращается вокруг своей оси и одновременно движется по своей орбите. Это приводит к удлинению средних солнечных суток примерно на 4 минуты. В итоге оказывается, что в году средних суток на одни сутки меньше, чем звездных. Тропический год содержит 365,24220 солнечных средних суток и 366,24220 звездных суток. Отсюда следуют соотношения для пересчетов промежутков среднего времени (m) в промежутки звездного времени (s) и наоборот:

$$s = m(1 + \mu),$$

$$m = s(1 - \nu),$$

где коэффициенты пересчета

$$\mu = 1/365,24220 = 0,0027379093,$$

$$\nu = 1/366,24220 = 0,0027304336.$$

Например, среднее звездное время $GMST$ определяется соотношением:

$$GMST = GMST_0 + UT1 + \mu UT1.$$

$GMST_0$ - среднее звёздное время в 0^h всемирного времени; выбирается из таблицы «Звездное время» Астрономического ежегодника.

Легко получить обратную зависимость для перехода от звездного времени к солнечному:

$$UT1 = (GMST - GMST_0) - \nu(GMST - GMST_0).$$

Время $UT1$ получают из разности ($UT1 - UTC$) и принятому по радиосигналам или через глобальную сеть Интернет координированному времени Гринвича UTC :

$$UT1 = UTC + (UT1 - UTC).$$

См. также [5, с. 113, 125].

Поясное, декретное и летнее время. Для практического удобства на земном шаре введена система *поясного времени* ZT (*Zonal Time*). Земная поверхность по меридианам разделена на 24 часовых пояса, центральные меридианы которых отстоят друг от друга на 15^0 или 1^h . Действительные границы часовых поясов могут существенно отличаться от упомянутого правила. Они согласованы с государственными и административными границами. В качестве нулевого выбран часовой пояс меридиана Гринвича; его поясное время $ZT = UTC$ (равно координированному времени). Время часовых поясов к востоку от Гринвича определяется как $ZT = UTC + 1^h, +2^h, \dots, +12^h$ (имеются даже пояса $+13^h$ и $+14^h$). Поясам к западу от Гринвича соответствуют значения поясного времени $ZT = UTC - 1^h, \dots, -11^h$. На полюсах рекомендуется пользоваться временем UTC . Примерно по меридиану 180^0 проходит *линия перемены даты*: корабль, пересекающий эту линию с запада на восток, меняет дату на предыдущую, а пересекающий при курсе с востока на запад, меняет дату на последующую.



Рис. 2.8 Часовые зоны России. [Википедия]

В ряде государств мира существуют гражданские системы измерения времени, устанавливаемые законодательным путем с целью наиболее эффективного использования светлого времени суток. С 1930 г. действовала в СССР и продолжает действовать в РФ *декретное время*, отличающееся на $+1^h$ от поясного времени.

Кроме того, в некоторых странах вводится летнее время. В России до 2011 г. ежегодно с последнего воскресенья марта по последнее воскресенье октября вводилось летнее время,

которое еще на $+1^h$ отличалось от декретного времени.

В России с 26 октября 2014 г. устанавливается одиннадцать *часовых зон* с учетом максимального приближения к часовым поясам всемирного координированного времени *UTC* (рис. 2,8). Время соответствующих зон уменьшено или увеличено по отношению к московскому времени (МСК) и координированному времени (*UTC*) на целое число часов. Например, время 1-й часовой зоны МСК-1 и *UTC*+2 (Калининградская область), 2-й часовой зоны МСК, *UTC*+3, 11-й часовой зоны МСК+9, *UTC*+12 (Камчатский край и Чукотский автономный округ).[†] Сезонный перевод времени не осуществляется.

Юлианские даты. Система *юлианских дней* или *юлианских дат* принята для целей хронологий и сплошного счета суток день за днем. Введена в XVI в. Скалигером (*лат. Josephus Justus Scaliger*, 1540—1609, французский учёный). За начало счета избран средний гринвичский *полдень* на 1 Января 4713 года до н. э. Первый день имеет номер 0. Номер дня в юлианской системе означает число средних солнечных суток, протекших от начала эпохи юлианской системы до рассматриваемой даты и предваряется обозначением *JD*. Так, дате январь 0, 12 часов 1900 г. соответствует юлианская дата *JD* 2 415 020.0, а 2000 г. - юлианская дата *JD* 2 451 545.0. Столетие содержит 36 525 средних солнечных суток временной шкалы *TT*.

Имеется ряд модификаций, в которых изменены начала счёта юлианских дат.

Год. Единица времени *год* введена для измерений больших промежутков времени, равна примерно времени обращения Земли вокруг Солнца. Отметим четыре годовых периода.

Звездный год — промежуток времени, в течение которого Солнце совершает полное обращение вокруг Земли относительно направления на одну и ту же звезду.

Тропический год — промежуток времени полной смены сезонных циклов, например, между двумя последовательными прохождением центра Солнца через истинную точку *весеннего* равноденствия. За этот промежуток среднее Солнце делает по экватору один оборот в 360° .

Аномалистический год — промежуток времени между двумя последовательными прохождением центра Солнца через перигей его видимой геоцентрической орбиты.

Драконический год — промежуток времени между двумя последовательными прохождением центра Солнца через один и тот же узел лунной орбиты, например, восходящий узел орбиты Луны на эклиптике. Используется в теории затмений Солнца и Луны.

В табл. 2.2 показано, сколько в перечисленных годах имеется средних солнечных суток (на начало 2000 г.) и на сколько изменится это число за столетний период [1, с. 58].

Таблица 2.2

Продолжительность годов и их изменения за столетие

Год	Продолжительность	Изменение за столетие
Звездный	365,25636031	-0,00000011
Тропический	365,24219265	-0,00000614
Аномалистический	365,25964438	+0,00000304
Драконический	346,620063	+0,000032

С тропическим годом связан *гражданский календарь*. Первоначально в его основу был положен *юлианский* год продолжительностью в 365,25 средних солнечных суток. Однако, он не совпадает с действительной продолжительностью тропического года — их различие приводит к накоплению одних суток за 128 лет. Поэтому в 1582 году был введен более совершенный *григорианский* год продолжительностью в 365,2425 средних солнечных суток — ошибка в одни сутки накапливается только за 3330 лет. Григорианский календарь построен

[†]Подробности см. URL: <http://www.regnum.ru/news/polit/1820633.html#ixzz3DHPiZpw2> (дата обращения 18 июля 2015)

следующим образом: три года считают по 365 дней, а на четвертом (високосном) — 366 дней (на 1 день увеличивается месяц февраль). Однако при этом за 400 лет накапливается трое суток. Поэтому выбрасываются три високосных дня из трех последних годов столетий, номер которых не делится на 400. Так, годы 2100, 2200, 2300 не будут високосными.

Методы геодезической астрономии определений времени и координат. Определяемыми величинами в геодезической астрономии являются астрономические широта φ , долгота λ и азимут a направления на земной предмет. В геодезии азимут (a) отсчитывают от направления на точку севера по часовой стрелке. В астрономии его (a^*) определяют от направления на точку юга. Эти азимуты различаются на 180° .

Точность определения упомянутых величин зависит от их назначения и методики измерений. Высокоточные измерения в государственных астрономо-геодезических сетях характеризуются СКП по широте $0,3''$, по долготе $0,03''$, по азимуту $0,5-0,7''$. В других случаях СКП этих величин могут колебаться от $1-2''$ до $10''$ и даже до $1'$.

Измеряемыми величинами являются зенитные расстояния светил z , их азимуты a , горизонтальные углы Q между направлениями на светило и земной предмет, и моменты наблюдений T . Используемая астрономическая аппаратура состоит из следующих взаимосвязанных частей:

- 1) астрономической трубы, вращаемой вокруг двух взаимно перпендикулярных осей, одна из которых (вертикальная) при помощи уровней совмещается с местной вертикалью;
- 2) вертикального и горизонтального кругов с отсчетными устройствами;
- 3) устройств наведения трубы на светило, позволяющих одновременно регистрировать моменты наблюдений и измерять малые угловые расстояния в пределах поля зрения (окулярных микрометров);
- 4) астрономических хронометров для измерений моментов наблюдений;
- 5) хронографов для регистрации наблюдений;
- 6) радиоприемной аппаратуры для приема сигналов времени, передаваемых радиостанциями служб времени.

В приближенных измерениях используют теодолиты, секундомеры или наручные часы.

Заданными величинами являются координаты светил в системе фундаментального каталога, постоянные параметры, характеризующие поступательно-вращательное движение Земли и шкала координированного времени *UTC*. Экваториальные координаты светил перевычисляются с эпохи каталога в видимые на момент наблюдений, а моменты времени — со шкалы *UTC* в моменты истинного гринвичского звездного времени.

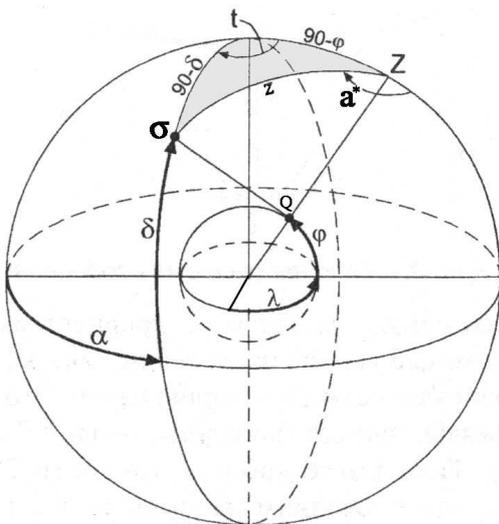


Рис. 2.9. Параллактический треугольник

Параллактический треугольник. Теория геодезической астрономии основана на формулах сферической тригонометрии, устанавливающих связь между углами и сторонами *параллактического* треугольника на небесной сфере. Вершинами треугольника являются Северный полюс, зенит Z и светило σ , его углы зависят от астрономического азимута a^* и часового угла t , стороны — от координат z , δ и астрономической широты φ точки наблюдения Q (рис. 2.9).

Сферический треугольник решают по формулам *сферической тригонометрии*. Сумма углов Σ в сферическом треугольнике больше 180° на величину *сферического избытка* ϵ :

$$\Sigma = 180^\circ + \epsilon .$$

Сферический треугольник может иметь три прямых угла, например, треугольник на глобусе, сторонами которого являются дуга экватора между двумя дугами меридианов от экватора до полюса и разностью их долгот в 90° .

Не вникая в детали сферической тригонометрии, воспользуемся её тремя теоремами.

Теорема синусов определяет отношения синусов углов и противолежащих им синусов сторон:

$$\frac{\sin t}{\sin z} = \frac{\sin(360 - a)}{\sin(90 - \delta)} .$$

Теорема косинуса стороны – косинус стороны равен произведению косинусов двух других сторон плюс произведение синусов этих сторон на косинус угла между ними. Например,

$$\cos z = \cos(90 - \delta)\cos(90 - \varphi) + \sin(90 - \delta)\sin(90 - \varphi)\cos t ,$$

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t .$$

Эта формула служит для нахождения широты места наблюдения φ , часового угла светила t и поправки u к показаниям хронометра.

Применяя теорему косинусов к стороне между полюсом и светилом, получим:

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z + \cos \varphi \sin z \cos a .$$

Данная формула используется для определения азимута светила a по измеренному значению z .

Теорема котангенсов. Объединяет четыре элемента сферического треугольника – две стороны и два угла. Выбирается угол и противолежащая ему сторона. Произведение котангенса этой противолежащей стороны на синус другой стороны равно произведению косинуса этой другой стороны на косинус второго угла плюс произведение синуса этого угла на котангенс исходного угла. Например, в качестве исходного выберем угол u зенита, выразив его через азимут a , отсчитываемый от точки севера. Применяя теорему котангенсов, будем иметь:

$$\operatorname{ctg}(90 - \delta)\sin(90 - \varphi) = \cos(90 - \varphi)\cos t + \sin t \operatorname{ctg}(360 - a) ,$$

$$\operatorname{tg} \delta \cos \varphi = \sin \varphi \cos t - \sin t \operatorname{ctg} a .$$

Формула используется для определения азимута a светила по его часовому углу t .

Зенитальные и азимутальные методы. Методы астрономических определений делят на *зенитальные* и *азимутальные* [6]. Первые основаны на измерении зенитных расстояний светил, вторые — на измерении азимутов и использовании их в качестве исходных величин.

Определения астрономических долгот. Долгота определяется разностью местного времени и времени в Гринвиче:

$$\lambda = s - GMST = T + u - GMST ,$$

$$\lambda = m - UT1 = T + u' - UT1 .$$

Как видно, поправки к часам имеют большое значение. Знать эту поправку означает иметь возможность определять точное время и долготу места наблюдения.

Определения астрономических широт. Широты определяют по наблюдениям светил в меридиане и вблизи него. Этим достигают наименьшего влияния погрешностей заданных и измеряемых величин — погрешностей экваториальных координат, моментов наблюдений, поправок хронометров и зенитных расстояний.

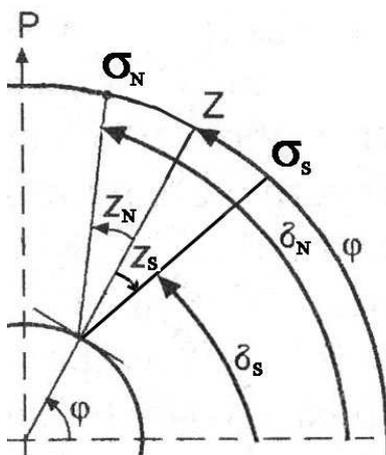


Рис. 2.10. К определению широты способом Талькотта

Из элементарных соотношений между φ , z и δ в плоскости астрономического меридиана следует (рис. 2.10):

$$\varphi = \delta_N - z_N; \quad \varphi = \delta_S + z_S .$$

где индексом N обозначены склонение и зенитное расстояние звезды к северу от зенита, а индексом S - к югу. Если северная звезда в верхней кульминации, то

$$2\varphi = (z_S - z_N) + (\delta_S + \delta_N) ;$$

если северная звезда в нижней кульминации, то

$$2\varphi = (z_S - z_N) + (180^\circ + \delta_S - \delta_N) .$$

В меридиане светила движутся лишь по азимуту, поэтому окулярным микрометром астрономической трубы можно с высокой точностью измерить малую разность зенитных расстояний ($z_S - z_N$). Измерения именно разностей зенитных расстояний способствует повышению точности определений широт: практически исключается астрономическая рефракция.

Способ предложил в 1740 г. датский астроном П. Хорребоу. Практически способ разработал в 1857 г. американский геодезист XIX столетия Талькотт (А. Talcott). Этот способ определения широты является одним из наиболее точных.

Широта или поправка хронометра может быть определена по формуле для $\cos(z)$. При определениях широты известной полагается поправка хронометра. При определении поправки хронометра известной должна быть широта φ .

Определение широты и поправки хронометра по наблюдениям пары звёзд. Большую точность обеспечивают наблюдения не одиноких светил, а прохождений пар звезд через один и тот же альмукантарат z (через горизонтальные нити сетки нитей астрономической трубы, наклоненной на угол, соответствующий заданному зенитному расстоянию, например $z = 30^\circ$). Для выбранной пары звезд $z_1 = z_2$, и на основе формул для $\cos(z)$ имеем:

$$\cos z_1 = \cos z_2 ,$$

$$\sin \delta_1 \sin \varphi + \cos \delta_1 \cos \varphi \cos t_1 = \sin \delta_2 \sin \varphi + \cos \delta_2 \cos \varphi \cos t_2 ;$$

$$t_1 = T_1 - \alpha_1 + u; \quad t_2 = T_2 - \alpha_2 + u .$$

Заметим, что в этом случае зенитные расстояния *не измеряются*, но *фиксируются* моменты времени прохождений звёзд через один и тот же альмукантарат.

Если поправка хронометра u известна и наблюдают прохождения пары звезд через заданный альмукантарат в плоскости астрономического меридиана, то имеет место *способ определения широты М.В. Певцова* (1843-1902).

Если известна широта φ и наблюдают прохождения пары звезд через заданный альмукантарат в плоскости первого вертикала, то идет речь об определении поправки хронометра и тем самым долготы места наблюдения *способом Н.Я. Цингера* (1842-1918).

Выбор для наблюдений плоскости меридиана или первого вертикала продиктован необходимостью свести к минимуму влияния погрешностей измерений и исходных данных.

Способ совместного определения широты и поправки хронометра (долготы) основан на наблюдении n прохождений звезд через заданный альмукантарат в равномерно распределенных по азимуту вертикалах.

Зенитальный способ определения азимутов. Точные азимуты по измерениям зенитных расстояний, как правило, не определяют. Для получения азимутов с точностью 5-10" может быть использована формула теоремы косинусов стороны параллактического треугольника "полюс-светило". Из этой формулы для азимута получаем:

$$\cos a = \sin \delta \sec \varphi \operatorname{cosec} z - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} z .$$

9. Параллактический треугольник на небесной сфере.
10. Способ Талькотта определения широты.
11. Способ Певцова определения широты.
12. Способ Цингера определения поправки хронометра.
13. Определение долготы места наблюдения.
14. Зенитальный способ определения азимутов.
15. Определения азимутов по часовому углу светила.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ

ЗЕМНЫЕ СФЕРА И СФЕРОИД

Сферическая модель Земли. Сфера и сфероид - две основные геометрические модели Земли в геодезии. Ранние определения размеров сферической Земли сводились к нахождению длины дуги меридиана, соответствующей разности широт в 1° , и вычислению ее радиуса. Такие определения получили название *градусных измерений*. Размеры шара Земли указывал еще Аристотель (384-322 гг. до н. э.). Первое исторически известное определение радиуса земного шара выполнил Эратосфен (278-196 гг. до н. э.). Это были довольно грубые оценки. Сравнительно точные результаты получили арабы в период расцвета арабского государства при халифе Аль-Мамуне (786 - 833гг.). В Месопотамии на широте 35° длина дуги меридиана в 1° получилась равной 111,8 км (погрешность менее 1%), а радиус земного шара — 6406 км. Великий ученый Средней Азии Бируни (973-1048) для длины дуги окружности в 1° и ее радиуса получил соответственно 110,7 км и 6342 км (по современным данным для этих широт — 110,9 км и 6369 км). Бируни предложил новый метод определения радиуса Земли — путем измерения угла понижения горизонта с известной высоты над уровнем моря (рис. 3.1).

В эпоху великих географических открытий интерес к фигуре Земли возобновился. В 1528 г. французский ученый Жан Фернель (1497-1558) по измерениям между Парижем и Амьеном для дуги меридиана в 1° получил 110,6 км — погрешность менее 0,1%.

Точность градусных измерений заметно выросла, когда для определения длин дуг голландский ученый Снеллиус (1580-1626) разработал метод триангуляции.

Значительный вклад в повышение точности измерений внес французский академик Жан Пикар (1620-1682). Он снабдил геодезические приборы зрительными трубами с сетками нитей. Повторив измерения между Парижем и Амьеном, он определил длину дуги меридиана в 1° с погрешностью менее 10 м; для радиуса Земли получил 6372 км.

В наши дни модель сферической Земли сохраняет свое практическое значение. Ее применяют в качестве промежуточной поверхности, на которую предварительно проектируют сфероид, а также при мелкомасштабном картографировании и во всех случаях, когда это оправдано соображениями точности.

Работы Ньютона положили начало новым представлениям о фигуре Земли. В геодезии временной интервал шарообразной Земли называют периодом "от Аристотеля до Ньютона".

Сфероидическая модель Земли. В 1666 г. И. Ньютон (1643-1727) открыл всемирный закон тяготения. Силы притяжения и центробежная сила формируют силу тяжести, действующую по направлению отвеса. В 1672 г. астроном Ж. Рише (1640-1696) обнаружил, что на широте 5° в Кайенне маятниковые часы шли медленнее, чем на широте 49° в Париже. Это означало, что ускорение силы тяжести вблизи экватора меньше, чем в севернее расположенном Париже. Объяснение этому явлению в 1686 г. дал Ньютон. Он представил в теле Земли два канала, заполненных водой. Один канал направил от центра масс Земли к полюсу, другой — к экватору. Давление в каждом из каналов в центре Земли должно быть одинаково. Но центробежная сила растет от полюсов к экватору и слегка уменьшает силу тяжести в экватори-

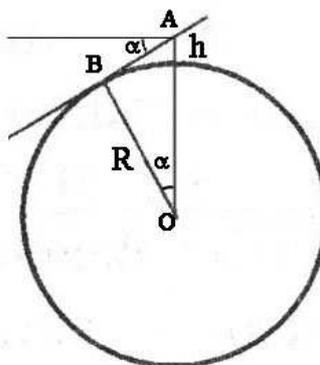


Рис. 3.1. Метод Бируни определения радиуса Земли; AB - касательная к земному шару линия визирования, h - высота наблюдения, α - угол понижения горизонта. Радиус Земли R следует из выражения:

$$R = (R + h) \cos \alpha.$$

альном канале, который поэтому должен быть несколько длиннее. По расчетам Ньютона он длиннее на $1/230$ долю. Эта величина названа сжатием. Полярное сжатие (α) определяется отношением разности экваториального (a) и полярного (b) радиусов Земли к ее экваториальному радиусу.

Эллипсоид вращения Земля по форме близка к сфероиду — фигуре, которую она приняла бы, находясь в состоянии гидростатического равновесия и под влиянием только сил взаимного тяготения ее частиц и центробежной силы вращения около неизменной оси. Простейшим из сфероидов является *эллипсоид вращения с малым сжатием*.

Различают *общеземной эллипсоид*, наилучшим образом подходящий для решения глобальных задач, и *референц-эллипсоиды*, используемые отдельными странами в картографо-геодезических целях. В общем случае под *референц-эллипсоидом* понимают эллипсоид с определенными параметрами и определенным образом ориентированный в теле Земли. Как правило, в настоящее время все референц-эллипсоиды по качеству являются одновременно и общеземными эллипсоидами.

С начала XVIII в. усилия учёных были направлены на определение параметров эллипсоида вращения — радиуса экватора и полярного сжатия Земли. В течение некоторого времени идея эллипсоидальности Земли вызывала сомнение и требовала доказательств. Из-за сжатия длина дуги меридиана в 1° у полюсов Земли равна 111,7 км, а у экватора — 110,6 км. Эта разница может быть обнаружена измерениями. Измерения выполнили на севере и на юге Франции Кассини — отец (1625-1712) и сын (1677-1756). Однако, их результаты были недостаточно точны. Сжатие оказалось отрицательным, $-1/95$. Получалось, что Земля вытянута вдоль полярной оси, что противоречило выводам Ньютона. Спор разрешили предпринятые Академией наук Франции градусные измерения по меридиану в Перу (1735-1743) и в Лапландии (1736-1737). Размеры земного эллипсоида определялись неоднократно [5, 11]. Некоторые исторически важные результаты приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Эллипсоиды вращения прежних лет

Автор	Год	Большая полуось a (м)	Сжатие α
Деламбр	1800	6 375 653	1/334
Вальбек	1819	6 376 896	1/303
Бессель	1841	6 377 397,155	1/299,15
Кларк	1866	6 378 206,4	1/294,9786982
Кларк	1880	6 378 249,145	1/293,465
Эверест	1830	6 377 276,345	1/300,8017
Эйри	1830	6 377 563,396	1/299,3249646
Хейфорд	1909	6 378 388	1/297
Красовский	1940	6 378 245	1/298,3
Австралии	1965	6 378 160	1/298.25
GRS - 67	1967	6 378 160	1/298,247167247
WGS-60	1960	6 378 165	1/298,3
WGS-66	1967	6 378 145	1/298.25
WGS-72	1972	6 378 135	1/298,26

Отметим как исторически важные прошлых лет, так и современные эллипсоиды:

Деламбра – эллипсоид использован для определения по поручению Национального собрания Франции *длины метра*, которая приравнена одной сорокамиллионной части длины парижского меридиана.

Вальбека – применялся в России в XIX веке.

Бесселя – использовался во многих странах, в том числе в СССР до 1946 г.

Кларка 1866 г. - в странах Северной и Центральной Америки.

Кларка 1880 г. - в Азии, Африке и Центральной Америке.

Эвереста 1830 г. - в Индии и других странах этого региона.

Эйри 1830 г. – использовался в Великобритании.

Хейфорда - в 1924 г. на конгрессе в Мадриде был провозглашен в качестве международно-го, применялся в ряде стран Европы, Азии и Южной Америки; однако его размеры определены недостаточно точно.

Красовского - расчет эллипсоида выполнили в 1940 г. выдающийся ученый геодезист Ф.Н. Красовский (1878–1948) и его ученик А.А. Изотов (1907–1988). Постановлением СМ СССР от 7 апреля 1946 г. эллипсоид введен в систему отсчета 1942 г. СК-42. Постановлением правительства РФ с 1 июля 2002 г. использован в системе отсчета 1995 г. СК-95. Эллипсоид и упомянутые координатные системы ещё будут применяться до 01.01.2017 г.

Австралийский – на его основе построены геодезические даты 1966 г. *AGD-66* и даты 1984 г. *AGD-84*; позже, при введении геоцентрических дат Австралии 2000 г. *GDA-2000*, его сменил Австралийский национальный эллипсоид, основанный на параметрах *WGS-84*.

GRS-67 (Geodetic Reference System, 1967) - рекомендован международными геодезическими организациями в Люцерне в 1967 г.

GRS-80 - введен решением в Канберре в 1979 г. На его основе построены Международная общеземная система отсчёта *ITRS*, Европейская система отсчета *ETRS*, а также современные геодезические координатные системы ряда стран Азии, Северной и Центральной Америки.

WGS-60 (World Geodetic System, 1960) - модель создана усилиями армии, авиации и флота США на базе астрономо-геодезических, гравиметрических и спутниковых измерений. Использовались многочисленные гравиметрические и астрономо-геодезические наблюдения. Эллипсоид предназначен для обеспечения работы глобальной системы позиционирования *GPS*.

WGS-66 – определён на основе новых геодезических, гравиметрических и спутниковых наблюдений, использован мировой геоид, представленный гармоническими коэффициентами до 24 порядка.

WGS-72 - использованы данные Мировой спутниковой триангуляционной сети и доплеровские измерения системой *TRANSIT*. Построен в форме эквипотенциального (уровенного) эллипсоида вращения выбором четырех параметров: большой полуоси (a), произведения массы Земли на гравитационную постоянную (GM), угловой скорости вращения Земли (ω) и нормированного второго зонального гармонического коэффициента геопотенциала ($C_{2,0}$).

WGS-84. Современный эллипсоид отсчетной системы. Ее улучшения производились неоднократно благодаря обширным *GPS*-измерениям. В 1994 г. усовершенствования геодезической основы пришлось на начало 730-ой *GPS*-недели. Она получила обозначение *G-730*. В 1996 г. с началом 873-ой *GPS*-недели создана новая усовершенствованная геодезическая основа *G-873*. Она стала очень близкой к *ITRF-96*. В 2002 г. произведено третье уточнение – *G-1150*. По среднему квадратическому критерию различия между координатами *WGS-84 (G-1150)* и *ITRF-2000* составляют ~1 см. Практически отсчетные основы *WGS-84* и *ITRF* стали идентичными.

IERS-96 (International Earth Rotation Service, 1996) - рекомендован Международной службой вращения Земли для обработки РСДБ-наблюдений внегалактических радиоисточников.

ПЗ-90 - Параметры Земли 1990 г. Общеземной эллипсоид и система отсчёта. Система создана в России без интеграции с западными странами. Её координаты закреплены пунктами *Космической геодезической сети* КГС, построенной по фотографическим, доплеровским, дальномерным и альтиметрическим наблюдениям геодезических спутников ГЕОИК-1, ЭТАЛОН, ГЛОНАСС и др. Погрешность взаимного положения пунктов при расстояниях между ними до 10 000 км не более 30 см.

ПЗ-90.02 – уточненная система отсчета; постановлением правительства РФ с 2002 г. введена в качестве единой государственной системы в целях геодезического обеспечения орби-

тальных полетов КА и решения навигационных задач. В ней работала ГЛОНАСС. По распоряжению правительства России 2007 г. КА ГЛОНАСС были переведены на эту новую версию. Она довольно близка к системам *ITRF-2000* и *WGS-84*. Отличается от них лишь сдвигом начала координат примерно на 0,4 м.

ПЗ-90.11 – новый уточнённый вариант системы отсчёта “*Параметры Земли 1990 г.*” Постановлением правительства от 28 декабря 2012 г. вводится в качестве единой государственной системы координат в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач.

ГСК-2011 – эллипсоид и геодезическая система координат 2011 года для осуществления геодезических и картографических работ. Прежние системы геодезических координат *СК-95* и *СК-42* применяются до 1 января 2017 г.

В настоящее время для картографо-геодезических работ наибольшее значение имеют общеземные эллипсоиды *GRS-80*, *WGS-84*, *IERS-96*, *ПЗ-90.11* и *ГСК-2011*. Их параметры указаны в таблицах 3.2 и 3.3.

Трехосный эллипсоид. Более точно фигуру Земли представляет трехосный эллипсоид. Его размеры вычисляли геодезисты Ф.Ф. Шуберт (1789-1865), дважды А.Р. Кларк (1828-1914) и другие. По данным Ф.Ф. Шуберта наибольшая ось эллипсоида находится в меридиане $41^{\circ} 04'$ восточной долготы, а экваториальное сжатие равно $1/8886$; у А.Р. Кларка в первый раз — в меридиане $15^{\circ} 34'$ восточной долготы при сжатии $1/3281$, а во второй раз — в меридиане $8^{\circ} 15'$ западной долготы при сжатии $1/13731$. На 1991 г. трехосный эллипсоид Земли имел параметры: полярный радиус $b = 6\,356\,749,4$ м; экваториальные радиусы наибольший $a_{\max} = 6\,378\,161,6$ м, наименьший $a_{\min} = 6\,378\,112,4$ м; полярные сжатия $\alpha_{\max} = 1/297,875$, $\alpha_{\min} = 1/298,560$; экваториальное сжатие $\alpha_e = 1/128\,500$; долгота наибольшего меридиана - $14,9^{\circ}$. При обработке геодезических измерений и составлении топографических карт трехосным эллипсоидом не пользуются вследствие слабо выраженной у Земли трехосности и чрезвычайного усложнения расчетных формул.

Параметры эллипсоида вращения. Размеры и форму Земного эллипсоида вращения характеризуют два параметра: большая экваториальная полуось a и сжатие α . Чаще всего эти параметры и указываются. Кроме них в расчетах используются производные параметры, такие как малая полярная полуось b , полярный радиус c , первый e и второй e' эксцентриситеты меридионального эллипса и др. Первый эксцентриситет определяется отношением линейного эксцентриситета, отрезка от центра эллипса до каждого из его фокусов

$$\sqrt{a^2 - b^2},$$

к полуоси a , второй - отношением этого же отрезка к полуоси b . Значения параметров важнейших общеземных эллипсоидов даны в табл. 3.2. В табл. 3.3 приведены значения параметров для эллипсоидов *IERS-96*, *ГСК-2011* и референц-эллипсоида Красовского.

Таблица 3.2

Параметры современных общеземных эллипсоидов

	<i>GRS-80</i>	<i>WGS-84</i>	<i>ПЗ-90.11</i>
a	6378 137	6 378 137	6 378 136
b	6 356 752.3141	6 356 752,314	6 356 751,362
c	6 399 593.6259	6 399 593,626	6 399 592,578
α	1/298.257 222 101	1/298,257223563	1/298,25784
e^2	0.00669438002290	0,006694379990	0,006694366177
e'^2	0.00673949677548	0,006739496742	0,006739482743

Таблица 3.3

Параметры современных земных эллипсоидов

	<i>IERS</i>	ГСК-2011	Красовского
a	6 378 136,49	6 378 136,5	6 378 245
b	6 356 751,7505	6 356 751,7580	6 356 863,019
c	6 399 593,1699	6 399 593,1824	6 399 698,902
α	1/298,25645	1/298,2564151	1/298,3
e^2	0,006694397324	0,006694398106	0,006693421623
e'^2	0,006739514310	0,006739515103	0,006738525415

Ниже дана группа формул взаимосвязей применяемых параметров:

$$\alpha = (a - b) / a; \alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2};$$

$$b = a(1 - \alpha) = a\sqrt{1 - e^2} = a / \sqrt{1 + e^2} = c(1 - e^2);$$

$$c = \frac{a}{1 - \alpha}; c = a^2 / b; c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}; c = \frac{a(1 + n)}{1 - n};$$

$$e^2 = \alpha(2 - \alpha); e^2 = (a^2 - b^2) / a^2; e^2 = e'^2 / (1 + e'^2);$$

$$e'^2 = \frac{1}{(1 - \alpha)^2} - 1; e'^2 = (a^2 - b^2) / b^2; e'^2 = e^2 / (1 - e^2);$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}; \frac{a}{b} = \sqrt{1 + e^2}; n = \frac{a - b}{a + b}; m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Значения большой полуоси и сжатия для разных эллипсоидов табл. 3.2 и 3.3 даны с разной точностью. Вследствие этого другие параметры получены также с разной точностью. Можно оценить, как точно следует вычислять эти параметры. Будем полагать, что большая экваториальная полуось *a* и сжатие α являются основными исходными параметрами. По ним вычисляются все остальные. Эти числа приближенные. Полагаем, что их ошибки не превышают 0,5 единицы последнего знака. В таком случае значения полуоси *b* и полярного радиуса *c* приведены с избыточной точностью, ибо для их погрешностей имеем:

$$\Delta a \approx \Delta b \approx \Delta c.$$

Для погрешностей эксцентриситетов получаем

$$\Delta e^2 \approx \Delta e'^2 \approx 2\Delta\alpha.$$

Для предельной погрешности сжатия эллипсоида *GRS-80* получим $\Delta\alpha \approx 5 \times 10^{-15}$, для эллипсоида *ГСК-2011* - $\Delta\alpha \approx 5 \times 10^{-13}$. Поэтому значения эксцентриситетов для *GRS-80* округлены до 14-го знака после запятой, а для *ГСК-2011* - до 12-го знака после запятой. С той же точностью эти значения указаны и для других эллипсоидов табл. 3.2 и 3.3.

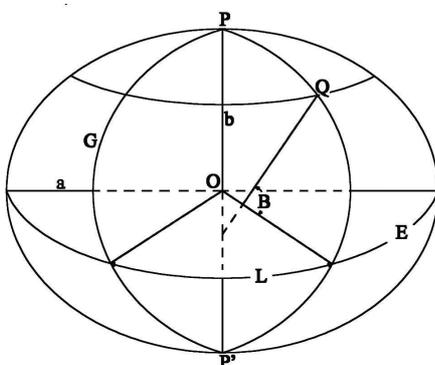


Рис. 3.2. Геодезические координаты точки эллипсоида Q(B,L)

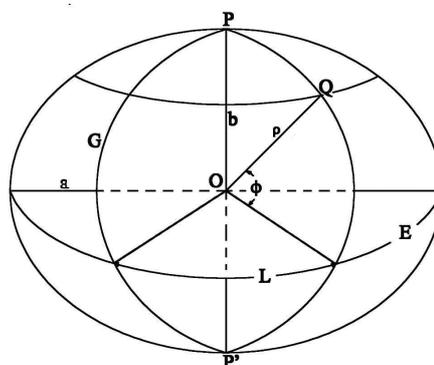


Рис. 3.3. Геоцентрические координаты точки эллипсоида Q(phi,L)

Эллипсоидальные координаты. Основными координатами являются геодезическая долгота L , геодезическая широта B , геоцентрическая широта Φ и так называемая приведенная широта U (рис. 3.2-3.4).

Приведенная широта (U) определяется следующим образом (рис. 3.3 и 3.4). Соединим точку Q на эллипсоиде с точкой на его оси вращения l так, чтобы длина отрезка между этими точками равнялась большой полуоси a . Острый угол, образуемый данным отрезком с плоскостью экватора, называется приведенной широтой. Отрезок пересекает плоскость экватора в точке k . Отрезок Qk равен малой полуоси b эллипсоида вращения. На рис. 3.4 даны меридиональные сечения эллипсоида вращения с координатными осями — вертикальной z и горизонтальной r . В этих координатах приведенная широта U позволяет записать уравнение меридионального эллипса в *параметрической* форме:

$$r = a \cos U; z = b \sin U. \tag{3.1}$$

Отсюда следует уравнение меридионального эллипса:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \cos^2 U + \sin^2 U = 1.$$

Приведённую широту ввёл французский математик, работавший и в области геодезии, Лежандр (*Adrien Marie Legendre, 1752-1833*).

Для указанных выше широт рис. 3.4 имеем:

$$\frac{z}{r} = \operatorname{tg} \Phi; \frac{z}{r} = \left(\frac{b}{a}\right) \operatorname{tg} U; \frac{dz}{dr} = \operatorname{tg}(90 + B).$$

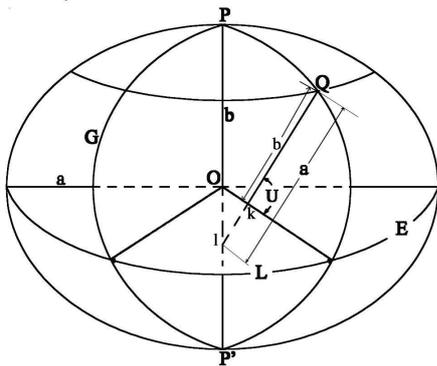


Рис. 3.3. Приведённые координаты точки эллипсоида $Q(U,L)$

Первая формула следует из рис. 3.4.1. Вторая получена из уравнений (3.1). Третья запись есть уравнение касательной к меридиональному эллипсу, составляющей угол с горизонтальной осью $(90^\circ + B)$. После её дифференцирования получаем:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{dz}{dU} \frac{dU}{dr} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} U = -\operatorname{ctg} B; \operatorname{tg} B = \frac{a}{b} \operatorname{tg} U.$$

Отсюда для точек на эллипсоиде следуют формулы взаимосвязи широт B , U и Φ :

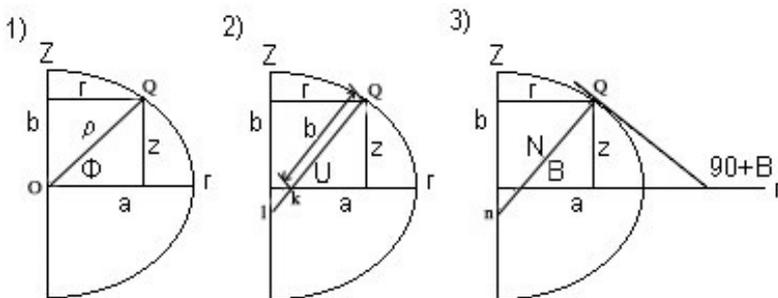


Рис. 3.4. Эллипсоидальные широты в меридиональном сечении r : 1) геоцентрическая Φ , 2) приведённая U , 3) геодезическая B

$$\operatorname{tg} \Phi = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} U, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{tg} U = \sqrt{1 + e'^2} \operatorname{tg} \Phi, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{tg} B = \sqrt{1 + e'^2} \operatorname{tg} U, \tag{3.4}$$

$$\operatorname{tg} U = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B, \tag{3.5}$$

$$\operatorname{tg} \Phi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B, \tag{3.6}$$

$$\operatorname{tg} B = (1 + e'^2) \operatorname{tg} \Phi. \tag{3.7}$$

Полярные координаты на эллипсоиде вращения. Как уже отмечалось в Лекции 1, ими являются геодезический азимут и геодезическая линия. *Геодезическая линия* — это линия кратчайшего расстояния между двумя пунктами на любой поверхности. На сфере ей соответ-

ствуует *ортодромия*, на плоскости — *прямая*. Название *геодезическая линия* принято не только в геодезии, но и в математике.

Клеро (*Alexis Claude Clairaut*, 1713-1765, французский, математик, астроном, геодезист) в 1733 г. доказал, что на поверхности вращения в каждой точке геодезической линии произведение радиуса параллели r на синус азимута A линии величина постоянная:

$$r \sin A = a \sin A_0 = \text{const} .$$

Константа равна произведению большой полуоси эллипсоида (a) на синус азимута (A_0) линии в точке на экваторе. Линия совпадает с меридианом, когда азимут $A_0 = 0$. Из всех геодезических линий только меридианы проходят через полюса. Когда $A_0 = 90^0$, геодезическая линия совпадает с экватором. В иных случаях по мере ухода к северу геодезическая линия постепенно уклоняется от меридиана, так как радиус параллели уменьшается и, следовательно, её азимут должен увеличиваться. Ход геодезической линии показан на рис. 3.5. После пересечения экватора в точке Q_1 геодезическая линия достигает точки Q_2 на параллели, где будет $\sin A = 1$. Начиная с этой параллели, геодезическая линия повернет к югу. В точке Q_3 пересечёт экватор. В точке Q_4 коснется параллели, после чего повернёт на север. Таким образом, геодезическая линия будет описывать витки, последовательно касаясь то на севере, то на юге параллелей, где $\sin A = 1$. Геодезическая линия, как пространственная кривая, обладает кручением. Поэтому после каждого витка она смещается по долготе, опутывая эллипсоид бесконечным числом витков. В навигации используется также линия постоянного азимута – *локсодромия*.

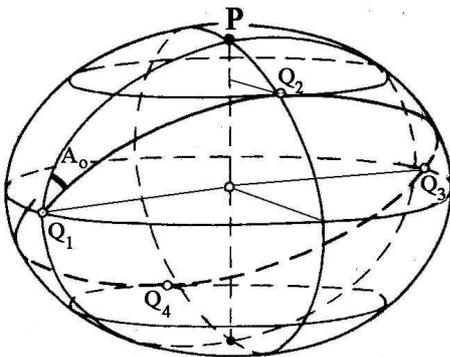


Рис.3.5. Виток геодезической линии

коснется параллели, после чего повернёт на север. Таким образом, геодезическая линия будет описывать витки, последовательно касаясь то на севере, то на юге параллелей, где $\sin A = 1$. Геодезическая линия, как пространственная кривая, обладает кручением. Поэтому после каждого витка она смещается по долготе, опутывая эллипсоид бесконечным числом витков. В навигации используется также линия постоянного азимута – *локсодромия*.

Нормальные и наклонные сечения. Плоскости, проходящие через нормаль к поверхности эллипсоида, называют нормальными. Нормальная плоскость пересекает поверхность эллипсоида по плоской кривой, называемой *нормальным сечением*.

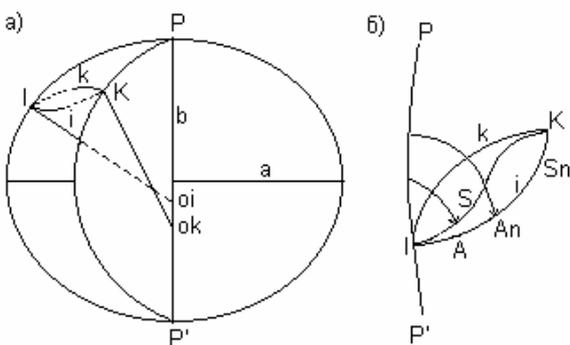


Рис. 3.6. Взаимные нормальные сечения и геодезическая линии

Построение нормального сечения можно представить следующим образом. В точке I устанавливается теодолит. Его вертикальная ось совмещается с нормалью к эллипсоиду. При этом уровень на горизонтальном круге теодолита будет почти в нуль пункте, так как отвесные линии в среднем уклоняются от нормали лишь на 1-3". Труба теодолита наводится на точку K . Нормальной будет плоскость, проведенная через вертикальную и визирные оси теодолита.

Нормали, проведенные к эллипсоиду через точки, не лежащие на одном меридиане или на экваторе, взаимно не пересекаются, но при этом все они пересекают малую ось эллипсоида вращения. Поэтому нормальное сечение, например, IiK , проведенное с некоторой точки I на другую точку K , не совпадает с нормальным сечением KkI , проведенным в обратном направлении - с точки K на точку I (рис. 3.6). *Прямое* и *обратное* нормальные сечения называют *взаимными*. Сфероидический треугольник - разорванная фигура. На рис. 3.7 закрашены углы, измеряемые теодолитом между прямыми сече-

ниями. В треугольниках разрывы устраняют, заменяя взаимные сечения геодезическими линиями.

В текущей точке I (рис. 3.6 б) разность азимутов геодезической линии A и прямого нормального сечения A_n и разность длин геодезической S и нормального сечения S_n , если длины линий малы по сравнению с радиусами кривизны эллипсоида, определяются формулами:

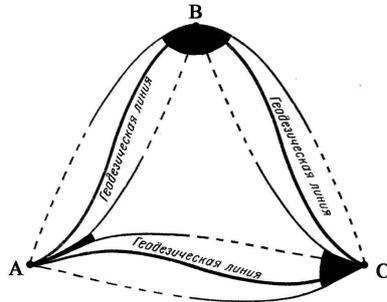


Рис.3.7. Разрывы сферического треугольника устраняют, соединяя его вершины геодезическими линиями

$$(A_n - A)'' = \frac{e^2 \rho''}{12a^2} S^2 \cos^2 B_I \sin 2A,$$

$$(S_n - S) = \frac{e^4 S^5}{360a^4} \cos^4 B_I \sin^2 2A.$$

Геодезическая линия лежит ближе к прямому нормальному сечению, деля угол между нормальными сечениями в отношении 1 к 2. В худшем случае, когда широта $B_I = 0$, азимут линии $A = 45^\circ$ и ее длина $S = 1000$ км, разность азимутов нормального сечения и геодезической линии менее $3''$, а разность их длин — менее $0,1$ мм. Длину нормального сечения можно принять равной длине геодезической линии. Расхождения азимутов в высокоточных работах учитывают даже при линиях длиной в 30 км.

Существуют два нормальных сечения, имеющие наибольший и наименьший радиусы кривизны. Их называют *главными нормальными сечениями*, а их радиусы - *главными радиусами кривизны*. Одним из главных нормальных сечений является меридиан. Меридианные плоскости проходят через полярную ось. Вторым главным будет нормальное сечение, перпендикулярное к меридиану. Его называют *сечением первого вертикала*. К этому сечению относится также и экватор.

Сечения, образуемые плоскостями, не проходящими через нормали, называют *наклонными*. Все параллели образуются наклонными сечениями и являются окружностями. Их плоскости перпендикулярны оси вращения, а с плоскостью первого вертикала составляют углы, равные геодезической широте B .

Радиусы кривизны эллипсоида вращения. Рассмотрим следующие радиусы: радиус параллели r , радиус кривизны меридиана M , радиус кривизны первого вертикала N , радиус кривизны произвольного нормального сечения R_A , средний радиус кривизны R , радиус-вектор эллипсоида вращения ρ , а также радиус всего земного шара R_\oplus .

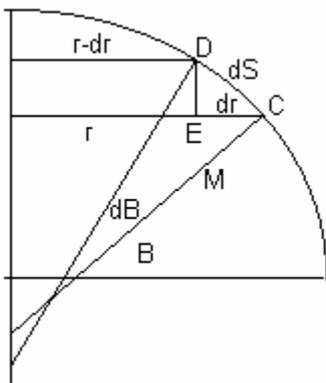


Рис. 3.8. Определение радиуса кривизны меридиана

Радиус параллели. Воспользуемся для радиуса параллели r формулой (3.1). Выразив в ней $\cos U$ через $\operatorname{tg} U$, а последний через $\operatorname{tg} B$, получим радиус параллели в функции геодезической широты B :

$$r = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \tag{3.8}$$

Радиус кривизны меридиана. Для бесконечно малой дуги меридиана радиуса M , соответствующей изменению широты на величину dB , имеем (рис. 3.8):

$$dS = M dB.$$

В треугольнике CDE угол при вершине C равен $(90^\circ - B)$. С ростом широты B радиус параллели r убывает. Поэтому имеем:

$$-dr = dS \sin B;$$

$$dr = -M \sin B dB.$$

Отсюда следует

$$\frac{dr}{dB} = -M \sin B. \quad (3.9)$$

Дифференцируя радиус r (3.8) по широте B , получаем:

$$\frac{dr}{dB} = a[-\sin B(1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2} + e^2 \sin B \cos^2 B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2}].$$

Отсюда следует

$$\frac{dr}{dB} = -a(1 - e^2) \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} = -M \sin B.$$

Окончательно для радиуса кривизны меридиана получаем:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} = \frac{c}{(1 + e'^2 \cos^2 B)^{3/2}}. \quad (3.10)$$

Вторая формула для M получена после преобразований первой с учётом взаимосвязей между параметрами эллипсоида вращения a , c , e^2 , e'^2 .

В геодезии используют так называемые *основные сфероидические функции*:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}; \quad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}.$$

С учётом этих функций радиус кривизны меридиана принимает вид:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3}.$$

Легко заметить, что радиус M у полюса больше, чем на экваторе. Иначе, кривизна меридиана убывает от экватора к полюсам. Радиус меридионального сечения получает наибольшие изменения на широте $B = 45^0$; на этой широте изменение $dB = 1^0$ вызывает изменение радиуса $dM \approx 1$ км.

Радиус кривизны меридиана M нужен для вычисления длин дуг меридианов и нахождения широт по ним.

Радиус кривизны первого вертикала. Обозначим радиус кривизны первого вертикала через N . Параллель и сечение первого вертикала имеют общую касательную в точке на меридиане, кроме того, угол между нормальной плоскостью первого вертикала и наклонной плоскостью параллели равен геодезической широте B . По теореме Менье (*Jean-Baptiste Marie Charles Meusnier de la Place*, 1754-1793, французский математик), если нормальное и наклонное сечения имеют общую касательную, то радиус кривизны наклонного сечения равен радиусу кривизны нормального сечения, умноженному на косинус угла между плоскостями этих сечений:

$$r = N \cos B. \quad (3.11)$$

Заменяв r выражением (3.8), получим:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}}. \quad (3.12)$$

Вторая формула для N получена после преобразований первой с учётом взаимосвязей между параметрами эллипсоида вращения a , c , e^2 , e'^2 . Используя обозначения основных сфероидических функций, получаем:

$$N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}.$$

На всех точках эллипсоида, кроме полюсов, $N > M$. Из всех радиусов нормальных сечений наибольшим является N , а наименьшим — M . На полюсах радиусы $M = N = c$. В связи с этим параметр c называют *полярным радиусом кривизны*.

Радиус кривизны N используют для вычислений радиусов параллелей, разностей долгот и в других задачах.

Радиус кривизны произвольного нормального сечения. Радиус кривизны R_A нормального сечения, проведенного под азимутом A , находят по формуле Эйлера (*Leonhard Euler*, 1707-1783, швейцарский, немецкий, российский математик, физик, астроном):

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}. \quad (3.13)$$

Замечаем, что при азимутах $A = 0$ и $A = 180^\circ$ радиус $R_A = M$, а при азимутах $A = 90^\circ$ и $A = 270^\circ$ радиус $R_A = N$.

Средний радиус кривизны. Средним радиусом кривизны в данной точке эллипсоида называют предел, к которому стремится среднее арифметическое из радиусов кривизны всех возможных нормальных сечений в этой точке. Если через точку на эллипсоиде проведены нормальные сечения, азимуты A которых отличаются на бесконечно малые величины dA , то средний радиус R , учитывая симметрию нормальных сечений по квадрантам, будет:

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_A dA = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} R_A dA.$$

С учетом формулы (3.13) после интегрирования получают:

$$R = \sqrt{MN}. \quad (3.14)$$

Средний радиус кривизны равен среднему геометрическому из значений главных радиусов кривизны.

Радиус R употребляют в задачах, связанных с разворачиванием поверхности эллипсоида на поверхность сферы.

Радиус-вектор эллипсоида. Обозначим радиус-вектор буквой ρ . Он соединяет центр эллипсоида с точкой на его поверхности. Для радиуса параллели r имеем:

$$r = \rho \cos \Phi = N \cos B.$$

Выражая $\cos \Phi$ через $\operatorname{tg} \Phi$, получаем:

$$\rho = N \cos B \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Phi}.$$

Заменяя $\operatorname{tg} \Phi$ через $\operatorname{tg} B$, для радиус-вектора находим:

$$\rho = N \sqrt{1 - e^2 (2 - e^2) \sin^2 B}. \quad (3.15)$$

В данном выражении радиус-вектор является функцией геодезической широты B . Представим его в функции геоцентрической широты. Для радиуса параллели r имеем:

$$r = \rho \cos \Phi = a \cos U.$$

Выразив $\cos U$ через $\operatorname{tg} U$, а тот через $\operatorname{tg} \Phi$, получим формулу радиус-вектора в функции геоцентрической широты Φ :

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \Phi}}. \quad (3.16)$$

Радиус-вектор применяют в вычислениях потенциалов силы тяжести на поверхности уровня эллипсоида, высот геоида, квазигеоида и в других задачах.

Радиусы эллипсоида зависят от широты. В табл. 3.4 приведены их значения на разных широтах и показан диапазон их изменения Δmax в километрах и в процентах. Наибольшие изменения претерпевает радиус меридиана (1%), наименьшие – радиус-вектор и радиус кривизны первого вертикала (1/3 %).

Длины дуг меридианов, параллелей, площади сфероидических трапеций. Линии меридианов и параллелей на шаре и на эллипсоиде формируют координатную *географическую сетку*. Изображение географической сетки в плоскости карты создает координатную *картографическую сетку*. Длины дуг меридианов, параллелей и ограниченные этими линиями площади сфероидических трапеций, а также площади треугольников, являются важными величинами для построения и использования географических карт.

Таблица 3.4

Радиусы земного эллипсоида на разных широтах

Широта B°	M , км	N , км	R , км	ρ , км
0	6 336	6 378	6 357	6 378
30	6 351	6 384	6 368	6 373
60	6 384	6 394	6 389	6 362
90	6 400	6 400	6 400	6 357
Δmax , км	64	22	43	21
Δmax , %	1	1/3	2/3	1/3

Вычисление длины дуги параллели. Длина дуги S_n (м) параллели радиуса r , расположенной между двумя меридианами с долготами L_1, L_2 , выраженными в радианах, вычисляется по формуле:

$$S_n = r(L_2 - L_1).$$

Вычисление длины дуги меридиана. Длина дуги меридиана X (м) протяженностью от экватора до некоторой параллели широты B , выраженной в радианах, вычисляется по формуле:

$$X = \int_0^B M dB = a(1 - e^2) \int_0^B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB. \quad (3.17)$$

Элементарная дуга меридиана dX рассматривается как бесконечно малая дуга окружности радиуса M . Ее длина $dX = M dB$. Дугу меридиана получают интегрированием элементарных дуг от экватора до параллели широты B . Этот интеграл не выражается в элементарных функциях, и его решают *численно* или *разложением в ряд*.

Численные определения длин дуг меридианов. Дуга меридиана расположена между параллелями геодезических широт B_1 и B_2 . Вычисляют среднюю широту $B_m = (B_1 + B_2)/2$. По этой широте определяют радиус кривизны меридиана M_m , а затем вычисляют длину дуги меридиана по формуле (B - в радианах):

$$S_m = M_m (B_2 - B_1). \quad (3.18)$$

Иными словами, дуга эллипса заменена дугой окружности радиуса M_m . Погрешность формулы составляет:

менее 1 мм для дуг длиной до 45 км,

около 3 см при их длине в 100 км,

около 30 м при длине в 1000 км.

Чем линия длиннее, тем больше её ошибка вычислений.

Однако, при этом надо учитывать и графическую точность масштаба карты, принимаемую в картографии равной 0,1 мм. Эта точность вполне достаточна, например, для расчётов длин боковых рамок топографических карт всего масштабного ряда (табл. 3.5). Так, в масштабе

1:100 000 при графической точности 10 м ошибка будет около 1 мм. При более крупных масштабах эта ошибка станет еще меньше. В масштабе 1:1 000 000 графическая точность допускает ошибку в 100 м. Между тем расстояния длин боковых рамок будут вычислены с ошибкой лишь 30 м.

Расчётную формулу легко уточнить небольшим её усложнением, вычисляя интеграл (3.17) методом парабол Симпсона. Эллипс заменен дугой параболы. Формула принимает вид:

$$S_m = (M_1 + 4M_m + M_2) \frac{(B_2 - B_1)}{6}. \tag{3.19}$$

По этой формуле длины дуг меридианов до 500 км вычисляют с погрешностями в 1-2 см.

Таблица 3.5

Погрешности вычислений боковых рамок листов топографических карт

Масштаб	Длина рамки S_m , км	Графическая точность, м	Погрешности в S_m
1:100 000	37	10	< 1 мм
1:200 000	74	20	< 3 см
1:500 000	220	50	< 1 м
1:1 000 000	445	100	< 30 м

Строгое вычисление длины дуги меридиана. С этой целью в (3.17) подынтегральную функцию разложим в ряд Маклорена (*Colin Maclaurin*, 1698-1746, английский математик):

$$(1-x)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{35}{16}x^3 + \dots$$

$$(1-e^2 \sin^2 B)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 B + \frac{15}{8}e^4 \sin^4 B + \frac{35}{16}e^6 \sin^6 B + \dots$$

Синусы четных степеней заменим косинусами кратных дуг:

$$\sin^2 B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B; \quad \sin^4 B = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{8} \cos 4B;$$

$$\sin^6 B = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2B + \frac{3}{16} \cos 4B - \frac{1}{32} \cos 6B.$$

После этих преобразований и интегрирования получают:

$$X = C_0 B - C_2 \sin 2B + C_4 \sin 4B - C_6 \sin 6B + \dots \tag{3.20}$$

где B - широта в радианах, дуга X в метрах.

Для коэффициентов (табл. 3.6) имеем (м):

$$C_0 = a(1-e^2) \left(1 + \frac{3e^2}{4} + \frac{45e^4}{64} + \frac{175e^6}{256} + \dots \right);$$

$$C_2 = a(1-e^2) \left(\frac{3e^2}{8} + \frac{15e^4}{32} + \frac{525e^6}{1024} + \dots \right);$$

$$C_4 = a(1-e^2) \left(\frac{15e^4}{256} + \frac{105e^6}{1024} + \dots \right);$$

$$C_6 = a(1 - e^2) \left(\frac{35e^6}{3072} + \dots \right).$$

Эти коэффициенты также могут вычисляться по формулам:

$$C_0 = s_0 + \frac{1}{2}s_2 + \frac{3}{8}s_4 + \frac{5}{16}s_6 + \frac{35}{128}s_8 + \dots;$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \left(s_2 + s_4 + \frac{15}{16}s_6 + \frac{7}{8}s_8 + \dots \right);$$

$$C_4 = \frac{1}{32} \left(s_4 + \frac{3}{2}s_6 + \frac{7}{4}s_8 + \dots \right);$$

$$C_6 = \frac{1}{96} \left(\frac{1}{2}s_6 + s_8 + \dots \right);$$

$$s_0 = a(1 - e^2); \quad s_2 = \frac{3}{2}e^2s_0;$$

$$s_4 = \frac{5}{4}e^2s_2; \quad s_6 = \frac{7}{6}e^2s_4;$$

$$s_8 = \frac{9}{8}e^2s_6.$$

Длина дуги S_m меридиана между двумя параллелями с широтами B_1 и B_2 равна

$$S_m = X_2 - X_1.$$

Точность формул характеризуется ошибками, меньшими десятых долей миллиметра.

Таблица 3.6

Значения коэффициентов для вычислений длин дуг меридианов (м)

Коэффициенты	WGS-84	ПЗ-90.11	ГСК-2011	Красовского
C_0	6 367 449,1458	6 367 448,1695	6 367 448,6176	6 367 558,4968
C_2	16 038,5086	16 038,4730	16 038,5508	16 036,4802
C_4	16,8326	16,8325	16,8327	16,8281
C_6	0,0220	0,0220	0,0220	0,0220

Вычисление геодезической широты B по длине дуги меридиана X . Обратная задача, вычисления широт по длинам дуг меридианов, решается по формулам, полученным обращением тригонометрических рядов в (3.20). Имеем в радианах:

$$B = \beta + D_2 \sin 2\beta + D_4 \sin 4\beta + D_6 \sin 6\beta + \dots; \tag{3.21}$$

$$\beta = \frac{X}{C_0};$$

$$D_2 = \frac{C_2}{C_0} \left(1 + \frac{C_4}{C_0} - \frac{C_2^2}{2C_0^2} \right);$$

$$D_4 = \frac{C_2^2}{C_0^2} - \frac{C_4}{C_0};$$

$$D_6 = \frac{C_6}{C_0} - \frac{3C_2}{C_0} \left(\frac{C_4}{C_0} - \frac{C_2^2}{2C_0^2} \right).$$

Широта B получается в радианах. Значения коэффициентов даны в табл. 3.7 (числовые значения, взятые из таблицы, умножаются на 10^{-10}).

Таблица 3.7

Значения коэффициентов для вычислений широт по длинам дуг меридианов

Кoeffици- енты	WGS-84	ПЗ-90.11	ГСК-2011	Красовского
	$\times 10^{-10}$	$\times 10^{-10}$	$\times 10^{-10}$	$\times 10^{-10}$
D_2	25 188 265,8	25 188 213,6	25 188 334,2	25 184 647,7
D_4	37 009,6	37 009,4	37 009,8	36 998,9
D_6	74,5	74,5	74,5	74,4

В формулах (3.20) и (3.21) иногда предпочитают заменить функции кратного аргумента степенными функциями:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\sin 4x = 2 \sin x \cos x (2 - 4 \sin^2 x);$$

$$\sin 6x = 2 \sin x \cos x (3 - 16 \sin^2 x + 16 \sin^4 x).$$

Для вычисления, например, длины дуги меридиана, получаем (м):

$$X = C_0 B - \sin B \cos B [(2C_2 - 4C_4 + 6C_6) + (8C_4 - 32C_6) \sin^2 B + (32C_6) \sin^4 B].$$

Полезно помнить следующие соотношения между соответственными величинами широт и длин дуг меридиана: $0,0001'' \Leftrightarrow 3 \text{ мм}$, $0,001'' \Leftrightarrow 3 \text{ см}$, $1'' \Leftrightarrow 31 \text{ м}$, $1' \Leftrightarrow 1,85 \text{ км}$ и $1^\circ \Leftrightarrow 111 \text{ км}$.

Вычисление площади сфероидической трапеции. Сфероидическая трапеция поверхности эллипсоида ограничена меридианами и параллелями (рис. 3.9). Бесконечно малая площадка сфероидической трапеции dP равна произведению бесконечно малых дуг меридиана и параллели, равных соответственно $dX = M dB$ и $dY = r dL$:

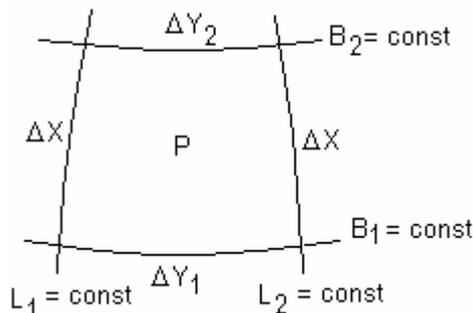


Рис. 3.9. Сфероидическая трапеция

$$dP = rMdBdL = R^2 \cos B dBdL.$$

Отсюда, подставляя выражение среднего радиуса R , для площади P трапеции, ограниченной параллелями с широтами B_1 и B_2 и меридианами L_1 и L_2 , получают:

$$P = b^2 \int_{L_1}^{L_2} \int_{B_1}^{B_2} \cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} dBdL.$$

Площадь P сфероидической трапеции, ограниченной параллелями с широтами B_1 и B_2 и меридианами с долготами L_1 и L_2 , равна:

$$P = (L_2 - L_1)(F_2 - F_1).$$

При этом

$$F = b^2 \int_0^B \cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} dB.$$

Геометрически величина F представляет площадь поверхности эллипсоида вращения, ограниченную экватором, параллелью широты B и двумя меридианами с разностью долгот в один радиан. Она участвует в расчетных формулах равновеликих картографических проекций. Её можно вычислить двумя путями. Вычислим разложением в ряд функции под интегралом, воспользовавшись формулой:

$$(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

$$\cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} = \cos B + 2e^2 \cos B \sin^2 B + 3e^4 \cos B \sin^4 B + \dots$$

При этом учитывается следующее правило интегрирования:

$$\int \cos B \sin^n B dB = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} B, \text{ при } n \neq -1.$$

Получаем:

$$F = b^2 (\sin B + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 B + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 B + \frac{4}{7} e^6 \sin^7 B + \dots). \tag{3.22}$$

Если в формуле малую полуось b представить в километрах, то площадь F будет получена в километрах квадратных (км^2).

Вычислим площадь P_e всей поверхности эллипсоида. Для этого примем $(L_2 - L_1) = 2\pi$, $B_1 = 0$, $B_2 = \pi/2$, полученный результат удвоим. Тогда

$$P_e = 4\pi b^2 (1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \dots).$$

Для интегрирования в замкнутом виде необходимо воспользоваться подстановкой $e \sin B = \sin X$. Отсюда следует $e \cos B dB = \cos X dX$. В результате получают:

$$F = \frac{b^2}{2} \left(\frac{\sin B}{1 - e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right). \tag{3.23}$$

Если в формулах малую полуось b взять в километрах, то площадь получим в км^2 . Выражая полуось b через большую полуось a , для всей площади эллипсоида получим:

$$P_e = 2a^2 \pi \left[1 + \frac{1 - e^2}{2e} \ln \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) \right].$$

Площади поверхностей основных эллипсоидов в квадратных километрах указаны ниже:

Эллипсоид	WGS-84	ПЗ-90.11	ГСК-2011	Красовского
Площадь	510 065 622	510 065 464	510 065 539	510 083 059

Приведенные формулы, в частности, находят применение в картометрических работах и построениях равновеликих картографических проекций.

Вычисление площади сферического и сфероидического треугольника. Такие решения имеют место при картометрии на эллипсоиде. Сторонами треугольников являются линии кратчайших расстояний. Площадь F' сферического треугольника определяется произведением квадрата радиуса сферы R на сферический избыток ϵ (отклонение суммы углов треугольника от значения π):

$$F' = \epsilon R^2.$$

Для вычисления сферического избытка удобна формула:

$$\text{tg} \frac{\epsilon}{4} = \sqrt{\text{tg} \frac{s}{2} \text{tg} \frac{s - \alpha}{2} \text{tg} \frac{s - \beta}{2} \text{tg} \frac{s - \gamma}{2}},$$

где α, β, γ – стороны треугольника, выраженные в долях радиуса, $s = (\alpha + \beta + \gamma)/2$. Если в качестве R выбран средний радиус кривизны (3.14), то в пределах широтного пояса сфероидические треугольники могут решаться как сферические с точностью, указанной ниже в табл. 3.9. Существуют и другие способы решения сфероидических треугольников*

Радиус всего земного шара. Этот радиус можно выбрать, исходя из различных соображений. Определим радиусы шара несколькими способами: R_{ab} — равный среднему из полуосей эллипсоида; $R_{пл}$ — одинаковой с эллипсоидом площадью P поверхности; $R_{об}$ — одинакового объема; R_{\oplus} — средний из перечисленных выше. Для них имеем:

$$R_{ab} = \frac{a + a + b}{3}; R_{пл} = \sqrt{\frac{P}{4\pi}}; R_{об} = \sqrt[3]{a^2 b},$$

$$R_{\oplus} = \frac{R_{ab} + R_{пл} + R_{об}}{3}.$$

Данные формулы после разложения в ряд принимают вид:

$$R_{ab} = a(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{15}{360}e^4 - \frac{189}{9072}e^6 - \dots),$$

$$R_{пл} = a(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{201}{9072}e^6 - \dots),$$

$$R_{об} = a(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{25}{360}e^4 - \frac{385}{9072}e^6 - \dots).$$

$$R_{\oplus} = a(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{19}{360}e^4 - \frac{258}{9072}e^6 - \dots).$$

Значения этих радиусов для эллипсоидов *GRS-80* и Красовского даны в табл. 3.8.

Таблица 3.8

Радиусы всего земного шара

Радиусы, м	<i>GRS-80</i>	Красовского
R_{ab}	6 371 008.7714	6 371 117.673
$R_{пл}$	6 371 007.1810	6 371 116.083
$R_{об}$	6 371 000.7900	6 371 109.694
R_{\oplus}	6 371 005.5808	6 371 114.483
X	10 001 965.7293	10 002 137.498
X_{\oplus}	10 007 552.1600	10 007 723,230
$\Delta_X = X_{\oplus} - X$	5586.43	5585.732
Δ_X / X	1/1790	1/1791
S	10 018 754,17	10 018 923,82
S_{\oplus}	10 007 552,16	10 007 723,23
$\Delta_S = S_{\oplus} - S$	11 202.01	11 200.79
Δ_S / S	1/894	1/894

В табл. 3.8 приведены вычисленная строгим способом дуга X меридиана от экватора до полюса и её значение X_{\oplus} , определённое по радиусу R_{\oplus} . Получено их различие в абсолютной и относительной мерах. Такие же вычисления выполнены и для четверти длины экватора.

Расчёты показывают, что в качестве среднего радиуса земного шара можно принять значение $R_{\oplus} = 6\,371$ км. Оно подходит для всех общеземных эллипсоидов, а также и для эллипсоида Красовского. Шар такого радиуса по своим размерам, площади поверхности и объёму

* Серапинас Б. Б. О вычислении площадей сфероидических треугольников. Геодезия и картография. 2012. № 9. С. 2-6.

очень близок к земному эллипсоиду. Однако длина дуги меридиана между экватором и полюсом на шаре будет на 5,6 км длиннее, чем на эллипсоиде, а четверть длины экватора будет на 11,2 км короче, чем эллипсоиде. В относительной мере эти искажения составляют соответственно около 1/1800 и 1/900.

Возможны и другие размеры радиуса шара [6, с. 59]. Так, если взять радиус шара равным большой полуоси эллипсоида, то экватор изобразится без изменений, но в длине меридиана между полюсом и экватором погрешность составит 16,8 км. Если же в качестве радиуса шара принять малую полуось эллипсоида, то погрешность по меридиану будет 16,8 км, а по экватору — 33,6 км. Чтобы разница на эллипсоиде и на шаре в длинах дуг четверти меридиана и четверти экватора была одинаковой, равной 8,4 км, радиус шара следует брать равным 6372,9 км. В этом случае относительная линейная погрешность составит 1:1200.

Эти расчёты показывают, что земной шар с единым радиусом по точности вполне удовлетворяет топографические и картографические работы. Для геодезических целей в большинстве случаев нужны более высокие точности.

Отображение эллипсоида на шар. Сферическая и сфероидическая модели Земли дополняют друг друга. При решении задач на эллипсоиде используются довольно громоздкие формулы. Поэтому во всех случаях, когда точность решаемых задач допускает, всю поверхность эллипсоида или ее часть заменяют поверхностью шара подходящего радиуса. Такая замена особенно актуальна при мелкомасштабном картографировании. Кроме того, в математической картографии применяется способ двойного проектирования, когда эллипсоид проектируется на шар, а после этого шар отображается в заданной проекции на плоскости.

Способы отображения поверхности эллипсоида на шар. При отображении эллипсоида на шар возникает задача выбора радиуса шара и способа перехода от геодезических широт B и долгот L к сферическим широтам φ и долготам λ . Обычно эллипсоид с шаром совмещают так, чтобы совпадали их центры, оси вращения и плоскости начальных меридианов. Тогда плоскости экваторов и плоскости всех меридианов также совпадут, и долготы не изменятся,

$$\lambda = L.$$

Преобразованию подлежат только широты. При этом их значения на полюсах и на экваторе остаются без изменений, и меняются тем сильнее, чем точки ближе к средним широтам.

Важно иметь представление об искажениях на шаре длин, площадей и углов. В этом случае частные масштабы длин m по меридианам, n по параллелям, частный масштаб площади p и максимальное искажение углов ω оцениваются формулами [2, с.65]:

$$m = \frac{R d\varphi}{M dB}; \quad n = \frac{R \cos \varphi d\lambda}{N \cos B dL};$$

$$p = mn; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{m - n}{m + n}.$$

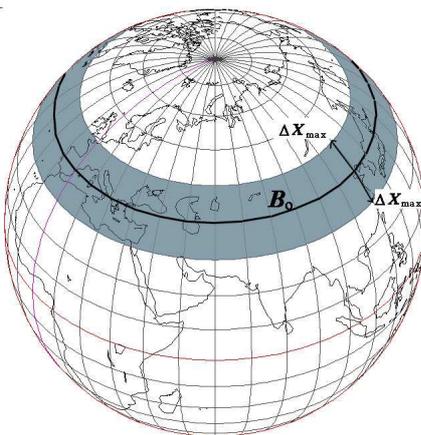


Рис.3.10. Выделение сфероидического пояса для его отображения на сфере

Масштабы m и n являются экстремальными — один из них имеет наибольшее значение, а другой — наименьшее значение. При равноугольном отображении $m = n$.

Значения сферических широт и выбор радиуса шара определяются способом отображения. Ниже рассмотрено шесть способов отображения эллипсоида на шар.

Отображение по нормальям. Сферическая широта определяется по нормали к шару, проведённой параллельно нормали в заданной точке к эллипсоиду. Поэтому сферические и геодезические широты остаются равными друг другу:

$$\varphi = B.$$

В этом способе отпадает надобность в перевычислениях не только долгот, но и широт.

На шаре искажаются углы. Однако искажения углов *не зависят* от радиуса сферы R . Их максимальное значение оценивается формулой [4, 57 с.]:

$$\omega' = 22,9' \cos^2 \varphi.$$

Искажения углов максимальны на экваторе ($22,9'$) и убывают до нуля на полюсах.

Масштабы длин m по меридианам и n по параллелям зависят от отношений радиуса сферы с главными радиусами кривизны эллипсоида M и N :

$$m = \frac{R}{M}; n = \frac{R}{N}.$$

На эллипсоиде во всех точках, кроме полюсов, $M < N$. Поэтому длины отрезков более всего искажены на меридианах. В геодезических целях по нормальям проектируют не всю поверхность эллипсоида, а лишь сфероидический пояс шириной $2\Delta X$, где ΔX – половина ширины пояса, считая от средней параллели B_0 (рис. 3.10). Радиус шара приравнивают среднему радиусу кривизны эллипсоида на параллели B_0 :

$$R_0 = \sqrt{M_0 N_0}.$$

Тогда по формуле, верной в диапазоне широт $30-60^\circ$, можно оценить, при каких удалениях ΔX_{\max} к северу и к югу по меридиану от этой параллели относительная разность в расстояниях на эллипсоиде и на шаре не превысит заданной величины V_{\max} [6, 62 с.]:

$$2\Delta X_{\max} = 2a \sqrt[3]{\frac{6}{e^2} V_{\max}} \approx 122990 \sqrt[3]{V_{\max}} \text{ (км)}.$$

Результаты расчётов по формуле, заимствованные из книги [6, 62 с.], отражены в табл. 3.9.

Таблица 3.9

Ширина сфероидического пояса, в пределах которого задачи с заданной точностью можно решать на сфере

Относительная погрешность V_{\max}	Величина макс. искажений	Ширина пояса $2\Delta X_{\max}$ (км)
10^{-8}	1 мм на 100 км	265
10^{-6}	1 мм на 1 км	1230
10^{-5}	1 см на 1 км	2650

В рамках параметров табл. 3.9 сфероидические задачи можно решать на сфере с указанной точностью. Например, все сфероидические треугольники в пределах пояса шириной 265 км можно решать как сферические с относительной погрешностью длин $|V_{\max}| = 10^{-8}$ [6, 62 с.].

2. Геоцентрическое проектирование. В этом случае из центра эллипсоида некоторым радиусом R описывается сфера и на нее проектируется поверхность эллипсоида лучами, идущими из центра этой сферы. По построению сферические широты соответствуют геоцентрическим широтам эллипсоида. Поэтому сферические широты следуют из выражения:

$$\operatorname{tg} \varphi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B.$$

Данное отображение является практически равноугольным. Наибольшее искажение углов, по оценке в [4, с. 58], около $1''$. Масштабы изображения принимают вид:

$$m = n = \frac{R}{a \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)}},$$

где R – радиус шара, a – большая полуось земного эллипсоида, e – его эксцентриситет.

Радиус шара влияет на величины искажений. Можно, как и в предыдущем случае, принять его равным среднему радиусу на заданной параллели B_0 . В пособии [2, с. 68] говорится о построении практически равноугольного отображении при радиусе шара $R = a$.

Если радиус шара приравнять

$$R = a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0},$$

то на этой параллели будет выполняться условие:

$$m_0 = n_0 = p_0 = 1.$$

Формула говорит об отсутствии искажений на выбранной средней параллели.

К.Ф. Гаусс для замены геодезических вычислений на сфероиде вычислениями на шаре использовал подобное отображение, применив шар, касающийся эллипсоида по заданной параллели B_0 [4, с. 59].

3. Равноугольное проектирование. Углы с поверхности эллипсоида на шар переносятся без искажений. Условием равноугольного отображения ($d\lambda = dL$) является:

$$m = n = \frac{Rd\varphi}{MdB} = \frac{R \cos \varphi}{N \cos B}.$$

Учитывая равенство широт φ и B на экваторе и на полюсах, получают уравнения равенства так называемых *изометрических широт* для шара (q_u) и для эллипсоида вращения (q):

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \int_0^B \frac{MdB}{r}.$$

$$q_u = q$$

Изометрическая широта – это широта, при которой линейные масштабы в каждой точке проекции по любым направлениям становятся одинаковыми. После интегрирования для изометрических широт шара и эллипсоида получают:

$$q_u = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$q = \ln \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \sqrt{\frac{(1 - e \sin B)^e}{(1 + e \sin B)}} \right\}.$$

Условие равенства изометрических широт равносильно следующему равенству:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left[\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right]^{\frac{e}{2}}.$$

По этой формуле геодезические широты B пересчитывают в сферические широты φ .

Формулы частных масштабов по меридианам и параллелям принимают вид:

$$m = n = \frac{R}{a} \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 B \right), \quad p = m^2.$$

Радиус шара принимают $R = a$. Наибольшие различия сферических и геодезических широт на широте 45° . На полюсах $m \approx 1,003$. Если потребовать на широте B_0 равенства частных масштабов единице, то, пренебрегая величинами большими e^2 , для радиуса шара следует принять

$$R = a \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B \right).$$

Способ предложил в 1807 г. Мольвейде (*Carl Brandan Mollweide*, 1774-1825, математик и астроном). Равноугольным отображением эллипсоида на шар неоднократно занимался К.Ф. Гаусс.

4. Равновеликое проектирование. Выполняется под условием равенства площадей поверхностей шара и эллипсоида. Это условие приводит к требованию равенства площадей

сферических и сфероидических трапеций, ограниченных экватором, параллелями, заданными соответственными широтами φ и B , и двумя меридианами с разностью долгот в один радиан (3.23). Широты находят из выражения:

$$R^2 \sin \varphi = \frac{b^2}{2} \left(\frac{\sin B}{1 - e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right).$$

При этом на экваторе широты

$$\varphi = B = 0,$$

на полюсах

$$\varphi = B = \pm \pi / 2.$$

С учетом соотношений широт на Северном полюсе и симметрий эллипсоида и шара относительно экватора, для вычисления радиуса шара получается следующая формула:

$$R = b \sqrt{\left(\frac{1}{1 - e^2} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \right) / 2}.$$

Для частных масштабов длин и максимальных искажений углов имеем [9 с. 39; 1 с. 76]:

$$m = 1 + \frac{e^2}{6} \cos^2 B,$$

$$n = 1 - \frac{e^2}{6} \cos^2 B,$$

$$\omega' = 1146' e^2 \cos^2 B.$$

Радиус R для эллипсоидов *GRS-80* и Красовского указан в табл. 3.8. Наибольшие искажения на экваторе: $m \approx 1,001$, $n \approx 0,999$, $\omega \approx 7,6'$.

5. Проектирование сохранением длин параллелей. Условие отображения эллипсоида при сохранении длин его параллелей на шаре следует из требования равенства радиусов (r) соответствующих параллелей эллипсоида и шара:

$$R \cos \varphi = a \cos U,$$

где U – приведенная широта эллипсоида. Поэтому при равенстве радиуса шара большой полуоси эллипсоида

$$R = a,$$

сферическая широта φ равна приведенной широте U и вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B.$$

Искажения на шаре можно оценить по формулам [1 с.77]:

$$n = 1, \quad m = p = 1 + \frac{e^2}{2} \cos^2 B + \dots$$

$$\omega' = 1719' e^2 \cos^2 B.$$

6. Проектирование сохранением длин меридианов. Сферическая широта вычисляется из условия равенства длин меридианов на шаре и на эллипсоиде. При этом сферическая широта вычисляется по длине дуги X меридианов эллипсоида по формуле:

$$\varphi = X / R.$$

Длина дуги меридиана X протяженностью от экватора до текущей широты вычисляется по формуле (3.20). Равенство меридиональных дуг на шаре и на эллипсоиде должно сохраняться при любых широтах, в том числе и длин дуг от экватора до полюса. Для дуг от экватора до полюса ($B = \pi/2$) имеем:

$$X = C_0 \pi / 2 = R \pi / 2.$$

Отсюда следует выражение для вычисления радиуса сферы

$$R = C_0 .$$

Значения C_0 для разных эллипсоидов указаны в табл. 3.6.

Искажения на шаре можно оценить по формулам [1 с.77]:

$$m = 1, n = p = 1 - \frac{e^2}{4} \cos^2 B + \dots$$

$$\omega' = 859' e^2 \cos^2 B .$$

Источники информации по Лекции 3

1. Бугаевский Л. М. Математическая картография: Учебник для вузов направления «Геодезия», специальности «Картография». – М.: "Златоуст", 1998. -400 с.
2. Гинзбург Г. А., Салманова Т. Д. Пособие по математической картографии. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 160. М.: Недра, 1964.–456с.
3. Изотов А.А. Земной эллипсоид Красовского и связанные с ним геодезические величины. Труды ЦНИИГАиК, выпуск 72. – М.: Геодезиздат. 1950.
4. Каврайский В.В. Математическая картография. – Ленинград-Москва. Госкартогост. 1934. -275 с.
5. Комаровский Ю. А. Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении [Электронный ресурс], (Дата обращения 24.05.2014). URL: <http://sveos.msun.ru/edu/lit/kaf/tss/ell.pdf>
6. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1979. –260 с.
7. Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт. Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. -132 с.
8. Серапинас Б. Б. Практикум по геодезическим основам карт. Учебное пособие. М.: Географический факультет МГУ. 2008. -146 с.
9. Соловьев М.Д. Математическая картография. – М.: Недра. 1969. -287 с.
10. Moritz H. GEODETIC REFERENCE SYSTEM 1980 [Электронный ресурс]. (Дата обращения 22.05.2014). URL: <http://www.gfy.ku.dk/~iag/handbook/geodeti.htm>
11. The available geographic coordinate systems. esriSRGeoCSType Constants. [Электронный ресурс] (Дата обращения 24.05.2014). URL: <http://edndoc.esri.com/arcobjects/9.1/default.asp?URL=/arcobjects/9.1/componenthelp/esrigeometry/esrisrgeocstype.htm>

Контрольные вопросы

1. Перечислите используемые широты. Для чего они предназначены? Как они связаны взаимно?
2. Наклонные и нормальные сечения. Взаимные нормальные сечения. Геодезическая линия. Радиусы эллипсоида. Как получены их формулы? Где их используют?
3. Вычисление длин дуг параллелей. Вычисление длин дуг меридианов – численные способы, строгая формула и её вид. Вычисление геодезической широты по длине дуги меридиана. Вычисления площадей сфероидических трапеций и треугольников.
4. Радиус всего земного шара. Как он получен?
5. Отображение эллипсоида на сфере. Способы отображения и используемые при этом радиусы шара. Искажения на шаре при разных отображениях.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ

ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ НА СФЕРЕ И НА СФЕРОИДЕ

Главные геодезические задачи. Главными называют прямую и обратную геодезические задачи. Пример прямой задачи – известны широта и долгота пункта A , азимут на пункт B и расстояние до него; найти широту и долготу пункта B . Обратная задача – известны широта и долгота пунктов A и B , найти расстояние между ними, прямой и обратный азимуты.

Рассмотрим их решение на сфере, а затем на эллипсоиде вращения. Для многих картографических задач решения на сфере по точности являются приемлемыми. Однако в настоящее время системы спутникового позиционирования позволяют определять координаты точек с погрешностями от нескольких метров до первых сантиметров. Поэтому целесообразно иметь представление и о более точных способах решения главных геодезических задач.

Геодезистами разработан ряд способов решения главных геодезических задач на эллипсоиде вращения. Формулы довольно громоздки. Сложность формул зависит от требуемой точности определения широт, долгот, азимутов и длин линий между пунктами.

С какой точностью следует вести вычисления. Для Земли погрешности в широте в $1'$, $1''$, $0,1''$, $0,01''$, $0,001''$ и $0,0001''$ ведут к погрешностям в длинах дуг меридианов соответственно в 1,85 км, 30 м, 3 м, 3 дм, 3 см и 3 мм. Например, если координаты достаточно знать с метровой точностью, то широты и долготы следует знать до сотой доли угловой секунды.

Когда погрешности угловых величин исчисляются минутами или их долями, а линейных – сотнями метров и километрами, задачи можно решать на земном шаре. Однако при больших расстояниях между пунктами погрешности в азимутах могут даже превысить 1° (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Точность решения обратных геодезических задач на шаре и эллипсоидах

Исходные данные: широта B_1 , широта B_2 , разность долгот, эллипсоид	Длины S на эллипсоиде $GRS-80$, (м)	Отличия длин S и азимутов A на эллип- соидах от ве- личин на $GRS-$ 80	Отличия длин S и азимутов A на шаре радиуса $R = 6371$ км от величин на $GRS-80$
$50^\circ 07'$, $52^\circ 39'$, $0^\circ 15'$, Красовского	281 255	+ 5 м; – 0,004"	– 156 м; – 0,6'
$37^\circ 20'$, $26^\circ 08'$, $41^\circ 29'$, Хейфорда	4 085 798	+ 169 м; – 1,2"	– 6,5 км; + 4,9'
$35^\circ 16'$, $67^\circ 22'$, $137^\circ 47'$, Хейфорда	8 084 459	+ 365 м; + 0,50"	– 20,0 км; – 1,8'
$55^\circ 45'$, $-33^\circ 26'$, $108^\circ 13'$, Бесселя	14 112 077	– 1550 м; + 2,1"	+ 13,1 км; + 11,5'
$01^\circ 00'$, $01^\circ 01'$, $179^\circ 46'$, Хейфорда	19 780 007	+ 644 м; – 17,1"	+ 8,9 км; $\pm 86,6'$

В табл. 4.1 сопоставлены результаты решения обратных геодезических задач на шаре и на разных референц-эллипсоидах с результатами решений на общеземном эллипсоиде GRS-80 (исходные данные первой строки взяты из учебного пособия [9], а данные остальных строк – из публикации [10]).

На эллипсоиде чем расстояния между пунктами больше, тем формулы сложнее. Иногда выделяют следующие группы способов:

- короткие расстояния – десятки километров;
- средние расстояния – сотни километров;
- большие расстояния – тысячи километров.

В специальных случаях, например, в навигационной практике, прямую и обратную задачи решают не по геодезической линии, а по локсодромии - линии постоянного азимута, пересекающей все меридианы под одним и тем же углом.

Прямая задача на сфере. Пусть на сфере радиуса R лежат две точки $Q_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $Q_2(\varphi_2, \lambda_2)$, где φ - географическая широта, λ - географическая долгота. Точки соединены ортодромией, при этом α - ее азимут, σ - ее длина s , выраженная в долях радиуса сферы. Соединив заданные точки с полюсом, построим сферический полярный треугольник (рис. 4.1) [6].

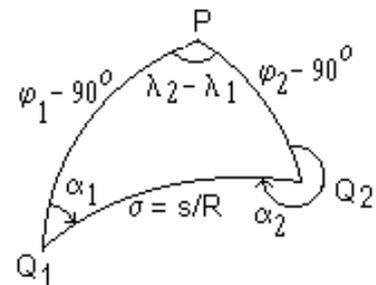


Рис. 4.1. Главные геодезические задачи на сфере

В прямой задаче, как уже указывалось, даны географические координаты φ_1 и λ_1 некоторой точки Q_1 , длина ортодромии $\sigma = s/R$ и ее прямой азимут α_1 ; по этим данным требуется найти координаты φ_2 и λ_2 , а также обратный азимут α_2 в точке Q_2 .

По теореме косинусов сферической тригонометрии определим широту:

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos \sigma + \cos \varphi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1.$$

Из теоремы котангенсов следует:

$$\operatorname{ctg} \sigma \cos \varphi_1 = \sin \varphi_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \operatorname{ctg}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Отсюда для разности долгот получаем:

$$\operatorname{tg}(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos \sigma \cos \varphi_1 - \sin \sigma \sin \varphi_1 \cos \alpha_1}.$$

По теореме котангенсов получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \sin \sigma = \cos \sigma \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2$$

Отсюда для обратного азимута имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\cos \varphi_1 \sin \alpha_1}{\cos \varphi_1 \cos \sigma \cos \alpha_1 - \sin \varphi_1 \sin \sigma}.$$

Обратная задача на сфере. Даны географические координаты φ_1, λ_1 , и φ_2, λ_2 точек Q_1 и Q_2 ; требуется найти длину геодезической линии s между этими точками, а также ее прямой α_1 и обратный α_2 азимуты.

По теореме косинусов находим:

$$\cos \sigma = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \omega,$$

$$\omega = \lambda_2 - \lambda_1,$$

$$s = R\sigma, \text{ при отрицательном } \cos \sigma \quad s = R(\pi - |\sigma|).$$

Применяя формулы котангенсов, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\cos \varphi_2 \sin \omega}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \omega},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\cos \varphi_1 \sin \omega}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \omega - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}.$$

Решение главных геодезических задач на эллипсоиде на короткие расстояния. Прежде всего, имеются в виду расстояния ~ 30 км. Ознакомимся с решением по формулам со средними значениями аргументов. Материал излагается в соответствии с учебником [4, с.174-179]. Аналогичные формулы в несколько ином виде получены К.Ф. Гауссом.

Прямая задача. Сферический треугольник Q_1Q_2P (рис. 4.1) спроектируем на новую сферу, близкую к поверхности эллипсоида. Радиус сферы примем равным радиусу кривизны первого вертикала N_m , вычисленному по средней геодезической широте $B_m = (B_1 + B_2)/2$. Точку пересечения нормали широты B_m с осью вращения эллипсоида примем за центр сферы. Стороны треугольника Q_1Q_2P спроектируем на новую сферу лучами, проведенными из её центра. При таком изображении разность долгот l на эллипсоиде будет точно равна разности долгот ω на сфере, длина геодезической линии s и ее азимуты практически равны длине ортодромии и ее азимутам. Прямую задачу решают последовательными приближениями по формулам:

$$\beta = \frac{s \cos A_m}{M_m}; \delta = \frac{s \sin A_m}{N_m \cos B_m}; \alpha = l \sin B_m;$$

$$b = \beta \left(1 + \frac{2\delta^2 + \alpha^2}{24} \right); l = \delta \left(1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{24} \right); a = \alpha \left(1 + \frac{3\beta^2 + 2\delta^2 - 2\alpha^2}{24} \right). \quad (4.1)$$

Решают задачу последовательными приближениями. В первом приближении полагают $B_m = B_1$ и $A_m = A_1$. Во втором и последующих приближениях принимают:

$$B_m = B_1 + b/2; A_m = A_1 + a/2.$$

Окончательные значения искомых величин вычисляют как

$$B_2 = B_1 + b; L_2 = L_1 + l; A_2 = A_1 + a \pm 180^\circ.$$

Все угловые величины выражены в радианах. Для обеспечения точности $0,0001''$ в координатах при расстояниях $s < 60$ км достаточно ограничиться 3-4 приближениями.

Обратная задача. По координатам B_1, L_1, B_2, L_2 находят:

$$b = B_2 - B_1, \quad l = L_2 - L_1, \quad B_m = (B_1 + B_2)/2,$$

$$\eta_m^2 = e'^2 \cos^2 B_m, \quad N_m = c / \sqrt{1 + \eta_m^2}, \quad M_m = N_m / (1 + \eta_m^2).$$

Далее с достаточной точностью получают:

$$Q = s \cos A_m = b M_m \left(1 - \frac{2l^2 + l^2 \sin^2 M_m}{24} \right),$$

$$P = s \sin A_m = l N_m \cos B_m \left(1 + \frac{b^2 - l^2 \sin^2 B_m}{24} \right); \tag{4.2}$$

$$a = l \sin B_m \left(1 + \frac{3b^2 + 2l^2 - 2l^2 \sin^2 B_m}{24} \right).$$

Решение задачи завершается вычислениями по формулам:

$$\operatorname{tg} A_m = P/Q, \quad s = \sqrt{Q^2 + P^2}, \quad A_1 = A_m - a/2, \quad A_2 = A_m + a/2 \pm 180^\circ. \tag{4.3}$$

Все угловые величины даны в радианах. Точность результатов при вычислениях на любых широтах характеризуется табл. 4.2 [4, с. 179].

Таблица 4.2

Точность решения задач по формулам со средними аргументами

s, км	Δs, м	ΔA"
80	0,01	0,02
200	0,1	0,1
400	1	0,5
600	5	1
800	10	2

Предельные погрешности Δs в линиях и ΔA в азимутах зависят от длин сторон. При длинах сторон до 800 км они не превышают графических погрешностей карт масштабов 1:100 000.

Решение главных геодезических задач на эллипсоиде на средние и большие расстояния. Современные возможности компьютерной техники позволяют без особых затруднений применять довольно трудоемкие с вычислительной точки зрения способы. Распространены также численные методы решения главных геодезических задач.

Решение прямой задачи методом численного интегрирования дифференциальных уравнений геодезической линии. Для геодезической линии на эллипсоиде можно составить три следующих дифференциальных уравнения:

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}; \quad \frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}; \quad \frac{dA}{ds} = \frac{\operatorname{tg} B \sin A}{N}.$$

Два первых уравнения верны для любой кривой на эллипсоиде вращения. Их легко получить, проектируя отрезок ds, ориентированный под азимутом A, на элементарные отрезки меридиана и параллели:

$$MdB = ds \cos A, \\ N \cos B dL = ds \sin A.$$

Третье дифференциальное уравнение верно только для геодезической линии. Оно следует из дифференцирования уравнения геодезической линии на эллипсоиде вращения:

$$r \sin A = \operatorname{const}, \\ \sin A dr + r \cos A dA = 0.$$

Интегрируя дифференциальные уравнения по линии s от её начала до конца, получают:

$$B_2 - B_1 = \int_s \frac{\cos A}{M} ds,$$

$$L_2 - L_1 = \int_s \frac{\sin A}{N \cos B} ds,$$

$$A_2 - A_1 \pm 180^\circ = \int_s \frac{\operatorname{tg} B \sin A}{N} ds.$$

Эти уравнения решают численно. В учебном пособии [8, с.59] предложен следующий алгоритм решения. Выбирается достаточно малый отрезок h линии s . Тогда

$$B_{i+1} = B_i + \frac{\cos A_i}{M_i} h,$$

$$L_{i+1} = L_i + \frac{\sin A_i}{N_i \cos B_i} h,$$

$$A_{i+1} = A_i \pm 180^\circ + \frac{\operatorname{tg} B_i \sin A_i}{N_i} h.$$

После каждого шага итерации, вычисленные в левой части значения подставляются в правую часть. Сначала берётся малый произвольный шаг h и с ним выполняются вычисления. Затем шаг h уменьшают в два раза и снова выполняют все вычисления. Если дважды полученные координаты конечной точки совпадают с заданной точностью, то вычисления прекращаются, если нет, то шаг h уменьшают ещё в два раза и приближения продолжают. Однако, в учебных пособиях [4, с. 180-182; 9, с. 278-284; 5, с.52-54] применены более эффективные вычислительные методы, представляющие вариации метода Рунге-Кутты, показывающие, что задачу можно решать даже на максимально большие расстояния.

Решение обратной задачи на любые расстояния методом простой итерации. Метод опубликован в [5, с.52-54]. Его суть в следующем.

1. В начальной точке P_1 задают приближённые значения длины s' геодезической линии и её азимута A' , полученные, например, из решения обратной задачи на сфере (рис. 4.2).

2. Решают прямую задачу по дифференциальным формулам, используя метод Рунге-Кутты-Фельберга RK45 4-го и 5-го порядков, обеспечивающий субмиллиметровую точность для расстояний в диапазоне 0-20 000 км.

3. Имеется заданная конечная точка P_2 и её приближённое положение P_3 . Решая обратную задачу, находят малое расстояние q между этими точками.

4. Вычисляют угол θ у вершины P_3 как разность азимутов линий $P_3 P_2$ и $P_3 P_1$.

5. Вычисляют поправки в азимут линии и в её длину по формулам:

$$\Delta A = \arcsin(q/s'), \quad \Delta s = q \cos \theta.$$

6. Исправляют этими поправками найденные в п.1 приближённые значения азимута и длины линии. По исправленным значениям вновь выполняют вычисления п.2.

Процесс итераций повторяют до тех пор, пока расхождения между вычисленными и заданными координатами конечной точки не станут допустимыми.

Решение главных геодезических задач способом Бесселя. Ф. Б. Бессель - немецкий астроном и геодезист (1784–1846). Способ Бесселя был опубликован в 1825 г. Способ отлича-

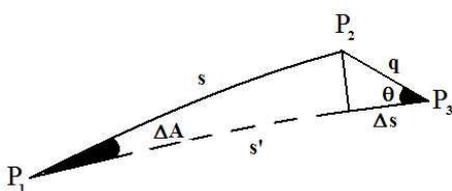


Рис.4.2. Решение обратной задачи на эллипсоиде простой итерацией

ется стройностью и строгостью решения. Он применим для вычисления кратчайших расстояний любой длины между двумя точками в пределах полусфероида. В этом отношении он уникален и универсален. Формулы громоздки, однако в условиях современной вычислительной техники это не является проблемой.

Способ основан на отображении эллипсоида на сфере. Геодезическая линия на сфере отображается дугой большого круга – ортодромией. На ней расположены три точки – Q_0 , Q_1 и Q_2 (рис. 4.3). Азимуты линии в этих точках A_0 , A_1 и A_2 . Суть отображения следует из геометрической интерпретации уравнения геодезической линии, которое может быть записано следующим образом:

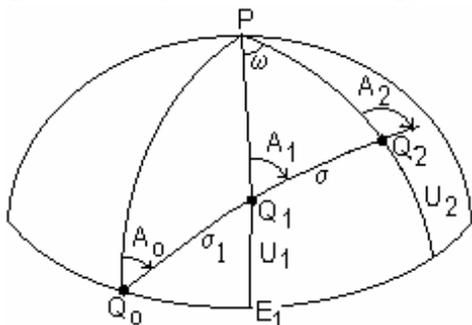


Рис. 4.3. Отображение геодезической линии на сфере Бесселя

$$\sin A_0 = \cos U_1 \sin A_1 = \cos U_2 \sin A_2,$$

или

$$\frac{\sin A_1}{\sin(90 - U_2)} = \frac{\sin A_2}{\sin(90 - U_1)},$$

где U_1 , U_2 — приведенные широты точек эллипсоида Q_1 , Q_2 , A_0 — азимут геодезической линии на экваторе. Эта запись есть результат применения теоремы синусов к

сферическому треугольнику Q_1PQ_2 .

Таким образом, отображение эллипсоида на сферу выполняется при следующих условиях: 1) геодезическая линия изображается ортодромией — дугой большого круга; 2) на сфере азимуты ортодромии равны азимутам геодезической линии на эллипсоиде; 3) геодезическим широтам на эллипсоиде соответствуют приведенные широты на сфере.

Взаимосвязь между длинами ортодромии $\sigma = Q_1Q_2$ и геодезической линии s на эллипсоиде, а также между углом ω у полюса P и разностью долгот этих точек $l = L_2 - L_1$ устанавливается с помощью дифференциальных уравнений. Для этого рассмотрим бесконечно малые соответственные треугольники на эллипсоиде и на указанной сфере (рис.4.4).

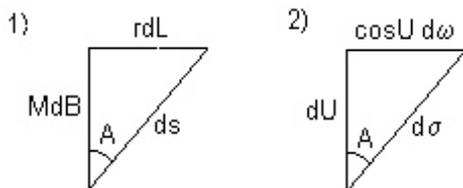


Рис. 4.4. Элементарные треугольники эллипсоида и сферы $R=1$

Для этих треугольников имеем:

$$\frac{MdB}{ds} = \frac{dU}{d\sigma} = \cos A, \quad \frac{rdL}{ds} = \frac{\cos U d\omega}{d\sigma} = \sin A.$$

После преобразований получаем:

$$ds = M \frac{dB}{dU} d\sigma, \quad dL = \frac{M}{a} \frac{dB}{dU} d\omega,$$

где a — большая полуось эллипсоида. Дифференцируя формулы радиуса параллели

$$r = a \cos U = N \cos B,$$

получаем:

$$\frac{dr}{dU} = -a \sin U = -M \sin B \frac{dB}{dU},$$

$$\frac{dB}{dU} = \frac{a \sin U}{M \sin B}.$$

Выразив синусы через тангенсы, получаем:

$$\frac{dB}{dU} = \frac{a}{M} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U}.$$

С учетом последнего выражения получаем:

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U} d\sigma, \quad (4.4)$$

$$dL = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U} d\omega. \quad (4.5)$$

Интегрируя эти уравнения вдоль дуги большого круга между точками Q_1 и Q_2 (рис. 4.3), устанавливаются зависимости между длинами s и σ , и углами l и ω . При этом имеют дело с так называемыми эллиптическими интегралами, которые можно решить численно, или разложением в ряды функций под знаком интеграла. Решением этих интегралов занимались многие учёные, предлагая свои варианты способов. Ознакомиться подробнее со способом Бесселя можно, например, по работам [4, 3]. Он использован также в [7].

Ниже рассмотрим решения в модификации [10]. В 1975 году Т. Vincenty опубликовал способ решения прямой и обратной геодезической задачи, отличающийся высокой точностью. Способ также описан в пособии [3]. В данной работе изменены некоторые обозначения и формулы. Приведены упрощенные формулы, однако обеспечивающие максимальную погрешность не более $0,00005''$, или в линейной мере не больше 1,5 мм [10].

В формулах использованы малая полуось b эллипсоида и его сжатие α , B – геодезическая широта, U – приведённая широта, l – разность геодезических долгот, s – длина геодезической линии, A_0 , A_1 и A_2 – азимуты геодезической линии в точках Q_0 , Q_1 и Q_2 , ω – разность долгот на сфере, σ – угловое расстояние на сфере между точками Q_1 и Q_2 , σ_1 – угловое расстояние на сфере от экватора до точки Q_1 , σ_m – угловое расстояние на сфере от экватора до середины линии (рис. 4.3).

Решение прямой задачи. Задача начинается с пересчёта геодезической широты в приведённую широту и вычисления ряда вспомогательных величин.

$$\operatorname{tg} U_1 = (1 - \alpha) \operatorname{tg} B_1. \quad (4.6)$$

$$\operatorname{tg} \sigma_1 = \operatorname{tg} U_1 / \cos A_1. \quad (4.7)$$

$$\sin A_0 = \cos U_1 \sin A_1 \quad (4.8)$$

$$k^2 = e'^2 \cos^2 A_0. \quad (4.9)$$

$$A = 1 + \frac{k^2}{256} \left(64 + k^2 \left(-12 + 5k^2 \right) \right), \quad (4.10)$$

$$B = \frac{k^2}{512} \left(128 + k^2 \left(-64 + 37k^2 \right) \right).$$

Итерациями вычисляется σ :

$$2\sigma_m = 2\sigma_1 + \sigma, \quad (4.11)$$

$$\Delta\sigma = B \sin \sigma \left(\cos 2\sigma_m + \frac{1}{4} B \cos \sigma \left(-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m \right) \right), \quad (4.12)$$

$$\sigma = \frac{s}{bA} + \Delta\sigma. \quad (4.13)$$

В первом приближении принимается $\Delta\sigma = 0$. Итерации продолжаются до тех пор, пока изменения σ не будут меньше наперёд заданной величины.

Вычисляется широта второй точки:

$$\sin U_2 = \sin U_1 \cos \sigma + \cos U_1 \sin \sigma \cos A_1,$$

$$\operatorname{tg} B_2 = \frac{\sin U_2}{(1 - \alpha)\sqrt{1 - \sin^2 U_2}}.$$

Вычисляется разность долгот:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \sigma \sin A_1}{\cos U_1 \cos \sigma - \sin U_1 \sin \sigma \cos A_1},$$

$$C = \frac{\alpha}{16} \cos^2 A_0 [4 + \alpha(4 - 3 \cos^2 A_0)], \quad (4.14)$$

$$l = \omega - (1 - C)\alpha \sin A_0 \left\{ \sigma + C \sin \sigma [\cos 2\sigma_m + C \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m)] \right\}. \quad (4.15)$$

Определяется азимут на второй точке:

$$\operatorname{tg} A_2 = \frac{\sin A_0}{-\sin U_1 \sin \sigma + \cos U_1 \cos \sigma \cos A_1}.$$

Под A_2 можно понимать как азимут в направлении Q_1Q_2 , так и азимут в обратном направлении Q_2Q_1 ; они различаются на 180° и формулой тангенса это различие не фиксируется.

Выражение (4.7) для величины σ_1 найдено из сферического прямоугольного треугольника $Q_0Q_1E_1$ (рис. 4.3).

Решение обратной задачи. Последовательными приближениями вычисляются на сфере разность долгот ω и расстояние σ . В первом приближении принимается $\omega = l$. Далее:

$$\cos \sigma = \sin U_1 \sin U_2 + \cos U_1 \cos U_2 \cos \omega, \quad (4.16)$$

$$\sin \sigma = \sqrt{1 - \cos^2 \sigma}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \sin \sigma / \cos \sigma.$$

$$\sin A_0 = \cos U_1 \cos U_2 \sin \omega / \sin \sigma, \quad (4.17)$$

$$\cos^2 A_0 = 1 - \sin^2 A_0,$$

$$\cos 2\sigma_m = \cos \sigma - 2 \sin U_1 \sin U_2 / \cos^2 A_0, \quad (4.18)$$

$$\omega = l + (1 - C)\alpha \sin A_0 \left\{ \sigma + C \sin \sigma [\cos 2\sigma_m + C \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m)] \right\}. \quad (4.19)$$

В (4.19) подставляются результаты из формулы (4.14). Приближения продолжаются, пока изменения ω не станут допустимыми. Вычисляется длина линии на эллипсоиде:

$$s = bA(\sigma - \Delta\sigma),$$

где $\Delta\sigma$, коэффициенты A и B определяется формулами (4.12) и (4.10).

Вычисляются азимуты:

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{\cos U_2 \sin \omega}{\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \omega},$$

$$\operatorname{tg} A_2 = \frac{\cos U_1 \sin \omega}{-\sin U_1 \cos U_2 + \cos U_1 \sin U_2 \cos \omega}.$$

Формулы для обратной задачи не дадут результата, если величина ω , рассчитанная по формуле (4.19) по абсолютной величине окажется более π .

Замечания по способу. В [10] отмечается, что на экваторе формулы (4.7) и (4.18) становятся неопределимыми. Однако, если деление на ноль исключить, то решение будет правильным. В этом случае $B = C = 0$ и $\Delta\sigma, l, \omega$ будут вычислены правильно. Такие выражения, как для $\text{tg}B_2, \text{tg}A_2, \sin^2\sigma$ и $\text{tg}A_1$, достаточно вычислить однажды, сохранить и использовать дальше. Если нужен обратный азимут A_2 (азимут с Q_2 на Q_1), то это надо иметь в виду при его вычислении.

В публикации [Vincenty] приведён лишь алгоритм способа. Подробных выводов нет. Поэтому в формулах для $\text{tg}B_2$ и $\sin^2\sigma$ нами использованы их более простые исходные выражения. Формула (4.17) может быть получена из сферического треугольника Q_1PQ_2 по теореме синусов (рис. 4.3):

$$\frac{\sin \omega}{\sin \sigma} = \frac{\sin A_1}{\cos U_2} = \frac{\cos U_1 \sin A_1}{\cos U_1 \cos U_2} = \frac{\sin A_0}{\cos U_1 \cos U_2}.$$

Отсюда непосредственно следует (4.17).

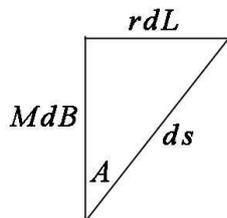
Формула (4.18) может быть получена следующим образом. Из сферических треугольников Q_0PQ_1 и Q_0PQ_2 , применением теоремы косинусов к сторонам “полюс - экватор”, имеем:

$$\sin U_1 = \sin \sigma_1 \cos A_0, \quad \sin U_2 = \sin(\sigma_1 + \sigma) \cos A_0.$$

Перемножив соответственно левые и правые части, удвоив эти произведения и в правой части заменив произведение синусов сторон разностью косинусов от суммы ($2\sigma_m = 2\sigma_1 + \sigma$) и разности этих сторон (σ), получим выражение (4.18).

Решение задач по локсодромии. В специальных случаях, например, в навигационной практике, прямую и обратную задачи решают не по геодезической линии, а по локсодромии.

Из элементарного треугольника на поверхности эллипсоида вращения (рис. 4.5) имеем:



$$MdB = \cos A ds,$$

$$rdL = \sin A ds,$$

$$\frac{rdL}{MdB} = \text{tg } A.$$

Рис. 4.5. Элементарный треугольник на эллипсоиде

В случае локсодромии азимут сохраняет постоянное значение. Интегрируя эти выражения по линии S от точки Q_1 до Q_2 , получаем [2, с.151]:

$$X_2 - X_1 = S \cos A,$$

$$r_m(L_2 - L_1) = S \sin A,$$

$$L_2 - L_1 = \text{tg } A(q_2 - q_1).$$

В формулах X, r_m, q – соответственно длина дуги по меридиану от экватора до заданной точки, некий промежуточный радиус параллели между геодезическими координатами точек Q_1 и Q_2 , изометрическая широта, вычисляемая от экватора до рассматриваемой параллели. Как уже отмечалось (Лекция 3),

$$q = \int_0^B \frac{M}{r} dB, \quad q = \ln \left\{ \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \sqrt{\frac{(1 - e \sin B)^e}{(1 + e \sin B)^e}} \right\}.$$

Алгоритм решения прямой задачи по локсодромии. Исходными величинами являются широта B_1 , долгота L_1 исходной точки, прямой азимут A_1 и длина локсодромии S до определяемой точки. Определяемыми являются долгота L_2 , широта B_2 искомой точки и обратный азимут A_2 . Задача решается в нижеследующей последовательности [7].

1. По широте B_1 вычисляется длина дуги меридиана X_1 .
2. Определяется длина дуги меридиана от экватора до параллели искомой точки

$$X_2 = X_1 + S \cos A_1.$$

3. По дуге меридиана X_2 вычисляется широта B_2 (Лекция 3).
4. По геодезическим широтам B_1 и B_2 вычисляются изометрические широты q_1 и q_2 .
5. Определяется долгота искомого пункта

$$L_2 = L_1 + (q_2 - q_1) \operatorname{tg} A_1.$$

6. Вычисляется обратный азимут A_2 . Он отличается от прямого азимута на 180° .

Алгоритм решения обратной задачи по локсодромии. Исходными величинами являются широты B_1, B_2 и долготы L_1, L_2 двух пунктов. Необходимо найти длину локсодромии S между пунктами, а также прямой A_1 и обратный A_2 азимуты. Алгоритм решения задачи следующий.

1. Вычисляются изометрические широты q_1 и q_2 , разность долгот и находятся азимуты.

$$\operatorname{tg} A_1 = (L_2 - L_1) / (q_2 - q_1), \quad A_2 = A_1 + \pi.$$

2. По широтам B_1, B_2 вычисляются длины дуг меридианов X_1 и X_2 .
3. Определяется длина S локсодромии. При этом, если $B_1 \neq B_2$, тогда

$$S = (X_2 - X_1) / \cos A_1,$$

иначе

$$S = N \cos B_1 (L_2 - L_1).$$

На рис. 4.6 приведены построения в косо́й азимутальной равновеликой проекции ортодромии и локсодромии. Ортодромия почти прямой линией пересекает Атлантический океан, Южную Америку и заканчивается в Тихом океане. Локсодромия в данном случае очень близка к ортодромии. Над Атлантическим океаном она проходит несколько южнее ортодромии, а над Тихим океаном – несколько севернее ортодромии. Иными словами, ортодромия располагается ближе к полюсам, а локсодромия – ближе к экватору. Расстояние по локсодромии на эллипсоиде Красовского оказалось равным 19 890 605,69 м – длиннее геодезической линии всего на 390,6 км или на 2%.

Следует заметить, что на меридианах и на экваторе линии кратчайшего расстояния и постоянного азимута совпадают. Различие между длинами отрезков ортодромии и локсодромии проявляется сильнее всего, если отрезок расположен вдоль параллели. При длинах отрезков до 8200 км на 30° параллели и до 1900 км на 70° параллели эти различия достигают 3% [1].



Рис. 4.6. Изображения ортодромии и локсодромии

Источники информации по Лекции 4

1. Гинзбург Г. А., Салманова Т. Д. Тр. ЦНИИГАиК. М.: Недра. 1964. Вып. 160. 340 с.
2. Каврайский В.В. Математическая картография. – Ленинград-Москва. Госкартогост. 1934. -275 с.
3. Комаровский Ю. А. Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении [Электронный ресурс], (Дата обращения 24.05.2014). URL: <http://sveos.msun.ru/edu/lit/kaf/tss/ell.pdf>
4. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1979. –260 с.
5. Оньков И.В. Решение обратной геодезической задачи на большие расстояния методом простой итерации. Геопрофи. 2013. №6. С. 52-54.
6. Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт. Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. -132 с.
7. Серапинас Б. Б. Практикум по геодезическим основам карт. Учебное пособие. М.: Географический факультет МГУ. 2008. -146 с.
8. Тищенко А. П. Геодезические основы карт. Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. -174 с.
9. Яковлев Н. В., Беспалов Н. А., Глумов В. П. и др. Практикум по высшей геодезии. Учебное пособие для вузов. М.: Недра, 1982. 368 с.
10. Vincenty T. Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations // Survey review. Vol. XXIII, N 176, p. 88–93.

Контрольные вопросы

1. Способы решения главных геодезических задач. Представление о точности их решений.
2. Решения прямой и обратной задач на сфере.
3. Решение прямой задачи методом численного интегрирования дифференциальных уравнений геодезической линии. Решение обратной задачи на любые расстояния методом простой итерации.
4. Решение главных геодезических задач способом Бесселя. Условия выбора сферы. Дифференциальные уравнения взаимосвязи линейных и угловых элементов на эллипсоиде и на сфере. Понятие о способе Т. Vincenty.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЛОСКИХ КООРДИНАТ

Выбор и применение плоских координат. Для мелкомасштабного картографирования наиболее удобна общая для Земли система координат, в которой положения точек определяются геодезическими широтами и долготами. Хранение этих широт и долгот в базах данных геоинформационных систем позволяет отображать географическую ситуацию в разных, наиболее подходящих для конкретных задач, картографических проекциях.

Для получения топографических карт, крупномасштабных тематических карт и создания координатной среды в ГИС более удобны плоские прямоугольные координаты. Они позволяют пользоваться простыми математическими формулами, что облегчает обработку измерений. То обстоятельство, что координаты опорных пунктов даются в плоскости некоторой проекции, позволяет материалы топографических съемок укладывать непосредственно в рамки геодезической сети без введения каких-либо поправок — снимаемая местность уже в процессе съемки оказывается изображенной в заданной картографической проекции.

Важен выбор проекции, наиболее подходящей для введения плоской системы координат. В любой проекции длины искажены, следствием чего масштаб в разных местах карты различен. В общем случае в окрестности каждой точки масштаб различен даже по разным направлениям. Простота учета искажений длин и углов выдвигает основное требование — в окрестности каждой точки масштаб по всем направлениям должен быть постоянным. Таким условиям соответствуют только равноугольные проекции. Кроме того, необходимо, чтобы искажения длин, по крайней мере, в рамках листа топографической карты были в границах графической точности, а главное, чтобы эти искажения можно было легко и просто учитывать в пределах значительных территорий. Малость искажений и простота их учета приводят к необходимости отображать земную поверхность по зонам ограниченных размеров. Желательно, чтобы при минимальном числе зон их размеры были максимальны, и все зоны единообразны. В условиях интенсивного обмена геоинформацией и взаимосвязанности геодезических и картографических данных важно, чтобы плоскую систему координат легко было распространить на значительные территории — на весь мир. Итак, основными требованиями к проекции будут:

Равноугольность.

Малые искажения в пределах листа топографической карты.

Простота учета искажений в границах зон значительных размеров.

Минимальное количество зон.

Единообразии зон.

Легкость распространения системы плоских координат на весь мир.

Проекции, при помощи которых вводят плоские координаты, называются *геодезическими*. Число таких равноугольных проекций невелико — азимутальная проекция Русселя, коническая проекция Ламберта и поперечно-цилиндрические проекции Гаусса-Крюгера и *UTM* (*Universal Transverse Mercator*). Число зон в азимутальных и конических проекциях сравнительно велико и они не обладают единообразием. Наиболее полно перечисленным требованиям удовлетворяют получившие глобальное распространение проекции Гаусса-Крюгера и *UTM*. Они объединяют в себе все положительные качества: небольшое число зон; каждая зона охватывает значительную территорию, ограниченную двумя меридианами с разностью долгот в 3^0 или 6^0 ; умеренное и легко учитываемое изменение масштабов в пределах зон; единообразие всех зон; универсальность и глобальность координатных систем.

Изометрические координаты. Геодезические проекции должны быть равноугольными. Это основное требование. В 1822 г. Копенгагенская Академия наук объявила конкурс на решение задачи общей теории равноугольных проекций. В 1825 г. К.Ф. Гаусс представил сочинение об отображении одной поверхности на другую с сохранением подобия в бесконечно малых частях. Если P, R, p, r – функции геодезических координат L, B , то решением будет аналитическая (дифференцируемая) функция комплексной переменной:

$$P + iR = f(p + ir), \quad i = \sqrt{-1}.$$



Карл Фридрих Гаусс
(1777-1855)

Равноугольные проекции устанавливаются при помощи так называемых *изометрических координат* эллипсоида и аналитических функций комплексной переменной:

$$x + iy = f(q + il),$$

где x, y - абсцисса и ордината в прямоугольной системе координат на плоскости, q, l - изометрические координаты на эллипсоиде. Для эллипсоида вращения они будут определены ниже. Аналитическая функция $f(q + il)$ дифференцируема в комплексной области и удовлетворяет уравнениям Коши-Римана в частных производных:

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial l}; \quad \frac{\partial x}{\partial l} = -\frac{\partial y}{\partial q}.$$

Точка с координатами q, l на эллипсоиде, для которой производная данной функции $f' \neq 0$, отображается на плоскости точкой с координатами x, y . При этом в бесконечно малой области проекции масштаб изображения по всем направлениям один и тот же, а фигуры, преобразуясь в себе подобные, сохраняют форму. Такую проекцию называют равноугольной (конформной).

Определим координаты q и l . Рассмотрим бесконечно малые треугольники на плоскости и на эллипсоиде (рис.5.1).

Для длины отрезка на плоскости имеем:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2.$$

На эллипсоиде катетами элементарного треугольника являются бесконечно малые дуги меридиана MdB и параллели rdL . Для длины элементарного отрезка имеем:

$$ds^2 = (MdB)^2 + (rdl)^2.$$

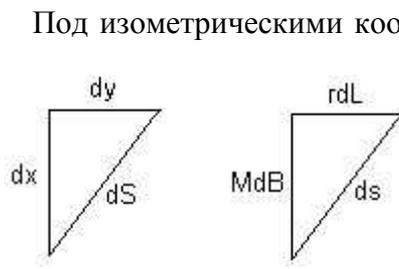


Рис. 5.1. Элементарные треугольники на плоскости и на эллипсоиде вращения

Под изометрическими координатами понимают такие, когда равным приращениям координат соответствуют равные приращения вдоль координатных линий. При равенстве дифференциалов $dx = dy$ на плоскости образуется сетка квадратов. На эллипсоиде равенство дифференциалов $dB = dL$ ведет к образованию элементарных трапеций, стороны в которых не равны, так как радиусы $M \neq r$. Таким образом, геодезические координаты на эллипсоиде *не обладают изометрией* - одинаковостью масштабов по любым направлениям. Это обстоятельство затрудняет использование геодезических координат при введении равноугольных проекций.

Преобразуем выражение для элементарного отрезка на эллипсоиде так, чтобы при равенстве дифференциалов аргументов элементарные координатные дуги на эллипсоиде между собой также были равны:

$$ds = r^2(dq^2 + dL^2),$$

где дифференциал

$$dq = \frac{M}{r} dB. \tag{5.1}$$

Интегрируя, получаем:

$$q = \int_0^B \frac{M}{r} dB, \quad l = \int_{L_0}^L dL = L - L_0. \tag{5.2}$$

Величину q называют *изометрической широтой*. Изометрическими координатами эллипсоида вращения являются изометрическая широта и геодезическая долгота, отсчитываемая в радианах от произвольного меридиана долготы L_0 . Изометрическая система координат характерна тем, что при равенстве дифференциалов $dq = dl$ поверхность эллипсоида разбивается на бесконечно малые квадраты со сторонами rdl . Эти квадраты, конечно, не равны друг другу, поскольку радиус r является функцией широты.

После интегрирования формулы для изометрической широты q и для обратного перехода к широте B принимают вид:

$$q = \ln \sqrt{\left(\frac{1 + \sin B}{1 - \sin B}\right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B}\right)^e}, \tag{5.3}$$

$$q = \ln \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B}\right)^e} \right\} \tag{5.3a}$$

$$B = 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\left(\frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B}\right)^e} \exp q \right] - \frac{\pi}{2}, \tag{5.4}$$

где e - первый эксцентриситет эллипсоида вращения. Широта B вычисляется последовательными приближениями; итерации сходятся быстро, так как эксцентриситет e малая величина.

Изометрические координаты в равноугольных проекциях. Функции комплексной переменной от изометрических координат осуществляют равноугольное отображение. Например, *линейная* функция

$$x + iy = C(q + il)$$

представляет собой отображение поверхности эллипсоида на цилиндр радиуса C . После разделения действительной и мнимой частей, получим уравнения нормальной равноугольной цилиндрической проекции Меркатора:

$$x = Cq; \quad y = C(L - L_0).$$

В случае *показательной* функции имеем:

$$x + iy = Ce^{-\alpha[q - i(\pi - l)]} = Ce^{-\alpha q} (-\cos \alpha(L - L_0) + i \sin \alpha(L - L_0)).$$

Отсюда:

$$\rho = Ce^{-\alpha q}, \quad x = -\rho \cos \alpha(L - L_0), \quad y = \rho \sin \alpha(L - L_0).$$

Это уравнения нормальной равноугольной конической проекции, в которой параллели изображаются концентрическими окружностями радиусом ρ , а меридианы – пучком прямых;

угол между меридианами пропорционален разности их долгот. Приняв ($\alpha = 1$), получим уравнения нормальной равноугольной азимутальной проекции.

Полагая разность долгот l малой величиной, разложим функцию в ряд Тейлора:

$$x + iy = f(q + il) = f(q) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(q)}{k! dq^k} (il)^k. \quad (5.5)$$

В этом выражении мнимая единица принимает значения:

$$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, \dots$$

Ряд убывающий, поэтому при некоторой конечной величине n его можно оборвать. Это уравнения некой равноугольной проекции, отображающей поверхность эллипсоида зонами небольшой ширины по долготе. Разделяя в (5.5) действительные и мнимые части, получаем уравнения для плоских прямоугольных координат в некоторой равноугольной проекции:

$$x = f(q) - \frac{d^2 f(q)}{2dq^2} l^2 + \frac{d^4 f(q)}{24dq^4} l^4 - \frac{d^6 f(q)}{720dq^6} l^6 + \dots$$

$$y = \frac{df(q)}{dq} l - \frac{d^3 f(q)}{6dq^3} l^3 + \frac{d^5 f(q)}{120dq^5} l^5 + \dots$$

Справка о координатах в проекции Гаусса. Проекция Гаусса была введена выдающимся немецким ученым Карлом Фридрихом Гауссом (1777-1855 гг.) для обработки ганноверской триангуляции 1821-1825 гг. В 1912 г. математически ее развил немецкий геодезист Л. Крюгер, и она стала называться проекцией Гаусса-Крюгера. Проекция равноугольная, сохраняет длины на среднем меридиане и симметрична относительно него.

В РФ проекция Гаусса-Крюгера используется для построения *государственной* системы координат и для создания *местных* систем координат.

В государственной системе координат поверхность земного эллипсоида делится на 3-х или 6-ти градусные зоны, ограниченные меридианами от экватора до 84° северной широты. Зоны нумеруют с запада на восток, начиная с нулевого меридиана. В каждой зоне строится своя прямоугольная система координат. Ось абсцисс X ориентирована на север по среднему меридиану, который называют *осевым* или *средним*. Ось ординат Y служит прямая линия, перпендикулярная к осевому меридиану, являющаяся изображением экватора. Такой выбор координатных осей позволяет наряду с прямоугольными координатами использовать полярную систему координат, одновременно сохраняя у людей привычку ориентироваться относительно направления на север и применять весь математический аппарат, где обычно ось X ориентирована влево (на восток), а ось Y — вверх (на север).

В проекции Гаусса-Крюгера осевой меридиан изображается без искажений (масштаб длин $m_0 = 1$). Наибольшие искажения на краях зоны. На краях зоны в средних широтах частный масштаб длин $m \approx 1,0009$. Л. Крюгер предлагал умножить координаты x, y на некоторый множитель $m_0 < 1$ для того, чтобы искажения длин на краях зоны уменьшить вполтину, но это его предложение в данной проекции не реализовано.

В 1919 г. Г. Баумгарт предложил в качестве осевых (средних) меридианов трехградусных зон использовать меридианы с восточными долготами $3^0, 6^0, 9^0, 12^0, \dots$, номера зон указывать перед ординатами, а, чтобы все ординаты были положительными, прибавить к ним 500 000 м [12, с. 5]. Эти предложения были приняты многими государствами.

Первым государством, распространившим координаты Гаусса-Крюгера, была Австрия [12, 4 с.]. Там их применяют с 1917 г. В 1928 г. эта проекция введена в СССР. В начале ее использовали только для топографических карт масштабов крупнее 1:500 000. С 1939 г. ее стали применять и для карт масштаба 1:500 000. В 80-х годах она была распространена на

весь масштабный ряд топографических карт, включая все топографические планы и карты миллионного масштаба.

В России применяют шестиградусные зоны с осевыми меридианами $3^{\circ}, 9^{\circ}, 15^{\circ}$ и т.д. Предусмотрены перекрытия смежных зон на востоке и западе; при этом до широты 28° перекрытия составляют 1° , в широтах $28^{\circ}-76^{\circ}$ — 2° и в широтах более 76° — 3° [5]. Таким образом, с 1977 г. на всей территории СССР установлена не 6-и, а 10 градусная зона; на стыке 6-и градусных зон введена полоса перекрытия в 2° к востоку и 2° к западу [9, с. 250]. На всех листах карт, расположенных в полосе перекрытия, за рамками карты указывают выходы километровой сетки соседней зоны.

Трехградусные зоны применяют при построении топографических планов, при этом осевые меридианы совпадают с осевыми и граничными меридианами шестиградусных зон.

При съемках городов и территорий под строительство крупных инженерных сооружений и в других целях применяются и местные системы координат [3, с. 57, 71].

Обобщением проекции Гаусса – Крюгера является проекция *UTM*. Проекция *UTM* разработана в 1936 г. Международным союзом геодезии и геофизики. В 1947 г. она принята Вооруженными силами США. Применяется в НАТО. В настоящее время с теми или иными модификациями, касающимися долгот осевых меридианов, ширины зон и координат начальных точек, используется многими национальными и международными картографическими организациями всего мира.

В *UTM* на осевом меридиане частный масштаб длин $m = 0,9996$. В проекции образуются две параллельные среднему меридиану линии нулевых искажений, расположенные на расстоянии около 180 км по обе от него стороны. На границе зон в южных широтах частный масштаб длин приблизительно равен 1,0003.

Применяются шестиградусные зоны. Зоны простираются в полосе от параллели 80° ю. ш. до параллели 84° с. ш. В полярных районах проекцию *UTM* заменяет нормальная азимутальная стереографическая проекция *UPS* (*Universal Polar Stereographic projection*).

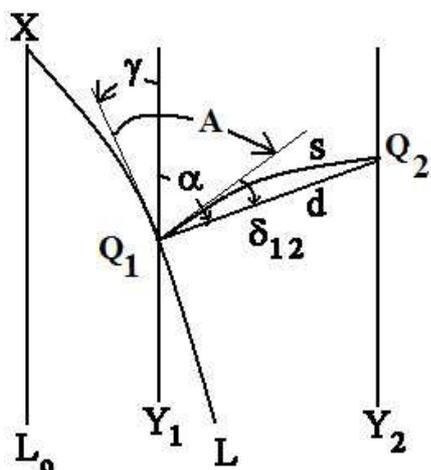


Рис. 5.1. Точки Q_1, Q_2 эллипсоида отображены на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера

Зоны нумеруются, начиная от меридиана перемены дат. Поэтому 1-я зона ограничена меридианами с западными долготами 180° и 174° , а 60-я зона — меридианами с восточными долготами 174° и 180° . В *UTM* абсциссе x координат Гаусса-Крюгера соответствует северное положение y , а ординате y — восточное положение. Средний меридиан зоны имеет восточное положение 500 000 м. Перед восточным положением пишется номер зоны. Северное положение точки на экваторе для Северного полушария равно 0, а для Южного полушария — 10 000 000 м.

Подобная проекция шириной зон в 6° под названием Гаусса-Боага (*Gauss-Boaga*) применяется в Италии. В ней частный масштаб длин, как и в проекции *UTM*, $m_0 = 0,9996$.

Необходимые формулы. Точки Q_1, Q_2 эллипсоида отображены на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера (рис. 5.2). Необходимы формулы для вычисления координат x, y этих точек по их широтам B и долготам L , и формулы для обратного перехода от x, y к B, L . Геодезическая линия s эллипсоида на плоскости изображается кривой S . Обычно на плоскости пользуются хордой d . Для перехода от длины s на эллипсоиде к длине хорды d на плоскости надо знать масштаб m изо-

бражения геодезической линии и поправку к её длине. В точке плоскости Q_1 угол γ между изображением меридиана и линией, параллельной оси абсцисс, называют *гауссовым сближением меридианов*. Малый угол δ — *поправка за кривизну изображения геодезической линии* на плоскости. Следовательно, еще нужны формулы для определений углов γ и δ .

Для перехода от азимута A геодезической линии к дирекционному углу α хорды d можно записать следующее равенство (рис. 5.1):

$$\alpha = A - \gamma + \delta_{12}$$

Имея на плоскости координаты x_1, y_1 одной точки, координаты второй точки x_2, y_2 вычисляют по формулам (прямая задача):

$$x_2 = x_1 + d \cos \alpha, \quad y_2 = y_1 + d \sin \alpha.$$

Имея на плоскости координаты двух точек x_1, y_1 и x_2, y_2 , решают обратную задачу:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

При наличии всех указанных формул обработка геодезических измерений в границах заданной зоны выполняется следующим образом:

Геодезические координаты исходной точки, длину исходной линии и ее геодезический азимут пересчитывают в плоские прямоугольные координаты, в длину прямой линии и дирекционный угол соответственно. Если исходными являются два пункта, то их геодезические координаты пересчитывают в плоские прямоугольные координаты. По плоским координатам, решая обратную задачу, вычисляют на плоскости длину прямой между исходными точками и ее дирекционный угол. В целях контроля выполняют обратный переход от прямоугольных к геодезическим координатам.

В измеренные длины вводят поправки из-за изменения их масштаба, а в направления — поправки из-за замены криволинейного изображения геодезической линии хордой.

Дальнейшую обработку выполняют по математическим формулам для плоскости.

Вычисление прямоугольных координат Гаусса-Крюгера и UTM. Рассмотрим подробнее вычисления прямоугольных геодезических координат в равноугольной поперечно-цилиндрической проекции. В проекции Гаусса-Крюгера ставится условие, чтобы длина X дуги меридиана эллипсоида, принимаемого на плоскости проекции в качестве осевого, изображалась без искажений. Следовательно:

$$l = 0, \quad y = 0, \quad x = X = f(q), \quad df(q) = dX$$

Для первых двух производных ряда Тейлора находим:

$$\frac{df(q)}{dq} = \frac{dX}{dq} = \frac{dX}{dB} \frac{dB}{dq};$$

$$\frac{d^2 f(q)}{dq^2} = \frac{d^2 X}{dq^2} = \frac{d}{dB} \left(\frac{dX}{dq} \right) \frac{dB}{dq}.$$

Аналогично составляются формулы и для производных высших порядков. Учитывая формулы дифференциалов для дуги меридиана и изометрической широты, имеем:

$$dX = M dB, \quad dB = \frac{r}{M} dq,$$

Следовательно,

$$\frac{dX}{dB} = M, \quad \frac{dB}{dq} = \frac{r}{M} = \frac{N \cos B}{M}.$$

Ранее (формула (3.9), Лекция 3) установили:

$$\frac{dr}{dB} = -M \sin B.$$

Это имеет место в поперечно-цилиндрической проекции Гаусса-Крюгера, где масштаб на осевом меридиане равен $m_o = 1$.

Если на краю зоны наибольший масштаб равен m_{\max} , то, чтобы максимальные искажения длин уменьшить вполосину, масштаб на осевом меридиане следует выбрать равным:

$$m_o = \frac{2}{1 + m_{\max}}.$$

Когда на краю зоны $m_{\max} = 1,0008$, то $m_o = 0,9996$. Именно такой масштаб использован в проекции *UTM*. Отсюда видно, что проекция *UTM* является обобщением проекции Гаусса – Крюгера. Между координатами Гаусса-Крюгера и *UTM* должна быть связь:

$$(x + iy)_{UTM} = m_o (x + iy)_{\text{Гаусса-Крюгера}}. \quad (5.6)$$

Получаем для случая $m_o \neq 1$:

$$\frac{dX}{dq} = m_o r; \quad \frac{d^2 X}{dq^2} = -m_o r \sin B.$$

Воспользуемся обозначениями:

$$t = \operatorname{tg} B; \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B; \quad l = L - L_o \quad (\text{радианы}).$$

С учётом сказанного, для прямоугольных координат Гаусса-Крюгера и *UTM* получаем:

$$x = m_o \left(\begin{aligned} & X + \frac{1}{2} N \sin B \cos B l^2 + \frac{1}{24} N \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) l^4 + \\ & + \frac{1}{720} N \sin B \cos^5 B (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2) l^6 + \dots \end{aligned} \right);$$

$$y = m_o \left(\begin{aligned} & N \cos B l + \frac{1}{6} N \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2) l^3 + \\ & + \frac{1}{120} N \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) l^5 + \dots \end{aligned} \right).$$

По этим формулам ординаты получают относительно осевого меридиана зоны. Поэтому к вычисленным значениям y следует прибавить 500 000 м и спереди приписать номер зоны.

Если разности долгот $l \leq 4^0$, точность вычисления координат не хуже 1 мм.

Вычисление геодезических координат по координатам на плоскости. Воспользуемся зависимостью между изометрическими координатами q, l и прямоугольными x, y :

$$q + il = F(x + iy), \quad l = L - L_o.$$

На эллипсоиде (рис. 5.2) задана геодезическими координатами точка $Q(B, L)$. На плоскости её координаты x, y . Абсцисса x на осевом меридиане равна дуге меридиана X , простирающейся от экватора до некоторой другой параллели B_x . Геодезическим широтам B, B_x соответствуют изометрические широты q, q_x . На осевом меридиане имеем

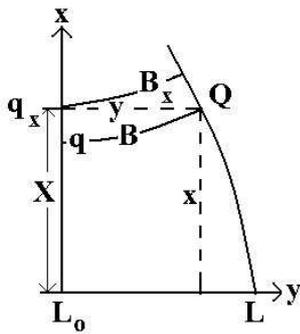


Рис. 5.2. Вычисление B, L по x, y

$$y = 0, l = 0, x = X, q = F(X) = q_x$$

В поперечно цилиндрических проекциях отображение выполняется по сравнительно узким зонам. Ордината y – малая величина. Исходная функция разлагается в ряд Тейлора; все переменные ряда вычисляются по широте B_x :

$$q + iy = f(x + iy) = q_x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k q}{dX^k} \right)_x (iy)^k.$$

Отделяя действительные и мнимые части и ограничиваясь членами шестого порядка, получаем:

$$q = q_x - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 q}{dX^2} \right)_x l^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{d^4 q}{dX^4} \right)_x l^4 - \frac{1}{720} \left(\frac{d^6 q}{dX^6} \right)_x l^6 + \dots$$

$$l = \left(\frac{dq}{dX} \right)_x l - \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 q}{dX^3} \right)_x l^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{d^5 q}{dX^5} \right)_x l^5 + \dots$$

Воспользуемся известными уравнениями:

$$dB = \frac{1}{M} dX, \quad dq = \frac{M}{r} dB, \quad \frac{dr}{dB} = -M \sin B.$$

Для производных имеем:

$$\frac{dB}{dX} = \frac{1}{M}, \quad \frac{dq}{dB} = \frac{M}{r} = \frac{M}{N \cos B}.$$

Отсюда находим необходимые производные:

$$\frac{dq}{dX} = \frac{dq}{dB} \frac{dB}{dX}, \quad \frac{d^2 q}{dX^2} = \frac{d}{dB} \left(\frac{dq}{dX} \right) \frac{dB}{dX}, \quad \dots$$

Получаем:

$$\frac{dq}{dX} = \frac{1}{N \cos B},$$

$$\frac{d^2 q}{dX^2} = \frac{d}{dB} \left(\frac{1}{N \cos B} \right) \frac{1}{M} = \frac{\operatorname{tg} B}{N^2 \cos B}.$$

Аналогично вычисляются и остальные производные. Все эти производные должны быть вычислены по широте B_x , соответствующей длине дуги меридиана $X = x$.

Далее необходимо от изометрических широт перейти к геодезическим широтам. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции:

$$B = f(q) = f(q_x + (q - q_x)) = B_x + \left(\frac{dB}{dq} \right)_x (q - q_x) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 B}{dq^2} \right)_x (q - q_x)^2 + \dots$$

В итоге получаем формулы для вычисления геодезических широт и разности долгот:

$$B = B_x - \frac{t^2}{2M_x N_x} y^2 \left[1 - \frac{y^2}{12N_x^2} (5 + 3t_x^2 + \eta_x^2 - 9\eta_x^2 t_x^2) + \frac{y^4}{360N_x^4} (61 + 90t_x^2 + 45t_x^4) \right];$$

$$l = \frac{y}{N_x \cos B_x} \left[1 - \frac{y^2}{6N_x^2} (1 + 2t_x^2 + \eta_x^2) + \frac{y^4}{120N_x^4} (5 + 28t_x^2 + 24t_x^4 + 6\eta_x^2 + 8\eta_x^2 t_x^2) \right],$$

$$t = \operatorname{tg} B; \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B; \quad L = L_o + l.$$

Пользуются формулами следующим образом: в ординате y отбрасывают номер зоны и вычитают 500 000 м, абсциссу x рассматривают как дугу меридиана и по ней вычисляют широту B_x . По этой широте вычисляют все остальные величины. Результаты будут в радианах. Точность вычисления геодезических координат в пределах шестиградусной зоны $\sim 0,0001''$.

В случае координат *UTM*, как следует из уравнения (5.6), их необходимо изменить так, чтобы началом координат стала точка пересечения осевого меридиана с экватором, а затем их разделить на масштаб m_o .

Гауссово сближение меридианов. На рис. 5.3 в плоскости проекции Гаусса-Крюгера изображены элементарные отрезки дуги меридиана и параллели, пересекающиеся в некоторой точке c . Гауссово сближение, угол γ , определим из элементарного треугольника cde . Имеем:

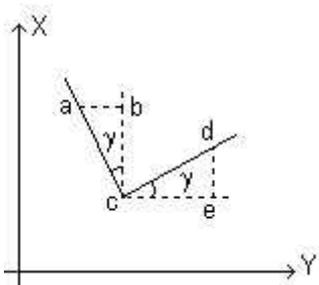


Рис. 5.3. Гауссово сближение меридианов

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial x}{\partial l} : \frac{\partial y}{\partial l}.$$

Для частных производных в первом приближении получаем:

$$\frac{\partial x}{\partial l} = l N \sin B \cos B; \quad \frac{\partial y}{\partial l} = N \cos B.$$

Подставляя их в формулы выше, находим:

$$\gamma = (L - L_o) \sin B.$$

Получили приближенную формулу. Ее применяют в топографии для вычисления γ с точностью до 0,1-1'. Из формулы видно, что сближение меридианов меняется от 0 на экваторе до значений $l = L - L_o$ у полюсов, где на краю шестиградусных зон $\gamma \Rightarrow \pm 3^0$. Знак γ при $B > 0$ совпадает со знаком разности долгот l : к востоку от осевого меридиана он положителен, а к западу — отрицателен.

Сближение меридианов γ не зависит от масштаба осевого меридиана m_o .

Более точные формулы для гауссова сближения меридианов в функции l или y имеют вид:

$$\gamma = l \sin B + \frac{l^3}{3} \sin B \cos^2 B (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{l^5}{15} \sin B \cos^4 B (2 - \operatorname{tg}^2 B),$$

$$\gamma = \frac{y}{N_o} \operatorname{tg} B_o \left\{ 1 - \frac{y^2}{3N_o^2} (1 + \operatorname{tg}^2 B_o - \eta_o^2 - 2\eta_o^4) + \frac{y^4}{N_o^4} \frac{(2 + 5 \operatorname{tg}^2 B_o + 3 \operatorname{tg}^4 B_o)}{15} \right\}.$$

В работе [1] предлагается формула другого вида:

$$\gamma = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin B \sin 2l}{1 - (V \cos B \sin l)^2} \right),$$

$$V = \sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}.$$

Поправка за кривизну изображения геодезической линии. Эта поправка возникает вследствие того, что на плоскости в равноугольной проекции геодезическая линия отображается кривой, которую для удобства графических построений и вычислений заменяют хордой.

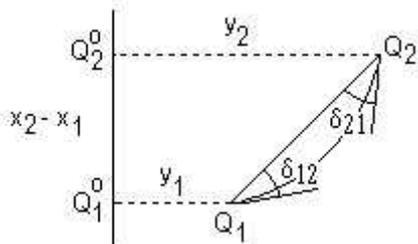


Рис. 5.4. Поправка за кривизну изображения геодезической линии

Дадим приближенный вывод этой поправки. На рис. 5.4 на плоскости между точками $Q_1(x_1, y_1)$ и $Q_2(x_2, y_2)$ показаны изображение геодезической линии и ее хорда. Искомыми поправками являются уголки δ между хордой и кривой. Для их определения точки Q_1 и Q_2 спроектируем на осевой меридиан. Получим точки Q_1^0 и Q_2^0 . Заменим участок эллипсоида сферой радиуса R . На сфере сумма углов в криволинейной фигуре $Q_1^0 Q_2^0 Q_2 Q_1$ равна $360^\circ + \epsilon$, где ϵ - сферический избыток.

Сферический избыток определяется отношением площади P данной фигуры к квадрату радиуса сферы R :

$$\epsilon = \frac{P}{R^2}.$$

В соответствующей фигуре на плоскости сумма углов равна $360^\circ + \delta_{12} + \delta_{21}$. Поэтому

$$\epsilon = \delta_{12} + \delta_{21}.$$

Полагая $\delta_{12} \approx \delta_{21}$, не учитывая знаки поправок, приравнивая площадь сферической фигуры P площади плоской трапеции $Q_1^0 Q_2^0 Q_2 Q_1$ и умножая на число угловых секунд в радиане ρ'' , получаем:

$$\delta_{12}'' \approx \delta_{21}'' = \frac{\epsilon''}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{4R^2} \rho''.$$

Приближенно, учитывая знак, для поправки δ_{12} получают:

$$\delta_{12}'' = -0,00253 y_m \Delta x,$$

где средняя ордината y_m и разность абсцисс Δx берутся в километрах, а поправку δ_{12} получают в угловых секундах. Например, при $y_m = 300$ км, $\Delta x = 10$ км, получаем $\delta_{12} = -7,6''$. В топографических работах поправками такой величины пренебрегают. Однако, их учитывают при обработке измерений в геодезических сетях.

В высокоточных геодезических работах применяют более строгие формулы.

Масштаб изображения и поправка в длину линии. Масштаб длин. Так как в равноугольной проекции частный масштаб длин не зависит от направления, то рассмотрим отношение соответственных бесконечно малых отрезков параллели на плоскости и на эллипсоиде:

$$m = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{r dl} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2}}{N \cos B}.$$

После преобразований получают:

$$m = m_0 \left[1 + \cos^2 B (1 + \eta^2) \frac{l^2}{2} + \cos^4 B (5 - 4tg^2 B) \frac{l^4}{24} \right].$$

При $l = 0$ и $m_0 = 1$, т.е. на осевом меридиане в проекции Гаусса-Крюгера, масштаб во всех точках равен единице. С удалением от осевого меридиана к востоку или к западу масштаб изображения быстро увеличивается. При этом на плоскости линии длиннее, чем на эллипсоиде.

Заменяя разности долгот l ординатами y , отсчитываемыми от осевого меридиана, получают (R — средний радиус кривизны эллипсоида):

$$m = m_0 \left(1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} \right).$$

В работе [1] для проекции Гаусса-Крюгера предложена формула следующего вида:

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - (V \cos B \sin l)^2}}.$$

В табл. 5.1 приведены значения масштабов m на разных удалениях от осевого меридиана. В южных широтах России в шестиградусной зоне разность масштабов длин на осевом и граничном меридианах составляет 0,09 %.

Поправка в длину линии. Исследования показывают, что для линий короче 60 км разность длин изображений геодезической линии на плоскости и ее хорды не превышает одного миллиметра. Поэтому можно полагать, что хорда и изображение геодезической линии по длине одинаковы. Для длин хорды d и геодезической линии s на эллипсоиде можно записать:

$$d = \int_0^s m ds.$$

Интеграл легко вычислить по формуле Симпсона, разделив линию на две части. Функцию под интегралом надлежит вычислить в трех точках — в начальной, средней и конечной. Все величины, относящиеся к средней точке, помечены индексом m . Получаем:

$$d = \frac{s}{6} (m_1 + 4m_m + m_2),$$

Радиус R достаточно вычислять только по данным для средней точки, а в членах с четвертой степенью полагать $y_1^4 = y_2^4 = y_m^4$. Эти допущения при длинах хорд до 60 км заметных ошибок не вызывают. Окончательно для проекции Гаусса-Крюгера получают:

$$d = s + \left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} \right) s.$$

В формуле используются ординаты, отсчитываемые от осевого меридиана. Второй член в формуле представляет собой *поправку*, которую надо ввести в длину геодезической линии на эллипсоиде, чтобы получить ее длину на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера.

Приближённая формула для поправки имеет следующий вид:

$$\Delta s = 0,123 y_m^2 s,$$

в которой средняя ордината y_m выражена в сотнях километров, длина линии s — в километрах, поправка Δs — в метрах. При $y_m = 100$ км, $s = 1$ км, поправка $\Delta s = 0,123$ м.

Масштаб площади. Для равноугольных проекций он вычисляется по формуле:

$$\rho = m^2.$$

Таблица 5.1

Масштабы длин и площадей в проекции Гаусса-Крюгера

Удаления от осевого меридиана по долготе	Масштаб линий m	Масштаб площадей p
0°00'	1,00000	1,00000
0°30'	1,00002	1,00004
1°00'	1,00010	1,00020
1°30'	1,00023	1,00046
2°00'	1,00039	1,00078
2°30'	1,00063	1,00126
3°00'	1,00090	1,00180

В таблице 5.1 приведены значения масштабов p и m на разных удалениях от осевого меридиана для южных широт России. Можно составить себе представление, как они изменяются в пределах листов топографических карт. Так, на листах сотысячной карты наибольшие различия в масштабах длин составляют 0,027 %, а площадей - 0,054 %. На листе карты масштаба 1:1 000 000 эти различия соответственно равны 0,09 % и 0,18 %. Предельная графическая точность карты равна 0,2 мм. Если погрешность измерения на карте стороны квадрата в 100 мм равна 0,1 мм, то это соответствует относительным погрешностям определения длин 0,1 % и площади квадрата — 0,2 %. Таким образом, при выполнении картометрических работ на топографических картах всех масштабов в пределах одной шестиградусной зоны искажениями длин и площадей можно пренебрегать.

Преобразования координат Гаусса-Крюгера. Геоинформационное поле может находиться в разных системах координат. Возникает необходимость установления взаимосвязи между координатными системами. Могут иметь место два случая: 1) две координатные системы даны в одной и той же проекции Гаусса-Крюгера, но отнесены к разным смежным зонам; 2) одна из систем определена в другой проекции. В первом случае задача заключается в перевычислении координат из данной зоны в соседнюю зону. Во втором случае задача решается в два этапа: а) перевычисляют координаты пунктов другой равноугольной проекции в координаты Гаусса-Крюгера, сохранив прежний осевой меридиан, б) полученные координаты пересчитывают еще раз для перехода к стандартному ближайшему осевому меридиану.

Пересчет координат Гаусса-Крюгера из зоны в зону. Обычно осевые меридианы отличаются по долготе на 3^0 или 6^0 . Для перевычислений применяются два способа.

Первый способ состоит в том, что плоские координаты x , y перевычисляют в геодезические координаты B и l . Затем разность долгот l изменяют на величину l_0 , равную разности долгот осевых меридианов, и по координатам B и $l \pm l_0$ вновь вычисляют плоские координаты. Этот способ в настоящее время является основным.

Суть второго способа заключается в преобразовании плоских координат без промежуточного перехода к геодезическим координатам. Теория этого способа изложена в монографии [12]. Пусть даны две системы координат Гаусса-Крюгера, отнесенные к осевым меридианам с долготами L_0 и L_0' :

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy'.$$

Вопрос о преобразовании координат сводится к представлению z' как функции z . Выбирается некоторая промежуточная точка z_0 и соответствующая ей точка z_0' . Тогда

$$z' = f(z_0 + (z - z_0)).$$

Функция раскладывается в ряд Тейлора

$$z' = z'_0 + \left(\frac{dz'}{dz}\right)_0 (z - z_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 z'}{dz^2}\right)_0 (z - z_0)^2 + \dots$$

Степень ряда определяется дополнительными соображениями. Формулы получаются довольно громоздкими.

Напомним, что на листах топографических карт, примыкающих к границам зон, за рамками штрихами показаны выходы координатных линий соседней зоны, которые следует использовать при пересчетах координат с графической точностью.

Трансформирование плоских прямоугольных координат. Топографические планы и карты строят в равноугольных проекциях. Например, плоские прямоугольные координаты (u, v) из равноугольной проекции *UTM* эллипсоида *WGS-84* трансформируются в координаты (x, y) в проекции Гаусса-Крюгера в системе ГСК-2011.

Рассмотрим приближенное решение поставленной задачи, применимое для малых территорий. Для этого можно использовать аналитическую функцию комплексной переменной, реализующей параллельный перенос начала координат, поворот координатных осей и масштабирование координат [8]:

$$z = z_0 + cw,$$

где исходные и преобразуемые координаты соответственно равны:

$$w = u + iv, \quad z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Для выполнения вычислений необходимы два комплексных (четыре числовых) параметра:

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad c = \alpha + i\beta.$$

Все параметры легко вычислить по двум опорным точкам, для которых известны координаты w_1, w_2 и z_1, z_2 . После элементарных преобразований для вычисления параметров трансформирования получаем следующие выражения:

$$c = (z_2 - z_1)/(w_2 - w_1);$$

$$2z_0 = (z_1 + z_2) - c(w_1 + w_2).$$

Когда опорных пунктов более двух ($n > 2$), параметры трансформирования вычисляются более точно по методу наименьших квадратов. Вычисления выполняются по формулам:

$$x = x_0 + \alpha u - \beta v,$$

$$y = y_0 + \alpha v + \beta u.$$

Четыре параметра трансформирования x_0, y_0, α, β определяют сдвиг начала координат по каждой координатной оси, разворот координатных осей и умножение всех координат на масштабный одинаковый коэффициент. С целью определения этих параметров обозначено через $\Delta u, \Delta v, \Delta x, \Delta y$ отклонения координат от их средних значений. Средние значения помечены чертой сверху. Тогда параметры трансформирования вычисляются по формулам:

$$\bar{u} = [u]/n, \quad \bar{v} = [v]/n,$$

$$\bar{x} = [x]/n, \quad \bar{y} = [y]/n,$$

$$\alpha = [\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y] / [\Delta u^2 + \Delta v^2],$$

$$\beta = [\Delta u \Delta y - \Delta v \Delta x] / [\Delta u^2 + \Delta v^2],$$

$$x_o = \bar{x} - \alpha \bar{u} + \beta \bar{v},$$

В этих формулах применена символика Гаусса – в ломаных скобках заключены суммы указанных в них величин. Например, запись $[x]$ обозначает сумму всех значений x .

Перейдя от декартовых координат к полярным координатам, получим выражения для коэффициента масштабирования μ и угла поворота γ :

$$\mu = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \gamma = \arctg(\beta / \alpha).$$

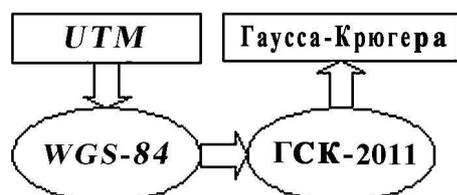


Рис. 5.5. Схема трансформирования координат UTM WGS-84 в координаты Гаусса-Крюгера в ГСК-2011

Перевычисление прямоугольных координат UTM в прямоугольные координаты Гаусса-Крюгера. Предполагается, что координаты UTM отнесены к эллипсоиду WGS-84, а координаты Гаусса-Крюгера – к эллипсоиду ГСК-2011. Схема решения задачи следующая (рис. 5.5).

Прямоугольные координаты UTM пересчитываются в геодезические координаты. Геодезические координаты трансформируются из системы отсчета WGS-84 в ГСК 2011. По трансформированным широтам, долготам и высотам вычисляются новые высоты и плоские координаты Гаусса-Крюгера.

Государственные и местные системы плоских координат в РФ. Отметим следующие системы, предназначенные для использования при осуществлении геодезических и картографических работ:

- Система геодезических координат 1942 года (СК-42), введенная постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. № 760.
- Система геодезических координат 1995 года (СК-95), установленная постановлением Правительства Российской Федерации от 28 июля 2000 г. № 568.
- Геодезическая система координат 2011 года (ГСК-2011), установленная постановлением Правительства Российской Федерации от 28 декабря 2012 г. № 1463.
- Система координат 1963 г. (СК-63) – специальная искажённая система координат. Отменена Постановлением ЦК КПСС и СМ СССР от 25 марта 1987 г. Однако созданные материалы разрешено и в дальнейшем использовать.

Эти системы применяются до 1 января 2017 г. в отношении материалов (документов), созданных с их использованием.

Наряду с этим создавался материал в виде результатов инженерных изысканий, крупномасштабных планов, данных государственного кадастра недвижимости в местных системах координат. Подробнее местные системы описаны в [3]. Таких систем сейчас существует порядка 30 тысяч. Основная часть местных систем координат и координат в СК-63 основана на координатах СК-42. Их модернизация, разработка алгоритмов и математических моделей пересчета в координаты ГСК-2011 в настоящее время является актуальной задачей [612].

Публикации других авторов. Приведенные формулы, с некоторыми непринципиального характера изменениями, изложены в многочисленной научной, учебной, справочной и нормативной литературе. По координатам Гаусса-Крюгера имеется обстоятельная монография В.К. Христова [12]. Многие авторы научной и учебной литературы ссылаются на учебник В.П. Морозова [9]. Соответствующие формулы, уже подвергшиеся критике, имеются в ГОСТе [7]. В работе А.П. Герасимова [2] приведены формулы для вычислений геодезических и прямоугольных координат Гаусса-Крюгера с точностью, соответствующей ~1 мм при удалениях от осевого меридиана до 9°; таким образом, охватывается не только вся шестиградусная зона, но еще и соседние зоны с востока и с запада. Подробный вывод этих формул

дан в работе [4]. Соответствующие выводы имеются в учебном пособии [11] и в практикуме [10], где дана программа для вычислений.

Авторы публикации [1] полагают, что все формулы, представляемые рядами до высоких степеней, довольно громоздки. Предложили новый алгоритм, обеспечивающий в 6-градусной зоне геодезическую точность до долей миллиметров.

Источники информации по Лекции 5

1. Баландин В.Н., Брынь М.Я., Меньшиков И.В., Фирсов Ю.Г. Вычисление плоских прямоугольных координат, сближения меридианов и масштаба проекции Гаусса в 6-градусной зоне по геодезическим координатам. Геодезия и картография. 2014. №2, с. 11-13.
2. Герасимов А.П. Спутниковые геодезические сети. – М.: ООО «Проспект». 2012. -176 с.
3. Герасимов А.П., Назаров В.Г. Местные системы координат. – М.: ООО «Издательство «Проспект», 2010. – 64 с.
4. Герасимов А.П. Уравнивание государственной геодезической сети. -М.: Картгеоцентр-Геоиздат. 1996. -216 с.
5. ГКИНП-05-029-84. Основные положения по содержанию топографических карт масштабов 1:25000, 1:50000, 1:100000, 1:200000, 1:500000, 1:1000000. - М., РИО ВТС, 1984.
6. Горобец В.П., Демьянов Г.В., Майоров А.Н., Побединский Г.Г. Современное состояние и направления развития геодезического обеспечения РФ. Системы координат. Геопрофи. 2013. №6, с. 4-9.
7. ГОСТ Р 51794-2008. Глобальные навигационные спутниковые системы. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. - М.: Стандартинформ. 2009. -16 с.
8. Кёниг Р., Вейзе К. Математические основы высшей геодезии и картографии. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954. С. 416.
9. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1979. –260 с.
10. Серапинас Б. Б. Практикум по геодезическим основам карт. Учебное пособие. - М.: Географический факультет МГУ. 2008. -146 с.
11. Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт. Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. -132 с.
12. Христов В.К. Координаты Гаусса-Крюгера на эллипсоиде вращения. М.: Издательство геодезической литературы. 1957. - 264 с.

Контрольные вопросы

1. Требования к выбору проекций для построения прямоугольных координат на плоскости. Изометрические координаты.
2. Система координат в проекции Гаусса. Координаты Гаусса-Крюгера и *UTM*. Необходимые формулы для их вычислений. Использование разложений функций комплексной переменной в ряды Тейлора. Гауссово сближение меридианов. Поправка за кривизну изображения геодезической линии. Масштаб длин и поправки в длины линий.
3. Преобразования координат Гаусса-Крюгера. Пересчёт координат из зоны в зону. Перевычисление координат *UTM* в координаты Гаусса-Крюгера. Государственные и местные системы плоских координат в РФ.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КООРДИНАТЫ

Пространственные прямоугольные координаты. Рассмотрим пространственные прямоугольные координаты, имеющие большое значение в связи с широким использованием спутниковых данных.

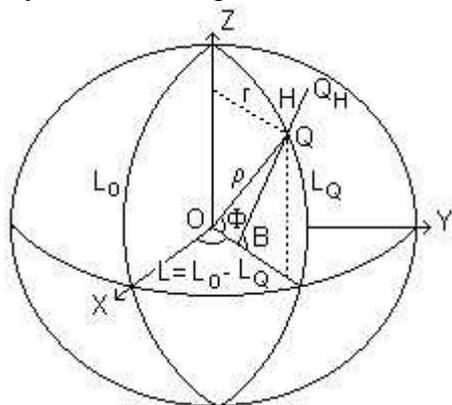


Рис. 6.1. Пространственные прямоугольные координаты

Начало координат - в центре земного эллипсоида, ось X — в плоскости начального меридиана долготы L_0 , ось Z направлена по оси вращения эллипсоида, при этом оси X и Y лежат в плоскости экватора (рис. 6.1). Если центр эллипсоида совмещен с центром масс Земли, а начальным меридианом является меридиан Гринвича ($L_0=0$), то имеет место гринвичская геоцентрическая система координат. Если же центр эллипсоида смещен с центра масс Земли, то получим квазигеоцентрическую систему координат.

Геоцентрические прямоугольные координаты. Из рис. 6.1 следует:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos L \\ r \sin L \\ r \operatorname{tg} \Phi \end{pmatrix}.$$

Эти уравнения используем в качестве исходных для получения последующих формул. Выразив радиус параллели r через радиус-вектор ρ и геоцентрическую широту Φ

$$r = \rho \cos \Phi,$$

для координат X, Y, Z получим:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \Phi \cos L \\ \rho \cos \Phi \sin L \\ \rho \sin \Phi \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Пусть некоторая точка Q расположена на поверхности эллипсоида. Определим ее прямоугольные пространственные координаты в функции геодезической широты B и геодезической долготы L . Учитывая формулы для радиуса параллели и для взаимосвязи геоцентрической и геодезической широт для точек на эллипсоиде

$$r = N \cos B, \quad \operatorname{tg} \Phi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B,$$

получим:

$$\begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \cos B \cos L \\ N \cos B \sin L \\ N(1 - e^2) \sin B \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Эти формулы верны только для точек на эллипсоиде. Рассмотрим случай, когда некоторая точка Q_H приподнята над земным эллипсоидом на геодезическую высоту H .

Геодезическая высота H отсчитывается по нормали от точки Q на эллипсоиде. Нормаль образует с плоскостью экватора угол, равный геодезической широте B . Поэтому для приращений координат точки Q_H над точкой Q (рис.6.1) имеем:

$$\begin{pmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \cos B \cos L \\ H \cos B \sin L \\ H \sin B \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Суммируя координаты (6.2) и (6.3), получаем формулы прямоугольных координат для точек, расположенных на любых высотах H над эллипсоидом:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + H) \cos B \cos L \\ (N + H) \cos B \sin L \\ (N(1 - e^2) + H) \sin B \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Производные от X, Y, Z по B, L и H . Их используют в разных целях, в частности, для оценки точности определений прямоугольных координат.

$$\begin{aligned} \partial X / \partial B &= -(M + H) \sin B \cos L; & \partial X / \partial L &= -(N + H) \cos B \sin L; & \partial X / \partial H &= \cos B \cos L; \\ \partial Y / \partial B &= -(M + H) \sin B \sin L; & \partial Y / \partial L &= (N + H) \cos B \cos L; & \partial Y / \partial H &= \cos B \sin L; \\ \partial Z / \partial B &= (M + H) \cos B; & \partial Z / \partial L &= 0; & \partial Z / \partial H &= \sin B. \end{aligned}$$

Для взаимосвязи дисперсий ошибок σ в X, Y, Z и B, L, H имеем ($\rho'' = 206265''$):

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 \\ \sigma_y^2 \\ \sigma_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((M + H) \sin B \cos L)^2 & ((N + H) \cos B \sin L)^2 & (\cos B \cos L)^2 \\ ((M + H) \sin B \sin L)^2 & ((N + H) \cos B \cos L)^2 & (\cos B \sin L)^2 \\ ((M + H) \cos B)^2 & 0 & (\sin B)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma_B / \rho'')^2 \\ (\sigma_L / \rho'')^2 \\ \sigma_H^2 \end{pmatrix}.$$

Приняв $H = 10$ км, $B = L = 45^\circ$, $\sigma_B = \sigma_L = 0,0001''$, $\sigma_H = 0,003$ м, получим $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma_Z \approx 0,003$ м

Вычисление геоцентрической широты и радиус-вектора. Из формул (6.1) следует:

$$\sin \Phi = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad (6.5 \text{ а})$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (6.5 \text{ б})$$

Если точка расположена над полюсом ($X = Y = 0$), то Φ приписывается широта полюса.

Для радиус-вектора имеем:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (6.6)$$

Вычисление геодезической долготы по прямоугольным координатам. Из формул (6.1) или (6.4) следует:

$$\sin L = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad (6.7 \text{ а})$$

$$\operatorname{tg} L = \frac{Y}{X}. \quad (6.7 \text{ б})$$

Если точка лежит в плоскости меридиана, перпендикулярной плоскости начального меридиана ($X = 0$), то долгота L принимается равной 0° при $Y = 0$, 90° , когда $Y > 0$, и 270° при $Y < 0$. Если $Y = 0$, то $L = 0$ при $X \geq 0$, и $L = \pi$ при $X < 0$.

В публикации [10] даётся следующий алгоритм:

$$L = 2 \operatorname{arctg} \frac{Y}{X + R} + \pi(1 - \operatorname{sign} Y), \text{ если } Y \neq 0;$$

$$L = \begin{cases} 0 & \text{при } X \geq 0 \text{ и } Y = 0; \\ \pi & \text{при } X < 0 \text{ и } Y = 0; \end{cases}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (6.8)$$

Вычисление геодезической широты и высоты. Выводом формул для вычислений геодезических широт и высот занимались многие учёные. Их работы опубликованы. Предложенные способы можно разделить на две группы:

- *итеративные*, выполняемые последовательными приближениями,
- *неитеративные*, вычисляемые по конечным формулам.

В данной лекции представлены основные, разработанные разными авторами, способы решений упомянуты в заголовке задач. Практически они все обеспечивают высокую точность определений геодезических координат.

1. Итеративный алгоритм вычисления геодезической широты и высоты по отрезку ($N+H$) нормали к эллипсоиду. Имея в виду формулы (6.4), введём обозначения:

$$S = \sin B. \quad N = a / \sqrt{1 - e^2 S^2}, \quad P = e^2 N S,$$

$$Q = \sqrt{X^2 + Y^2 + (Z + P)^2} = (N + H).$$

Построим следующую последовательность вычислений:

$$S_1, N_1, P_1, Q_1,$$

$$S_2 = (Z + P_1) / Q_1,$$

$$\Delta = |S_2 - S_1| \leq \varepsilon. \quad (6.9)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока абсолютная разность результатов двух последовательных приближений S_2 и S_1 не станет удовлетворять условию $\Delta \leq \varepsilon$. Допуск ε определяется погрешностью вычисления геодезической широты. Например, $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-9}$ (допускается ошибка в 0,5 единиц в девятом после запятой знаке синуса) соответствует погрешности $0,0001''$ в широте или около 3 мм в линейной мере. В начальном приближении принимается $S_1 = 0$. При этом после первого приближения будет вычислена геоцентрическая широта Φ (6.5а). Поэтому данное действие следует рассматривать не как приближение, а как подготовку к итерациям. Удобно, что такая подготовка органически включена в общую схему приближений. Фактически первое приближение лишь начинается после определения геоцентрической широты. Далее, приняв $S_1 = S_2$, приступают к следующему приближению. По завершении итераций вычисляются геодезическая широта и высота:

$$B = \operatorname{arctg} \left(S_2 / \sqrt{1 - S_2^2} \right), \text{ если } (X^2 + Y^2) \neq 0,$$

$$B = \frac{\pi}{2} \frac{Z}{|Z|} \text{ при } (X^2 + Y^2) = 0,$$

$$H = Q_2 - N_2.$$

Способ отличается простотой теоретических построений, понятностью алгоритма и высокой точностью получаемых результатов. Он приведён в работе [15] и использован в практике [14]. Число приближений зависит от требуемой точности вычислений широты B , и это число несколько увеличивается с приближением определяемых точек к экватору (табл. 6.1). В ходе вычислений не возникает необходимости в каждой итерации находить $\arcsin B$ или $\arctg B$. Благодаря этому несколько ускоряется весь процесс приближений.

Таблица 6.1

Число приближений в способе вычисления широт и высот по отрезку $(N+H)$

Точность вычислений $\sin B$	Число приближений при разных широтах			
	90°	89°	45°	5°
10 ⁻⁶	1	2	3	3
10 ⁻⁹	1	2	4	4
10 ⁻¹²	1	3	5	6

2. Итеративный алгоритм вычисления геодезической широты и высоты на основе геометрических представлений. Суть способа можно выяснить на основе геометрических представлений по рис. 6.2.

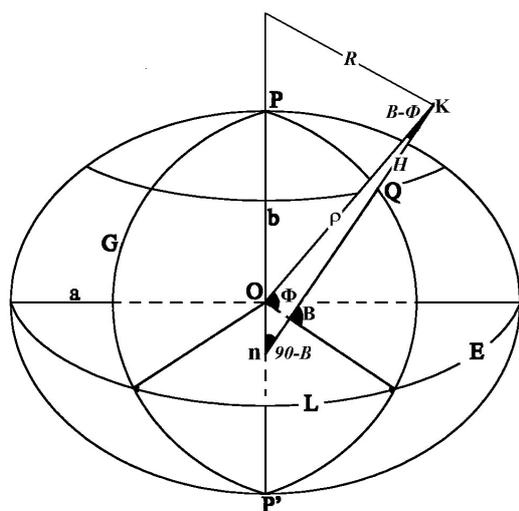


Рис. 6.2. К построению итеративного алгоритма вычислений геодезической широты и высоты

На рис. 6.2а более наглядно представлено изображение в плоскости меридиана долготы L . Заметим, что нормаль к эллипсоиду, проходящая через точки Q и K и радиус-вектор $\rho = OK$, лежат в одной и той же плоскости. Поэтому треугольник nOK является плоским треугольником. Тогда из теоремы синусов следует:

$$\frac{\sin(B - \Phi)}{nO} = \frac{\sin(90 - B)}{\rho}$$

Отрезок nO определяет расстояние между центром O эллипсоида вращения и точкой n пересечения нормали с полярной осью эллипсоида. Этот отрезок равен [9, с.44]

$$nO = e^2 N \sin B.$$

Имеем:

$$\sin(B - \Phi) = \frac{e^2 N \sin B}{\rho} \cos B$$

Радиус-вектор ρ определяется формулой (6.6). Выделим постоянные для точки K величины:

$$p = \frac{e^2 a}{2\rho}; \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad \Phi = \arcsin \frac{Z}{\rho} = \arctg \frac{Z}{R}.$$

Величина Φ – геоцентрическая широта (6.5а). Учитывая формулу для N радиуса кривизны первого вертикала, получаем:

$$B = \Phi + S, \quad S = \arcsin \frac{\rho \sin 2B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}.$$

Эти выражения служат основой для построения итеративного алгоритма. Вначале принимается $S_1 = 0$. Вычисляются B и S_2 . Затем выполняется проверка

$$\Delta = |S_2 - S_1| \leq \epsilon.$$

Если это условие не выполняется, то принимается

$$S_1 = S_2.$$

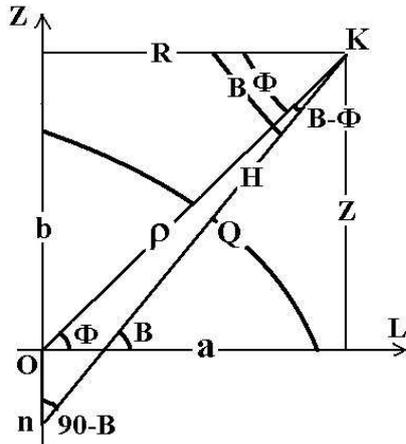


Рис. 6.2а. Треугольник KпО

Вычисления повторяются. Итерации продолжаются до выполнения указанного неравенства. После этого находят H :

$$H = R \cos B + Z \sin B - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \quad (6.10)$$

Формулу (6.10) легко вывести:

$$\begin{aligned} R \cos B + Z \sin B &= (N + H) \cos^2 B + (N + H) \sin^2 B - e^2 N \sin^2 B = \\ &= N + H - e^2 N \sin^2 B = H + N(1 - e^2 \sin^2 B) = H + a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \end{aligned}$$

Отсюда следует формула (6.10). Погрешность ΔH в высоте H в зависимости от ошибок ΔB в широте определяется уравнением [10]:

$$\Delta H = -\frac{1}{2}(a + H)\Delta B^2.$$

Если предположить, что половина суммы радиуса Земли с высотой составляет около 10 000 км или 10^{10} мм, ошибка в широте 2", в радианах это около 10^{-5} , а в квадрате 10^{-10} , то погрешность в высоте составит 1 мм.

Такой алгоритм рекомендован в [5].

3. Итеративный алгоритм вычисления геодезической широты и высоты по отстоянию R точки измерений от оси вращения эллипсоида. Этому способу учёными уделено больше всего внимания. Отстояние R определяется формулой (6.8). Итерациями вычисляется широта на основе решения трансцендентного уравнения, следующего из формул (6.4):

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z + e^2 N \sin B}{R}. \quad (6.11)$$

Если точка расположена над полюсом ($R = 0$), то величине B приписывается широта полюса. В начальном приближении рекомендуется принять [12, 10]:

$$\operatorname{tg} B_0 = \frac{Z}{(1 - e^2)R}. \quad (6.12)$$

Погрешность ΔB_k вычисления широты в k -м приближении будет [10]:

$$\Delta B_k'' = \rho'' \frac{a^k e^{2k+2} H}{(a + H)^{k+1}} \sin B_0 (\cos B_0)^{2k+1},$$

где a , e – параметры эллипсоида, $\rho'' = 206\,265''$ – число угловых секунд в радиане. Максимальные значения погрешностей при геодезической высоте $H = 10$ км составили: $\Delta B_0 = 1,1''$; $\Delta B_1 = 0,0047''$; $\Delta B_2 = 0,000025''$. Следовательно, для вычисления широты с погрешностью

0,0001" достаточно двух приближений [10]. Практически число итераций колеблется от 3 до 5.

Для определения высоты, по мнению П.А. Медведева, лучшей является формула (6.10) [10].

При вычислениях по формуле (6.11) в каждой итерации приходится определять $\arctg B$ и $\sin B$. Поэтому в учебнике [11, с. 192] вместо (6.11) рекомендована видоизменённая формула:

$$t_{i+1} = t_0 + \frac{pt_i}{\sqrt{k+t_i^2}},$$

$$t_0 = \frac{Z}{R}; \quad p = \frac{ce^2}{R}; \quad k = 1 + e^2; \quad c = \frac{a^2}{b}; \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Широта B и высота H определяются по последнему приближению t :

$$B = \arctg t,$$

$$H = \left(R - \frac{c}{\sqrt{k+t^2}} \right) \sqrt{1+t^2}.$$

Число приближений, без учёта широты наблюдений, указано в табл. 6.2 [11, с. 193].

Таблица 6.2

Число приближений в способе вычисления широт и высот по отрезку R

Точность вычислений $\sin B$	Число приближений
10^{-6}	2
10^{-9}	3
10^{-12}	4

4. Итеративные вычисления геодезической широты и высоты по алгоритму Borkowski К.М. Способ основан на использовании приведенной широты U [17]. Для радиуса параллели и аппликаты Z имеем (см. (3.1) Лекции 3):

$$r = a \cos U; \quad Z = b \sin U.$$

Из формул (6.4) следуют:

$$R = (N + H) \cos B = a \cos U + H \cos B,$$

$$Z = (N(1 - e^2) + H) \sin B = b \sin U + H \sin B. \tag{6.13}$$

Из уравнений исключают высоту H :

$$\frac{Z - b \sin U}{R - a \cos U} = \tg B = \frac{a \sin U}{b \cos U}.$$

$$aR \sin U - bZ \cos U - (a^2 - b^2) \sin U \cos U = 0.$$

Обозначают:

$$\sin \Omega = \frac{bZ}{\sqrt{(aR)^2 + (bZ)^2}}, \quad \cos \Omega = \frac{aR}{\sqrt{(aR)^2 + (bZ)^2}}, \quad \tg \Omega = \frac{bZ}{aR},$$

$$C = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(aR)^2 + (bZ)^2}}.$$

Получают:

$$2 \sin(U - \Omega) - C \sin 2U = 0. \tag{6.14}$$

Это уравнение решают методом Ньютона:

$$U_{k+1} = U_k - [2 \sin(U_k - \Omega) - C \sin 2U_k] / W,$$

$$W = 2[\cos(U_k - \Omega) - C \cos 2U_k].$$

В качестве начального приближения, что следует из (6.13) при $H = 0$, предлагается

$$U_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{aZ}{bR}\right).$$

Для обеспечения высокой точности результатов достаточно лишь двух итераций [17]. Геодезическая широта и высота вычисляются по формулам:

$$\operatorname{tg} B = \frac{a}{b} \operatorname{tg} U,$$

$$H = (R - a \cos U) \cos B + (Z - b \sin U) \sin B.$$

Формула для высоты следует из (6.13).

Этим же автором получена формула, не требующая итераций. Результат найден путём определения корней полинома четвертой степени [17].

5. Итеративный алгоритм вычисления геодезической широты и высоты способом Полеценкова В.Н. Алгоритм изложен в статье [13]. Введён масштабный множитель k , равный отношению отрезков AD/AC (рис. 6.3). Оба этих отрезка лежат на нормали к эллипсоиду. Координаты точки $C(x_C, z_C)$, лежащей на эллипсоиде, выражают через координаты точки $D(R, Z)$. Получают:

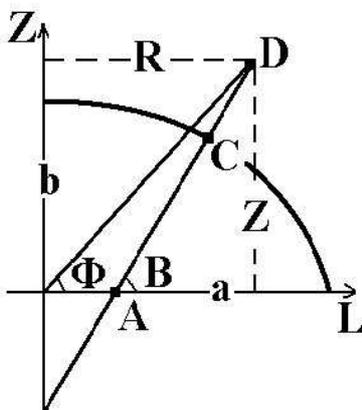


Рис. 6.3. Меридиональное сечение эллипсоида

$$x_C = \frac{R}{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 k + e^2\right)}; \quad z_C = \frac{Z}{k}; \quad k \geq 1.$$

Вводится ряд обозначений для величин, сохраняющих постоянное значение при заданных параметрах эллипсоида a, b, e, e' и координатах точки D :

$$R^2 = X^2 + Y^2; \quad f = \frac{a^2 R^2}{b^4}; \quad g = \frac{Z^2}{b^2}.$$

Для уравнения эллипса в плоскости меридиана долготы L , на котором лежит точка C , получают:

$$k_{i+1}^2 = \frac{f}{\left(1 + \frac{e'^2}{k_i}\right)^2} + g.$$

Это выражение можно преобразовать. Но оно и в таком виде удобно для итеративных вычислений множителя k . В начальном приближении следует принять $e' = 0$.

Геодезическая широта вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} \Phi \left(1 + \frac{e^2}{k} \right).$$

Формула замечательна сама по себе. Она обобщает формулу связи геоцентрической и геодезической широт и становится верной, как для точек на эллипсоиде, так и для точек во внешнем пространстве: $k = 1$ – для точек на эллипсоиде, $k > 1$ – для точек над эллипсоидом. Любопытно заметить, что с ростом числа k разность широт B и Φ уменьшается. Но лишь с удалением от Земли на 6,7 млн. земных радиусов она достигает пренебрегаемой величины

$$\Delta(B - \Phi) = 0,0001''.$$

Геоцентрическая широта определяется по формуле (рис. 6.3):

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{Z}{R}.$$

Формул для вычисления долгот и высот в упомянутой статье нет. Что касается долгот, то они вычисляются обычным путём. Судя по приведённой программе, высота определяется как длина отрезка CD (рис. 6.3). Поэтому можно записать

$$H = \sqrt{(R - x_c)^2 + (Z - z_c)^2},$$

$$H = \sqrt{R^2 \left(1 - \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} k + e^2} \right)^2 + Z^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right)^2}.$$

Автором лекций выполнен подсчёт числа итераций в зависимости от широты положения точек и точности вычислений множителя k (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Число приближений при вычислениях широт и высот

Точность вычислений множителя k	Число приближений на разных широтах		
	89°	45°	5°
10^{-4}	1	2	2
10^{-5}	1	3	3
10^{-6}	2	3	3
10^{-7}	2	3	4
10^{-8}	2	4	4

В случае первой строки табл. 6.3 (точность вычислений 10^{-4}) ошибки ΔB в широте достигали $0,0001''$, $0,008''$ и $0,005''$, а ошибки ΔH в высотах – 0, 0,24 и 1,9 метра соответственно в полярных, средних и экваториальных широтах. Во всех остальных случаях ошибки в широтах $\Delta B = 0,0000''$. Что касается ошибок ΔH в высотах, то во второй и третьей строках они соответственно равнялись 0, 1 и 12 мм, в четвёртой строке 0, 1 и 0 мм, а в пятой строке равнялись нулю миллиметров. Поэтому точность вычислений множителя k должна быть не ниже 10^{-8} .

В той же статье [13] опубликован неитеративный алгоритм, составленный на основе определения корней полинома третьей степени.

6. Неитеративный способ вычисления геодезической широты по формуле А.А. Изотова. Профессор А.А. Изотов применил последовательные приближения аналитически в ходе вывода формул с удержанием членов только с e^4 [6; 7, с. 35]:

$$\operatorname{tg} B = \left(1 + \frac{ae^2}{\rho} + \frac{ae^4 \sin^2 \Phi}{2\rho} + \frac{a^2 e^4 \cos^2 \Phi}{\rho^2} \right) \operatorname{tg} \Phi,$$

$$B - \Phi = \left(\frac{ae^2}{\rho} + \frac{ae^4 \sin^2 \Phi}{2\rho} + \frac{a^2 e^4 \cos 2\Phi}{\rho^2} \right) \frac{\sin 2\Phi}{2},$$

где a , e – параметры эллипсоида, Φ – геоцентрическая широта, ρ - радиус-вектор (6.6). По мнению автора статьи [6], приведённые формулы тем точнее, чем точка выше над эллипсоидом; максимальная погрешность “выражается в тысячных долях дуговой секунды, когда рассматриваемая точка находится на поверхности эллипсоида под широтой 45° ”.

Для вычисления высоты в [6] и [7 с. 34] приводятся разные формулы. Вторая работа появилась позже, поэтому ориентируемся на неё:

$$H = \sqrt{X^2 + Y^2} \sec B - N.$$

Автор статьи [17] сравнил десять разных алгоритмов, в том числе и описанный выше. Из приведённой в его публикации таблицы не следует, что данный способ является наиболее точным; при низких высотах и на экваторе возможны ошибки около 7 дм.

7. Неитеративный алгоритм Л.В. Огородовой. В публикации [12] для вычисления с высокой точностью геодезических координат точек земной поверхности, когда высоты не превышают 10 км, предложен следующий неитеративный алгоритм:

$$\operatorname{tg} B_0 = \frac{Z}{(1-e^2)R}, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$H_0 = R \cos B_0 + Z \sin B_0 - a\sqrt{1-e^2 \sin^2 B_0},$$

$$B = B_0 - \frac{\rho'' e^2 H_0}{2 R} \sin 2B_0,$$

$$H = H_0 + \frac{e^4 H_0^2}{8 R} \sin^2 2B_0.$$

В формулах $\rho''=206265''$. Однако, в статье [10] указывается, что предложенные формулы не обеспечивают заявленной высокой точности.

8. Неитеративный алгоритм Баландина Б.Н. и группы соавторов. Алгоритм опубликован в статье [1]. По мнению авторов, он обеспечивает точность вычисления геодезической широты при $H < 10\,000$ м до $0,0001''$ (в линейной мере это составляет 3 мм):

$$\operatorname{tg} B_0 = \frac{Z}{(1-e^2)R}, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\operatorname{tg} B = \left(1 - \frac{He^2 \operatorname{tg} B_0}{Z\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 B_0}} \right) \operatorname{tg} B_0.$$

При этом значение геодезической высоты может быть вычислено по формуле:

$$H = \rho - \frac{b}{\sqrt{1 - e^2(R/\rho)^2}}.$$

Погрешность вычисления геодезической широты оценивается по формуле:

$$dB'' = 206264,8 \left(\frac{He^2}{a+H} \right)^2 \left(\frac{R}{\rho} \right)^3 \left(\frac{Z}{\rho} \right).$$

Однако в статье [10] указывается, что предложенные формулы не обеспечивают высокой точности: ошибка в высоте даже в примере, рассмотренном в [1], составляет 0,056 м.

9. Неитеративный алгоритм Медведева П.А. Используется приведённая широта. Из анализа разных алгоритмов при высотах, не превышающих по абсолютной величине 10 км, по точности и по объёму вычислительных операций идеальным является алгоритм Боуринга [10]. Он подробно описан в работе [11, с. 193]. Медведев П.А. усовершенствовал алгоритм Боуринга. Он предложил всё выражать лишь через исходные параметры эллипсоида: большую полуось a и знаменатель f сжатия $\alpha=(a-b)/a=1/f$. Изменил начальное приближение, позволяющее определять результаты с более высокой точностью. Видоизменил формулу вычисления приведённой широты и расширил диапазон допустимых высот. Им установлено, что в широкой области $-1000 \text{ км} < H < \infty$ формулы алгоритма являются точными. Алгоритм принял следующий вид:

1. Определяются постоянные параметры

$$k_0 = \frac{f-1}{f}, \quad k_1 = a \frac{2f-1}{f(f-1)}, \quad k_2 = k_0 k_1.$$

При этом

$$k_1 = be'^2, \quad k_2 = ae^2.$$

2. Вычисляется расстояние R и долгота L по алгоритму (6.8).

3. Определяется приведённая широта U и геодезическая широта B :

$$U = \text{arctg} \left[\left(\frac{k_1}{\sqrt{Z^2 + (k_0 R)^2}} + 1 \right) \frac{k_0 Z}{R} \right];$$

$$B = \text{arctg} \left(\frac{Z + k_1 \sin^3 U}{R - k_2 \cos^3 U} \right).$$

4. Если $R=0$, то $L=0$, $B=(\pi/2)\text{sign}Z$.

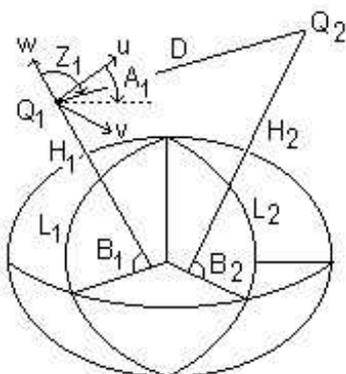
5. Высота H определяется по формуле, идентичной (6.10)

$$H = R \cos B + Z \sin B - a \sqrt{1 - k_2 \sin^2 B / a}.$$

“Предлагаемый алгоритм является неитерационным высокоточным и значительно проще рекомендованного [5] Госстандартом России” [10].

Топоцентрические координаты. Различают топоцентрические прямоугольные и полярные координаты. Начало прямоугольных координат u, v, w расположено над эллипсоидом в некоторой точке $Q_1(B_1, L_1, H_1)$. Ось w лежит на нормали к эллипсоиду, проходящей через точку Q_1 (рис. 6.4). Ось u лежит в плоскости меридиана точки Q_1 , перпендикулярна к оси w и направлена на север. Ось v перпендикулярна к осям w и u и направлена в сторону увеличения долготы на восток. Координатные оси u и v лежат в плоскости геодезического горизонта, т.е. в плоскости, перпендикулярной нормали к эллипсоиду.

К полярным координатам относятся: D — расстояние по прямой между двумя точками Q_1 и Q_2 ; Z_1 — зенитное расстояние, определяемое вертикальным углом, отсчитываемым в точке Q_1 от оси w до направления на точку Q_2 ; A_1 — геодезический азимут, равный двугранному



углу между плоскостью меридиана точки Q_1 и плоскостью, проходящей через точку Q_2 и нормаль в точке Q_1 , отсчитывается в плоскости геодезического горизонта uQ_1v от оси u по часовой стрелке до направления на точку Q_2 .

Прямоугольные и полярные координаты взаимосвязаны формулами:

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \sin Z_1 \cos A_1 \\ D \sin Z_1 \sin A_1 \\ D \cos Z_1 \end{pmatrix}.$$

Вместо зенитного расстояния Z пользуются также углом v , определяющим высоту спутника над горизонтом. Зенитное расстояние и высота над горизонтом взаимосвязаны соотношением:

$$Z + v = 90^\circ.$$

В ГНСС измерениях в точке Q_1 расположен центр антенны спутникового приёмника, а в точке Q_2 — центр антенны передатчика космического аппарата. Азимут A и зенитное расстояние Z показывают, где в данный момент на небосводе находится спутник. Вычисление зенитных расстояний спутников и азимутов направлений на них необходимо для планирования измерений и для понимания, где расположен спутник в момент наблюдений. Для наблюдений интерес представляют лишь спутники, зенитные расстояния которых $Z < 80^\circ$.

Карты небосвода с расположением спутников даются на экранах многих спутниковых приёмников. На сайте [16] Информационно-аналитического центра Федерального космического агентства РФ по данным локального мониторинга в г. Королеве Московской области через каждые 30 секунд выдаётся картина расположения спутников (рис. 6.5). По азимуту и высоте над горизонтом легко найти, где в данный момент расположены спутники ГНСС.

Топоцентрические координаты на точку Q_2 связаны с геоцентрическими координатами точек Q_1 и Q_2 соотношениями:

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix},$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\sin B_1 \cos L_1 & -\sin B_1 \sin L_1 & \cos B_1 \\ -\sin L_1 & \cos L_1 & 0 \\ \cos B_1 \cos L_1 & \cos B_1 \sin L_1 & \sin B_1 \end{pmatrix}.$$

Или

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + \Phi^T \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

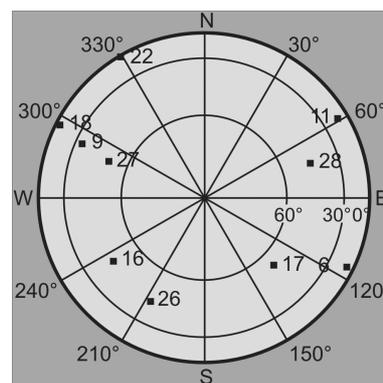


Рис. 6.5. Видимые по полярным координатам в г. Королеве спутники ГЛОНАСС в 11 час 30 мин 18.07.10 [16]

Решение главных геодезических задач между точками в пространстве. По аналогии с решением главных геодезических задач на плоскости и на эллипсоиде сформулируем решения этих задач в пространстве трех измерений (рис. 6.4).

Прямая геодезическая задача. Даны геодезические координаты B_1, L_1, H_1 некоторой точки Q_1 и полярные топоцентрические координаты A_1, Z_1, D , определяющие относительно нее положение второй точки Q_2 . Требуется найти геодезические координаты B_2, L_2, H_2 точки Q_2 . Для этого вычисляются прямоугольные координаты точки Q_1 . По полярным координатам определяются топоцентрические, а затем и геоцентрические координаты точки Q_2 , которые затем пересчитываются в геодезические широты, долготы и высоты.

Обратная геодезическая задача. Даны геодезические координаты B_1, L_1, H_1 и B_2, L_2, H_2 точек Q_1 и Q_2 . Требуется найти величины A_1, Z_1, D , определяющие положение точки Q_2 относительно точки Q_1 . Задачу решают по следующим формулам:

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{v_2}{u_2}, \operatorname{tg} Z_1 = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{w}, D = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$D = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}.$$

Трансформирование пространственных прямоугольных координат. Наличие различных общеземных и референчных координатных систем ведет к необходимости пересчитывать (трансформировать) координаты из одной системы в другую. Для этого надо знать, как взаимосвязаны их начала и координатные оси (рис. 6.6). Для перевода координат из одной системы в другую, необходимо выполнить следующие действия [2, с.28]:

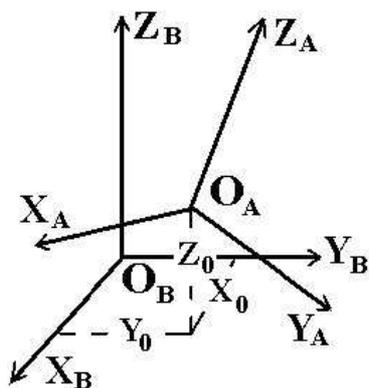


Рис. 6.6. Трансформирование координат из системы А в систему В.

1. Повернуть систему X, Y, Z против часовой стрелки вокруг оси Z на угол ω_z . Образуется новая система X_1, Y_1, Z_1 (рис. 6.7). Поворот выполняется при помощи матрицы

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \omega_z & \sin \omega_z & 0 \\ -\sin \omega_z & \cos \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

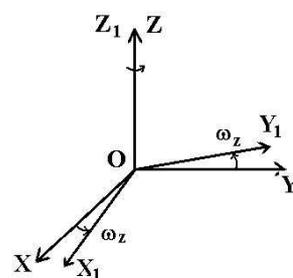


Рис. 6.7. Поворот координатных осей на угол ω_z

2. Повернуть систему X_1, Y_1, Z_1 против часовой стрелки вокруг оси X_1 на угол ω_x . Образуется новая система X_2, Y_2, Z_2 (рис. 6.8). Поворот выполняется при помощи матрицы

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_x & \sin \omega_x \\ 0 & -\sin \omega_x & \cos \omega_x \end{pmatrix}.$$

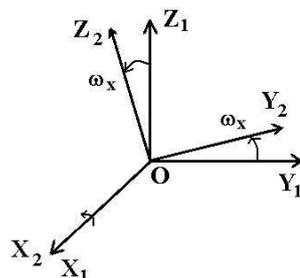


Рис. 6.8. Поворот координатных осей на угол ω_x

3. Повернуть систему X_2, Y_2, Z_2 против часовой стрелки вокруг оси Y_2 на угол ω_y . Образуется новая система X_3, Y_3, Z_3 (рис. 6.9). Поворот выполняется при помощи матрицы

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos \omega_y & 0 & -\sin \omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega_y & 0 & \cos \omega_y \end{pmatrix}.$$

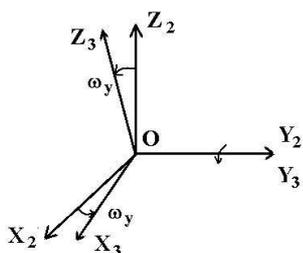


Рис. 6.9. Поворот координатных осей на угол ω_y

Земные системы устанавливаются так, что углы между соответственными осями не превышают 1-2". Матричные уравнения упрощаются: косинусы заменяются единицами, а синусы — углами в радианной мере. Совокупный переход от начальной системы в трансформированную систему выполняется матричным произведением $\Omega\epsilon\Psi$. С учётом упомянутых упрощений получают:

$$\Omega\epsilon\Psi = \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix}.$$

Пересчет координат из системы A в систему B выполняется по формулам (рис. 6.6):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_A,$$

где X_o, Y_o, Z_o - координаты начала системы A в системе B , m — разница в линейных масштабах систем; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — углы разворота координатных осей в радианах. Итак, в ходе пересчета координат должны быть учтены смещения начал координатных систем, все длины системы A увеличены в $(1+m)$ раз, и выполнены три последовательных поворота координатных осей против часовой стрелки — на угол ω_z вокруг оси Z , затем на угол ω_x вокруг оси X , и после этого на угол ω_y около оси Y . Следовательно, для пересчета координат надо знать *семь параметров трансформирования* — $X_o, Y_o, Z_o, \omega_x, \omega_y, \omega_z, m$.

Современные координатные системы *ITRS, WGS-84, ПЗ-90.11* практически являются идентичными. Трансформирование координат не потребуется. В основном пересчет будет необходим при работе со старыми координатными системами [8]. Так, для пересчета координат из СК-95 в ПЗ-90 по уравниванию АГС 1990 - 1996 гг. были получены значения параметров: $X_o = 22,7$ м, $Y_o = -128,8$ м, $Z_o = -83,8$ м, $\omega_x = +0,11''$, $\omega_y = +0,07''$, $\omega_z = +0,02''$, $m = -0,42$ ppm. Многие параметры трансформирования устаревших систем имеются в [5].

Обратный пересчет — из системы B в систему A , учитывая малость параметров трансформирования, а также то, что транспонированная матрица поворота координатных осей совпадает с обратной матрицей, ведется по формулам:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_A = (1-m) \begin{pmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B - \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix}.$$

Пересчет геодезических координат. Выше предполагалось, что трансформирование выполняется на одном и том же эллипсоиде. Разработан ряд способов, когда в ходе трансформирования выполняется переход и на другой эллипсоид. Анализ точных и упрощенных алгоритмов дан в учебном пособии [8], с которым рекомендуется ознакомиться. В данном случае ограничимся рассмотрением лишь одного способа. Он описан во многих публикациях. Вывод формул дан в работе [4, с.20]. Они также имеются в работе [3, с.48]. Примеры вычислений можно найти в пособиях [8, 14].

Каждая пространственная прямоугольная координатная система связана со своим земным эллипсоидом, а прямоугольные координаты — с геодезическими координатами. Пусть система A отнесена к эллипсоиду с большой полуосью a_A и первым эксцентриситетом e_A , а система B — к эллипсоиду с большой полуосью a_B и первым эксцентриситетом e_B . Некоторая

точка в системе A имеет геодезические координаты B_A, L_A и H_A , а после пересчета в систему B будет иметь координаты B_B, L_B и H_B . Очевидно,

$$B_B = B_A + \Delta B, L_B = L_A + \Delta L, H_B = H_A + \Delta H.$$

Так как параметры трансформирования обычно малые величины, то разности геодезических координат $\Delta B, \Delta L$ и ΔH также малы. Их можно вычислить по дифференциальным формулам. В приведенных ниже формулах угловые элементы трансформирования, а также широты и долготы даны в радианах. При переходе из системы A в систему B используют значения B, L, H в системе A , а при обратном переходе — в системе B , а поправки $\Delta B, \Delta L, \Delta H$ вычитают из соответствующих координат системы B . Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta B &= \frac{1}{(M+H)} \left[e^2 \frac{N}{a} \sin B \cos B \Delta a + \left(1 + \frac{N^2}{a^2} \right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - \right. \\ &\quad \left. - (X_o \cos L + Y_o \sin L) \sin B + Z_o \cos B \right] - \\ &\quad - (\omega_x \sin L - \omega_y \cos L)(1 + e^2 \cos 2B) - m e^2 \sin B \cos B, \\ \Delta L &= \frac{1}{(N+H) \cos B} (-X_o \sin L + Y_o \cos L) + \\ &\quad + (1 - e^2) \operatorname{tg} B (\omega_x \cos L + \omega_y \sin L) - \omega_z, \\ \Delta H &= -\frac{a}{N} \Delta a + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} + \\ &\quad + (X_o \cos L + Y_o \sin L) \cos B + Z_o \sin B - \\ &\quad - e^2 N \sin B \cos B (\omega_x \sin L - \omega_y \cos L) + \left(\frac{a^2}{N} + H \right) m \end{aligned}$$

где

$$\Delta a = a_B - a_A, \quad \Delta e^2 = e_B^2 - e_A^2, \quad a = (a_A + a_B)/2, \quad e^2 = (e_A^2 + e_B^2)/2.$$

Формулы обеспечивают вычисление приращений геодезических координат с погрешностью в линейной мере до 0,3 м. Для уменьшения погрешности до 0,001 м необходимо выполнить еще одно приближение. С этой целью учитывают значения $\Delta B, \Delta L, \Delta H$ и повторяют вычисления, принимая

$$B = \frac{B_A + B_A + \Delta B}{2}, \quad L = \frac{L_A + L_A + \Delta L}{2}, \quad H = \frac{H_A + H_A + \Delta H}{2}.$$

Источники информации Лекции 6

1. Баландин Б.Н., Брынь М. Я., Меньшиков И. В., Фирсов Ю. Г. К вопросу вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам // Геодезия и картография. 2012, № 2, с. 9-11.
2. Бурша. М. Основы космической геодезии. Часть 1. Геометрическая космическая геодезия. –М.: Недра. 1971. 128 с.
3. Герасимов А.П. Спутниковые геодезические сети. – М.: ООО «Проспект». 2012. -176 с.
4. Герасимов А.П. Уравнивание государственной геодезической сети. -М.: Картогеоцентр-Геоиздат. 1996. -216 с.

5. ГОСТ Р 51794-2008. Глобальные навигационные спутниковые системы. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. - М.: Стандартинформ. 2009. -16 с.
6. Изотов А. А. Преобразование пространственных прямоугольных координат в геодезические координаты // Геодезия и картография. 1969, № 5, с. 6-7.
7. Изотов А. А., Зубинский В. И., Макаренко Н. Л., Микиша А. М. Основы спутниковой геодезии. – М.: Недра, 1974. -320 с.
8. Комаровский Ю. А. Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении: Учеб. пособие. Изд. второе, перераб. и дополн. – Владивосток: Мор. Гос. ун-т, 2005. – 341 с.
9. Красовский Ф.Н. Избранные сочинения т. 4. - М.: Издательство геодезической литературы. 1955. – 574 с.
10. Медведев П.А. Анализ преобразований пространственных координат точек земной поверхности // Геодезия и картография. 2014. №4, с. 2-8.
11. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1979. –260 с.
12. Огородова Л. В. Совместное вычисление геодезической широты и высоты точек поверхности Земли // Геодезия и картография. 2011, № 9, с. 11-15.
13. Полещенков В. Н. Преобразование геоцентрических декартовых координат в геодезические // Геодезия и картография. 2011, № 2, с. 15-19.
14. Серапинас Б. Б. Практикум по геодезическим основам карт. Учебное пособие. - М.: Географический факультет МГУ. 2008. -146 с.
15. Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт. Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. -132 с.
16. Федеральное космическое агентство, Информационно-аналитический центр. <http://www.glonass-ianc.rsa.ru/pls/htmldb/f?p=201:20:4431530573070005::NO> (Дата обращения 7.07.2014).
17. Borkowski K. M. Accurate Algorithms to Transform Geocentric to Geodetic Coordinates. Torun, Poland. Bull. Géod., 63 (1989), pp. 50–56. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.astro.uni.torun.pl/~kb/Papers/geod/Geod-BG.htm> (дата обращения 20.06.2014).

Контрольные вопросы

1. Какие учитываются случаи при вычислении геодезических долгот L по пространственным прямоугольным координатам X и Y ?
2. Чем отличаются алгоритмы для вычислений геоцентрических широт от алгоритмов для вычислений геодезических широт?
3. Что общего и чем различаются итеративные алгоритмы вычислений геодезической широты и высоты по отрезку $(N+H)$ нормали к эллипсоиду и по отстоянию R от оси вращения эллипсоида?
4. Какие достоинства и недостатки итеративного алгоритма вычисления геодезической широты и высоты на основе геометрических представлений?
5. Перечислите основные особенности итеративного алгоритма Borkowski К.М. вычисления геодезической широты и высоты?
6. Чем принципиально отличается итеративный алгоритм вычисления геодезической широты и высоты Полещенкова В.Н. от других итеративных алгоритмов?
7. Решение главных геодезических задач между точками в пространстве. Какие топоцентрические координаты используются при ГНСС-наблюдениях?
8. Какие необходимо выполнить действия для перевода координат из одной системы отсчёта в другую?

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ. СВЯЗЬ КООРДИНАТ. ВЫСОТЫ

Сила тяжести и ее потенциал. Сила тяжести является равнодействующей сил притяжения и центробежной силы. Массы Земли притягиваются также Луной и Солнцем, однако их влияние не превышает десятиллионной доли и рассматривается лишь как возмущение силы тяжести.

Со времен И. Ньютона в вопросах определения фигуры Земли много внимания уделялось изучению силы тяжести. В 1743 г. А.К. Клеро (Alexis Claude Clairault, 1713-1765), математик, механик, астроном, участник французской экспедиции в Лапландию, показал, как сила тяжести изменяется с широтой места наблюдения и как вычислить сжатие Земли α из разности сил тяжести на экваторе и на полюсе. Его исследования положили начало физическому методу определений параметров фигуры Земли.

В теории фигуры Земли полагают, что притягиваемая материальная точка имеет массу $m = 1$. По второму закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение. При единичной массе сила численно равна ускорению и для краткости письма эти понятия можно не различать.

Земля вращается с угловой скоростью ω ; на ее точки массы $m = 1$, расположенные на расстоянии r от оси вращения, влияет центробежная сила, направленная по перпендикуляру от оси вращения вдоль единичного вектора \mathbf{r}^0 :

$$\mathbf{g}_P = r\omega^2\mathbf{r}^0, \quad (7.1)$$

Согласно закону всемирного тяготения сила притяжения двух материальных точек прямо пропорциональна гравитационной постоянной G , притягивающей массе M , притягиваемой массе $m = 1$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния ρ между ними:

$$\mathbf{g}_F = -\frac{GM}{\rho^2}\rho^0.$$

Единичный вектор ρ^0 направлен против силы притяжения. Этот выбор определяет в формуле знак минус.

С векторными функциями работать трудно и неудобно. Для удобства вводят скалярные функции, а именно такие, производные от которых по любому направлению определяют проекцию силы на это направление. Их называют *потенциалами*. Для потенциала Q центробежной силы и потенциала V_F силы притяжения материальной точки можно записать:

$$Q = \frac{1}{2}\omega^2 r^2, \quad (7.2)$$

$$V_F = \frac{GM}{\rho}. \quad (7.3)$$

Легко проверить, что производные от данных функций по направлениям действия сил (по r и ρ) определяют эти силы.

Формула (7.3) верна для тел, общая масса M которых сосредоточена в материальной точке, в однородном шаре или в шаре из однородных concentрических слоев. Земля обладает более сложным строением. Ньютон, считая Землю по плотности однородной, для ее сжатия получил $1/230$. Нидерландский механик, физик, математик Х. Гюйгенс (Christiaan Huygens, 1629-1695) предположил, что массы Земли предельно неоднородны, сосредоточены в центре, и нашел сжатие равным $1/576$. Действительное значение сжатия находится между

этим величинами и свидетельствует о неоднородном строении Земли и убывании плотности ее вещества от центра к поверхности.

Определим потенциал сил притяжения реальной Земли, воспользовавшись свойством суперпозиции потенциалов: *потенциал равнодействующей силы, создаваемой множеством сил, равен сумме потенциалов этих сил*. Представим Землю состоящей из непрерывного множества точечных элементарных масс dM и суммируем их потенциалы сил притяжения. В пределе суммирование заменяется интегрированием. Учитывая формулу (7.3), для потенциала V силы притяжения Земли получим:

$$V = G \int_M \frac{dM}{\rho} . \quad (7.4)$$

Знак \int обозначает интегрирование по всему объему Земли.

На основе свойства суперпозиции для потенциала силы тяжести Земли W получаем:

$$W = V + Q .$$

Производная потенциала W по некоторому направлению s равна проекции силы тяжести g на это направление:

$$\frac{dW}{ds} = g \cos(gs) = g_s .$$

Производная по направлению силы тяжести равна самой силе g .

Понятие об измерениях силы тяжести. Методы измерений силы тяжести бывают:

- *Динамические* – измеряется время движение тела в гравитационном поле.
- *Статистические* - измеряется вес тела в разных точках земли.

Кроме того, все эти методы подразделяют на две группы:

- *Относительные* - измеряется приращение значений сил тяжести между двумя пунктами.
- *Абсолютные* - на пункте получают полное значение силы тяжести g .

По физическому принципу действия отметим следующие измерительные устройства:

- *Баллистические* - измеряется длина пути и время падения грузика (призмы).
- *Маятниковые* - базируются на измерении периода колебаний маятника.
- *Гравиметры* - пружинные весы высокой точности, способные фиксировать малейшие перемещения подвешенного грузика.
- *Струнные* – фиксируются изменения частоты колебаний струны, натянутой грузом с постоянной массой.

За единицу измерения ускорения силы тяжести в системе СИ принят 1 м/с^2 ; однако в гравиметрии обычно пользуются системой, в которой единицей силы тяжести является Гал, равный 1 см/с^2 . На практике применяют единицы, уменьшенные в тысячу и миллион раз, - мГал и мкГал. Названия единиц даны в честь итальянского физика, механика, астронома, философа и математика Галилео Галилея (Galileo Galilei, 1564-1642). При переводе единиц измерений в СИ используется соотношение: $1 \text{ мГал} = 10^{-5} \text{ м/с}^2$.

Измерения силы тяжести относятся к числу весьма точных измерений.

Уровенные поверхности. Геоид. Если в поле силы тяжести переместить материальную точку единичной массы на бесконечно малый отрезок ds по направлению, составляющему угол (gs) с направлением действия силы тяжести g , то потенциал W изменится на бесконечно малую величину

$$dW = g_s ds .$$

Таким образом, приращение потенциала есть работа, совершаемая силой при перемещении единичной точечной массы в поле силы тяжести. Рассмотрим случай перемещения точки в направлении, перпендикулярном отвесной линии. Тогда

$$\cos(gs) = 0 \text{ и } dW = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$W = const.$$

Это есть уравнение некоторой поверхности, в любой точке которой сила тяжести направлена по нормали к ней, т.е. по отвесной линии. Работа силы при перемещении массы по этой поверхности равна нулю ($dW = 0$). Такую поверхность называют *эквипотенциальной, уровенной*, другое ее название *геон*. Уровенных поверхностей бесчисленное множество. Если константе в уравнении поверхности придать некоторое числовое значение, то будет выделена определенная эквипотенциальная поверхность.

Если константе придать такое значение W_0 , чтобы уровенная поверхность совпадала с поверхностью невозмущенной воды Мирового океана, то получим так называемую *основную уровенную поверхность*. Тело, ограниченное этой поверхностью, называют *геоидом*. Понятие такого геоида ввел в 1873 г немецкий физик Й.Б. Листинг (1808-1882). В этом направлении вместе с Й.Б. Листингом работал немецкий ученый К.Ф. Гаусс (1777–1855), поэтому упомянутое тело также называют геоидом Гаусса-Листинга.

Геоид представляет фигуру Земли, сглаженную до уровня Мирового океана. В действительности нет единого уровня морей и океанов, фиксирующих на Земле положение основной уровенной поверхности. Поэтому в природе геоид физически нигде и никак не зафиксирован.

Интересная информация по этому поводу имеется в статье [10], где можно узнать, что немецкий математик, астроном, работавший также в области теоретической геодезии, Г. Брунс (Ernst Heinrich Bruns, 1848 – 1919) определил поверхность геоида как уровенную поверхность, проходящую через исходный пункт нивелирной сети; французский и американский физик Л. Бриллюэн (Léon Nicolas Brillouin, 1889-1969) ввёл понятие геоида, поверхность которого проходит на высоте около 10 км над уровнем моря через вершину самой высокой горы Земли; в общем поверхностью геоида может служить любая уровенная поверхность, пересекающая поверхность Земли.

При перемещении материальной точки единичной массы на отрезок dh по отвесной линии в направлении, противоположном действию силы тяжести, получим

$$dW = -gdh \text{ и } dh = -dW / g \tag{7.5}$$

Эти уравнения служат для введения на Земле системы счета высот.

Сила тяжести изменяется по поверхности Земли, во-первых, за счет изменения центробежной силы, равной нулю на полюсах и достигающей максимума на экваторе, во-вторых, за счет сплюснутости Земли и, в-третьих, из-за аномального распределения масс. Сила тяжести увеличивается от экватора к полюсам примерно на 5 Гал, а ее аномальные изменения могут достигать десятых долей Гала.

Ускорение силы тяжести $g > 0$. Из уравнений (7.5) следует, что смежные эквипотенциальные поверхности не параллельны — они, нигде не пересекаясь, сближаются у полюсов и несколько расходятся по мере движения к экватору.

Модель гравитационного поля Земли. Нормальная Земля. Уровенные поверхности силы тяжести имеют сложный вид. Для решения теоретических и практических задач необходима модель гравитационного поля Земли. Для этого потенциал W силы тяжести представляют суммой нормального и аномального потенциалов:

$$W = U + T \quad (7.6)$$

где U — нормальный потенциал, создаваемый моделью, он содержит главную часть потенциала силы тяжести Земли, T — возмущающий или аномальный потенциал, небольшая добавка. Эту модель называют *нормальной Землей*; *сферон* — ее уровенная поверхность

$$U = \text{const.}$$

Правомерность такой постановки основана на теореме английского математика и физика Д.Г. Стокса (George Gabriel Stokes; 1819-1903), по которой, если известны масса тела, угловая скорость его вращения около неизменной оси и задана форма внешней уровенной поверхности, охватывающей все притягивающие массы, то потенциал и сила тяжести могут быть определены однозначно как на поверхности, так и во внешнем пространстве. В качестве физической модели нормальной Земли используют земной эллипсоид вращения. Его называют *уровенным эллипсоидом*.

Для описания нормального поля и потенциала силы тяжести W нужны математические формулы. Формула потенциала центробежной силы Q имеет простой вид. Трудности возникают с определением потенциала силы притяжения V . Его вычисления по формуле (7.4) не могут быть выполнены, так как нет достаточно точных и детальных сведений о строении Земли. Обычно его задают двумя способами: набором так называемых эмпирических *гармонических коэффициентов* и некоторой системой *точечных масс*.

Гармонические коэффициенты. Формула (7.4) потенциала притяжения V раскладывается в ряд по так называемым шаровым функциям. При этом, если масса Земли равна M , ее экваториальный радиус равен a , то потенциал силы притяжения точки, находящейся во внешнем пространстве или на Земле и имеющей геоцентрические координаты ρ — радиус-вектор, Φ — широта и L — долгота, вычисляется по формуле:

$$V = \frac{GM}{\rho} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n (\bar{C}_{nm} \cos(mL) + \bar{S}_{nm} \sin(mL)) \bar{P}_{nm}(\sin \Phi) \right]. \quad (7.7)$$

В данном выражении \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} — безразмерные, нормированные, так называемые гармонические коэффициенты, $\bar{P}_{nm}(\sin \Phi)$ — известные нормированные функции от $\sin \Phi$ (так называемые присоединенные полиномы Лежандра степени n и порядка m). Предполагается, что начало координат совмещено с центром масс, а координатные оси — с главными осями инерции Земли. По этим причинам суммирование начинают от $n = 2$. Соответствующие функции и коэффициенты при них называют *зональными*, когда $m = 0$, *секториальными*, если $m = n$, остальные — *тессеральными*.

Зональные гармонические коэффициенты обозначают также как J_n . При этом:

$$J_n = -\bar{C}_{n0} \sqrt{2n+1}.$$

Зональные гармонические коэффициенты характеризуют гравитационное поле Земли по зонам между параллелями, секториальные — по секторам между меридианами, тессеральные — по трапециям между меридианами и параллелями. Чем больше n и m , тем меньше зоны, сектора, трапеции и тем детальнее описание гравитационного поля.

Гармонические коэффициенты определяют по результатам наблюдений искусственных спутников Земли, либо по измерениям силы тяжести. Оба метода дополняют друг друга. До запуска искусственных спутников Земли надежно был известен лишь самый крупный коэффициент — \bar{C}_{20} (J_2). Наблюдения орбит спутников позволили найти ряд других коэффициентов. Орбиты спутников определяются гравитационным полем Земли. Если бы Земля была правильным однородным шаром или состояла из однородных концентрических сферических слоев, то ИСЗ перемещались строго по законам Кеплера. Орбитой был бы эллипс, в одном из

фокусов которого расположен центр масс Земли. Она неподвижно лежала бы в плоскости, занимающей неизменное положение в космическом пространстве. В действительности траектории движений ИСЗ более сложные. Полярное сжатие Земли поворачивает плоскость орбиты и вращает орбиту в этой плоскости. Асимметрия северного и южного полушарий и другие неоднородности в строении Земли тоже оказывают свое влияние. Определения положений спутников в космическом пространстве и измерения их высот над морем позволили найти многие гармонические коэффициенты.

Спутники реагируют лишь на самые заметные неоднородности в строении Земли. Поэтому точность коэффициентов понижается с повышением их степени и порядка. Для детального изучения гравитационного поля привлекают наземные и морские измерения силы тяжести. В настоящее время используют коэффициенты свыше 2000-й степени и порядка.

Анализируя их, можно получить представление о форме Земли. Самый большой из коэффициентов $|\bar{C}_{20}| < 0,001$; остальные коэффициенты меньше его в сотни и тысячи раз. Если пренебречь всеми коэффициентами, то формула (7.7) совпадет с выражением (7.3), определяющим потенциал, который создавала бы Земля, состоящая из однородных концентрических сферических слоев. Это близко к истине, так как Земля имеет внутреннее ядро, ядро, оболочку или мантию и слой, называемый земной корой.

При сохранении лишь зональных коэффициентов функция V потенциала силы притяжения перестает зависеть от долгот L . Таким образом, зональные коэффициенты определяют гравитационный потенциал тела вращения. Земля по форме близка к телу вращения. Самый большой зональный коэффициент \bar{C}_{20} (J_2) обусловлен полярным сжатием Земли. Зональные коэффициенты с четными индексами соответствуют телу вращения, симметричному относительно плоскости экватора. Наличие зональных коэффициентов с нечетными индексами говорит о некоторой асимметрии северного и южного полушарий Земли.

Потенциал силы притяжения уровневого эллипсоида, симметричного относительно экватора, можно представить формулой лишь с четными зональными коэффициентами:

$$V_E = \frac{GM}{\rho} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho} \right)^{2n} \bar{C}_{2n} \bar{P}_{2n}(\sin \Phi) \right]. \quad (7.8)$$

На практике в выражении (7.8) вместо бесконечной суммы обычно оставляют лишь коэффициенты \bar{C}_{20} и \bar{C}_{40} . При этом полиномиальные функции от $\sin \Phi$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{20} &= \frac{\sqrt{5}}{2} (3 \sin^2 \Phi - 1), \\ \bar{P}_{40} &= \frac{3}{8} (35 \sin^4 \Phi - 30 \sin^2 \Phi + 3). \end{aligned}$$

Для нормального потенциала силы тяжести, с учетом формулы Q (7.2), имеем:

$$U = V_E + Q.$$

Фундаментальные геодезические постоянные. Геометрической моделью нормальной Земли является эллипсоид вращения. Центр эллипсоида совмещают с центром масс, а его ось вращения — с осью вращения Земли. У эллипсоида экваториальная полуось a , произведение гравитационной постоянной на массу GM , угловая скорость вращения ω и зональный коэффициент \bar{C}_{20} (J_2) должны быть такими же, как и у реальной Земли. Взамен полуоси a может быть задан потенциал U_0 на эллипсоиде. При этом требуют, чтобы объем эллипсоида равнялся объему геоида.

Параметры a , GM , ω , \bar{C}_{20} (J_2), а также скорость электромагнитных волн в вакууме c , называют *фундаментальными геодезическими постоянными*. Включение константы c в число фундаментальных постоянных обусловлено тем, что в современных условиях длины линий

определяют при помощи светодальномеров или радиодальномеров по времени и скорости распространения электромагнитных волн. Константа c устанавливает масштаб линейных построений. Таким образом, фундаментальные постоянные однозначно определяют нормальную Землю и масштаб геодезических построений на физической поверхности.

По фундаментальным геодезическим постоянным вычисляют сжатие уровенного эллипсоида α , его малую полуось b , значения нормальной силы тяжести γ_e на экваторе и γ_p на полюсе, и потенциал силы тяжести на его поверхности U_0 . Силу тяжести в нормальном поле определяет производная от потенциала U по нормали к сферопу. Ее значение γ_0 на эллипсоиде вычисляют по формуле Сомильяна:

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}.$$

Часто эту формулу упрощают и дают, например, в следующем виде:

$$\gamma_0 = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B),$$

указывая числовые значения коэффициентов β и β_1 . На высоте H метров по нормали над эллипсоидом сила тяжести γ равна:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial H} H \approx \gamma_0 - \frac{2\gamma}{\rho} H \approx \gamma_0 - 0,3086H \text{ (мГал)}. \quad (7.9)$$

Числовой коэффициент получен при средних для Земли значениях γ и ρ .

В разных координатных системах отсчета фундаментальные геодезические постоянные, естественно, несколько различаются. Ниже, в табл. 7.1, в качестве примера приводятся фундаментальные геодезические постоянные и некоторые производные параметры для геодезической системы *GRS-80* [23].

Точечные массы. Наряду с моделями гравитационного поля Земли в виде гармонических коэффициентов геопотенциала используются также модели в виде систем точечных масс. Эти модели позволяют более оперативно выполнять некоторые геодезические и навигационные расчеты. С этой целью в теле Земли "размещают" в определенных точках некоторое количество точечных масс. Масса M_i каждой точки составляет долю ϵ_i от общей массы M Земли. Потенциал притяжения точечной массы определяется формулой (7.3). Потенциал притяжения, создаваемый всеми точечными массами, равен сумме их потенциалов:

$$V = GM \sum_{i=1}^N \frac{\epsilon_i}{\rho_i},$$

где N — число точечных масс, ρ_i — расстояние от рассматриваемой точки до текущей точки точечной массы. Число точек, их расположение и массу подбирают так, чтобы создаваемое ими поле совпадало соответственно с реальным, нормальным или возмущающим полем.

Возмущающий потенциал. Возмущающий потенциал определяет аномальное поле и равен разности реального и нормального гравитационных потенциалов:

$$T = W - U = V - V_E.$$

Потенциалы V и V_E устанавливают с помощью гармонических коэффициентов. Возмущающий потенциал есть небольшая добавка к нормальному значению. Отношение потенциалов T/W составляет около 0,001%. Наличие аномального поля означает, что реальная сила тяжести g не совпадает с нормальной силой тяжести γ , как по величине, так и по направле-

нию, и обе они отклонены от нормали к эллипсоиду. Эти различия изучают по *аномалиям силы тяжести* и *уклонениям отвесных линий*.

Аномалии силы тяжести. Аномалией силы тяжести называют разность между измеренной величиной силы тяжести g и ее нормальным значением γ :

$$\Delta g = g - \gamma.$$

Если γ вычислено по формуле (7.9), то Δg называют *аномалией в свободном воздухе*. Если при этом g и γ отнесены к одной и той же высоте H , то аномалию называют *чистой*, иначе — *смешанной*. Иногда вводят поправку (редукцию) *за рельеф*, учитывающую отступления физической поверхности Земли от уровенной. Смешанные аномалии силы тяжести в свободном воздухе, а также исправленные за рельеф применяют в исследованиях, связанных с изучением фигуры Земли. В геофизических задачах учитывают также влияние притягивающих масс промежуточного слоя, а при измерениях силы тяжести под водой или под землей — и притяжения масс, лежащих выше точки наблюдения.

На всю территорию России составлены карты аномалий силы тяжести в масштабе 1:1 000 000. Создаются карты в масштабе 1:200 000, а на отдельные регионы — в масштабе 1:50 000. Карты строят способом изолиний. Сечения изоаномал на картах этих масштабов меняются от 5 мГал до 0,25 мГал. Положительные аномалии показывают в теплых желто-красно-коричневых тонах, отрицательные — в холодных сине-зеленых.

Таблица 7.1

Фундаментальные геодезические постоянные GRS 80

Обозначения, размерность	Параметры	Примечания
a , м	6 378 137	Большая полуось
b , м	6 356 752,3141	Малая полуось
α	1/298,257 222 101	Сжатие
GM , км ³ /с ²	3 986 005,5	Гравитационная постоянная
U_0 , м ² /с ²	6263 6860,850	Потенциал на эллипсоиде
\bar{C}_{20}	-484 166,855 10 ⁻⁹	Гармонический коэффициент
J_2	108 263 10 ⁻⁸	“
J_4	0.000 002 370 912 22	“
J_6	0.000 000 006 083 47	“
J_8	0.000 000 000 014 27	“
ω , рад/с	7292 115 10 ⁻¹¹	Угловая скорость Земли
γ_e , м/с ²	9,780 326 7715	Нормальная сила тяжести на экваторе
γ_p , м/с ²	9,832 186 3685	Нормальная сила тяжести на полюсе
c , м/с	299 792 458	Скорость электромагнитных волн в вакууме

Уклонения отвеса. Уклонение отвеса — одно из важнейших понятий в геодезии. Уклонения отвеса нужны для ориентирования референц-эллипсоидов, пересчета астрономических широт, долгот и азимутов в геодезические, приведения измеренных углов к значениям, которые будут получены после наклона вертикальной оси теодолита и ориентирования ее по нор-

мали к эллипсоиду, а также для решения других задач по установлению взаимосвязи между точками на физической поверхности и на эллипсоиде.

Различают отклонения отвеса в геометрическом и в физическом определении. Уклонение отвеса в *геометрическом* определении есть угол между направлениями отвесной линии и нормали к эллипсоиду; в *физическом* определении — угол между направлениями действительной и нормальной сил тяжести. Если отклонения отвеса определены по отношению к общеземному эллипсоиду, их называют *абсолютными*, а если по отношению к референц-эллипсоиду, ориентированному лишь на отдельный регион Земли, — *относительными*.

Уклонения отвеса, найденные из сопоставления астрономических и геодезических широт и долгот, называют *астрономо-геодезическими*, а полученные по измерениям аномалий силы тяжести — *гравиметрическими*. Гравиметрические уклонения отвеса всегда абсолютны и в физическом определении; астрономо-геодезические — в геометрическом определении и могут быть как абсолютными, так и относительными. Абсолютные в физическом определении уклонения отвеса вычисляют также по возмущающему потенциалу.

Изменение силы тяжести вызывает непараллельность уровенных поверхностей нормального поля (рис. 7.1). Уровенная поверхность, проходящая на полюсе на высоте 100 м над эллипсоидом, на экваторе находится на 53 см выше. Силовые линии нормального поля обращены вогнутостью к оси вращения эллипсоида. На поверхности уровенного эллипсоида нормальная сила тяжести не постоянна и зависит от широты, она максимальна на полюсе эллипсоида, где достигает значения 983,2 Гал, и минимальна на экваторе, где она равна 978,0 Гал. Наибольшую кривизну силовые линии имеют на широте 45° [11].

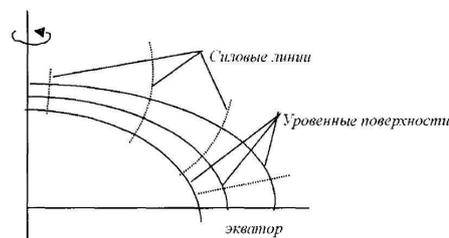


Рис.7.1. Силовые линии

На значительную часть России составлены карты, на которых уклонения отвеса отображены со СКП 0,5-1", а в горных районах грубее — 5-7".

Взаимосвязь астрономических и геодезических координат. Допустим, что ось земного эллипсоида параллельна оси вращения Земли, и параллельны плоскости начала отсчета астрономических и геодезических долгот. Из некоторой точки на физической поверхности, как из центра, построим сферу единичного радиуса. Из этой же точки проведем четыре прямые до пересечения их со сферой: линию, параллельную оси вращения Земли, которая пересечет сферу в точке полюса P ; нормаль к эллипсоиду, которая даст на сфере точку n ; направление нормальной силы тяжести γ до пересечения со сферой в точке Z' и направление силы тяжести Земли g до пересечения на сфере в точке астрономического зенита Z^* . Примерный вид этой сферы сверху отображён на рис. 7.1. Отметим, что точки P, n, Z' лежат в плоскости геодезического меридиана долготы L , а точки P, Z^* - в плоскости астрономического меридиана долготы λ . Угол у полюса P между двумя упомянутыми меридианами равен разности долгот ($\lambda - L$).

Сила тяжести в каждой точке направлена по нормали к текущей уровенной поверхности (рис. 7.1). Силовые линии нормального поля — плоские кривые. Они лежат в плоскости геодезического меридиана. Силовые линии реального поля — пространственные кривые. Вектора сил тяжести направлены по касательным к силовым линиям. Из-за кривизны силовых линий нормального гравитационного поля направления сил тяжести γ не совпадут с нормалью к эллипсоиду. Между ними на высоте H над эллипсоидом образуется малый уголок

$$\Delta B'' = 0,171'' H \sin 2B .$$

Высота H выражена в километрах. Угол ΔB на рис. 7.2 соответствует отрезку nZ' .

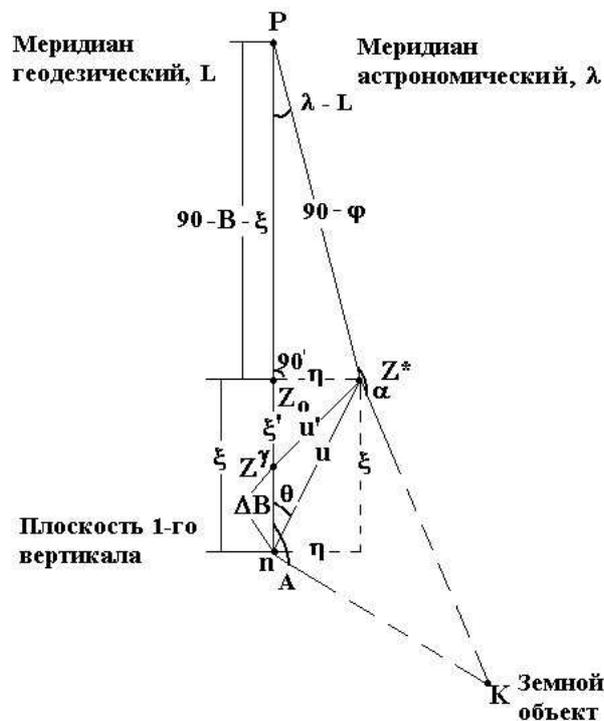
По определению геодезических и астрономических широт дуга небесной сферы Pn равна $(90 - B)$, а дуга PZ^* — $(90 - \varphi)$. Дуга nZ^* соответствует уклонению отвеса u в геометрическом определении, а дуга $Z'Z^*$ — уклонению отвеса u' в физическом определении. Уклонения отвесных линий u' и u раскладывают на составляющие: ξ' и ξ — в плоскости геодезического меридиана и η — в перпендикулярной к меридиану плоскости первого вертикала. При этом составляющая ξ соответствует отрезку дуги nZ_0 (рис. 7.2). Следовательно:

$$\xi = \xi' + \Delta B.$$

Уклонение отвеса u в направлении, заданном азимутом θ , получают, спроектировав на это направление составляющие ξ и η :

$$u = \xi \cos \theta + \eta \sin \theta.$$

Уклонения отвеса — величины малые, большей частью составляют несколько угловых секунд и, вероятно, не превышают $1'$. Из сферического треугольника PZ^*Z_0 с прямым углом у вершины Z_0 , вследствие малости стороны η и угла $(\lambda - L)$, с достаточной точностью получаем:



$$90 - \varphi = 90 - B - \xi,$$

$$\sin \eta = \sin(\lambda - L) \cos \varphi.$$

После замены синусов значениями их малых углов следуют выражения для составляющих астрономо-геодезических уклонений отвеса:

$$\xi = \varphi - B,$$

$$\eta = (\lambda - L) \cos \varphi.$$

Отсюда следуют формулы для вычисления геодезических широт и долгот по астрономическим координатам:

$$B = \varphi - \xi,$$

$$L = \lambda - \eta / \cos \varphi.$$

Опуская промежуточные выводы, приводим формулы связи геодезического A и астрономического a азимутов на некий земной предмет K :

$$A = a - (\lambda - L) \sin \varphi + (\eta \cos A - \xi \sin A) \operatorname{ctg} Z,$$

где Z — зенитное расстояние рассматриваемого направления. В астрономический азимут a введены две поправки; первая из них учитывает влияние на азимут несовпадения плоскостей астрономического и геодезического меридианов, вторая — несовпадения вертикальной оси теодолита с нормалью к эллипсоиду. Поэтому

$$\Delta M = (\eta \cos A - \xi \sin A) \operatorname{ctg} Z$$

является поправкой в измеренные горизонтальные направления за переход с физической поверхности к эллипсоиду.

В равнинной местности зенитные расстояния направлений на земные предметы близки к 90° , поэтому поправки ΔM в большинстве случаев малы, не превосходят $0,05''$. Ими пренеб-

Рис. 7.2. Взаимосвязь астрономических и геодезических широт и долгот

регают, и уравнения взаимосвязи геодезического и астрономического азимутов представляются более простыми формулами:

$$A = a - (\lambda - L)\sin \varphi,$$

$$A = a - \eta \operatorname{tg} \varphi.$$

Формулы называют *уравнениями Лапласа*, вычисленные по ним геодезические азимуты — *азимутами Лапласа*, а пункты, на которых они определены — *пунктами Лапласа*. Азимуты Лапласа очень важны для правильного ориентирования на местности геодезических сетей.

Системы счета высот. Для определения точек над эллипсоидом используется геодезическая высота (H) – расстояние, отсчитываемое по нормали от поверхности эллипсоида до определяемой точки. Это геометрическая высота, её величина не зависит от силы тяжести.

Однако на Земле все материальные объекты подвержены воздействию силы тяжести. Поэтому в повседневной практике используются не геодезические высоты, а высоты, связанные с силой тяжести. Эти высоты определяются расстояниями, отсчитываемыми от выбранной отсчетной поверхности, обычно расположенной ближе к уровню моря. Строго говоря, высоты следует определять по силовым линиям силы тяжести. Из-за непараллельности уровней поверхностей высоты точек зависят от пути проложения нивелирного хода. Расстояния от зеркала воды водоёма до отсчётной поверхности у южного края будут большими, чем у его северных границ. Разница в высотах особенно будет ощутимой, если водоём вытянут по меридиану,

При введении системы высот требуется выполнение ряда условий: 1) высоты пунктов должны быть однозначно определены независимо от трассы нивелирования; 2) высоты должны вычисляться лишь по фактическим измерениям без привлечения каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли; 3) система счета высот должна обеспечивать строгую связь с геодезическими высотами над эллипсоидом.

В разных странах нашли распространение две системы счета высот: *ортометрические высоты*, считающиеся от геоида, и *нормальные высоты*, вычисляемые от поверхности эллипсоида. В инженерно-прикладной практике применяется специальная система *динамических высот*.

При определениях высот точек земной поверхности кривизной силовых линий обычно пренебрегают. Полагают, что высоты можно определять по нормальям к эллипсоиду. При вы-

сотах до 10 км погрешности по этой причине не превышают 0,01 мм [12, с. 218].

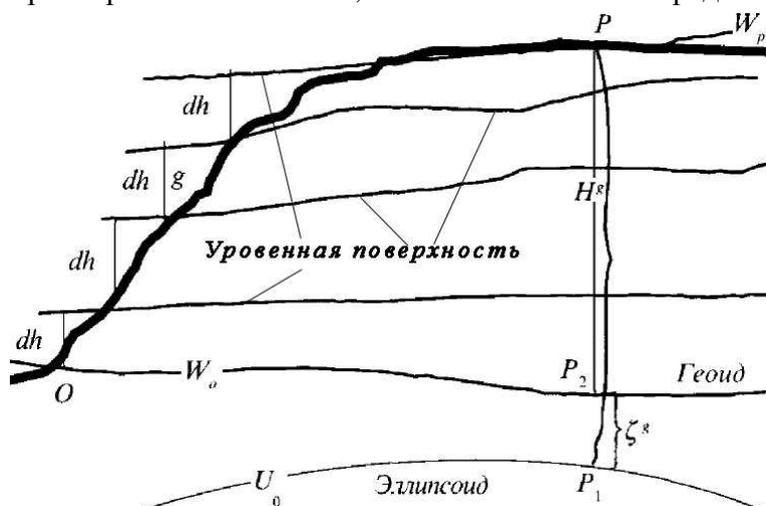


Рис. 7.3. Система счета ортометрических высот

Ортометрические высоты. Название от греч. *orthós* – вертикальный и *metréō* – измеряю. Одна из старейших систем счета высот. На рис. 7.3 отображены физическая (утолщенная линия) и уровенные поверхности реального (W) и нормального (U) потенциалов силы тяжести. Геоид проходит через точку O – начало счета высот. Пусть на физической поверхности по линии OP проложен нивелирный ход и

измерены превышения dh между передними и задними рейками, а также выполнены гравиметрические работы и определены значения силы тяжести g .

Потенциал силы тяжести Земли в точке O равен W_o , а в точке P – W_p . Для анализа систем счета высот воспользуемся дифференциальным уравнением (7.5) зависимости приращения потенциалов dW от разности высот dh двух бесконечно близких уровенных поверхностей. Интегрируя dW по трассе OP , получим уравнение для разности потенциалов между точками O и P :

$$W_p - W_o = \int_{OP} dW = - \int_{OP} g dh.$$

Этот результат не зависит от выбора трассы нивелирования. При перемене знака он соответствует работе, которая должна быть проделана в поле силы тяжести вследствие перемещения единичной массы из точки O в точку P . Обозначим через

$$C_p = \int_{OP} g dh = W_o - W_p,$$

где C_p называют *геопотенциальной величиной* (геопотенциальным числом). Она участвует в определениях высот любой системы. Геопотенциальная величина может быть представлена следующим образом:

$$C_p = \int_{OP} g dh = \int_{OP_2} g dh + \int_{P_2P} g dh = \int_{P_2P} g dh = g_m H^g,$$

где интеграл по линии OP_2 равен нулю, так как эта линия лежит на геоиде, g_m - среднее интегральное значение силы тяжести на отрезке P_2P . Отрезок P_2P направлен не по силовой линии, а по нормали к эллипсоиду. Его называют *ортометрической высотой*. Имеем:

$$H^g = \frac{C_p}{g_m} = \int_{OP} dh + \int_{OP} \frac{(g - g_m)}{g_m} dh = H^p + f^g.$$

В данной формуле ортометрическая высота представлена суммой *измеренной* по результатам нивелирования высотой H^p и добавкой к ней f^g .

На рис. 7.3 ζ^g соответствует отрезку P_1P_2 нормали к эллипсоиду и является высотой геоида над эллипсоидом. Её можно рассматривать как в реальном, так и в нормальном поле [11, с. 202]:

$$\zeta^g = \frac{W_{P_1} - W_o}{g_m^{(P_1P_2)}}, \quad \zeta^g = \frac{U_o - U_{P_2}}{\gamma_m^{(P_1P_2)}}.$$

Как следует из рис. 7.3, геодезическая высота определяется отрезком нормали к эллипсоиду P_1P и является суммой ортометрической высоты и высоты геоида:

$$H = H^g + \zeta^g. \tag{7.10}$$

Геометрически ясное понятие ортометрической высоты оказывается строго нереализуемым. Высоты (7.10) принципиально не определимы по измерениям на физической поверхности Земли; приходится использовать ту или иную гипотезу строения земной коры.

“Ортометрическая высота хороша для неспециалистов. Это высота над уровнем моря, которую каждый может себе вообразить, не вдаваясь в точное определение понятия уровня моря. Но геодезия – наука точная, и здесь нельзя ограничиться интуитивными представлениями ...” [10].

Нормальные высоты. На основании формулы (7.6) для потенциалов силы тяжести реального и нормального полей точки M имеем (7.4):

$$W_M = U_M + T_M.$$

Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$W_M - W_0 = U_M - U_0 + T_M - (W_0 - U_0) = -C_M,$$

где W_0 и U_0 — значения потенциалов силы тяжести соответственно на геоиде и на эллипсоиде. Отсюда:

$$U_0 - U_M = C_M + T_M + (U_0 - W_0).$$

Представим данное выражение следующим образом:

$$U_0 - U_M = (U_0 - U_{M^\gamma}) + (U_{M^\gamma} - U_M).$$

Потенциал сферопа точки M_γ равен (рис. 7.4):

$$U_{M^\gamma} = U_0 - C_M.$$

Очевидно,

$$(U_{M^\gamma} - U_M) = T_M + (U_0 - W_0).$$

Разделим эти разности потенциалов на средние интегральные значения нормальной силы тяжести $\gamma_m, \gamma_m', \gamma_m''$, вычисленные соответственно на отрезках M_eM, M_eM_γ и $M_\gamma M$:

$$\frac{U_0 - U_M}{\gamma_m} = \frac{(U_0 - U_{M^\gamma})}{\gamma_m'} + \frac{(U_{M^\gamma} - U_M)}{\gamma_m''}.$$

Каждый член данного выражения имеет смысл высоты: слева от знака равенства *геодезическая* высота H , справа — сумма *нормальной* H^γ и *аномальной* ζ высот:

$$H = H^\gamma + \zeta.$$

При этом:

$$H = \frac{U_0 - U_M}{\gamma_m},$$

$$H^\gamma = \frac{C_M}{\gamma_m'} = H^M + f^\gamma,$$

$$\zeta = \frac{T_M + (U_0 - W_0)}{\gamma_m''}.$$

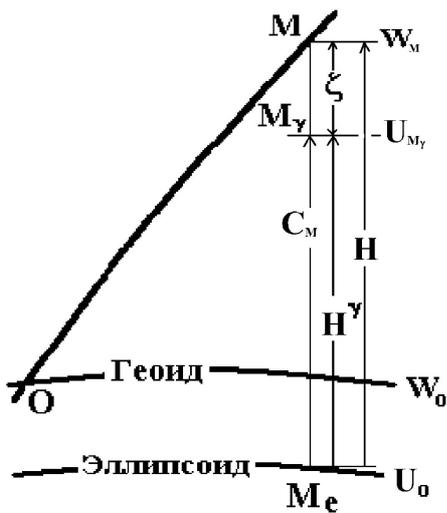


Рис. 7.4. Система счета нормальных высот

Средние интегральные значения нормальной силы тяжести легко вычислить на основании (7.9) по формуле

$$\gamma_m = \frac{1}{H} \int_0^H \gamma dH = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial H} \frac{H}{2}.$$

Геодезическая высота H , как уже отмечалось, в современных условиях может быть определена по измерениям спутниковыми системами позиционирования.

Нормальная высота для удобства вычислений преобразована: выделена измеренная геометрическим нивелированием высота H^M и поправка к ней f^γ за непараллельность уровневых поверхностей нормального поля силы тяжести и за аномалии силы тяжести [6].

Все высоты могут быть определены строго лишь по измерениям на физической поверхности без привлечения каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли.

Практически нормальные высоты определяют по реперам с известными отметками. Нормальная высота в точке r по отношению к высоте в точке p вычисляется по формулам [14]:

$$H_r^\gamma = H_p^\gamma + h + f,$$

$$f = -\frac{1}{\gamma_m}(\gamma_0^r - \gamma_0^p) \times H_m + \frac{1}{\gamma_m}(g - \gamma)_m \times h.$$

В формулах h – измеренное нивелирное превышение между реперами, H_m – средняя высота реперов, $(g - \gamma)_m$ – среднее из аномалий силы тяжести в точках p и r .

Если потенциал на уровне эллипсоида равен потенциалу на геоиде, $U_0 = W_0$, то выражение для аномалий высот упрощается; опуская индексы, получаем формулу Г. Брунса:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}.$$

Нормальные высоты, отложенные по нормальям от эллипсоида, в совокупности образуют поверхность, которую называют Землей *первого приближения* или *теллуридом*.

Возможна иная интерпретация. Отложим нормальные высоты по нормальям вниз от точек физической поверхности. Получим новую, близкую к геоиду поверхность — *квазигеоид*. Соответственно аномалии ζ станут *высотами квазигеоида*.

Отступления квазигеоида от геоида равны разности нормальных и ортометрических высот:

$$H^\gamma - H^g = \frac{C_M}{\gamma_m} - \frac{C_M}{g_m} = \frac{(g_m - \gamma_m)}{g_m} H^\gamma.$$

На высотах $H^\gamma = 0$ эта разность равна нулю; при значениях $(g_m - \gamma_m) = 50$ мГал, $H^\gamma = 500$ м — разности составляют около 2,5 см. Таким образом, на морях геоид и квазигеоид совпадают. На равнинах отступления квазигеоида от геоида составляют несколько сантиметров. Наибольшие расхождения этих двух поверхностей, достигающие до 2 метров, могут иметь место на высокогорных плато. Высоты квазигеоида обязательны для установления взаимосвязи нормальных и геодезических высот.

Теория нормальных и аномальных высот разработана в 40-е годы М.С. Молоденским (1909 -1991). Главным преимуществом нормальных и аномальных высот является то, что их можно строго и однозначно определить лишь по измерениям на физической поверхности Земли.

Динамические высоты. Ортометрические и нормальные высоты не остаются постоянными у берегов протяженных, вытянутых по меридиану, водоемов. Следует отметить, что нормальные высоты, в отличие от ортометрических высот, изменяются лишь с изменением широты. Однако и эти изменения могут быть значительными. Так, например, у озера Байкал максимальная разность нормальных высот составляет 165 мм. Это обстоятельство затрудняет расчеты, связанные с проектированием гидротехнических сооружений.

Для удобства выполнения гидротехнических расчетов вводят так называемые *динамические высоты*, имеющие одинаковые значения для одной и той же уровенной поверхности. Их вычисляют по формуле:

$$H^d = \frac{C_M}{\gamma_d},$$

В качестве γ_d принимают значение силы тяжести для средней широты изучаемого района или постоянное значение для широты 45° . Динамические высоты по величине значительно отличаются от ортометрических и нормальных.

Способы определения высот квазигеоида. Проблема определения аномалий высот представляет научный и практический интерес. Зная нормальные высоты H^N и высоты квазигеоида ζ , можно вычислить геодезические высоты H . ГНСС позволяют решать обратную задачу – получать нормальные высоты H^N по геодезическим высотам H и высотам квазигеоида ζ . Эти геодезические работы называют *спутниковым нивелированием*. Спутниковое нивелирование уже пригодно для работ от технического нивелирования до нивелирования III класса точности. Имеются публикации, где сообщается об определениях превышений II класса точности с ошибкой ± 2 мм/км [18].

Существует ряд способов определения высот квазигеоида [15].

1. *Астрономическое нивелирование*; выполняется по астрономо-геодезическим уклонениям отвеса. Дифференциальная формула астрономического нивелирования имеет вид:

$$d\zeta = -\vartheta' ds,$$

где ϑ' составляющая уклонения отвеса в физическом определении (в радианах), ds - элементарный отрезок пути. Интегрируя по некоторой нивелирной трассе AB , находят:

$$\Delta\zeta_{AB} = - \int_{AB} \vartheta' ds.$$

Относительные астрономо-геодезические уклонения отвеса известны лишь на астропунктах, которые в государственных геодезических сетях России были размещены через 70 - 100 км. Поэтому при вычислениях приходилось предполагать, что уклонения отвеса на расстоянии S_{AB} между пунктами изменяются *линейно* и решать интеграл численно по формуле:

$$\zeta_B - \zeta_A \approx -\frac{\vartheta'_A + \vartheta'_B}{2} S_{AB},$$

2. *Гравиметрический способ*. Способ основан на формуле Д.Г. Стокса и измерениях аномалий силы тяжести в свободном воздухе. Строго говоря, гравиметрические данные должны быть известны по всей планете.

3. *Астрономо-гравиметрическое нивелирование*. Способ предложен М.С. Молоденским в 1937 г. Он объединяет сильные стороны двух предыдущих способов: редкая сеть астрономических данных дополняется гравиметрическими измерениями. Пусть определены гравиметрические высоты квазигеоида ζ и гравиметрические составляющие уклонений отвеса ϑ . По аналогии с формулой астрономического нивелирования можно записать:

$$\bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A = -\frac{\bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_B}{2} s_{AB}.$$

Отсюда следует формула:

$$\zeta_B - \zeta_A = -\frac{\vartheta'_A + \vartheta'_B}{2} s_{AB} + (\bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A + \frac{\bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_B}{2} s_{AB}).$$

Выражение в скобках называют *гравиметрической поправкой*. Она учитывает нелинейность изменений уклонений отвеса между пунктами и этим повышает точность астрономо-гравиметрического нивелирования до нескольких сантиметров на 1 км хода.

4. *Гравиметрический метод*, основан на непосредственных высокоточных, с точностью $\sim 0,1''$, измерениях приращений астрономо-геодезических уклонений отвесных линий при перемещении от одного пункта к другому. По измеренным приращениям уклонений отвесных линий и известным расстояниям между пунктами вычисляются превышения квазигеоида

(геоида). Метод эффективен и точен для изучения поверхности квазигеоида (геоида) особенно в континентальной части земного шара [3].

5. *Использование моделей возмущающего потенциала*, когда высоты квазигеоида представляют в функции гармонических коэффициентов:

$$\zeta = \frac{GM}{\gamma\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho}\right)^n \left(\bar{C}'_{nm} \cos(mL) + \bar{S}_{nm} \sin(mL) \right) \bar{P}_{nm}(\sin \Phi).$$

В формуле \bar{C}'_{nm} и \bar{S}_{nm} - безразмерные нормированные гармонические коэффициенты степени n и порядка m . Первый из них обозначает разность между соответствующими коэффициентами в формулах для вычислений потенциалов притяжения реальной и нормальной Земли. Чем больше числа n и m , тем детальнее описание гравитационного поля. Чтобы обеспечить надлежащую точность, надо суммировать слагаемые с коэффициентами высоких степеней и порядка. Даже при коэффициентах до 200 степени и порядка средняя квадратическая погрешность в высоте составляет 1,5 - 2 м. При этом объём вычислений резко возрастает. Когда степень и порядок n , то ряд содержит слагаемых

$$n(n+3)-4.$$

Если $n = 200$, то придется суммировать 40 596 членов.

Положение точки, в которой вычисляется высота ζ , определяет радиус-вектор ρ , геоцентрическая широта Φ и долгота L .

6. *Способ спутниковой альтиметрии* выполняется над морем по спутниковым радиовысотомерным измерениям и основан на соотношении:

$$\zeta = H_{\text{выч}} - H_{\text{изм}} + \Delta h,$$

где $H_{\text{изм}}$ — измеренная высота спутника над морской поверхностью, $H_{\text{выч}}$ — вычисленная геодезическая высота спутника над эллипсоидом, Δh — сумма поправок в измерения за влияния погрешностей аппаратуры высотомера, внешней среды, отличия морской поверхности от уровенной, за высоту морских волн и др. Реальная точность определения высот квазигеоида (геоида) характеризуется СКП около дециметра.

7. *Геодезический способ*, основан на использовании ГНСС для определения геодезических высот H , а также наземных нивелирных и гравиметрических измерений для нахождения нормальных высот H^{γ} и вычисления высот квазигеоида по формуле

$$\zeta = H - H^{\gamma}.$$

8. *Интерполяционный способ*, когда аномалии высот вычисляют, интерполируя данные с геодезических пунктов, на которых известны нормальные и геодезические высоты.

9. *Определение аномалий высот по гравитационным моделям и картам* квазигеоида.

10. *Комбинированные способы*. Высоты квазигеоида вычисляют, комбинируя доступные всевозможные способы. В ближней зоне используют наземные гравиметрические данные вокруг исследуемого пункта и высоты вычисляют по интегральной формуле Д.Г. Стокса. Для учета влияния дальних зон применяют ряды с гармоническими коэффициентами. Дополнительно привлекают результаты измерений спутниковыми системами позиционирования и данные спутниковой альтиметрии над акваториями.

Определение нормальных высот спутниковым нивелированием. По координатам X, Y, Z , найденным посредством ГНСС измерений, можно определить геодезические высоты H (раздел б), а по ним вычислить нормальные высоты H^{γ} :

$$H^{\gamma} = H - \zeta,$$

где ζ – аномалии высот. Такой метод определения нормальных высот называют *спутниковым нивелированием*. Таким образом, для вычисления нормальных высот по геодезическим высотам нужны гравиметрические определения, карты или модели аномалий высот.

Аномалии высот изменяются с увеличением расстояний между пунктами. Неучет этих изменений ведет к погрешностям в передаче нормальных высот. Приближенно можно полагать, что с каждым километром аномалия ζ изменяется на 1–2 см. При расстояниях между пунктами 50 км эти погрешности могут составить дециметры и даже превысить 1 м.

Рассмотрим несколько подходов к решению задачи спутникового нивелирования.

1. Способ Гаусса. На некотором участке имеется n опорных пунктов с известными нормальными высотами H^y и геодезическими высотами H_{GPS} . Алгоритм пересчета следующий.

- Определяются веса измерений $P_i = (1/S_i)^q$, где S_i – расстояние от текущей определяемой точки до i -го опорного пункта с известными высотами. Степень $q \geq 0$ (подбирается экспериментально).
- Вычисляется нормальная высота определяемого пункта по формуле *среднего весового*:

$$H^y = H_{GPS} + \sum (H^y - H_{GPS})_i P_i / \sum P_i.$$

Представление о точности алгоритма Гаусса можно получить по исследованиям в работе [1]: на участке площадью 20км × 20км по четырём опорным пунктам, при $q = 2$, определены нормальные высоты трёх пунктов с ошибками -2, -7 и -13 мм. Точность способа зависит от числа опорных пунктов и равномерности их распределения на участке. Степенью q регулируется влияние отдалённых пунктов – чем степень больше, тем меньше вес этих пунктов.

Очевидно, что способ можно применять к определению не только нормальных высот, но и любых, созданных в локальной системе высот.

2. Способ формирования поверхности аномалий высот с использованием интерполяционных формул. В этом случае измерения спутниковой системой выполняются не только на определяемых пунктах, но и на опорных пунктах, нормальные высоты которых уже известны. Это дает возможность на опорных пунктах вычислить аномалии высот ζ и интерполировать их на искомые пункты. Интерполяционная функция формирует некоторую поверхность аномалий высот в локальной системе плоских прямоугольных координат (x, y) :

$$\zeta = f(x, y).$$

Интерполяционной функцией часто служат полиномы не выше второй степени, например:

$$\zeta = Ax + By + Cxy + D,$$

где x, y – плоские прямоугольные координаты, A, B, C, D – искомые коэффициенты. Если эти коэффициенты известны, тогда можно вычислять аномалии высот. Чтобы их найти, необходимо иметь не менее 4-х значений ζ . Если их более 4, следует составить уравнения поправок

$$v_i = Ax_i + By_i + Cx_i y_i + D - \zeta_i,$$

и решить систему нормальных уравнений:

$$A^T AK - A^T L = 0,$$

где A – матрица, i -ая строка которой содержит величины $x_i, y_i, x_i y_i, 1$; вектор $K = (A, B, C, D)^T$ – включает искомые параметры; $L = (\zeta_1, \dots, \zeta_i, \dots)^T$ – вектор исходных значений аномалий высот. Опорные пункты с известными нормальными высотами должны быть равномерно распределены по участку работ или, по крайней мере, находиться в его середине и на краях. Рекомендуют, чтобы определяемый пункт опирался на пять или большее число опорных пунктов [7].

В публикации [22] дан анализ способов построения поверхностей аномалий высот; при этом рассматривались разные интерполяционные функции, соответствующие по точности требованиям нивелировок IV класса.

3. Способы, основанные на образовании разностей высот двух пунктов. Для нормальных высот двух точек A и B можно записать:

$$H_A^\gamma = H_A - \zeta_A,$$

$$H_B^\gamma = H_B - \zeta_B.$$

Из этих формул получают:

$$H_B^\gamma = H_A^\gamma + (H_B - H_A) - (\zeta_B - \zeta_A).$$

Для вычисления нормальной высоты пункта B по нормальной высоте пункта A надо знать разности геодезических высот и аномалий высот этих пунктов. Пути решения различны [1, 8 и др.]. Для учета изменений аномалий высот могут быть использованы полиномы, как правило, не выше второй степени, или углы наклона поверхностей квазигеоида и земного эллипсоида.

При расстояниях между пунктами до 10 км участки эллипсоида и квазигеоида приближённо заменяются плоскостями, и учитывается либо угол наклона плоскости эллипсоида к плоскости квазигеоида, либо два угла наклона - вдоль оси x и вдоль оси y . Рассмотрим подробнее второй способ, следуя публикации [1].

Используя максимально разнесённые на участке пункты по оси x и по оси y , вычисляют градиенты изменений аномалий высот по направлениям этих осей:

$$G_x = \left[(H_{x_{\max}}^\gamma - H_{x_{\min}}^\gamma) - (H_{x_{\max}} - H_{x_{\min}}) \right] / (x_{\max} - x_{\min}),$$

$$G_y = \left[(H_{y_{\max}}^\gamma - H_{y_{\min}}^\gamma) - (H_{y_{\max}} - H_{y_{\min}}) \right] / (y_{\max} - y_{\min}).$$

Нормальная высота точки B по нормальной высоте пункта A вычисляется по формуле:

$$H_B^\gamma = H_A^\gamma + (H_B - H_A) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[G_x (x_B - x_A) + G_y (y_B - y_A) \right].$$

На упоминавшемся выше участке площадью 20км × 20км по четырём опорным пунктам определены указанным способом нормальные высоты трёх пунктов с ошибками -4, -2 и +1 мм. Авторы статьи [1] отмечают, что способ градиентов вдоль осей x и y значительно проще способов, использующих интерполяционные полиномы, и при расстояниях до 10 км спутниковое нивелирование может выполняться с точностью не хуже технического нивелирования. Способ успешно был внедрён в практику работ вдоль скоростной Октябрьской железной дороги Москва – Санкт-Петербург.

4. Способы, основанные на применении гравитационных моделей Земли (EGM). В настоящее время такие модели рассчитываются по формулам с гармоническими коэффициентами очень высокой степени и порядка. Известна модель *EGM-96*, разработанная Годдарским центром космических полётов *NASA GSFC*, Национальным агентством по космическим изображениям и картографированию *NIMA* и Университетом штата Огайо *OSU*. При её построении использовано более 60 тыс. гармонических коэффициентов [21, 25].

Национальной службой геопространственной разведки США *NGA* подготовлена новая гравитационная модель Земли *EGM-2008*; при её разработке использованы гармонические коэффициенты до 2159-й степени и порядка [19, 20]. Число членов ряда с ростом степени и порядка гармонических коэффициентов увеличивается по арифметической прогрессии, и в этой модели это число составило 2 333 877. Дополнительно использованы коэффициенты до

2190 степени и до 2159 порядка. Карта модели *EGM-2008* дана в работе [24]. СКО высот геоида по земному шару составляет 20-25 см.

Российскими специалистами создан ряд моделей гравитационного поля Земли [9]. В 2008 г. работы выполнены сотрудниками ГАО-98, ЦНИИГАиК и 29 Института МО РФ [4].

В работе [2] выполнен анализ определения нормальных высот по спутниковым наблюдениям. Рассмотрены модель *EGM-96* с шагом матрицы значений по широте и долготе $15' \times 15'$ и модель *EGM-2008* с шагом $10' \times 10'$, $2,5' \times 2,5'$ и $1' \times 1'$. Вычисления велись по формуле:

$$H^\gamma = H_{WGS-84} - \zeta_g - h,$$

где H^γ - нормальная высота в Балтийской системе высот 1977 г, H_{WGS-84} - геодезическая высота над эллипсоидом *WGS-84*, ζ_g - высота геоида *EGM* над эллипсоидом *WGS-84*, h - превышение геоида *EGM* над квазигеоидом в Балтийской системе высот 1977 г. Модель *EGM-2008* продемонстрировала удовлетворительные результаты во всех оцениваемых вариантах. В большинстве случаев лучшую сходимость вычисленных нормальных высот с их значениями в каталогах продемонстрировали модели *EGM-2008* с шагом значений $2,5' \times 2,5'$ и $1' \times 1'$. Отметки высот, определяемые по этой технологии, соответствуют требованиям нивелировок III и IV классов точности.

В работе [13] отмечается, что практически доказана возможность по результатам спутниковых наблюдений и модели *EGM-2008* передавать нормальные высоты на расстояния 10–30 км с погрешностью не хуже 10 см.

Другой путь - использование *модельных аномалий высот* ζ_m и поправок к ним $\delta\zeta$:

$$H^\gamma = H - (\zeta_m + \delta\zeta).$$

Для нахождения поправок используются опорные пункты, на которых известны нормальные высоты, определены при помощи ГНСС геодезические высоты и вычислены модельные аномалии высот. На этих опорных пунктах поправки вычисляются по формуле:

$$\delta\zeta = H - H^\gamma - \zeta_m.$$

Поправки на определяемых пунктах вычисляются при помощи интерполяционной функции $f(x, y)$, аргументами в которой являются плоские прямоугольные координаты x, y . Для определения параметров интерполяционной функции МНК следует составить для каждого опорного пункта уравнение поправок вида:

$$v_i = f_i(x, y) - \delta\zeta_i.$$

Линейный полином, с частичным удержанием элементов полинома второй степени, использован для определения нормальных высот пунктов морской уровенной сети в акватории Финского залива; высоты получены со СКО = 27 мм [16].

Общеземная система счёта высот. На Земле действует несколько вертикальных систем с разными потенциалами W_0 силы тяжести в исходных пунктах. Нули всех исходных пунктов связаны с уровнями разных морей и в целом близки к среднему уровню океанов, но это разные системы. Мировая общественность работает в направлении теоретического и практического развития единой *Глобальной вертикальной отсчётной основы - GVRF*. Разработана методика реализации такой системы на основе региональных вертикальных отсчётных основ Северной Америки *NAVD-88*, Австралии *AHD 71*, Франции Национального географического института *IGN 69* и Бразилии *BHD 57*. Вертикальные сдвиги упомянутых высотных систем отнесены к принятому значению геопотенциала $W_0 = 62\,636\,856,0 \pm 0,5 \text{ м}^2/\text{с}^2$, и определены на уровне точности 5 см [17].

В РФ разработана теория введения единой глобальной системы нормальных высот [5].

В рассматриваемом случае фиксированный, закреплённый исходный пункт, в котором нормальная высота равна нулю, отсутствует. Систему счёта высот определяет совокупность

геодезических пунктов, в которых известны геодезическая высота H по спутниковым данным, нормальная высота H^N по нивелирным измерениям и аномалия высоты ζ по гравиметрическим данным.

Источники информации Лекции 7

1. Баландин В. Н., Меньшиков И. В., Штерн С. Л. К вопросу определения нормальных высот точек для локальных объектов на основе спутникового нивелирования // Геодезия и картография. 2012. № 10. С.17-21.
2. Вдовин А. И., Мурзинцев П. П., Титов С. С. Выбор модели квазигеоида при создании опорной геодезической сети // Геодезия и картография. 2009. № 11. С. 16-19.
3. Геодезия. Понятие о редуцированной задаче. <http://geodetics.ru/reduktzadacha.html> (Дата обращения 13.07.2014)
4. Демьянов Г. В., Майоров А. Н., Побединский Г. Г. Вопросы построения государственной системы координат Российской Федерации // Геодезия и картография. 2011. № 11. С. 17–25.
5. Демьянов Г. В., Майоров А. Н., Юркина М. И. Построение общеземной системы нормальных высот // Геодезия и картография. 2009. № 1. С. 12-16.
6. Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов. М.: Недра. 1990. -168 с.
7. Ложкин А. О., Ходаков П. А. Исследование стабильности геодезических центров в районе вечной мерзлоты // Геодезия и картография. 2012. № 3. С.21-26.
8. Непоклонов В. Б., Чугунов И. П., Яковенко П. Э., Орлов В. В. Новые возможности развития сети нормальных высот на территории России // Геодезия и картография. 1996. № 7. С. 20-22.
9. Непоклонов И. Б. Использование методов космической геодезии для изучения планетарного геоида. (Дата обращения 13.07.2014) <http://www.credo-dialogue.com/getattachment/acada6fe-85e6-4eec-b195-88ae886cbd20/Ispolzovanie-methods.aspx>
10. Огородова Л.В. Теория Молоденского и геоид // Геодезия и картография. 2013. № 8. С. 1-7.
11. Огородова Л.В. Высшая геодезия. Часть 3. Теоретическая геодезия: Учебник для вузов. М.: Геодезкартиздат. 2006. - 384 с.
12. Огородова Л. В., Шимбирев Б. П., Юзефович А. П. Гравиметрия. –М.: Недра, 1978, - 325 с.
13. Рудницкая Н. И. Определение параметров связи Международной общеземной системы отсчета и Государственной системы отсчета координат Республики Беларусь. (Дата обращения 13.07.2014). <http://www.credo-dialogue.com/getattachment/2c68454e-cb1f-4d2d-9aeb-e734915a71a5/Opredelenie-parametrov-svjazi.aspx>
14. Руководство пользователя по выполнению работ в системе координат 1995 года (СК-95). Издание официальное. –М.: ЦНИИГАиК, 2004. –138 с.
15. Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт: Учебное пособие. –М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2001. -133 с.
16. Шануров Г. А., Остроумов Л. В., Розанова А. А. Повышение точности определения нормальных высот, полученных на основе использования глобальных навигационных спутниковых систем // Известия ВУЗ. Геодезия и аэрофотосъемка. –М. МИИГАиК. 2009. № 4. С. 30-36. <http://miigaik.ru/journal.miigaik.ru/2009/20091201183035-6261.pdf>
17. Burša M. et al. A Global Vertical Reference Frame Based on Four Regional Vertical Datums. <http://www.springerlink.com/content/t23g447131178up1/>
18. Cason S., Bosy J., Kontny B. The GPS levelling network in the conurbation of Wroclaw. Artificial Satellites, Vol. 34, No 3. 1999, p. 163–170.
19. Earth Gravitational Model 2008 (EGM 2008). (Дата обращения 13.07.2014) <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/index.html>
20. EGM 2008 – WGS 84 Version. (Дата обращения 13.07.2014) http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html
21. Geoid Map. <http://www.usna.edu/Users/oceano/pguth/website/so432web/GeoidMap.htm> (Дата обращения 13.07.2014)
22. Guo Jin-yon, Chang Xiao-tao, Yue Qiang. Study on curved surface fitting model, using GPS and leveling in local area / Trans. Nonferrous Met. Soc. China. 2005, Mar. Vol. 15, Special 1, pp. 140-144.

23. Moritz, H. GEODETIC REFERENCE SYSTEM 1980. [Электронный ресурс]. (Дата обращения 10.07.2014). URL: <http://geodeticsscience.org/course/refpapers/00740128.pdf>
24. Scheingraber Chris. Introduction to the Geoid. October 21, 2009. http://www.archive.scheingraber.net/files/geoid_final.pdf
25. The Earth's Geoid. http://principles.ou.edu/earth_figure_gravity/geoid/index.html (Дата обращения 13.07.2014)

Контрольные вопросы

1. Какой геометрический и физический смысл потенциалов силы тяжести Земли?
2. Что понимают под геоидом?
3. Какую форму имеют уровенные поверхности и как изменяются расстояния между двумя смежными уровенными поверхностями?
4. Что такое нормальная Земля, нормальный и аномальный потенциалы силы тяжести и как их определяют?
5. Какими гармоническими коэффициентами определяется потенциал силы притяжения реальной Земли и уровенного эллипсоида?
6. Что определяют фундаментальные геодезические постоянные?
7. Как взаимно связаны астрономические и геодезические широты, долготы и азимуты?
8. Анализ и сравнение ортометрических и нормальных высот.
9. Спутниковое нивелирование.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ ОПОРНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЕТИ

Опорные геодезические сети. Они являются хранителями заданной системы координат.

Совокупность геометрически взаимосвязанных и закреплённых на местности точек (*геодезических пунктов*), положение которых определено в общей для них системе координат, образует *геодезическую сеть*.

Геодезические сети - это наиболее надёжный, совершенный и практически единственный способ закрепления координатных систем. Измерения на геодезических пунктах могут быть выполнены с наибольшей тщательностью, многократно, повторены в разные эпохи и подвергнуты строгой математической обработке.

Геодезические сети используются для решения ряда научных и практических задач:

- изучения фигуры Земли, её внешнего гравитационного поля, движений полюсов, неравномерности вращения и других геодинамических процессов;
- координатного обеспечения прикладных работ, космического пространства и космических летательных аппаратов;
- картографирования суши, континентального шельфа, морей и океанов;
- обеспечения координатной средой геоинформационных систем.

Методы построения геодезических сетей. Кратко отметим основные методы.

- **Астрономические методы.** Это одни из первых методов, использовавшийся для создания сети пунктов с известными координатами. Древнегреческий астроном, географ, математик, механик *Гуннарх* (190/180-120/126 гг. до н.э.) впервые ввел термины «*широта*» и «*долгота*». Положение некоторых пунктов определил из астрономических наблюдений. Понимал, что для построения географической карты должны служить только точные астрономические измерения широт и долгот. Много занимался астрономическими наблюдениями Бируни (973-1048). Улугбек (1394-1449) широко использовал определения географических координат различных мест Средней Азии.

- **Традиционные наземные методы.** Они основаны на соответствующей точности наземных измерений горизонтальных и вертикальных углов, длин линий, нивелирных превышений, силы тяжести и комбинации их с астрономическими наблюдениями. Голландский математик, физик и астроном *Снеллиус* (*Willebrord Snel van Royen*; 1580-1626) предложил метод триангуляции и провёл в Голландии измерения дуги меридиана длиной немногим более 1°. Метод триангуляции, построение на местности треугольников или других замкнутых фигур измерением в них всех углов, развивался с развитием геодезического приборостроения – высокоточных теодолитов¹, а затем и приборов для измерения длин линий². Большим шагом вперёд было открытие *инвара* (лат. *Invariabilis* - неизменный) - сплава, состоящего из никеля (32%), железа (64%), кобальта 4%. Обладает исключительно малым температурным коэффициентом линейного расширения – $2-7 \cdot 10^{-7}$. Инвар изобрёл в 1899 г. швейцарский ученый Ш. Гийом (*Charles Édouard Guillaume*, 1861-1938). Сплав использовали для изготовления мерных проволок и измерений ими длин линий с точностью 1 мм на километр ($1 \cdot 10^{-6}$). Ещё большему развитию триангуляции способствовали разработки в середине XX в. высокоточных светодальномеров. Они позволили наряду с триангуляцией применять полигонометрию,

¹ Общие сведения о высокоточных теодолитах. URL: <http://geodetics.ru/svedeniya-teodolitah.html> (Дата посещения 6.08.2014.).

² Краткие сведения из истории развития геодезического приборостроения. (Дата посещения 6.08.2014.). URL: http://studopedia.ru/2_32893_kratkie-svedeniya-iz-istorii-razvitiya-geodezicheskogo-priborostroeniya.html

построения в виде хода с измеренными углами поворота и длинами линий, и строить линейно-угловые сети, сочетавшие высокоточные линейные и угловые измерения.

На рис. 8.1. приведены основные геометрические фигуры, использовавшиеся в триангуляции и в линейно-угловых построениях. Благодаря этим фигурам триангуляция становилась довольно жестким и точным построением. В плоском треугольнике с тремя измеренными углами всегда возникает *условие фигур* - сумма углов должна равняться 180°. Все измерения сопровождаются неизбежными погрешностями. Поэтому это условие нарушается. Появляется *невязка*. По невязкам можно оценивать точность измерений и исправлять измерения. Поправки вычисляют в ходе обработки измерений по методу наименьших квадратов. После исправления измерений невязки обнуляются.

Ещё более жёсткой фигурой является центральная система. Они возникают в сплошных сетях триангуляции. В центральной системе кроме условий фигур возникает *условие горизонта* – сумма измеренных углов у вершины центральной системы должна составлять 360°.

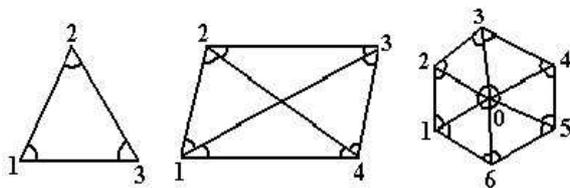


Рис. 8.1. Основные геометрические фигуры триангуляции: треугольник, геодезический четырёхугольник, центральная система

Появляется ещё одно условие – *полюсное*. Его суть в следующем: одну из сторон, например 01, можно приравнять единице и по измеренным углам и теореме синусов вычислить следующую сторону – 02. Подобным образом будут вычислены стороны 03, 04, 05, 06 и вновь 01. Полюсное условие можно представить в виде тождества:

$$\frac{01}{02} \frac{02}{03} \frac{03}{04} \frac{04}{05} \frac{05}{06} \frac{06}{01} - 1 = 0.$$

Вычисленная после обхода вокруг полюса центральной системы сторона 01 из-за ошибок в измерениях будет отличаться от единицы. Возникнет невязка. В целом в центральной системе рис. 8.1 будет 8 невязок. Жёсткий контроль! Придется исправлять измерения так, чтобы устранить все невязки. В геодезическом четырёхугольнике возникают три условия фигур и одно полюсное условие; всего четыре невязки.

Если цепочка треугольников вставлена между сторонами известной длины, с известными азимутами и пунктами с заданными координатами, то возникают *условия сторон (базисное), азимутов (дирекционных углов) и координат*.

- **Радиогеодезическая трилатерация.** Трилатерация – метод построения на местности треугольников, четырёхугольников или других геометрических замкнутых фигур, в которых измеряются длины всех сторон. В середине XX в. разработан метод измерений длинных, в сотни километров, линий при помощи радиогеодезических систем. Получила распространение импульсная система ШОРАН (Short Range Aerial Navigation) и её усовершенствованный вариант Хайран (High Precision Shoran)³. Длинные линии, до 500-800 км, измерялись методом пересечений

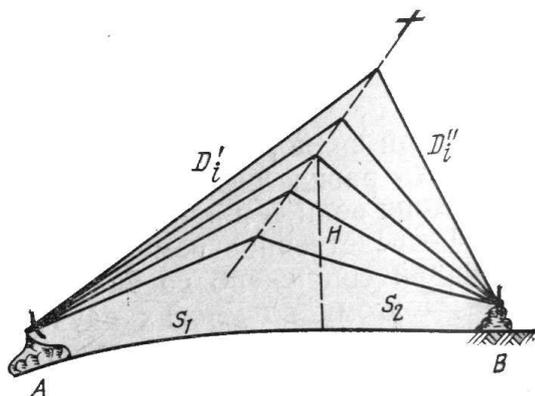


Рис. 8.2. Измерение длин линий методом пересечений их створа [19]

треугольников, четырёхугольников или других геометрических замкнутых фигур, в которых измеряются длины всех сторон. В середине XX в. разработан метод измерений длинных, в сотни километров, линий при помощи радиогеодезических систем. Получила распространение импульсная система ШОРАН (Short Range Aerial Navigation) и её усовершенствованный вариант Хайран (High Precision Shoran)³. Длинные линии, до 500-800 км, измерялись методом пересечений

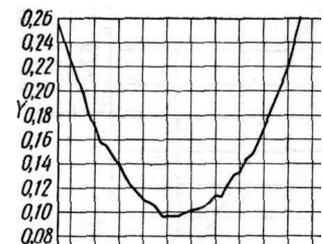


Рис. 8.3. Парабола [8]

³ THE SOUTHWEST PACIFIC SURVEY. URL: <http://www.xnatmap.org/adnm/ops/proj/hiran.htm> (Дата посещения 6.08.2014.)

створа (рис. 8.2). Самолет пересекал створ линии, при этом непрерывно измерялись наклонные дальности D' и D'' от самолёта до радиостанций на концах линии. Измеренные суммы линий, отложенные на графике, представляли ломанную, напоминавшую параболу (рис. 8.3):

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = D' + D''.$$

Минимум параболы соответствовал сумме дальностей в створе.

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b = 0, \quad x_{\min} = -\frac{b}{2a}.$$

Подставив x_{\min} в уравнение параболы, получим сумму наклонных дальностей в створе линии:

$$y_{\min} = -\frac{b^2}{4a} + c.$$

Заметим, что физически эта сумма, вполне вероятно, и не измерялась. Используя измеренные суммы дальностей, методом наименьших квадратов вычисляли коэффициенты параболы a , b , c . Введением поправок наклонные расстояния в створе линии приводились к значениям S_1 и S_2 геодезической линии на уровне моря (рис. 8.2) [8].

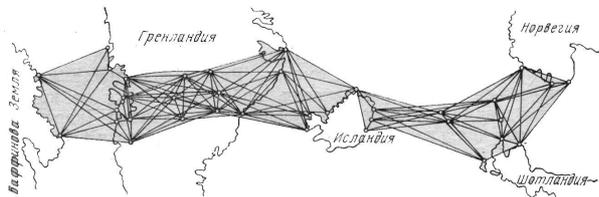


Рис. 8.4. Схема трилатерации, связывающей триангуляции Северной Америки и Европы [19]

В 1946 г. проложена трилатерация, соединившая Флориду с Багамскими островами и Кубой. Измерено 50 линий. В 1950 г. во Флориде измерено 25 линий длиной до 512 км. С 1949 по 1957 гг. проведены работы по развитию трилатерации в Канаде. На площади 6,4 млн. км² установлены 143 станции с 502 сторонами между ними. Сеть служила основой для топографических карт масштабов 1:25 000 и 1:50 000.

В 1951-59 гг. при помощи этих систем выполнены работы по развитию трилатерации во многих частях мира. Например, установлена связь между триангуляциями Норвегии и Шотландии, между островом Крит и Северной Африкой. Установлена геодезическая связь между Европой и Северной Америкой через Норвегию, Шотландию, Фарерские острова, Исландию и Гренландию, наибольшая измеренная сторона равнялась 884 км (рис. 8.4). Проложены сети трилатерации в Центральной и Южной Америке, на востоке Азии, в Австралии и других местах. В СССР трилатерация строилась посредством радиогеодезической системы РЫМ.

Следует заметить, что трилатерация по жёсткости уступает триангуляции. Так, в треугольнике с измеренными сторонами нет избыточных измерений. Следовательно, нет условий и нет невязок. В геодезическом четырёхугольнике, как и в центральной системе, с измеренными сторонами возникает лишь одно условие. Поэтому метод трилатерации в последствии, даже с появлением высокоточных дальномеров, широкого развития не получил.

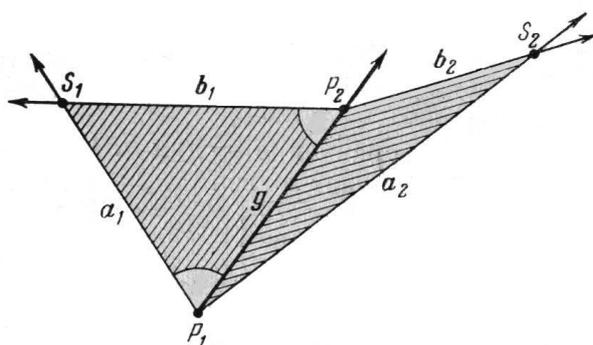


Рис.8.5. Спутниковая триангуляция [2]

• **Спутниковая триангуляция.** Метод основан на наблюдениях пассивных спутников типа *Пагеос*, *Лагеос*, *Эталон* путём фотографирования их на фоне звездного неба⁴. В

⁴ The PAGEOS project at Palmer Station. (Дата посещения 6.08.2014.)/ URL: <http://www.palmerstation.com/history/6575/pageos.html>

его основу лёг метод звёздной триангуляции, разработанный финским астрономом, оптиком и геодезистом Ёрьё Вяйсяля (1891-1971). Звёздная триангуляция была основана на наблюдениях на фоне звёзд световых вспышек ракет, поднимаемых воздушными шарами на высоты в 20 км. В спутниковой триангуляции на фоне звёзд фотографировали спутники [5].

На снимке измерялись плоские прямоугольные координаты изображений звёзд и спутника. Для звёзд выбирались из звёздного каталога их экваториальные координаты α и δ . Эти координаты, учитывая движение полюсов Земли, прецессию и нутацию, приводились к моменту наблюдений и исправлялись поправками за рефракцию и годичную абберацию. Далее устанавливалось соответствие между экваториальными координатами звёзд и измеренными плоскими координатами их изображений на снимке. После этого по плоским прямоугольным координатам изображений спутника вычислялись его экваториальные координаты - прямое восхождение α и склонение δ . Вместо угла α , отсчитываемого от направления на точку весеннего равноденствия, использовался угол γ , считаемый от плоскости меридиана Гринвича. Если S и t соответственно гринвичские звёздное время и часовой угол, то угол γ равен:

$$\gamma = \alpha - S = \alpha - (\alpha + t) = -t.$$

Направление с пункта наблюдений на спутник определяет единичный вектор a (b) и направляющие косинусы l , m , n :

$$a = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \gamma \\ \cos \delta \sin \gamma \\ \sin \delta \end{pmatrix}.$$

Для каждого снимка, с ошибкой 1-1,5", вычислялось направление, соответствующее заранее принятому моменту. Спутники фотографировали синхронно с нескольких наземных станций, например, P_1 , и P_2 (рис. 8.5), и находили единичные векторы a_1 и b_1 направляющий P_1S_1 и P_2S_1 на спутник S_1 :

$$a_1 = \frac{\overrightarrow{P_1S_1}}{|P_1S_1|}, \quad b_1 = \frac{\overrightarrow{P_2S_1}}{|P_2S_1|}.$$

Подобным образом определялись единичные векторы a_2 и b_2 направлений на спутник S_2 . Эти векторы задают плоскости $P_1S_1P_2$ и $P_1S_2P_2$ и перпендикулярные к ним единичные векторы, определяемые векторными произведениями:

$$n_1 = \frac{a_1 \times b_1}{|a_1 \times b_1|}, \quad n_2 = \frac{a_2 \times b_2}{|a_2 \times b_2|}.$$

Искомый единичный вектор направления P_1P_2 определялся векторным произведением

$$g = \frac{n_1 \times n_2}{|n_1 \times n_2|}.$$

Вектор g образован в результате пересечения двух плоскостей $P_1S_1P_2$ и $P_1S_2P_2$. Разумеется, наблюдали не два спутника. Из множества наблюдений находили по методу наименьших квадратов наиболее точный результат пересечения всех плоскостей.

Продолжая построения, получали сеть *спутниковой триангуляции* - сеть треугольников с известными направлениями их сторон и вершинами, закреплёнными на земле (рис. 8.6).

Если в сети заданы координатами два пункта или измерено несколько сторон (космических базисов), то можно вычислить пространственные координаты всех пунктов.

Сеть уравнивали по методу наименьших квадратов, исправляя измеренные величины так, чтобы соблюдались геометрические условия сети. Отметим основные геометрические условия, возникающие в сети спутниковой триангуляции.

Условие компланарности трёх векторов. Например, положения сторон каждого пространственного треугольника определяют три вектора - $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$. Каждый из этих векторов найден независимо. Однако все они должны лежать в плоскости треугольника. Поэтому должно быть поставлено условие компланарности - равенства нулю смешанного произведения этих векторов в каждом треугольнике

$$\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3 = 0.$$

Условие пучка плоскостей. Вектор \mathbf{g} направления P_1P_2 определяется пересечением плоскостей, проходящих через пункты P_1 и P_2 . Предположим, имеются три пересекающиеся плоскости, заданные перпендикулярными к ним единичными векторами $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$. Чтобы все плоскости пересекались по одной линии, смешанное произведение этих векторов должно равняться нулю:

$$\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3 = 0.$$

Условие общей вершины пересечения плоскостей. Три плоскости всегда пересекаются в одной точке. Однако, чтобы четыре плоскости пересекались в одной точке, надо ставить соответствующее условие. Если каждая из четырёх плоскостей задана уравнениями вида

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то определитель четвертого порядка, составленный из коэффициентов уравнений, равен нулю.

Полюсное условие. Это условие возникает, если возможно выделить цепь треугольников, начинающуюся и заканчивающуюся одной и той же стороной.

Как и в классической триангуляции, дополнительные исходные стороны или пункты приводят к появлению *условий сторон* и *условий координат*.

В 60-х годах прошлого столетия в СССР и других странах были созданы сети спутниковой триангуляции⁵. В период 1969-73 гг. построена *Глобальная сеть спутниковой триангуляции* из 45 пунктов и 174 сторон длиной 3000–5000 км.⁶ Для определения линейного масштаба в сети измерено 7 космических базисов. Два из них, длиной 2458 км и 1195 км, проложены в Европе.

- **Доплеровские системы**⁷. В США в 1958 г. начаты разработки системы *TRANSIT*. К 1964 г. выведены на космические орбиты спутники. Высоты практически круговых орбит составляли около 1100 км. В измерениях использовался доплеровский сдвиг частоты, возникающий в результате движения спутника по орбите. Координаты 30 пунктов упомянутой Глобальной сети спутниковой триангуляции были определены с *TRANSIT*. Средняя квадратическая погрешность координат из сопоставления двух методов составила 4,4 м. В 1984–

⁵ The worldwide satellite triangulation camera station network. URL:

<http://www.photolib.noaa.gov/htmls/geod0003.htm>

(Дата обращения 6. 08. 2014)

⁶ WORLDWIDE GEOMETRIC SATELLITE TRIANGULATION NETWORK, BC-4 CAMERAS.GIF. URL:

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/WORLDWIDE_GEOMETRIC_SATELLITE_TRIANGULATION_NETWORK%2C_BC-4_CAMERAS.GIF (Дата обращения 6. 08. 2014).

⁷ Конспект лекций по курсу «космическая геодезия и геодинамика». URL: (Дата обращения 07.08.2014)

<http://kk.docdat.com/docs/index-376832.html?page=7>

93 гг. системой *TRANSIT* построена на территории СССР *Доплеровская геодезическая сеть* – ДГС. Впоследствии ДГС совместной обработкой с другими сетями была включена в Государственную геодезическую сеть России ГГС. В 1996 г. *TRANSIT* после успешной 32-летней работы прекратила существование.

Доплеровский сдвиг частоты возникает в результате движения спутника по орбите. Когда спутник движется навстречу неподвижному приемнику, частота принимаемых электромагнитных колебаний увеличивается, а длина волны становится короче. При удалении спутника картина обратная - частота уменьшается, а волны удлиняются. Если скорость взаимного перемещения приемника и передатчика значительно меньше скорости света, то доплеровский сдвиг частоты f_d (доплеровская частота) равен:

$$f_d = -f \frac{\rho'}{c} = -\frac{\rho'}{\lambda},$$

где f - излучаемая на спутнике частота, c - скорость радиоволн в среде распространения, λ - длина излучаемой волны в этой среде, ρ' - радиальная скорость спутника, равная скорости изменения расстояния ρ от наземной станции до спутника.

Методы определений местоположения, основанные на измерении доплеровской частоты, подразделяются на траверзный, дифференциальный и интегральный [9, с. 154-159].

Траверзный метод реализуется путем определения момента t_0 прохождения доплеровской частоты через нуль (смены её знака). В этот момент радиальная скорость $\rho' = 0$. Спутник и приёмник находятся на кратчайшем друг от друга расстоянии ρ_0 . Они расположены в плоскости, содержащей расстояние ρ_0 , и нормальной к вектору скорости спутника. Эта плоскость, пересекая земную сферу, на которой находится приёмник, образует на ней дугу большого круга (ортодромию). Дугу большого круга пересекает сфера радиуса ρ_0 с центром на спутнике. Иначе, приёмник находится в одной из точек пересечения этих двух сфер и упомянутой плоскости.

Траверзный метод единственный из доплеровских методов, которым можно измерить дистанцию между спутником и наземным приёмником. Алгоритм определения кратчайшего расстояния ρ_0 и скорости движения спутника в этот момент по орбите v_0 изложим по учебному пособию [17, с. 97-99].

Спутник движется по орбите со скоростью v_0 . За небольшой интервал времени $(t-t_0)$ спутник перемещается по орбите на отрезок $v_0(t-t_0)$. Расстояние от спутника до наземного приёмника будет равно ρ :

$$\rho = \sqrt{\rho_0^2 + v_0^2(t-t_0)^2}.$$

Дифференцируя расстояние ρ по времени t , получаем:

$$\rho\rho' = v_0^2(t-t_0).$$

Или:

$$\frac{(t-t_0)}{\rho'} = \frac{\rho}{v_0^2}.$$

Возводя левую и правую сторону этого уравнения в квадрат и подставляя значения для расстояния и его производной по времени с учётом эффекта Доплера, получаем:

$$\frac{(t-t_0)^2}{f_d^2} = \lambda^2 \left(\frac{\rho_0^2}{v_0^4} + \frac{(t-t_0)^2}{v_0^2} \right).$$

Введём обозначения:

$$y = \frac{(t-t_0)^2}{f_d^2}, \quad x = (t-t_0)^2, \quad a = \frac{\lambda^2}{v_0^2}, \quad b = \lambda^2 \frac{\rho_0^2}{v_0^4}.$$

Получим уравнение прямой линии:

$$y = ax + b.$$

Интервал времени и доплеровская частота – измеряемые величины. Получив серию пар значений x и y и выполнив обработку по методу наименьших квадратов, определим параметры a и b , а по ним – значения ρ_0 и v_0 .

Несколько иной подход к определению ρ_0 изложен в книге [9, с. 156].

Дифференциальный метод основан на суммировании циклов доплеровской частоты с момента t_1 до момента t_2 :

$$N = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\rho'}{\lambda} dt.$$

В реальных измерениях учитывалось, что частота принимаемого сигнала сравнивается не с частотой излучения, а с эталонной частотой, генерируемой в приемнике. В дифференциальном режиме интегрирование ведется в течение 1–5 секунд. На основании теоремы о среднем значении интеграла получаем:

$$N = \rho'_m \frac{t_2 - t_1}{\lambda}.$$

Определяемой величиной становится ρ'_m – средняя в данном интервале времени радиальная скорость спутника. Она постоянна на поверхности конуса с вершиной в передатчике. На этой поверхности расположен приемник. Такую поверхность называют *поверхностью положения*. Одновременно приемник окажется на соответствующих конических поверхностях, построенных с других спутников. Пересекаясь, эти поверхности определяют положение приемника в пространстве.

Интегральный метод. В этом случае интервал интегрирования циклов доплеровской частоты больше – до нескольких минут. Получают:

$$N = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\lambda}.$$

Определяемым параметром становится разность $(\rho_2 - \rho_1)$, показывающая, как изменилось расстояние от приёмника до спутника с момента t_1 до момента t_2 . Измеренная разность расстояний остается постоянной на поверхности двуполостного гиперboloида вращения. Его фокусы соответствуют двум положениям спутника на орбите. На одном из этих гиперboloидов расположен приемник. Измеренные разности расстояний по нескольким спутникам образуют серию поверхностей положения. Пересекаясь, они определяют координаты приемника. В данном случае имеет место гиперболическая, иначе разностно-линейная (разностно-дальномерная) засечка.

Поверхности положения наглядно геометрически показывают, как образуется та или иная засечка. При построениях геодезической сети все измеряемые величины описываются аналитически. Так, разность расстояний представляется уравнением, содержащим известные координаты спутников и определяемые координаты наземного приёмника. При этом используется большое количество измерений. Продолжительность радиовидимости спутника, при его высоте 1100 км, составляет 15-16 мин. При двухминутной продолжительности сеанса измерений будет реализовано около 8 сеансов. Измерения могут быть повторены многократно в разные эпохи. Полученный массив данных обрабатывается по методу наименьших квадратов.

• **Использование геодезических спутниковых комплексов ГЕОИК.** Эти комплексы созданы в СССР и продолжают развиваться в России. Они оснащены отражателями для световой лазерной локации с Земли, а также радиотехническими средствами для определения дальностей, скорости и высоты спутника. Имеется также система импульсной световой сигнализации для фотографирования спутника на фоне звездного неба.

При таком обилии измерительных средств появляется возможность использовать фундаментальное уравнение взаимосвязи положений космического объекта и наземного пункта:

$$\mathbf{R} + \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0},$$

где \mathbf{R} — геоцентрический вектор пункта наблюдений на Земле, \mathbf{r} — топоцентрический вектор, определяющий расстояние и направление в пространстве линии "наземный пункт - спутник", $\boldsymbol{\rho}$ — геоцентрический вектор космического объекта (спутника). По заданному вектору $\boldsymbol{\rho}$ и измеренному вектору \mathbf{r} можно найти вектор \mathbf{R} .

Предположим, что определены топоцентрические вектора \mathbf{r}_A и \mathbf{r}_B с двух наземных станций A и B :

$$\mathbf{R}_A + \mathbf{r}_A - \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{R}_B + \mathbf{r}_B - \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}.$$

Для вектора \mathbf{D} , соединяющего эти наземные станции, можно записать:

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B,$$

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A + \mathbf{D}.$$

Пространственный вектор \mathbf{D} иногда называют *хордовым*. Нетрудно представить себе сеть на земной поверхности из хордовых векторов, привязанную к некоторому начальному пункту.

Программа ГЕОИК начата в 1985 г. По результатам наблюдений спутников ГЕОИК-1, ЭТАЛОН, создана *Космическая геодезическая сеть* - КГС. Первоначально КГС включала 26 пунктов на территории бывшего СССР и 7 пунктов в Антарктиде. Погрешность взаимного положения пунктов при расстояниях между ними до 10 000 км не более 30 см. Пункты КГС, как и ДГС, совмещены с пунктами АГС с целью совместной обработки и построения Государственной геодезической сети – ГГС систем координат СК-95 и ПЗ-90.02.

По результатам эксплуатации ГЕОИК-2 получена координатная система ПЗ-90.11. Введённые Постановлением Правительства РФ от 28 декабря 2012 года №1463 новые координатные системы ПЗ-90.11 и ГСК-2011 и их опорные геодезические сети теоретически ничем не уступают международным и передовым зарубежным геоцентрическим системам и сетям [6].

• **Использование ГНСС.** При их помощи строят высокоточные спутниковые сети. Развиваемые в Российской Федерации ГГС образуют три уровня. Первый уровень – *Фундаментальные астрономо-геодезические сети* ФАГС с расстояниями между пунктами 600–800 км; второй уровень – пункты *Высокоточной геодезической сети* ВГС при средних расстояниях между ними 150–300 км; третий уровень – пункты *Спутниковой геодезической сети I класса* СГС-1 с расстояниями между пунктами 25–35 км. Величины погрешностей взаимного положения пунктов оцениваются первыми сантиметрами.

При работе с ГНСС используют относительные измерения. Пусть при помощи приёмников станций A и B измерены до i -го спутника дальности r_{Ai} и r_{Bi} ; результаты измерений равны соответственно P_{Ai} и P_{Bi} (рис. 8.7, $i = 1, 2$). Измерения искажены погрешностями d_i в аппаратуре спутника, D_{Ai} и D_{Bi} в аппаратуре на станциях A и B , и погрешностями внешней среды e_{Ai} и e_{Bi} .

Чтобы ослабить влияния погрешностей формируют разности результатов ΔP_i из разности Δr_i измерений на один и тот же спутник S_i :

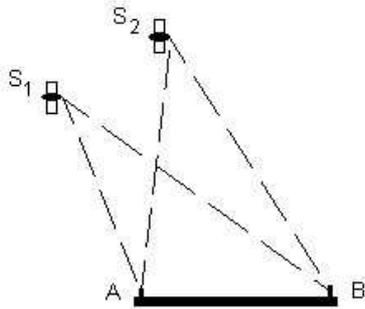


Рис. 8.7. Относительные измерения по спутникам ГНСС

$$\Delta P_i = P_{Ai} - P_{Bi} = \Delta r_i + \Delta D_i + e_i$$

Это так называемые *первые* или *простые* разности. Они не содержат искажений d_i в аппаратуре спутника. В значительной степени ослаблено влияние внешней среды. Член e_i содержит лишь остаточные погрешности малой величины. Однако сохранились искажения ΔD_i , обусловленные аппаратурой приемника.

В ходе дальнейшей обработки из первых разностей, отнесенных, например, к спутникам S_1 и S_2 , формируют *вторые* или *сдвоенные* разности:

$$\Delta P_{12} = \Delta P_1 - \Delta P_2 = \Delta r_1 - \Delta r_2 + e_{12}.$$

Вторые разности свободны как от искажений на спутнике, так и от искажений на наземных станциях. В большой степени скомпенсированы влияния всех остальных источников. Остаточные погрешности e_{12} являются малыми, случайными и практически будут отфильтрованы обработкой по методу наименьших квадратов. В относительных ГНСС измерениях вторые разности — основной полевой материал для построения геодезических сетей.

Естественно, наблюдают не два спутника, а все видимые в данную эпоху на допустимых высотах над горизонтом. Разность $(r_{Ai} - r_{Bi})$ зависит от составляющих вектора D , соединяющего наземные станции и используются для нахождения координат этих станций.

Относительным измерениям появилась замена в виде нового способа *прецизионного позиционирования пунктов PPP (Precise Point Positioning)*. Измерения выполняются не двумя, а одним приемником. Величины ошибок позиционирования при работе с одночастотными приемниками определяются дециметрами, а при использовании двухчастотных приемников — сантиметрами. Во втором случае точность повышается благодаря исправлению спутниковой шкалы времени и исключению задержек радиосигналов в ионосфере. Трудности применения *PPP* обусловлены тем, что фазовые измерения надо корректировать и разрешать их неоднозначность. Координаты пунктов определяют засечкой сочетанием фазовых и кодовых дальностей, измеренных двухчастотным приемником. Используются точные значения эфемерид и поправок к часам спутников, предоставляемых разными службами, в первую очередь службой *IGS*.

- **Радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой - РСДБ (VLBI - Very Long Baseline Interferometry)**. Это одно из основных средств и методов исследования космического пространства и построения глобальных небесных и наземных геодезических сетей. Системой отслеживаются излучения точечных внегалактических радиоисточников. Их угловые диаметры менее $0,001''$, а собственные движения не обнаруживаемы. По своей природе радиоизлучения этих объектов представляют собой случайный широкополосный шум. Аппаратура состоит из пары направленных антенн, разнесенных на сотни или тысячи километров и отслеживающих один и тот же внегалактический источник шумового радиоизлучения. Линию между антеннами называют базой. Шумовые сигналы, а также метки времени, генерируемые при помощи высокостабильных атомных стандартов частоты-времени, записываются на магнитные ленты, диски или другие носители. Записи отправляются в специальные устройства — *корреляторы*. Интервал сдвига сравниваемых сигналов до наступления максимума их взаимной корреляции определяет разность моментов прихода фронта радиоволны на две на-

земные антенны. При этом учитываются перемещения базы относительно радиоисточника вследствие суточного вращения Земли и её движения по орбите. Разность времени пропорциональна разности расстояний от радиоисточника до этих станций на Земле. В свою очередь, разность расстояний зависит от разности координат станций наблюдений - вектора базы. Длина и направления вектора определяются с погрешностями $\sim 1-2$ см и $0,0001''$ соответственно⁸.

Виды геодезических сетей. Геодезические сети часто называют *опорными*, ибо их пункты служат опорой для последующих исследований, измерений и съемок. Для решения поставленных задач сети должны быть 1) *сплошными*, иметь необходимую 2) *густоту* и 3) *точность*⁹.

Сеть, создаваемую с помощью искусственных спутников Земли или по наблюдениям других космических объектов, называют *космической геодезической сетью* — КГС. Если на части пунктов наземной сети определены астрономические широты, долготы и азимуты, ее называют *астрономо-геодезической сетью* - АГС. Сети более высокого порядка точности заполняют так называемыми *сетями сгущения*. Если они предназначены для производства топографических съемок, их именуют *съёмочными сетями*.

Отметим следующие геодезические сети:

- **Пространственные** сети, создаваемые методами космической геодезии. Каждый пункт хранит три координаты, определяющие его положение в геоцентрической системе координат, и может быть закреплен как на земной поверхности, так и на космическом объекте.

- **Плановые** сети. Каждый пункт плановой сети хранит отнесенные к эллипсоиду геодезические широты и долготы и (или) плоские прямоугольные координаты.

Эти сети создают способами:

- 1) *триангуляции*, когда сеть образована из треугольников и геодезических четырехугольников, в которых измеряются все углы и длины некоторых сторон;

- 2) *полигонометрии*, состоящей из ходов, все стороны и углы поворота которых измерены;

- 3) *трилатерации*, когда определены только длины сторон геометрических фигур;

- 4) *линейно-угловыми* измерениями;

- 5) *векторными* построениями на основе спутниковых измерений.

Пункты плановых сетей, если возможно, совмещают с пунктами нивелирной сети. В ином случае их высоты, определяют точным тригонометрическим нивелированием.

- **Нивелирные** (высотные) сети, построенные, как правило, методами точного и высокоточного геометрического нивелирования, при этом каждый нивелирный пункт хранит высоту.

- **Гравиметрические** сети, на пунктах которых определены ускорения силы тяжести. Нивелирные сети совместно с гравиметрическими сетями решают вопрос о введении определенной системы счета высот.

Геодезические сети различают по назначению, территориальному охвату, точности и густоте построения. Они бывают глобальными (общеземными), региональными (охватывают территории нескольких государств), государственными (национальными), местными.

- **Глобальные сети.** Пункты этих сетей отстоят друг от друга на сотни и тысячи километров. Их координаты определены в геоцентрической системе. Обычно пункты мировой

⁸ URL: http://www.see.leeds.ac.uk/structure/dynamiearth/plates_move/active_tectonics/vlbi.htm (Дата обращения 07.08.2014)

⁹ Геодезические сети и их назначение. URL: <http://geodetics.ru/geodezseti.html> (Дата обращения 07.08.2014)

сети совмещены с астрономическими обсерваториями или наземными станциями спутниковых систем. Они служат для решения научных и практических задач глобального характера, например, для изучения геодинамических процессов, для запуска космических аппаратов и слежения за их полетом, для выполнения геодезических наблюдений с использованием ИСЗ, Луны и других космических объектов. Такие сети строят с наивысшей точностью. Примером глобальной является сеть Международной земной системы отсчета *ITRF*. Со временем геоцентрические координаты пунктов опорных сетей вследствие непрерывного их совершенствования и геодинамических процессов изменяются. Скорость их изменения может достигать до 1-2 см в год. Поэтому каталоги координат обновляют и указывают их эпоху, например, *ITRF-2008*.

- **Региональные сети.** Известны сети Северной Америки, Европы, Австралии, Антарктиды. В 1987 г. Международной ассоциацией геодезии создана подкомиссия для установления европейской системы параметров *ETRS (European Terrestrial Reference System)*. Системе *ETRS* принадлежат опорные сети *ETRF (European Terrestrial Reference Frame)*, объединяющие в единую систему геодезические сети стран Европы.

- **Государственные (национальные) сети.** Они включают плановые, нивелирные и гравиметрические сети данной страны. При использовании комплекса выполняемых в них астрономо-геодезических и гравиметрических измерений однозначно определяются плановые координаты и высоты пунктов в единой для страны системе. Их используют при картографировании и решении научных и практических задач в пределах данного государства. По точности эти сети делят на классы или разряды. Так, первоначально в России плановые и нивелирные сети подразделялись на четыре класса точности. Наиболее точными были сети 1 класса. Расстояния между пунктами уменьшались от нескольких десятков километров в 1 классе до нескольких километров в 4 классе. Плановые и нивелирные сети СССР и России – уникальные и громадные построения; их геометрические схемы, методика измерений, способы закрепления на местности, история развития заслуживают внимательного изучения [10-12 и др.].

- **Местные сети.** Дальнейшее сгущение государственных сетей в разных странах выполняют по-разному. В России местные нивелирные и плановые сети строят на основе государственных сетей в целях картографирования, решения инженерных и других задач некоторого района или города. Они являются исходными для построения съемочных сетей.

Закрепление пунктов. Опорная геодезическая сеть способна выполнять поставленные перед ней задачи только в том случае, если её пункты надежно закреплены на местности и легко могут быть найдены. Каждый пункт на местности закрепляется специальным подземным знаком - центром. Устойчивость центров зависит от многих факторов, важнейшими среди которых являются сезонные замерзания и оттаивания грунта. По мере промерзания грунта силы морозного пучения преодолевают вес подземного знака и силы трения его боковых стенок о грунт, и грунт, вспучиваясь, увлекает за собой центр кверху. Весной при оттаивании грунта талые воды заносят под основание центра некоторое количество частиц грунта, и центр не может опуститься на прежнее место. В последующие годы процесс повторяется, и через несколько лет подземный знак может оказаться выброшенным на дневную поверхность. На рис. 8.8 показан грунтовый знак с якорем внизу, в верхней части неудачно закреплен бетонным блоком; за 14 лет он приподнялся на 110 см (склон долины в 14 км от Москвы) [18].

Принимается ряд мер для стабилизации центров:

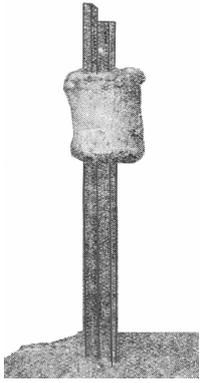


Рис. 8.8 Неудачный грунтовой знак

- знаки закладывают в грунты, мало подверженные морозному пучению (в скальный грунт, сухой или слабо увлажненный песчаный грунт, а в условиях значительного увлажнения - в крупнозернистые грунты);
- подземные знаки делают облегченными в верхней части с уменьшенной поверхностью соприкосновения знака с грунтом, а в нижней части устанавливается достаточно мощный якорь;
- нижнее основание подземного знака устанавливается в наименее активной зоне грунта - в районах сезонного промерзания на 0,5 м ниже границы наибольшего промерзания грунта, в зоне многолетней мерзлоты - на 1 м ниже границы наибольшего оттаивания,
- на территориях подвижных песков - на глубине 4 – 6 м.

По типу применяемых центров на территории страны выделены зоны сезонного промерзания грунтов, многолетней мерзлоты, подвижных песков, скальных горных пород и заболоченных грунтов. Для определения глубины закладки центров и реперов составлены карты районирования территории, на которых классифицированы регионы по глубинам протаивания или промерзания грунтов.

Этапы создания геодезической сети. Технологический процесс создания геодезической сети включает: 1) постановку задания; 2) сбор и изучение имеющихся геодезических и картографических материалов; 3) составление проекта, когда на топографических картах намечают схему сети, места расположения геодезических пунктов, выполняют расчет точности сети, готовят смету работ и составляют научно-технический отчет по строительству сети; 4) рекогносцировку, в процессе которой проект уточняют на местности; 5) закладку в местах размещения геодезических пунктов подземных знаков, а также, если необходимо, постоянных или временных наружных знаков для производства измерений; 6) выполнение измерений; 7) уравнивание, под которым понимается обработка результатов измерений по способу наименьших квадратов с целью получения наиболее достоверных значений координат, высот, длин линий, азимутов, значений ускорений силы тяжести, других величин, и оценка их точности; 8) составление каталога координат пунктов и сдачу работы заказчику¹⁰.

Выше отмечены общие для любых сетей этапы построения. Содержание каждого этапа весьма существенно зависит от назначения геодезической сети и размеров охватываемой территории. Так, например, технологии создания геодезической сети традиционными и спутниковыми методами имеют принципиальные различия.

Геодезическая отсчетная основа Российской Федерации. В бывшем СССР картографо-геодезические работы опирались на координатную систему отсчета 1942 г. СК-42. Система отсчета СК-42 была введена Постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г.

Эта система отсчета до 1 июля 2002 г. применялась и в Российской Федерации.

СК-42 была закреплена пунктами плановой государственной геодезической сети и реперами государственной нивелирной сети. Развитие плановых государственных сетей началось в начале 20-х годов и продолжалось свыше полувека¹¹. В основу проекта их построения положены замыслы выдающегося геодезиста Ф.Н. Красовского (1878–1948)¹². Плановые госу-

¹⁰Основной принцип построения государственной геодезической сети. URL: <http://geodetics.ru/principseti.html> (Дата обращения 07.08.2014).

¹¹Опорные геодезические сети в дореволюционной России. URL: <http://geodetics.ru/setiold.html> (Дата обращения 07.08.2014).

¹²Схема и программа Ф.Н. Красовского построение государственной триангуляции. (Дата обращения 07.08.2014). URL: <http://geodetics.ru/sxemakrasovskij.html>

дарственные сети разделены на четыре класса точности и строились по принципу "от общего к частному".

Сеть I-го класса состояла, в основном, из звеньев, образующих четырехугольные полигоны (рис. 8.9). Звенья преимущественно ориентированы по меридианам и параллелям и представляли собой или ряд триангуляции – цепь треугольников, или ход полигонометрии. В

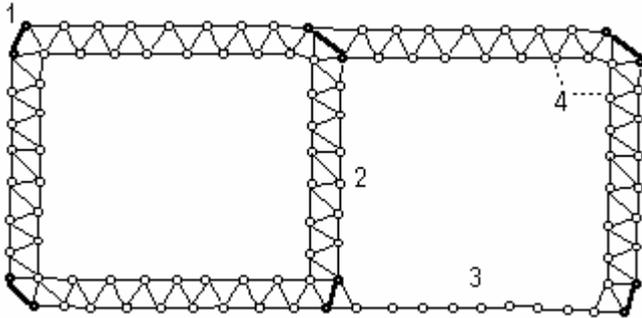


Рис. 8.9. Полигоны АГС первого класса: 1 — базисные стороны и астропункты, 2 — ряд триангуляции, 3 — ход полигонометрии, 4 — пункты геодезической сети первого класса

среднем длина звена около 200 км, а периметр полигона – 800 км. В вершинах полигонов, на стыке звеньев измерены длины базисных сторон треугольников. На концах каждой базисной стороны определены астрономические широты, долготы, азимуты и по этим данным вычислены геодезические азимуты Лапласа. Через 70–100 км располагались пункты с измеренными астрономическими широтами и долготами. В звеньях расстояния между смежными пунктами не менее 20 км. На северо-востоке страны вместо полигональной сети была развита сплошная сеть триангуляции с расстояния-

ми между пунктами около 70 км. В 70-х годах прошлого столетия построения сети I класса практически были завершены.

По проекту средняя квадратическая погрешность (СКП) измерения углов равнялась 0,7" — фактически составила 0,6". В построенных сетях линии длиной 20 - 30 км измерены с погрешностью 7 - 10 см; точность определения широт — 0,3", долгот — 0,5", азимутов — 1,15". Длина отдельного 200-километрового звена получена в среднем с погрешностью 0,6 м, азимут звена — 1,15". СКП взаимного положения вершин полигонов равны 0,40 - 0,65 м. Точность сети 1-го класса позволяет получить координаты пунктов, удаленных от исходного на 4 - 5 тысяч километров с погрешностью 2 - 2,5 м, а азимут такой линии — с погрешностью 0,1". Тем не менее, после обработки сети в 90-х годах на Дальнем Востоке обнаружены сдвиги пунктов величиной до 30 м.

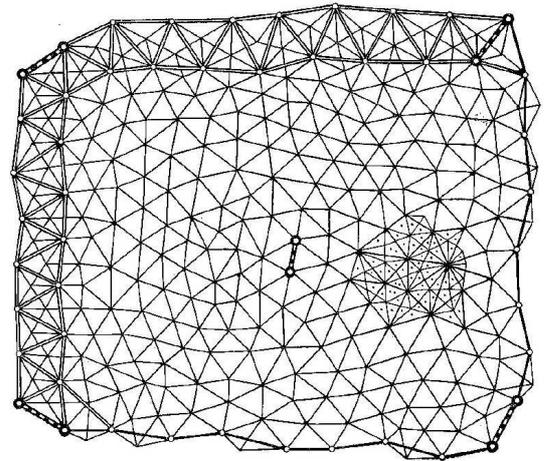


Рис. 8.10. Полигон первого класса заполнен сетью второго класса. Сети третьего и четвертого классов сгущают АГС

Полигоны геодезической сети первого класса заполнены сплошной сетью триангуляции или полигонометрии второго класса (рис. 8.10). Эти работы практически завершены в 80-х годах прошлого столетия.

Расстояния между смежными пунктами второго класса в зависимости от рельефа и залесенности местности составляют 7–20 км. В каждой сети триангуляции второго класса измерены длины 4–5 базисных сторон. На концах базисной стороны в середине полигона определены астрономические широты, долготы, азимуты и вычислены азимуты Лапласа. По проекту СКП измерения углов 1", фактически — 0,8". Схемы этих построений имеются во многих учебниках и публикациях, например [1, 21].

Государственные сети первого и второго классов, построенные по геодезическим и астрономическим измерениям, образуют астрономо-геодезическую сеть (АГС). В 1990 – 1991 гг.

проведено общее уравнивание АГС, включавшей свыше 164 тысяч пунктов триангуляции и полигонометрии этих классов, расположенных на территории бывшего СССР.

Сети третьего и четвертого классов сгущают АГС. Расстояния между пунктами III-го класса 3–8 км, а IV-го класса – 2–5 км. СКП измерения углов в третьем классе — 1,5", а в четвертом — 2". В России таких пунктов свыше 210 тыс.

На каждом пункте любого класса установлены два *ориентирных пункта*, по которым можно ориентироваться непосредственно с земли, например, при выполнении топографических съёмок. Направления на них определены с СКП 2,5". Ориентирные пункты закреплены

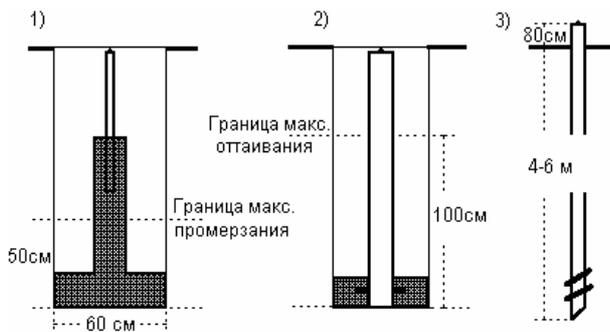


Рис. 8.11. Типы центров пунктов плановой государственной геодезической сети: 1) для северной зоны сезонного промерзания; 2) для районов многолетней мерзлоты; 3) для районов подвижных песков

подземными знаками и наружными опознавательными столбами. Они установлены на расстоянии 250 - 1000 метров от основного пункта. В отдельных случаях одним из ориентирных пунктов является геодезический знак или местный предмет (шпиль башни, колокольня), расположенный не далее 3 км и хорошо видимый с земли.

На рис. 8.11. отражены принципы закладки подземных знаков в разных регионах. На застроенных территориях их закрепляют в стенах и фундаментах зданий или устанавливают на зданиях.¹³

Над центрами сооружают наружные знаки. Они нужны для обеспечения видимости между пунктами на время производства угловых и

линейных измерений. Наружные знаки являются хорошими ориентирами. Они бывают деревянными, металлическими или железобетонными. В зависимости от конструкции их делят на туры (сооружаются в горной местности из камней или кирпичей), пирамиды, пирамиды со штативом, простые и сложные сигналы (рис. 8.12)¹⁴.

Конструкция определяется необходимой высотой наружного знака. В открытых горных районах складывают каменные или кирпичные столбы — туры, во всхолмленных открытых районах строят пирамиды высотой до 5-6 м; высоты простых сигналов обычно до 10 м, сложных сигналов — от 10 м и выше. Простой сигнал состоит из двух независимых пирамид — внутренней, на столике которой устанавливают прибор — теодолит или светодальномер, и внешней, которая несет визирную цель для наблюдений на нее с других пунктов и площадку для наблюдателя. В сложных сигналах в целях экономии строительного материала внутренняя пирамида сооружается не на земле, а опирается на столбы внешней пирамиды в местах, расположенных несколькими ярусами ниже площадки для наблюдателя. Наружные знаки должны быть устойчивыми к опрокидыванию, жесткими и прочными.

Пункты с закреплёнными подземными и наружными знаками, окапывают канавой и устанавливают опознавательные столбы.

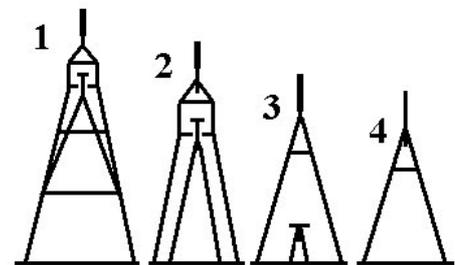


Рис. 8.12. Наружные знаки: 1) сложный сигнал, 2) простой сигнал, 3) пирамида со штативом, 4) простая пирамида

¹³ Центры геодезических пунктов. URL: <http://geodetics.ru/center.html> (Дата обращения 07.08.2014).

¹⁴ Геодезические знаки. URL: <http://geodetics.ru/znaki.html> (Дата обращения 07.08.2014).

Первоначальные плановые государственные сети СССР впоследствии дополнились новыми построениями, созданными методами космической геодезии. В 1984–93 гг. государственными геодезическими организациями создана сеть из 131 пункта, получившая название *дуплеровской геодезической сети* - ДГС. Она построена по данным спутниковой системы позиционирования первого поколения *TRANSIT*. Усилиями Топографической службы Вооруженных сил была построена упоминавшаяся выше сеть КГС. Сеть КГС создана по результатам наблюдений геодезических спутников ГЕОИК-1, ЭТАЛОН, а также при помощи спутниковых систем позиционирования *GPS* и ГЛОНАСС.

Пункты ДГС и КГС были совмещены с соответствующими пунктами АГС. В итоге их совместного уравнивания в единой координатной системе определено пространственное положение 134 пунктов с расстояниями между смежными пунктами 400–500 км. С этих пунктов результаты совместного уравнивания распространены на все остальные пункты новой Государственной геодезической сети – ГГС [3, 4].

Постановлением правительства Российской Федерации от 28 июля 2000 г. с 1 июля 2002 г. введена новая, предназначенная для геодезических и картографических работ, единая государственная система отсчета геодезических координат 1995 г. СК-95. Геодезическая отсчетная основа СК-95 представлена пунктами ГГС Российской Федерации.

В СК-42 координатные оси эллипсоида Красовского составляли углы в несколько десятых долей угловой секунды с соответствующими осями общеземной системы. Объяснялось это тем, что ось *Z* была направлена не на Условный земной полюс, а на средний полюс эпохи построения государственных сетей СССР. Другой причиной поворота координатных осей могли быть постепенные изменения долгот пунктов. В новой системе координат СК-95 оси эллипсоида Красовского повернуты и ориентированы параллельно соответствующим осям общеземной координатной системы отсчета ПЗ-90. Центр эллипсоида, определяющий начало референционной системы координат, по-прежнему остался смещенным с центра масс примерно на 155 м.

Точность СК-95 характеризуется средними квадратическими погрешностями 2–4 см в положении смежных геодезических пунктов и 0,3–0,8 м при расстояниях между пунктами от 1 до 9 тыс. км. СК-95 точнее СК-42 в 10–15 раз при расстояниях между пунктами свыше 1000 км, и в 2–3 раза для смежных пунктов; главное – новая система являлась однородной по точности в пределах территорий России и стран СНГ [16].

В настоящее время в Российской Федерации развиваемые сети ФАГС (50 пунктов, из них 33 открытого пользования), ВГС (300 пунктов) и СГС (4500 пунктов) являются геоцентрической основой новых систем координат ПЗ-90.11 и ГСК-2011 [1, 10, 11]. Система координат ГСК-2011 практически на порядок точнее СК-95 и на два порядка СК-42 [10]. По уровню точности эти системы соответствуют координатной основе *ITRF*.

В соответствии с действующими установками [15] постоянно работающие и периодически определяемые пункты ФАГС закрепляются на местности группой центров, состоящей из *основного* центра, обеспечивающего принудительное центрирование спутниковой антенны на нем и являющегося основным носителем координат, *контрольного* и *рабочего* центров.

Пункты ВГС закрепляются на местности группой из трех центров, состоящей из основного, контрольного и рабочего центров.

Пункты СГС-1 закрепляются на местности центрами, используемыми для закрепления на местности пунктов государственной геодезической сети 1-4 классов.

Типовые конструкции центров выбирают с учетом климатических и физико-географических условий зон.

Государственные нивелирные сети. Государственные нивелирные сети в пределах всей страны устанавливают единую систему высот. Они служат научным и практическим целям и

являются высотной основой всех геодезических работ и топографических съемок. Высотная сеть решает, по крайней мере, три задачи: 1) создание сети пунктов с известными высотами; 2) определение разностей уровней морей и океанов, омывающих государство; 3) изучение вертикальных движений земной поверхности. На всю территорию Российской Федерации распространена Балтийская система нормальных высот 1977 г., началом которой служит нуль Кронштадтского футштока — черта на металлической плите, укрепленной на устой моста через Обводной канал в Кронштадте, соответствующая среднему уровню Балтийского моря за период 1825 -1840 гг.¹⁵

Государственная нивелирная сеть разделяется на сети 1, 2, 3 и 4 классов точности¹⁶. Сети 1 и 2 классов являются главной высотной основой; сети 3 и 4 классов служат для обеспечения инженерных задач и топографических съемок. Сети всех классов построены методом геометрического нивелирования. Линии нивелирования 1 и 2 классов проложены по трассам, географическое положение которых научно обоснованы и наилучшим образом соответствуют решению указанных выше задач. Для достижения наивысшей точности нивелирные линии проложены по максимально благоприятным для измерений трассам: по железным, шоссейным и улучшенным грунтовым дорогам, в труднодоступных районах — по тропам, зимникам, вдоль берегов больших рек. Каждые 25 лет, а в сейсмоактивных районах и через 15 лет, выполняется повторное нивелирование по линиям 1-го класса, а через 35 и 25 лет соответственно — и по линиям 2-го класса.

Периметры полигонов нивелирных линий 1-го класса составляют 1200 км в обжитых районах и 2000 км в малообжитых. Нивелирные линии 2-го класса опираются на пункты 1-го класса и образуют полигоны периметром соответственно в 400 и 1000 км.

Линии 3-го класса прокладывают между пунктами 1 и 2 классов. Периметры полигонов 3 класса 60-150 км, а в труднодоступных районах — 100-300 км.

Сети высших классов сгущают нивелированием 4-го класса. Длины их ходов не превышают 60 км в обжитых районах, и 80 км в малообжитых местах. Расположение и густота их пунктов определяются масштабами топографических съемок или требованиями других работ.

Все нивелирные пункты закреплены знаками — нивелирными реперами. Нивелирные реперы обычно бывают трех типов — грунтовые, скальные, стенные. Грунтовыми реперами часто бывают железобетонные пилоны или металлические трубы с якорями. Знаки закладывают не реже чем через 5 км, а в труднодоступных районах — через 7 км. Кроме того, пункты 1 и 2 классов через каждые 60 км закрепляют знаками повышенной устойчивости — фундаментальными реперами. В городах плотность знаков значительно выше.

Случайная средняя квадратическая ошибка составляет 0,8; 2; 5 и 10 мм/км соответственно для нивелирований 1-го, 2-го, 3-го и 4-го классов точности. Для 1-го и 2-го классов указывается систематическая составляющая - 0,08 и 0,2 мм/км.

Общая протяжённость сетей нивелирования I и II классов около 400 тыс. км. Точность нормальных высот смежных пунктов I–II классов составляет 6–10 см. При расстояниях между пунктами в тысячу километров взаимная точность высот несколько ниже и оценивается погрешностями в 0,3–0,5 м.

Местные геодезические сети сгущения. Местные сети развивают, когда недостаточна густота пунктов государственных сетей. Их создают спутниковым позиционированием или

¹⁵ Кронштадтский футшток. Откуда есть пошла Русская Земля. (Дата обращения 07.08.2014). URL: <http://geoblog.rgo.ru/blog/364.html>

¹⁶ Инструкция по нивелированию I, II, III, IV классов. ГКИНП (ГНТА)-03-010-02. – Москва. ЦНИИГАиК. 2003 г. <http://gis-lab.info/docs/law/gkinp03-010-02.pdf> (Дата обращения 07.08.2014).

традиционными методами триангуляции, полигонометрии (плановые сети) и технического геометрического нивелирования (высотные сети). Плановые сети триангуляции и полигонометрии по точности подразделяют на сети 1 и 2 разрядов.

Местные сети сгущения развивают между пунктами государственных сетей. Их закрепляют постоянными знаками, соблюдая те же принципы, что и при заложении центров в государственных сетях. Над центрами пунктов сооружают наружные знаки — как правило, пирамиды. Точностные характеристики следующие: СКП измерения сторон в триангуляции 1 разряда 1/50 000; 2 разряда 1/20 000; в полигонометрии — соответственно 1/10 000 и 1/5000; СКП измерения углов в сетях 1 разряда 5", 2 разряда — 10".¹⁷

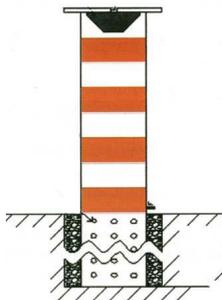


Рис. 8.13.
Трубчатый знак

Геодезическая основа государственного кадастра недвижимости.

Это новое и важное понятие. Ею является государственная геодезическая сеть и специальные опорные межевые сети - ОМС [7]. ОМС подразделяется на два класса: ОМС1 и ОМС2. Они различаются СКО взаимного положения пунктов – 0,05 и 0,10 м.

ОМС1, как правило, создаётся для установления границ городской территории или границ земельных участков в собственности (пользовании) граждан или юридических лиц.

ОМС2 развивается в черте других поселений для решения задач на землях сельскохозяйственного назначения и других землях для межевания земельных участков, мониторинга, инвентаризации, создания межевых карт, планов и др.

Разработан удобный трубчатый знак с принудительным центрированием геодезических приборов для закрепления пунктов ОМС [14] (рис. 8.13). Это труба \varnothing 150-200 мм с металлическим столиком и отверстием для станкового винта. Обеспечивается центрирование с погрешностью 0,1 мм. У основания трубы просверлены отверстия. Труба опускается в скважину, предварительно залитую жидким раствором бетона, и заливается бетонной смесью. Труба раскрашивается в красно-белый или чёрно-белый цвета и хорошо видна на фоне окружающей среды. Знак одновременно служит визирной целью для наблюдений с соседних пунктов. Глубина закладки выбирается с учётом общих правил закладки геодезических подземных знаков. На уровне земли к трубе приваривается марка для установки нивелирных реек.

Съёмочные геодезические сети. Съёмочные геодезические сети развивают на базе государственных и местных геодезических пунктов спутниковым позиционированием или традиционно — теодолитными ходами, методом триангуляции, засечками (плановая основа), геометрическим и тригонометрическим нивелированием (высотная основа). Пункты съёмочной сети служат для непосредственной съёмки контуров и рельефа местности. Густота пунктов определяется масштабом съёмки. Предельные погрешности в координатах пунктов по отношению к пунктам высших классов или разрядов точности не должны превышать 0,2 мм в масштабе создаваемого плана. Часть знаков, с расчетом на долговременное сохранение, закрепляют металлическими трубами с якорями или железобетонными пилонами, углубляемыми в грунт на глубину до 1 м. Временные точки обозначают забиваемыми в грунт кольями.

¹⁷ ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОДЕЗИЯ. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЕТИ. Уч. п. - Санкт-Петербург. Изд. СПбГПУ. 2003. https://www.google.ru/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=5&ved=0CDoQFjAE&url=http%3A%2F%2Fgeoengineer.spb.ru%2Fgeoseti.doc&ei=O1jjUnUEJOO4gSxuoGgCg&usq=AFQjCNF_WtdRXY5wbMtLxwa1Cw64Ci0_mQ&sig2=RMOU85HB1PN1kAzJCzdkpw&bvm=bv.72676100.d.bGE&cad=rjt (Дата обращения 05.04. 2015)

Гравиметрические сети. Прежде всего, отметим мировую сеть. Мировая сеть развивается на основе гравиметрической сети с исходным пунктом в Потсдаме. В 1971 г. на XV международной ассамблее в Москве введена новая система. Она получила название Международной гравиметрической стандартной сети 1971 г. — МГСС-71 (*IGSN-71*). Сеть создана на основе (1) измерений абсолютных значений ускорений силы тяжести в 8 пунктах: Севре (Франция), Теддингтоне (Англия), Боготе (Колумбия), Денвере, Вашингтоне, Миддлтауне, Бостоне, Фербенксе (США); и (2) многих сотен гравиметрических связей, осуществленных маятниковыми приборами, и десятков тысяч высокоточных измерений разностей силы тяжести, выполненных при помощи гравиметров.

Основой высокоточного гравиметрического обеспечения России являются Государственная фундаментальная гравиметрическая сеть и гравиметрическая сеть первого класса.

Государственная фундаментальная гравиметрическая сеть (ГФГС) [13]. ГФГС служит для связи с мировой и зарубежными гравиметрическими системами, для обеспечения единой метрологической основой всех гравиметрических измерений в стране, для изучения изменений гравитационного поля во времени. Её пункты совмещены с пунктами ФАГС и ВГС.

На всех пунктах ФАГС определяются ускорения силы тяжести. Средняя плотность размещения пунктов в этом случае составит 1 пункт на 0,5-1,0 млн. кв. км.

Абсолютные определения ускорения силы тяжести выполняются также на пунктах высокоточной геодезической сети (ВГС).

Один из пунктов ГФГС в Москве, на котором имеется продолжительный ряд повторных определений ускорения силы тяжести, является Главным гравиметрическим пунктом России (ГГП).

В районе Москвы, Санкт-Петербурга, Новосибирска, Хабаровска и Петропавловска-Камчатского создаются кустовые главные фундаментальные пункты с расстоянием между ними до 50 км и связанные между собой относительными измерениями с погрешностью <10 мкГал.

Государственная гравиметрическая сеть 1 класса (ГГС-1) предназначена для распространения гравиметрической системы на всю территорию страны. Построение ГГС-1 выполняют поэтапно. На первом этапе определяют от пунктов ГФГС основные пункты 1 класса с густотой один пункт на 50-100 тыс. кв. км. Затем, учитывая перспективные требования практики, выполняют сгущение сети до плотности I пункт на 10-25 тыс. кв. км. Пункты размещаются с учетом удобства подъезда к ним наземным транспортом или полета на вертолете.

Фундаментальные гравиметрические пункты и пункты ГГС-1 закрепляют центрами, которые закладывают в помещениях, обеспечивающих их долговременную сохранность. В малонаселенных районах разрешается закладка центров пунктов ГГС-1 вне помещений, причем пункты 1 класса, как правило, совмещают с пунктами триангуляции и нивелирными реперами.

Источники информации Лекции 8

1. Андреев В.К. Роль и место в исследованиях по геодезическому обеспечению системы ГЛОНАСС в рамках НИР «Развитие» государственных единых систем координат ГСК-2011 и ПЗ-90, высокоточного определения координат и гравитационного поля Земли. URL: http://www.glonass-center.ru/aboutIAC/Report%20by%20Andreev_4.pdf (дата обращения 3.02.2014).
2. Арнольд К. Методы спутниковой геодезии. – М.: Недра. 1973. – 224 с.

3. Базлов Ю. А., Галазин В. Ф., Каплан Б. Л., Максимов В. Г., Чугунов И. П. Анализ результатов совместного уравнивания астрономо-геодезической, доплеровской и космической геодезических сетей // Геодезия и картография. 1996. N 7. С. 26–36.
4. Бовшин Н. А., Зубинский В. И., Остач О. М. Совместное уравнивание общегосударственных опорных геодезических сетей // Геодезия и картография. 1995. N 8. С. 6–17.
5. Бойко Е.Г., Кленицкий Б. М., Ландис И. М., Устинов Г. А. Построение, уравнивание и оценка точности космических геодезических сетей. – М.: Недра. 1972. – 208 с.
6. Вдовин В.С. Доклад на заседании секции №3 НТС ФГУП ЦНИИмаш по вопросу «Общий замысел геодезических направлений исследований в рамках НИР «Развитие»» от 28 мая 2013 года. ФГУП «ЦНИИмаш», г. Королев. [Электронный ресурс] (дата обращения 22.07.2014). URL: http://www.glonass-center.ru/aboutIAC/Report%20by%20Vdovin_2.pdf
7. Геодезическая основа государственного кадастра недвижимости. [Электронный ресурс]. URL: http://wiki.cadastre.ru/doku.php?id=geodezicheskaya_osnova (дата обращения 27.07.2014).
8. Геодезическое применение Шоран. – М.: Издательство геодезической литературы. 1961. –252 с.
9. Глумов В. П. Основы морской геодезии. Учебное пособие. – М.: Недра. 1983. 184 с.
10. Горобец В. П., Демьянов Г. В., Майоров А. Н., Побединский Г. Г. Современное состояние и направления развития геодезического обеспечения РФ. Высотное и гравиметрическое обеспечение // Геопрофи. 2014. № 1. С. 5–11.
11. Горобец В. П., Демьянов Г. В., Майоров А. Н., Побединский Г. Г. Современное состояние и направления развития геодезического обеспечения РФ. Системы координат. // Геопрофи. 2013. № 6. С. 4–9.
12. Иванов Г.Б. 140 лет точному нивелированию в России // Геодезия и картография. 2013. N 10. С. 60–64.
13. Инструкция по развитию высокоточной государственной гравиметрической сети России. ГКИНП (ГНТА)-04-122-03. Издание официальное. - Москва ЦНИИГАиК. 2004. – 152 с.
14. Мурзайкин И.Я., Сивакова Н.И. Геодезические знаки (центры) при создании опорных межевых сетей // Геодезия и картография. 2013. № 5. С.12-15.
15. Правила закрепления центров пунктов спутниковой геодезической сети. Издание официальное. - М.: ЦНИИГАиК. 2001. – 29 с.
16. Руководство пользователя по выполнению работ в системе координат 1995 года (СК-95). Издание официальное. – М.: ЦНИИГАиК. 2004. –138 с.
17. Тищенко А. П. Геодезические основы карт. Тексты лекций. – М.: Издательство Московского университета. 1975. 174 с.
18. Успенский М.С. Условия устойчивости геодезических центров и реперов. – М.: Геодезиздат. 1955. -94 с.
19. Хаимов З.С. Основы высшей геодезии. Учебник. – М.: Недра. 1984. – 360 с.
20. Центры и реперы государственной геодезической сети СССР. - М.: Недра. 1973. 40с.
21. Яковлев Н.В. Высшая геодезия. Учебник для вузов. - М.: Недра. 1989. - 445 с.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под геодезической сетью?
2. Какие условия возникают в треугольнике, геодезическом четырёхугольнике и в центральной системе, используемых в триангуляции?
3. В чём суть метода измерения длинных линий пересечением их створа?
4. Какие выполнены измерения системой Шоран, имевшие мировое значение?
5. Как определяются направления сторон в треугольниках спутниковой триангуляции?
6. Почему при уравнивании спутниковой триангуляции ставятся условия равенства нулю смешанного произведения векторов в каждом треугольнике?

7. Поясните смысл фундаментального уравнения, устанавливающего взаимосвязь между положениями космического объекта и наземного пункта.
8. Какие и зачем формируются разности при относительных измерениях с помощью ГНСС?
9. Поясните суть работы РСДБ.
10. Какие имеют место этапы создания геодезической сети?
11. Плановая и высотная геодезическая основа СК-42.
12. Плановая и высотная геодезическая основа СК-95.
13. Геодезическая основа ГСК-2011.
14. Основные правила закрепления пунктов геодезических сетей.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Уравнивание. Уравнивание геодезических сетей является важнейшим этапом их создания. Основная задача уравнивания – получить однозначные результаты по отягощенным погрешностями измерениям, но исправленным в ходе обработки так, чтобы точность всех величин не понизилась, а наоборот, стала выше. Эта задача решается методом наименьших квадратов (МНК) [3, 4].

После уравнивания по методу наименьших квадратов точность измеренных величин *всегда повышается* [2, с. 231]. Важной характеристикой измерения является его вес, определяющий степень доверия к измерению. Из формулы «среднего отношения весов» следует, что отношение весов P уравненных и p неуравненных результатов измерений *в среднем* определяется отношением числа измеренных величин n к числу неизвестных k , что всегда больше единицы:

$$\left(\frac{P}{p}\right)_{cp} = \frac{n}{k} > 1.$$

Первое изложение элементов МНК, как и его название, дал французский математик А.М. Лежандр (1752–1833). Дальнейшее развитие МНК получил в трудах немецкого ученого К.Ф. Гаусса (1777–1855), французского математика П.С. Лапласа (1749–1827), российских ученых П.Л. Чебышева (1821–1894), А.А. Маркова (1856–1922) и многих других. В этом направлении продолжают плодотворно работать многие математики и геодезисты и в настоящее время.

Известно несколько способов уравнивания. Основными являются *параметрический* и *коррелятивный* способы. Кроме них существуют и так называемые комбинированные способы, сочетающие достоинства упомянутых основных.

Уравнивание может выполняться на плоскости, на эллипсоиде или в пространстве. В данной лекции, учитывая задачи и возможности курса, этот важнейший метод будет затронут лишь в очень ограниченных пределах.

Точность измерений. Точность – важнейшая характеристика измерений. Мерой точности измерения является погрешность (ошибка) измерений¹. Величина ошибки характеризует близость результатов измерений к их истинным значениям. Чем ошибка меньше, тем выше точность, тем результаты ближе к истинным значениям.

В процессе измерений всегда участвуют *субъект*, проводящий эти измерения, *технология* измерений, включающая методы и приборы измерений, *объект*, свойства которого предстоит выяснить в результате измерений, и *внешняя среда*, в которой проводятся измерения. Все они являются источниками ошибок. *Основной тезис* измерений – *неизбежность ошибок*. Результаты любых измерений *всегда отягощены ошибками*.

Принципы организации измерений. Борьба с погрешностями измерений основана на четырех принципах: ослабления, обнаружения, исправления и допуска погрешностей.

- **Принцип ослабления** погрешностей предполагает меры по предотвращению или ослаблению их влияний. Он основывается на выявлении и анализе источников погреш-

¹В метрологии различают термины *погрешность* и *ошибка*. Погрешность измерения имеет и величину, и знак. Например, угол измерен с погрешностью $-5''$. Ошибка – случайное дискретное событие, которое может произойти или не произойти. Например, при измерениях ногой задела треногу, на которой был установлен геодезический прибор. В геодезии эти термины используются как синонимы.

ностей и предполагает глубокое знание факторов, влияющих на измерения. Исходя из этих знаний, организуются измерения и их обработка.

- **Принцип обнаружения** погрешностей предполагает принятие мер по их выявлению. Для этого выполняются *избыточные* измерения. Например, угол измеряется несколько раз, в треугольнике измеряют все три угла, отметку нового репера определяют проложением нивелирных ходов от нескольких исходных реперов и т.п. При избыточности данных в геодезических сетях из-за погрешностей не выполняются геометрические условия и возникают *невязки*. Невязки являются индикаторами наличия погрешностей и объективными характеристиками точности измерений.
- **Принцип исправления** погрешностей предполагает применение теорий, аппаратуры и технологий ослабления влияний или полное устранение обнаруженных ошибок. Этой же цели служит теория погрешностей и теория обработки результатов измерений - *уравнивание*. Уравнивание можно выполнить только при наличии избыточных измерений.
- **Принцип допуска** погрешностей. Всех погрешностей не избежать, не обнаружить и не исправить, а при исправлении могут возникнуть новые ошибки. Поэтому необходимо сознательно и обоснованно установить допустимые пределы погрешностей, превышении которых результаты измерений бракуются, а измерения выполняются заново. В связи с этим в геодезии важное место занимает теория оценки точности результатов измерений (длин, углов, превышений) и функций от измеренных величин (уровненных значений координат, азимутов и длин линий).

Погрешности измерений и их числовые характеристики. Погрешность – отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

По влиянию на результаты измерений различают: *систематическую* и *случайную* составляющие погрешности. Систематическая погрешность составляет ту часть погрешности измерения, которая при повторных измерениях одной и той же величины остается постоянной или закономерно изменяющейся. Случайная погрешность – это составляющая погрешности измерения, которая изменяется случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Если погрешность измерений существенно превышает ожидаемую при данных условиях, то ее называют *грубой* погрешностью.

Геодезические измерения всегда организуют так, чтобы грубые погрешности (описки, просчеты, нарушения технологии производства измерений и т. п.), а также, если это возможно, и систематические погрешности были своевременно выявлены и исключены из результатов измерений. Случайные погрешности неизбежны. Их влияние можно лишь ослабить, совершенствуя приборы, методику, увеличивая количество и точность измерений, а также надлежащей математической обработкой результатов.

Теория погрешностей измерений базируется на положениях теории вероятностей и математической статистики. Полагаем, что основные понятия этих дисциплин известны. Напомним наиболее важные из них, ограничившись рассмотрением непрерывных случайных величин.

На первый взгляд кажется, что для случайных погрешностей не существует какой-либо закономерности. В действительности они, как и другие случайные величины, подчинены определенному статистическому закону распределения. Закон распределения представляют функцией распределения $F(x)$ и ее производной $f(x)$, называемой плотностью распределения. Функция распределения определяет вероятность P того, что случайная величина X примет значение, меньшее некоторой заданной величины x :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx,$$

при условиях

$$\varphi(x) \geq 0 \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Важнейшими числовыми характеристиками случайной величины являются *математическое ожидание* $M(x)$ и *дисперсия* σ^2 .

Математическое ожидание определяет центр, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины. При наличии только случайных погрешностей оно определяет истинное значение измеряемой величины. Вычисляется математическое ожидание по формуле:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx.$$

Математическое ожидание обладает свойствами:

$$M(c) = c, \text{ где } c \text{ – постоянная величина,}$$

$$M(cx) = cM(x),$$

$$M\left(\sum c_i x_i\right) = \sum c_i M(x_i), \text{ где } \Sigma \text{ – знак суммы,}$$

$$M\left(\prod x_i\right) = \prod M(x_i), \text{ где } \Pi \text{ – знак произведения,}$$

$$M(x - M(x)) = 0 \text{ – математическое ожидание отклонений от математического ожидания равно нулю.}$$

Дисперсия характеризует рассеяние возможных значений случайной величины относительно математического ожидания. В качестве меры рассеяния берут математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\sigma^2 = D(x) = M\left((x - M(x))^2\right).$$

Положительный квадратный корень из дисперсии называют средним квадратическим отклонением (СКО) или средней квадратической погрешностью (СКП):

$$\sigma = \sqrt{D(x)}.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

$$D(c) = 0, \text{ где } c \text{ – постоянная величина,}$$

$$D(cx) = c^2 D(x),$$

$$D\left(\sum c_i x_i\right) = \sum c_i^2 D(x_i),$$

$$\sigma^2 = M(x^2) - (M(x))^2.$$

Предельные погрешности. Практически важно знать вероятность того, что погрешность находится в определенных границах. С решением этой задачи связан вопрос установления *допусков* Δ_{np} на предельные погрешности измерений, по превышении которых измерения следует браковать и выполнять их повторно. Допуск на абсолютные значения погрешностей устанавливают по величине СКП, умноженной на некоторый коэффициент t :

$$\Delta_{np} = \pm t\sigma.$$

Выбор коэффициента t основан на законе распределения случайных погрешностей. Случайные погрешности измерений Δ характеризуются математическим ожиданием $M(\Delta) = 0$ и

дисперсией σ^2 . Они возникают вследствие влияния множества независимых факторов и поэтому в большинстве случаев подчинены *нормальному* (Гаусса) закону распределения. Обозначив

$$t = \Delta / \sigma,$$

для плотности и функции нормального распределения соответственно получают:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2},$$

$$F(t) = (1 + \Phi(t))/2,$$

где $\Phi(t)$ – интеграл вероятностей Лапласа, равный

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt,$$

Интеграл удобно вычислять по следующей эмпирической формуле [1]:

$$\Phi(t) = 1 - \exp(-0,794t(1 + 0,418t + 0,028t^2)).$$

Эти формулы отражают известные свойства нормально распределённых случайных ошибок:

- одинаковые по абсолютной величине положительные и отрицательные погрешности встречаются одинаково часто;
- малые погрешности встречаются чаще больших;
- среднее из погрешностей стремится к нулю при неограниченном возрастании их количества;
- при заданных условиях измерений погрешности по абсолютной величине не превосходят некоторого предела.

Вероятность того, что погрешности по модулю не превысят заданного предела $t\sigma$, равна

$$P(|\Delta| < t\sigma) = \Phi(t).$$

На практике обычно пользуются коэффициентами $t = 2$; 2,5 и 3. Им соответствуют вероятности $\Phi(t) = 0,954$; 0,988 и 0,997. Погрешность $|\Delta| > 3\sigma$ уверенно считают грубой: вероятность такого события всего 0,003 – оно может произойти лишь в трех случаях из тысячи. В геодезии также принимают величины $t = 2$, и $t = 2,5$.

Вес измерения. Измерения подразделяют на *равноточные* и *неравноточные*. Неравноточные измерения сравнивают по величинам их весов. Вес p определяет степень доверия к результату. Его вычисляют по формуле:

$$p = \sigma_o^2 / \sigma^2,$$

где p и σ^2 – вес и дисперсия измерения, σ_o^2 – параметр, выбирается произвольно, но так, чтобы веса измерений стали близкими к единице. Если $p = 1$, то дисперсия этого измерения становится равной параметру σ_o^2 . Иными словами параметр равен дисперсии тех измерений, веса которых равны единице. Для краткости его называют *дисперсией единицы веса*.

При подсчёте весов используют эмпирические дисперсии. Например, если уравнивают углы и длины сторон, измеренные соответственно с эмпирическими дисперсиями s_β^2 и s_s^2 , то, приняв $\sigma_o^2 = s_\beta^2$, для весов получают:

$$p_\beta = 1, \quad p_s = s_\beta^2 / s_s^2.$$

Как известно, при уравнивании, если измерения некоррелированы, минимизируется некоторая функция Φ , содержащая взвешенную (p) сумму квадратов поправок (v) в измерения:

$$\Phi = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots$$

Если поправки определены, тогда можно оценить и параметр σ_o^2 . Для этого в функции Φ веса p следует заменить их выражениями и вынести за знак суммы дисперсию единицы веса:

$$\Phi = [pv^2] = \sigma_o^2 [v^2 / \sigma^2],$$

где, в соответствии с символикой Гаусса, ломаные скобки обозначают сумму заключенных в них величин. В ломаных скобках безразмерные величины – отношения квадратов поправок к соответствующим им дисперсиям. Такие суммы подчиняется распределению *хи-квадрат* χ^2 . Математическое ожидание этой суммы равно числу степеней свободы $(n - k)$, где n – число измеренных величин в сети, k – число искомым неизвестных. Для дисперсии единицы веса получаем:

$$\sigma_o^2 = [pv^2] / (n - k).$$

Веса удобны тем, что их можно определять по косвенным соображениям, не зная точных значений дисперсий.

Дисперсии равноточных измерений одинаковы, их веса $p_i = 1$.

Оценки математических ожиданий и дисперсий. На практике точные значения математических ожиданий и дисперсий обычно неизвестны. Приходится пользоваться их оценками. Приведем формулы вычисления по результатам измерений оценок математического ожидания и дисперсии единицы веса. Оценкой математического ожидания неравноточных измерений является *среднее весовое*:

$$\bar{x} = [xp] / [p],$$

Эту формулу можно сделать более удобной для вычислений. Введём нормированные веса, выберем наименьшее значение x_0 из x и вычислим их разности ε :

$$\tilde{p}_i = p_i / [p], \quad \varepsilon = x - x_0, \quad x = x_0 + \varepsilon.$$

Для среднего весового получаем:

$$\bar{x} = x_0 + [\tilde{p}\varepsilon], \quad [\tilde{p}] = 1.$$

Для n равноточных измерений ($p = 1$) среднее весовое становится средним арифметическим:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= [x] / n, \\ \bar{x} &= x_0 + [\varepsilon] / n. \end{aligned}$$

Оценки s_o^2 дисперсии единицы веса σ_o^2 вычисляются в зависимости от имеющегося материала. Если известны истинное значение X , истинные погрешности $\Delta_i = x_i - X$, число n измерений x_i , тогда

$$s_o^2 = [p\Delta^2] / n.$$

Если истинное значение неизвестно, оценка выполняется по отклонениям v_i текущего измерения x_i , число которых n , от среднего значения \bar{x} :

$$v_i = x_i - \bar{x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} s_o^2 &= [pv^2] / (n - 1), \\ [pv^2] &= [p] ([\tilde{p}\varepsilon^2] - [\tilde{p}\varepsilon]^2). \end{aligned}$$

Вычисленные средние значения и дисперсии неизбежно содержат погрешности. Погрешности в значениях \bar{x} и s_o оцениваются соответственно по формулам:

$$s_o / \sqrt{[p]}, \quad s_o / \sqrt{2(n-1)}.$$

О точности числовых характеристик судят также по *доверительным интервалам*, которые строят с близкой к единице вероятностью $(1 - \alpha)$. Для доверительных интервалов математического ожидания и дисперсии единицы веса имеем:

$$(\bar{x} - t_v s_o / \sqrt{\sum p}) < M(x) < (\bar{x} + t_v s_o / \sqrt{\sum p}),$$

$$s_o^2(n-1) / \chi_1^2 < \sigma_o^2 < s_o^2(n-1) / \chi_2^2,$$

где $v = (n - 1)$ – число степеней свободы; t_v – статистика распределения Стьюдента, выбирается из таблиц по значениям v и $(1 - \alpha)$; статистики распределения *хи-квадрат* выбирают из таблиц: χ_1^2 по значениям v и $\alpha/2$, χ_2^2 – по значениям v и $(1 - \alpha/2)$.

В табл. 9.1 даны выдержки из упомянутых таблиц при значении $\alpha = 0,05$.

Таблица 9.1

Статистики распределений Стьюдента и χ^2

v	5	10	25	60	120
t_v	2,57	2,22	2,06	2,00	1,98
χ_1^2	12,8	20,5	40,6	83,3	152,2
χ_2^2	0,83	3,25	13,1	40,5	91,6

Статистическую связь между случайными переменными X_i и X_j характеризует *ковариация* или *корреляционный момент σ_{ij}* . Он определяется математическим ожиданием произведений отклонений измеренных величин x_i и x_j от своих математических ожиданий:

$$v_i = x_i - M(x_i),$$

$$v_j = x_j - M(x_j),$$

$$\sigma_{ij} = M(v_i v_j).$$

Часто статистическую связь между случайными величинами характеризуют безразмерным коэффициентом корреляции r :

$$r_{ij} = \sigma_{ij} / \sigma_i \sigma_j.$$

Отсюда, используя понятие веса, получают:

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j r_{ij} = \sigma_o^2 r_{ij} / \sqrt{p_i p_j}.$$

В этой формуле ковариация выражена через дисперсию единицы веса, коэффициент корреляции и веса измерений.

Оценку коэффициента корреляции получают, заменив математические ожидания и дисперсии их оценками:

$$r_{ij} = \sum (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) / s_i s_j n.$$

Коэффициент корреляции находится в пределах $-1 \dots +1$. Чтобы выяснить, являются ли случайные величины в корреляционной зависимости, нужно проверить значимость коэффициента корреляции. Для этого вычисляют статистику

$$t = r \sqrt{(n-2) / (1-r^2)}.$$

Эта величина t имеет распределение Стьюдента с $v = (n - 2)$ степенями свободы. По уровню значимости α и числу v находят по таблицам распределения Стьюдента статистику $t_{v\alpha}$, удовлетворяющую условию

$$P(|t| \geq t_{v\alpha}) = \alpha.$$

Если $|t| \geq t_{v\alpha}$, то связь между переменными полагают существенной.

Случайный вектор и его числовые характеристики. В геодезических измерениях имеют дело не с одной или двумя, а с системой из n случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n . В совокупности они образуют n -мерный случайный вектор

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T.$$

Элементами вектора являются, например, измеренные в геодезической сети углы, длины линий, превышения и другие величины.

Обобщением понятия математического ожидания случайной величины является *математическое ожидание случайного вектора*

$$M(X) = (M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n))^T.$$

Его элементами являются математические ожидания случайных величин. Обобщением понятий дисперсий и ковариаций является *ковариационная матрица случайного вектора*

$$K = M((X - M(X))(X - M(X))^T).$$

Ковариационная матрица K имеет n строк и n столбцов. Она симметрична относительно главной диагонали. На этой диагонали расположены дисперсии, а вне диагонали – ковариации случайных величин:

$$K_{ii} = \sigma_i^2, \quad K_{ij} = K_{ji} = \sigma_{ij}.$$

На основании понятий о весах и коэффициентах корреляции ковариационную матрицу вектора представляют в виде

$$K = \sigma_o^2 Q = \sigma_o^2 P^{-1}.$$

Матрицу Q называют *матрицей обратных весов*. Она симметрична относительно главной диагонали. Элементы на этой диагонали содержат обратные веса измерений, а недиагональные элементы – обратные веса и коэффициенты корреляции:

$$Q_{ii} = 1/p_i; \quad Q_{ij} = Q_{ji} = r_{ij} / \sqrt{p_i p_j}.$$

Матрицу

$$P = Q^{-1}$$

называют *матрицей весов*. Если измерения некоррелированы, все $r = 0$, то матрицы Q и P диагональные.

Ковариационные матрицы имеют большое значение для оценки точности функций от измеренных величин, например, полученных по результатам уравнивания значений координат, углов, длин и азимутов линий и др. После уравнивания эти величины уже являются *функциями* всех измерений. Поэтому рассмотрим подробнее, как определить корреляционную матрицу этих функций.

Предположим, некий вектор Y является линейной функцией случайного вектора X :

$$Y = AX + b,$$

где вектор b и матрица A имеют постоянные элементы. Если известна ковариационная матрица K_X случайного вектора X , то ковариационную матрицу K_Y вектора Y находят из выражения:

$$K_Y = M((Y - M(Y))(Y - M(Y))^T).$$

Но

$$M(Y) = M(AX + b) = AM(X) + b.$$

Отсюда следует

$$K_Y = AM((X - M(X))(X - M(X))^T)A^T.$$

Следовательно,

$$K_Y = AK_X A^T.$$

Эта формула является одной из важнейших при оценках точности геодезических результатов. Применим её для вычисления дисперсии σ_Y^2 некоторой функции случайного вектора

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

В общем случае эта функция нелинейная. Для её приведения к линейному виду каждый её аргумент представляют в виде суммы постоянной (основной) и случайной (малой) частей:

$$X_i = X_{oi} + v_i.$$

Функция раскладывается в ряд Тейлора, и сохраняется только линейная часть ряда:

$$Y = Y_o + AV,$$

$$Y_o = f(X_{o1}, X_{o2}, \dots, X_{on}),$$

$$A = \left(a_1 = \frac{\partial f}{\partial X_1}, a_2 = \frac{\partial f}{\partial X_2}, \dots, a_n = \frac{\partial f}{\partial X_n} \right),$$

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T.$$

Число Y_o – постоянная величина. Случайным является вектор V . Если матрица обратных весов случайного вектора V равна Q , то дисперсии функции Y равна

$$\sigma_Y^2 = \sigma_o^2 AQA^T.$$

Параметрический способ уравнивания. Параметрический способ - один из основных. Пусть измерено n величин, по которым необходимо определить k неизвестных параметров. Уравнивание возможно, если число измеренных величин больше числа искомых параметров:

$$n > k.$$

При уравнивании параметрическим способом каждая измеренная величина должна быть записана в виде функции от определяемых параметров. Например, измеренное превышение между двумя реперами будет функцией высот этих реперов, а измеренное расстояние между двумя пунктами – функцией координат этих пунктов. В общем случае n -мерный вектор *уравненных* измерений L_a представляют в виде явной функции k -мерного вектора *уравненных* значений параметров X_a :

$$L_a = F(X_a).$$

С учетом поправок V в измеренные величины L_b и поправок dX в приближенные значения параметров X_0 получают:

$$L_b + V = F(X_0 + dX).$$

Если эта функция нелинейная, разложением в ряд Тейлора её приводят к линейному виду и получают n *уравнений поправок*:

$$V = AdX + l.$$

Элементами матрицы A являются частные производные каждой функции уравнений поправок, а их n , по каждому параметру, число которых k :

$$A = \left(a_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right)_{X_0} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, k).$$

Вектор l , свободный член, содержит разности вычисленных по приближенным параметрам значений измеряемых величин и их значений, полученных непосредственно из измерений:

$$l = F(X_0) - L_b.$$

Пример. Составление этих уравнений поясним на примере нивелирной сети, когда проложен нивелирный ход между пунктами i и k . Пусть приближенные высоты этих пунктов будут H_{oi} и H_{ok} , а измеренное превышение – h_{ik} . Поправки из уравнивания в высоты и в превышение обозначим соответственно через dx_i , dx_k и v_{ik} . Очевидно, уравненное превышение между двумя реперами равно разности уравненных высот этих реперов:

$$v_{ik} + h_{ik} = (H_{ok} + dx_k) - (H_{oi} + dx_i).$$

Отсюда следует уравнение поправок

$$v_{ik} = -dx_i + dx_k + l_{ik},$$

$$l_{ik} = (H_{ok} - H_{oi}) - h_{ik}.$$

В геометрическом нивелировании дисперсия σ^2 погрешностей превышений растет с ростом L длины хода:

$$\sigma^2 = \mu^2 L.$$

Допустимые невязки в нивелирных ходах оцениваются величинами $\mu\sqrt{L}$ (мм), где L – длина хода в километрах. Значения μ для нивелировок 1, 2, 3, 4 классов и технического нивелирования соответственно равны 3, 5, 10, 20 и 50 миллиметрам на 1 километр хода.

Вес измерения при длине нивелирного хода L_{ik} вычисляется по формуле

$$p_{ik} = \frac{\sigma_o^2}{\mu^2 L} = \frac{c}{L_{ik}}.$$

Если нивелирный ход проложен на местности с крутыми склонами и много нивелирных станций, то вес определяется формулой

$$p_{ik} = \frac{c}{n_{ik}},$$

где n_{ik} – количество нивелирных станций.

В формулах для вычисления весов коэффициент c – произвольная величина. Она выбирается, например, как среднее из значений длин нивелирных ходов, а при крутых склонах – среднее из числа установок нивелира. В этом случае значения весов становятся близкими к 1.

Нормальные уравнения. В параметрическом случае уравнивания минимизации подлежит целевая функция

$$\Phi = V^T P V.$$

Её первая производная приравнивается нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial dX} = 2V^T P \frac{\partial V}{\partial dX} = 2V^T P A = 0.$$

Отсюда следует важное для параметрического способа уравнение:

$$A^T P V = 0.$$

Из этого выражения, с учетом формулы для вычисления вектора V , получают систему так называемых *нормальных уравнений*:

$$(A^T P A) dX + A^T P l = 0.$$

Их решением будет вектор поправок в параметры

$$dX = -(A^T PA)^{-1} A^T Pl.$$

Исправленные значения параметров равны

$$X_a = X_o + dX.$$

Поправки в измерения и исправленные значения измеренных величин равны

$$V = AdX + l, \quad L_a = L_b + V.$$

В целях оценки точности получают:

- выражение для дисперсии единицы веса

$$\sigma_o^2 = \frac{V^T PV}{n - k},$$

$$V^T PV = V^T Pl = l^T PV,$$

- формулу ковариационной матрицы параметров dX

$$\sigma_o^2 Q_{dX} = \sigma_o^2 (A^T PA)^{-1}.$$

Обратим внимание на следующее – матрица обратных весов искомых параметров Q_{dX} равна обратной матрице $(A^T PA)^{-1}$ коэффициентов нормальных уравнений. Отметим также, что матрица коэффициентов нормальных уравнений симметрична относительно главной диагонали:

$$(A^T PA) = (A^T PA)^T,$$

что используется в качестве контроля при уравнивательных вычислениях.

Таким образом, алгоритм параметрического способа уравнивания сводится к вычислению приближенных значений параметров, вычислению коэффициентов уравнений поправок, элементов весовых или ковариационных матриц, составлению и решению нормальных уравнений, исправлению найденными из уравнивания поправками приближенных значений параметров и измеренных величин и оценке точности полученных результатов.

Уравнивание многократной линейно-угловой засечки. В этой засечке (рис. 9.1) измеряемой величиной является горизонтальный угол (β) между опорным направлением и направлением на определяемый пункт (P) и расстояние (S) от опорного до определяемого пунктов.

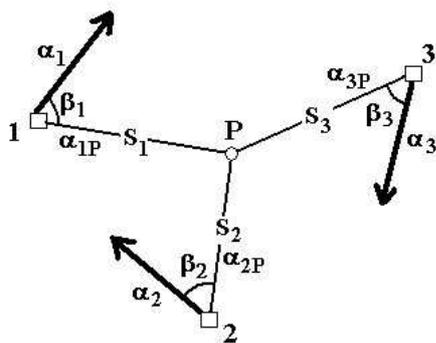


Рис. 9.1. Многократная линейно-угловая засечка

И расстояние, и угол могут быть измерены, например, электронным тахеометром. Угол и расстояние однозначно определяют искомые координаты пункта. Однако, если измерения повторить с нескольких опорных пунктов, образовать многократную линейно-угловую засечку, то к решению задачи необходимо привлечь метод наименьших квадратов, и воспользоваться приведенными выше формулами параметрического уравнивания.

Измеренные величины содержат погрешности, и после уравнивания их предстоит исправить поправками (v). Для решения задачи надо знать приближенные координаты определяемого пункта (x_0, y_0). Их можно найти, например, решением простой линейно-угловой засечки, исполненной с одного опорного пункта. После уравнивания к приближенным координатам будут получены поправки ($\delta x, \delta y$). Предположим, уравнивание выполнено и все поправки определены. Тогда для наблюдений, например, с опорного пункта 1 (x_1, y_1), можно записать следующих два уравнения связи:

$$v_{\beta_1} + \beta_1 = \alpha_{1P} - \alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{y_0 + \delta y - y_1}{x_0 + \delta x - x_1} - \alpha_1,$$

$$v_{S_1} + S_1 = \sqrt{(x_0 + \delta x - x_1)^2 + (y_0 + \delta y - y_1)^2}.$$

Раскладывая в ряд Тейлора, нелинейные функции приводим к линейному виду. В случае измерения углов получаем:

$$v_{\beta_1} + \beta_1 = \alpha_{1P} - \alpha_1 = \alpha_{01P} - \frac{\sin \alpha_{01P}}{S_{01}} \delta x + \frac{\cos \alpha_{01P}}{S_{01}} \delta y - \alpha_1,$$

где через α_{01P} обозначен дирекционный угол направления на определяемый пункт, вычисленный по приближенным координатам.

В этом уравнении поправка в угол получится в радианах. Представим её в угловых секундах, умножив коэффициенты перед поправками в координаты на число секунд в радиане $\rho''=206265$. Свободный член в уравнении поправок тоже должен быть выражен в угловых секундах. Предположим, что расстояния в данном примере составляют лишь сотни метров. Чтобы уменьшить величины коэффициентов, выразим расстояния в миллиметрах. Например, $S_1=436487$ мм. Поправки в приближенные координаты искомого пункта также будут получены в миллиметрах. Для коэффициентов и свободного члена будем иметь:

$$a_1 = -\frac{206265}{S_{01}} \sin \alpha_{01P}, \quad b_1 = \frac{206265}{S_{01}} \cos \alpha_{01P},$$

$$l_{\beta_1} = \alpha_{01P} - \alpha_1 - \beta_1.$$

Уравнение поправок для угловых измерений примет вид:

$$v_{\beta_1} = a_1 \delta x + b_1 \delta y + l_{\beta_1}.$$

Напомним, что поправка в угол и свободный член выражены в секундах угла, а поправки в координаты – в миллиметрах.

Аналогично следует поступить с линейными измерениями. После разложения функции в ряд Тейлора и обозначения через S_{01} расстояния, вычисленного по приближенным координатам, получим:

$$v_{S_1} + S_1 = S_{01} + \frac{x_0 - x_1}{S_{01}} \delta x + \frac{y_0 - y_1}{S_{01}} \delta y.$$

Обозначим коэффициенты и свободный член следующим образом:

$$c_1 = \cos \alpha_{01P} = \frac{x_0 - x_1}{S_{01}}, \quad s_1 = \sin \alpha_{01P} = \frac{y_0 - y_1}{S_{01}}, \quad l_{S_1} = S_{01} - S_1.$$

Для уравнения поправок имеем:

$$v_{S_1} = c_1 \delta x + s_1 \delta y + l_{S_1}.$$

Поправка в расстояние и свободный член должны быть выражены в миллиметрах.

Система уравнений поправок в матричной записи примет вид:

$$V = AdX + l.$$

Для засечки рис. 9.1 имеем:

$$V = (v_{\beta 1}, v_{\beta 2}, v_{\beta 3}, v_{s1}, v_{s2}, v_{s3})^T,$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}, \quad dX = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix},$$

$$l = (l_{\beta 1}, l_{\beta 2}, l_{\beta 3}, l_{s1}, l_{s2}, l_{s3})^T.$$

Теперь предстоит разобраться с диагональной матрицей весов P .

Подбору весов следует уделять серьёзное внимание. Веса определяют доли влияния разных измерений. Поправки в измерения будут вычисляться в соответствии с установленными весами. Поясним это на примере, не связанном с геодезией. Двоим предстоит разделить некий доход. Доход будет разделён пропорционально весам, определяющим степень участия каждого. Вес одного 1, а вес второго 10. Второму достанется в десять раз больше, нежели первому. Если веса определены неправильно, то распределение дохода тоже будет неверным.

Матрица весов P является диагональной (обозначена фигурными скобками):

$$P = \{p_{\beta 1} \ p_{\beta 2} \ p_{\beta 3} \ p_{s1} \ p_{s2} \ p_{s3}\}.$$

Вес для углового и линейного измерения определяется формулами:

$$p_{\beta} = \frac{c}{\sigma_{\beta}^2}, \quad p_s = \frac{c}{\sigma_s^2}.$$

В знаменателях весов выписаны дисперсии измерений углов и дисперсии измерений длин. Дисперсии обычно неизвестны, поэтому их вычисляют, используя эмпирические оценки СКО. В числителе находится произвольная безразмерная величина c [5, с. 96]. Она подбирается так, чтобы веса были близки к единице. Если СКО измерения углов $s_{\beta} = 5''$, а СКО измерения расстояний $s_s = 5\text{мм}$, то надо принять $c = 25$, все веса станут равными единице. Для весов измеренных углов и длин линий будем иметь [2, с. 210]:

$$p_{\beta} = \frac{25}{s_{\beta}^2} = 1 \frac{1}{('')^2}, \quad p_s = \frac{25}{s_s^2} = 1 \frac{1}{(\text{мм})^2}.$$

Все дальнейшие вычисления выполняются по формулам параметрического уравнивания.

Уравнивание нивелирной сети методом узлов. Применяется параметрический способ уравнивания, решаемый последовательными приближениями. При этом отпадает необходимость в составлении и решении приведённых выше уравнений. Для простоты рассмотрим уравнивание небольшой нивелирной сети (рис. 9.2). На чертеже заглавными буквами А, Л, С обозначены исходные пункты с известными высотами. Новые репера помечены римскими цифрами I, II. Над (под) этими точками указаны отметки, найденные в процессе уравнивания. Между реперами проложены ходы геометрического нивелирования. На рис. 9.2 подписаны длины ходов, и стрелками показаны направления положительных превышений. В табл. 9.2 приведены результаты вычислений. Рассмотрим последовательность обработки.

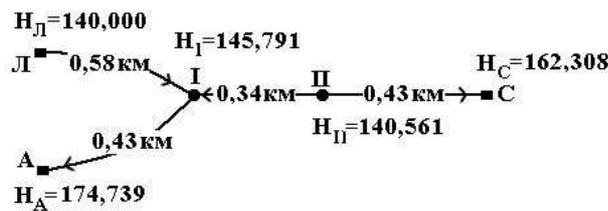


Рис. 9.2. Нивелирная сеть

указаны отметки, найденные в процессе уравнивания. Между реперами проложены ходы геометрического нивелирования. На рис. 9.2 подписаны длины ходов, и стрелками показаны направления положительных превышений. В табл. 9.2 приведены результаты вычислений. Рассмотрим последовательность обработки.

1. Вычисления весов (при длине эталонного хода $L_0=0,43$ км) и нормированных весов:

$$p_{ik} = \frac{0,43}{L_{ik}}, \quad \tilde{p}_{ik} = p_{ik} / [p].$$

Нормируют веса всех ходов, связанных с пунктом I и отдельно с пунктом II. По каждому определяемому пункту сумма нормированных весов равна единице.

Таблица 9.2

Уравнивание нивелирного хода методом узлов

Репера	Измеренные превышения h (м)	Веса		Приближения				Уравненные превышения h (м)	V (мм)	pV (мм)	pV^2	
		p	\tilde{p}	$H^{(1)}$	$H^{(2)}$	$H^{(3)}$	$H^{(4)}$					
I	A	-28,958	1,00	0,33	145,781	781	781	781	-28,948	+10	+10	100
	Л	+5,798	0,74	0,24	145,798	798	798	798	+5,791	-7	-5	35
	II	+5,233	1,27	0,43	145,791	793	795	794	+5,230	-3	-4	12
	Сумма		3,01	1,00		145,789	790	791	791			+1
II	C	-21,743	1,00	0,43	140,565	565	565	565	-21,747	-4	-4	16
	I	-5,233	1,27	0,57	140,556	557	558	558	-5,230	+3	+4	—
	Сумма		2,27	1,00		140,560	562	561	561			0

2. Вычисление простейшими путями приближённых отметок каждого определяемого репера. Используются измеренные превышения. После этого все пункты будут иметь отметки.

3. Последовательными приближениями для каждого определяемого репера вычисляются отметки со всех ближайших к нему пунктов. Для пункта I отметки будут вычислены с реперов А, Л, II. Из этих трёх отметок вычисляется среднее весовое описанным выше способом:

$$\bar{H} = H_0 + [\tilde{p}\epsilon], \quad \epsilon = H_i - H_0, \quad [\tilde{p}] = 1.$$

После этого переходят к пункту II и повторяют выше указанные вычисления. Вновь возвращаются к пункту I, и вычисляют новое среднее весовое значение, используя последний результат отметки для пункта II. Приближения повторяются до тех пор, пока не совпадут по всем определяемым пунктам результаты двух последних приближений.

4. Выполняется оценка точности результатов уравнивания. Вычисляются по уравненным и исходным отметкам превышения h , и разности v уравненных и измеренных превышений. Для каждого определяемого пункта сумма $[pv]=0$. Вычисляется СКП единицы веса и СКП на 1 км хода (n – число ходов, k – число узлов):

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}, \quad \mu = \sigma_0 / \sqrt{L_0}.$$

В данном примере для этих величин получено соответственно 9 мм и 14 мм.

Коррелятный способ уравнивания. Коррелятный способ практически применим к небольшим сетям, когда в геодезической сети сравнительно просто сформировать геометрические условия. В большой сети условий очень много. Задача уравнивания существенно усложняется. Число условий определяется числом избыточно измеренных величин.

Случайный n -мерный вектор уравненных результатов измерений L_a связан r условиями

$$F(L_a) = 0.$$

Условия могут иметь нелинейный вид. Условия приводятся к линейному виду при помощи матрицы частных производных B :

$$B = \left(b_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial L_j} \right)_{X_o L_b} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, n).$$

Получают так называемые *условные уравнения* и *вектор невязок*, вычисляемый по вектору L_b результатов измерений:

$$\begin{aligned} BV + W &= 0, \\ W &= F(L_b). \end{aligned}$$

В геодезических сетях всегда предусматриваются избыточные измерения. Каждое избыточное измерение приводит к появлению геометрического условия и невязки.

Приведем примеры условных уравнений.

- В нивелирных сетях возникают условия двух видов:
 - в замкнутом полигоне сумма превышений должна равняться нулю;
 - в разомкнутом полигоне, проложенном между двумя исходными реперами, высоты которых не подлежат исправлению, сумма превышений должна равняться разности высот этих реперов.
- В триангуляции много условий. Рассмотрим лишь одно: в плоской замкнутой фигуре, в которой измерены все внутренние углы, возникает *условие фигур*. Суть условия в том, что сумма всех углов должна равняться их теоретическому значению. Например, в плоском треугольнике, в котором измерены все углы, их сумма должна равняться 180° .
- При использовании глобальных спутниковых систем позиционирования по измерениям получают вектор, соединяющий наземные станции (*базисный или пространственный вектор*). Вид условных уравнений зависит от того, как проложен векторный ход.
 - Если этот ход образует замкнутый контур и все векторы ориентированы по часовой стрелке (или против часовой стрелки), то их сумма равна нулю. Это означает, что суммы приращений координат по каждой координатной оси в замкнутой фигуре равны нулю.
 - Когда ход разомкнут и проложен между векторами двух опорных пунктов, координаты которых не подлежат исправлению, то сумма одинаково ориентированных векторов должна равняться разности векторов этих опорных пунктов.

Вследствие неизбежных погрешностей в измерениях геометрические условия не выполняются. Возникают невязки. Например, если сумма измеренных углов в плоском треугольнике больше 180° на $10''$, то возникнет невязка $w = +10''$.

При коррелятном способе уравнивания минимизируется следующая функция Лагранжа:

$$\Phi = V^T P V - 2K^T (BV + W),$$

где K – вектор *коррелат* (неопределённых множителей)

Первая производная этой функции приравнивается нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V} = 2V^T P - 2K^T B = 0.$$

Отсюда

$$PV = B^T K.$$

Для вектора поправок получают:

$$V = P^{-1} B^T K.$$

Подставляя V в условные уравнения, получают систему *нормальных уравнений*:

$$BP^{-1} B^T K + W = 0.$$

Из решения системы нормальных уравнений определяется вектор коррелат:

$$K = -(BP^{-1} B^T)^{-1} W.$$

Зная вектор коррелат, вычисляют вектор поправок и исправляют измерения:

$$L_a = L_b + V.$$

По исправленным измерениям вычисляют все искомые параметры.

Для дисперсии единицы веса и ковариационной матрицы поправок в измерения при r избыточно измеренных величинах имеются формулы:

$$\sigma_o^2 = \frac{V^T P V}{r},$$

$$V^T P V = -K^T W = -W^T K.$$

Доказывается, что допустимая невязка в i -м условном уравнении определяется формулой:

$$(w_i)_{\text{доп}} = \pm t \sigma_o \sqrt{(BP^{-1} B^T)_{ii}},$$

где $t = 2; 2,5$ или 3 ; под квадратным корнем находится диагональный элемент i -й строки (столбца) матрицы коэффициентов нормальных уравнений.

Чтобы оценить точность определяемых величин, например, высот искоемых пунктов, необходимо составить функцию их зависимости от уравненных величин:

$$F = F(L_a).$$

В общем случае такая функция является нелинейной. Её приводят к линейному виду разложением в ряд Тейлора и сохранением только линейной части ряда:

$$f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots + f_n v_n + f_0 = 0,$$

где коэффициенты, вычисляемые по измеренным величинам,

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial L_i}.$$

Дисперсия функции

$$\sigma_F^2 = \sigma_o^2 f Q_L f^T, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

$$Q_L = P^{-1} - P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} B P^{-1}.$$

Видим, что точность уравненных величин больше точности измеренных величин, ибо

$$Q_L < P^{-1}.$$

Таким образом, вычислительный алгоритм коррелатного способа уравнивания состоит из формирования геометрических условий, вычисления невязок, условных уравнений, элементов весовых или ковариационных матриц, нормальных уравнений, коррелат, поправок в измерения, искоемых параметров и оценки точности полученных результатов.

Уравнивание нивелирной сети способом “красных чисел”. Вариант коррелатного способа уравнивания. Уравнивание выполняется последовательным приближением без состав-

ления и использования выше приведенных формул. Метод пригоден для обработки небольших нивелирных и плановых сетей. Изложим методику решения способом *красных чисел*.

1. Работа начинается с составления схемы сети. Чертёж должен быть просторным и удобным для нанесения необходимых записей (рис. 9.3).

2. На чертёж наносятся отметки исходных реперов (по завершении уравнивания туда выписываются и вновь найденные отметки новых реперов). Намечаются полигоны. Их число равно количеству избыточных измерений. В рассматриваемом случае имеются два разомкнутых полигона и должны быть сформулированы два условия. Чтобы лучше выделить полигоны, опорные пункты следует соединить пунктирными линиями. Чертёж станет нагляднее; легче будет избежать ошибок при выборе направлений обхода полигонов. Каждый полигон будем обходить по часовой стрелке. Направления обхода на чертеже показаны красными стрелками. У каждого нивелирного хода следует указать измеренные превышения. Знак превышений должен быть согласован с выбранным направлением обхода полигонов. Если направление нивелирного хода не совпадает с направлением обхода полигона, то знак превышений следует изменить на противоположный.

3. Следует вычислить невязки (w) для каждого полигона и выписать их в середине полигонов. Под невязками нарисовать таблички. В них в ходе уравнивания будут записываться промежуточные значения невязок.

4. Вычислить для каждого хода веса. В данном случае их следует заимствовать из при-

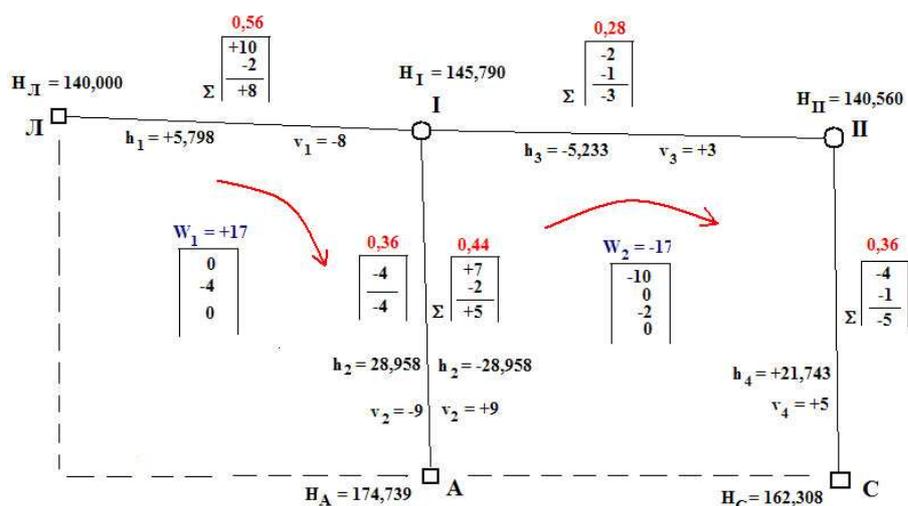


Рис. 9.3. Уравнивание нивелирной сети способом "красных чисел"

мера уравнивания этой же сети способом узлов. Далее вычисляются обратные веса. Обратные веса нормируются так, чтобы по каждому полигону сумма нормированных весов равнялась единице. Эти вычисления приведены в табл. 9.3.

5. Нормированные обратные веса следует выписать в

чертёж у соответствующего нивелирного хода с внешней стороны полигона. Их выписывают красным цветом, что и дало название способу уравнивания. Под красными числами заготавливается табличка, куда будут заноситься результаты вычислений.

6. Далее идёт распределение невязок по ходам полигонов. Начинают с полигона, где наибольшая невязка. Невязку распределяют пропорционально красным числам и записывают в эти заготовленные таблички. В табличке невязок пишется 0 в знак того, что в этом полигоне невязка ликвидирована. Переходят к следующему полигону, в данном случае к второму полигону. При распределении невязок в предыдущем полигоне в ходы, общие для двух полигонов, уже введена поправка. Поэтому её надо учесть и изменить невязку второго полигона. Новая невязка фиксируется в табличке невязок, и новая невязка второго полигона распределяется пропорционально красным числам этого полигона. Возвращаем-

ся в первый полигон, находим его новую невязку и распределяем её пропорционально его красным числам.

Процесс повторяется до получения нулевых невязок во всех полигонах.

Таблица 9.3

Вычисление обратных нормированных весов

№ хода	Вес P	Обратный вес $1/P$	Нормированные обратные веса
1	0,74	1,30	0,56
2	1,00	1,00	0,44
Σ	-	2,30	1,00
2	1,00	1,00	0,36
3	1,27	0,79	0,28
4	1,00	1,00	0,36
Σ	-	2,79	1,00

7. Вычисление поправок, уравненных превышений и отметок новых реперов. Во всех табличках красных чисел вычисляются суммы записанных в них чисел. Поправка для хода, общего для двух полигонов, вычисляется как сумма таблички в своем полигоне минус сумма таблички в соседнем полигоне. Для остальных ходов поправка равна сумме таблички, взятой с обратным знаком. Поправки выписываются у ходов с внутренней стороны полигона. Алгебраическая сумма поправок в полигоне должна равняться невязке, взятой с обратным знаком. Измеренные превышения исправляются поправками. По исправленным превышениям вычисляются отметки новых реперов. Их выписывают на чертеже. Для контроля вычисляют невязки по исправленным превышениям. Невязки должны быть нулевыми.

8. Обработка завершается оценкой точности. В данном случае эти действия выполняются тем же образом, что и в способе узлов параметрического уравнивания.

Источники информации Лекции 9

1. Баландин В.Н О вычислении интеграла вероятностей // Геодезия и картография. 1983. №6. С. 26–27.
2. Гайдаев П.А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. - М., «Недра», 1969. – 400 с.
3. Маркузе Ю.И, Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. Учебное пособие для вузов. – М.: Академический проект: Альма Матер. 2010. –247 с.
4. Машимов М. М. Уравнивание геодезических сетей. – М.: Недра, 1979. С. 21–52.
5. Яковлев Н.В. Высшая геодезия. Учебник для вузов. - М.: Недра. 1989. - 445 с.

Контрольные вопросы

1. В чём суть формулы «среднего отношения весов»?
2. В чём суть основного тезиса измерений?
3. Принципы организации геодезических измерений.
4. Допуск на значения погрешностей. Вес измерений. Дисперсия единицы веса. Ковариационная матрица случайного вектора.
5. Суть параметрического способа уравнивания.
6. Алгоритм уравнивания линейно-угловой засечки.
7. Алгоритм уравнивания нивелирной сети способом узлов.
8. Алгоритм коррелятного способа уравнивания.
9. Чем определяется количество невязок в коррелятном способе уравнивания?
10. Алгоритм уравнивания нивелирной сети способом “красных чисел”.