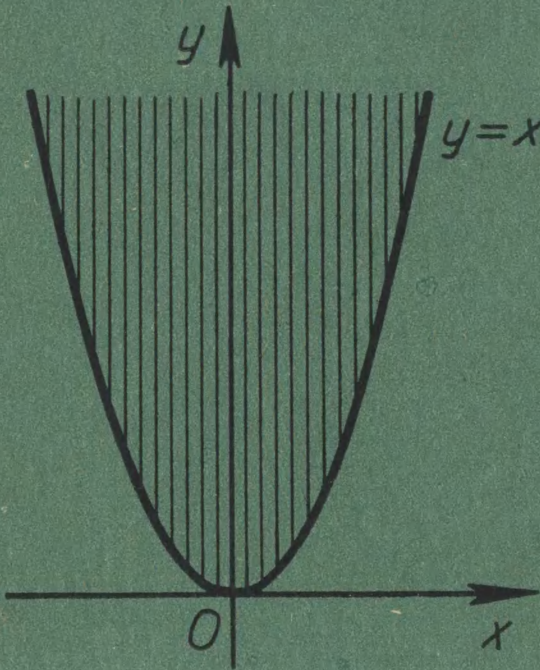
ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС




# МАТЕМАТИКА

9-10

# Сборник задач по математике

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

(для факультативных занятий в 9—10 классах)

*Под редакцией З. А. Скопеца*

Издательство «Просвещение»
Москва 1971

М. А. Доброхотова, О. А. Котий, В. Г. Потапов,
А. Н. Сафонов, З. А. Скопец, Г. Б. Хасин,
О. П. Шарова

С 23 **Сборник** задач по математике (для факультативных занятий в 9—10 классах). Под ред. проф. З. А. Скопеца. М., «Просвещение», 1971.

208 с.

На обороте тит. л. авт.: М. А. Доброхотова, О. А. Котий, В. Г. Потапов и др.

6-6
202-71

51(075)

# СОДЕРЖАНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач предназначен для факультативных занятий в IX—X классах средней школы.

При составлении задачника авторы стремились раскрыть содержание основных понятий и теорем, входящих в программу факультативных занятий.

В то же время в задачник включены тренировочные упражнения, например, на отыскание пределов, дифференцирование и интегрирование функций и другие, которые должны способствовать развитию у учащихся вычислительных навыков.

Все главы задачника снабжены необходимым справочным материалом в виде краткого теоретического введения. Обращаем внимание на то, что эти теоретические сведения необходимы только для справок при решении задач той или иной главы. Их не следует рассматривать как самостоятельный теоретический материал, освещающий математические понятия. Для более глубокого знакомства с теорией следует использовать вышедшие за последние годы различные пособия для учащихся по темам алгебры и элементарных функций, по геометрии, а также специальные сборники дополнительных глав по курсу математики девятого и десятого классов для факультативных занятий.

Необходимо также заметить, что внутри отдельных глав содержатся задачи, опирающиеся на теоретический материал, изучаемый в различных классах средней школы. Например, в главу «Множества», изучение которых планируется проводить в восьмом и девятом классах, включены задачи, предполагающие знакомство с тригонометрическими и показательной функциями, логарифмами, которые изучаются позднее. Такие задачи мы отметили звездочкой и считаем, что они могут быть пропущены при первоначальном знакомстве с темой, но к ним можно будет вернуться по мере изучения соответствующего материала.

Задачи по дифференциальным уравнениям должны способствовать расширению представлений учащихся о производной и интеграле. Рассмотрение в задачнике темы «Дифференциальные уравнения», на наш взгляд, полезно и для учителя.

Первые пять глав написаны М. А. Доброхотовой и А. Н. Сафоновым, глава VI — В. Г. Потаповым и О. А. Котием, глава VII — О. П. Шаровой, главы VIII и IX — Г. Б. Хасиным, задачи к главе X — З. А. Скопецом, справочный материал, решения и ответы к главе X — О. А. Котием.

Глава I

# МНОЖЕСТВА

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

**Определение 1.** *Предметы (объекты), из которых составлено множество, называются элементами множества.*

Если $a$ является элементом множества $A$, то это записывается так: $a \in A$.

Если же $a$ не является элементом множества $A$, то это записывается так: $a \overline{\in} A$ (или $a \notin A$).

Множество задается или перечислением его элементов, или указанием характеристического свойства элементов. Записывают множества при каждом из этих способов задания по-разному. Например, множество $A = \{-1, 2, 3\}$ задано перечислением его элементов. Множество $B = \{x : x^3 - 6x^2 + 8x = 0\}$ задано указанием характеристического свойства элементов $x$: это корни уравнения $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$. Решив его, найдем, что элементами множества $B$ являются числа 0,2 и 4.

**Определение 2.** *Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается так:* $\varnothing$. Например, если в классе все ученики успевают, то множество неуспевающих учеников из этого класса будет пустым.

**Определение 3.** *Множество, количество элементов которого выражается некоторым числом, называется конечным.* Например, множество вершин данного треугольника — конечное множество, состоящее из трех элементов. *Множество, которое не является конечным, называется бесконечным.* Например, множество натуральных чисел есть бесконечное множество.

**Определение 4.** *Если все элементы множества $A$ являются в то же время элементами множества $B$, то говорят, что множество $A$ содержится во множестве $B$ или что множество $B$ содержит* (включает) *множество $A$.* Обозначается это так: $A \subset B$ или $B \supset A$.

В этом случае $A$ называется частью или подмножеством множества $B$. Ясно, что подмножество представляет некоторое множество. В частности, подмножество может совпасть со всем множеством. Пустое множество считается подмножеством любого множества.

**Определение 5.** *Множества $A$ и $B$, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.* Запись: $A = B$.

Если относительно двух множеств $A$ и $B$ установлено, что $A \subset B$ и $A \supset B$, то это и означает, что $A = B$.

## 2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

**Определение 6.** *Объединением (суммой) двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств A или B.*

Объединение множеств $A$ и $B$ обозначается $A \cup B$. Аналогично определяется объединение нескольких множеств.

**Определение 7.** *Пересечением двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B.*

Пересечение множеств $A$ и $B$ обозначается так: $A \cap B$. Аналогично определяется пересечение нескольких множеств.

Объединение и пересечение множеств обладают переместительным и сочетательным свойствами:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A;$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Кроме того, пересечение обладает распределительным свойством:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

**Определение 8.** *Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов множества A, которые не являются элементами множества B.*

Обозначается разность множеств $A$ и $B$ так: $A \setminus B$.

## § 1. ЗАПИСЬ МНОЖЕСТВА. ПУСТОЕ МНОЖЕСТВО

В задачах 1—5 записать множества, перечислив их элементы.

**1.** Множество всех положительных простых чисел, меньших 40.

**2.** Множество всех целых положительных степеней числа 3, меньших 250.

**3.** Множество всех положительных чисел, кратных 5, которые меньше 47.

**4.** Множество цветов спектра.

**5.** Множество различных одноцветных шахматных фигур.

В задачах 6—9 перечислить элементы множества.

**6.** $M = \{x : x^3 + 5x^2 + 6x = 0\}$.

**7.** $M = \{x : x^2 - 5\,|x| + 6 = 0\}$.

8. $M = \{x : 0 \leqslant x^2 \leqslant 16;\ x$ — целое число$\}$.

9. $M = \{$учебные предметы, изучаемые вами в школе$\}$.

В задачах 10—18 записать множества, используя различные формы записи множества.

10. Множество всех четных чисел.

11. Множество чисел, кратных семи.

12. Множество целых чисел от 7 до 100.

13. Множество целых чисел, меньших 5.

14. Множество корней уравнения $x^3 - 1 = 0$.

15. Множество нулей функции $f(x) = x^3 - 8x$.

16*. Множество корней уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$.

17*. Множество нулей функции $f(x) = |\cos x| - 1$.

18. Множество точек плоскости, лежащих на биссектрисах первого и третьего координатных углов.

В задачах 19—23 найти множество корней заданных уравнений.

19. $|x| = -x$.

20. $1 - |x| = |x - 1|$.

21. $2 + |x| = |x + 2|$.

22*. $|\sin x| - 1 = 0$.

23*. $\sin x - 4 = 0$.

24. Какими являются следующие множества:

а) множество прямоугольных треугольников, у которых квадрат гипотенузы не равен сумме квадратов его катетов;

б) множество рациональных чисел, квадрат которых равен 2?

В задачах 25—27 найти множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют заданным уравнениям.

25. $(x^2 - 4)(y^2 - 9) = 0$.

26. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$.

27. $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = -2$.

В задачах 28—31 найти множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим системам неравенств.

28. $\begin{cases} x > 1, \\ y \leqslant 2. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x + y < 1, \\ x - y \geqslant 2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} |x| - 1 > 0, \\ |y| - 1 < 0. \end{cases}$ 31. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 > 0, \\ |y| - 4 \leqslant 0. \end{cases}$

В задачах 32—35 указать, какие высказывания истинны, какие ложны.

32. Если $M = \{$четырехугольники$\}$, то: а) ромб $\in M$; б) квадрат $\in M$; в) пятиугольник $\overline{\in} M$; г) окружность $\overline{\in} M$.

33. Если $M = \{6 <$ простые числа $< 28\}$, то: а) $2 \in M$; б) $13 \in M$; в) $17 \in M$; г) $19 \in M$; д) $24 \overline{\in} M$.

34. Если $M = \{A\ (x,\ y) : 2x - y - 1 = 0\}$, то: а) $A_1(1,\ 1) \in M$; б) $A_2(2,\ -1) \overline{\in} M$; в) $A_3(2,\ 3) \in M$; г) $A_4(0,\ -1) \in M$; д) $A_5(0,\ 0) \overline{\in} M$; е) $A_6(-3,\ -7) \in M$.

35. Если $M = \{A(x,\ y) : x^2 + y^2 = 4\}$, то: а) $A_1(2,\ 1) \in M$; б) $A_2(-2,\ 2) \in M$; в) $A_3(2,\ -2) \overline{\in} M$; г) $A_4(1,\ 1) \in M$.

## § 2. КОНЕЧНЫЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

В задачах 36—47 указать, какие множества являются конечными, какие бесконечными.

36. $M = \{$числа, кратные $8\}$.

37. $M = \{$окружности, проходящие через две заданные точки$\}$.

38. $M = \{$книги в библиотеке$\}$.

39. $M = \{A(x,\ y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

40. $M = \{A(x,\ y) : 2x - 3y + 1 = 0\}$.

41. $M = \{A(x,\ y) : |x| > 2\}$.

42. $M = \{A(x,\ y) : |x| = -x\}$.

43. $M = \{$прямые, проходящие через две заданные точки$\}$.

44*. $M = \{x : \operatorname{tg} x = 1\}$.

45*. $M = \{x : \cos^2 x - \sin 2x = 0\}$.

46*. $M = \{$прямоугольники, периметр которых равен $20\}$.

47*. $M = \{$точки пересечения синусоиды $y = \sin x$ с прямой $y = \frac{1}{2}\}$.

## § 3. ПОДМНОЖЕСТВО

48. Написать все подмножества множества $M$, если:
а) $M = \{$тетрадь, ручка, карандаш$\}$;
б) $M = \{2 <$ простые числа $< 8\}$.

В задачах 49, 50 указать, какие из высказываний истинны, какие ложны.

49. а) $\{$ромбы$\} \subset \{$параллелограммы$\}$;
б) $\{$ромбы$\} \subset \{$прямоугольники$\}$;

в) {квадраты} $\subset$ {прямоугольники};
г) {квадраты} $\subset$ {ромбы};
д) {прямоугольники} $\subset$ {трапеции}.

**50.** а) {все простые числа} $\subset$ {все нечетные числа};
б) {числа, кратные 6} $\subset$ {четные числа};
в) {положительные четные числа} $\subset$ {числа $> -1$}.

**51.** С помощью кругов Эйлера убедиться, что, каковы бы ни были множества $A$, $B$, $C$:
а) если $A \supset B$ и $B \supset C$, то $A \supset C$;
б) если $A \subset B \subset C \subset A$, то $A = B = C$.

**52.** Пусть $A$ — множество всех положительных целых чисел, делящихся на 3, $B$ — множество всех положительных целых чисел, сумма цифр которых делится на 3. Будут ли равны множества $A$ и $B$?

**53.** Пусть $A$ — множество всех четных положительных чисел, $B$ — множество всех целых положительных чисел, делящихся на 6. В каком отношении находятся множества $A$ и $B$?

**54*.** Доказать, что если множество состоит из $n$ элементов, то число его подмножеств равно $2^n$.

Указание. Число всех подмножеств равно $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$, где $C_n^k$ — число сочетаний из $n$ по $k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), причем по определению $C_n^0 = 1$.

## § 4. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

В задачах 55—63 найти объединение (сумму) заданных множеств.

**55.** $A = \{(2n-1) : n = 1, 2, \ldots\}$, $B = \{2n : n = 1, 2, \ldots\}$.

**56.** $A = \{p : p$ — простое число$\}$, $B = \{2n - 1 : n = 1, 2, \ldots\}$.

**57.** $A = \{2n : n = 1, 2, \ldots\}$, $B = \{2^n : n = 1, 2, \ldots\}$.

**58.** $A = \{p : p$ — простое число, меньшее $15\}$, $B = \{(2n-1) : n = 1, 2, 3, 4\}$.

**59.** $A =$ {ромбы}, $B =$ {параллелограммы}.

**60.** $A = \{(x, y) : |y| \leqslant 1\}$, $B = \{(x, y) : |x| \leqslant 1\}$.

**61.** Убедиться, что: а) $A \cup B = B \cup A$; б) $A \cup \varnothing = A$.

**62.** На примере множеств $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, q, p, r\}$, $C = \{d, q, r, s, t, u\}$ проверить справедливость равенства $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

**63.** Обозначим через $n(A)$ количество элементов конечного множества $A$.

Когда справедливо равенство $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, если $A$ и $B$ — конечные множества?

В задачах 64—67 найти разности $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

**64.** $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{p, q, r, s, t\}$.

**65.** $A = \{n : n = 1, 2, \ldots\}$, $B = \{n : n = 1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

**66.** $A = \{2n : n = 1, 2, \ldots\}$, $B = \{2n - 1 : n = 1, 2, \ldots\}$.

**67.** $A = \{$прямоугольники$\}$, $B = \{$квадраты$\}$.

**68.** На примере множеств $A = \{a, b, c, d, p, q\}$ и $B = \{b, d, q, r, s, t\}$ убедиться, что вообще из равенства $A \setminus B = C$ не следует равенство $A = B \cup C$. Объяснить полученный результат, пользуясь кругами Эйлера.

**69.** Пользуясь кругами Эйлера, убедиться в справедливости равенства $A \setminus (B \setminus A) = A$.

**70.** Когда справедливо равенство $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$, где $A$ и $B$ — конечные множества?

В задачах 71—75 найти пересечение заданных множеств.

**71.** $A = \{$простые числа $< 20\}$, $B = \{$нечетные числа $< 20\}$.

**72.** $A = \{2n : n = 1, 2, \ldots\}$, $B = \{3n : n = 1, 2, \ldots\}$.

**73.** $A = \{$прямоугольники$\}$, $B = \{$ромбы$\}$.

**74.** $A = \{$прямоугольники, периметр которых больше $100\}$, $B = \{$прямоугольники, периметр которых меньше $200\}$.

**75.** $A = \{n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$, $B = \{p : p$ — простое число$\}$.

**76.** На примере множеств $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, q\}$, $C = \{c, p, r, t\}$ проверить справедливость равенства $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

**77.** Если $N = \{$натуральные числа$\}$,

$M = \{$положительные рациональные числа$\}$,

$P = \{$простые числа$\}$,

$Q = \{$положительные нечетные числа$\}$,

то истинны ли высказывания:

а) $P \subset Q \cap N$; б) $Q = N \cap M$;

в) $P \subset (Q \cap N) \cup M$; г) $Q = P \cap N$?

**78.** Если $A \subset B \subset C$, то истинны ли высказывания:

а) $A \cup B \subset C$; б) $C \setminus B = C \setminus A$; в) $B \setminus C = A \setminus C$?

**79.** Когда $A \cap B = A$?

**80.** Доказать справедливость равенства $A \cap (A \cup B) = A$.

**81.** Какое из двух данных множеств является подмножеством другого: а) $A$ и $A \cap B$; б) $A$ и $A \cup B$; в) $A \cap B$, $A \cup B$?

82. Когда справедливо равенство $A \cap B = A \cup B$?

В задачах 83—85 найти множество решений заданных уравнений.

83. $(x^2 + y^2 - 1)(y^2 - x) = 0$.

84. $(|x| - 1) x^2 = 0$.

85. $(|x| - 1)^2 + (|y| - 2)^4 = 0$.

В задачах 86—87 найти множество решений заданных неравенств. Найденные множества изобразить на чертеже.

86. $(|x| - 1)(|y| - 1) > 0$.

87. $(x^2 + y^2 - 4)(1 - |x|) > 0$.

В задачах 88—89 найти множество решений заданных систем уравнений.

88. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8 = 0, \\ y^2 - 2x = 0. \end{cases}$ 89. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ |y| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

90. Пусть $A \subset B$. Тогда множество $B \setminus A$ называется дополнением множества $A$ до множества $B$. Найти дополнение множества $A = \{1, 5, 8, 9\}$ до множества $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

В задачах 91—97 найти дополнение множества $A$ до множества $B$.

91. $A = \{1, 5, 8\}$, $B = \{1, 2, 5, 6, 8, 9, 17\}$.

92. $A = \{x : x = 2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

93. $A = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 2\}$, $B = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 4\}$.

94. $A = \{x : x^2 + 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x : x^3 + 5x^2 + 6x = 0\}$.

95. $A$ = {равносторонние треугольники}, $B$ = {всевозможные треугольники}.

96. $A$ = {учащиеся школы, играющие в шахматы}, $B$ = {все учащиеся школы}.

97*. $A = \{x : \sin x = 1\}$, $B = \{x : |\sin x| = 1\}$.

98. Обозначим дополнение множества $A$ до множества $B$ через $C_B A$. Убедиться, что $C_B(C_B A) = A$.

В задачах 99—100 функции $f_i(x)$, $i = 1, 2$ определены соответственно на множествах $A_i$, $i = 1,2$.

99. Найти область определения $M$ функции $f(x)$, если: а) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$; б) $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

100. а) $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$; б) $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

В задачах 101—118 найти область определения заданных функций.

101. $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-3)}$.

102. $f(x)=\sqrt{x^2-1}+x^3$.

103. $f(x)=\sqrt{|x|-1}+\frac{1}{x^2-1}$.

104. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x(|x|-2)}$.

105. $f(x)=\frac{x+2}{|x+1|}+\frac{1}{x^2-5|x|+6}$.

106. $f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}$.

107. $f(x)=\sqrt{|x|-1}+\sqrt{2-|x|}$.

108. $f(x)=\sqrt{|x|-2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}$.

109. $f(x)=\frac{\sqrt{2+|x|}}{\sqrt{|x|^3-3|x|^2+2|x|}}$.

110*. $f(x)=\sqrt{(x-1)(x-3)}+\sin\sqrt{x}$.

111*. $f(x)=2^x\lg\sin x$.

112*. $f(x)=\sqrt{\lg\cos x}\cdot\frac{1}{x^3-4\pi^2x}$.

113*. $f(x)=\frac{\sqrt{|x|-1}}{x(\sin x-1)}$.

114*. $f(x)=\frac{x}{x^2-x-2}+\lg(x-2)$.

115*. $f(x)=\sqrt{3-x}+\arcsin\frac{x-2}{3}$.

116*. $f(x)=\lg(x^2-3x+2)+2^{3x-1}$.

117*. $f(x)=\lg|x-1|+\sqrt{1-x}$.

118*. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}\lg x$.

## § 5. УНИВЕРСАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО

**119.** Если все рассматриваемые множества в ходе какого-либо рассуждения являются подмножествами некоторого множества $I$, то это множество $I$ называют универсальным. Убедитесь, что если $A\subset I$, то $A\cup C_I A=I$, где $C_I A$ — дополнение множества $A$ до $I$.

**120.** Если универсальное множество $I$ изобразить в виде прямоугольника, а его подмножество $A$ в виде круга, то как изобразится множество $C_I A$?

**121.** Пусть универсальным множеством $I$ является множество всех учащихся данной школы: а) какие множества при этом условии можно рассматривать? б) Существует ли в этом случае такое множество $X$, что при любом $A \subset I$

$$A \cap X = A?$$

**122.** Пусть универсальным множеством $I$ является множество всех натуральных чисел. Чему будет равно: $C_I P$, где $P = \{p : p$ — простое число$\}$; $C_I A$, где $A = \{2n - 1 : n = 1, 2, \ldots\}$?

**123.** Пусть универсальным множеством $I$ является множество точек плоскости. Запишите дополнение следующих множеств:

а) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$;
б) $A = \{(x, y) : x^2 + 3x + 2 \leqslant 0\}$;
в) $A = \{(x, y) : 3x + 2y + 5 = 0\}$;
г) $A = \{(x, y) : |x| \leqslant 2\}$;
д) $A = \left\{ (x, y) : \begin{cases} (x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \right\}$.

**124.** Пусть $A$ и $B$ — подмножества универсального множества $I$. Показать, что: а) если $A \subset B$, то $C_I A \supset C_I B$; б) если $A \cap B = \varnothing$, то $A \subset C_I B$ и $B \subset C_I A$.

Пользуясь кругами Эйлера, решить задачи 125—128.

**125.** Каждый из членов команды играет либо в футбол, либо в теннис, либо в футбол и в теннис. Сколько человек в команде, если известно, что 18 человек играют в обе игры, 23 человека играют в футбол, 21 — в теннис?

**126.** Из 220 школьников 163 играют в баскетбол, 175 — в футбол, 24 не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играет в баскетбол и футбол?

**127.** Из 20 человек двое изучали только английский язык, трое — только немецкий, шестеро — только французский. Никто не изучал трех языков. Один изучал немецкий и английский, трое — французский и английский. Сколько человек изучало французский и немецкий языки?

**128.** В классе 30 учеников. Все, кроме двух, имеют оценки «5», «4» и «3». Число учащихся, имеющих оценки «5»,— двенадцать, «4» — четырнадцать, «3» — шестнадцать. Трое учатся лишь на «5» и на «3», трое лишь на «5» и на «4» и четверо лишь на «4» и на «3». Сколько человек имеет одновременно оценки «5», «4» и «3»?

# ОТВЕТЫ

## § 1.

**1.** $M = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$. **2.** $M = \{3, 9, 27, 81, 243\}$. **3.** $M = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$. **4.** $M =$ {красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый}. **5.** $M =$ {король, ферзь, ладья, конь, слон, пешка}. **6.** $M = \{-3, -2, 0\}$. **7.** $M = \{-3, -2, 2, 3\}$. **8.** $M = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. **10.** $M = \{2n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$. **11.** $M = \{7n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$, **12.** $M = \{n : 7 \leqslant n \leqslant 100\}$. **13.** $M = \{n : n < 5\}$. **14.** $M = \{x : x^3 - 1 = 0\}$. **15.** $M = \{x : x^3 - 8x = 0\}$ или $M = \{-2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}\}$. **16.** $M = \left\{x : \sin x = \frac{1}{2}\right\}$ или $M = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}$. **17.** $M = \{x : |\cos| = 1\}$ или $M = \{\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. **18.** $M = \{(x, y) : y = x\}$. **19.** $M = \{x : x \leqslant 0\}$. **20.** $M = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. **21.** $M = \{x : x \geqslant 0\}$. **22.** $M = \{x : x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. **23.** Пустое множество. **24.** а) Пустым; б) пустым. **25.** Точки плоскости, лежащие на прямых $x = \pm 2$; $y = \pm 3$. **26.** Точка $A(-1, 2)$. **27.** Множество пустое. **28.** Точки, лежащие правее прямой $x = 1$ и не выше прямой $y = 2$. **29.** Точки, лежащие ниже прямой $x + y = 1$ и не ниже прямой $x - y = 2$. **30.** $M = \{(x, y) : x > 1, |y| < 1\} \cup \{(x, y) : x < -1, |y| < 1\}$. **31.** Точки полосы, ограниченной прямыми $y = \pm 4$, расположенные вне круга $x^2 + y^2 \leqslant 25$. **32.** а) Истинно; б) ложно; в) истинно; г) ложно. **33.** а) Ложно; б) истинно; в) ложно; г) истинно; д) ложно. **34.** а) Истинно; б) ложно; в) ложно; г) истинно; д) ложно; е) ложно. **35.** а) Ложно; б) истинно; в) ложно; г) ложно.

## § 2.

**36.** Бесконечное. **37.** Бесконечное. **38.** Конечное **39.** Бесконечное. **40.** Бесконечное. **41.** Бесконечное. **42.** Бесконечное. **43.** Конечное (одноэлементное). **44.** Бесконечное. **45.** Бесконечное. **46.** Бесконечное. **47.** Бесконечное.

## § 3.

**48.** а) Всего 8 подмножеств. Одно из них является пустым, а другое совпадает с множеством $M$; б) $M_1 = \{3\}$, $M_2 = \{5\}$, $M_3 = \{7\}$, $M_4 = \{3, 5\}$, $M_5 = \{3, 7\}$, $M_6 = \{5, 7\}$, $M_7 = \{3, 5, 7\}$, $M_8 = \varnothing$. **49.** а) Истинно; б) ложно; в) истинно; г) истинно; д) истинно. **50.** а) Ложно; б) ложно; в) истинно. **52.** Да. **53.** $B \subset A$.

## § 4.

**55.** $A \cup B = \{n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$. **56.** $A \cup B = \{2 \text{ и } 2n - 1 : n = 1, 2 \ldots\}$. **57.** $A \cup B = A$. **58.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. **59.** $A \cup B = B$. **60.** Множество $A \cup B$ состоит из точек, лежащих внутри двух полос, ограниченных прямыми $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, и на этих прямых. **63.** Если $A$ и $B$ не имеют общих элементов. **64.** $A \setminus B = A$; $B \setminus A = B$. **65.** $A \setminus B = \{n : n = 11, 12, \ldots\}$, $B \setminus A = \varnothing$. **66.** $A \setminus B = A$; $B \setminus A = B$. **67.** $A \setminus B = \{$прямоугольники с неравными сторонами$\}$, $B \setminus A = \varnothing$. **70.** Когда $B \subset A$. **71.** $A \cap B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. **72.** $A \cap B = \{6n : n = 1, 2, 3 \ldots\}$. **73.** $A \cap B = \{$квадраты$\}$. **74.** $A \cap B = \{$прямоугольники, периметры которых больше 100, но меньше 200$\}$. **75.** $A \cap B = B$. **77.** а) Ложно; б) истинно; в) истинно; г) ложно. **78.** а) Истинно; б) ложно, если $A \neq B$; в) истинно. **79.** Когда $A \subset B$. **81.** а) $A \cap B \subset A$; б) $A \subset A \cup B$; в) $A \cap B \subset \subset A \cup B$. **82.** Когда $A = B$. **83.** $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\} \cup \{(x, y) : y^2 - x = 0\}$. **84.** $M = \{x : |x| = 1\} \cup M\{x : x = 0\}$. **85.** $M = \{$точки $(-1, 2), (1, -2), (1, 2), (-1, -2)\}$. **86.** $M = \{(x, y) : |x| - 1 > 0$ и $|y| - 1 > 0; |x| < 1$ и $|y| < 1\}$. **87.** Множество $M$ состоит из внутренних точек полосы, ограниченной прямыми $x - 1$ и $x = 1$, лежащих вне круга $x^2 + y^2 \leqslant 4$, и из внутренних точек этого круга, лежащих вне этой же полосы. **88.** $M = \{(2, 2), (2, -2)\}$. **89.** $M = \left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$. **90.** $C_B A = \{2, 3, 4, 6, 7, 10\}$. **91.** $\{2, 6, 9, 17\}$. **92.** $\{x : x = 2n - 1, n = 1, 2, \ldots\}$. **93.** $\{x : 0 \leqslant x < 1\} \cup \{x : 2 < x \leqslant 4\}$. **94.** $\{0\}$. **95.** {Неравносторонние треугольники}. **96.** {Учащиеся школы, не играющие в шахматы}. **97.** $\left\{x : x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \ldots\right\}$.

**99.** а) $M = A_1 \cap A_2$; б) $M = A_1 \cap A_2$. **100.** а) $M = A_1 \cap A_2$; б) $M = \{A_1 \cap A_2\} \setminus \{x : f_2(x) = 0\}$. **101.** $M = \{x : x \leqslant 1\} \cup \{x : x \geqslant 3\}$. **102.** $|x| \geqslant 1$. **103.** $|x| > 1$. **104.** $M = \{x : |x| > 2\} \cup \{x : 1 \leqslant |x| < 2\}$. **105.** Вся числовая прямая, исключая точки $-3, -2, -1, 2, 3$. **106.** $M = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 3\}$. **107.** $M = \{x : 1 \leqslant |x| \leqslant 2\}$. **108.** $M = \{x : |x| > 2\}$. **109.** Вся числовая прямая, исключая точки $-2, -1, 0, 1, 2$. **110.** $M = \{x : x \geqslant 3\} \cup \{x : 0 < x \leqslant 1\}$. **111.** $M = \{x : 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. **112.** $M = \{x : x = 2\pi k, k = \pm 2, \pm 3\}$. **113.** $M = \{x : |x| > 1\} \setminus \left\{x : x = 0, \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0, \pm 1\right\}$. **114.** $(+2, +\infty)$. **115.** $[-1, 3]$. **116.** $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$. **117.** $(-\infty, 1)$. **118.** $(0, 2] \cup [3, +\infty)$.

## § 5.

**120.** Точками прямоугольника, расположенными вне круга, изображающего множество. **121.** а) Множества, состоящие только из учащихся данной школы; б) $x = I$. **122.** $C_I P = \{1$ и все составные натуральные числа$\}$, $C_I A = \{2n : n = 1, 2, \ldots\}$. **123.** а) $C_I A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geqslant 1\}$; б) $C_I A = \{(x, y) : x^2 + 3x + 2 \geqslant 0\}$; в) $C_I A = \{(x, y) : 3x + 5y + 5 \leqslant 0\}$; г) $C_I A = \{(x, y) : |x| > 2\}$. **125.** 26. **126.** 142. **127.** 5. **128.** 2.

**Глава II** 

# ФУНКЦИЯ, ЕЕ ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

**Определение 1.** *Если каждому элементу $x$ из числового множества $X$ по некоторому правилу поставлено в соответствие число $y$, то говорят, что на множестве $X$ определена числовая функция $y = f(x)$.* Записывают это так: $y = f(x)$, $x \in X$.

$x$ называется независимой переменной или аргументом.

**Определение 2.** *Множество $X$, на котором определена функция, называется областью определения функции.*

**Определение 3.** *Множество $Y = \{y : y = f(x),\ x \in X\}$ всех значений функции называется областью значений функции (или ее рангом).*

**Определение 4.** *Множество всех точек плоскости с координатами $(x, y)$, где $x \in X$, $y = f(x)$, называется графиком функции $y = f(x)$.*

Функция может быть задана аналитически (с помощью формулы или нескольких формул), графически, таблицей, словесно (описательно). Вот пример словесного задания функции: $y$ равен наибольшему целому числу, не превосходящему $x$; эту функцию принято обозначать $y = E(x)$ (или $y = [x]$). Например,

$$E(2,3) = 2, \quad E(\pi) = 3, \quad E(-\pi) = -4.$$

**Определение 5.** *Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется ограниченной на множестве $x$, если для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant K$, где $K$ — некоторое положительное число.* В противном случае функция называется неограниченной на этом множестве. Например, функция $y = x^2$ ограничена на сегменте $[-1,3]$, ибо $x^2 \leqslant 9$, если $x \in [-1, 3]$. Функция $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$ не ограничена на этом интервале.

**Определение 6.** *Множество чисел $M = \{x\}$ называется симметричным относительно нуля, если одновременно с числом $x$ оно содержит противоположное ему число $-x$.* Например, множество $M = \{x : 1 < |x| < 2\}$ симметрично относительно нуля: оно состоит из точек двух интервалов $(-2, -1)$ и $(1, 2)$.

Множество, симметричное относительно нуля, обычно просто называют симметричным.

**Определение 7.** *Если область определения $X$ функции $f(x)$ есть симметричное множество и для любого $x \in X$ выполняется равенство*

$$f(-x) = f(x),$$

*то функция называется четной.*

Если же $f(-x) = -f(x)$, то функция называется нечетной.

**Определение 8.** *Функция $f(x)$, $x \in X$, называется возрастающей (убывающей), если для любых двух точек $x_1$, $x_2$ множества $X$, удовлетворяющих соотношению $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.*

Примечание. Если в условиях предыдущего определения некоторые значения функции могут совпасть, то функция называется соответственно неубывающей (невозрастающей).

**Определение 9.** *Функция $f(x)$, $x \in X$, называется периодической с периодом $l$ $(l \neq 0)$, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x + l) = f(x)$.* (Числа $x \pm l$ должны принадлежать $X$.)

Вместе с $l$ числа $\pm nl$, где $n$ — натуральное число, также являются периодами функции. Обычно периодом называют наименьшее положительное число (если оно существует), удовлетворяющее этому условию. Иногда это наименьшее положительное число называют основным периодом. График периодической функции будет «повторять» себя через каждый промежуток длины $l$, равной основному периоду.

### Сложная функция

Пусть задана функция $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, множеством значений которой является сегмент $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть, далее, на сегменте $[a, b]$ определена функция $y = f(x)$. Тогда *функция $y = f[\varphi(t)]$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, называется сложной функцией.* Например, если $y = x^2$ и $x = 2t + 3$, то можно образовать сложную функцию $y = (2t + 3)^2$. Обратно, сложную функцию можно расчленить на более простые. Например, зная сложную функцию $y = \dfrac{3\sqrt{1-t}+2}{(\sqrt{1-t})^3}$, можно выделить составляющие ее функции: $y = \dfrac{3x+2}{x^3}$ и $x = \sqrt{1-t}$.

### Обратная функция

**Определение 9а.** *Функция $x = \varphi(y)$, $y \in [c, d]$ называется обратной для функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, если каждому $y \in [c, d]$ соответствует определенное $x = \varphi(y) \in [a, b]$, такое, что $f[\varphi(y)] \equiv y$.*

Например, функция $x = \sqrt{y}$, $y \in [0, \infty)$ является обратной для функции $y = x^2$, $x \in [0, \infty)$, так как для каждого числа $y \in [0, \infty)$ $f[\varphi(y)] = (\sqrt{y})^2 \equiv y$. Можно доказать, что если функция $x = \varphi(y)$, $y \in [c, d]$ является обратной для функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то и, обратно, функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, является обратной для функции $x = \varphi(y)$, $y \in [c, d]$. Не каждая функция имеет обратную. Периодическая функция, очевидно, не будет иметь обратной в области своего определения. Наоборот, возрастающая (убывающая) функция имеет обратную в своей области определения.

Очевидно, что, для того чтобы функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы для этой функции $f(x)$ разным значениям аргумента соответствовали различные значения функции, т. е. если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$.

## 2. ПРЕДЕЛЫ

**Определение 10.** *Число $a$ называется пределом последовательности*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{1}$$

*если для любого положительного числа $\varepsilon$ можно найти такое натуральное число $N$, что для всех значений $n$, удовлетворяющих неравенству $n > N$, будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.* Обозначение: $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Значение $N$, вообще говоря, зависит от $\varepsilon$.

Последовательность может иметь только один предел.

**Определение 11.** *Последовательность, имеющая пределом число $a$, называется сходящейся к числу $a$.*

**Определение 12.** *Последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся.*

**Определение 13.** *Последовательность (1) называется ограниченной, если для всех значений $n$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant K$, где $K$ — некоторое положительное число.*

В противном случае последовательность (1) называется неограниченной.

**Определение 14.** *Последовательность (1) называется ограниченной сверху (снизу), если для всех значений $n$ выполняется неравенство $x_n \leqslant b$ $(x_n \geqslant a)$, где $b$ $(a)$ — некоторое число.*

**Определение 15.** *Число $b$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon$ можно указать такое положительное число $\delta$, что для всех значений $x$, отличных от $a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.* Обозначение: $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Примечания. а) В точке $a$ функция $f(x)$ может быть не определена. Например, пусть $f(x) = x + 1$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$. Пусть, далее, $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ в точке $x = 1$ функция не определена; $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = 2$, ибо при отыскании предела в точке $x = 1$ учитываются значения функции в точках, отличных от единицы, а в этих точках функция $f(x)$ совпадает с $f_1(x)$.

б) Число $b$ называется также пределом функции в точке $a$.

**Определение 16.** *Число $b$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon$ можно указать такое значение аргумента $A > 0$, что для всех значений $x$, удовлетворяющих неравенству $x > A$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.* Записывается это так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Аналогично определяется предел функции при $x \to -\infty$.

**Теорема 1.** *Если последовательность имеет предел (сходится), то она ограничена.*

**Теорема 2.** *Возрастающая (убывающая) последовательность, ограниченная сверху (снизу), имеет предел, т. е. сходится.*

**Теорема 3.** *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы, соответственно равные $A$ и $B$, то последовательности $\{x_n \pm y_n\}$ и $\{x_n \cdot y_n\}$ имеют пределы, соответственно равные $A \pm B$ и $A \cdot B$.*

**Теорема 4.** *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы, соответственно равные $A$ и $B$, причем $\lim y_n = B \neq 0$ и значения $y_n$ отличны от нуля, то последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ имеет предел, равный $\frac{A}{B}$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim\limits_{n \to \infty} y_n}$.*

**Теорема 5.** *Если $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = A$, то $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = A$.*

Аналогично теоремам о пределах последовательностей формулируются теоремы о пределах функций. Например.

**Теорема 6.** *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы при $x \to a$, соответственно равные $b$ и $c$, то их сумма имеет предел при $x \to a$, равный $b + c$, т. е.*

$$\lim_{x \to a} [f(x) + \varphi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x).$$

## 3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Пусть точка $a$ принадлежит области определения функции $f(x)$.

**Определение 17.** *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $a$, если предел функции в точке $a$ существует и равен значению функции в этой точке, т. е. если*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Таким образом, если функция непрерывна в точке $a$, то:

1) *функция определена в точке $a$;*

2) *существует предел функции в точке $a$;*

3) *этот предел совпадает со значением функции в точке $a$.*

**Теорема 7.** *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке $a$, то их сумма, разность, произведение есть функции, непрерывные в этой точке.*

**Теорема 8.** *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке $a$ и $f_2(a) \neq 0$, то функция $\varphi(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ непрерывна в этой точке.*

Функция, непрерывная в каждой точке промежутка (интервала или сегмента), называется *непрерывной на этом промежутке.* Сформулированные выше теоремы о непрерывности функции в точке (теоремы 7 и 8) переносятся и на промежуток. Причем в случае частного делитель не должен иметь нулей в этом промежутке (т. е. ни в одной точке промежутка он не должен обращаться в нуль).

## § 1. ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ

**1.** Пусть $f(x) = x^2$, где $x$ — любое число, и $s(x) = x^2$, где $x$ — длина стороны квадрата, размеры которой не превосходят десяти единиц. Можно ли сказать, что в обоих случаях мы имеем одну и ту же функцию?

**2.** Почему таблица

| $x$ | 1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | $-1$ | 2 |

не определяет никакой функции?

**3.** Какая из следующих таблиц определяет функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ или одну из них?

а)

| $x$ | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 3 | 4 |

б)

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 | 5 |

в)

| $x$ | 1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0 | 4 |

**4.** $f(x) = x^2 - 4$, $x \in [-3, 3]$. Найти: а) $f(2)$, $f(4)$; б) $f\left(1+\sqrt{2}\right)$, $f(t^2)$, $|t| \leqslant 3$; в) $f(0) + 5f(2) - f(-2)$;

г) при каких значениях $a$ можно найти $f(x)$? Найдите $f(a)$;

д) при каких значениях $h$ можно найти $f(1+h)$? Найдите его.

**5.** Найти величину $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ для функций: а) $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$; б) $f(x) = 2x^3 + 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$; в) $y = x$, $x \in (-\infty, +\infty)$; г) $y = c$, $x \in (-\infty, +\infty)$, где $c$ — константа.

**6.** При напряжении $v = 2,1$ *в* величина тока $i = 0,7$ *а*. Используя закон Ома, найти функцию, выражающую зависимость между величиной тока и напряжением.

**7.** В некотором сосуде на глубине $h = 22,0$ *см* давление жидкости $P = 16,5$ *г/см*$^2$. Найти функцию, выражающую зависимость давления от глубины. Определить: а) давление на глубине $h = 10,5$ *см*; б) на какой глубине давление будет равно 23,5 *г/см*$^2$.

**8.** Исходя из второго закона Ньютона, найти функцию, выражающую зависимость между силой $F$ и ускорением $a$, если эта сила при ускорении $a = 18$ *см/сек*$^2$ на пути $S$ длиной 22 *см* совершает работу $A$, равную 33 эргам.

**9.** Определить линейную функцию $y = ax + b$ исходя из условия

| $x$ | 2 | 0,4 |
|---|---|---|
| $y$ | 3 | 1,5 |

**10.** Пешеход за 30 *мин* прошел путь длиной 2 *км*. Отдохнув 5 *мин*, он закончил прогулку, пройдя за 20 *мин* еще 1 *км*. Выразить путь $S$, пройденный пешеходом, как функцию времени $t$, считая, что до и после отдыха пешеход двигался равномерно (с различной скоростью). Отсчет времени вести от нуля в часах.

**11.** Поезд движется со средней скоростью $v$ *км/ч*. Через два часа поезд делает остановку на 6 *мин*, после чего с той же скоростью движется 54 *км*. Найти зависимость пройденного пути $S$ от времени, отсчитываемого от нуля в часах. Найти

$$S(1);\ S(2);\ S(3).$$

**12.** Группа туристов совершила пятичасовую прогулку. Три часа они шли пешком со скоростью 4 *км/ч*, затем сделали привал на полчаса и закончили путешествие на автомашине, которая двигалась со скоростью 30 *км/ч*. Выразить длину пути $S$, пройденного туристами, как функцию времени $t$, ведя отсчет времени от начала движения. Указать область определения и ранг функции. Построить график этой функции.

**13.** На горизонтальной плоскости $P$ стоят один на другом три параллелепипеда с квадратными основаниями. Стороны оснований и высоты этих параллелепипедов соответственно равны: нижнего 5 и 2, среднего 3 и 4, верхнего 1 и 2 *м*.

а) Выразить объем части тела, заключенного между плоскостью $P$ и плоскостью горизонтального сечения, как функцию расстояния этого сечения от плоскости $P$.

б) Выразить площадь горизонтального сечения тела, образованного этими параллелепипедами, как функцию расстояния сечения от плоскости $P$. Для каждой функции найти область определения и ранг и построить ее график.

**14*.** В шар радиуса $R$ вписан цилиндр. Выразить объем этого цилиндра как функцию его высоты $H$. Найти область определения этой функции.

**15.** Выразить площадь прямоугольного треугольника как функцию его катета при условии, что периметр этого треугольника равен $2p$. Указать область определения функции.

**16.** Путь, пройденный свободно падающим телом, определяется по формуле $S = \frac{gt^2}{2}$. Тело падает с высоты $H$. а) Какова область определения этой функции? б) Какова область определения функции $S = \frac{gt^2}{2}$, рассматриваемой от конкретной задачи независимо?

**17.** Найти уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через три точки $A_1(2, -1)$; $A_2\left(\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{4}\right)$; $A_3(-1, 8)$. Найти нули функции $f(x) = ax^2 + bx + c$.

**18.** Зная, что объем $V$ шара радиуса $R$ равен $\frac{4}{3}\pi R^3$, выразить радиус шара как функцию его объема.

**19.** В равнобедренном треугольнике, сохраняющем постоянную площадь, стороны изменяются. Выразить длину боковой стороны треугольника как функцию основания.

*Радиоактивный распад. Закон охлаждения.* Количество радия $R(t)$ зависит от времени $t$ по закону $R(t) = R_0 2^{-\frac{t}{T}}$, где $R_0$ — первоначальное количество радия, $t$ — время распада, $T$ — период полураспада, зависящий от радиоактивного вещества.

Периодом полураспада радиоактивного вещества называется время, в течение которого распадается половина первоначального количества этого вещества.

**20*.** Вычислить период полураспада радия $A$, если через 9 *мин* после начала распада от 1 *г* радия осталось 0,125 *г*.

**21*.** Найти закон радиоактивного распада радия $A$, исходя из условия задачи 20.

**22*.** От 16 *мг* радия $B$ через 10 лет радиоактивного распада осталось 4 *мг*. Найти период $T$ полураспада радия $B$, выразив его в годах.

**23*.** Сколько радиоактивного вещества останется через 50 лет радиоактивного распада, если первоначальное количество равно 1 *г* и если период полураспада 1000 лет?

**24*.** Сколько граммов вещества было к началу наблюдения радиоактивного распада, если по истечении 10 суток остался 1 *г*, а период его полураспада равен 5 суткам?

**25*.** Имеется 100 *г* радиоактивного вещества с периодом полураспада 10 лет и 10 *г* радиоактивного вещества с периодом полураспада 20 лет. Через сколько лет распада их количества сравняются?

**26*.** Радиоактивного вещества $A$ имеется в 4 раза больше, чем радиоактивного вещества $B$. Чему равен период полураспада вещества $A$, если период полураспада вещества $B$ равен 4 годам и через 12 лет их количества сравнялись?

**27*.** Через сколько лет количество радия в результате радиоактивного распада уменьшится в 5 раз, если период полураспада 1600 лет?

**28*.** Два тела имеют одинаковую температуру в 100° С. Их вынесли на воздух с температурой 0° С. Через 12 *мин* температура одного тела стала 70° С, а второго 49° С. Через сколько минут после начала остывания разность температур будет равна 25° С?

Указание. Использовать формулу закона охлаждения $T = T_0 + (T_1 - T_0)\,e^{-kt}$, где $k$ — коэффициент пропорциональности скорости охлаждения, $T_1$ — температура нагретого тела, $T_0$ — температура среды, $t$ — время охлаждения, $e \approx 2{,}7$.

**29*.** Температура среды равна 0°, начальная температура нагретого тела $T_1$. Найти закон охлаждения тела, если через $t_0$ единиц времени температура тела понизилась в два раза.

Указание. Смотри задачу 28.

**30*.** Температура среды равна 0°. Какой была начальная температура нагретого тела, если через 5 *ч* температура тела понизилась в два раза и через 10 *ч* стала равна 10°?

## § 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

**31.** Убедиться, что функции: а) $y=|x|+x^4$; б)* $y=\lg|x|$ — являются четными.

**32.** Когда функция $y=f(x)$, определенная на симметричном множестве, не является четной? Убедиться, что функции: а) $f(x)=x^4+2x^3-1$; б)* $f(x)=2^x$ — не являются четными.

**33.** Каким условием (только достаточным, только необходимым или тем и другим) является условие четности функции для симметрии графика этой функции относительно оси ординат?

**34.** Какие из ниже написанных функций являются четными, какие не являются четными? Изобразить графики этих функций.

а) $y=x^2-x+1$; б) $y=x^2-|x|$; в) $y=x^2|x|$;

г) $y=\frac{|x|}{x^2}$, $x\neq 0$; д) $y=(1+x)^4$; е)* $y=5^{|x|}$;

ж)* $y=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$; з)* $y=\lg x$.

**35*.** Убедиться, что функция

$$f(x)=\begin{cases}\lg x, & \text{если } x>0,\\ \lg\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{если } x<0.\end{cases}$$

является нечетной.

**36*.** Когда функция, определенная на симметричном множестве, не является нечетной? Убедиться, что каждая из функций:

а) $y=\begin{cases}x^3, & \text{если } x\neq 1,\\ 2, & \text{если } x=1;\end{cases}$ б) $y=3^x$ — не является нечетной.

**37.** В чем состоит необходимое и достаточное условие того, чтобы график функции $y=f(x)$ был симметричен относительно начала координат?

**38.** Какие из ниже написанных функций являются нечетными, какие не являются нечетными? Изобразить графики этих функций.

а) $y = 2x^3 + 1$; б)* $y = \cos x^2$; в) $y = |x| \cdot x$;

г) $y = x^3 - 3x$; д) $y = x^3 - 3x + 1$; е) $y = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$;

ж)* $y = \lg \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$; з)* $y = 3^x - 3^{-x}$.

**39.** а) Убедиться, что функция $x = \sqrt[3]{y}$ является обратной для функции $y = x^3$. б) Имеет ли функция $y = 3x - 2$ обратную? Если да, то указать ее.

Для функций в) и г) найти обратные.

в) $y = \frac{2x+9}{x-1}$, $\begin{matrix} x \neq 1, \\ y \neq 2; \end{matrix}$

г) $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x \in (-\infty, 2], \\ x^2 + 1, & \text{если } x \in (2, \infty). \end{cases}$

**40.** Когда функция $y = f(x)$, $x \in X$, не является ограниченной? Убедиться, что функция $y = x^2|x|$ не является ограниченной.

**41.** Какие из ниже написанных функций являются ограниченными, какие не являются ограниченными? Изобразить графики этих функций:

а) $y = \frac{10}{1+x^2}$; б) $y = x + \frac{1}{x}$; в) $y = x^3$; г)* $y = x \cdot \cos x$;

д)* $y = \sin x + \sin 2x$; е)* $y = 2^{\cos x}$

**42.** Убедиться, что функция $y = x^3 + x$ является возрастающей.

**43.** Может ли функция $y = f(x)$, $x \in X$, быть одновременно возрастающей и ограниченной на некотором множестве? Привести примеры.

**44*.** Когда функция $y = f(x)$, $x \in X$, не является возрастающей? Убедиться, что функция $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$, не является возрастающей.

**45*.** Убедиться, что функция $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$, является убывающей.

**46*.** Убедиться, что функция $y = 3^{1+\cos x}$ является периодической.

**47.** Когда функция $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ не является периодической? Убедиться, что функция $y = x^3$ не является периодической.

**48*.** Какие из ниже написанных функций являются периодическими, какие не являются? Изобразить графики этих функций.

а) $y = 3^{\cos x}$; б) $y = \sin 2x + \cos 2x$; в) $y = 5 - \operatorname{tg} x$;

г) $y = \sin^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x$; д) $y = \sin x + \sin 2x$; е) $y = \sin x^2$.

## § 3. ПРЕДЕЛЫ

В задачах 49—51 доказать справедливость написанных равенств, исходя из определения предела последовательности.

**49.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0$. **50.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+3} = 2$. **51.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+1}{3n-2} = \frac{5}{3}$.

В задачах 52—59 заданы общие члены последовательностей. Какие из этих последовательностей имеют предел и какие не имеют?

**52.** $a_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{2n^2 + n - 7}$.

**53.** $a_n = \begin{cases} 2 + \frac{5}{n}, & \text{если } n \text{ четное,} \\ 1 - \frac{1}{n}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$

**54.** $a_n = \begin{cases} 2 + \frac{7}{n}, & \text{если } n \text{ четное,} \\ 2 - \frac{3}{n}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$

**55.** $a_n = \frac{7n^2 + 2}{n^2 + 1}$.

**56*.** $a_n = \frac{1}{n}\sin n\alpha$ ($\alpha$ — константа).

**57.** $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$. **58.** $a_n = (-1)^n \cdot n$.

**59.** Известно, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, а последовательность $\{y_n\}$ не имеет предела. Имеют ли пределы последовательности:

а) $\{x_n + y_n\}$; б) $x_n \cdot y_n$?

**В задачах 60—64 заданы общие члены последовательностей. Найти пределы этих последовательностей.**

**60.** $a_n = \frac{5n}{3n+1} + \frac{2n}{7n-1}$. **61*.** $a_n = \frac{n+1}{2n+1} + \frac{\cos 5n}{n}$.

**62*.** $a_n = \frac{\sin n^2}{n^2} - \frac{5n}{15n+7}$. **63.** $a_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+1}$.

**64.** $a_n = \frac{(n+1)^3}{5n^3+n+1}$.

**65*.** Найти сумму всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ .

**66*.** Первый член геометрической прогрессии равен $\frac{1}{5}$ единичного отрезка, второй — $\frac{1}{5}$ остатка этого отрезка, третий — $\frac{1}{5}$ следующего остатка и т. д. Убедиться, что прогрессия будет бесконечно убывающей геометрической прогрессией, и найти сумму всех членов прогрессии.

**67*.** В круг, радиус которого равен $a$, вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в этот круг вписан второй квадрат и так далее. Убедиться, что площади кругов и площади квадратов образуют соответственно бесконечно убывающие геометрические прогрессии, найти суммы всех членов этих прогрессий.

**68*.** В шар радиуса $R$ вписан цилиндр, осевое сечение которого есть квадрат. В цилиндр вписан шар, в шар снова вписан цилиндр с квадратным осевым сечением и т. д. Показать, что площади поверхности шаров, объемы шаров, площади боковых поверхностей цилиндров, объемы цилиндров образуют соответственно бесконечно убывающие геометрические прогрессии, и найти суммы всех их членов.

В задачах 69—76 убедиться в справедливости равенств, исходя из определения предела функции в точке.

**69.** $\lim\limits_{x\to 1} y = 6,$ где $y = 5x + 1$.

**70.** $\lim\limits_{x\to -1} y = -3,$ где $y = 2x - 1$.

**71.** $\lim\limits_{x\to 0} y = 1,$ где $y = \begin{cases} 2x+1, & \text{если } x \neq 0, \\ -2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

72. $\lim\limits_{x\to 1} y = 1$, где $y = \begin{cases} 6x - 5, & \text{если } x \neq 1, \\ 10, & \text{если } x = 1. \end{cases}$

73*. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, где $y = \sin x$.

74*. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, где $y = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \neq \frac{\pi}{4}, \\ 7, & \text{если } x = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

75*. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} y = \frac{1}{2}$, где $y = \cos x$.

76*. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} y = \frac{1}{2}$, где $y = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \neq \frac{\pi}{3}, \\ -5, & \text{если } x = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

В задачах 77—95 найти пределы функций.

77. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3 + 2x - 1 + \frac{5}{x}\right)$. 78. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{2x}\right)$.

79. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$. 80. $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4}$.

81. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}$. 82. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 5x + 6}$.

83. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^3 - 2x}$. 84. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

85. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^6 - 1}{x^3 - 1}$. 86. $\lim\limits_{h\to 0} [(x + h)^3 - x^3]$.

87. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$. 88. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$.

89. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5 + x}}$. 90. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

91. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x - 1}{x + 100}$. 92. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3 + 5x - 1}{6x^3 + x^2 + 1}$.

93. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)}{x^4 + x + 1}$.

**94.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^4}{x^5}$. **95.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Указание. Умножить и разделить выражение под знаком предела на сопряженное ему выражение.

Зная, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ (в радианной мере), в задачах 96—98 найти пределы функций.

**96*.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$. **97*.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sin 6x}$.

**98*.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$.

Зная, что $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ и $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$, найти пределы в задачах 99—104.

**99*.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}4x}{\sin 8x}$. **100*.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

**101*.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{2\sin x\cos a-\sin 2a}{x-a}$. **102*.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{x\sin 12x}$.

**103*.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 4x}$. **104*.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

## § 4. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДЕЛА В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. Тогда для $x_0$, близкого к $x$, за значение функции в точке $x_0$ можно принять число $b$, т. е. $f(x_0)\approx b$.

Найти приближенные значения функций.

**105.** $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4}$ при $x=2{,}0007$.

Указание. Разность между числами 2,0007 и 2 достаточно мала. Поэтому принимаем за $a$ число 2.

**106.** $f(x)=\frac{x^3+1}{2x}$ при $x=1{,}003$ и при $x=3{,}0001$.

**107*.** $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ при $x=0{,}0004$ и при $x=\pi+0{,}002$.

**108*.** $f(x) = \frac{\sin 7x}{3x}$ при $x = 0,0001$ и $x = -0,0001$.

**109*.** $f(x) = \frac{\sin \pi x}{x}$ при $x = -0,00002$.

**110*.** $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$ при $x = 1,00003$ и $x = 1,9995$.

## § 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

В задачах 111—117 (отправляясь от определения непрерывности функции) показать, что заданные функции непрерывны в любой точке числовой прямой.

**111.** $y = 2x + 1$. **112.** $y = kx + b$, $k$ и $b$ постоянные.

**113*.** $y = \sin x$. **114*.** $y = \cos x$.

**115*.** $y = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x < 0, \\ 2x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

**116.** $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$ **117*.** $y = \sin 5x$.

**118.** $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ при $x \neq 1$. Как нужно доопределить функцию в точке $x = 1$, чтобы она была непрерывной в этой точке?

**119*.** $y = \frac{\sin 7x}{x}$ при $x \neq 0$. Как нужно доопределить функцию в точке $x = 0$, чтобы она была непрерывной в этой точке?

**120.** Исследовать непрерывность функции

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 1 + x^2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

в точках $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$.

**121.** Доказать, что сумма (произведение) двух функций, непрерывных в точке $a$, есть функция, непрерывная в этой точке. Методом математической индукции распространить результат на любое конечное число слагаемых (сомножителей).

**122.** Доказать, что функция $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ непрерывна в любой точке числовой прямой.

В задачах 123—125 исследовать непрерывность заданных функций в указанных точках. Построить графики этих функций.

**123.** $$y=\begin{cases}1+x^2, & \text{если } -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 1+x, & \text{если } 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{если } 1<x\leqslant 3\end{cases}$$

в точках $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=0$, $x=1$.

**124*.** $$y=\begin{cases}-x^2, & \text{если } x\leqslant 0,\\ x, & \text{если } 0<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \sin x, & \text{если } -\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

в точках $x=-1$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

**125*.** $$y=\begin{cases}-\sin x, & \text{если } x\leqslant 0,\\ E(x), & \text{если } 0<x\leqslant 3\end{cases}$$

в точках $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=0$, $x=1$, $x=2$.

## ОТВЕТЫ

### § 1.

**1.** Нет. Областью определения функции $f(x)$ является вся числовая прямая, а функции $s(x)$ — полуинтервал $(0,10]$. **2.** $x=1$ отвечают два числа, поэтому $y$ в этом случае не может быть функцией $x$. Так же и $x$ не может быть функцией $y$. **3.** а) не определяет никакой функции; б) определяет функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$; в) определяет одну функцию $x=\varphi(y)$. **4.** а) $f(2)=0$; $f(4)$ — не существует; б) $f(1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}-1$, $f(t^2)=t^4-4$; в) $-4$; г) для $|a|\leqslant 3$, $f(a)=a^2-4$; д) $|1+h|\leqslant 3$, $-4\leqslant h\leqslant 2$, $f(1+h)=h^2+2h-3$. **5.** а) $2a+h$; б) $2h^2+6ah+6a^2$; в) 1; г) 0.

**6.** $V=3i$. **7.** $P=\frac{3}{4}h$; а) $\approx 7{,}5\,\frac{г}{см^3}$; б) $\approx 31{,}3$ *см*.

**8.** $F=\frac{1}{12}a$. **9.** $y=\frac{15}{16}x+\frac{9}{8}$.

**10.** $$S(t)=\begin{cases}4t, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ 2, & \text{если } \frac{1}{2}<t\leqslant\frac{7}{12},\\ \frac{1}{4}+3t, & \text{если } \frac{7}{12}<t\leqslant\frac{11}{12}.\end{cases}$$

**11.**
$$S(t)=\begin{cases} vt, \text{ если } 0 \leqslant t < 2, & S(1)=v,\\ 2v, \text{ если } 2 < t \leqslant 2{,}1 & S(2)=2v,\\ v(t-0{,}1), \text{ если } 2{,}1 < t \leqslant 3, & S(3)=2{,}9v.\end{cases}$$

**12.**
$$S(x)=\begin{cases} 4t, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant 3,\\ 12, \text{ если } 3 < t \leqslant 3\frac{1}{2},\\ 12+30\left(t-3\frac{1}{2}\right), \text{ если } 3\frac{1}{2} < t \leqslant 5, \ 0 \leqslant S \leqslant 57.\end{cases}$$

**13.** а)
$$v(x)=\begin{cases} 25x, & \text{если } 0 < x \leqslant 2,\\ 32+9x, & \text{если } 2 < x \leqslant 6,\\ 80+x, & \text{если } 6 < x \leqslant 8;\end{cases}$$
$0 < x \leqslant 8, \ 0 < v \leqslant 88,$

б)
$$S(x)=\begin{cases} 25, \text{ если } 0 < x \leqslant 2,\\ 9, \text{ если } 2 < x \leqslant 6,\\ 1, \text{ если } 6 < x \leqslant 8.\end{cases}$$
$0 < x \leqslant 8, \ S=\{1, 9, 25\}.$

**14.** $V=\pi H\left(R^2-\frac{H}{4}\right), \ 0 < H < 2R.$ **15.** $S=\frac{ap(p-a)}{2p-a}, \ 0<a<p.$ **16.** а) $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\frac{2H}{g}}$; б) $-\infty < t < +\infty$. **17.** $x^2-4x+3, \ x_1=1, \ x_2=3$. **18.** $R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. **19.** $l=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{4S^2}{a^2}}$, где $a$ — длина основания, $S$ — площадь треугольника. **20.** 3 *мин.* **21.** $R(t)=2^{-\frac{1}{3}t}$. **22.** 5 лет. **23.** $2^{-\frac{1}{20}}$ *г.* **24.** 4 *г.* **25.** $\frac{20}{\lg 2}$ лет. **26.** $2\frac{2}{5}$ года. **27.** $\frac{1600\lg 5}{\lg 2}$. **28.** $\approx 24$ *мин.* **29.** $T=T_1\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_0}}$. **30.** $T_1=40°$.

## § 2.

**31.** б) $f(x)=\lg|x|$ определена на симметричном множестве $X$: $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$ и $f(-x)=f(x)$. **32.** Если существует $x_0\in X$, для которого $f(-x_0)\neq f(x_0)$; б) достаточно принять $x_0=1$, $2^{-1}\neq 2^1$. **33.** Необходимым и достаточным. **34.** Четные б), в), г), е), ж); а) не является четной: например, $f(1)\neq f(-1)$; и) ни одно из условий нельзя проверять, так как функция определена не на симметричном множестве. **35.** Область определения — симметричное множество $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Пусть $x>0$, тогда $f(x)=\lg x$; $f(-x)=\lg\left(-\frac{1}{-x}\right)=\lg\frac{1}{x}=-\lg x$, т. е. $f(x)=-f(-x)$. **36.** Если существует $x_0\in X$, для которого $f(-x_0)\neq -f(x_0)$; а) если $x_0=1$, то $f(-1)=-1\neq f(1)=2$. **37.** Чтобы функция $f(x)$, изображаемая этим графиком, была нечетной. **38.** Нечетные в), г), е), и). **39.** а) Да; $x=\frac{y+2}{3}$; б) $x=\frac{y+9}{y-2}$; г) $x=\varphi(y)=\begin{cases}\frac{y-1}{2}, & \text{если } y\in(-\infty, 5],\\ \sqrt{y-1}, & \text{если } y\in(5, +\infty)\end{cases}$

**40.** Когда для любого $M > 0$ найдется $x_0 \in X$ такое, что $|f(x_0)| > M$. **41.** Ограниченные а), д), е); не являются ограниченными б), в), г); г) пусть $M$ — любое положительное число. Рассмотрим неравенство $|x \cos x| > M$ (1) или $|x| |\cos x| > M$. Положим, $x = \pi k$, $k = 1, 2$; и подберем $k$ так, чтобы имело место неравенство (1). Так как $|\cos \pi k| = 1$, то имеем неравенство $\pi k > M$, откуда находим $k_0 > \frac{M}{\pi}$. Поэтому при $x = k_0 \pi$ будет выполняться неравенство (1). **42.** Пусть $x_2 > x_1$. Рассмотрим $x_2^3 + x_2 - x_1^3 - x_1 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 1) > 0$; а) $x_1 \cdot x_2 < 0$; $x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 1 = (x_1 + x_2)^2 + 1 - x_1 \cdot x_2 > 0$; б) $x_1 \cdot x_2 > 0$, $x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 1 > 0$. **43.** Да. **44.** Когда существует пара значений аргумента $x_2 > x_1$, для которых $f(x_2) \leqslant f(x_1)$; пусть $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = 3\frac{\pi}{4}$. Здесь $x_2 > x_1$, но $\sin x_2 < \sin x_1$. **45.** Пусть $x_2 > x_1$. Рассмотрим $\operatorname{ctg} x_2 - \operatorname{ctg} x_1 = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\sin x_1 \cdot \sin x_2} < 0$, если $x_1$ и $x_2$ принадлежат интервалу $(0, \pi)$. **46.** Функция определена на множестве всех действительных чисел. $T = 2\pi$, $f(x + 2\pi) = 3^{1+\cos(2\pi + x)} = 3^{1+\cos x} = f(x)$. **47.** Если для любого $T \neq 0$ существует $x$ такое, что $f(x + T) \neq f(x)$. Рассмотрим равенство $(x + T)^3 = x^3$ Достаточно положить $x = 0$, чтобы убедиться, что оно не выполняется ни при одном $T \neq 0$. **48.** Периодические а), б), г), д).

## § 3.

**49.** Указание. Из неравенства $\left|\frac{1}{2n} - 0\right| < \varepsilon$ определить $n$, для которых оно справедливо. Имеем: $\frac{1}{2n} < \varepsilon \to n > \frac{1}{2\varepsilon}$. Проверка: $\left|\frac{1}{2n} - 0\right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2\varepsilon}} = \varepsilon$ и т. д. **52.** Предел равен $\frac{1}{2}$.

**53.** Предела нет. **54.** Предел равен 2. **55.** Предел равен 7. **56.** Предел равен 0. **57.** Предел равен 0. **58.** Предела нет **59.** а) Не имеет; б) может иметь, но может и не иметь. **60.** $\frac{41}{21}$. **61.** $\frac{1}{2}$ **62.** $-\frac{1}{3}$. **63.** 0. **64.** $\frac{1}{5}$. **65.** $S = 2$. **66.** $S = 1$. **67.** Сумма всех членов первой прогрессии равна $2\pi a^2$, второй — $4a^2$. **68.** Суммы всех членов прогрессий соответственно равны

$$8\pi R^2, \quad \frac{16}{3} \pi R^3 \frac{1}{4 - \sqrt{2}}, \quad 4\pi R^2, \quad \frac{\pi R^3 \sqrt{2}(4 + \sqrt{2})}{7}.$$

**69.** Указание. Из неравенства $|y - 6| < \varepsilon$ определить $\delta > 0$ так, чтобы из неравенства $|x - 1| < \delta \to |y - 6| < \varepsilon$. Имеем: $|5x + 1 - 6| = 5|x - 1| < \varepsilon$. Достаточно выбрать $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$. Проверка: $|5x +$

$+1-6| = 5|x-1| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon$ и т. д. **77.** 7. **78.** $\frac{\pi^5 - 4\pi^3 + 16}{16\pi}$. **79.** 12. Разделить на $x-2 \neq 0$. **80.** 48. **81.** $-32$. **82.** Числитель и знаменатель разделить на $x+1 \neq 0$. **83.** 0. **84.** $-8$. **85.** 2. **86.** 0. **87.** $\frac{3}{4}$. **88.** $\frac{1}{4}$ (освободиться от иррациональности в числителе). **89.** $-\sqrt{5}$. **90.** $\frac{2}{3}$. **91.** 1. Числитель и знаменатель разделить на $x$. **92.** $\frac{1}{3}$. **93.** 1. **94.** 0. **95.** 0. **96.** $\frac{1}{2}$. **97.** $\frac{1}{2}$. **98.** $\frac{a}{b}$. **99.** $\frac{1}{2}$. **100.** $\cos a$. **101.** $2\cos^2 a$. **102.** $\frac{3}{2}$. **103.** $\frac{3}{8}$. **104.** $\frac{1}{2}$.

## § 4.

**105.** $f(2{,}0007) \approx 3$. **106.** $f(1{,}0003) \approx 1$, $f(3{,}0001) \approx \frac{14}{3}$. **107.** $f(0{,}0004) \approx 1$, $f(\pi + 0{,}0002) \approx 0$. **108.** $f(0{,}0001) \approx \frac{7}{3}$, $f(-0{,}0001) \approx \frac{7}{3}$. **109.** $f(-0{,}0002) \approx \pi$. **110.** $f(1{,}0003) \approx 5$, $f(1{,}9995) \approx 2$.

## § 5.

**118.** Нужно считать $f(1) = 3$. **119.** Нужно считать $f(0) = 7$. **120.** Функция в точках $x = -1$ и $x = 2$ непрерывна, а в точке $x = 0$ разрывна. **123.** В точке $x = 0$ функция непрерывна; в точке $x = 1$ разрывна. **124.** В точках $x = -1$, $x = 0$ функция непрерывна; в точке $x = \frac{\pi}{2}$ разрывна. **125.** В точках $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$ функция непрерывна; в точках $x = 1$, $x = 2$ разрывна.

**Глава III**

# ПРОИЗВОДНАЯ

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ТЕОРЕМЫ

**Определение 1.** *Производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. (Если этот предел существует.)*

Итак, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, или

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

В произвольной точке $x$ производная вычисляется также, т. е. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Например, пусть $f(x) = x^2$. Найдем производную в точке $x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак, $f'(x) = 2x$. Отсюда, в частности, при $x = 1$ получим: $f'(1) = 2$.

**Механический смысл производной.** *В прямолинейном движении скорость $v$ равна производной пути $S(t)$ по времени: $v = S'(t)$.*

**Геометрический смысл производной.** *Угловой коэффициент $k$ касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $A(x_0, y_0)$ равен значению производной функции $f(x)$ в точке $x_0$, т. е. $k = f'(x_0)$.* Например, угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$ в точке $A(2, 4)$ равен $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$.

**Теорема 1.** *Производная суммы (разности) двух функций, каждая из которых имеет производную, равна сумме (разности) производных этих функций.*

**Теорема 2.** *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные, то их произведение имеет производную, которая выражается формулой $[f(x) \cdot \varphi(x)]' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \varphi'(x)$.*

**Теорема 3.** *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные и $\varphi(x) \neq 0$, то их частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет производную, которая выражается формулой*

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot\varphi(x) - f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$$

**Таблица производных**

1. $y = c$ (постоянная), $y' = 0$.
2. $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$.

Формула 2 верна для любого действительного числа $n$.

Например, если $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, то $y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

3. $y = \sin x$, $y' = \cos x$.
4. $y = \cos x$, $y' = -\sin x$.
5. $y = \operatorname{tg} x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
6. $y = \operatorname{ctg} x$, $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
7[1]. $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $y' = a^x \ln a$.
8. $y = \arcsin x$, $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $y = \arccos x$, $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $y = \operatorname{arctg} x$, $y' = \frac{1}{1+x^2}$.
11. $y = \operatorname{arcctg} x$, $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

**Определение 2.** *Производная от производной называется производной второго порядка и обозначается так: $f''(x)$ или $y''$. Производная от производной второго порядка называется производной третьего порядка (обозначение: $f'''(x)$)* и т. д.

Например, если $y = 2x^5 + x^3 + 1$, то $y' = 10x^4 + 3x^2$, $y'' = 40x^3 + 6x$.

---

[1] Смотри задачи 125—127.

**Механический смысл производной второго порядка.** *В прямолинейном движении ускорение равно производной второго порядка от пути по времени:* $a = S''(t)$.

**Производная сложной функции.**

Теорема 4. *Если функция* $y = f[\varphi(x)]$ *имеет производную по* $\varphi(x)$, *а* $\varphi(x)$ *имеет производную по* $x$, *то сложная функция* $y = f[\varphi(x)]$ *имеет производную по аргументу* $x$, *которая равна произведению производной функции* $f[\varphi(x)]$ *по промежуточному аргументу* $\varphi(x)$, *на производную функции* $\varphi(x)$ *по основному аргументу* $x$, *т. е.*

$$y'_x = f'_{\varphi}[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x).$$

Например, $y = \sin(x^2 + 3x + 7)$; здесь $\varphi(x) = x^2 + 3x + 7$, $y'(x) = \cos(x^2 + 3x + 7) \cdot (x^2 + 3x + 7)' = (2x + 3)\cos(x^2 + 3x + 7)$.

**Производная обратной функции.** Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции, имеющие производные, причем $f'_{(x)} \neq 0$.

Тогда $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$. Например, пусть $y = x^2$; $x > 0$, обратная ей при $x > 0$ будет $x = \sqrt{y}$. Тогда $x'_y = \dfrac{1}{y'_x} = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, т. е. $(\sqrt{y})'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, где $y > 0$.

Другой пример. При $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ функция $x = \arcsin y$ и $y = \sin x$ являются взаимно обратными, поэтому

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \text{ где } |y| < 1.$$

Итак, $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

Перейдя к обычным обозначениям, получим формулу для производной $\arcsin x$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ где } |x| < 1.$$

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Теорема 5. *Если производная функции в интервале* $(a, b)$ *положительна (отрицательна) или в отдельных точках интервала равна нулю, то функция в интервале* $(a, b)$ *возрастает (убывает).*

Например, функция $y = x^3 - 3x$ в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ возрастает, а в интервале $(-1, 1)$ убывает потому, что ее производная $y' = 3(x^2 - 1)$ в первых двух интервалах положительна, а в интервале $(-1, 1)$ отрицательна.

**Определение 3.** *Функция $f(x)$ имеет при $x = c$ максимум, если в некоторой окрестности точки $c$ при $x \neq c$ выполняется неравенство*

$$f(c) > f(x),$$

т. е. *если значение функции в точке $c$ больше всех значений функции в этой окрестности и справа, и слева от точки $c$.*

**Определение 4.** *Функция $f(x)$ имеет при $x = c$ минимум, если в некоторой окрестности точки $c$ при $x \neq c$ выполняется неравенство*

$$f(c) < f(x).$$

Определения максимума и минимума (экстремума) функции носят локальный характер. Максимум и минимум функции характеризуют, вообще говоря, поведение функции только в некоторой (быть может, достаточно малой) окрестности точки $c$. Функция может иметь несколько максимумов и минимумов, причем некоторый минимум может оказаться больше некоторого максимума.

**Теорема 6.** *Если функция имеет производную в каждой точке интервала, то в точке экстремума производная равна нулю.*

**Замечание 1.** Функция может иметь экстремум в точке, в которой производная не существует.

**Замечание 2.** Равенство нулю производной в случае дифференцируемой функции является только необходимым условием существования экстремума. Например, производная функция $y = x^3$, равная $y' = 3x^2$, при $x = 0$ обращается в нуль, но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума.

**Определение 5.** *Точка, в которой производная обращается в нуль, называется стационарной.*

Таким образом, если функция имеет производную, то экстремум функции надо искать в стационарных точках.

Укажем достаточные условия существования локального экстремума

**Теорема 7.** *Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого интервала $(a, b)$ и пусть точка $c$ этого интервала есть стационарная точка функции. Тогда, если в некоторой окрестности точки $c$ слева от точки $c$ производная положительна (отрицательна) $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, а справа от точки $c$ производная отрицательна (положительна) $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$, то в точке $c$ функция имеет локальный максимум (минимум).*

**Замечание 1.** Теорема 7 верна и в том случае, если непрерывная функция в точке $c$ не имеет производной.

**Замечание 2.** Если в некоторой окрестности стационарной точки производная положительна (отрицательна) и справа и слева от точки $c$, то в точке $c$ функция экстремума не имеет.

**Пример.** Исследовать на максимум и минимум (экстремум) функцию $y = x^3 - 3x$.

Решение. Функция всюду имеет производную, равную

$$y' = 3x^2 - 3.$$

Найдем стационарные точки. Для этого надо найти нули производной, т. е. решить уравнение:

$$3x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

Рассмотрим теперь производную в интервале $(-2, 0)$ (окрестности точки $-1$, не содержащей точку $x = +1$). Слева от $-1$ в этой окрестности производная положительна, а справа отрицательна. Поэтому по теореме 7 в точке $x = -1$ функция $y = x^3 - 3x$ имеет максимум, равный $y(-1) = 2$. Можно проверить, что в точке $x = 1$ функция имеет минимум, равный $y(1) = -2$.

## § 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ОТЫСКАНИЕ

**1.** Найти приращение аргумента $x$ функции $f(x)$ в точке $x = 2$, если:

$$x_1 = 2{,}7, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1{,}5.$$

**2.** Записать и построить точки $x + \Delta x$, для которых:

а) $x = 1$, $\Delta x = 1$, $\Delta x = -0{,}5$, $\Delta x = 2$, $\Delta x = -0{,}7$;

б) $x = -2$, $\Delta x = \frac{1}{2}$, $\Delta x = \frac{1}{3}$, $\Delta x = -\frac{1}{4}$, $\Delta x = -1$, $\Delta x = 1$.

**3.** Исходя из определения производной, найти производные функций: а) $y = 3x - 1$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = x^2 + 5x - 4$ — в любой точке $x$.

**4*.** Используя определение производной, найти производные функций в любой точке $x$: а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos 3x$; в) $y = \sin 3x - 2$.

**5.** Убедиться, что для функции $f(x) = \cos 2x$ в любой точке $x$ справедливо равенство $\frac{1}{2}[f'(x)]^2 + 2f^2(x) = 2$.

**6.** Найти производные функций и вычислить нули этих производных: а) $y = x^2 - 6x + 19$; б) $y = 104 + 2x - x^2$; в) $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 11$; г)* $y = 2\sin\frac{x}{2}$.

**7.** Закон движения тела определяется формулой $S = (3t^2 - 2t + 1)$ *м*. а) Найти среднюю скорость движения этого тела за первые три секунды; б) вычислить скорость в конце третьей секунды.

**8.** Количество электричества в проводнике изменяется по закону $Q = (2t^2 - 4t)k$. а) Найти среднюю величину тока за первые две секунды; б) вычислить величину тока в конце второй и в конце пятой секунд.

**9.** Масса $m$ неоднородного стержня распределяется по закону $m = l^2 + 3l + 5$, где $l$ — длина стержня. а) Найти среднюю линейную плотность стержня длиной 5 *см*, считая от его начала; б) вычислить линейную плотность стержня при $l = 10$ и при $l = 5$.

**10.** Дана функция $y = |x - 2|$. а) Убедиться, что она не имеет производной в точке $x = 2$. б) Изобразить график этой функции. Является ли эта функция непрерывной в точке $x = 2$? в) Найти производную функции в точках $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$.

**11.** Убедиться, что если функция имеет в некоторой точке производную, то она непрерывна в этой точке.

**12.** Функция, имеющая производную в каждой точке некоторого интервала, называется дифференцируемой на этом интервале. Справедливо ли утверждение: множество дифференцируемых функций на интервале является подмножеством множества непрерывных функций на этом интервале?

В задачах 13—17 вычислить производные функций в заданных точках.

**13.** $y = x^3$; $x_0 = 1$; 0,5; 1,5. **14.** $y = x^4$; $x_0 = 1$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$.

**15.** $y = x^5$; $x_0 = 1$; 0,5; 1,5.

**16.** $y = x^2 - 2x$; $x_0 = 3$; $-2$; $-3$.

**17.** $y = x^3 - x$; $x_0 = 1$; 0,8; 1,2.

В задачах 18—84 найти производные указанных функций.

**18.** $y = 5x^2 + 6$. **19.** $y = 8x^2 - 5x$.

**20.** $y = 7x^2 - 3x + 4$. **21.** $y = 4x^3 + 2x - 4$.

22. $y = 7x^3 - 6x^2 + 5x - 4$. 23. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 1$.

24. $y = \frac{x^3}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5}x^2 + \pi$. 25. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

26. $y = \sqrt{5}x^4 - 6x^2 + 3$. 27. $y = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$.

28. $y = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + 1$.

29*. $y = \frac{1}{4}x^4 + 25x^3 - 17\sin x + 2$.

30*. $y = x^5 + 11x^3 - x\cos x + \lg 3$.

31. $y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

32*. $y = 3^{2x} - \frac{1}{x} + 5\cos 2x - 14$. 33. $y = (x+2)(5x+3)$.

34. $y = (5x^2 - 4)(x + 3)$. 35. $y = 4x\left(5x + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{4}\right)$.

36. $y = (ax^2 + bx + c)(dx + f)$. 37. $y = (x-2)(x^2+5)(x^3-4)$.

38*. $y = (1 + \sqrt{x})\sin x$. 39*. $y = 2^x \cos 3x$.

40*. $y = 7x \cdot \cos x$. 41*. $y = (1 - x) \cdot 2^x \cdot \sin 2x$.

42*. $y = 3^{2x+1} + \sin(2x + 1) - \frac{1}{2x+1}$.

43*. $y = 5^x \sin 2x$. 44*. $y = 3^x(x + 1)$.

45. $y = \frac{x}{x+1}$. 46. $y = \frac{x+1}{x}$.

47. $y = \frac{x^2+1}{x^2-3}$. 48. $y = \frac{5x-4}{2x^2+1}$.

49. $y = \frac{1-x^3}{1+x^3}$. 50. $y = \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}$.

51. $y = \frac{x-1}{x^2-3x+1}$. 52. $y = \frac{x^2-2}{x^3+3}$.

53*. $y = \frac{\sin x}{x}$. 54*. $y = \frac{x}{\sin x}$.

55*. $y = \frac{1+\cos x}{x^2-3}$. 56*. $y = \frac{1-\sin x}{x^2+3}$.

57*. $y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$. 58*. $y = \frac{x+\sin x}{1+\cos x}$.

**59*.** $y = \frac{x \sin x}{1 + x}$.

**60*.** $y = \frac{x^2 \cos x}{2x - 1}$.

**61*.** $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$.

**62*.** $y = \frac{2^{4x} - 2^{-4x}}{2}$.

**63*.** $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$.

**64*.** $y = \frac{2^x}{\ln(x + 2)}$.

**65.** $y = (x + 2)^2$.

**66.** $y = (x + 2)^3$.

**67.** $y = (x^2 - x)^2$.

**68.** $y = (x - 1)^5$.

**69.** $y = (1 - 5x)^3$.

**70.** $y = \left(\frac{3}{4} x - \frac{2}{3}\right)^2$.

**71.** $y = \left(\frac{2}{5} ax - \frac{3}{4} b\right)^3$.

**72*.** $y = (x - 1)^2 \cos(2x + 3)$.

**73*.** $y = 2\sin^2 x \cos^2 x$.

**74*.** $y = \arcsin 2x$.

**75*.** $y = \operatorname{arctg} 5x$.

**76*.** $y = \arcsin x + \arccos x$.

**77*.** $y = x \arcsin x$.

**78*.** $y = \frac{1 - \operatorname{arctg} x}{1 + \operatorname{arctg} x}$.

**79*.** $y = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,sin} x$.

**80*.** $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x}$.

**81*.** $y = \frac{1 + \operatorname{arctg} x}{1 + \arcsin x}$.

**82*.** $y = (2x - 1) \operatorname{arcctg} x$.

**83*.** $y = x^2 \operatorname{arctg} x + \arcsin x^2$.

**84*.** $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\arcsin x} + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$.

**85.** Для функции $f(x) = \frac{2x^3 - x - 3}{x}$ вычислить $f'(-1) + f'(1)$.

**86*.** Для функции $f(x) = 2^x + \frac{1}{x}$ вычислить $f(2) - f'(2)$.

В задачах 87—90 найти нули производной функции.

**87.** $f(x) = (x + 3)(x^2 - 1)$.

**88.** $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 1}$.

**89.** $f(x) = (x + x^2) + (x^2 - 1)^2$.

**90*.** $f(x) = 15 + \cos 2x$.

В задачах 91—93 найти значения $x$, для которых производные функций принимают заданные значения.

**91.** $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, $\quad y' = -1$.

**92*.** $y = \frac{1}{3} \sin 3x - \sin x$, $\quad y' = 0$.

93*. $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$, $y' = \ln 3$.

94*. Убедиться, что функция $y = e^x$ удовлетворяет условию $y - y' = 0$.

95*. Убедиться, что каждая из функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ удовлетворяет условию $y'' + y = 0$.

96*. Убедиться, что функция $y = e^{3x} + \frac{1}{2}x$ удовлетворяет условию $y'' - 4y' + 3y = \frac{3}{2}x - 2$.

## § 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

В задачах 97—100 найти угловые коэффициенты касательных к кривым в точках с указанными абсциссами.

97. $y = x^2 - 3x + 1$, $x = 0$. 98. $y = x^3 + 3$, $x = 1$.

99. $y = 2\sin 3x$, $x = \frac{\pi}{6}$. 100*. $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$, $x = 0$.

В задачах 101—104 записать уравнения касательных к кривым в заданных точках.

101. $y = x^2 + 2$, $A(0,\ 2)$. 102. $y = x^2 - 3x + 1$, $A(1,\ -1)$.

103. $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$, $A(-1,\ -15)$.

104*. $y = \sin x + \cos x$, $A\left(\frac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\right)$.

105. Найти точки кривых, в которых касательные, проведенные к ним, параллельны оси абсцисс.

а) $y = 2x^3 - 24x - 2$; б) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 7$.

106. Показать, что касательная к кривой $y = x^5 + 6x + 7$ в каждой ее точке наклонена к оси $Ox$ под острым углом.

107. Показать, что угол наклона к оси $Ox$ касательной к кривой $y = 1 - x^3$ в каждой ее точке, кроме точки $A(0,\ 1)$, является тупым.

108. Найти точки кривой $y = x^2 - 6x + 4$, в которых касательные к ней параллельны прямой $y = 2x$.

109. Найти точки кривой $y = x^3 - 6x^2 + 3x$, в которых касательные к ней параллельны прямой $y = 3x + 1$.

**110.** При каком значении $a$ угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^2+ax+3$ в точке пересечения параболы с осью $Oy$ равен 3?

**111.** Убедиться, что касательная к параболе $y=ax^2$, $a \neq 0$, в любой ее точке пересекает ось $Ox$ в точке, абсцисса которой равна половине абсциссы точки касания.

**112.** Найти точку пересечения оси $Ox$ с касательной к кривой $y=ax^3$, $a \neq 0$, проведенной к ней в точке с абсциссой $x_0$.

**113.** Абсцисса точки касания прямой с кривой $y=ax^n$ ($n$ — натуральное число) равна $x_0$. Найти точку пересечения этой прямой с осью $Ox$.

**114.** Убедиться, что касательная к гиперболе $y=\frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \neq 0$, в любой ее точке пересекает ось $Ox$ в точке, абсцисса которой равна удвоенной абсциссе точки касания.

**115.** В точке $A(x_0, y_0)$ кривой $y=\frac{a}{x^n}$ ($a \neq 0$, $x \neq 0$, $n$ — натуральное число) проведена к ней касательная. Найти зависимость между абсциссами точки касания и точки пересечения касательной с осью $Ox$.

**116.** Убедиться, что последовательность $\{x_n\}$ из абсцисс точек пересечения с осью $Ox$ касательных к кривым $y=ax^n$ ($a \neq 0$, $n$ — натуральное) в точках с абсциссой $x_0$, $x_0 \geqslant 0$ является возрастающей последовательностью, ограниченной сверху, и имеет пределом число $x_0$.

**117.** Убедиться, что последовательность $\{x_n\}$ из абсцисс точек пересечения с осью $Ox$ касательных к кривым $y=\frac{a}{x^n}$ ($a \neq 0$, $x \neq 0$, $n$ — натуральное) в точках с абсциссой $x_0$, $x_0 \geqslant 0$, является убывающей последовательностью, ограниченной снизу, и имеет пределом число $x_0$.

**118.** Даны кривые $y=ax^n$, $a \neq 0$, $x \neq 0$, $n$ — целое. В точках с абсциссой $x_0$, $x_0>0$, проведены касательные к каждой из этих кривых. Показать, что последовательность $\{x_m\}$, образованная абсциссами точек пересечения этих касательных с осью абсцисс, является немонотонной, ограниченной и имеет пределом число $x_0$.

Имеют ли кривые в задачах 119—120 касательные в указанных точках?

**119.** $y=|1-x^2|$ в точке, абсцисса которой $x=1$.

**120.** $y=x|x|$ в точке, абсцисса которой $x=0$.

**121.** К кривой $y=x^3-x^2$ в ее точке с абсциссой $x=\frac{2}{3}$ проведена касательная. Убедиться, что абсцисса $x_0$

точки пересечения этой касательной с той же кривой удовлетворяет двойному неравенству $-1 < x_0 < 0$.

Указание. Методом проб убедиться, что уравнение $x^3 - x^2 + \frac{4}{27} = 0$ имеет корень в указанных пределах.

**122.** Углом между двумя кривыми в их общей точке называется угол между касательными к этим кривым, проведенными к ним в этой точке. Найти угол между параболой $y = x^2 - 3x + 4$ и прямой $y = 2x$.

**123.** Вычислить угол между синусоидой $y = \sin x$ и косинусоидой $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

**124.** Определить угол между параболами $y = (x+c)^2$ и $y = k(x+c)^2$, где $k$ и $c$ — любые действительные числа и $k \neq 0$.

*Число е.* Измерением можно убедиться, что угол между осью $Ox$ и касательной в точке $M(0,1)$ к кривой $y = 2^x$ меньше 45°, а угол между осью $Ox$ и касательной в этой же точке к кривой $y = 3^x$ больше 45°.

В силу свойств показательной функции $y = a^x$ найдется такое основание $a = e$, $2 < e < 3$, что касательная к кривой $y = e^x$ в точке $M(0, 1)$ составит с осью $Ox$ угол в 45°.

**125*.** Используя геометрический смысл производной, убедиться, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

**126*.** Используя результат задачи 125, убедиться, что производная функция $y = e^x$ равна $e^x$.

**127*.** Используя тождество $a^x = e^{x \ln a}$, найти производную функции $y = a^x$.

**128*.** Убедиться, что производная функции $y = \ln x$ равна $\frac{1}{x}$, а производная функции $y = \log_a x$ равна $\frac{1}{x \ln a}$.

Указание. Использовать правило дифференцирования обратной функции.

## § 3. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В задачах 129—132 найти производную первого, второго и третьего порядков от заданных функций.

**129.** $y = \frac{x^4}{20} - 3x^3 + 26x$. **130.** $y = 0{,}4x^3 - 9{,}6x^2 + 75{,}6x$.

**131.** $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x - 11$. **132.** $y = 3x^4 - \frac{4x^3}{3} - 8x^2 - 10$.

В задачах 133—136 определить многочлен $f(x)$ третьей степени, используя заданные значения многочлена и его производных в указанных точках.

**133.** $f(0)=2$, $f'(0)=-5$, $f''(0)=16$, $f'''(x)=6$.

Указание. Записать многочлен в форме $f(x)=ax^3+bx^2+$ $+cx+d$, продифференцировать $f(x)$ нужное число раз и определить неизвестные коэффициенты $a$, $b$, $c$, $d$.

**134.** $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=3$, $f'''(x)=6$.

**135.** $f(1)=-6$, $f'(2)=1$, $f''(3)=-8$, $f'''(x)=-6$.

**136.** $f(2)=-21$, $f'(3)=13$, $f''(4)=36$, $f'''(6)=60$.

В задачах 137—140 найти многочлен $f(x)$ четвертой степени, используя заданные значения многочлена и его производных в указанных точках.

**137.** $f(0)=-4$, $f'(1)=5$, $f''(2)=42$, $f'''(0)=0$, $f''''(x)=24$.

**138.** $f(1)=-9$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, $f'''(1)=0$, $f''''(2)=24$.

**139.** $f(0)=2$, $f'(0)=-3$, $f''(0)=8$, $f'''(1)=12$, $f''''(x)=18$.

**140.** $f(0)=17$, $f(-1)=13$, $f'(-1)=13$, $f'(-2)=75$, $f''(-1)=-30$.

В задачах 141—152 найти производные второго порядка заданных функций.

**141.** $y=(x+1)(x-1)$. **142.** $y=(x-3)(x-4)$.

**143.** $y=(x^2+5)(x^3-x^2)$. **144.** $y=(x^2+a)(x^2+b)$.

**145.** $y=x^2(4x+3)$. **146.** $y=x(x-5)(x^2+3)$.

**147.** $y=(3x^2+2x-4)(x-2)(x^2-1)$.

**148.** $y=(1-x)(1-x^2)x^3$.

**149.** $y=\left(\frac{m^2}{2}-mx+x^2\right)\left(\frac{m^2}{2}+mx+x^2\right)$.

**150.** $y=(x^2-2)^2$. **151.** $y=(3-2x)^3$.

**152.** $y=(x^2-7)^3(3x+2)$.

В задачах 153—158 найти производные второго порядка следующих функций.

**153.** $y=\sqrt[3]{x^2}$. **154.** $y=\sqrt[4]{x^3}$. **155.** $y=\sqrt[3]{ax^2}$.

**156.** $y=\sqrt{\frac{ax}{b^2}}$. **157.** $y=\frac{5}{\sqrt{x}}$. **158.** $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

В задачах 159—181 найти производные второго порядка указанных функций.

**159*.** $y = 2\sin x - 3\cos x$. **160*.** $y = \operatorname{tg} x - 2\cos x$.

**161*.** $y = x^2 - \frac{1}{3}\cos 3x$.

**162*.** $y = \operatorname{ctg} 5x$. **163*.** $y = 3\operatorname{tg}(x + 1)$.

**164*.** $y = a\cos\frac{x}{3}$. **165*.** $y = \sin^2 x$.

**166*.** $y = \sin x^2$. **167*.** $y = 3\cos x^3$.

**168*.** $y = \frac{1}{\sin x}$. **169*.** $y = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

**170*.** $y = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$. **171*.** $y = \frac{\sin x}{5 + 2\cos x}$.

**172*.** $y = \operatorname{tg}^3 x + 3\operatorname{tg} x$. **173*.** $y = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$.

**174*.** $y = x \cdot \cos x$. **175*.** $y = \frac{\sin x}{x}$.

**176*.** $y = \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}$. **177*.** $y = \sqrt{2m^2 x + 3\cos^2 x}$.

**178*.** $y = \frac{5\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$.

**179*.** $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

**180*.** $y = \cos^4 x - 3\sin^2 2x + \sin^4 x$.

**181*.** $y = x\operatorname{tg} x$.

## § 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В ФИЗИКЕ

**182.** Закон прямолинейного движения тела выражается функцией $S = (3t^3 + t + 7)$ *м*. Определить скорость движения этого тела в любой момент времени. Вычислить скорость через 10 *сек* после начала движения.

**183.** Тело движется прямолинейно по закону $S = \left(6t^2 - \frac{t^3}{3} - 2\right)$ *м*. Определить скорость в любой момент времени и определить время остановки тела.

**184.** Два тела движутся прямолинейно. Одно по закону $S = t^3 + t^2 - 2$, другое по закону $S = t^2 + 1$. Определить скорость движения этих тел и время, когда скорости этих тел будут равны между собой.

**185.** Исходя из формулы $S = \frac{gt^2}{2}$ для свободного падения тела, вывести формулу $v = gt$, где $v$ — скорость движения свободно падающего тела.

**186.** Закон прямолинейного движения тела выражен формулой $S = [(3 - t)(3t + 3) + 20]$ *м*. Какой путь прошло тело за время от начала движения до момента, когда скорость его движения стала равной нулю? Чему равно ускорение в этот момент времени?

**187.** Убедиться, что скорость изменения линейной функции постоянна.

**188.** Масса $m$ неоднородного стержня изменяется в зависимости от его длины $l$ по закону $m = \left(\frac{1}{3} l^3 + l^2 + 3\right)$ *г*, $l > 0$. Найти скорость $\delta$ изменения этой функции для любого $l > 0$. Найти $\delta(5)$. (Эта скорость $\delta$ в физике называется линейной плотностью стержня в точке $l$.)

**189.** Убедиться, что скорость изменения квадратичной функции $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ выражается линейной функцией.

**190.** Найти скорость изменения функции $y = (x^2 + 2)x - 1$ при $x = 6$.

**191.** Стороны $a$ и $b$ прямоугольника изменяются по закону $a = (2t + 1)$ *см*, $b = (3t + 2)$ *см*. С какой скоростью изменяются его площадь и периметр в момент $t = 3$ *сек*?

**192.** Основание параллелограмма $a$ изменяется по закону $a = 2 + 3t$, а высота $h$ по закону $h = (3t - 1)$ *см*. Определить скорость изменения его площади в момент $t = 2$ *сек*.

**193.** Ребра прямоугольного параллелепипеда $a$, $b$ и $c$ изменяются по закону $a = (2t^2 - 1)$ *см*, $b = \left(\frac{t^3}{3} + 1\right)$ *см* и $c = (4t^2 + t - 3)$ *см*. С какой скоростью изменяются его объем и полная поверхность в момент $t = 2$ *сек*.

**194*.** Убедиться, что скорость изменения показательной функции $y = e^{kx}$, $k \neq 0$, пропорциональна $y$.

**195*.** Убедиться, что скорость изменения логарифмической функции $y = \ln x$, $x > 0$, обратно пропорциональна $x$.

**196*.** Чему равна скорость изменения функции $y = \sin x$? Вычислить ее значение для $x = \frac{\pi}{4}$.

**197*.** Количество электричества $q$ в проводнике меняется по закону $q = \sin(2t+1)\,k$. Определить скорость $I$ изменения этой функции в любой момент времени $t$ *сек*. (В физике буквой $I$ обозначают силу тока.)

**198*.** Найти величину тока $I$ в момент времени $t = 5$ *сек*, если $q = [25e^{2t} + \cos(3t-1)]\,k$.

**199*.** Количество теплоты $Q$, полученное телом при нагревании, зависит от температуры $\tau$ по закону $Q = \tau^2 \ln \tau$, $\tau > 0$. Найти скорость $c$ изменения теплоты тела. (В физике буквой $c$ обозначают теплоемкость тела.)

**200*.** Вычислить теплоемкость $c$ тела при температуре $\tau = 4^\circ$ C, если $Q = (0{,}24\tau^2 + e^{0{,}4\tau})$ кал.

## § 5. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

В задачах 201—210 найти интервалы возрастания и убывания функций.

**201.** $y = x^2 - 3x + 4$. **202.** $y = (x-1)^2 + 5$.

**203.** $y = x^3 - 5x^2 + 9x - 7$.

**204.** $y = (x-2)^3 + (x-2)^2 + x - 2$.

**205*.** $y = e^{3x-7}$. **206*.** $y = \ln(2x+4)$.

**207*.** $y = \sin 3x$, $x \in [0,\ 2\pi]$.

**208.** $y = |2x-1|$. **209*.** $y = e^{|x|}$. **210*.** $y = -\ln|x-2|$.

В задачах 211—214 доказать неравенства.

**211*.** $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geqslant 0$, $x \geqslant 0$.

**212*.** $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leqslant 0$, $x \geqslant 0$.

**213*.** $e^x - 1 - x > 0$, $x > 0$.

**214*.** $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$, $0 < x < 1$.

В задачах 215—220 определить вид и значение локальных экстремумов заданных функций.

**215.** $y = \frac{2}{3}x^2 - 4$. **216.** $y = x^2 + 3x + 2$

**217.** $y = 5 - 4x - x^2$. **218.** $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$.

**219.** $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 4$. **220.** $y = (x-1)(2-x)^2$.

**221.** Доказать, что необходимое условие $f'(x_0) = 0$ существования локального экстремума в точке $x_0$ в случае многочлена второй степени одновременно является и достаточным.

В задачах 222—237 найти локальные экстремумы указанных функций.

**222.** $y = x^3 - 3x^2$. **223.** $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 10$.

**224.** $y = x^3 + 6x^2 - 15x$. **225.** $y = x^3 - 2x^2 + 11x - 4$.

**226.** $y = x^4 - 32x^2 + 5$. **227.** $y = 5x^5 - 27x^3$.

**228.** $y = \frac{x^2}{2}(4x - 7)$. **229.** $y = \left(\frac{x^2}{2} - 5\right)(x^2 - 1)$.

**230.** $y = (2x - 3)^3$. **231.** $y = x^4 - 16x^2 + 5$.

**232.** $y = x + \frac{4}{x}$. **233*.** $y = e^{x^2 - 18x + 1}$.

**234.** $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. **235*.** $y = \ln(x^3 - 27x + 11)$.

**236.** $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$. **237.** $y = |x^2 - 4x + 3|$.

В задачах 238—246 найти наибольшее и наименьшее значения указанных функций.

**238.** $y = x^3$, $x \in [-1, 3]$.

**239.** $y = (x - 1)^2 + 5$, $x \in [0, 4]$.

**240.** $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2$, $x \in [-1, 4]$.

**241*.** $y = e^{|x-2|}$, $x \in [-1, 2]$.

**242*.** $y = e^{(x-2)^2+1}$, $x \in [0, 3]$.

**243*.** $y = \ln(x^2 + 1)$, $x \in [-2, 2]$.

**244*.** $y = |x^2 - 7x + 12|$, $x \in [-4, 3]$.

**245*.** $y = -\cos^2 x + \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

**246*.** $y = -\sin^2 x + \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

**247.** Найти положительное число, сумма которого с обратным ему числом имеет наименьшее значение.

**248.** Число $a > 0$ разделить на две такие части, чтобы сумма квадрата первой части с удвоенной второй была наименьшей.

**249.** Убедиться, что если произведение двух положительных чисел постоянно, то их сумма будет наименьшей, когда эти числа равны между собой.

**250.** Убедиться, что если сумма двух чисел постоянна, то их произведение будет наибольшим, когда эти числа равны между собой.

**251.** Число $a$ разложить на два слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых было наибольшим.

**252.** Число 7 представить в виде двух слагаемых так, чтобы сумма их третьих степеней была наименьшей.

**253.** Разложить число $a$ на два таких слагаемых, чтобы сумма квадратов их была наименьшей.

**254.** Какой прямоугольник имеет при заданном периметре наибольшую площадь?

**255.** Какой из всех прямоугольников с равными периметрами имеет наименьшую диагональ?

**256.** Бóльшая сторона $a$ прямоугольника уменьшается на такую величину, на какую меньшая сторона $b$ увеличивается. Какой должна быть эта величина, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей.

**257.** Внутри двора некоторого здания требуется огородить прямоугольный участок наибольшей площади проволокой длиной 100 *м* таким образом, чтобы: а) он был со всех сторон огорожен проволокой; б) с трех сторон огорожен проволокой; в) с двух сторон огорожен проволокой. (В случаях б) и в) другие стороны участка были бы стенами здания, ограничивающими двор и образующими прямой угол.) Какие фигуры в этих случаях будут наиболее приемлемы?

**258.** В полукруг радиуса $R$ вписан прямоугольник наибольшей площади $S$. Определить периметр этого прямоугольника.

Указание. Сторону прямоугольника направить по диаметру полукруга.

**259.** Как надо вписать в заданный круг прямоугольник, чтобы он имел наибольшую площадь?

Указание. В качестве искомой функции выбрать $S^2$.

**260.** Остроугольный треугольник основания $a$ и высоты $h_a$ описан около прямоугольника, стоящего на $a$. Как надо выбрать высоту прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

**261.** Выбрать из всех квадратов, которые можно вписать в заданный квадрат, квадрат наименьшей площади.

**262.** Какой из вписанных в данный треугольник прямоугольников имеет наименьшую диагональ?

**263.** Сумма катетов прямоугольного треугольника постоянна и равна $a > 0$. Для какого треугольника гипотенуза имеет наименьшую длину?

**264.** Убедиться, что из всех равнобедренных треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

**265.** Каким должно быть основание равнобедренного треугольника с заданной площадью $S$, чтобы его периметр был наибольшим?

**266.** В круг диаметра $r$ вписан равнобедренный треугольник. Определить длины его сторон, если его периметр наибольший.

**267.** На каждой из прямолинейных улиц, расположенных под углом в 60° по отношению друг к другу, находятся соответственно пункт $A$ и пункт $B$. Из этих пунктов одновременно выезжают два велосипедиста и движутся по направлению к точке пересечения этих улиц. Через какое время расстояние между велосипедистами будет наименьшим, если $AO = a$ *км*, $BO = b$ *км*, скорость первого велосипедиста $v_1$ *км/ч*, скорость второго велосипедиста $v_2$ *км/ч*?

**268.** В данный треугольник вписать параллелограмм наибольшей площади, у которого две стороны были бы направлены по двум сторонам треугольника.

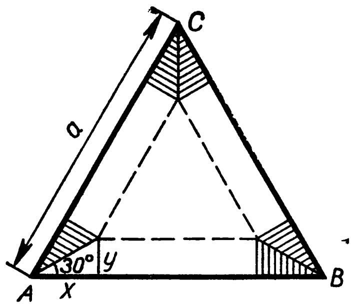
**269.** В треугольник заданной площади $S$ вписать квадрат, две вершины которого лежали бы на основании треугольника (или на его продолжении), а две — на других сторонах и который имел бы наибольшую площадь.

**270.** Дан угол $ABC$, равный $\alpha$, $BC = a$. Точка $M \in AB$, а точка $N \in BC$ и $\frac{BM}{CN} = \frac{m}{n}$. Где надо поместить точку $N$, чтобы $MN$ было наименьшим?

**271.** Найти наибольший объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковая поверхность равна $a^2$.

**272.** Вписать в правильную четырехугольную пирамиду (ребро основания $a = 10$ *см*, высота $h = 12$ *см*) прямую призму наибольшей поверхности с квадратным основанием.

**273.** Поверхность прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна $Q$ (600 *см*$^2$). Каковы размеры его ребер, если его объем $V$ наибольший?



Черт. 1.

**274.** Из листа, имеющего форму правильного треугольника (черт. 1), требуется изготовить прямую треугольную призму наибольшего объема, удалив заштрихованные фигуры.

**275.** Из проволоки длиной 72 *см* требуется изготовить реберную модель прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, в котором: а) одно ребро вдвое больше другого; б) одно ребро на 2 *см* больше другого. Каковы должны быть размеры ребер этого параллелепипеда?

**276*.** Поверхность открытого сверху цилиндра равна $Q = 1000$ *см*$^2$. Каковы размеры радиуса и высоты цилиндра при наибольшем объеме?

**277*.** Из всех цилиндров, которые могут быть вписаны в конус радиуса $r = 12$ *см*, высотой $h = 36$ *см*, найти цилиндр наибольшего объема.

**278*.** В шар радиуса $R$ вписывается цилиндр наибольшей боковой поверхности. Определить радиус цилиндра.

**279*.** Какими размерами должен обладать цилиндр наибольшей полной поверхности, вписанный в шар радиуса $r = 5$ *см*?

**280*.** В полушар радиуса $R$ вписать прямой круговой конус наибольшего объема так, что вершина конуса лежит в центре шара и конус симметричен шару.

**281*.** В конус с радиусом 4 *дм* и высотой 6 *дм* вписан цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем.

**282*.** Какой из описанных около шара конусов имеет наименьший объем?

## § 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

В задачах 283—300 провести полное исследование функций и построить их графики.

**283.** $y = \frac{(x-4)^2}{8}$. **284.** $y = 4 - x^2$.

285. $y = x^3 - 2x^2$. 286. $y = -x^3 + 9x + 1$.

287. $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$. 288. $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

289. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$. 290. $y = (x-1)(x+2)(x-3)$

291. $y = \frac{x^3}{4} - x^2 - 4x + 16$. 292. $y = \frac{x^3}{6} - x^2$.

293. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$. 294. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

295. $y = \frac{x^2+2}{2x}$. 296*. $y = e^{-x^2}$.

297*. $y = e^{\cos x}$. 298. $y = x^3 + |x^2 - 4|$.

299*. $y = \ln^2 x$. 300*. $y = \ln(x^2 + 1)$.

## ОТВЕТЫ

### § 1.

1. 0,7; 1; $-1$; $-0,5$. 2. а) 2; 0,5; 3; 0,3; б) $-1,5$; $-1\frac{2}{3}$; $-2\frac{1}{4}$; $-3$ 3. а) 3; б) $2x$; в) $2x + 5$. 4. а) $2\cos 2x$; б) $-3\sin 3x$; в) $3\cos 3x$. 6. а) $x = 3$; б) $x = 1$; в) $x_1 = \frac{3 + i\sqrt{15}}{6}$; $x_2 = \frac{3 - i\sqrt{15}}{6}$; г) $x = \pi + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2)$.

7. а) $v_{ср} = 7\frac{1}{3}$ *м/сек*; б) $v(3) = S'(3) = 16$ *м/сек*.

8. а) $I_{ср} = 0$; б) $I(2) = Q'(2) = 4a$; $I(5) = 16a$.

9. а) $\delta_{ср} = 9\ \frac{г}{см}$; б) $\delta(5) = m'(5) = 13$ *г*; $\delta(10) = 23\ \frac{г}{см}$.

10. а) Указание. Рассмотреть отдельно два случая: 1) $x < 2$, $\Delta x < 0$; 2) $x > 2$, $\Delta x > 0$, $y = \begin{cases} 2 - x, & x < 2, \\ x - 2, & x \geqslant 2; \end{cases}$ б) функция непрерывна в любой точке; в) $y'(3) = 1$; $y'(-3) = -1$. 12. Справедливо. 13. 3; 0,75; 6,75. 14. 4; $\frac{1}{2}$; $13\frac{1}{2}$. 15. 5; $\frac{5}{16}$; $25\frac{5}{16}$. 16. 4; $-6$; $-8$. 17. 2; 0,92; 3,32 18. $10x$. 19. $16x - 5$ 20. $14x - 3$. 21. $12x^2 + 2$. 22. $21x^2 - 12x + 5$. 23. $x^2 - x + 1$. 24. $\frac{1}{5}(3x^2 - 2\sqrt{2x})$. 25. $3ax^2 + 2bx + c$. 26. $4\sqrt{5}x^3 - 12x$. 27. $4a_0x^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3$. 28. $x^4 + x^3 - x^2 + 1$. 29. $x^3 + 75x^2 - 17\cos x$. 30. $5x^4 + 33x^2 - \cos x + x\sin x$.

31. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. 32. $2 \cdot 3^{2x}\ln 3 + \frac{1}{x^2} - 10\sin 2x$.

**33.** $10x+13$. **34.** $15x^2+30x-4$ **35.** $20x^2-28\frac{2}{9}x-2$ **36.** $3adx^2+2(bd+af)x+cd+bf$. **37.** $(x^2+5)(x^3-4)+2x(x-2)(x^3-4)+3x^2(x-2)(x^2+5)$. **38.** $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+(1+\sqrt{x})\cos x$ **39.** $2^x(\cos 3x\ln 2-3\sin 3x)$. **40.** $7(\cos x-x\sin x)$. **41.** $2^x[-\sin 2x+(1-x)\sin 2x\ln 2+2(1-x)\cos 2x]$. **42.** $2\cdot 3^{2x+1}\ln 3+2\cos(2x+1)+\frac{2}{(2x+1)^2}$.

**43.** $5^x[\ln 5\sin 2x+2\cdot\cos 2x]$. **44.** $3^x[(x+1)\ln 3+1]$. **45.** $\frac{1}{(x+1)^2}$. **46.** $-\frac{1}{x^2}$.

**47.** $-\frac{8x}{(x^2-3)^2}$. **48.** $\frac{5+16x-10x^2}{(2x^2+1)^2}$ **49.** $-\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}$.

**50.** $\frac{3\sqrt[3]{x^2}+x-2\sqrt{x}}{6x\sqrt[6]{x}(1+\sqrt{x})^2}$. **51.** $-\frac{x^2-2x+2}{(x^2-3x+1)^2}$. **52.** $\frac{-x^4+6x^2+6x}{(x^2+3)^2}$.

**53.** $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. **54.** $\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$.

**55.** $-\frac{(x^2-3)\sin x+2x(1+\cos x)}{(x^2-3)^2}$. **56.** $-\frac{(x^2+9)\cos x+2x(1-\sin x)}{(x^2+9)^2}$.

**57.** $-\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}$. **58.** $\frac{2+2\cos x+x\sin x}{(1+\cos x)^2}$.

**59.** $\frac{\sin x+x\cos x(1+x)}{(1+x)^2}$. **60.** $\frac{2x\cos x(x-1)-x^2\sin x(2x-1)}{(2x-1)^2}$.

**61.** $(2^x-2^{-x})\ln\sqrt{2}$. **62.** $(2^{4x}+2^{-4x})\ln 4$. **63.** $\frac{4\ln 2}{(2^x+2^{-x})^2}$.

**64.** $\frac{2^x[(x+r)\ln 2\ln|x+2|-1]}{(x+2)[\ln(x+2)]^2}$. **65.** $2(x+2)$. **66.** $3(x+2)^2$.

**67.** $2x(x-1)(2x-1)$. **68.** $5(x-1)^4$. **69.** $-15(1-5x)^2$.

**70.** $\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}\right)$. **71.** $\frac{6}{5}a\left(\frac{2}{5}ax-\frac{3}{4}b\right)^2$.

**72.** $2(x-1)[\cos(2x+3)-(x-1)\sin(2x+3)]$. **73.** $\sin 4x$.

**74.** $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. **75.** $\frac{5}{1+25x^2}$. **76.** 0. **77.** $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

**78.** $-\frac{2}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg} x)^2}$. **79.** $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**80.** $\frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x-(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}$.

**81.** $\frac{\sqrt{1-x^2}(1+\arcsin x)-(1+x^2)(1+\operatorname{arctg} x)}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}(1+\arcsin x)^2}$.

**82.** $2\operatorname{arcctg} x-\frac{2x-1}{1+x^2}$. **83.** $2x\operatorname{arctg} x+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

84. $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}$. 85. 6. 86. $4\frac{3}{4}-\ln 16$.

87. $\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$. 88. $-3+2\sqrt{2}$ и $-3-2\sqrt{2}$.

89. 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 90. $\frac{\pi}{2}k$; $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 91. 2.

92. $\frac{\pi}{2}k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 93. 0.

## § 2.

97. — 3. 98. 3. 99. 0. 100. 0. 101. $y=2$. 102. $y=-x$. 103. $y=14x-1$.

104. $y=\sqrt{2}$. 105. а) $(-2,\ 30)$, $(2,\ -34)$; б) $\left(2,\ -\frac{7}{3}\right)$, $\left(3,\ -\frac{5}{2}\right)$.

108. $(4,\ -4)$. 109. $(0,\ 0)$, $(4,\ -20)$. 110. 3. 112. $\left(\frac{2}{3}x_0,\ 0\right)$.

113. $x=\frac{n-1}{n}x_0$ 115. $x=\frac{n+1}{n}x_0$. 119. Нет. 120. Да.

122. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$; $\varphi_1=\operatorname{arctg}(-3)$, $\varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{11}$. 123. $\varphi_1=$ $=\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$, $\varphi_2=\operatorname{arctg}(-2\sqrt{2})$. 124. 0. 127. $y'=a^x\ln a$.

## § 3.

129. $y'=\frac{x^3}{5}-9x^2+26$, $y''=\frac{3}{5}x^2-18x$, $y'''=\frac{6}{5}x-18$.

130. $y'=1{,}2x^2-19{,}2x+75{,}6$, $y''=2{,}4x-19{,}2$, $y'''=2{,}4$. 131. $y'=$ $=x^2-x+6$, $y''=2x-1$, $y'''=2$. 132. $y'=12x^3-4x^2-16x$, $y''=36x^2-8x-16$, $y'''=72x-8$. 133. $f(x)=ax^3+bx^2+$ $+cx+d$; $f(0)=d$, $d=2$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$; $f'(0)=c$, $c=-5$; $f''(x)=6ax+2b$; $f''(0)=2b$, $b=8$; $f'''(x)=6a$; $f(x)=x^3+8x^2-$ $-5x+2$. 134. $2x^3+\frac{3}{2}x^2+1$. 135. $-x^3+5x^2-7x-3$. 136. $2x^3-$ $-6x^2-5x-3$. 137. $y=x^4-3x^2+7x-4$. 138. $y=x^4-4x^3-6$. 139. $y=\frac{3}{4}x^4-x^3+4x^2-3x+2$. 140. $y=-2x^4-3x^2-x+17$.

141. $y'=2x$, $y''=2$. 142. $y'=2x-7$, $y''=2$. 143. $y'=5x^4-4x^3-$ $-15x^2-10x$, $y''=20x^3-12x^2-30x-10$. 144. $y'=4x^3+2ax+2bx$, $y''=12x^2+2(a+b)$. 145. $y'=12x^2-6x$, $y''=24x-6$. 146. $y'=$ $=4x^3-15x^2-6x-15$, $y''=12x^2-30x-6$. 147. $y'=15x^4-16x^3-$ $-33x^2+24x+8$, $y''=60x^3-48x^2-66x+24$. 148. $y'=6x^5-5x^4-$ $-4x^3+3x^2$, $y''=30x^4-20x^3-12x^2+6x$. 149. $y'=4x^3$, $y''=12x$.

150. $y' = 4x^3 - 8x$, $y'' = 12x - 8$. **151.** $y' = -24x^2 + 72x - 54$, $y'' = -48x + 72$. **152.** $y' = 21x^6 + 12x^5 - 315x^4 - 162x^3 + 1323x^2 + 588x - 1029$, $y'' = 126x^5 + 60x^4 - 1260x^3 - 486x^2 + 2646x + 588$.

**153.** $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $y'' = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}}$. **154.** $y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$, $y'' = -\frac{3}{16x\sqrt[4]{x}}$.

**155.** $y' = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{a}{x}}$, $y'' = -\frac{2}{9x}\sqrt[3]{\frac{a}{x}}$. **156.** $y' = \frac{1}{2|b|}\sqrt{\frac{a}{x}}$, $y'' = -\frac{1}{4|b|x}\sqrt{\frac{a}{x}}$. **157.** $y' = -\frac{5}{2x\sqrt{x}}$, $y'' = \frac{15}{4x^2\sqrt{x}}$.

**158.** $y' = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$, $y'' = \frac{10}{9x^2\sqrt[3]{x^2}}$. **159.** $y' = 2\cos x + 3\sin x$, $y'' = -2\sin x + 3\cos x$. **160.** $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\sin x$, $y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + 2\cos x$. **161.** $y' = 2x + \sin 3x$, $y'' = 2 + 3\cos 3x$. **162.** $y' = -\frac{5}{\sin^2 5x}$, $y'' = \frac{50\cos 5x}{\sin^3 5x}$. **163.** $y' = \frac{3}{\cos^2(x+1)}$, $y'' = \frac{6\sin(x+1)}{\cos^3(x+1)}$. **164.** $y' = -\frac{a}{3}\sin\frac{x}{3}$, $y'' = -\frac{a}{9}\cos\frac{x}{3}$. **165.** $y' = \sin 2x$, $y'' = 2\cos 2x$.

**166.** $y' = 2x \cdot \cos x^2$, $y'' = 2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2$. **167.** $y' = -9x^2\sin x^3$, $y'' = -18x\sin x^3 - 27x^4 \cdot \cos x^3$. **168.** $y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$,

$y'' = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x}$. **169.** $y' = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$, $y'' = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}$.

**170.** $y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \cos x$, $y'' = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} + \sin x$.

**171.** $y' = \frac{2 + 5\cos x}{(5 + 2\cos x)^2}$, $y'' = \frac{\sin x(10\cos x - 17)}{(5 + 2\cos x)^3}$. **172.** $y' = \frac{3}{\cos^4 x}$, $y'' = \frac{12\sin x}{\cos^5 x}$. **173.** $y = \operatorname{tg} 2x$, $y' = \frac{2}{\cos^2 2x}$, $y'' = \frac{4\sin 2x}{\cos^3 2x}$. **174.** $y' = \cos x - x\sin x$, $y'' = -2\sin x - x\cos x$. **175.** $y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$,

$y'' = \frac{2\sin x - 2x\cos x - x^2\sin x}{x^3}$. **176.** $y' = \frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{2x^2}$,

$y'' = \frac{\sin 2x - 2x\cos 2x - 2x^2\sin 2x}{x^3}$. **177.** $y' = \frac{2m^2 - 3\sin 2x}{2\sqrt{2m^2x + 3\cos^2 x}}$.

**178.** $y = \frac{5}{\cos x} - 4\cos x$, $y' = (9 + 5\operatorname{tg}^2 x)\sin x$. **179.** $y' = \frac{-2}{1 - \sin 2x}$.

**180.** $y = \frac{7}{4}\cos 4x - \frac{3}{4}$, $y' = -7\sin 4x$. **181.** $y' = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$.

## § 4.

**182.** $v=S'=(9t^2+1)$ *м/сек*, $v(10)=901$ *м/сек.* **183.** $v=(12t-t^2)$ *м/сек*, $t=12$ *сек.* **184.** $v_1=(3t^2+2t)$ *м/сек*, $v_2=2t$ *м/сек*, $t=0$. **185.** $v=S'$. **186.** $S(1)=32$ *м*, $a(1)=-6$ *м/сек*$^2$. **187.** $y=ax+b$, $v=y'=a$. **188.** $\delta=(l^2+2l)$ *г/см*, $\delta(5)=35$ *г/см.* **189.** $v=y'=2\alpha x+\beta$. **190.** $y'(6)=110$. **191.** $S=(2t+1)(3t+2)$, $S'(3)=43$ *см*$^2$*/сек*, $P'(3)=10$ *см/сек.* **192.** $S'(2)=39$ *см*$^2$*/сек.* **193.** $1296\frac{1}{3}$ *см*$^3$*/сек*, $917\frac{1}{3}$ *см*$^2$*/сек.* **196.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ед. скорости. **197.** $I=2\cos(2t+1)$ *а.* **198.** $I=(50e^{10}-3\sin 14)$ *а.* **199.** $c=(2\tau\ln\tau+\tau)$ *кал/град.* **200.** $c=(1{,}92+0{,}4e^{1{,}6})$ *кал/град.*

## § 5.

**201.** Убывает $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$, возрастает $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. **202.** Убывает $(-\infty, 1)$, возрастает $(1, +\infty)$. **203.** Возрастает $(-\infty, +\infty)$. **204.** Возрастает $(-\infty, +\infty)$. **205.** Возрастает $(-\infty, +\infty)$. **206.** Возрастает $(-2, +\infty)$. **207.** Возрастает $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{11}{6}\pi, 2\pi\right)$. **208.** Возрастает $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **209.** Возрастает $(0, +\infty)$. **210.** Убывает $(2, +\infty)$, возрастает $(-\infty, 2)$. **211.** $f(x)=\sin x - x + \frac{x^3}{6}$, $f(0)=0$, $f'(x)=\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geqslant 0$.

Следовательно, функция $f(x)$ возрастает и $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geqslant 0\ (x > 0)$.

**215.** Минимум $M(0, -4)$. **216.** Минимум $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. **217.** Максимум $M(-2, 9)$. **218.** Максимум $N\left(-\frac{2}{3}, 4\frac{13}{27}\right)$, минимум $M(2, -5)$.

**219.** Максимум $N(1, -7)$, минимум $M(4, -20)$.

**220.** Максимум $N\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{27}\right)$, минимум $M(2, 0)$.

**221.** $f(x)=ax^2+bx+c$, $f'(x)=2ax+b$, $f''(x)=2a\ (a\neq 0)$.

Достаточным условием существования экстремума функции $f(x)$ в стационарной точке $x_0$ является $f''(x_0)\neq 0$ В случае квадратичной функции оно всегда выполнено.

**222.** Максимум $N(0, 0)$, минимум $M(2, -4)$.

**223.** Максимум $N(0,\ 10)$, минимум $M\left(2,\ 8\frac{2}{3}\right)$.

**224.** Максимум $N(-5,\ 100)$, минимум $M(1,\ -8)$.

**225.** Максимума нет, минимума нет.

**226.** Максимум $N(0,\ 5)$, минимум $M(\pm 4,\ -251)$.

**227.** Максимум $N\left(-\frac{9}{5},\ 62\frac{616}{625}\right)$, минимум $M\left(\frac{9}{5},\ -62\frac{616}{625}\right)$.

**228.** Максимум $f(0)$, минимум $f\left(1\frac{1}{16}\right)$.

**229.** Максимум $f\left(\frac{10-\sqrt{103}}{3}\right)$, минимум $f\left(\frac{10+\sqrt{103}}{3}\right)$.

**230.** Максимума нет, минимума нет.

**231.** Максимум $y(0)$, минимум $y(\pm\sqrt{8})$.

**232.** Максимум $y(-2)$, минимум $y(2)$.

**233.** Максимума нет, минимум $y(9)$.

**234.** Максимум $y(-1)$, минимум $y(1)$.

**235.** Максимум $y(-3)$, минимум $y(3)$.

**236.** Максимума нет, минимум $y(1+\sqrt{2})$.

**237.** Максимум $y(2)$, минимумы: $y(1)$ и $y(3)$.

**238.** Наибольшее значение $y(3)$, наименьшее значение $y(-1)$.

**239.** Наибольшее значение $y(4)$, наименьшее значение $y(1)$.

**240.** Наибольшее значение $y(4)$, наименьшее значение $y(-1)$.

**241.** Наибольшее значение $y(-1)$, наименьшее значение $y(2)$.

**242.** Наибольшее значение $y(0)$, наименьшее значение $y(2)$.

**243.** Наибольшее значение $y(-2)=y(2)$, наименьшее значение $y(0)$.

**244.** Наибольшее значение $y(-4)$, наименьшее значение $y(3)$.

**245.** Наибольшее значение $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$, наименьшее значение $y(\pi)$.

**246.** Наибольшее значение $y(0)$, наименьшее значение $y\left(\frac{2}{3}\pi\right)$.

**251.** Слагаемые равны. **252.** Слагаемые равны. **253.** Слагаемые равны. **254.** Квадрат. **255.** Квадрат. **256.** $x=\frac{a-b}{2}$. **257.** а) Квадрат со стороной 25 *м*; б) прямоугольники со сторонами 25 *м* и 50 *м*; в) квадрат со стороной 50 *м*. **258.** $3R\sqrt{2}$. **259.** Квадрат со стороной $a=r\sqrt{2}$. **260.** Высота прямоугольника должна равняться половине высоты треугольника. **261.** Сторона вписанного квадрата должна равняться половине стороны данного квадрата. **262.** Стороны прямоугольника равны $\frac{ah^2}{a^2+h^2}$ и $\frac{ha^2}{a^2+h^2}$, где $a$ и $h$ — соответственно основание и высота треугольника. **263.** Для равнобедренного. **264.** Указание. $S=\frac{1}{2}ch_c$, $P=c+2a$.

**265.** $\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$. **266.** $a=c=r\sqrt{3}$. Треугольник равносторонний.

267. $t=\dfrac{v_1(2a-b)+v_2(2b-a)}{2(v_1^2-v_1v_2+v_2^2)}$ *ч*. 268. Основание параллелограмма равно половине основания треугольника. 269. Указание. Обозначим основание и высоту треугольника соответственно через $a$ и $h$ и будем искать наибольшее значение стороны $x$ вписанного квадрата. Из подобия треугольников имеем: $\dfrac{x}{a}=\dfrac{h-x}{h}$ или $x=\dfrac{2S}{a+\dfrac{2S}{a}}$. Наибольшее

значение $x$ будет при наименьшем значении функции $f(a)=a+\dfrac{2S}{a}$,

т. е. при $a=\sqrt{2S}$. Ответ. $x=\dfrac{\sqrt{2S}}{2}$.

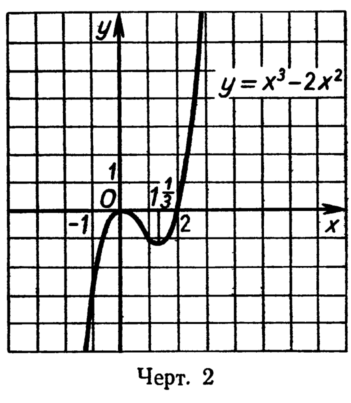
270. $BN=a\dfrac{m^2+mn\cos\alpha}{m^2+n^2+2mn\cos\alpha}$. 271. $V=\dfrac{a^3\sqrt[4]{12}}{18}$.

272. $x=\dfrac{ah}{2h-a}=8\dfrac{4}{7}$ (*см*), $y=\dfrac{h}{a}(a-x)=1\dfrac{5}{7}$ (*см*), где $x$ и $y$ — соответственно сторона основания и высота призмы. 273. $a=b=c=$ $=10$ *см*. 274. Удаленная часть $x=\dfrac{a}{6}$, высота призмы $y=\dfrac{a}{18}\sqrt{3}$. Объем $V=\dfrac{a^3}{54}$. 275. а) $a=4$ *см*, $b=8$ *см*; б) $a=2+\dfrac{2}{3}\sqrt{21}\approx$ $\approx 5{,}055$ (*см*), $b=4+\dfrac{2}{3}\sqrt{21}\approx 7{,}055$ (*см*), $c=12-\dfrac{4}{3}\sqrt{21}\approx$ $\approx 5{,}890$ (*см*). 276. $r=h=\sqrt{\dfrac{Q}{3\pi}}\approx 10{,}3$ (*см*). 277. $x=\dfrac{2}{3}r=8$ (*см*), $y=\dfrac{1}{3}h=12$ (*см*). 278. $r=\dfrac{R}{2}\sqrt{2}$. 279. $r\approx\dfrac{R}{3}\sqrt{6}$, $H\approx 5{,}26$ *см*.

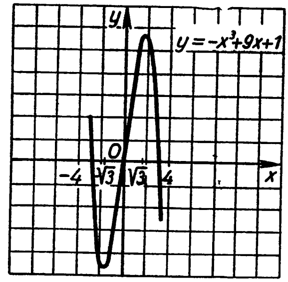
280. $r=\dfrac{R}{3}\sqrt{6}$, $H=\dfrac{R}{3}\sqrt{3}$, $V=\dfrac{2}{27}\pi R\sqrt[3]{3}$. 281. $v=14\dfrac{2}{9}\pi$ *дм*$^3$. Высота цилиндра равна одной трети высоты конуса. 282. Высота конуса равна учетверенному радиусу шара.

## § 6.

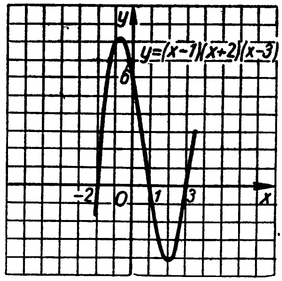
283. Нуль 4, минимум (4, 0).
284. Нули — 2, 2, максимум (0,4).
285. Нули 0, 2, максимум (0, 0), минимум $\left(1\dfrac{1}{3}, -1\dfrac{5}{27}\right)$ (черт. 2).



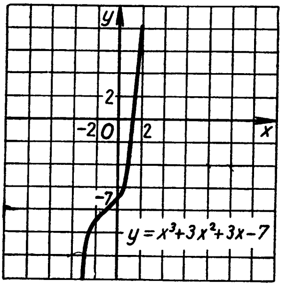

Черт. 2



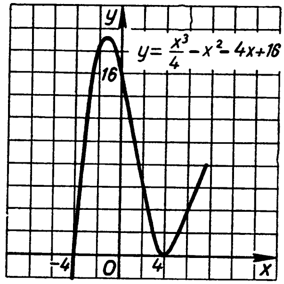

Черт. 3



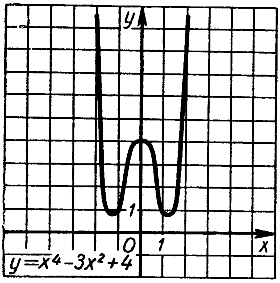

Черт. 7




Черт. 4

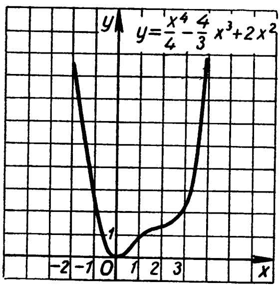



Черт. 8

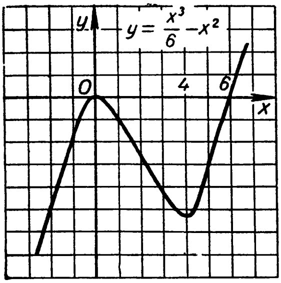



Черт. 5

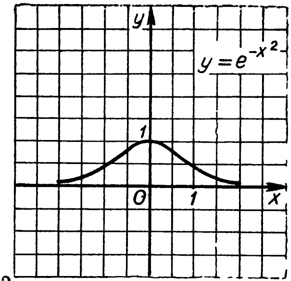
**286.** Нули — 2,93, — 0,11, 3,05, максимум $(\sqrt{3},\ 1+6\sqrt{3})$, минимум $(-\sqrt{3},\ 1-6\sqrt{3})$ (черт. 3). **287.** Нуль: 1 (черт. 4). **288.** Максимум (0, 4), минимум $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2},\ 1\frac{3}{4}\right)$ (черт 5). **289.** Нуль: 0, минимум (0, 0) (черт. 6). **290.** Нули: — 2, 1, 3, максимум $\left[\frac{1}{3}(2-\sqrt{19}),\ \frac{8}{27}(28+19\sqrt{19})\right] \approx (-0{,}8,\ 8{,}2)$, минимум $\left[\frac{1}{3}(2+\sqrt{19}),\ \frac{2}{27}(28-19\sqrt{19})\right] \approx (2{,}1,\ -4{,}1)]$ (черт. 7). **291.** Нули, — 4, 4, максимум $\left(-\frac{4}{3},\ 18\frac{26}{27}\right)$, минимум (4, 0) (черт. 8)



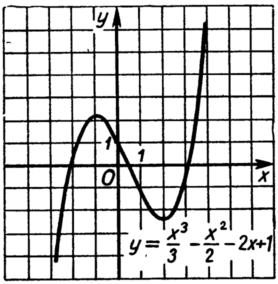

Черт. 6



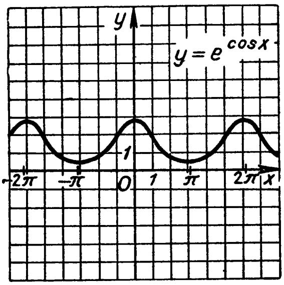

Черт. 9



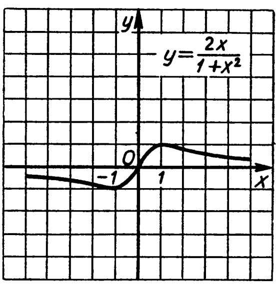

Черт. 13



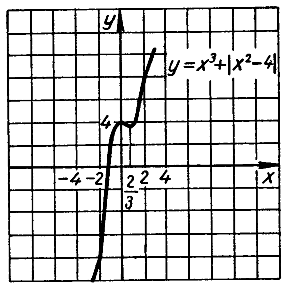

Черт. 10



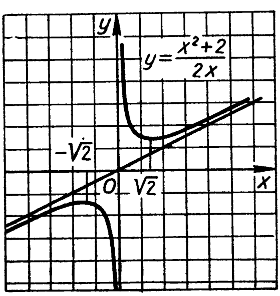

Черт. 14



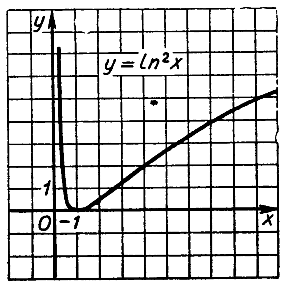

Черт. 11



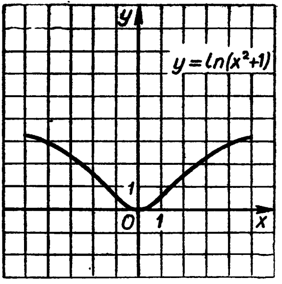

Черт. 15




Черт. 12




Черт. 16




Черт. 17

**292.** Нули: 0; 6, максимум (0, 0), минимум $\left(4, -5\frac{1}{3}\right)$ (черт. 9)
**293.** Нули: $-2, 2$; 0, 6; 3, 3; максимум $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$, минимум $\left(2, -2\frac{1}{3}\right)$ (черт. 10).
**294.** Нуль 0, максимум (1, 1), минимум $(-1, -1)$ (черт. 11).
**295.** Максимум $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, минимум $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (черт. 12).
**296.** Максимум (0, 1) (черт. 13).
**297.** Функция четная, периодическая $T = 2\pi$, нулей нет. Максимум $(0, e)$, минимум $\left(\pi, \frac{1}{e}\right)$ (черт. 14). **298.** Нуль между $-2$ и $-1$. Максимум (0, 4), минимум (0, 6; 3, 9). В точках $x = -2$ и $x = 2$ функция не имеет производной (черт. 15).
**299.** Нуль: 1, минимум (1, 0) (черт. 16). **300.** Функция четная. Нуль: 0, минимум (0, 0) (черт. 17).

Глава IV
# ИНТЕГРАЛ

## 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

**Определение.** *Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если ее производная равна $f(x)$, т. е. если $F'(x) = f(x)$.*

Например, функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для $f(x) = \cos x$, ибо

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x.$$

Если функция имеет первообразную, то она имеет бесконечное множество первообразных. Причем все они даются выражением $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных, а $C$ — произвольная постоянная. Так, множество всех первообразных функции $\cos x$ дается выражением $\sin x + C$.

Доказано, что любая непрерывная функция имеет первообразную.

Таблица первообразных

| Функция | Множество первообразных |
|---|---|
| 1. $f(x) = x^n \ (n \neq -1)$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| 2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ |
| 3. $f(x) = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1)$ | $\dfrac{a^x}{\ln a} + C$ |
| 4. $f(x) = e^x$ | $e^x + C$ |
| 5. $f(x) = \sin x$ | $-\cos x + C$ |
| 6. $f(x) = \cos x$ | $\sin x + C$ |

7. Для функции $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ полезно знать первообразную

$$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

При отыскании первообразных полезно использовать следующие ее свойства.

Свойство 1. *Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными соответственно функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то их сумма $F_1(x) + F_2(x)$ является первообразной для суммы $f_1(x) + f_2(x)$.*

Свойство 2. *Если функция $G(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то функция $F(x) = kG(x)$, где $k$ постоянное, является первообразной функции $kf(x)$.*

Свойство 3. *Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то функция $\frac{1}{k}F(kx+p)$, где $k$ и $p$ постоянные ($k \neq 0$), является первообразной функции $f(kx+p)$.*

## II. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Теорема. *Приращения любых двух первообразных данной функции на заданном сегменте равны между собой.*

**Определение.** *Определенным интегралом от данной функции на сегменте называется приращение любой ее первообразной на этом сегменте.*

Определенный интеграл от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ записывается так: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Числа $a$ и $b$ называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования. Множитель $dx$ указывает на то, что первообразную подынтегральной функции надо искать по аргументу $x$. Например, в интеграле $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos x\,dx$ первообразную от $t\cos x$ надо искать по $x$ и она будет равна $t\sin x$. Значение же интеграла будет равно приращению этой первообразной на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, т. е.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\cos x\cdot dx = t\cdot\sin\frac{\pi}{2} - t\sin 0 = t$$

В интеграле $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\cos x\,dt$ первообразную от $t\cos x$ надо искать по $t$, и она будет равна $\frac{t^2}{2}\cos x$ Интеграл же будет равен: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos x\,dt = \frac{\pi^2}{8}\cos x - 0\cdot\cos x = \frac{\pi^2}{8}\cos x$

($t$ — в первом случае, $x$ — во втором считаются постоянными).

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

где $F'(x) = f(x)$.

Равенство (1) называется *формулой Ньютона—Лейбница*. Итак, для того чтобы найти значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, достаточно найти одну из первообразных подынтегральной функции $f(x)$ и вычислить ее приращение на сегменте $[ab]$.

Приращение $F(b) - F(a)$ принято записывать символом $F(x)\,|_a^b$

Пример.

$$\int\limits_1^4 2x\,dx = x^2\Big|_1^4 = 16 - 1 = 15.$$

Можно было взять другую первообразную, например, $x^2 - 7$; тогда бы имели:

$$\int\limits_1^4 2x\,dx = (x^2 - 7)\Big|_1^4 = (4^2 - 7) - (1^2 - 7) = 15.$$

Определенный интеграл обладает свойствами, которыми удобно пользоваться при его вычислении.

Свойство 1. *Определенный интеграл от суммы функций на сегменте $[a, b]$ равен сумме определенных интегралов от этих функций на том же сегменте:*

$$\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + \int\limits_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:* $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

Свойство 3. *Интеграл от нечетной функции на сегменте $[-a, a]$ равен нулю, а интеграл от четной функции на том же сегменте равен удвоенному интегралу от этой функции на сегменте $[o, a]$.*

Свойство 4. *Если на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ положительна (отрицательна), то ее определенный интеграл на этом сегменте является положительным (отрицательным) числом.*

## III. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКЕ

### 1. Вычисление площади плоской фигуры

**Определение.** *Фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, прямыми $x = a$, $y = b$ и осью абсцисс, называется криволинейной трапецией.*

Теорема 1. *Площадь $S$ криволинейной трапеции равна определенному интегралу от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, т. е.*

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Теорема 2. *Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $(f_2(x) \geqslant f_1(x))$ и прямыми $x = a$, $x = b$, равна определенному интегралу от функции $l(x) = f_2(x) - f_1(x)$ на сегменте $[a, b]$:*

$$S = \int_a^b l(x)\,dx. \qquad (3)$$

Пример Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 2x$ и прямыми $x = 1$, $x = 2$.

Решение. На сегменте $[1, 2]$ парабола $y = x^2 + 2x$ расположена выше параболы $y = x^2 + 1$. Поэтому $l(x) = (x^2 + 2x) - (x^2 + 1) = 2x - 1$, $x \in [1, 2]$, и искомая площадь равна:

$$S = \int_1^2 (2x - 1)\,dx = 2.$$

Следствие. *Если непрерывная функция $f(x)$ отрицательна на сегменте $[a, b]$, то площадь $S$ фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, равна определенному интегралу*

$$S = \int_a^b [-f(x)]\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (4)$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x$ и сегментом $[0, 2]$ оси абсцисс.

Решение. На сегменте $[0, 2]$ функция $y = x^2 - 2x \leqslant 0$. Для вычисления площади пользуемся формулой (4). Имеем:

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^2 = 1\frac{1}{3}.$$

## 2. Вычисление объемов

Рассмотрим тело, ограниченное двумя опорными плоскостями, перпендикулярными оси $Ox$ и пересекающими ее в точках $a$ и $b$ $(a < b)$. Будем рассекать тело плоскостями, перпендикулярными к оси абсцисс. Пусть площадь сечения, соответствующего точке $x$ оси абсцисс, есть функция $Q(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$. Далее, предположим, что из любых двух таких сечений одно целиком проектируется в другое. Тогда объем $V$ тела может быть вычислен по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx. \qquad (5)$$

В частности, *если тело образовано вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и сегментом $[a, b]$, то объем $V$ полученного тела вращения выразится формулой:*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx. \tag{6}$$

Пример. Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$, осями координат и прямой $x = 1$.

Решение.

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 \, dx = \frac{28}{15} \pi.$$

### 3. Вычисление пути.

Если тело движется прямолинейно с переменной скоростью $v(t)$ ($v(t)$ — непрерывная функция), то *путь $S$, пройденный телом за время движения от $t = t_1$ до $t = t_2$, может быть вычислен по формуле:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt. \tag{7}$$

### 4. Вычисление массы стержня

*Масса $m$ прямолинейного стержня на участке от $l = l_1$ до $l = l_2$*, если его линейная *плотность* есть непрерывная функция $\delta(l)$, *может быть вычислена по формуле:*

$$m = \int_{l_1}^{l_2} \delta(l) \, dl. \tag{8}$$

### 5. Вычисление количества электричества

Если величина тока $I(t)$ есть непрерывная функция времени, то *количество электричества $Q(t)$, прошедшего через поперечное сечение проводника за время от $t = t_1$ до $t = t_2$, может быть вычислено по формуле:*

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) \, dt. \tag{9}$$

### 6. Вычисление работы

*Работа $A$, произведенная переменной силой $F$*, направленной вдоль оси $Ox$, при перемещении материальной точки вдоль оси $Ox$, *равна определенному интегралу на сегменте $[a, b]$ от функции $F(x)$, т. е.*

$$A = \int_a^b F(x) \, dx. \tag{10}$$

### 7. Давление жидкости

Если сила давления $q(x)$ на частицы горизонтального слоя пластинки, погруженной вертикально в жидкость, находящегося на глубине $x$ (считая от поверхности жидкости), есть непрерывная функция на сегменте $[0, H]$, то *сила давления $P$ на всю пластинку высоты $H$ равна определенному интегралу от функции $q(x)$ на сегменте* $[0, H]$

$$P = \int_0^H q(x)\,dx. \tag{11}$$

Пример. Найти силу давления $P$ воды, наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой $a \times b$ ($м^2$).

Решение. Здесь $q(x) = 9{,}807\,\delta\, ax$, где $\delta$ — плотность воды — 1000 $кг/м^3$, т. е. $q(x) = 9{,}807 \cdot 1000\, ax$.

Поэтому

$$P = 9807 \int_0^b ax\,dx = 9807\,\frac{ab^2}{2}\ (н).$$

## § 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ

Пользуясь таблицей первообразных, в задачах 1—15 найти первообразные заданных функций.

**1.** $y = x^{11}$.

**2.** $y = \frac{1}{x^4}$.

**3.** $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

**4.** $y = x^2 \sqrt[3]{x^4}$.

**5.** $y = \sqrt{x}$.

**6.** $y = \frac{9}{x}$.

**7.** $y = \frac{2x^3 + 3x^2 + 14x - 8}{x}$.

Указание. Предварительно выполнить почленное деление.

**8.** $y = \frac{2x^2 - 3x + 8}{x^5}$.

**9.** $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{x\sqrt{x}}$.

**10.** $y = \frac{4x^{\frac{4}{5}} + 3x^{\frac{3}{4}} + 2x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}{x}$.

**11.** $y = 2^x$.

**12.** $y = 35^x$.

**13.** а) $y = 5\sin x$; б) $y = 3\cos x$.

**14.** а) $y = \sqrt{4 - x^2}$; б) $y = \sqrt{9 - x^2}$.

**15.** $y = \frac{\sin 2x + 4\cos^2 x}{\cos x}$.

**16.** Используя соответствующее правило дифференцирования функций, убедиться, что если функция $F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, то $\frac{1}{a}F(ax+b)$, где $a$ и $b$ постоянные ($a \neq 0$), является первообразной для функции $y = f(ax+b)$.

Пользуясь результатом задачи 16, найти первообразные функций в задачах 17—31. Дифференцированием проверить найденные ответы.

**17.** $y = (x+3)^{27}$. **18.** $y = (2x-1)^{109}$.

**19.** $y = \sqrt{9+8x}$. **20.** $y = \sqrt{4-x}$.

**21.** $y = e^{3x+1}$. **22.** $y = \frac{1}{x-1}$.

**23.** $y = \frac{x^2+1}{x-1}$. Указание. $\frac{x^2+1}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1}$.

**24.** $y = \sin 3x$. **25.** $y = 17\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

**26.** $y = \frac{\cos^2 5x - \sin^2 5x}{\cos 5x + \sin 5x}$. **27.** $y = 3 + \sin^2 x$.

Указание. Воспользоваться формулой $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

**28.** $y = 2 - \cos^2 x$. **29.** $y = \cos 2x \cdot \sin 5x$.

Указание. Преобразовать произведение в сумму.

**30.** $y = \cos 3x \cdot \cos 7x$.

**31.** $y = 4\sin x \cdot \cos x \cdot (1 - 2\sin^2 x)$.

Указание. Предварительно убедиться, что заданная функция равна $\sin 4x$.

Для функций, указанных в задачах 32—33, найти их первообразные, имеющие в заданных точках определенную величину.

**32.** $f(x) = x^5$; $F(2) = \frac{2}{3}$.

Указание. Любая первообразная заданной функции имеет вид: $F(x) = \frac{x^6}{6} + C$, $C$ — константа. Подставив значение $x = 2$, получим уравнение для определения $C$.

**33.** $f(x) = x^2 + 4x - 6$; $F(1) = 0$.

Для функций, заданных в задачах 34—35, указать те первообразные, которые являются нечетными функциями.

**34.** $y = 3x^2 + 1$. **35.** $y = x^4 - 3$.

**36.** Найти уравнение кривой, зная, что угловой коэффициент касательной к ней в любой ее точке равен $-4x$. Сколько существует таких кривых?

**37.** Найти уравнение кривой, зная, что угловой коэффициент касательной к ней в любой ее точке равен $\cos 5x$. Сколько существует таких кривых?

**38.** Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, -2)$, если угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке равен $2x+1$.

Указание. Сначала найти все кривые, угловой коэффициент касательной к которым в каждой точке равен $2x+1$, а затем для определения $C$ воспользоваться тем, что кривая должна пройти через точку $A(1, -2)$.

## § 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В задачах 39—68 вычислить заданные определенные интегралы.

**39.** $\int\limits_0^4 x\,dx$, $\int\limits_2^5 x^2\,dx$, $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx$.

**40.** $\int\limits_0^3 5x^3\,dx$, $\int\limits_2^4 x^3\,dx$, $\int\limits_3^5 x^3\,dx$.

**41.** $\int\limits_1^3 (2x+1)\,dx$, $\int\limits_2^4 (x^3+1)\,dx$, $\int\limits_0^2 (3x^2-2x)\,dx$.

**42.** $\int\limits_0^4 (x^3-x^2+1)\,dx$, $\int\limits_1^2 (x^3-x)\,dx$, $\int\limits_1^2 (x^5+1)\,dx$.

**43.** $\int\limits_{-3}^{-1} (2x+7)\,dx$, $\int\limits_{-2}^{0} (5x+15)\,dx$, $\int\limits_{-4}^{-1} \left(-\frac{x}{2}+1\right)dx$.

**44.** $\int\limits_{-7}^{-5} (-0{,}4x-2)\,dx$, $\int\limits_{-4}^{-1} (x^2+3)\,dx$, $\int\limits_{-3}^{-1} (x^2-1)\,dx$.

**45.** $\int\limits_0^2 (3x-7)\,dx$, $\int\limits_1^3 (2x-9)\,dx$, $\int\limits_{-2}^{4} (0{,}3x-4)\,dx$.

**46.** $\int\limits_{-1}^{3} (-3x-4)\,dx$, $\int\limits_0^2 (x^2-5)\,dx$, $\int\limits_{-2}^{0} (x^2-5)\,dx$.

**47.** $\int\limits_{-2}^{2} (x^2-5)\,dx$, $\int\limits_1^3 (-3x^2+x+1)\,dx$, $\int\limits_{-2}^{0} (-x^2+7)\,dx$.

**48.** $\int\limits_{-3}^{2}(2x-1)\,dx.$ **49.** $\int\limits_{-2}^{5}(-0{,}8x+2)\,dx.$

**50.** $\int\limits_{0}^{3}(x^2-4)\,dx.$ **51.** $\int\limits_{0}^{3}(-x^2+4)\,dx.$

**52.** $\int\limits_{0}^{2}(x^3+x^2-2)\,dx.$ **53.** $\int\limits_{-2}^{0}(x^3+x^2+x+1)\,dx.$

**54.** $\int\limits_{-4}^{4}(2x+1)\,dx.$ **55.** $\int\limits_{1}^{5}\left(\frac{x^2}{4}+2\right)dx+\int\limits_{-5}^{3}\left(\frac{x^2}{4}+2\right)dx.$

**56.** $\int\limits_{-2}^{3}(0{,}6x-3)\,dx+\int\limits_{3}^{-5}\left(\frac{3}{5}x-3\right)dx.$

**57.** $\int\limits_{-2}^{1}(x-1)\,dx+\int\limits_{1}^{3}\frac{x^2-1}{x+1}\,dx.$

**58.** $\int\limits_{-2}^{2}(x^2+3)\,dx+\int\limits_{-2}^{2}(x^3+x)\,dx.$

**59.** $\int\limits_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx.$ **60.** $\int\limits_{3}^{6}e^{\frac{x}{3}}\,dx.$

**61.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx.$ **62.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx.$

Указание. Воспользоваться формулой $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}.$

В задачах 63—68 вычислить заданные интегралы и дать геометрическое истолкование полученным результатам.

**63.** $\int\limits_{2}^{5}x^2\,dx.$ **64.** $\int\limits_{2}^{4}3x^2\,dx.$

**65.** $\int\limits_{1}^{3}(2x+1)\,dx.$ **66.** $\int\limits_{-7}^{-5}(-0{,}4x-2)\,dx.$

**67.** $\int\limits_{0}^{2}(x^3-x)\,dx.$ **68.** $\int\limits_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx.$

**69.** Используя геометрический смысл определенного интеграла, убедиться, что интеграл от нечетной функции на сегменте $[-a,\ a]$ равен нулю, а интеграл от четной функции на том же сегменте равен удвоенному интегралу от этой функции на сегменте $[0,\ a]$.

## § 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

В задачах 70—73 вычислить площади заданных криволинейных трапеций, сделать чертеж.

**70.** $y = x^2 + 2$, $x \in [0,\ 3]$, $x = 0$, $x = 3$.

**71.** $y = x^2 + 1$, $x \in [-2,\ 2]$, $x = -2$, $x = 2$.

**72.** $2x + y - 2 = 0$, $x \in [-2,\ 0]$, $x = -2$, $x = 0$.

**73.** $2x + y - 2 = 0$, $x \in [-4,\ 1]$, $x = -4$, $x = 1$.

В задачах 74—82 изобразить графики указанных функций. Выделить соответствующие криволинейные трапеции и вычислить их площади.

**74.** $y = x^2$, а) $x \in [1,\ 3]$; б) $x \in [a,\ b]$, $b > a$.
**75.** $y = x^3$, а) $x \in [0,\ 2]$; б) $x \in [1,\ 3]$.
**76.** $xy = 5$, $x \in [1,\ 3]$. **77.** $y = 3^x$, $x \in [0,\ \log_3 4]$.

**78.** $y = \sin x$, $x \in [0,\ \pi]$. **79.** $y = \cos \frac{x}{2}$, $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.
**80.** $x^2 + y^2 = 4$, $x \in [0,\ 2]$, $y \geqslant 0$.

Указание. Уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ является уравнением окружности радиуса $R$ с центром в начале координат.

**81.** $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $x \in [0,\ 2]$, $y \geqslant 0$.

**82.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $x \in [-2,\ 2]$, $y \geqslant 0$.

Указание Уравнение $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ является уравнением эллипса.

**83.** Как расположена по отношению к оси $Ox$ фигура, ограниченная графиком функции $y = x^2 - 6x + 5$, $x \in [1,\ 4]$, и прямыми $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$?

Вычислить ее площадь.

**84.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 9$ и осью абсцисс.

Указание. Для отыскания пределов интегрирования найти точки пересечения параболы с осью $Ox$.

**85.** Кривые а) $y = x^2 + x - 6$; б) $y = x^2 + x - 2$ пересекают ось $Ox$ в двух точках. Вычислить площади фигур, ограниченных каждой из этих кривых и осью $Ox$.

**86.** Кривые а) $y = x^3 - 7x + 6$; б) $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$; в) $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$ пересекают ось $Ox$ в трех точках. Вычислить площади фигур, ограниченных каждой из этих кривых и осью $Ox$.

**87.** Определить нули функций а) $y = x^4 - 13x^2 + 36$; б) $y = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$ и вычислить площади фигур, ограниченных каждой кривой и осью $Ox$.

**88.** Вычислить площадь параболического сегмента, отсекаемого от параболы:

а) $y = x^2 - 2x$ прямой $y = 3$;

б) $y = 2x - x^2$ прямой $y = -8$.

В задачах 89—96 определить точки пересечения заданных кривых и вычислить площади фигур, ограниченных этими кривыми.

**89.** $y = x^3$, $y = 27$, $x = 0$. **90.** $y = x^3$, $y = x$.

**91.** $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. **92.** $y = (x-1)^2 + 2$, $y = 2x$.

**93.** $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$.

**94.** $y = 2x - x^2 + 3$, $y = 4x$.

**95.** $y = 10 + x(6 - x^2)$, $y = 10 + x(3 - 2x)$.

**96.** а) $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

б) $y = \sin x$, $x \in [\pi, 2\pi]$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**97.** Вычислить площадь сегмента, ограниченного дугой окружности $x^2 + y^2 = 8$ и прямой $y = 2$ и расположенного выше прямой $y = 2$.

**98.** Найти площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $y = \frac{1}{4} - x^2$, $y > 0$, и прямыми $y = -2x - 1$ и $y = 2x - 1$.

**99.** Из точки $P(x, x^2)$ параболы $y = x^2$ опущены перпендикуляры на оси координат. Убедиться, что площадь прямоугольника, образованного этими перпендикулярами и осями координат, делится параболой в отношении $1:2$, считая от оси абсцисс.

**100.** Из точек $P(x, x^n)$, где $n = 1, 2, \ldots, n$, кривых $y = x$, $y = x^2$, $\ldots$, $y = x^n$ опущены перпендикуляры на оси координат. В каком отношении, считая от оси абсцисс, каждая кривая делит площадь содержащего ее на сегменте $[0, x]$ прямоугольника, образованного этими перпендикулярами и осями координат.

## § 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ

**101.** Вычислить объем пирамиды с высотой $H$ и площадью основания $S$.

**102.** Вычислить объем усеченной пирамиды с высотой $H$, основания которой параллельны и их площади соответственно равны $Q$ и $q$.

**103.** Вычислить объем кругового конуса с радиусом основания $R$ и высотой $H$.

**104.** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и осью абсцисс.

**105.** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной: а) параболами $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$; б) дугой параболы $y = x^2$ и прямыми $y = 2 - x$ и $y = 0$.

**106.** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной: а) дугой параболы $y = 2x^2 + 1$, прямыми $x = 1$, $x = 2$ и осью абсцисс; б) прямыми $y = 3x$, $2y + x - 14 = 0$, $y = 3$ и осью абсцисс.

В задачах 107—114 вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси $Ox$ фигур, ограниченных указанными кривыми.

**107.** $y^2 = 2x$; $y = 0$, $x = 3$.

**108.** $y^2 = 2(x + 1)$, $y = 0$ и $x = 1$.

**109.** $y = 2 - 2x^2$, $y = 0$.

**110.** $y = \sqrt{7}\, x^3$, $y = 0$, $x = -1$ и $x = 1$.

**111.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (эллипс).

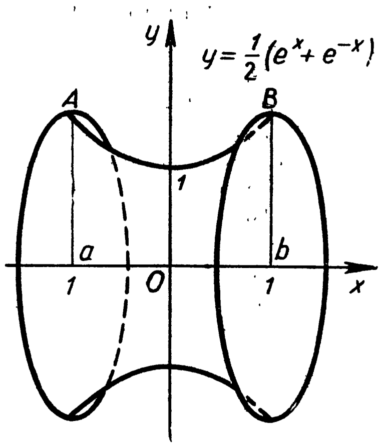
Указание. Эллипс пересекает ось $Ox$ в точках $x = -a$ и $x = a$. В силу симметрии можно пределы интегрирования взять от 0 до $a$ и полученный результат удвоить. Телом вращения здесь является эллипсоид вращения.

**112.** $y = \cos^2 x$, $y = 0$, причем $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

**113.** $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ и $y = 0$.

**114.** $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

Указание. Тело образовано вращением трапеции $aABba$, изображенной на чертеже 18. Кривая $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ называется цепной линией. В силу симметрии можно интегрировать в пределах от 0 до 1, а затем полученный результат удвоить.



Черт. 18

## § 5. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА В МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

**115.** Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (2t^2 + 1)$ *м/сек*. Найти путь, пройденный телом за первые 5 *сек*.

**116.** Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (2t^3 + 1)$ *м/сек*. Найти путь, пройденный телом за промежуток времени от $t = 1$ *сек* до $t = 3$ *сек*.

**117.** Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (4t + a)$ *м/сек*. Найти $a$, если известно, что путь, пройденный телом за 2 *сек* от начала движения, равен 48 *м*.

**118.** Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (6t + 4)$ *м/сек*. Найти длину пути, пройденного телом за третью секунду.

**119.** Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 16t - t^2$. Найти длину пути, пройденного телом от начала движения до его остановки.

Указание. В моменты начала движения и остановки скорость движения равна нулю.

**120.** Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. Одно тело двигалось со скоростью $v = (6t^2 + 4t)$ *м/сек*, другое — со скоростью $v = 4t$ (*м/сек*). Через сколько секунд расстояние между ними было равно 250 *м*?

**121.** Найти массу прямолинейного стержня, если его линейная плотность задана функцией

$$\delta(l) = (4l + 2)\ кг/м, \quad 0 \leqslant l \leqslant 12.$$

**122.** Линейная плотность $\delta(l)$ неоднородного стержня длиной 36 *см* изменяется по закону $\delta(l) = (3l^2 + 4)$ *г/см*. Найти массу стержня.

**123.** В течение семи секунд величина тока в проводнике изменялась по закону $I(t) = (3t^2 + 2t)$ *а*. Какое количество электричества прошло через проводник за это время?

**124.** Величина тока изменяется по закону $I(t) = (4t^3 + 1)$ *а*. Найти количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника за первые 12 *сек*?

**125.** Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины на 25 *см*, если известно, что действующая сила пропорциональна сжатию пружины и для сжатия на 1 *см* необходима сила в 4 *кгс*.

**126.** Вычислить работу, затраченную при сжатии винтовой пружины на 6 *см*, если известно, что при сжатии пружины на 0,2 *см* была затрачена сила 0,32 *кгс*.

**127.** Пружина растягивается на 0,02 *м* под действием силы в 50 *н*. Какую надо затратить работу, чтобы растянуть пружину на 0,10 *м*?

**128.** Силой 90 н пружина растягивается на 0,01 *м*. Первоначальная длина пружины 0,40 *м*. Какую надо совершить работу, чтобы растянуть пружину до 0,45 *м*?

**129.** Рессора прогибается под нагрузкой 2 *дж* на 1 *см*. Какую работу надо затратить для деформации рессоры на 3 *см*?

**130.** Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать воду из доверху наполненного цилиндрического резервуара, высота которого $H = 6$ *м*, а основание — круг радиуса $R = 2$ *м*.

**131.** Вычислить работу, затрачиваемую на выкачивание бензина из цистерны, имеющей форму цилиндрического резервуара высотой $H$ *м* и радиусом основания $R$ *м*. Плотность бензина $\delta = 800$ *кгс/м*$^3$.

**132.** Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из ямы глубиной 6 *м*, имеющей квадратное сечение со стороной, равной 2 *м*.

**133.** Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую полусферический резервуар радиуса 3 *м*.

**134.** Вычислить общее давление воды на дно и стенки аквариума, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, если стороны основания равны 0,9 *м* и 0,6 *м*, а высота 0,4 *м*. Аквариум наполнен водой доверху.

**135.** Вычислить давление $P$ воды на плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой равно $a$, нижнее $b\,(a > b)$, высота $H$, предполагая, что поверхность воды достигает верхнего края плотины. Подсчитать величину давления при $a = 400$ *м*, $b = 200$ *м*, $H = 20$ *м*.

**136.** Треугольная пластинка погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки $a$, высота $h$. Вычислить давление воды на эту пластинку.

**137.** Решить предыдущую задачу в предположении, что на поверхности воды лежит вершина треугольной пластинки, а основание параллельно поверхности воды.

**138.** Вычислить давление жидкости плотности $\delta$ на погруженную в нее вертикальную пластинку, имеющую форму фигуры, ограниченной линиями $y = (x+2)^2 + 1$, $y = (x+2)^2 + 2(x+2)$, $x = 0$, $x = 3$. Считая, что направление оси $Oy$ совпадает со свободной поверхностью жидкости и с верхним краем пластинки.

**139.** Вычислить давление жидкости плотности $\delta$ на погруженную в нее вертикально пластинку, имеющую форму фигуры, ограниченной линиями $y=2+\cos^2 x$, $y=-1-\sin^2 x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, имея в виду, что ось $Oy$ направлена вдоль свободной поверхности жидкости и совпадает с верхним краем пластинки.

**140.** Цилиндрический стакан наполнен маслом. Вычислить давление масла на боковую поверхность стакана, если высота его $H = 0{,}06$ *м* и радиус основания $r = 0{,}03$ *м*. Плотность масла $\delta = 900$ *кг/м*$^3$.

## ОТВЕТЫ

### § 1.

**1.** $\frac{1}{12}x^{12}+C$. **2.** $-\frac{1}{3}x^{-3}+C$. **3.** $2x^{\frac{1}{2}}+C$. **4.** $\frac{3}{13}x^4\sqrt[3]{x}+C$. **5.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$. **6.** $9\ln|x|+C$. **7.** $\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+14x-8\ln|x|+C$. **8.** $\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}+C$. **9.** $2x\sqrt{x}-12\sqrt{x}-\frac{14}{\sqrt{x}}+C$. **10.** $5\sqrt[5]{x^4}+4\sqrt[4]{x^3}+3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+C$. **11.** $\frac{2^x}{\ln 2}+C$. **12.** $\frac{35^x}{\ln 35}+C$. **13.** а) $-5\cos x$; б) $3\sin x$. **14.** а) $\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+$

$+2\arcsin\frac{x}{2}+C$; б) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+C$. **15.** $-2\cos x+$ $+4\sin x+C$. **16.** Решение. Находим производную функции $\frac{1}{a}F(ax+b)$. Имеем: $\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]'=\frac{1}{a}\cdot aF'(ax+b)=f(ax+$ $+b)$. **32.** $\frac{x^6}{6}-10$. **33.** $\frac{x^3}{3}+2x^2-6x+3\frac{2}{3}$. **34.** $x^3+x$. **35.** $\frac{x^5}{5}-$ $-3x$. **36.** $y=-2x^2+C$, где $C$ — произвольная постоянная. Условию задачи удовлетворяет бесконечное множество парабол, получаемых из параболы $y=-2x^2$ параллельным сдвигом на $C$ единиц вверх при $C>0$ и вниз при $C<0$. **37.** $y=\frac{1}{5}\sin 5x+C$. **38.** $y=x^2+x-4$.

§ 2.

**39.** 8, 39, $\frac{1}{6}$. **40.** $101\frac{1}{4}$, 60, 136. **41.** 10, 62, 4. **42.** $46\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{2}$. **43.** 6, 20, $6\frac{3}{4}$. **44.** $\frac{4}{5}$, 30, $6\frac{2}{3}$. **45.** $-8$, $-10$, $-22\frac{1}{5}$. **46.** $-28$, $-7\frac{1}{3}$, $-7\frac{1}{3}$. **47.** $-14\frac{2}{3}$, $-20$, $11\frac{1}{3}$. **48.** $-10$. **49.** 5, 6. **50.** $-3$. **51.** 3. **52.** $2\frac{2}{3}$. **53.** $-1\frac{1}{3}$. **54.** 8. **55.** $18\frac{1}{3}+28\frac{2}{3}=47$. **56.** $-13{,}5+28{,}2=14{,}7$. **57.** $-4\frac{1}{2}+2=$ $=-2\frac{1}{2}$. **58.** $5\frac{1}{3}+12=17\frac{1}{3}$. **59.** $\frac{16}{3}$. **60.** $3e(e-1)$. **61.** $\frac{3\pi}{16}$. **62.** $\frac{3\pi}{8}$. **63.** 39. Число выражает площадь криволинейной трапеции. **64.** 56. **65.** 10. **66.** 0,8. **67.** $2\frac{1}{2}$. Указание. $\int_0^2|x^3-x|\,dx=\int_0^1(x-$ $-x^3)\,dx+\int_1^2(x^3-x)\,dx$. **68.** $10\frac{2}{3}$.

§ 3.

**70.** 15. **71.** $9\frac{1}{3}$. **72.** 8. **73.** 25. **74.** а) $8\frac{2}{3}$; б) $\frac{b^3-a^3}{3}$. **75.** а) 4; б) 20. **76.** $5\ln 3$. **77.** $\frac{4}{\ln 3}$. **78.** 2. **79.** $\sqrt{2}$. **80.** $\pi$. **81.** $\frac{\pi}{2}$. **82.** $\frac{3\pi}{2}$. **83.** $14\frac{1}{3}$ — решать по формуле (4). **84.** 36. **85.** а) $4\frac{1}{2}$; б) $90\frac{5}{6}$.

**86.** а) Нули: $x_1=-3$, $x_2=1$, $x_3=2$;
$S_1=32$, $S_2=\frac{3}{4}$, $S_3=32\frac{3}{4}$;

б) нули: $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$;
$S_1=2\frac{2}{3}$, $S_2=\frac{5}{12}$, $S_3=3\frac{1}{2}$;

в) нули: $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$;

$$S_1 = \frac{7}{12}, \quad S_2 = 11\frac{1}{4}, \quad S_3 = 11\frac{5}{6}.$$

**87.** а) Нули: $-3, -2, 2, 3$; $S = 95\frac{11}{15}$;

б) нули: $-3, 0, 1, 4$; $S = 129\frac{5}{6}$.

**88.** а) $10\frac{2}{3}$; б) 28. **89.** $60\frac{3}{4}$. **90.** $\frac{1}{4}$. **91.** $2\frac{2}{3}$. **92.** $1\frac{1}{3}$. **93.** $4\frac{1}{2}$.

**94.** $10\frac{2}{3}$. **95.** Точки пересечения $A_1(-1, 5)$, $A_2(0, 10)$, $A_3(3, 1)$;

$$S_1 = \frac{7}{12}, \; S_2 = 11\frac{1}{4}, \; S = S_1 + S_2 = 11\frac{5}{6}.$$

**96.** а) $1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$; б) $\sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. **97.** $2(\pi-2)$. **98.** $\frac{2}{3}$. **100.** Пусть $S_1$ — площадь криволинейной трапеции и $S$ — площадь прямоугольника. $S = xy = xx^n = x^{n+1}$. Имеем: $S_1 = \int\limits_0^x x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $S_2 = S - S_1$, $S_2 : S_1 = n : 1$.

## § 4.

**101.** $\frac{1}{3} S H$. Использовать формулу (5). **102.** $\frac{H}{3}(Q + q + \sqrt{Qq})$.

**103.** $\frac{H}{3}\pi R^2$. Формулы (5) и (6). **104.** $34\frac{2}{15}\pi$. **105.** а) $\frac{3}{10}\pi$; б) $\frac{8\pi}{15}$. **106.** а) $35\frac{2}{15}\pi$; б) $1632\frac{1}{2}\pi$.

**107.** а) $9\pi$; б) $8\pi$. **108.** $4\pi$. **109.** $\frac{64}{15}\pi$. **110.** $2\pi$. **111.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. При $a = b$ получим объем шара радиуса $a$. **112.** $\frac{3}{8}\pi^2$. **113.** $\frac{\pi^2}{2}$.

**114.** $\frac{\pi}{4}(e^2 + 4 - e^{-2})$.

## § 5.

**115.** $88\frac{1}{3}$ *м*. Использовать формулу (7). **116.** 42 *м*. **117.** $a = 20$.
**118.** 19 *м*. **119.** 832 *м*. **120.** 5 *сек*. **121.** 312 *кг*. Использовать формулу (8).
**122.** 1,227 *кг*. **123.** 392 *к*. Использовать формулу (9). **124.** 20 748 *к*.
**125.** 12,5 *дж*. **126.** 0,288 *дж*. **127.** 12,5 *дж*. **128.** 11,25 *дж*.
**129.** 900 *дж*. **130.** $706\,104\pi$ *дж*. **131.** $3922{,}8\pi R^2H^2$ *дж*.
**132.** 706 104 *дж*. **133.** $39\,228\pi$ *дж*. **134.** $\approx 863{,}02$ *н*. **135.** $9807 \cdot \frac{H^2}{6}(a + 2b)$ ($a$ и $b$ выражены в метрах). Подставив данные, найдем $P = 52\,304\,10^4$ *н*. **136.** $3269\frac{ah^2}{2}$ *н*. **137.** $3269ah^2$ *н*. **138.** $\approx 309\,\delta$ *н*.
**139.** $\approx 4{,}403\pi^2\delta$ *н*. **140.** $\approx 0{,}9585\pi$ *н*.

Глава V

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

**Определение 1.** *Дифференциальным уравнением называется уравнение, в котором искомой является функция и которое содержит производные этой функции.*

Если дифференциальное уравнение содержит первую производную искомой функции и не содержит ее других производных, то оно называется *дифференциальным уравнением первого порядка.* Если дифференциальное уравнение содержит вторую производную искомой функции и не содержит ее производных более высокого порядка (начиная с третьей), то оно называется *дифференциальным уравнением второго порядка.*

Например, уравнение $y' = \cos x$ является дифференциальным уравнением первого порядка, а уравнение $y'' - 9x^2 = 0$ или $y'' = y$ — дифференциальным уравнением второго порядка относительно функции $y(x)$.

**Определение 2.** *Решением дифференциального уравнения называется функция, которая, будучи подставленной в это уравнение вместо искомой, обратит его в тождество.*

Например, каждая из функций $y = \sin x + C$ при любой постоянной $C$ является решением дифференциального уравнения $y' = \cos x$. В этом можно убедиться, подставив в это уравнение производную:

$$(\sin x + C)' = \cos x.$$

В результате получим тождество $\cos x \equiv \cos x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ Этот пример показывает, что дифференциальное уравнение может иметь множество решений. Чтобы выделить из этого множества решений какое-либо определенное решение, задают дополнительные условия, которые называют *начальными условиями.*

*Для дифференциального уравнения первого порядка в качестве начальных условий задают значения искомой функции в некоторой точке $x_0$:*

$$y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

*Для дифференциального уравнения второго порядка начальными условиями являются значения искомой функции и ее производной в некоторой точке $x_0$:*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (2)$$

**Определение 3.** *Решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, называется частным решением этого уравнения.*

Доказано, что при определенных условиях дифференциальное уравнение имеет единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. В частности, из этой общей теоремы следует, что дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция в окрестности точки $x_0$ при начальных условиях $(x_0, y_0)$, имеет единственное частное решение $y = \varphi(x)$, $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ $(h > 0)$, которое удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = y_0$. Единственное частное решение имеют также дифференциальные уравнения первого порядка $y' = ky$ и $y' = k\frac{y}{x}$ при начальных условиях (1) и дифференциальные уравнения второго порядка $y'' = f(x)$, ($f(x)$ — непрерывная функция в окрестности точки $x_0$) и уравнение $y'' + a^2y = 0$ при начальных условиях (2). Геометрически решения дифференциального уравнения изображаются кривыми. Для уравнения первого порядка начальные условия изображаются точкой на плоскости, а частное решение — кривой, проходящей через эту точку. Для уравнения второго порядка начальные условия изображаются точкой на плоскости, в которой задано направление некоторой прямой, а частное решение — кривой, проходящей через эту точку и имеющей заданную прямую своей касательной в этой точке.

Методы отыскания решений некоторых дифференциальных уравнений указаны в этой главе. Например, показано (задачи 5, 6), что множество решений дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x)$ совпадает с множеством первообразных функции $f(x)$.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $y' = 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$.

Решение. Здесь $f(x) = 2x$, поэтому множеством решений этого уравнения является множество первообразных функции $2x$, т. е. множество функций $y = x^2 + C$, где $C$ — постоянная. Чтобы найти требуемое частное решение, надо определить $C$ из заданных начальных условий.

Имеем: $y(0) = C = 1$ и, следовательно, $y = x^2 + 1$.

Проверка. Подставим $y = x^2 + 1$ в заданное уравнение, имеем $y' = 2x$, поэтому $2x \equiv 2x$. Получили тождество. Кроме того, $y(0) = 1$.

Источником появления дифференциальных уравнений являются различные задачи геометрии и явления физики и техники. В связи с этим дифференциальные уравнения, которые описывают определенные процессы, получили специальные названия. Например, уравнение первого порядка

$$y' = ky, \quad k \neq 0 \text{ — постоянная.} \qquad (3)$$

показывает, что функция $y(x)$ описывает такой процесс, в котором скорость с течением времени изменяется пропорционально значениям этой функции. Такие явления наблюдаются при органическом росте ($k > 0$), при радиоактивном распаде ($k < 0$). Поэтому *уравнение* (3) *принято называть уравнением показательного роста.* Множество решений уравнения (3) определяется формулой

$$y = Ce^{kx}, \quad C \text{ — произвольная постоянная} \tag{4}$$

(см. задачу 25).

Уравнение второго порядка

$$y'' + a^2y = 0, \quad a \neq 0 \text{ — постоянная}, \tag{5}$$

показывает, что функция $y(x)$ описывает такой процесс в котором значение ускорения с течением времени изменяется пропорционально значениям этой функции и направлено в сторону, противоположную движению. Такие явления можно наблюдать при свободных колебаниях маятника, если пренебрегать при этом сопротивлением среды, в которой маятник совершает колебания. Поэтому *уравнение* (5) *принято называть уравнением гармонических колебаний.*

Множество решений уравнения гармонических колебаний (5) определяется формулой

$$y = A\sin(ax + \varphi), \tag{6}$$

где $A$ и $\varphi$ — произвольные постоянные (задачи 77, 78). $A$ называется *амплитудой колебания; $a$ — частотой, $\varphi$ — начальной фазой колебаний. Период* таких колебаний *определяется по формуле:*

$$T = \frac{2\pi}{a}.$$

## § 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ВИДА $y' = f(x)$

**1.** Какие из написанных ниже уравнений являются дифференциальными уравнениями первого порядка:

а) $y' = \sin x$; б) $y' + 2y = x$; в) $y + \sin x = x^2 + 1$;

г) $y'' + y = \operatorname{tg} x$; д) $y - e^x = \operatorname{tg} x$; е) $y'' + y' = 0$?

**2.** Убедиться, что функция $y = x^2 + 5x$ является решением дифференциального уравнения $y' - 2x = 5$.

**3.** Заданы дифференциальные уравнения: а) $y' - \cos x = 0$; б) $y' + y = x^3 + 3x^2$ и в) $y' - 2 = 0$. Какие из функций: 1) $y = 2x$; 2) $y = 2x + 3$; 3) $y = x^3$; 4) $y = 2x + C$, где $C$ — константа; 5) $y = \sin x$; 6) $y = \sin x + C$, $C$ — константа, являются решениями уравнения а), уравнения б), уравнения в)?

**4.** Убедиться, что если функция $y = \varphi(x)$ является решением дифференциального уравнения $y' = f(x)$, то и любая функция вида $\varphi(x) + C$, где $C$ — произвольная постоянная, является решением этого уравнения.

**5.** Убедиться, что любая первообразная функции $f(x)$ является решением дифференциального уравнения $y' = f(x)$.

**6.** Справедлива ли теорема: множество всех решений дифференциального уравнения $y' = f(x)$ совпадает с множеством всех первообразных функции $f(x)$?

В задачах 7—16 найти все решения дифференциальных уравнений.

**7.** $y' = x$. **8.** $y' = x + 3$. **9.** $y' = x^2 - 1$. **10.** $y' - \cos x = x$.

**11.** $y' - e^x = 0$. **12.** $y' = e^x + \sin x$. **13.** $y'^2 - 4 = 0$.

**14.** $y'^2 = (x - 1)^2$. **15.** $y'^2 - 3y' + 2 = 0$. **16.** $y'^2 - 9 \cdot 2^{2x} = 0$.

**17.** Убедиться, что частным решением дифференциального уравнения $y' = x$ при начальном условии $y(0) = 0$ является функция $y = \frac{x^2}{2}$, а частным решением этого уравнения при начальном условии $y(1) = 2$ является функция $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$.

**18.** Найти значение произвольной постоянной $C$ для решения уравнения $y' = \sin 2x$, если заданы начальные условия: а) $y(0) = 0$; б) $y(0) = -1$; в) $y(0) = 5$; г) $y(-3) = 4$. Записать соответствующие частные решения.

**19.** Убедиться, что если два частных решения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ уравнения $y' = f(x)$ удовлетворяют одним и тем же начальным условиям $(x_0, y_0)$, то эти решения совпадают в окрестности точки $x_0$.

**20.** Найти частные решения дифференциального уравнения $y' = 3x^2$, которые удовлетворяют заданным начальным условиям:

а) $y(0) = 0$; б) $y(0) = 1$;

в) $y(2) = 1$; г) $y(-1) = \frac{1}{3}$.

**21.** Найти кривые, для которых угловой коэффициент касательной в каждой точке любой из этих кривых равен абсциссе точки касания.

22. Найти кривые, для которых угловой коэффициент касательной в каждой точке равен $2x-1$. Выделить кривую, проходящую через точку $A$ (1, 1). Изобразить эту кривую.

## § 2. УРАВНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО РОСТА $y' = ky$ ($k \neq 0$)

23. Какие из написанных ниже уравнений являются уравнениями показательного роста:

а) $y' = 3y$;  б) $y' = y^2$;  в) $y' = xy$;

г) $y' = -5y$;  д) $y' = \frac{y}{2}$;  е) $y' = x + y$?

24. Убедиться, что любая функция вида $y = Ce^{kx}$, где $C$ — произвольная постоянная, является решением уравнения показательного роста.

25. Зная, что производная функция $\ln \varphi(x)$ равна $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, убедиться, что любое решение уравнения показательного роста $y' = ky$ содержится во множестве функций вида $y = Ce^{kx}$, где $C$ — произвольная постоянная.

26. Справедлива ли теорема: уравнение $y' = f(y)$ является уравнением показательного роста тогда и только тогда, когда любое его решение имеет вид: $y = Ce^{kx}$, где $C$ — произвольная постоянная.

27. Убедиться, что функция $y = y_0 e^{k(x-x_0)}$ является частным решением уравнения показательного роста при начальных условиях $y(x_0) = y_0$.

28. Убедиться, что если решениями одного и того же уравнения показательного роста $y' = ky$ являются функции $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, то сумма и разность этих функций также является решением этого уравнения.

29. Убедиться, что если два частных решения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ уравнения показательного роста удовлетворяют одним и тем же начальным условиям $(x_0, y_0)$, то эти частные решения совпадают в окрестности точки $x_0$.

В задачах 30—35 найти множество решений следующих уравнений показательного роста.

30. $y' = y$. 31. $y' = -y$. 32. $y' = 2y$. 33. $y' = \frac{1}{2}y$.

34. $y' = -3y$. 35. $y' = 0{,}2y$.

В задачах 36—38 найти частные решения указанных уравнений при заданных начальных условиях. Построить графики найденных частных решений.

**36.** $y' = 2y, \quad y(0) = 3.$ **37.** $y' = -2y, \quad y(1) = 5.$

**38.** $y' = y, \quad y(x_1) = y_1$

**39.** Найти уравнения кривых, для которых угловой коэффициент касательной в каждой точке любой кривой равен ординате точки касания.

**40.** Найти кривую, проходящую через точку $A(0, 1)$, для которой угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен удвоенной ординате точки касания. Изобразить эту кривую.

**41.** За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества, если известно, что количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально наличному количеству этого вещества в данный момент?

**42.** Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной в 3 *м* поглощает половину первоначального количества света. Какая часть первоначального количества света дойдет до глубины 60 *м*?

## § 3. УРАВНЕНИЕ ВИДА $y' = k\frac{y}{x}$

**43.** Убедиться, что решением уравнения $y' = k\frac{y}{x}$, $x \neq 0$, $k$ — постоянная, $k \neq 0$, являются функции вида $y = Cx^k$, и только они ($C$ — постоянная).

**44.** Найти множество решений следующих уравнений:

а) $y' = 3\frac{y}{x}$; б) $y' = \frac{y}{5x}$.

**45.** Для того чтобы кривая $y = f(x)$ была параболой $y = Cx^2$, $C$ — постоянная, необходимо и достаточно, чтобы касательная в любой ее точке отсекала на оси $Ox$ отрезок, длина которого равна половине абсциссы точки касания. Доказать.

**46.** Для того чтобы кривая $y = f(x)$ была параболой $y = Cx^2$, $C$ — постоянная, необходимо и достаточно, чтобы эта кривая делила площадь прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям, в отношении $1:2$ (считая от оси $Ox$). Доказать.

**47.** Для того чтобы кривая $y=f(x)$ была параболой $y=Cx^2$, $C$ — постоянная, необходимо и достаточно, чтобы отрезок касательной между точкой касания и осью $Oy$ делился пополам в точке пересечения с осью $Ox$. Доказать.

**48.** Для того чтобы кривая $y=f(x)$ была гиперболой $xy=C$, $C$ — постоянная, необходимо и достаточно, чтобы касательная в любой ее точке отсекала на оси $Ox$ отрезок, длина которого равна удвоенной абсциссе точки касания. Доказать.

**49.** Для того чтобы кривая $y=f(x)$ была гиперболой $xy=C$, $C$ — постоянная, необходимо и достаточно, чтобы отрезок касательной в любой ее точке, заключенный между координатными осями, делился пополам в точке касания.

**50.** Для того чтобы кривая $y=f(x)$ была гиперболой $xy=C$, $C$ — постоянная, необходимо, чтобы площадь прямоугольника, построенного на отрезках, отсекаемых касательной в любой точке кривой на осях координат, была в четыре раза больше площади прямоугольника, построенного на отрезках перпендикуляров, опущенных из той же точки кривой на оси координат. Доказать.

**51.** Для того чтобы кривая $y=f(x)$ была гиперболой $xy=C$ или прямой $y+x=C$, необходимо, чтобы сумма координат точек пересечения касательной и кривой с осями координат была в два раза больше суммы координат точек касания. Доказать.

## § 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВИДА $y''=f(x)$

**52.** Какие из написанных ниже уравнений являются уравнениями второго порядка:

а) $y''-2y'+5y=8$; б) $y'''-y''=0$; в) $y''+y=0$;
г) $y^2-y'+\sin x=0$; д) $y''-xy'=0$; е) $y''=\sin^2 x$?

В задачах 53—56 убедиться, что заданные функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

**53.** $y=2x+3$, $y''=0$. **54.** $y=x^2+2x+1$, $y''=2$.

**55.** $y=x^3+ax+b$, $y''=6x$ ($a$ и $b$ — постоянные).

56. $y = \sin x + C_1x + C_2$, $y'' = -\sin x$, $C_1$ и $C_2$ — постоянные.

57. Найти решения дифференциального уравнения $y'' = x$.

58. Убедиться, что решением дифференциального уравнения $y'' = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, является первообразная от первообразной функции $f(x)$.

В задачах 59—64 найти решения заданных дифференциальных уравнений.

59. $y'' = x^2$. 60. $y'' = 1 + 2x$. 61. $y'' = e^{3x} + 1$. 62. $y'' = \sin x + x^2$. 63. $y'' = \cos 2x$. 64. $y'' = \cos x - \sin 3x + \frac{1}{2}x^2$.

65. Найти частное решение уравнения $y'' = x$ при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

В задачах 66—69 найти соответствующие частные решения заданных дифференциальных уравнений.

66. $y'' = x^2 - 3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

67. $y'' = e^{2x}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

68. $y'' = \sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

69. $y'' = \cos x - \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

## § 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ $y'' + a^2y = 0$

70. Какие из написанных ниже уравнений являются уравнениями гармонических колебаний:

а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' - 4y = 0$;

в) $y'' + 5y = 0$; г) $y'' - a^2y = 0$;

д) $y'' + 4 = 0$; е) $y'' + x^2y = 0$?

В задачах 71—76 убедиться, что заданные функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

71. $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$, $y'' + y = 0$.

72. $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$, $y'' - 5y' + 6y = 0$.

**73.** $y_1 = e^x$, $y_2 = C$, $C$ — постоянная, $y'' - y' = 0$.

**74.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x^2$, $C_1$ и $C_2$ — постоянные, $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$.

**75.** $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2$, $C_1$ и $C_2$ — постоянные, $y'' + y = x^2 + 2$.

**76.** $y_1 = 6\sin 2x$, $y_2 = 8\cos 2x$, $y'' + 4y = 0$.

**77.** Убедиться, что функции $y_1 = \sin ax$ и $y_2 = \cos ax$ являются решениями дифференциального уравнения гармонических колебаний $y'' + a^2y = 0$.

**78.** Убедиться, что каждая из функций вида $y = A\sin(ax + \varphi)$, где $A$ и $\varphi$ — произвольные постоянные, является решением дифференциального уравнения гармонических колебаний

$$y'' + a^2y = 0.$$

В задачах 79—83 найти множество решений дифференциальных уравнений гармонических колебаний.

**79.** $y'' + 4y = 0$. **80.** $y'' + 9y = 0$. **81.** $y'' + 3y = 0$.

**82.** $y'' + 16y = 0$. **83.** $y'' + 25y = 0$.

**84.** Найти решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$, если заданы начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

В задачах 85—87 найти частные решения соответствующих дифференциальных уравнений гармонических колебаний при заданных начальных условиях.

**85.** $y'' + 9y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.

**86.** $y'' + 16y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

**87.** $y'' + 25y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

**88.** Убедиться, что если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями дифференциального уравнения гармонических колебаний, то их сумма и разность также являются решениями этого уравнения.

**89.** Убедиться, что если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями дифференциального уравнения гармонических колебаний, то и сумма вида $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, где $C_1$ и $C_2$ — постоянные, является решением этого уравнения.

В задачах 90 — 92 найти соответствующие частные решения. Построить их графики и вычислить амплитуду колебания, начальную фазу, частоту и период.

**90.** $y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$

**91.** $y'' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$

**92.** $y'' + 9y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 2.$

## ОТВЕТЫ

### § 1.

**1.** а); б). **3.** Решение уравнения а) — функция 5); решение уравнения б) — функция 3); решение уравнения в) — функции 1), 2), 4). **6.** Да См. задачу 5. **7.** $y = \frac{x^2}{2} + C$. Здесь и ниже $C$ — произвольная постоянная. **8.** $y = \frac{x^2}{2} + 3x + C$. **9.** $y = \frac{x^3}{3} - x + C$. **10.** $y = \sin x + \frac{x^2}{2} + C$. **11.** $y = e^x + C$. **12.** $y = e^x - \cos x + C$. **13.** Решение. $y'^2 - 4 = (y' - 2)(y' + 2)$. Следовательно, надо решить два уравнения $y' - 2 = 0$ и $y' + 2 = 0$. Для первого уравнения $y = 2x + C$. Для второго — $y = -2x + C$. Объединение этих решений и представляет множество всех решений заданного уравнения. **14.** Объединение множеств решений: $y = \frac{x^2}{2} - x + C$ и $y = \frac{x^2}{2} + x + C$ **15.** Указание. Представить уравнение в виде $(y' - 2)(y' - 2) = 0$. Ответ. Объединение множеств решений $y = 2x + C$ и $y = x + C$. **16.** Указание. Представить уравнение в виде $(y' - 3 \cdot 2^x)(y' + 3 \cdot 2^x) = 0$. Ответ. Объединение множеств решений $y = \frac{3 \cdot 2^x}{\ln 2} + C$ и $y = -\frac{3 \cdot 2^x}{\ln 2} + C$. **18.** Из решения $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$ находим значения константы $C$, используя начальные условия: а) $0 = -\frac{1}{2}\cos 2 \times 0 + C$, $C = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$; б) $C = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}$; в) $C = 5\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + 5\frac{1}{2}$; г) $C = 4 + \frac{1}{2}\cos 6$, $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + 4 + \frac{1}{2}\cos 6$. **19.** Решение. Пусть $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0$. Имеем: $\varphi_1' = f(x)$, $\varphi_2' = f(x)$. Вычитая почленно, получим: $(\varphi_1 - \varphi_2)' = 0$ Известно, что если производная функции равна нулю тождественно, то функция является постоянной. Поэтому $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = C$, но $\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0) = 0$, следовательно,

$C=0$ и $\varphi_1(x)\equiv\varphi_2(x)$. **20.** а) $y=x^3$; б) $y=x^3+1$; в) $y=x^3-7$; г) $y=x^3+1\frac{1}{3}$. **21.** $y=\frac{x^2}{2}+C$. Указание. По условию $y'=x$. **22.** $y=x^2-x+C$, $y=x^2-x+1$.

## § 2.

**23.** а), г), д). **25.** Решение. Пусть решение уравнения $y=\varphi(x)$, тогда после подстановки имеем: $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=k$ или $[\ln\varphi(x)]'=k$. Откуда находим: $\ln\varphi(x)=kx+C$, или $\varphi(x)=e^{kx+C_1}=e^{kx}\cdot e^{C_1}$, т. е. окончательно $\varphi(x)=Ce^{kx}$. (Здесь $C_1$ — постоянная; $e^{C_1}=C$ тоже постоянная.) **26.** Да. См. задачи 24 и 25. **28.** Решение. Имеем, $\varphi_1'(x)=k\varphi_1(x)$; $\varphi_2'(x)=k\varphi_2(x)$. Складывая (или вычитая) почленно, получим: $[\varphi_1(x)\pm\varphi_2(x)]'=k[\varphi_1(x)\pm\varphi_2(x)]$, т. е. функции $y=\varphi_1\pm\varphi_2$ также являются решениями исходного уравнения. **29.** Решение. Пусть $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)=y_0$. Кроме того, функция $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ является решением заданного уравнения и поэтому имеет вид: $\varphi_2-\varphi_1=Ce^{kx}$ (задача 24). Чтобы найти значение постоянной $C$, используем начальные условия: $\varphi_2(x_0)-\varphi_1(x_0)=Ce^{kx_0}$, т. е. $y_0-y_0=Ce^{kx_0}\equiv 0$, откуда $C=0$, и, следовательно, $\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\equiv 0$, т. е. $\varphi_2(x)\equiv\varphi_1(x)$.

**30.** $y=Ce^x$. **31.** $y=Ce^{-x}$. **32.** $y=Ce^{2x}$. **33.** $y=Ce^{\frac{1}{2}x}$. **34.** $y=Ce^{-3x}$. **35.** $y=Ce^{0,2x}$. **36.** $y=3e^{2x}$. **37.** $y=5e^{2(1-x)}$. **38.** $y=y_1e^{x-x_1}$. **39.** $y=Ce^x$. **40.** $y=e^{2x}$. **41.** Решение. Пусть $R(t)$ — количество радиоактивного вещества в момент времени $t$. По условию скорость распада радия $R'(t)=kR(t)$, откуда находим: $R(t)=Ce^{kt}$. Далее, используя заданные условия, находим $C$ и $k$. Пусть $R(0)=R_0$, тогда $C=R_0$. Далее, $\frac{1}{2}R_0=R_0e^{k\cdot 30}$, откуда $k=-\frac{1}{30}\ln 2$. Следовательно, решение дифференциального уравнения или закон распада радия определяется формулой $R(t)=R_0e^{\left(-\frac{1}{30}\ln 2\right)t}$. Из этой формулы, полагая $R(t)=\frac{1}{100}R_0$, находим: $t:t=\frac{60\ln 10}{\ln 2}$ (дней).

**42.** Решение. Пусть $Q(h)$ — количество падающего света. По условию скорость поглощения света $Q'(h)=-kQ(h)$. Решением этого уравнения является функция $Q(h)=Ce^{-kh}$. Используя начальные условия, находим $C$. Пусть $Q(0)=Q_0$, тогда $C=Q_0$. Далее, $\frac{1}{2}Q_0=Q_0e^{-k\cdot 3}$, откуда $k=+\frac{1}{3}\ln 2$ Следовательно, закон распространения света $Q(h)=Q_0e^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)h}$. Из этой формулы при $h=60$ *м* имеем: $Q(60)=Q_0e^{\lg 2-20}$, т. е. $Q(60)=2^{-20}Q_0$.

## § 3.

**43.** Решение. Пусть $y = Cx^k$, $y' = Ckx^{k-1}$. Подставив эти значения в уравнение, получим тождество $Ckx^{k-1} = k\dfrac{Cx^k}{x}$; $Ckx^{k-1} \equiv \equiv Ckx^{k-1}$. Пусть теперь $y = \varphi(x)$ — решение уравнения $y' = k\dfrac{y}{x}$. Тогда имеет место тождество $\varphi'(x) = k\dfrac{\varphi(x)}{x}$, или $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = k \cdot \dfrac{1}{x}$, но $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = [\ln\varphi(x)]'$ и $\dfrac{1}{x} = (\ln x)'$. Поэтому получим: $\ln\varphi(x) = = k\ln x + \ln C$, откуда находим: $\varphi(x) = Cx^k$. **44.** а) $y = Cx^3$; б) $y = C\sqrt[5]{x}$. **45.** Решение. Доказательство необходимости. Дана парабола $y = Cx^2$. Уравнение касательной в любой ее точке $A(x, y)$ имеет вид: $Y - y = y'(X - x)$ ($X$ и $Y$ — координаты касательной). Пусть $M(X, 0)$ — точка пересечения касательной с осью $Ox$. Найдем значение абсциссы $X$ из уравнения касательной Имеем: $-Cx^2 = =2Cx(X - x)$, откуда $X = \dfrac{x}{2}$.

Доказательство достаточности. Обозначим через $y = f(x)$ уравнение искомой кривой. По условию при $Y = 0$ $X = \dfrac{x}{2}$. Подставив эти значения $X$ и $Y$ в уравнение касательной, получим дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{2y}{x}$. Решением этого дифференциального уравнения является функция $y = Cx^2$.

**46.** Указание. Использовать то, что площадь $S(x)$ криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, является первообразной функции $y = f(x)$, т. е. $S'(x) = y$.

## § 4.

**52.** а), в), д), е). **57.** $y = \dfrac{x^3}{6} + C_1x + C_2$. Здесь и ниже $C_1$ и $C_2$ — постоянные. **59.** $y = \dfrac{x^4}{12} + C_1x + C_2$. **60.** $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + C_1x + + C_2$. **61.** $y = \dfrac{1}{9}e^{3x} + \dfrac{x^2}{2} + C_1x + C_2$. **62.** $y = -\sin x + \dfrac{x^4}{12} + C_1x + + C_2$. **63.** $y = -\dfrac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2$. **64.** $y = -\cos x + \dfrac{1}{9}\sin 3x + + \dfrac{x^4}{24} + C_1x + C_2$. **65.** $y = \dfrac{x^3}{6} + 1$. **66.** $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 1$. **67.** $y = \dfrac{1}{4}e^{2x} + \left(1 - \dfrac{e^2}{2}\right)x + \dfrac{e^2}{4} - 1$. **68.** $y = -\dfrac{1}{4}\sin 2x + + \dfrac{1}{2}x + 1$. **69.** $y = -\cos x + \sin x + (1 - \sqrt{2})x + \left(1 - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}\sqrt{2}\right)$.

## § 5.

**70.** а), в), д). **79.** $y = A\sin(2x+\varphi)$. Здесь и в задачах 80—83 $A$ и $\varphi$ — постоянные. **80.** $y = A\sin(3x+\varphi)$. **81.** $y = A\sin(\sqrt{3}x+\varphi)$ **82.** $y = A\sin(4x+\varphi)$. **83.** $y = A\sin(5x+\varphi)$. **84.** $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ **85.** $y = \frac{\sqrt{10}}{3}\sin(3x+\operatorname{arctg} 3)$. **86.** $y = \frac{1}{4}\sin 4x$ **87.** $y = \frac{\sqrt{29}}{5}\sin\left(5x+\operatorname{arctg}\frac{5}{2}-5\right)$. **90.** $y = \sin x$, $A = 1$, $\varphi = 0$, $\omega = 1$, $T = 2\pi$. **91.** $y = \sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$, $A = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\omega = 3$, $T = \frac{2\pi}{3}$. **92.** $y = \frac{2\sqrt{10}}{3}\sin(3x+\operatorname{arctg} 3)$, $A = \frac{2\sqrt{10}}{3}$, $\varphi = \operatorname{arctg} 3$, $\omega = 3$, $T = \frac{2\pi}{3}$.

# Глава VI НАЧАЛА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ЭЛЕМЕНТАМИ КОМБИНАТОРИКИ

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

В результате проведения некоторого *испытания* (подбрасывание монеты, стрельба по цели...) мы получаем его *исходы.*

Основными понятиями теории вероятностей являются понятия *элементарного события* и *схемы испытания* (*пространство элементарных событий* рассматриваемого испытания).

Схема испытания представляет собой совокупность всех элементарных событий испытания.

Элементарные события часто называют *точками* схемы испытания.

**Определение 1.** *Любая совокупность точек схемы испытания называется событием.* Случайные события обозначаются буквами $A$, $B$, $C$.

**Определение 2.** *Совокупность всех точек схемы испытания называется достоверным событием.*

**Определение 3.** *Событие называется невозможным, если оно не содержит ни одной точки схемы испытания.*

**Определение 4.** *Несколько событий называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться одновременно при одном исходе испытания.*

**Определение 5.** *Событие $\bar{A}$ (не $A$) называется противоположным событию $A$, если оно состоит из всех точек схемы испытания, не принадлежащих событию $A$.*

## 1. ФОРМУЛА ДЛЯ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ПОДСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где $P(A)$ есть вероятность события $A$, $n$ — число точек схемы испытания и $m$ — число точек схемы испытания, содержащихся в событии $A$.

**Правило произведения выборки.** Если объект $A$ может быть выбран $m$ способами и после каждого из этих выборов объект $B$ в свою очередь может быть выбран $n$ способами, то выбор $A$ и $B$ может быть осуществлен $mn$ способами.

**Определение 6.** *$r$-перестановкой из $n$ элементов называют упорядоченную выборку $r$ элементов из данных $n$. Две $r$-перестановки считаются различными, если они* *отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или порядком расположения элементов.*

2. Формула для подсчета $r$-перестановок:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}*,$$

где $P_n^r$ означает число перестановок из $n$ элементов по $r$ в каждой.

3. Формула для подсчета перестановок из $n$ элементов:

$$P_n = n!,$$

где $P_n$ означает число перестановок из $n$ элементов по $n$ в каждой.

4. Число перестановок с заданным числом повторяющихся элементов вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!},$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

5. Число перестановок с неограниченным числом повторяющихся элементов вычисляется по формуле

$$P_n^r = n^r.$$

**Определение 7.** *$r$-сочетанием из $n$ элементов называют совокупность, образованную любыми $r$ элементами из данных $n$. Два $r$-сочетания считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.*

6. Число сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!},$$

где $C_n^r$ означает число сочетаний из $n$ элементов по $r$ в каждом.

**Определение 8.** *Событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий $A$ или $B$, называется их суммой и обозначается $A+B$.*

**Определение 9.** *Событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события $A$ и $B$, называется их произведением и обозначается $AB$.*

Теорема 1. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

---

* В учебниках часто число $P_n^r$ называется числом размещений из $n$ по $r$ и обозначается $A_n^r$.

Теорема 2. *Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности произведения этих же событий:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

**Определение 10.** *Условная вероятность события $A$ при условии, что событие $B$ произошло (обозначение $P_B(A)$), определяется формулой*

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ где } P(B) \neq 0.$$

Теорема 3. *Вероятность произведения двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:*

$$P(BA) = P(B) \cdot P_B(A).$$

**Определение 11.** *Если $P_A(B) = P(B)$, то событие $B$ независимо от события $A$.* Отсюда следует, что $P_B(A) = P(A)$ и, значит, событие $A$ также *независимо* от события $B$. Следовательно, события $A$ и $B$ являются *взаимно независимыми.*

Теорема 4. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

**7.** Вероятность появления события $A$ ровно $m$ раз при проведении $n$ повторных независимых испытаний вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $P_n(m)$ обозначает вероятность появления рассматриваемого события $m$ раз при проведении $n$ независимых испытаний.

$$p = P_1(1), \quad q = 1 - p.$$

**8.** Вероятность того, что при проведении $n$ независимых испытаний событие $A$ наступит хотя бы один раз, вычисляется по формуле

$$P_n(m \geqslant 1) = 1 - q^n.$$

**9.** Вероятность того, что при проведении $n$ независимых испытаний событие $A$ наступит не менее $k$ раз, вычисляется по формуле

$$P_n(m \geqslant k) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

**10.** В «геометрической» схеме испытания вероятности вычисляются как отношения мер по формуле

$$P(E) = \frac{m(s)}{m(S)},$$

где $P(E)$ — вероятность того, что наудачу выбранная точка из области $S$ окажется в области $s$, $m(s)$ и $m(S)$ есть меры соответствующих областей, выраженных в единицах длины, площади или объема.

## § 1. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**1.** Указать число точек следующих испытаний: 1) монета подбрасывается один раз; 2) проводится турнирный (кубковый) футбольный матч между двумя командами; 3) наудачу выбирается кость из полной игры домино; 4) производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов.

**2.** На десяти жетонах выбиты числа от 1 до 10. Наудачу извлекается один жетон. В каких из следующих ответов указаны все возможные исходы испытания:

1) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};
2) {четное; нечетное};
3) {простое; 4, 6, 8, 9, 10};
4) {четное; 1, 3, 5};
5) {не более трех; не менее четырех}.

**3.** Указать, сколько точек содержит каждое из следующих событий: 1) наудачу выбранное двузначное число кратно пяти; 2) появление на верхней грани игрального кубика не менее пяти очков; 3) наудачу извлеченная буква из полного набора букв русского алфавита — гласная; 4) наудачу выбранное слово из множества слов $M$ = {*тор, куб, квадрат, гипотенуза, событие, перпендикуляр, ромб*} содержит не менее двух гласных.

**4.** Какие из следующих пар событий являются несовместными: 1) а) попадание, б) промах при одном выстреле; 2) нарушение в работе: а) первого, б) второго мотора летящего самолета; 3) а) выигрыш, б) проигрыш шахматиста в шахматной партии; 4) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 25 включительно является: а) четным, б) кратным трем; 5) выигрыш по одному билету денежно-вещевой лотереи: а) мотоцикла, б) фотоаппарата?

**5.** Какие из следующих событий являются а) случайными, б) достоверными, в) невозможными: 1) попадание или промах в цель при одном выстреле; 2) выпадение более шести очков на верхней грани игрального кубика; 3) выход из строя в течение времени $t$ лампы радиоприемника; 4) выигрыш по одному билету автомотолотереи?

**6.** Парашютист совершает прыжок. Это испытание имеет два исхода: парашют раскрылся; парашют не раскрылся. Являются ли эти исходы равновозможными?

**7.** Привести примеры испытаний, исходы которых являются: а) равновозможными, б) неравновозможными.

**8.** Для испытания, состоящего в трехкратном подбрасывании монеты, записать все возможные исходы испытания, если: 1) нас интересует выпадение каждой монеты кверху гербом или цифрой; 2) нас интересует число выпавших гербов или цифр; 3) нас интересует, упали ли монеты одинаково (например, три герба) или различно.

**9.** Для испытания, состоящего в двукратном подбрасывании игрального кубика, записать все возможные исходы испытания, если: 1) нас интересуют пары чисел, выражающих число очков на верхней грани игрального кубика; 2) нас интересуют суммы числа очков, выпавших на верхних гранях игральных кубиков.

**10.** Производится один выстрел по мишени. Составить не менее двух различных схем этого испытания.

**11.** Схема испытания содержит: а) две точки $E_1$ и $E_2$, б) три точки $E_1$, $E_2$, $E_3$. Привести несколько примеров испытаний, которые могут быть описаны этими схемами.

**12.** Сколько различных отношений можно составить из трех данных отрезков $a$, $b$, $c$?

**13.** Сколько различных хорд определяют 5 точек, лежащих на одной окружности?

**14.** Сколько диагоналей можно провести в выпуклом $n$-угольнике?

**15.** 13 учеников обменялись рукопожатиями. Сколько произведено всего рукопожатий?

**16.** Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число $1 * * 7$?

**17.** Сколькими способами можно рассадить четырех человек в четырехместной каюте? $P_4$

**18.** Могут ли 8 человек прибыть из города $A$ в город $C$ через город $B$ различными путями, если из города $A$ в город $B$ ведут 3 дороги, а из города $B$ в город $C$ — две?

**19.** Из одной вершины треугольника проведены 4 прямые до пересечения с противоположной стороной. Сколько получилось треугольников?

**20.** Сколько получится различных параллелограммов при пересечении четырех параллельных прямых тремя другими параллельными прямыми?

**21.** Сколько различных слов, состоящих не менее чем из четырех букв, можно образовать из букв слова *ученик*?

**22.** Сколько случаев надо рассмотреть, чтобы вычислить выражение $A = |a| + |a - 1| + |b - 5|$, где $a$ и $b$ — любые действительные числа?

**23.** Сколько различных слов из трех букв каждое можно составить из букв слова: а) *куб*; б) *ромб*?

**24.** Сколько можно составить различных телефонных номеров, у которых на первых двух местах стоит цифра 3, а на третьем, четвертом, пятом и шестом — любая из цифр 0, 1, 2, ..., 9?

**25.** В магазине имеется 5 сортов конфет. Сколькими способами можно произвести покупку, содержащую 2 или 3 сорта конфет?

**26.** Сколько существует различных положений, в которых могут оказаться 6 переключателей, если каждый из них может быть включен или выключен?

**27.** Сколько можно составить трехзначных чисел из нечетных цифр, если каждую из этих цифр можно использовать только один раз?

**28.** Сколько четырехзначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9, если каждая цифра может повторяться?

**29.** Сколько трехзначных чисел, меньших 500, можно составить из нечетных цифр, если любая из цифр может повторяться?

**30.** Событие $A$ состоит в том, что наудачу извлеченная деталь является стандартной, событие $B$ — нестандартной. Что означают события $A + B$, $AB$? Являются ли события $A$ и $B$ совместными?

**31.** В каком из двух равенств $A + B = B$, $AB = B$ событие $B$ является достоверным, а в каком невозможным, если событие $A$ является случайным?

**32.** Событие $A$ означает появление шести очков на верхней грани игрального кубика. Что означает событие $\bar{A}$?

**33.** Событие $A$ означает, что обе пули при двух выстрелах попали в цель. Что означает противоположное событие $\bar{A}$?

**34.** Являются ли противоположными следующие события: а) двузначное число составлено из четных цифр; б) двузначное число составлено из нечетных цифр?

**35.** Если событие $A_1$ — выигрыш по билету одной лотереи, событие $A_2$ — выигрыш по билету другой лотереи, то что означают события:

$$E_1 = A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2,$$

$$E_2 = A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2 + A_1A_2?$$

**36.** Используя диаграммы Венна, показать справедливость тождеств:

$$\overline{A+B} = \bar{A}\cdot\bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}.$$

**37.** Известно, что события $A$ и $B$ произошли, а событие $C$ не произошло. Определить, произошли или не произошли следующие события: 1) $A + BC$; 2) $(A + B)C$; 3) $\bar{A}B + C$; 4) $ABC$.

**38.** Доказать тождество: $A\bar{B} + B = A + B$.

**39.** Используя диаграммы Венна, дать геометрическую интерпретацию событий:

$$E_1 = \bar{A}B + A, \quad E_2 = (A + B)\bar{C}.$$

**40.** Из некоторой группы учащихся 20 человек увлекаются спортом, 9 — музыкой, 6 — музыкой и спортом. Построить диаграмму Венна, определить число учащихся группы и число учащихся, увлекающихся только спортом, только музыкой.

## § 2. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**41.** Для дачи крови в поликлинику пришли 12 доноров, из которых 5 имеют первую группу крови, 3 — вторую и остальные — третью. Какова вероятность того, что первый сдавший кровь донор имеет третью группу крови?

**42.** Какова вероятность того, что число на вырванном наудачу листе нового календаря:

а) соответствует 29 числу месяца;

б) кратно пяти;

в) менее восьми,

если в году 365 дней?

**43.** Какова вероятность того, что наудачу извлеченная кость из полной игры домино имеет:

а) сумму очков, равную нулю (одному, двум, трем);

б) сумму очков более двенадцати?

**44.** При игре в лото наудачу извлекается одна фишка. На фишках написаны числа от 1 до 90. Какова вероятность того, что на вынутой фишке написано простое число?

**45.** В словаре языка А. С. Пушкина имеется 22 000 различных слов, из которых 16 000 поэт в своих произведениях употреблял только по одному разу. Какова вероятность того, что наудачу взятое слово из этого словаря употреблялось поэтом в своих произведениях более одного раза?

**46.** Найти вероятность того, что наудачу выбранный член последовательности, заданной формулой общего члена $u_n = n(n+1)+3$ (для $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$), есть число, кратное пяти.

**47.** На одинаковых карточках в троичной системе счисления записаны целые числа от 1 до 15. Наудачу вынимается одна карточка. Какова вероятность того, что записанное на ней число содержит: а) не менее двух единиц; б) хотя бы одну двойку; в) один нуль?

**48.** В классе 30 учащихся, из которых 19 увлекаются спортом, 11 — музыкой, 12 — спортом и литературой, 17 — литературой, 7 — спортом и музыкой, 5 — музыкой и литературой, 2 — спортом, музыкой и литературой. Какова вероятность того, что наудачу выбранный ученик: а) увлекается только спортом; б) увлекается только музыкой; в) имеет другие увлечения?

**49.** Какова вероятность того, что наудачу выбранный день из одного столетия обладает тем свойством, что число, номер месяца и последние две цифры года могут быть записаны при помощи одной из цифр 1, 2, ..., 9 (считать в году 365 дней)? Можно ли практически ожидать появление этого события?

**50.** В школьной библиотеке 450 читателей. Среди них 120 комсомольцев, а пионеров на 60% больше, чем комсомольцев. Какова вероятность того, что наудачу взятая библиотечная карточка принадлежит пионеру?

## § 3. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ

**51.** Какова вероятность того, что наудачу выбранное четырехзначное число составлено только из нечетных цифр?

**52.** Решить предыдущую задачу для $n$-значного числа.

**53.** Какова вероятность того, что запись наудачу выбранного двузначного числа не содержит ни одной двойки?

**54.** Два ученика независимо друг от друга одновременно записывают на листах бумаги любое число от 1 до 9 включительно. Выигрывает первый, если сумма записанных ими одновременно чисел окажется четной, в противном случае выигрывает второй. Найти вероятность выигрыша первого ученика.

**55.** Слово *интеграл* составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу извлекают четыре карточки и складывают в ряд друг за другом в порядке появления. Какова вероятность получить при этом слово *игра*?

**56.** Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых нанесены буквы *а, г, и, л, м, о, р, т*, получится слово *алгоритм*?

**57.** Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы *о, о, о, м, л, т, к*, получится слово *молоток*?

**58.** Известно, что при каждом измерении равновозможна как положительная, так и отрицательная ошибка. Какова вероятность того, что при пяти измерениях все ошибки окажутся положительными?

**59.** На отрезке $AB$ произвольно нанесены четыре точки. Какова вероятность того, что наудачу выбранный отрезок из числа всех образовавшихся одним из своих концов имеет точку $A$?

**60.** Один из учеников фиксирует в уме определенную вершину выпуклого $n$-угольника. Какова вероятность того, что диагональ, проводимая другим учеником, пройдет через эту фиксированную вершину?

**61.** Для выполнения упражнения по перетягиванию каната на уроке физкультуры 12 мальчиков должны разделиться по жребию на две группы, по 6 человек в каждой. Какова вероятность того, что два наиболее сильных ученика окажутся в одной группе?

**62.** Из полной игры домино наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность того, что будут выбраны 7 дублей, если один дубль имеет пометку и обязательно попадает в выборку?

## § 4. БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ НА НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**63.** На книжной полке случайным образом расставлены 4 книги по теории вероятностей и 3 книги по теории игр. Какова вероятность того, что книги по одному предмету окажутся рядом?

**64.** 8 человек случайным образом садятся за круглый стол. Какова вероятность того, что два лица $A$ и $B$ окажутся рядом? Вычислить вероятность этого события, если за стол садится $n$ человек.

**65.** Во время спортивной игры по команде ведущего «становись» 10 учеников в случайном порядке образовали строй в одну шеренгу. Какова вероятность того, что ученики $A$ и $B$ окажутся отделенными друг от друга тремя учениками?

**66.** В коробке находятся 4 красных и 6 зеленых карандашей. Из нее случайно выпали 3 карандаша. Какова вероятность того, что 2 из них окажутся красными?

**67.** На полке в случайном порядке поставлено двенадцатитомное издание Детской энциклопедии. Какова вероятность того, что первые три тома окажутся рядом в порядке возрастания номеров слева направо? Какова вероятность того, что наудачу выбранные три книги окажутся 1, 2 и 3-м томами?

**68.** 9 учащихся школы-интерната случайным образом расселяются в общежитии по 3 человека в трех комнатах. Какова вероятность того, что два определенных ученика не будут жить в одной комнате?

**69.** Партия состоит из десяти предметов. Наудачу извлекается несколько из них. Какова вероятность извлечь при одной выборке четное число предметов, если выборки любого числа предметов от 1 до 10 включительно равновозможны?

**70.** Жетоны занумерованы всеми делителями числа 165, включая единицу и само число. Какова вероятность того, что наудачу извлеченный жетон занумерован числом, являющимся простым делителем?

## § 5. ТЕОРЕМЫ О ВЕРОЯТНОСТИ СУММЫ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ И О ВЕРОЯТНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

**71.** Лотерейные билеты занумерованы целыми числами от 1 до 200 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятого лотерейного билета кратен 7 или 30?

**72.** На тридцати жетонах написаны числа от 11 до 40. Какова вероятность того, что наудачу взятый жетон будет занумерован числом, сумма цифр которого равна 5 или 9?

**73.** Какова вероятность того, что последняя цифра случайно выбранного телефонного номера равна 5 или 8?

**74.** Профсоюзной организацией для детей выделено 12 путевок в пионерский лагерь, 8 путевок в туристический и 5 путевок в военно-спортивный. Какова вероятность того, что три друга попадут в пионерский или туристический лагерь, если их родители независимо друг от друга приобрели по одной путевке?

**75.** На доске для игры в стоклеточные шашки случайным образом поставлены 3 шашки. Какова вероятность того, что эти шашки окажутся в клетках, расположенных на одной из диагоналей шашечной доски?

**76.** Какова вероятность того, что наудачу взятая кость из полной игры домино содержит число очков не менее четырех и не более шести?

**77.** Группа, состоящая из 6 девушек и 4 юношей, избирает комиссию в составе четырех человек. Какова вероятность того, что в составе комиссии окажется больше юношей, чем девушек?

**78.** Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель по одному разу. Вероятность попадания в цель первого стрелка 0,6, второго — 0,7. Какова вероятность того, что: а) оба стрелка попадут в цель; б) первый стрелок попадет, а второй промахнется?

**79.** Найти вероятность того, что при пятикратном подбрасывании монеты герб выпадет пять раз.

**80.** Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд пяти красных и четырех зеленых квадратных клеток плитки одного цвета окажутся лежащими на краях ряда?

**81.** Производится 3 независимых выстрела по цели. Если вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна $p$, то каковы вероятности всех возможных исходов?

**82.** Вероятность совместного выигрыша по трем лотерейным билетам равна 0,001. Какова вероятность выигрыша по одному билету?

## § 6. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

**83.** Буквы, составляющие слово *задача,* написаны на отдельных карточках. Наудачу по одной извлекаются 4 карточки без возвращения их в игру. Какова вероятность того, что при этом получится слово *дача*?

**84.** В партии из 20 деталей имеется 5 нестандартных. Наудачу берут две детали, которые в партию не возвращаются, а затем берут еще две детали. Какова вероятность того, что первые две детали окажутся нестандартными, а вынутые во второй раз — стандартными?

**85.** В урне имеется 6 белых и 9 черных шаров. Из нее два раза вынимаются по 3 шара, которые в урну не возвращаются. Найти вероятность того, что в первый раз появятся 3 белых шара, а во второй раз — 3 черных.

**86.** В партии книг, прибывших в библиотеку, 75% составляют учебники. Из этих учебников 60% предназначены для учащихся начальной школы. Какова вероятность того, что наудачу взятая книга из этой партии является учебником для начальной школы?

**87.** Вероятность попадания стрелка в цель равна 0,8. Если стрелок попадает в цель при первом выстреле, то ему предоставляется право стрелять во вторую цель. Вероятность поражения обеих целей этим стрелком равна 0,6. Какова вероятность поражения второй цели?

**88.** Студент должен сдавать по математике зачет и экзамен. Вероятность сдачи студентом зачета равна 0,8. Если зачет сдан, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого для него равна 0,9. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет и экзамен?

**89.** Производится 2 независимых выстрела по цели. Вероятность попадания стрелка в цель при каждом выстреле равна 0,7. Какова вероятность попадания при обоих выстрелах, если известно, что произошло два попадания или два промаха?

## § 7. ЗАДАЧИ НА СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ О ВЕРОЯТНОСТИ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

**90.** Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания в цель первого стрелка равна 0,8, второго — 0,7. Какова вероятность того, что один стрелок промахнется, а второй — попадет в цель?

**91.** Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы в течение часа для первого станка равна 0,75, а для второго — 0,8. Какова вероятность того, что в течение часа будет нарушение в работе только одного станка?

**92.** В сосуде имеется 2 белых, 3 черных и 2 красных шара. Из него наудачу извлекают по одному шару без возвращения. Найти вероятность того, что белый шар появится раньше черного?

**93.** Вероятность того, что ученик сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй экзамен — 0,8 и третий — 0,7. Какова вероятность того, что ученик сдаст не менее двух экзаменов?

**94.** Вероятность перевыполнения обязательств одним заводом 0,9, другим — 0,95. Какова вероятность того, что хотя бы один из заводов перевыполнит свои обязательства, если они реализуют свою продукцию независимо друг от друга?

**95.** Три стрелка независимо друг от друга ведут стрельбу по цели. Вероятность попадания в цель первого стрелка равна 0,6, второго — 0,7, третьего — 0,8. Какова вероятность попадания хотя бы одного из них в цель, если каждый стрелок делает по одному выстрелу?

**96.** Система, состоящая из трех элементов, выходит из строя в случае, если отказывают все три его элемента. Найти надежность системы, если элементы независимы и вероятность безотказной работы каждого равна 0,9.

**97.** Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадает герб. Какова вероятность того, что выиграет начинающий?

## § 8. ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ С ДВУМЯ ИСХОДАМИ

### 1. Формула Бернулли

**98.** Известно, что при каждом взвешивании равновозможна как положительная, так и отрицательная ошибка. Какова вероятность того, что при восьми взвешиваниях получится: а) 3 положительные ошибки; б) 3 или 4 положительные ошибки?

**99.** На самолете имеется 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете, не требующей никакого вмешательства, равна 0,95. Найти вероятность того, что в полете 2 двигателя потребуют некоторого вмешательства.

**100.** Опытом установлено, что 75% продукции, изготавливаемой заводом, является высшего качества. Какова вероятность того, что из шести взятых наудачу изделий 3 окажутся высшего качества?

**101.** Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать, отказа двух приборов при испытании четырех или отказа трех приборов при испытании шести?

**102.** Вероятность появления нестандартной детали при случайной выборке равна 0,02. Чему равна вероятность того, что из пятидесяти взятых наудачу деталей две детали окажутся нестандартными?

**103.** Производится 5 независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна $\frac{2}{3}$. Какова вероятность того, что в мишени будет ровно 3 пробоины?

**104.** Сколько нужно провести повторных независимых испытаний, чтобы с вероятностью, равной $\frac{80}{243}$, быть уверенным, что в мишени окажется 3 пробоины, если вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна $\frac{2}{3}$?

**105.** Производится 5 независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле постоянна, а вероятность попадания в цель трех пуль равна

$\frac{1}{3}$. Какова вероятность попадания в цель при одном выстреле?

**106.** Наудачу независимо друг от друга выбирают 5 растений ячменя. Вероятность появления растения ячменя с четырьмя стеблями равна 0,2. Какова вероятность того, что при этом у двух или трех растений окажется по 4 стебля?

### 2. Вероятность появления рассматриваемого события не менее $k$ раз

**107.** Вероятность того, что стрелок попадет в цель при одном выстреле, равна 0,7. Производится 4 независимых выстрела. Какова вероятность, что при этом произойдет не менее двух попаданий?

**108.** Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти вызовов, если вероятность состоявшегося разговора равна 0,6.

**109.** Некто выигрывает в том случае, если при повторном подбрасывании монеты герб появится не менее четырех раз. Найти вероятность выигрыша лица, если монета подбрасывается 5 раз.

**110.** Вероятность появления хотя бы одного события при четырех независимых испытаниях равна 0,9744. Какова вероятность появления этого события при одном опыте?

**111.** На уроке проводится контрольная работа по перфокартам. Для получения положительной оценки необходимо дать не менее 60% правильных ответов, состоящих в установлении истинности или ложности десяти утверждений. Какова вероятность получения положительной оценки при простом отгадывании?

**112.** Прибор состоит из четырех элементов, включенных параллельно. Вероятность безотказной работы каждого элемента равна 0,8. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы 2 элемента были исправны. Какова вероятность того, что прибор будет работать безотказно?

**113.** Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,1. Сколько надо произвести выстрелов, чтобы попасть хотя бы один раз в цель с вероятностью не менее 0,999?

## § 9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

### Вероятности, вычисляемые как отношение мер длин или углов

**114.** На стержне длины $l$ наудачу наносится тонкая риска. Какова вероятность того, что меньший из двух образовавшихся при этом отрезков стержня будет иметь длину, превосходящую $\frac{l}{4}$?

**115.** Событие, состоящее из мгновенного сигнала, должно произойти между одним и пятью часами. Какова вероятность того, что сигнал будет зафиксирован в течение 20 *мин* после двух часов?

**116.** На отрезке $AB = 20$ *см* наудачу берут точку $C$. Какова вероятность того, что она находится не далее 8 *см* от точки $A$ и далее 6 *см* от середины отрезка $AB$?

**117.** Из фиксированной вершины квадрата произвольным радиусом, меньшим его диагонали, проведена окружность. Какова вероятность того, что она пересечет стороны квадрата, имеющие эту вершину одним из своих концов?

**118.** Через произвольную точку большей диагонали ромба, острый угол которого равен $\alpha$, проведена прямая, перпендикулярная к двум параллельным сторонам ромба. Какова вероятность того, что она пересечет обе стороны ромба? Чему равна искомая вероятность, если $\alpha = 90°$?

**119.** На поверхности сферы радиуса $R$ берут наудачу две точки и соединяют их меньшей дугой большого круга. Найти вероятность того, что эта дуга не превзойдет $\alpha$.

**120.** В равносторонний треугольник, сторона которого равна $a$, вписан круг. Какова вероятность того, что наудачу взятая точка треугольника окажется внутри круга?

**121.** В круг радиуса $r$ вписан квадрат. Внутри круга наугад поставлена точка. Какова вероятность того, что поставленная точка окажется внутри квадрата?

**122.** На отрезке $AB = l$ наудачу выбирают две точки $M$ и $N$. Дать геометрическую интерпретацию множества исходов испытания. Какова вероятность того, что точка $M$ окажется ближе к точке $A$, чем точка $N$?

**123.** На отрезке $AB = a$ наудачу выбирается точка $M$, а на отрезке $CD = b$ — точка $N$. Дать геометрическую интерпретацию множества исходов испытания. Найти вероятность того, что точки $M$ и $N$ делят отрезки $AB$ и $CD$ так, что отношение $\frac{AM}{MB} < 1$, а отношение $\frac{CN}{ND} > 1$.

**124.** На отрезке $AB = a$ наудачу взяты точки $C$ и $D$. Какова вероятность того, что обе они лежат от точки $A$ не далее, чем на $b$ $(b < a)$?

**125.** Дано линейное уравнение $ax = b$. Если $a$ выбирается наудачу на сегменте $0 \leqslant a \leqslant 8$, $b$ — на сегменте $0 \leqslant b \leqslant 10$, то какова вероятность того, что корень данного уравнения будет больше единицы?

**126.** Два действительных числа $x$ и $y$ выбираются наугад так, что сумма их квадратов меньше 100. Какова вероятность того, что сумма квадратов $x$ и $y$ окажется больше 64?

**127.** В 25 *см* от центра шара, радиус которого равен 15 *см*, находится точечный источник света. Какова вероятность того, что наудачу взятая точка на поверхности шара окажется освещенной?

**128.** Действительные числа $x$ и $y$ задаются системой неравенств

$$\begin{cases} -1 < x < 3, \\ 2 < y < 5. \end{cases}$$

Какова вероятность того, что наугад выбранные числа, удовлетворяющие этой системе, будут удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 3 < y < 4? \end{cases}$$

## ОТВЕТЫ

### § 1.

**1.** 2, 3 (2), 28, 11. **2.** Первый, второй, пятый. **3.** 18, 5, 9, 4. **4.** Первая, третья, пятая. **5.** Достоверное — первое, невозможное — второе, случайные — третье и четвертое. **6.** Нет. **8.** 1) {ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ, ЦЦЦ}; 2) {0, 1, 2, 3}; 3) {одинаково, различно}. **9.** 1) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), ..., (6, 5), (6, 6)} — всего 36 элементарных событий; 2) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. **12.** $P_3^2 = 6$. **13.** $C_5^2 = 10$. **14.** $C_n^2 - n = \frac{n^2 - 3n}{2}$. **15.** $C_{13}^2 = 78$. **16.** $N = 100$. **17.** $P_4 = 4! = 24$. **18.** Нет. **19.** $C_6^2 = 15$. **20.** $C_4^2 \cdot C_3^2 = 18$. **21.** $N = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1800$. **22.** $N = 6$. **23.** а) $P_3 = 3! = 6$; б) $P_4^3 = 24$. **24.** $N = 10^4$. **25.** $N = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 = 80$. **26.** $\tilde{P}_2^6 = 2^6 = 64$. **27.** $N = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

28. $N = 9 \cdot 10^2 \cdot 2$. 29. $N = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$. 31. В равенстве $A + B = B$ событие $B$ достоверное, в равенстве $AB = B$ невозможное. 32. Событие $\bar{A}$ — появление не более пяти очков. 33. Событие $\bar{A}$ — хотя бы одна пуля не попала в цель. 34. Нет. 35. Событие $E_1$ — выигрыш по одному билету лотереи, событие $E_2$ — выигрыш хотя бы по одному билету лотереи. 37. Первое произошло, второе, третье и четвертое не произошли. 40. $N_1 = 23$, $N_2 = 14$, $N_3 = 3$.

## § 2.

41. $P = \frac{1}{3}$. 42. $P_1 = \frac{11}{365}$, $P_2 = \frac{71}{365}$, $P_3 = \frac{84}{365}$. 43. $P_1 = \frac{1}{28}\left(P = \frac{1}{28},\ P = \frac{1}{14},\ P = \frac{1}{14}\right)$, $P_2 = \frac{3}{14}$, $P_3 = 0$. 44. $P = \frac{24}{90}$. 45. $P = \frac{3}{11}$. 46. $P = 0{,}4$. 47. $P_1 = \frac{1}{3}$, $P_2 = \frac{8}{15}$, $P_3 = \frac{2}{5}$. 48. $P_1 = \frac{1}{15}$, $P_2 = \frac{1}{30}$, $P_3 = \frac{1}{6}$. 49. $P = \frac{13}{365 \cdot 100} \approx 0{,}00036$. Появление рассматриваемого события можно считать практически невозможным. 50. $P \approx 0{,}4267$.

## § 3.

51. $P = \frac{5^4}{9 \cdot 10^3}$. 52. $P = \frac{5}{9 \cdot 2^{n-1}}$. 53. $P = \frac{8 \cdot 9}{9 \cdot 10} = 0{,}8$. 54. $P = 0{,}5062$. Указание. Испытание может иметь $n = 81$ исход. Сумма записанных чисел будет четной, если оба записанных числа будут нечетными или четными, т. е. $m = 5^2 + 4^2 = 41$. 55. $P = \frac{1}{P_8^4} = \frac{1}{1680}$.
56. $P = \frac{1}{8!} \approx 0{,}000025$. 57. $P = \frac{3!}{7!} = \frac{1}{840}$. 58. $P = \frac{1}{32}$. 59. $P = \frac{5}{C_6^2} = \frac{1}{3}$. 60. $P = \frac{n-3}{C_n^2 - n} = \frac{2}{n}$. 61. $P = \frac{C_{10}^4}{C_{12}^2} \approx 0{,}2273$.
62. $P = \frac{1}{C_{27}^6} = \frac{1}{396010}$.

## § 4.

63. $P = \frac{2 \cdot 4! \cdot 3!}{7!} = \frac{2}{35}$. 64. $P_1 = \frac{2}{7}$; $P_2 = \frac{n \cdot 2!\,(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n-1}$. 65. $P = \frac{6 \cdot 2! \cdot 8!}{10!} \approx 0{,}1333$. 66. $P = \frac{C_4^2 \cdot C_6^1}{C_{10}^3} = 0{,}3$. 67. $P_1 = \frac{10 \cdot 9!}{12!} = \frac{1}{132}$, $P_2 = \frac{1}{C_{12}^3} = \frac{1}{220}$. 68. $P = \frac{6 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3}{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3} = 0{,}75$.

69. Пусть событие $A$ — выбрано четное число предметов, событие $B$ — нечетное. Число исходов испытания равно $n = C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^{10}$. Но $C_{10}^0 + C_{10}^1 + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10}$, значит, $n = 2^{10} - 1$. Событию $A$ благоприятствует $m = C_{10}^2 + C_{10}^4 + \ldots + C_{10}^{10}$ исходов. Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} \approx 0{,}4995$. Отсюда $P(A) < P(B)$. 70. $P = \frac{3}{c_3^0 + c_3^1 + c_3^2 + c_3^3} = \frac{3}{8}$.

## § 5.

71. $P = 0{,}17$. 72. $P = 0{,}2$. 73. $P = 0{,}2$. 74. $P = \frac{C_{12}^3}{C_{25}^3} + \frac{C_8^3}{C_{25}^3} = 0{,}12$. 75. $P = \frac{C_{10}^3 + C_{10}^3}{C_{100}^3} \approx 0{,}0015$. 76. $P = \frac{5}{14}$. 77. $P = \frac{C_4^4 \cdot C_6^0}{C_{10}^4} + \frac{C_4^3 \cdot C_6^1}{C_{10}^4} \approx 0{,}119$. 78. $P_1 = 0{,}42$, $P_2 = 0{,}18$. 79. $P = \frac{1}{32}$. 80. $P \approx 0{,}444$. 81. $P_1 = p^3$, $P_2 = p^2q$, $P_3 = pq^2$, $P_4 = q^3$. 82. $P = 0{,}1$.

## § 6.

83. $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{60}$. 84. $P = \frac{C_5^2}{C_{20}^2} \cdot \frac{C_{15}^2}{C_{18}^2} \approx 0{,}0361$.

85. $P = 0{,}0168$. 86. $P = 0{,}75 \cdot 0{,}6 = 0{,}45$. 87. $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$, где событие $A$ — попадание в первую цель, событие $B$ — попадание во вторую цель. 88. Пусть событие $A$— сдача студентом зачета, а событие $B$ — сдача экзамена, тогда $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$. 89. Пусть событие $A$ — попадание пули при обоих выстрелах, а событие $B$ — промахи при обоих выстрелах, тогда $P_{A+B}(A) = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)} = \frac{0{,}49}{0{,}49 + 0{,}09} \approx 0{,}84$.

## § 7.

90. $P = 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}38$. 91. $P = 0{,}35$. 92. $P = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \approx 0{,}4$. 93. $P = 0{,}902$. 94. $P = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$. 95. $P = 0{,}976$. 96. $P = 0{,}999$. 97. $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots = \frac{2}{3}$. Указание. Выигрывает начинающий, если будут исходы испытания Г, ЦЦГ, ЦЦЦЦГ, ... (Г — герб, Ц — цифра).

## § 8.

**98.** $P_8(3)=C_8^3\cdot 0{,}5^8\approx 0{,}218$, $P_8(3)+P_8(4)=C_8^3\cdot 0{,}5^8+C_8^4\times$ $\times\, 0{,}5^8=0{,}491$. **99.** $P_4(2)=C_4^2\cdot 0{,}05^2\cdot 0{,}95^2\approx 0{,}0135$. **100.** $P_6(3)\approx$ $\approx 0{,}1318$. **101.** $P_4(2)>P_6(3)$. **102.** $P_{50}(2)=C_{50}^2\cdot 0{,}02^2\cdot 0{,}98^{48}=$ $=0{,}49\cdot 0{,}98^{48}$, $\lg P_{50}(2)=\lg 0{,}49+48\lg 0{,}98=\overline{1},26905$, $P_{50}(2)=0{,}1858$. **103.** $P_5(3)=\dfrac{80}{243}$. **104.** $n=5$. **105.** $P\approx\dfrac{2}{3}$. **106.** $P_5(2)+P_5(3)=$ $=0{,}256$. **107.** $P_4(m\geqslant 2)=0{,}9163$. **108.** $P_5(2\leqslant m\leqslant 4)=0{,}6524$. **109.** $P_5(m\geqslant 4)=0{,}1875$. **110.** $P=0{,}6$. Указание. Решить уравнение $1-q^4=0{,}9744$. **111.** $P_{10}(m\geqslant 6)\approx 0{,}377$. **112.** $P_4(m\geqslant 2)=$ $=0{,}9728$. **113.** $n\geqslant\dfrac{\lg(1-0{,}999)}{\lg(1-0{,}1)}$, $n\geqslant 66$.

## § 9.

**114.** $P=0{,}5$. **115.** $P=0{,}083$. **116.** $P=0{,}8$. **117.** $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}707$. **118.** $P_1=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$, $P_2=1$. **119.** $P=\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$. Указание. Одну из точек считать фиксированной. **120.** $P=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}\approx 0{,}605$. **121.** $P=\dfrac{2}{\pi}$. **122.** Квадрат, сторона которого равна $l$; $P=0{,}5$. **123.** Прямоугольник со сторонами $a$ и $b$; $P=0{,}25$. **124.** $P=\dfrac{b^2}{a^2}$. **125.** $P=0{,}6$. Указание. Рассматриваемому событию соответствуют исходы испытания, удовлетворяющие неравенству $b>a$. **126.** $P=0{,}32$. Указание. Построить область, удовлетворяющую системе неравенств: $\begin{cases}x^2+y^2<100,\\ x^2+y^2>64.\end{cases}$ **127.** $P=0{,}2$. **128.** $P=\dfrac{1}{12}$.

# Глава VII ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

## 1. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

Отправным моментом в общей идее расширения понятия числа является множество натуральных чисел. В этом множестве определены алгебраические операции: сложение и умножение.

**Определение 1.** *Алгебраической операцией, определенной на множестве A, будем называть соответствие, в силу которого каждой паре a и b элементов множества A, взятых в определенном порядке, соответствует единственный третий элемент c того же множества A. Если некоторая алгебраическая операция определена на данном множестве, то говорят, что она выполнима в этом множестве.*

Примеры алгебраических операций: сложение, вычитание, умножение, деление, рассматриваемые на множестве всех действительных или комплексных чисел; сложение и вычитание векторов. Извлечение корней и логарифмирование на множестве натуральных чисел не являются алгебраическими операциями.

Далее последовательно определяются целые, рациональные, действительные и комплексные числа. Причем каждое из перечисленных числовых множеств содержит предыдущее, является его расширением.

**Определение 2.** *Множество B называется расширением множества A, если выполняются следующие свойства:*

1. *Множество A есть подмножество множества B,* $A \subset B$.

2. *Все операции и отношения элементов множества A определены также и для элементов множества B. Причем их смысл для элементов множества A, рассматриваемых уже как элементы множества B, совпадает с тем, какой они имели во множестве A до расширения.*

3. *Во множестве B должна быть выполнима операция, которая во множестве A была невыполнима или не всегда выполнима.* (Именно это требование и побуждает к расширению данного числового множества.)

4. *Расширение B является минимальным из всех расширений данного множества A, обладающих свойствами 1—3, т. е. между множествами A и B нет промежуточного множества, обладающего свойствами 1—3.*

Например, множество целых чисел $Z$ является расширением множества натуральных чисел $N$, так как

1. $N \subset Z$.

2. Операции сложения и умножения натуральных чисел определены также и для целых чисел.

3. Во множестве $Z$ выполняется операция вычитания, которая не всегда выполнялась во множестве $N$.

4. И наконец, никакое множество, содержащееся во множестве целых чисел $Z$, не будет обладать всеми свойствами целых чисел.

**Определение 3.** *Числовым кольцом называется числовое множество, в котором определены две алгебраические операции — сложение и умножение, которые обладают следующими свойствами: коммутативностью и ассоциативностью сложения и умножения, обратимостью сложения* и дистрибутивностью умножения относительно сложения.*

**Определение 4.** *Числовое кольцо называется числовым полем, если для любых заданных его элементов $a$ и $b$, $a \neq 0$, существует решение уравнения $ax = b$.*

Например, множество целых чисел является кольцом, множество рациональных — и кольцом, и полем.

Последнее из рассматриваемых расширений — поле комплексных чисел.

## 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В школьном курсе математики учащиеся знакомятся с алгебраической и тригонометрической формами комплексного числа. При решении геометрических задач широко используется геометрическая интерпретация этих чисел.

При этом комплексное число $z$, соответствующее точке $M$, называется комплексной координатой точки $M$, что обозначается так: $M(z)$. Комплексное число $z$, соответствующее вектору $\overrightarrow{OM}$, называется комплексной координатой этого вектора, обозначается: $\overrightarrow{OM}(z)$.

Условимся также вектор с комплексными координатами концов $z_1$ и $z_2$ обозначать соответственно $(z_1, z_2)$, треугольник с комплексными координатами вершин $z_1$, $z_2$ и $z_3$ — $(z_1, z_2, z_3)$, четырехугольник с комплексными координатами вершин $z_1$, $z_2$, $z_3$ и $z_4$ — $(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Тригонометрическая форма комплексного числа $z$ имеет вид: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_\varphi$, где $r = |z|$, а $\varphi$ — одно из значений аргумента $z$.

Корень $n$-й степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме, извлекается по формуле:

---

* Существует операция, обратная сложению,— вычитание.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \right.$$

$$\left. + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \text{ или } \sqrt[n]{r_\varphi} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\varphi + 2k\pi}{n}},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1)$.

## § 1. ПОЛЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**1.** Какие алгебраические операции всегда выполнимы во множестве натуральных чисел?

**2.** Пусть $m$ и $n$ — два натуральных числа. Какие ограничения следует на них наложить, чтобы: а) разность $m - n$; б) частное $\frac{m}{n}$ были опять натуральными числами?

**3.** Существует ли среди множества всех натуральных чисел: а) наибольшее число; б) наименьшее число?

**4.** Какая алгебраическая операция во множестве натуральных чисел побуждает к введению отрицательных чисел и нуля? Какое число называется отрицательным?

**5.** Убедиться, что сложение и умножение целых чисел удовлетворяет законам сложения и умножения натуральных чисел.

**6.** Сравнить операции вычитания во множестве целых и во множестве натуральных чисел.

**7.** Какие алгебраические операции всегда выполнимы во множестве целых чисел?

**8.** Образует ли кольцо: а) множество всех четных чисел; б) множество всех нечетных чисел; в) множество всех целых отрицательных чисел; г) множество всех чисел вида $3k$, $k$ — целое число? Привести примеры колец.

**9.** Убедиться, что множество целых чисел является кольцом.

**10.** Убедиться, что кольцо целых чисел является расширением множества натуральных чисел.

**11.** Является ли кольцом объединение всех четных и нечетных чисел?

**12.** Всегда ли в кольце целых чисел выполнима операция возведения целого числа в целую степень?

**13.** Какая алгебраическая операция с целыми числами побуждает к введению дробных чисел? Какое число называется рациональным?

**14.** Какое множество является объединением множества всех целых и дробных чисел?

**15.** Убедиться, что сложение и умножение рациональных чисел удовлетворяет основным законам сложения и умножения целых чисел.

**16.** Что выражает каждое из приводимых ниже равенств — определение или теорему:

а) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$; б) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$;

в) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$; г) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$, $c\neq 0$,

где $a$, $b$, $c$ и $d$ — целые числа, причем $b\neq 0$, $d\neq 0$?

**17.** Показать, что сумма и произведение рациональных чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равна соответственно сумме и произведению рациональных чисел $\frac{ak}{bk}$ и $\frac{cn}{dn}$, где $b$, $d$, $n$, $k\neq 0$.

**18.** Образуют ли поле: а) множество чисел вида $\frac{a}{5}$, где $a$ — целое число; б) множество чисел вида $\frac{a}{5^n}$, где $a$ — целое число, $n$ — натуральное? Привести примеры полей.

**19.** Убедиться, что множество чисел, изображаемых конечными* десятичными дробями, образует кольцо, но не образует поле.

**20.** Какие алгебраические операции всегда выполнимы во множестве рациональных чисел?

**21.** Убедиться, что множество рациональных чисел образует поле.

**22.** Убедиться, что поле рациональных чисел является расширением кольца целых чисел.

## § 2. ПОЛЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**23.** Доказать, что уравнения: а) $x^2=2$; б) $x^2=6$ — в поле рациональных чисел не имеют корней. Какое число называется иррациональным?

**24.** Как называется множество, являющееся объединением множества рациональных чисел и иррациональных чисел?

* Конечными мы считаем и периодические дроби с периодом 0 и 9.

25. Убедиться, что множество действительных чисел является полем.

26. Убедиться, что множество действительных чисел вида $a + b\sqrt{3}$ является полем.

27. Убедиться, что поле действительных чисел является расширением поля рациональных чисел.

28. Какие алгебраические операции всегда выполнимы в поле действительных чисел?

29. Если $m$ и $n$ — натуральные числа, то во множестве каких чисел разрешимо каждое из следующих уравнений: 1) $x - m = n$; 2) $x : m = n$; 3) $x + m = n$; 4) $m \cdot x = n$?

30. Убедиться, что уравнение $x^2 + 1 = 0$ в поле действительных чисел не имеет корней.

## § 3. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

31. Какая алгебраическая операция побуждает к введению комплексных чисел?

32. Какие множества образуют: а) объединение множества всех действительных чисел и множества всех комплексных чисел; б) пересечение множества всех действительных чисел с множеством всех мнимых; в) пересечение множества всех действительных чисел и множества всех комплексных чисел?

33. Установить необходимое и достаточное условие, при котором сумма двух комплексных чисел есть число действительное; число чисто мнимое.

34. Установить необходимое и достаточное условие, при котором разность двух комплексных чисел есть число действительное; чисто мнимое.

35. Пусть $z_1$ и $z_2$ — два комплексных числа. Обозначим им сопряженные соответственно через $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$. Доказать, что

$$\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = \overline{z_1 \pm z_2}.$$

36. Установить необходимое и достаточное условие, при котором произведение комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ есть число действительное; число чисто мнимое.

37. Убедиться, что суммы $a^2 + b^2$; $4x^2 + 9y^2$ могут быть представлены в виде произведения различных пар сопряженных комплексных чисел.

**38.** Убедиться, что множество комплексных чисел образует поле.

**39.** Убедиться, что поле комплексных чисел является расширением поля действительных чисел.

**40.** Доказать, что $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 1$ при любом $z \neq 0$.

**41.** Доказать, что если число является суммой квадратов двух неравных действительных чисел, то и квадрат его есть сумма квадратов двух действительных чисел.

**42.** Найти $i^3$, $i^4$, $i^5$, ..., $i^n$, $n$ — натуральное число.

**43.** Найти $i^{-1}$, $i^{-2}$, $i^{-3}$, ..., $i^{-n}$, $n$ — натуральное число.

**44.** Доказать, что необходимым и достаточным условием того, чтобы сумма квадратов двух комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ была равна нулю, является $a = \mp d$, $b = \pm c$.

**45.** Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы

$$(a + bi)^2 = |a + bi|^2.$$

**46.** Доказать, что числа $(a + bi)^n$ и $(a - bi)^n$ комплексно сопряженные ($n$ — целое положительное число).

**47.** Найти натуральное число $n$, если $(1 + i)^n = (1 - i)^n$.

**48.** Извлечь корень: а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[4]{i}$; в) $\sqrt{-i}$; г) $\sqrt{1+i}$; д) $\sqrt{-a^2}$.

**49.** Найти $a$ и $b$, если: а) $\sqrt{a + bi} = 3 + 2i$; б) $\sqrt{a + bi^{141}} = 1 + i$.

## § 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

**50.** Записать комплексные числа, соответствующие точкам пересечения параболы $y = x^2 + 4x - 5$: а) с осями координат; б) с прямой $x = 2$; в) с прямой $y = -5$.

**51.** Записать комплексные числа, соответствующие точкам пересечения гиперболы $y = \frac{1}{x}$: а) с прямой $y = x$; б) с линией $y = |x|$.

**52.** Какое множество образуют точки, расположенные на расстоянии 2 единиц от точки $1 + i$?

В задачах 53—56 найти геометрические места точек.

53. а) $|z| = 2$; б) $|z| \leqslant 3$; в) $|z| > 3$; г) $1 \leqslant z \leqslant 2$.

54. а) $|z+2| = 1$; б) $|z-i| \geqslant 2$; в) $2 < |z+i| < 3$.

55. $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

56. а) $\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{3}$, $|z| \geqslant 1$.

57. Найти геометрическое место точек, равноотстоящих от точек

$$A(2+3i) \text{ и } B(5+6i).$$

58. Изобразить на комплексной плоскости множества точек $z$, удовлетворяющих условиям:

а) $|z-1| = |z+2i|$; б) $|z-1| = |z-2| = |z-i|$.

59. Убедиться, что сумма (разность) векторов, соответствующих комплексным числам, сопряженным $z_1$ и $z_2$, есть вектор, соответствующий комплексному числу, сопряженному их сумме (разности).

60. Определить угол между векторами, которым соответствуют комплексные числа $a+bi$ и $-b+ai$.

61. Какой геометрический смысл имеет умножение любого комплексного числа на мнимую единицу?

62. Какой геометрический смысл имеет умножение любого комплексного числа на действительное?

63. Пользуясь ассоциативностью умножения комплексных чисел и законом дистрибутивности, дать геометрическую интерпретацию умножения комплексного числа $z_1$ на произвольное комплексное число $z_2 = a + bi$.

64. Найти векторы, соответствующие следующим произведениям комплексных чисел: а) $(2+i)(1+i)$; б) $(1+3i)\times$ $\times(2+i)$; в) $(1+2i)^2$; г) $(3+4i)(2-3i)$; д) $(2-3i)(3+2i)$.

65. Найти комплексную координату $u$ вектора $\overrightarrow{AB}$, если комплексные координаты точек $A$ и $B$ соответственно $z_1$ и $z_2$.

66. Даны точки: $M_1(1-2i)$, $M_2(2+i)$, $M_3(5)$, $M_4(-1+$ $+4i)$, $M_5(-3i)$. Найти комплексные координаты векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_3M_1}$, $\overrightarrow{M_4M_5}$, $\overrightarrow{M_5M_3}$.

67. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет комплексную координату $5-4i$. Найти комплексную координату его конца, если комплексная координата начала равна $-2+3i$.

**68.** Найти модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(z_1)$, $B(z_2)$.

**69.** Даны точки: $A(0)$, $B(3-4i)$, $C(-3+4i)$, $D(-2+2i)$, $E(10-3i)$. Определить расстояние $d$ между точками: а) $A$ и $B$; б) $B$ и $C$; в) $A$ и $C$; г) $C$ и $D$; д) $A$ и $D$; е) $D$ и $E$.

**70.** На оси абсцисс найти такую точку $M$, расстояние от которой до точки $N(2-3i)$ равно 5.

**71.** Найти геометрическое место точек, для которых разность квадратов их расстояний от точек $5+3i$ и $-4+3i$ равна 25.

**72.** Найти геометрическое место точек, для которых сумма квадратов их расстояний от точек $z_1=-2$ и $z_2=2$ равна 26 единицам.

**73.** Записать с помощью комплексных чисел множество таких точек плоскости, сумма квадратов расстояний которых от двух точек, симметричных началу координат, равна квадрату данного отрезка.

**74.** Определить комплексную координату середины отрезка $AB$, если $A(z_1)$, $B(z_2)$.

**75.** Определить комплексную координату середины отрезка $AB$, если $A(3-5i)$, $B(-1+i)$.

**76.** Найти длины сторон треугольника $ABC$, если $A(2-3i)$, $B(3+4i)$, $C(1-12i)$.

**77.** Зная комплексные координаты вершин треугольника $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, найти комплексные координаты его медиан.

**78.** Доказать, что сумма квадратов двух сторон треугольника $(z_1, z_2, z_3)$ равна удвоенному квадрату медианы его третьей стороны плюс половина квадрата этой стороны.

**79.** Доказать, что сумма квадратов медиан треугольника составляет $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

**80.** Определить комплексное число $z$, отвечающее центроиду* треугольника $ABC$, если $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$.

**81.** Для треугольника $ABC$, $A(5+3i)$, $B(2-i)$, $C(1+4i)$, определить длины медиан и вычислить комплексную координату его центроида.

**82.** Доказать, что средняя линия треугольника $(z_1, z_2, z_3)$ параллельна основанию и равна его половине.

**83.** В плоскости треугольника $(z_1, z_2, z_3)$ взята произвольная точка $M$, которая отражается последовательно относительно всех вершин треугольника один, а затем

---

* Центроидом треугольника называется точка пересечения его медиан

другой раз. Доказать, что после последнего отражения отражаемая точка совпадает с точкой $M$.

**84.** При каких условиях четыре точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ и $D(z_4)$ представляют последовательные вершины параллелограмма $ABCD$?

**85.** Три вершины параллелограмма находятся в точках $z_1$, $z_2$ и $z_3$. Найти число $z$, определяющее положение четвертой вершины параллелограмма.

**86.** Доказать, что четырехугольник $ABCD$, $A(-5+3i)$, $B(-2-2i)$, $C(5-4i)$, $D(2+i)$,— параллелограмм.

**87.** Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ равна сумме квадратов его сторон.

**88.** При каких условиях четыре точки $z_1$, $z_2$, $z_3$ и $z_4$ представляют последовательные вершины квадрата?

**89.** Убедиться, что точки $A(2+i)$, $B(-3+4i)$, $C(-6-i)$ и $D(-1-4i)$ являются вершинами квадрата.

**90.** Двум соседним вершинам квадрата соответствуют комплексные числа $z_1$ и $z_2$. Найти комплексные координаты двух его других вершин.

**91.** Доказать, что середины сторон произвольного четырехугольника $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ образуют параллелограмм.

**92.** Отрезок $MN$ соединяет середины противоположных сторон $DC$ и $AB$ четырехугольника $ABCD$, $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $D(z_4)$. Доказать, что середины диагоналей получившихся при этом четырехугольников $AMND$ и $NMBC$ служат вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой.

**93.** Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $(z_1, z_2, z_3, z_4)$, и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, проходят через одну точку и делятся в ней пополам.

## § 5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ТРИГОНОМЕТРИЯ

### 1. КОМПЛЕКСНАЯ ЕДИНИЦА

**94.** Комплексное число, модуль которого равен единице, называется комплексной единицей. Комплексная единица с аргументом $\alpha$ обозначается $\mathscr{E}_\alpha$; если $x+iy=\mathscr{E}_\alpha$, то $\sqrt{x^2+y^2}=1$.

Записать комплексные единицы, отвечающие вершинам правильных трех-, четырех-, пяти- и шестиугольников, вписанных в окружность единичного радиуса с центром в начале координат и имеющих комплексную координату одной из вершин $\mathscr{E}_0$.

**95.** Построить комплексные единицы: а) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-i$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ и комплексные единицы, сопряженные данным. Найти их аргументы и записать в виде $\mathscr{E}_\alpha$. Как связаны между собой аргументы сопряженных комплексных единиц?

**96.** Найти произведение и частное комплексных единиц:

а) $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{6}}$ и $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{4}}$; б) $\mathscr{E}_\alpha$ и $\mathscr{E}_{-\alpha}$; в) $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{6}}$ и $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{3}}$; г) $\mathscr{E}_{\frac{2\pi}{3}}$ и $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{2}}$; д) $\mathscr{E}_\alpha$ и $\mathscr{E}_\alpha$.

**97.** Как изменится вектор, соответствующий комплексной единице $\mathscr{E}_\alpha$, если ее умножить (или разделить) на комплексную единицу $\mathscr{E}_\beta$?

**98.** Записать комплексные единицы, отвечающие вершинам правильного $n$-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, одна из вершин которого имеет комплексную координату $\mathscr{E}_\alpha$.

**99.** Убедиться в справедливости равенства:

$$\mathscr{E}_{\frac{\pi}{2}n\pm\alpha}=i^n\mathscr{E}_{\pm\alpha},$$

где $n$ — натуральное число.

## 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

**100.** Действительная часть комплексной единицы $\mathscr{E}_x$ называется косинусом аргумента $x$ (обозначается: $\cos x$); мнимая часть комплексной единицы $\mathscr{E}_x$ — синусом аргумента $x$ (обозначается: $\sin x$). Запись комплексной единицы $\mathscr{E}_x$ в виде $\cos x+i\sin x$ называется ее тригонометрической формой.

Используя геометрическое изображение комплексной единицы, убедиться, что это определение синуса и косинуса эквивалентно их обычному определению.

**101.** Найти: а) синусы углов: $0, \frac{\pi}{6}, \pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}$; б) косинусы тех же углов, построив соответствующие комплексные единицы.

**102.** Найти: а) тангенсы углов: $0, \frac{\pi}{4}, \pi, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}$; б) котангенсы углов: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}$, построив соответствующие комплексные единицы.

В задачах 103—115 использовать тригонометрическую форму комплексной единицы.

**103.** Убедиться, что косинус является функцией четной, а синус — нечетной.

**104.** Убедиться, что синус и косинус — функции периодические с периодом, равным $2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

**105.** Убедиться, что $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cdot\cos\alpha$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta$.

**106.** Выразить $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

**107.** Выразить $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

**108.** Выразить синус и косинус угла, кратного данному, в виде степеней синуса и косинуса этого угла.

**109.** Выразить $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ через $\cos\alpha$.

**110.** Выразить $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ и $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ через синус и косинус углов $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

**111.** Вывести формулы приведения синуса и косинуса произвольного угла к острому углу.

**112.** Найти выражения для $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через сопряженные комплексные единицы.

**113.** Выразить $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\sin^3\alpha$ и $\cos^3\alpha$ через синус и косинус углов, кратных $\alpha$.

**114.** Выразить $n$-ю степень синуса и косинуса аргумента $\alpha$ через функции синуса и косинуса углов, кратных $\alpha$.

**115.** Убедиться, что: а) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \times \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; б) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; в) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; г) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

## 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

В задачах 116—119 найти суммы.

**116.** $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos k\alpha$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin k\alpha$.

**117.** $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\alpha + kh)$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(\alpha + kh)$.

**118.** $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cos k\alpha$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \sin k\alpha$.

**119.** $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos k\alpha$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin k\alpha$.

## 4. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКЕ. ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

**120.** Показать, что стороны $a$, $b$, $c$ треугольника связаны с его углами $A$, $B$, $C$ соотношениями:

$$b = c_A + a_{-C} = c_{-A} + a_C,$$

$$c = a_B + b_{-A} = a_{-B} + b_A, \qquad b = c(\cos A + i \sin A) +$$

$$a = b_C + c_{-B} = b_{-C} + c_B. \qquad + a(\cos C - i \sin C).$$

В задачах 121—124 доказать тождества с использованием соотношений задачи 120.

**121.** а) $\dfrac{c-b}{a} = \dfrac{\sin\dfrac{C-B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}$; б) $\dfrac{c+b}{a} = \dfrac{\cos\dfrac{C-B}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$.

**122.** а) $2a \cos A + 2b \cos B + 2c \cos C = a \cos(B - C) + b \cos(C - A) + c \cos(A - B)$;

б) $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0$.

**123.** а) $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \cos C \cos B + 2b \cos A \cos C + 2c \cos B \cos A$;

б) $a \sin A + b \sin B + c \sin C = 2a \cos C \sin B + 2b \cos A \sin C + 2c \cos B \sin A$.

**124.** а) $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)= 3abc$;

б) $a^3\sin(B-C)+b^3\sin(C-A)+c^3\sin(A-B)=0$.

**125.** Используя соотношения задачи 120, доказать теорему синусов для треугольников.

**126.** Используя соотношения задачи 120, доказать теорему косинусов для треугольников.

**127.** Доказать, что стороны произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ связаны с его углами соотношениями:

$$a=b_{-B}-c_{A+D}+d_A=b_B-c_{-(A+D)}+d_{-A}.$$

**128.** Используя соотношения задачи 127, доказать для четырехугольника $ABCD$ равенство:

$$b\sin B+c\sin(A+D)=d\sin A.$$

**129.** Используя соотношения задачи 127, доказать для четырехугольника $ABCD$ равенство:

$$d^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos B+2ac\cos(A+D)-2bc\cos C.$$

В задачах 130—133 доказать тождества при условии, что $A$, $B$ и $C$ — углы треугольника.

**130.** а) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\times\sin\frac{C}{2}$; б) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$.

**131.** а) $\cos A+\cos B-\cos C=-1+\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\times\cos\frac{C}{2}$; б) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$.

**132.** а) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\times\cos B\cdot\cos C$; б) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$.

**133.** а) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cdot\cos B\times\cos C$; б) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$.

**134.** Доказать, что тождество $\sin A=2\sin B\cdot\cos C$ выполняется в том и только в том случае, если $A$, $B$ и $C$ — углы равнобедренного треугольника.

**135.** Убедиться, что если $A$, $B$ и $C$ — углы равнобедренного треугольника, то выполняется тождество $\sin A=4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$.

## 5. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ

В задачах 136—141 использовать геометрическую интерпретацию комплексного числа и его тригонометрическую форму.

**136.** Найти равнодействующую двух сил в 30 *н* и 40 *н*, действующих на точку тела под углами: а) 30°; б) 60°; в) 90°; г) 120° друг к другу. Как зависит модуль равнодействующей от величины угла между составляющими?

**137.** Тело одновременно участвует в двух равномерных движениях, направленных под углом 120° друг к другу. Скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ обоих движений равны по модулю. Найти модуль и направление скорости результирующего движения $\vec{v}$.

**138.** Скорости двух составляющих движения точки направлены под углом 60° друг к другу и равны 6,0 *м/сек* и 4,0 *м/сек*. Найти скорость результирующего движения.

**139.** Найти равнодействующую трех сил, по 15 *н* каждая, если углы между силами 60°, 60°, 120°.

**140.** Груз тянут двумя канатами по горизонтальному настилу. Канаты параллельны плоскости настила. К каждому канату приложена сила 500 *н*. Найти равнодействующую, если угол между канатами 0°, 30°, 45°, 90°, 135°, 180°. Как зависит модуль равнодействующей от величины угла между составляющими силами?

**141.** Какой угол должны образовывать направления двух равных по модулю сил, которые действуют на одну и ту же точку, чтобы их равнодействующая по модулю равнялась модулю одной из данных сил?

## ОТВЕТЫ

### § 1.

**1.** Сложение и умножение. **2.** а) $m > n$; б) $m = kn$, где $k$ — натуральное число. **3.** а) Нет; б) 1. **4.** Вычитание. **8.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **10.** Указание. Проверить свойства расширения. Минимальность не рассматривать. **11.** Кольцо целых чисел. **12.** Нет. **16.** а) и б) — определения; в) и г) — теоремы. **18.** а) Нет; б) нет.

### § 2.

**27.** Указание. Смотри задачу 10. **29.** 1) Во множестве натуральных, кольце целых чисел, поле рациональных и поле действительных чисел; 2) во множестве натуральных, кольце целых, поле рациональных и поле действительных чисел; 3) в кольце целых, поле рациональных и поле действительных чисел; 4) в поле рациональных и поле действительных чисел.

## § 3.

**33.** а) Мнимые части — противоположные числа; б) действительные части — противоположные числа. **34.** а) Мнимые части равны; б) действительные части равны. **36.** а) $ad + bc = 0$; б) $ac - bd = 0$. **37.** Указание Так как $\frac{b}{a} = -\frac{d}{c} = k$ (задача 36 а), то $b = ak$, $d = -ck$, т. е. в случае действительного произведения чисел $a + bi$ и $c + di$ имеем: $(a + bi) \cdot (c + di) = ac(1 + ki)(1 - ki) = A(1 + ki)(1 - ki)$. а) $(a + bi)(a - bi)$ при $A = a^2$, $k = \frac{b}{a}$; $(b+ai) \times (b - ai)$ при $A = b^2$, $k = \frac{a}{b}$ и т. д.; б) $(-3y + 2ix)(-3y - 2ix)$ при $A = 9y^2$, $k = -\frac{2x}{3y}$. **39.** Смотри задачу 10. **41.** Пусть $n = a^2 + b^2$, $a \neq b$, $a$ и $b$ — действительные числа. Тогда $n^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a + bi)^2 (a - bi)^2 = (a^2 - b^2 + 2abi)(a^2 - b^2 - 2abi) = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$. **42.** Указание. Использовать метод математической индукции:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 4k, \\ i & \text{при } n = 4k + 1, \\ -1 & \text{при } n = 4k + 2, \\ -i & \text{при } n = 4k + 3. \end{cases}$$

**43.** Указание. Использовать метод математической индукции:

$$\begin{array}{rl} 1 & \text{при } n = 4k, \\ -i & \text{при } n = 4k + 1, \\ -1 & \text{при } n = 4k + 2, \\ i & \text{при } n = 4k + 3. \end{array}$$

**45.** $b = 0$. **46.** Указание. Воспользоваться формулой бинома Ньютона: $(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$.

**47.** Указание. Рассмотреть $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$, $n = 4k$, $k = 0, 1, \ldots$.

**48.** а) 1; $-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$; б) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$; д) $\pm ai$. **49.** а) $a = 5$, $b = 12$; б) $a = 0$, $b = 2$.

## § 4.

**50.** а) $A(1)$, $B(-5)$, $C(-5i)$; б) $M(2 + 7i)$; в) $(-4 - 5i)$, $C(-5i)$. **51.** а) $A(1 + i)$, $B(-1 - i)$; б) $A(1 + i)$. **52.** Окружность радиуса 2 с центром в точке $1 + i$. **53.** а) Окружность радиуса 2 с центром в начале координат; б) круг радиуса 3 с центром в начале координат; в) кольцо, ограниченное концентрическими окружностями радиуса 1 и 2 с центром в начале координат. **54.** а) Окружность радиуса 1 с центром в точке $-2$; б) все точки вне открытого круга

радиуса 2 с центром в точке $i$; в) внутренность кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиуса 2 и 3 с центром в точке $-i$. **55.** Луч, выходящий из начала координат под углом $\frac{\pi}{4}$ к положительному направлению действительной оси. **56.** а) Острый угол, образованный лучами, выходящими из начала координат и образующими с положительным направлением действительной оси углы, равные $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$; б) часть плоскости, лежащая вне окружности радиуса 1 с центром в начале координат и заключенная между лучами, исходящими из начала координат и образующими с положительным направлением действительной оси углы $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$.
**57.** Перпендикуляр, проходящий через середину отрезка $AB$, $|z-2-3i| = |z-5-6i|$. **58.** а) Геометрическое место точек, равноудаленных от точек с комплексными координатами 1 и $-2i$; б) геометрическое место точек, равноудаленных от точек с комплексными координатами 1, 2 и $i$. **60.** $\frac{\pi}{2}$. **61.** Поворот вектора, соответствующего этому комплексному числу на угол $\frac{\pi}{2}$.
**62.** Растяжение этого вектора в $|a|$, где $|a|$ — модуль этого действительного числа. **65.** $u = z_2 - z_1$. **66.** $\overrightarrow{M_1M_2}(1+3i)$, $\overrightarrow{M_3M_1}(-4-2i)$, $\overrightarrow{M_4M_5}(1-7i)$, $\overrightarrow{M_5M_3}(5+3i)$. **67.** $B(3-i)$. **68.** $AB^2 = (z_2-z_1)(\bar{z}_2-\bar{z}_1)$. **69.** а) 5; б) 10; в) 5; г) $\sqrt{5}$; д) $2\sqrt{2}$; е) 13.
**70.** $M_1(-2)$, $M_2(6)$. **71.** Решение. Искомое геометрическое место точек $z = x + iy$ должно удовлетворять условию: $|z-z_1|^2 - |z-z_2|^2 = 25$. Так как $|z-z_1|^2 = (z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_1)$ и $|z-z_2|^2 = (z-z_2)(\bar{z}-\bar{z}_2)$, то будем иметь: $(z-5-3i)(\bar{z}-5+3i) - (z+4-3i)(\bar{z}+4+3i) = 25$. Откуда после преобразования получаем прямую: $9x+8=0$.
**72.** Решение. $|z+2|^2 + |z-2|^2 = 26$. Откуда после преобразований получаем окружность $z\bar{z} = 9$, или $|z| = 3$. **73.** $|z| = \sqrt{\frac{c^2-2b^2}{2}}$, где $c$ — данный отрезок, $b$ — половина отрезка $AB$, $A$ и $B$ — данные точки. **74.** $\frac{z_1+z_2}{2}$. **75.** $1-2i$. **76.** $AB = 5\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{65}$, $AC = \sqrt{82}$. **77.** $\overrightarrow{AA_1}\left(\frac{z_2+z_3-2z_1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BB_1}\left(\frac{z_1+z_3-2z_2}{2}\right)$, $\overrightarrow{CC_1}\left(\frac{z_1+z_2-2z_3}{2}\right)$. **78.** Указание. Доказать равенство: $AB^2 + BC^2 = 2BB_1^2 + \frac{1}{2}CA^2$, где $A(z_1)$, $B(z_2)$ и $C(z_3)$ — вершины данного треугольника. **80.** $z = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.
**81.** $AA_1 = \frac{\sqrt{58}}{2}$, $BB_1 = \frac{\sqrt{85}}{2}$, $CC_1 = \frac{\sqrt{61}}{2}$, $G\left(\frac{8+6i}{3}\right)$.

82. Решение. Пусть $A(z_1)$, $B(z_2)$ и $C(z_3)$ — вершины треугольника, а точки $M$ и $N$ — соответственно середины сторон $AC$ и $BC$. Тогда $\vec{AB}(z_2 - z_1)$, $M\left(\frac{z_1+z_3}{2}\right)$ и $N\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)$, а $\vec{MN}\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)$, таким образом, комплексные координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{MN}$ отличаются только множителем $\frac{1}{2}$, откуда $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$. 84. $z_2 - z_1 = z_3 - z_4$. 85. $z_4 = z_3 + z_1 - z_2$, $z_4 = z_2 + z_3 - z_1$, $z_4 = z_1 + z_2 - z_3$. 87. Указание. Если $u$ и $v$ — комплексные координаты сторон параллелограмма, исходящих из одной вершины, то комплексные координаты его диагоналей равны соответственно $u + v$ и $u - v$. 88. $z_2 - z_1 = z_3 - z_4$, $z_3 - z_2 = \pm i(z_1 - z_2)$. 90. а) $z_3 = z_2 + (z_2 - z_1)i$, $z_4 = z_1 + (z_2 - z_1)i$; б) $z_3 = z_2 - (z_2 - z_1)i$, $z_4 = z_1 - (z_2 - z_1)i$.

## § 5.

94. Комплексные координаты вершин треугольника: $\mathscr{E}_0$, $\mathscr{E}_{\frac{2\pi}{3}}$, $\mathscr{E}_{-\frac{2\pi}{3}}$; комплексные координаты вершин квадрата: $\mathscr{E}_0$, $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{2}}$, $\mathscr{E}_\pi$, $\mathscr{E}_{-\frac{\pi}{2}}$; комплексные координаты вершин пятиугольника: $\mathscr{E}_0$, $\mathscr{E}_{\frac{2\pi}{5}}$, $\mathscr{E}_{\frac{4\pi}{5}}$, $\mathscr{E}_{-\frac{4\pi}{5}}$, $\mathscr{E}_{-\frac{2\pi}{5}}$; комплексные координаты вершин шестиугольника: $\mathscr{E}_0$, $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{3}}$, $\mathscr{E}_{\frac{2\pi}{3}}$, $\mathscr{E}_\pi$, $\mathscr{E}_{-\frac{2\pi}{3}}$, $\mathscr{E}_{-\frac{\pi}{3}}$. 95. а) $\mathscr{E}_{\frac{2\pi}{3}}$ и $\mathscr{E}_{-\frac{2\pi}{3}}$; б) $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{4}}$ и $\mathscr{E}_{-\frac{\pi}{4}}$; в) $\mathscr{E}_{-\frac{\pi}{2}}$ и $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{2}}$; г) $\mathscr{E}_{-\frac{\pi}{6}}$ и $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{6}}$. 96. а) $\mathscr{E}_{\frac{5\pi}{12}}$ и $\mathscr{E}_{-\frac{\pi}{12}}$; б) $\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{E}_{2\alpha}$; в) $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{2}}$ и $\mathscr{E}_{-\frac{\pi}{6}}$; г) $\mathscr{E}_{-\frac{5\pi}{6}}$ и $\mathscr{E}_{\frac{\pi}{6}}$; д) $\mathscr{E}_{2\alpha}$ и $\mathscr{E}_0$. 97. Повернется в положительном (или отрицательном) направлении на угол $\beta$. 98. $\mathscr{E}_\alpha$, $\mathscr{E}_{\alpha+\frac{2\pi}{n}}$, $\mathscr{E}_{\alpha+\frac{4\pi}{n}}$, ..., $\mathscr{E}_{\alpha+\frac{(n-1)2\pi}{n}}$. 99. $\mathscr{E}_{\frac{\pi n}{2}\pm\alpha} = \mathscr{E}_{\frac{\pi n}{2}} \cdot \mathscr{E}_{\pm\alpha} = \mathscr{E}^n_{\frac{\pi}{2}} \cdot \mathscr{E}_{\pm\alpha} = i^n \cdot \mathscr{E}_{\pm\alpha}$.

101. а) $0$, $\frac{1}{2}$, $0$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $1$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-1$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 102. а) $0$, $1$, $0$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$, $0$, $-1$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-1$. 103. Решение. Так как $\mathscr{E}_{-x} = \overline{\mathscr{E}_x}$, то $\cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x$. Отсюда на основании условия равенства комплексных чисел получим: $\cos(-x) = \cos x$ и $\sin(-x) = -\sin x$. Следовательно, косинус есть функция четная, а синус — нечетная. 104. Указание. Сравнить комплексные единицы $\mathscr{E}_x$ и $\mathscr{E}_{x+2k\pi}$. 105. Указание. Сравнить комплексные единицы $\mathscr{E}_{\alpha\pm\beta}$ и $\mathscr{E}_\alpha \cdot \mathscr{E}_{\pm\beta}$. 106. Указание. Сравнить комплексные единицы $\mathscr{E}_{2\alpha}$ и $(\mathscr{E}_\alpha)^2$. 107. Ука-

з а н и е. Сравнить комплексные единицы $\mathscr{E}_{3\alpha}$ и $\left(\mathscr{E}_{\alpha}\right)^3$; $\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-$ $-3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$, $\sin 3\alpha=3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha-\sin^3\alpha$. **108.** У к а з а н и е. Сравнить комплексные единицы $\mathscr{E}_{n\alpha}$ и $\left(\mathscr{E}_{\alpha}\right)^n$. $\cos n\alpha=\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\times$ $\times\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha-\ldots$; $\sin n\alpha=C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-$ $-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha+\ldots$; **109.** У к а з а н и е. Сравнить комплексные единицы $\mathscr{E}_{\frac{\alpha}{2}}$ и $\sqrt{\mathscr{E}_{\alpha}}$ и использовать формулу извлечения корня: $\sqrt{a+bi}=\pm\sqrt{\frac{r+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{r-a}{2}}$, $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

**110.** У к а з а н и е. Сравнить в тригонометрической форме $\mathscr{E}_{\alpha+\beta+\gamma}$ и $\mathscr{E}_{\alpha}\cdot\mathscr{E}_{\beta}\cdot\mathscr{E}_{\gamma}$. $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma-$ $-\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\alpha$; $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\times$ $\times\sin\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma+\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma$.
**111.** У к а з а н и е. Использовать тождество задачи 99.
**112.** $\cos\alpha=\dfrac{\mathscr{E}_{\alpha}+\mathscr{E}_{-\alpha}}{2}$, $\sin\alpha=\dfrac{\mathscr{E}_{\alpha}-\mathscr{E}_{-\alpha}}{2i}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\mathscr{E}_{\alpha}-\mathscr{E}_{-\alpha}}{i\left(\mathscr{E}_{\alpha}+\mathscr{E}_{-\alpha}\right)}$,
$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\left(\mathscr{E}_{\alpha}+\mathscr{E}_{-\alpha}\right)i}{\mathscr{E}_{\alpha}-\mathscr{E}_{-\alpha}}$. **113.** $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+$ $+1)$, $\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)$, $\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$.

**114.** У к а з а н и е. Найти по формуле бинома Ньютона $\left(\dfrac{\mathscr{E}_{\alpha}+\mathscr{E}_{-\alpha}}{2}\right)^n$ и $\left(\dfrac{\mathscr{E}_{\alpha}-\mathscr{E}_{-\alpha}}{2i}\right)^n$.

$n=2k$

$$\cos^{2k}\alpha=\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}+\frac{1}{2^{2k-1}}\left[\cos 2k\alpha+C_{2k}^1\cos(2k-2)\alpha+\ldots+\right.$$
$$\left.+C_{2k}^{k-1}\cos 2\alpha\right];$$

$n=2k+1$

$$\cos^{2k+1}\alpha=\frac{1}{2^k}\left[\cos(2k+1)\alpha+C_{2k+1}^1\cos(2k-1)\alpha+\ldots+\right.$$
$$\left.+C_{2k+1}^k\cos\alpha\right];$$

$n=2k$

$$\sin^{2k}\alpha=\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}+\frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}[\cos 2k\alpha-C_{2k}^1\cos(2k-2)\alpha+\ldots+$$
$$+(-1)^{k-1}C_{2k}^{k-1}\cos 2\alpha];$$

$n=2k+1$

$$\sin^{2k+1}\alpha = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}[\sin(2k+1)\alpha - C_{2k+1}^{1}\sin(2k-1)\alpha + \ldots +$$
$$+(-1)^k C_{2k+1}^{k}\sin\alpha].$$

**115.** Указание. Воспользоваться тождеством $\mathscr{E}_\alpha \pm \mathscr{E}_\beta = \mathscr{E}_{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\mathscr{E}_{\frac{\alpha-\beta}{2}} \pm \mathscr{E}_{\frac{\beta-\alpha}{2}}\right)$. **116.** Решение. Рассмотрим $\sum_{k=0}^{n}\mathscr{E}_{k\alpha}$. Так как $\sum_{k=0}^{n}\mathscr{E}_{k\alpha} = 1+\mathscr{E}_\alpha+\mathscr{E}_{2\alpha}+\ldots+\mathscr{E}_{n\alpha} = 1+\mathscr{E}_\alpha+\mathscr{E}_\alpha^2+\mathscr{E}_\alpha^3+\ldots+$ $+\mathscr{E}_\alpha^n$, то, используя формулу суммы членов геометрической прогрессии, получим:

$$\sum_{k=0}^{n}\mathscr{E}_{k\alpha} = \frac{\mathscr{E}_\alpha^{n+1}-1}{\mathscr{E}_\alpha-1} = \frac{\mathscr{E}_{(n+1)\alpha}-1}{\mathscr{E}_\alpha-1} =$$

$$= \frac{\mathscr{E}_{\frac{n+1}{2}\alpha}\left(\mathscr{E}_{\frac{n+1}{2}\alpha}-\mathscr{E}_{-\frac{n+1}{2}\alpha}\right)}{\mathscr{E}_{\frac{\alpha}{2}}\left(\mathscr{E}_{\frac{\alpha}{2}}-\mathscr{E}_{-\frac{\alpha}{2}}\right)} = \frac{\mathscr{E}_{\frac{n\alpha}{2}}\left(\mathscr{E}_{\frac{n+1}{2}\alpha}-\mathscr{E}_{-\frac{n+1}{2}\alpha}\right)}{\mathscr{E}_{\frac{\alpha}{2}}-\mathscr{E}_{-\frac{\alpha}{2}}}.$$

Откуда, используя соотношения задачи 112, будем иметь в тригонометрической форме:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha + i\sin k\alpha = \frac{\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\cdot\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Используя теперь условие равенства двух комплексных чисел, получим:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha = \frac{\cos\frac{n\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},\quad \sum_{k=0}^{n}\sin k\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

**117.** Указание. Рассмотреть сумму $\sum_{k=0}^{n}\mathscr{E}_{\alpha+kh}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+kh) = \frac{\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}h\right)\cdot\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(\alpha+kh) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}h\right)\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{n}{2}}.$$

**118.** Указание. В формуле задачи 116 вместо $\alpha$ положить $\alpha+\pi$, так как $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathscr{E}_{k\alpha} = \sum_{k=0}^{n}\mathscr{E}_{k(\alpha+\pi)}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos k\alpha=\frac{\cos\frac{n}{2}(\alpha+\pi)}{\sin\frac{\alpha+\pi}{2}}\cdot\sin\frac{n+1}{2}(\alpha+\pi),$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sin k\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}(\alpha+\pi)}{\sin\frac{\alpha+\pi}{2}}\cdot\sin\frac{n+1}{2}(\alpha+\pi).$$

**119.** Указание. Рассмотреть сумму $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathscr{E}_{\alpha k}$,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cos k\alpha=2^n\cdot\cos^n\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{n\alpha}{2},\qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k\sin k\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}.$$

**120.** Указание. Для доказательства первого соотношения рассмотреть косоугольный треугольник $ABC$, сторона $AC$ которого сонаправлена с действительной осью. Тогда комплексными координатами векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ будут соответственно комплексные числа: $c_A, a_{-C}$ и $b$. **121.** Решение. Умножим выражение $b=a_C+c_{-A}$ (см. задачу 120) на $\mathscr{E}_{\frac{A}{2}}$. Тогда $b\cdot\mathscr{E}_{\frac{A}{2}}=a_{C+\frac{A}{2}}+c_{-A+\frac{A}{2}}=a_{\frac{2C+A}{2}}+c_{-\frac{A}{2}}$.

Прибавляя к обеим частям равенства выражение $c\cdot\mathscr{E}_{\frac{A}{2}}$, получим:

$(b+c)\cdot\mathscr{E}_{\frac{A}{2}}=a_{\frac{2C+A}{2}}+c_{-\frac{A}{2}}+c_{\frac{A}{2}}$. Так как $\frac{A+2C}{2}=\frac{\pi+C-B}{2}$,

$\mathscr{E}_{\frac{\pi}{2}}=i$ и $c_{\frac{A}{2}}+c_{-\frac{A}{2}}=2c\cos\frac{A}{2}$ (задача 112), то $(b+c)\mathscr{E}_{\frac{A}{2}}=ia\cdot\mathscr{E}_{\frac{C-B}{2}}+$

$+2c\cos\frac{A}{2}$. Или в тригонометрической форме: $(b+c)\left(\cos\frac{A}{2}+\right.$

$\left.+i\sin\frac{A}{2}\right)=ia\left(\cos\frac{C-B}{2}+i\sin\frac{C-B}{2}\right)+2c\cos\frac{A}{2}$. Тогда, используя условие равенства двух комплексных чисел, получим:

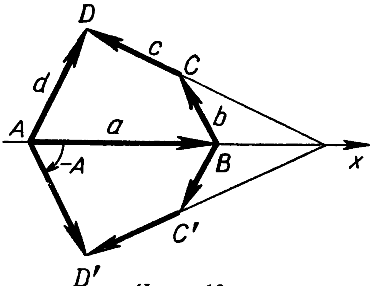
$(c-b)\cos\frac{A}{2}=a\sin\frac{C-B}{2}$, $(c+b)\sin\frac{A}{2}=a\cdot\cos\frac{C-B}{2}$, или

$$\frac{c-b}{a}=\frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\quad\text{и}\quad\frac{c+b}{a}=\frac{\cos\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

**122.** Указание. Рассмотреть сумму $a_A+b_B+c_C$. **123.** Указание. Сделать перегруппировку членов в сумме $a_A+b_B+c_C=$ $=\{a_{B+C}+a_{B-C}\}+\{b_{C+A}+b_{C-A}\}+\{c_{A+B}+c_{A-B}\}$. **124.** Указание. Рассмотреть сумму $c^2a_A+a^2b_B+b^2c_C$.

**125.** Указание. Воспользоваться равенством (смотри задачу 120).

**127.** Р е ш е н и е. Из чертежа 19 имеем: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'D'}$. Так как сторона $a$ четырехугольника сонаправлена с действительной осью, то, записав эти векторные равенства с помощью комплексных координат, будем иметь: $d_A = a - b_{-B} + c_{A+D}$, $d_{-A} = a - b_B + c_{-(A+D)}$, откуда $a = b_{-B} - c_{A+D} + d_A = b_{B} - c_{-(A+D)} + d_{-A}$.

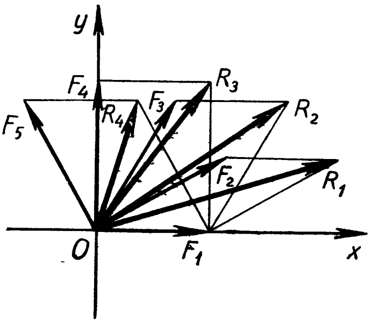


Черт. 19

**128.** Рассмотреть равенство: $b_{-B} - c_{A+D} + d_A = b_B - c_{-(A+D)} + d_{-A}$. **129.** У к а з а н и е. Найти произведение $d_A \cdot d_{-A}$. **130.** Р е ш е н и е. Рассмотрим произведение: $\left(1 \pm \mathscr{E}_A\right) \cdot \left(1 \pm \mathscr{E}_B\right) \cdot \left(1 \pm \mathscr{E}_C\right) = 1 \pm \left(\mathscr{E}_A + \mathscr{E}_B + \mathscr{E}_C\right) + \left(\mathscr{E}_{A+B} + \mathscr{E}_{A+C} + \mathscr{E}_{B+C}\right) + \mathscr{E}_{A+B+C}$. Вынесем из каждой скобки в левой части этого равенства соответственно $\mathscr{E}_{\frac{A}{2}}$, $\mathscr{E}_{\frac{B}{2}}$ и $\mathscr{E}_{\frac{C}{2}}$. Тогда, учитывая, что $A + B = \pi - C$, $A + C = \pi - B$, $B + C = \pi - A$, а $\mathscr{E}_{\pi - C} = -1 \cdot \mathscr{E}_{-C}$, получим:
$\mathscr{E}_{\frac{A+B+C}{2}}\left(\mathscr{E}_{-\frac{A}{2}} \pm \mathscr{E}_{\frac{A}{2}}\right) \cdot \left(\mathscr{E}_{-\frac{B}{2}} \pm \mathscr{E}_{\frac{B}{2}}\right) \cdot \left(\mathscr{E}_{-\frac{C}{2}} \pm \mathscr{E}_{\frac{C}{2}}\right) = 1 \pm \left(\mathscr{E}_A \mp \mathscr{E}_{-A}\right) \pm \left(\mathscr{E}_B \mp \mathscr{E}_{-B}\right) \pm \left(\mathscr{E}_C \mp \mathscr{E}_{-C}\right) \pm (-1)$. Используя соотношения задачи 112 и принимая во внимание сначала нижние знаки, а затем верхние, получим: $-i \cdot 2i \sin\frac{A}{2} \cdot 2i \sin\frac{B}{2} \cdot 2i \sin\frac{C}{2} = 1 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C + 1$ и $i \cdot 2\cos\frac{A}{2} \cdot 2\cos\frac{B}{2} \cdot 2\cos\frac{C}{2} = 1 + 2i\sin A + 2i\sin B + 2i\sin C - 1$. Откуда легко получаются требуемые тождества. **131.** У к а з а н и е. Использовать тождество $\left(1 \pm \mathscr{E}_A\right) \cdot \left(1 \pm \mathscr{E}_B\right) \cdot \left(1 \mp \mathscr{E}_C\right) = 1 \pm \left(\mathscr{E}_A + \mathscr{E}_B - \mathscr{E}_C\right) + \left(\mathscr{E}_{A+B} - \mathscr{E}_{A+C} - \mathscr{E}_{B+C}\right) \mp \mathscr{E}_{A+B+C}$. **132.** У к а з а н и е. Использовать тождество $\left(1 \pm \mathscr{E}_{2A}\right) \times \left(1 \pm \mathscr{E}_{2B}\right)\left(1 \pm \mathscr{E}_{2C}\right) = 1 \pm \left(\mathscr{E}_{2A} + \mathscr{E}_{2B} + \mathscr{E}_{2C}\right) + \left(\mathscr{E}_{2(A+B)} + \mathscr{E}_{2(A+C)} + \mathscr{E}_{2(B+C)}\right) \pm \mathscr{E}_{2(A+B+C)}$. **133.** У к а з а н и е. Смотри тождество в указаниях к задаче 132. **134.** Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами для выражения синуса и косинуса через комплексные единицы и перепишем заданное равенство в виде:

$$\frac{\mathscr{E}_A - \mathscr{E}_{-A}}{2i} = 2\frac{\mathscr{E}_B - \mathscr{E}_{-B}}{2i} \cdot \frac{\mathscr{E}_C + \mathscr{E}_{-C}}{2},$$

или $\mathscr{E}_A - \mathscr{E}_{-A} = \mathscr{E}_{B+C} - \mathscr{E}_{C-B} + \mathscr{E}_{-C+B} - \mathscr{E}_{-(B+C)}$. Так как $B + C = \pi - A$, то $\mathscr{E}_A - \mathscr{E}_{-A} = -\mathscr{E}_{-A} + \mathscr{E}_A - \mathscr{E}_{C-B} + \mathscr{E}_{-C+B}$, откуда $\mathscr{E}_{B-C} - \mathscr{E}_{-(B-C)} = 0$, т. е. $\sin(B - C) = 0$. И так как $B - C < \pi$, то $B = C$.



Черт. 20

**135.** Указание. Смотри решение задачи 134. **136.** Решение. Будем считать, что точка приложения сил во всех случаях совпадает с началом координат, а сила $\vec{F_1}$ сонаправлена с действительной осью (черт. 20). Тогда: а) силе $\vec{F_1}$ соответствует действительное число 30, а силе $\vec{F_2}$ — комплексное число $40(\cos 30° + i \sin 30°) \approx 35+20i$, $\vec{R_1}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$, $\vec{R_1}=(65+20i)$. Откуда модуль равнодействующей будет равен $R_1 = \sqrt{4225+400} \approx 68$ (*н*). Аналогично находим: б) $R_2 = \sqrt{2500+1225} \approx 61{,}4$ (*н*); в) $R_3 = \sqrt{900+1600} = 50$ (*н*); г) $R_4 = \sqrt{100+1225} \approx 36{,}4$ (*н*).

Сравнивая полученные выражения для равнодействующих, видим, что с увеличением угла между составляющими силами модуль равнодействующей уменьшается. **137.** $\vec{v} <=> v_1(\cos 60° + i \sin 60°)$. **138.** $\approx 8{,}7$ *м/сек*. **139.** 30 *н*. **140.** $R_2 = 964$, $R_3 \approx 925$, $R_4 \approx 700$, $R_5 \approx 382$. **141.** 120°.

# Глава VIII НЕРАВЕНСТВА

В этой главе предлагаются задачи на доказательство неравенств и решение неравенств с неизвестными. Упражнения разбиты на 5 параграфов, из которых первые четыре рассматривают различные методы доказательства неравенств, а в § 5 даны упражнения на решение неравенств с неизвестными.

В § 1 предлагаются неравенства, которые можно доказать методом математической индукции. Вообще, метод индукции применяется к доказательству любого утверждения, высказанного относительно всех членов данной последовательности. Предположим, нам надо доказать утверждение $A$ относительно всех членов данной последовательности $\{a_n\}$. Рассуждения методом математической индукции состоят в следующем.

1. *Пытаемся доказать, что утверждение $A$ справедливо для первого члена данной последовательности $a_1$.*

2. *Пытаемся доказать теорему: если утверждение $A$ справедливо для $a_k$, то оно справедливо и для $a_{k+1}$.*

Если обе эти попытки удачны, то утверждение $A$ доказано для всех членов последовательности $\{a_n\}$.

Пример 1. Доказать, что $\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}}}_{n}<3$ при всех натуральных $n$.

Решение. В левой части стоит последовательность, которую обозначим через $\{a_n\}$, т. е. $a_n=\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}}}_{n}$. Нам нужно доказать утверждение $A: a_n<3$ для всех членов данной последовательности.

1. $a_1=\sqrt{3}<3$. Утверждение $A$ верно для $a_1$.

2. Теорема. *Если $a_k<3$, то $a_{k+1}<3$.*

Доказательство. $a_{k+1}=\underbrace{\sqrt{3+\underbrace{\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}}_{k}}}_{k+1}=\sqrt{3+a_k}.$

По условию теоремы $a_k<3$. Поэтому $a_{k+1}<\sqrt{3+3}=\sqrt{6}<\sqrt{9}=3$. Теорема доказана, а значит, и доказано утверждение, выраженное в условии.

Замечание. При доказательстве теоремы практически необходимо установить соотношение между $a_{k+1}$ и $a_k$, что не всегда бывает легко.

Пример 2. Доказать неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 2\sqrt{n}-1.$$

Решение. Обозначим $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=a_n$, $2\sqrt{n}-1=b_n$. Нам нужно доказать, что $a_n\leqslant b_n$.

1. $a_1=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$, $b_1=2\sqrt{1}-1=1$. Отсюда $a_1=b_1$. Утверждение верно для $a_1$ и $b_1$.

2. **Теорема.** *Если* $a_k\leqslant b_k$, *то* $a_{k+1}\leqslant b_{k+1}$.

Доказательство. $a_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+$ $+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=a_k+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. По условию теоремы $a_k\leqslant b_k=$ $=2\sqrt{k}-1$. Поэтому $a_{k+1}\leqslant 2\sqrt{k}-1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Нам нужно доказать, что $a_{k+1}\leqslant 2\sqrt{k+1}-1$. Это утверждение будет доказано, если докажем, что $2\sqrt{k}-1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leqslant 2\sqrt{k+1}-1$. Докажем это последнее неравенство. Сравним $2\sqrt{k}-1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\vee$ $\vee\, 2\sqrt{k+1}-1$ или $\frac{1}{\sqrt{k+1}}\vee 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$, или $2\cdot\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}\overset{<}{\vee}\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

В § 2 рассматриваются неравенства, которые доказываются методом, названным автором методом усреднения. Этот метод излагается в качестве введения к § 2. Более подробно о нем можно прочесть в статье В. С. Ваксмана и Г. Б. Хасина «Об одном методе доказательства неравенств», опубликованной в журнале «Математика в школе» № 6 за 1966 г. Основу этого метода составляют примеры 11 и 12, из которых пример 11 подробно решен в тексте, пример 12 решается аналогично.

В § 3 рассматриваются 3 замечательных неравенства: неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, неравенства Непера, неравенство Коши — Буняковского, доказанные в тексте, а также задачи, основанные на этих неравенствах. В практическом отношении очень важны задачи 21 и 22.

Пример. Найти наименьшее значение функции $y=x^3+\frac{2}{x}$ при $x>0$.

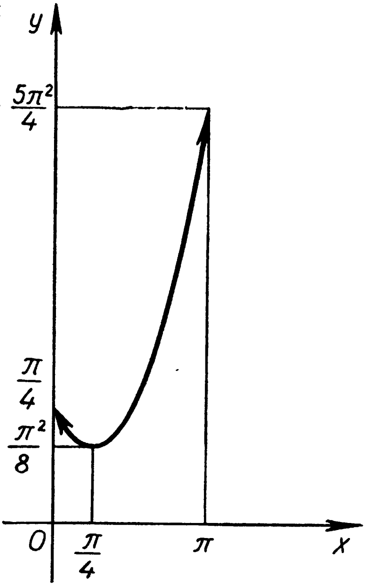
Решение. Представим $y$ в виде $y=x^3+\frac{2}{3x}+\frac{2}{3x}+\frac{2}{3x}$. Заметим, что $x^3\cdot\frac{2}{3x}\cdot\frac{2}{3x}\cdot\frac{2}{3x}=\frac{8}{27}=\text{const}$. В силу задачи 22 $y_{\min}$, если $x^3=\frac{2}{3x}$, т. е. $x=\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ и $y_{\min}=\sqrt[4]{\frac{8}{27}}+\sqrt[4]{24}=$ $=\frac{4}{3}\sqrt[4]{24}$.

В § 4 рассматриваются неравенства, доказательство которых основано на свойствах монотонности известных из школы элементарных функций. В некоторых задачах этого параграфа нужно уметь находить множество значений квадратного трехчлена на различных подмножествах множества действительных чисел. Проще всего это сделать графически.

Пример. Найти множество значений функции $y=(\operatorname{arctg}x)^2+(\operatorname{arcctg}x)^2$.

Решение. Обозначим $\operatorname{arcctg}x$ через $z$, тогда $\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}-z$ и $y=\left(\frac{\pi}{2}-z\right)^2+z^2$, где $0<z<\pi$. Итак, нам нужно найти множество значений функции $y=2z^2-\pi z+\frac{\pi^2}{4}$ при $0<z<\pi$. Находим координаты вершины $V$ параболы $2z^2-\pi z+\frac{\pi^2}{4}$: $z_V=\frac{\pi}{4}$, $y_V=\frac{\pi^2}{8}$, при $z=0$ $y=\frac{\pi^2}{4}$, при $z=\pi$ $y=\frac{5\pi^2}{4}$. Строим график данной квадратной функции на интервале $(0,\pi)$.

Из графика (черт. 21) видно, что $\frac{\pi^2}{8}\leqslant y\leqslant\frac{5\pi^2}{4}$.



Черт. 21

Задачи из § 5 являются неравенствами с неизвестными, которые решаются на основании теорем равносильности неравенств с неизвестными и применением графических методов решений алгебраических и простейших тригонометрических неравенств.

## § 1. МЕТОД ИНДУКЦИИ

1. Доказать неравенство

$$\underbrace{\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{5+\ldots+\sqrt[3]{5}}}}_{n}<2$$

при всех натуральных $n$.

2. Доказать неравенство Бернулли

$$(1+\varepsilon)^n \geqslant 1+n\varepsilon$$

при всех натуральных $n$.

3. Если $p$ — данное натуральное число, большее единицы, то при всех натуральных $n$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p} \geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}.$$

Доказать.

4. Обозначим через $a_n$ количество различных представлений натурального числа $n$ в виде суммы натуральных слагаемых. Доказать, что $a_n \leqslant 2^{n-1}$.

5. Доказать, что при всех действительных $x$ справедливо неравенство: $2^x > x$.

6. Если $1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5$, то $\sqrt{3}^x > x$. Доказать.

7. Используя результат предыдущей задачи, доказать неравенство $\sqrt[3]{3}^x > x$ при всех действительных $x$.

8. Доказать, что последовательность

$$a_n = \underbrace{\sqrt{3}^{\sqrt{3}^{\cdots^{\sqrt{3}}}}}_{n}$$

не имеет предела.

## § 2. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

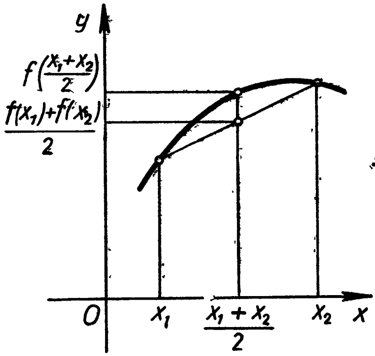
Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, заданная на интервале $(a, b)$. Тогда ее называют *выпуклой на этом интервале, если для любых различных $x_1$ и $x_2$ из $(a, b)$ выполняется неравенство:*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

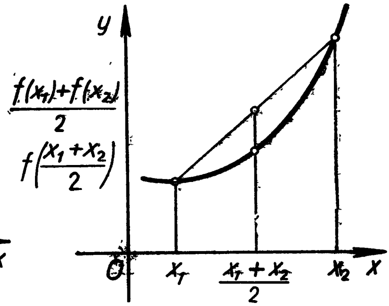
Аналогично непрерывная функция называется *вогнутой на интервале $(a, b)$, если для любых различных $x_1$ и $x_2$, взятых на этом интервале, справедливо неравенство:*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

(черт. 22 и 23).




Черт. 22




Черт. 23

*Основное свойство выпуклых и вогнутых функций на интервале состоит в том, что все точки из графика (на данном интервале) лежат в одной полуплоскости относительно прямой, соединяющей концы этого графика.*

На основании этого свойства решите задачи 9 и 10.

9. Если $f(x)$ — выпуклая функция на интервале $(a, b)$, $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, то $f(a) + f(b) < f(a+\varepsilon) + f(b-\varepsilon)$. Доказать.

10. Если $f(x)$ — вогнутая функция на интервале $(a, b)$ и $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, то $f(a) + f(b) > f(a+\varepsilon) + f(b-\varepsilon)$. Доказать.

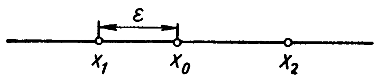
11. Если $f(x)$ — выпуклая функция на интервале $(a, b)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые значения аргумента, взятые из интервала, то справедливо неравенство:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \leqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right). \quad (1)$$

При этом равенство возможно тогда и только тогда, если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Решение. Обозначим среднее арифметическое $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ через $x_0$. Рассмотрим два случая.

1. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Тогда левая и правая части в выражении (1) равны $f(x_0)$ и поэтому равны между собой.



Черт. 24

2. Среди $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть и различные числа. Пусть $x_1$ — ближайший к $x_0$ среди тех чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые отличны от $x_0$. Для определенности будем считать, что $x_1 < x_0$. Тогда среди чисел $x_2, x_3, \ldots, x_n$ есть хотя бы одно число, большее $x_0$, так как иначе $x_0$ не было бы средним арифметическим числом $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть это число есть $x_2$. Обозначим расстояние между точками $x_1$ и $x_0$ на числовой оси через $\varepsilon$ (черт. 24).

Положим, $y_1 = x_1 + \varepsilon$, $y_2 = x_2 - \varepsilon$, $y_3 = x_3, \ldots, y_n = x_n$. Таким образом, мы от набора $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перешли к набору $y_1, y_2, \ldots, y_n$, который замечателен следующими свойствами:

1. $\dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = x_0$.

2. Среди чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по крайней мере одно равно $x_0$.

3. $f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n) > f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$.

Убедимся в справедливости этого неравенства. Действительно, $[f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n)] - [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] = [f(x_1 + \varepsilon) + f(x_2 - \varepsilon)] - [f(x_1) + f(x_2)]$, а эта разность положительна, так как $f(x)$ выпукла на интервале $(a, b)$ (см. задачу 9).

Если в наборе $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не все числа равны $x_0$, то мы поступим с этим набором так же, как выше описано: перейдем к набору $z_1, z_2, \ldots, z_n$, в котором количество чисел, равных $x_0$, по крайней мере на одно больше, чем в предыдущем наборе $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Не далее чем через $n$ таких переходов мы получим набор $u_1, u_2, \ldots, u_n$, в котором все числа равны $x_0$. Кроме этого, у нас возникает цепочка неравенств

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) < f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n) < \ldots < \\ < f(u_1) + f(u_2) + \ldots + f(u_n),$$

в которой последняя сумма равна $nf(x_0)$. Тогда

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) < nf(x_0),$$

или

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} < f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right),$$

что и требовалось доказать.

**12.** Если $f(x)$ — вогнутая функция на $(a, b)$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые $n$ чисел, взятых из интервала $(a, b)$, то справедливо неравенство:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \geqslant f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

При этом равенство возможно тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Доказать.

**13.** Доказать следующие утверждения:
а) $f(x)=x^n$ вогнута при $x>0$; б) $f(x)=\log_a x$ выпукла, если $a>1$, и вогнута, если $0<a<1$ при любых $x>0$.

**14.** $f(x)$ — выпуклая возрастающая функция при всех $x$; $g(x)$ выпукла на $(a, b)$. Доказать, что $f(g(x))$ выпукла на $(a, b)$.

**15.** Доказать неравенство: если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, то справедливо неравенство:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

При этом равенство возможно тогда и только тогда, когда $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Решение. В силу задач 11 и 13 (б) справедливо неравенство:

$$\log_2\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \frac{\log_2 a_1+\log_2 a_2+\ldots+\log_2 a_n}{n} = \\ = \log_2\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Отсюда искомый результат вытекает в силу возрастания функции $\log_2 x$.

**16.** Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (0, \pi)$, то справедливо неравенство:

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n \leqslant n\cdot\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}.$$

**17.** Доказать, что из всех выпуклых $n$-угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный.

**18.** Если $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\pi$ и все $\alpha_i\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n>\pi.$$

Доказать.

**19.** Если $A$, $B$, $C$ — углы одного треугольника, то

$$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Доказать.

**20.** Если $x_1, x_2, \ldots, x_n>0$, то при любом натуральном $k$ справедливо неравенство:

$$\frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}{n}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^k.$$

Доказать.

## § 3. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим три неравенства, которые столь часто применяются при решении различных задач, что их полезно запомнить.

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \qquad (а)$$

если $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. При этом равенство возможно тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Неравенство Непера:

$$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad (б)$$

при всех натуральных значениях $n$.

Неравенство Коши — Буняковского:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \geqslant (\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \ldots + \sqrt{a_nb_n})^2, \qquad (в)$$

если $a_i > 0$, $b_i > 0$. При этом равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом мы уже доказали (см. задачу 15).

Доказательство неравенства Непера. В силу неравенства Бернулли (см. задачу 2) мы имеем:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + \frac{1}{n} \cdot n = 2,$$

так что одно из утверждений, содержащихся в неравенстве Непера, доказано.

Докажем, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$. Рассмотрим последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Она убывает. Действительно,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{[n(n+2)]^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} =$$

$$= \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \times$$

$$\times \frac{n+1}{n+2} \geqslant \left(1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

(согласно неравенству Бернулли).

Отсюда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{n^2+3n+1}{n^2+2n} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

Итак, $a_n > a_{n+1}$, следовательно, последовательность $\{a_n\}$ убывает. Кроме того, $a^5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = \left(\frac{216}{125}\right)^2 = 1{,}728^2 < 1{,}73^2 < 3$, и поэтому $a_n < 3$ при $n \geqslant 5$. Но $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Поэтому при $n \geqslant 5$ справедливо неравенство: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Осталось убедиться в том, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ при $n = 1$, 2, 3, 4. Это легко сделать непосредственной проверкой:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 < 3,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25 < 3,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3,$$

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} < 3.$$

Неравенства Непера доказаны.

Доказательство неравенства Коши—Буняковского. Рассмотрим квадратный трехчлен

$$f(x) = (\sqrt{b_1}\,x - \sqrt{a_1})^2 + (\sqrt{b_2}\,x - \sqrt{a_2})^2 + \ldots + (\sqrt{b_n}\,x - \sqrt{a_n})^2$$

и обозначим его дискриминант через $D$. Из определения $f(x)$ видно, что этот квадратный трехчлен не имеет отрицательных значений, и поэтому $D \leqslant 0$. Найдем дискриминант:

$$f(x) = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\,x^2 - 2x\,(\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots +$$
$$+ \sqrt{a_n b_n}) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Отсюда $\frac{1}{4}D = (\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots + \sqrt{a_n b_n})^2 - (a_1 + a_2 + \ldots +$
$$+ a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqslant 0,$$

или

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \geqslant (\sqrt{a_1 b_1} + \ldots +$$
$$+ \sqrt{a_n \cdot b_n})^2.$$

Из этих рассуждений видно также, что равенство в утверждении возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ имеет действительный корень, для чего необходимым и достаточным условием является возможность обращения в нуль всех разностей: $(\sqrt{b_1}\,x - \sqrt{a_1})$, $(\sqrt{b_2}\,x - \sqrt{a_2})$, ..., $(\sqrt{b_n}\,x - \sqrt{a_n})$ при одном и том же значении аргумента. Поэтому

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)=(\sqrt{a_1b_1}+$$
$$+\sqrt{a_2b_2}+\ldots+\sqrt{a_nb_n})^2$$

в том и только в том случае, если

$$\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}=\sqrt{\frac{a_2}{b_2}}=\ldots=\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}, \text{ или } \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

что и требовалось доказать.

На основании этих замечательных неравенств решите задачи 21—35.

**21.** Если сумма $(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ постоянна и все $x_i \geqslant 0$, то произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ максимально тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Доказать.

**22.** Если произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ постоянно и все $x_i \geqslant 0$, то сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n$ минимальна, если $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Доказать.

**23.** Доказать, что среди всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний.

**24.** Найти наибольшее значение функции $f(x)=x^4(6-4x)$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$.

**25.** Найти наибольшее значение функции $y=25\sin^4 x\cos^6 x$.

**26.** Доказать неравенство: $\log_2 3+\log_3 4+\log_4 5+\log_5 6+\log_6 2>5$.

**27.** Что больше: $22^{21}$ или $21^{22}$?

**28.** Доказать, что при всех натуральных значениях $n$ справедливо неравенство: $\left(\frac{n}{3}\right)^n<n!$

**29.** Доказать, что $n! \geqslant \sqrt{n^n}$ при всех натуральных значениях $n$.

**30.** Доказать неравенство

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)(x_1+x_2+\ldots+x_n) \geqslant n^2,$$

если $x_1, x_2, \ldots, x_n>0$.

**31.** Четыре проводника соединены последовательно, а затем параллельно. Оказалось, что в первом случае сопротивление равно 64 ома, а во втором — 4 ома. Найти сопротивление каждого проводника.

**32.** Через начало прямоугольной декартовой системы координат в пространстве проведена прямая $l$, которая образует острые углы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ с осями координат. Доказать, что $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant \sqrt{3}$.

**33.** Куб проектируется на плоскость. Доказать, что площадь проекции максимальна тогда и только тогда, если плоскость перпендикулярна одной из диагоналей куба.

**34.** $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = n^4$. Все $x_i > 0$. Найти, при каких положительных значениях $x_i$ сумма $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$ принимает наибольшее значение.

**35.** Найти все положительные решения системы

$$\begin{cases} (x + 3y + 4z + u)^2 = 27(x^2 + y^2 + z^2 + u^2), \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 93. \end{cases}$$

## § 4. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕРАВЕНСТВ

**36.** Доказать неравенство: $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

**37.** Доказать неравенство: $\log_7 8 < \log_6 7$.

**38.** Дан $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AD$ — медиана из вершины $A$, $BE$ — медиана из вершины $B$. Доказать неравенства:

$$\frac{1}{2} < \frac{AD}{BE} < 2.$$

**39.** Доказать неравенство: $\arcsin x \cdot \arccos x \leqslant \frac{\pi^2}{16}$.

**40.** Доказать, что при всех действительных значениях $x$ справедливо неравенство: $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 \geqslant 0$.

**41.** Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$. Доказать.

**42.** Доказать, что при всех натуральных значениях $n$, больших двух, справедливы неравенства:

$$\frac{n-1}{2(n+1)} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

**43.** Доказать неравенство $x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x + 1 > 0$ при всех действительных значениях $x$ и натуральных значениях $n$.

**44.** Доказать, что уравнение

$$5 \operatorname{tg}^7 x - 6 \cos x = 8 \sin x - 5 \operatorname{ctg}^7 x$$

не имеет решений.

**45.** Последовательность $\{a_n\}$ задана следующими соотношениями: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{\,a_n}$. Доказать, что $\{a_n\}$ возрастает и $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$.

**46.** Если $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$ и все $a_i > 0$, то справедливо неравенство: $(1 + a_1)(2 + a_2) \cdot \ldots \cdot (n + a_n) \geqslant 2^n \sqrt{n!}$ Доказать.

**47.** Доказать неравенство $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ при всех натуральных значениях $n$.

## § 5. НЕРАВЕНСТВА С НЕИЗВЕСТНЫМИ

Решить неравенства.

**48.** $x^4 + 10x^3 - 22x^2 + 10x + 1 > 0$.

**49.** $2|x| < x^2$.

**50.** $3^{\log_2(x^2+3x+4)} - 8(x^2 + 3x + 4)^{\log_2 3} < 9$.

**51.** $\sqrt{\frac{x}{x-2}} - \sqrt{\frac{x-2}{x}} < \frac{3}{2}$.

**52.** $\log_x 3x + \log_{9x} x^3 - \log_{3x} x^6 < 0$.

**53.** $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-10}$.

**54.** $2\sin 2x - 5\sin x < 5\cos x - 4$.

**55.** Найти множество значений функции

$$f(x) = \frac{|x-2|}{2x+5} \text{ при } 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

**56.** При каких значениях $a$ уравнение

$$x^2 - ax + 6 = 0$$

имеет корни, расположенные в интервале $(1, 3)$?

**57.** Решить неравенство: $\operatorname{tg}(x + 10^\circ) \cdot \operatorname{tg}(x + 55^\circ) < \frac{2}{3}$.

**58.** Решить неравенство: $\cos^2 \frac{3x}{4} < \cos x$.

**59.** При каких значениях $m$ среди решений неравенства

$$mx^2 + (m-1)x + 3 > 0$$

находятся все положительные числа?

**60.** При каких значениях $m$ среди решений неравенства $mx^2 - 2mx + 1 < 0$ находятся все решения неравенства $3x + 5 < 2$?

**61.** При каких значениях $a$ система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 2, \\ x + y < a \end{cases}$$

не имеет решений?

**62.** При каких значениях $a$ система неравенств

$$\begin{cases} y > x^2, \\ y - 2x < a \end{cases}$$

имеет решения?

## ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

### § 1.

2. Обозначим $(1 + \varepsilon)^n$ через $a_n$, $1 + n\varepsilon$ через $b_n$. Нам надо доказать, что $a_n \geqslant b_n$.

При $n = 1$ имеем: $a_1 = 1 + \varepsilon$, $b_1 = 1 + \varepsilon$, т. е. $a_1 = b_1$.

Предположим, что $a_k \geqslant b_k$. Тогда $a_{k+1} = (1 + \varepsilon)^{k+1} = (1 + \varepsilon)^k \times$ $\times (1 + \varepsilon) = a_k (1 + \varepsilon) \geqslant b_k (1 + \varepsilon) = (1 + k\varepsilon)(1 + \varepsilon) = 1 + (k+1)\varepsilon +$ $+ \varepsilon^2 \geqslant 1 + (k + 1)\varepsilon = b_{k+1}$. **3.** Решение. Обозначим $\frac{1}{n+1} +$ $+ \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{pn}$ через $a_n$ и докажем методом математической индукции, что $a_n \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$.

При $n = 1$ имеем: $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$.

Предположим, что $a_k \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$; тогда $a_{k+1} =$ $= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{(k+1)p} = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots +\right.$ $\left. + \frac{1}{kp}\right) + \left(\frac{1}{kp+1} + \frac{1}{kp+2} + \ldots + \frac{1}{kp+p} - \frac{1}{k+1}\right) = a_k + x_k$. Не трудно заметить, что $x_k = \frac{1}{kp+1} + \frac{1}{kp+2} + \ldots + \frac{1}{kp+p} - \frac{1}{k+1} \geqslant 0$.

Действительно, $\frac{1}{kp+1} \geqslant \frac{1}{kp+p}$; $\frac{1}{kp+2} \geqslant \frac{1}{kp+p}$; $\ldots$; $\frac{1}{kp+p} \geqslant \frac{1}{kp+p}$. Складывая эти неравенства почленно, получим: $\frac{1}{kp+1} + \frac{1}{kp+2} + \ldots + \frac{1}{kp+p} \geqslant \frac{p}{kp+p} = \frac{1}{k+1}$, т. е. $x_k \geqslant 0$. Отсюда $a_{k+1} \geqslant a_k \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$. **4.** Решение. Обозначим через $a_n$ количество различных представлений натурального числа $n$ в виде суммы натуральных слагаемых. Докажем методом математической индукции, что $a_n \leqslant 2^{n-1}$, $a_2 = 2$, так как число 2 можно представить в двух видах: $1+1$ и 2. Итак, $a_2 = 2^{2-1}$.

Предположим теперь, что $a_k \leqslant 2^{k-1}$, и докажем, что $a_{k+1} \leqslant 2^k$.

Пусть $a_{k+1}$ — количество различных представлений числа $(k+1)$ в виде суммы натуральных слагаемых. Если число $k$ представлено в виде суммы $n_1 + n_2 + \ldots + n_e$, то это разложение индуцирует разложение числа $(k+1)$ в виде суммы натуральных слагаемых, среди которых есть 1, при этом мы не пропустим ни одного такого разложения числа $(k+1)$. Таким образом, различных представлений числа $(k+1)$ в виде суммы натуральных слагаемых, в числе которых есть хотя бы одна единица, будет не более $a_k$. Теперь рассмотрим представления числа $(k+1)$ в виде суммы натуральных слагаемых, среди которых отсутствует единица. Каждое такое представление можно считать полученным из представления числа $k$ в виде суммы натуральных слагаемых, среди которых не более чем одна единица, и поэтому таких представлений числа $(k+1)$ будет также не более чем $a_k$. Из этих рассуждений следует, что $a_{k+1} \leqslant 2a_k$, а тогда по предположению $a_{k+1} \leqslant 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$.

5. Решение. При $x < 0$ неравенство очевидно.

Для доказательства неравенства при $x \geqslant 0$ разобьем числовую полуось $x \geqslant 0$ на отрезки:

$$[0,\ 1],\ [1,\ 2],\ \ldots,\ [n-1,\ n],\ \ldots .$$

Докажем теперь, что неравенство $2^x > x$ верно при всех $x$ из каждого интервала.

Рассмотрим первый отрезок $[0, 1]$. Для всякого $x$ из этого отрезка имеем: $2^x > 2^0 = 1 > x$, так что наше неравенство выполняется.

Предположим, что неравенство $2^x > x$ выполняется для всех $x$ из отрезка $[k, k+1]$, и докажем, что оно выполняется для всех $x$ из отрезка $[k+1, k+2]$. Пусть $x \in [k+1, k+2]$, тогда $x - 1 \in [k, k+1]$, и согласно предположению $2^{x-1} > x - 1$. Отсюда следует, что $2^x > 2(x-1) = x + (x-2) > x$, так как, начиная с третьего отрезка, $x > 2$.

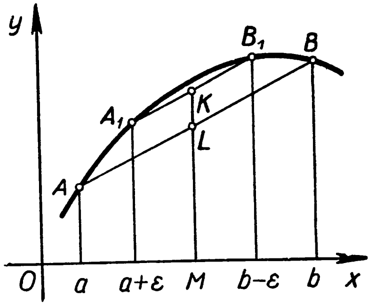
Осталось рассмотреть второй отрезок. Пусть $x \in [1, 2]$. Тогда $2^x > 2^1 > x$, так что и в этом отрезке наше неравенство выполняется.

6. Решение. Разобьем отрезок $[1{,}5;\ 2{,}5]$ на две части: $[1{,}5;\ 2]$ и $[2;\ 2{,}5]$. Пусть $x \in [1{,}5;\ 2]$, тогда $3^x \geqslant 3^{1{,}5} > 3 \cdot 1{,}7 > 5$, а $x^2 < 4$, следовательно, $3^x > x^2$, или $\sqrt{3^x} > x$. Пусть $x \in [2;\ 2{,}5]$, тогда $\sqrt{3^x} \geqslant 3 > x$, т. е. $\sqrt{3^x} > x$.

7. Указание. Проведите рассуждения аналогично доказательству в задаче 5, разбив все числа $x \geqslant 1{,}5$ на отрезки: $[1{,}5;\ 2{,}5]$, $[2{,}5;\ 3{,}5]$, $\ldots$, $\left[n + \frac{1}{2},\ n + \frac{3}{2}\right]$, $\ldots$ . После этого проведите рассуждения для отрезков $[0, 1]$ и $[1;\ 1{,}5]$, а также для $x < 0$.

8. Указание. Если бы $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ существовал, то он был бы корнем уравнения $\sqrt{3^x} = x$, которое в силу задачи 7 не имеет решений.

§ 2.




Черт. 25

**9.** Решение. Так как $f(x)$ — выпуклая функция, то отрезок $[A_1B_1]$ лежит выше отрезка $[AB]$ (черт. 25). Средние линии трапеций $ABba$ и $A_1B_1(b-\varepsilon)(a+\varepsilon)$ имеют общую точку $M$ с ссью $x$ и при этом $KM > LM$. Но $KM = \frac{f(a+\varepsilon)+f(b-\varepsilon)}{2}$, $LM = \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Отсюда $f(a+\varepsilon)+f(b-\varepsilon) > f(a)+f(b)$.

**12.** Указание. Доказательство аналогично задаче 11.

**13.** Решение. а) Нам нужно доказать неравенство

$$\frac{x_1^n + x_2^n}{2} > \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^n$$

при всех натуральных значениях $n \geqslant 2$ и различных положительных $x_1$ и $x_2$. Будем доказывать методом математической индукции.

При $n = 2$ имеем: $\frac{x_1^2+x_2^2}{2} - \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{(x_1-x_2)^2}{4} > 0.$

Предположим теперь, что $\frac{x_1^k+x_2^k}{2} > \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^k$, и докажем, что $\frac{x_1^{k+1}+x_2^{k+1}}{2} > \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{k+1}$. Действительно, $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{k+1} =$

$$= \frac{x_1+x_2}{2}\cdot\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^k < \frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_1^k+x_2^k}{2} < \frac{x_1^{k+1}+x_2^{k+1}}{2},$$

так как $\frac{x_1^{k+1}+x_2^{k+1}}{2} - \frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_1^k+x_2^k}{2} =$

$$= \frac{x_1^{k+1} - x_1^k x_2 - x_1 x_2^k + x_2^{k+1}}{4} = \frac{(x_1^k - x_2^k)(x_1-x_2)}{4} > 0$$ как при

$x_1 > x_2$, так и при $x_1 < x_2$, ибо разности, стоящие в числителе, — одного знака;

б) $\sqrt{x_1x_2} < \frac{x_1+x_2}{2}$, и так как $\log_a x$ $(a > 1)$ возрастает, то $\log\sqrt{x_1x_2} < \log\frac{x_1+x_2}{2}$, или $\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} < \log_a \frac{x_1+x_2}{2}$, откуда и вытекает выпуклость функции $\log_a x$ при $a > 1$. Аналогичны рассуждения и для случая $0 < a < 1$.

14. В силу выпуклости функции $g(x)$ имеем: $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$. Отсюда в силу возрастания функции $f(x)$ имеем: $f\left(g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) > f\left(\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\right)$. Отсюда в силу выпуклости функции $f(x)$ имеем: $f\left(g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) > \frac{f(g(x_1))+f(g(x_2))}{2}$, что и требовалось доказать.

16. Указание. Докажите, что функция $\sin x$ выпукла на отрезке $[0, \pi]$, и тогда неравенство вытекает из задачи 11.

17. Указание. Пусть $R$ — радиус окружности и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — центральные углы, опирающиеся на стороны выпуклого $n$-угольника, вписанного в эту окружность. Тогда периметр многоугольника определяется по формуле $P_n = 2R\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i$, где $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$.

Теперь результат следует из задачи 16.

18. Решение. Построим $n$-угольник, описанный около окружности радиуса $R$, с центральными углами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, полагая $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\ldots$, $\beta_n = \alpha_n + \alpha_1$. Это возможно, так как по условию $\sum_{i=1}^{n}\beta_i = 2\pi$ и $0 < \beta_i < \frac{\pi}{2}$. Площадь этого $n$-угольника выразится по формуле $S_n = R^2\sum_{i=1}^{n}\operatorname{tg}\alpha_i$, а площадь круга равна $\pi R^2$. В силу очевидного неравенства $S_{kp} < S_n$ имеем: $\pi < \sum_{i=1}^{n}\operatorname{tg}\alpha_i$.

19. Решение. Рассмотрим функцию $\log_2\sin x$. В силу задачи 14 она выпукла на отрезке $[0, \pi]$, так как $\sin x$ выпукла на отрезке $[0, \pi]$, $\log_2 x$ выпукла и возрастает. Теперь в силу задачи 11 имеем:

$$\frac{\log_2\sin A + \log_2\sin B + \log_2\sin C}{3} \leqslant \log_2\sin\frac{A+B+C}{3} = \log_2\sin\frac{\pi}{3}$$

или $\log_2(\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C) \leqslant \log_2\frac{3\sqrt{3}}{8}$, откуда в силу возрастания $\log_2 x$ имеем: $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$, причем равенство выполняется только при $A = B = C$, т. е. в равностороннем треугольнике.

20. Указание. При $k \geqslant 2$ функция $x^k$ вогнута (см. задачу 13 а) Тогда неравенство вытекает из задачи 12.

§ 3.

21. Решение. Обозначим $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ через $P$. Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, то $x_i = \frac{P}{n}$ и $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n = \left(\frac{P}{n}\right)^n$ Если

же среди $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть различные, то в силу задачи 15 $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} < \frac{p}{n}$, откуда $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n < \left(\frac{p}{n}\right)^n$.

22. Указание. Проведите рассуждения аналогично доказательству в задаче 21.

23. Решение. По формуле Герона $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. По условию $p$ постоянно, поэтому $S_\Delta$ максимальна, когда произведение $(p-a)(p-b)(p-c)$ — max.

Заметим, что это произведение состоит из положительных сомножителей, сумма которых постоянна $((p-a)+(p-b)+(p-c)=p)$. Тогда в силу задачи 21 оно максимально, если $p-a=p-b=p-c$, или $a=b=c$.

24. Решение. $f(x) = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (6-4x)$. Сумма $x+x+x+x+(6-4x)=6$ постоянна, причем все слагаемые положительны по условию. Следовательно, $f(x)$ имеет максимальное значение, когда $x = 6-4x$, т. е. при $x = \frac{6}{5}$. Подставляя это значение $x$, получаем максимальное значение функции, равное $\left(\frac{6}{5}\right)^5$.

25. Решение. Обозначим $\sin^2 x$ через $t$. Представим заданную функцию в виде: $y = \frac{3}{2} t \cdot \frac{3}{2} t (1-t)(1-t)(1-t) \cdot \frac{100}{9}$.

Сумма $\frac{3}{2} t + \frac{3}{2} t + (1-t) + (1-t) + (1-t) = 3$ постоянна, и все слагаемые положительны; поэтому произведение $\frac{3}{2} t \cdot \frac{3}{2} t \cdot (1-t)(1-t)(1-t)$, а значит, и наша функция имеет максимальное значение, когда все слагаемые равны между собой (в силу задачи 21), т. е. при $t = \frac{2}{5}$. Само максимальное значение равно $\frac{216}{125}$.

26. Указание. Докажите сначала, что $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \times \log_5 6 \cdot \log_6 2 = 1$, и далее воспользуйтесь неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом (задача 15).

27. Решение. В силу неравенства Непера $\left(\frac{22}{21}\right)^{21} < 21$.

Умножая обе части этого неравенства на $(21)^{21}$, получим: $22^{21} < 21^{22}$.

28. Решение. Будем вести доказательство методом математической индукции. При $n=1$ имеем: $\left(\frac{1}{3}\right)^1 < 1!$

Предположим, что $\left(\frac{k}{3}\right)^k < k!$, и докажем, что $\left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1} < (k+1)!$ По предположению индукции $(k+1)! = k! \cdot (k+1) > \left(\frac{k}{3}\right)^k \times$

$\times (k+1)$. Нам осталось доказать, что $\left(\frac{k}{3}\right)^k \cdot (k+1) > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$.

В силу неравенств Непера $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 3$, или $3 > \frac{(k+1)^k}{k^k}$, откуда, умножая обе части последнего неравенства на $\frac{k^k(k+1)}{3^{k+1}}$, получим требуемое:

$$\left(\frac{k}{3}\right)^k (k+1) > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}.$$

**29.** Решение. Будем вести доказательство методом математической индукции. При $n=1$ имеем: $1! = \sqrt{1^1}$, при $n=2$ имеем: $2! = \sqrt{2^2}$.

Предположим, что $k! > \sqrt{k^k}$ при $k \geqslant 2$, и докажем, что

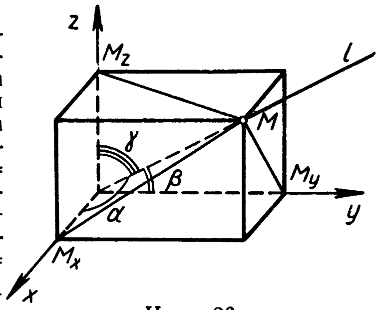
$$(k+1)! > \sqrt{\overline{k+1}^{\,k+1}}.$$

По предположению $(k+1)! = k!\,(k+1) \geqslant \sqrt{k^k}\,(k+1)$. Нам осталось доказать, что $\sqrt{k^k}\,(k+1) > \sqrt{\overline{k+1}^{\,k+1}}$, или $k^k(k+1)^2 > (k+1)^{k+1}$, или $k^k(k+1) > (k+1)^k$. Деля обе части последнего неравенства на $k^k$, приходим к неравенству $(k+1) > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, которое верно в силу неравенств Непера (ибо $k+1 \geqslant 3$).

**30.** Решение. В силу неравенства Коши — Буняковского имеем: $\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant \left(\sqrt{x_1\cdot\frac{1}{x_1}} + \sqrt{x_2\cdot\frac{1}{x_2}} + \ldots + \sqrt{x_n\cdot\frac{1}{x_n}}\right)^2 = n^2$. При этом равенство выполняется только, если $\frac{x_1}{\frac{1}{x_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{x_2}} = \ldots = \frac{x_n}{\frac{1}{x_n}}$, т. е. если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

**31.** Решение. По условию $R_{\text{посл}} = R_1+R_2+R_3+R_4 = 64$; $\frac{1}{R_{\text{пар}}} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} = \frac{1}{4}$. Отсюда $(R_1+R_2+R_3+R_4)\times\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) = 16 = 4^2$. В силу задачи 30 это равенство возможно только, если $R_1=R_2=R_3=R_4$, т. е. $R_1=R_2=R_3=R_4=4$ (ома).

**32.** Решение. Пусть $l$ — данная прямая в данной прямоугольной системе координат в пространстве (черт. 26). Отложим на этой прямой отрезок $OM = 1$ и обозначим проекции точки $M$ на оси координат: $M_x$, $M_y$, $M_z$. Тогда $OM_x = OM \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$, $OM_y = \cos\beta$, $OM_z = \cos\gamma$. Так как $OM$ — диагональ прямоугольного параллелепипеда с непараллельными ребрами $OM_x$, $OM_y$, $OM_z$, то $OM^2 = OM_x^2 + OM_y^2 + OM_z^2$, или $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

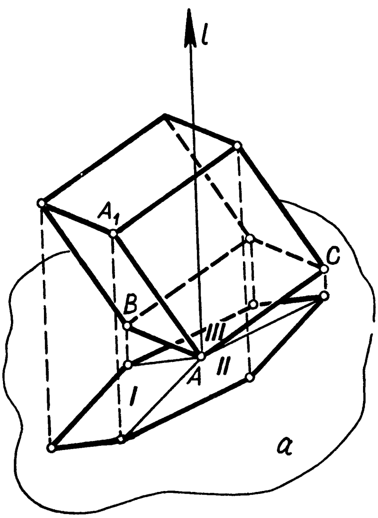



Черт. 26

Теперь в силу неравенства Коши — Буняковского имеем:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \sqrt{(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(1 + 1 + 1)} = \sqrt{3}.$$

При этом равенство возможно только, если $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$.




Черт. 27

**33.** Решение. Пусть данная плоскость проекции $\alpha$ проходит через одну из вершин куба — вершину $A$. Проведем через вершину $A$ прямую $l$, перпендикулярную к плоскости $\alpha$, и обозначим через $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ углы, которые эта прямая образует с ребрами куба $AB$, $AC$, $AA_1$. Проекция куба на плоскость $\alpha$ есть шестиугольник, составленный из трех параллелограммов: I, II, III (черт. 27). При этом площади параллелограммов находятся по формулам: $S_{\text{I}} = S_0 \times \cos\beta_1$, $S_{\text{II}} = S_0 \cdot \cos\beta_2$, $S_{\text{III}} = S_0 \cdot \cos\beta_3$, где $S_0$ — площадь грани куба. Таким образом, площадь проекции куба на плоскость $\alpha$ равна $S_0(\cos\beta_1 + \cos\beta_2 + \cos\beta_3)$. В силу задачи 32 $\cos\beta_1 + \cos\beta_2 + \cos\beta_3 \leqslant \sqrt{3}$, причем равенство возможно только, если $\cos\beta_1 = \cos\beta_2 = \cos\beta_3$, но тогда $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ и прямая $l$ является одной из диагоналей куба.

**34.** Решение. В силу неравенств Коши — Буняковского $(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = n^4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, т. е. $(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n) \leqslant \sqrt{\frac{n^5(n+1)(2n+1)}{6}}$. Значит, $\sqrt{\frac{n^5(n+1)(2n+1)}{6}}$ и есть наибольшее значение данного выражения. Согласно неравенству Коши— Буняковского этот максимум достигается только, если $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \ldots = \frac{x_n}{n}$.

Обозначим эти равные дроби через $t$. Тогда $x_1 = t$, $x_2 = 2t$, ..., $x_n = nt$, откуда по условию $t^2 + 4t^2 + \ldots + n^2t^2 = n^4$, или $t^2 = \frac{6n^3}{(n+1)(2n+1)}$, или $t = \frac{n\sqrt{6n}}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}$.

Теперь находим значения $x_k$, при которых этот максимум достигается:

$$x_k = \frac{kn\sqrt{6n}}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}} \text{ при } k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

35. Решение. Из первого уравнения системы имеем:

$$(x + 3y + 4z + u)^2 = (1 + 9 + 16 + 1) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + u^2).$$

В силу неравенств Коши — Буняковского это равенство возможно для положительных $x$, $y$, $z$, $u$ только, если $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{u}{1}$.

Обозначив эти равные дроби терез $t$, мы получим: $x = t$, $y = 3t$, $z = 4t$, $u = t$. Подставляя эти значения неизвестных во второе уравнение, получим: $93t^3 = 93$, откуда находим $t = 1$, а вместе с ним и неизвестные: $x = 1$, $y = 3$, $z = 4$, $u = 1$.

## § 4.

36. Решение. $\cos(\sin x) - \sin(\cos x) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \sin x\right] - \sin(\cos x) = 2\sin\frac{\frac{\pi}{2} - (\sin x + \cos x)}{2} \cdot \cos\frac{\frac{\pi}{2} - (\sin x - \cos x)}{2}$. (1)

Но $-\sqrt{2} \leqslant \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$ и $-\sqrt{2} \leqslant \sin x - \cos x \leqslant \sqrt{2}$.

Поэтому $\frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\frac{\pi}{2} - (\sin x + \cos x)}{2} \leqslant \frac{\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}}{2}$ и

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\frac{\pi}{2} - (\sin x - \cos x)}{2} \leqslant \frac{\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}}{2}.$$

Учитывая, что $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, получим:

$$0 < \frac{\frac{\pi}{2} - (\sin x + \cos x)}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 < \frac{\frac{\pi}{2} - (\sin x - \cos x)}{2} < \frac{\pi}{2},$$

а, значит, произведение (1) состоит из положительных сомножителей и потому положительно, т. е. $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

**37.** Указание. Докажите сначала, что $\log_7 8 + \log_7 6 < 2$, и далее воспользуйтесь неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

**38.** Решение. Пусть $ABC$ — данный треугольник и $AD$, $BE$ — его медианы, проведенные к катетам. Тогда $AD^2 = AC^2 + \frac{1}{4}BC^2 = AB^2\left(\cos^2 B + \frac{1}{4}\sin^2 B\right)$, $BE^2 = BC^2 + \frac{1}{4}AC^2 = AB^2\left(\frac{1}{4}\cos^2 B + \sin^2 B\right)$, откуда $\frac{AD^2}{BE^2} = \frac{3\cos^2 B + 1}{4 - 3\cos^2 B}$. Заменим $3\cos^2 B$ через $t$ и заметим, что $0 < t < 3$. Таким образом, нам надо найти множество значений функции

$$y = \frac{t+1}{4-t} \text{ при } 0 < t < 3.$$

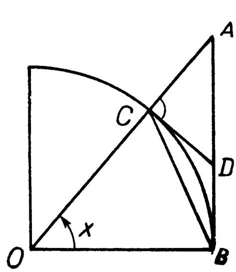
Эта задача эквивалентна такой: при каких значениях $y$ уравнение $\frac{t+1}{4-t} = y$ относительно $t$ имеет решения, находящиеся в интервале $(0, 3)$? Поэтому мы находим $t = \frac{4y-1}{1+y}$ и требуем, чтобы $0 < \frac{4y-1}{1+y} < 3$. Иначе говоря, мы должны решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{4y-1}{y+1} > 0, \\ \dfrac{4y-1}{y+1} < 3. \end{cases}$$

Учитывая, что $y > 0$, мы умножим обе части этой системы на знаменатель и придем к равносильной системе неравенств $\begin{cases} 4y-1 > 0, \\ y-4 < 0, \end{cases}$ откуда находим решения: $\frac{1}{4} < y < 4$. Итак, $\frac{1}{4} < \frac{AD^2}{BE^2} < 4$, или $\frac{1}{2} < \frac{AD}{BE} < 2$.

**39.** Указание. Воспользовавшись тождеством $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, замените $\arccos x$ через $t$, и тогда задача сведется к нахождению множества значений функции $y = \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cdot t = -t^2 + \frac{\pi}{2}t$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

**40.** Указание. Рассмотрим функцию $y = \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x^2}$. Достаточно доказать, что $y \geqslant 0$ при всех допустимых значениях $x$. Для этого представим $y$ в виде: $y = x^2 + \frac{3}{x} + 4 + 3x + \frac{1}{x^2} =$




Черт. 28

$= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2$. Сделаем замену: $x+\frac{1}{x} = t$ — и заметим, что при всех $x$ $\left|x+\frac{1}{x}\right| \geqslant 2$. Таким образом, нам достаточно убедиться в неотрицательности функции $y = t^2 + 3t + 2$ при условии $|t| \geqslant 2$. Это легко сделать графически.

41. Решение. Рассмотрим первую четверть единичного круга (черт. 28), и пусть луч $OA$ составляет угол $x$ радиан с лучом $OB$. Заметим, что $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2}$ есть сумма площадей треугольников $COB$ и $OAB$, а $x$ есть удвоенная площадь сектора $COB$. Поэтому $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2} - x = S_{\Delta ABC} - 2S_{\text{сеч.}CB}$. Докажем, что площадь сегмента $CB$ меньше половины площади треугольника $ABC$. Для этого проведем $CD$ — касательную к окружности в точке $C$.

Заметим, что $DB < AD$, так как $DB = CD$, $CD < AD$, и поэтому $S_{\triangle CBD} < S_{\triangle CAD}$, или $S_{\triangle CBD} < \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, а тогда тем более $S_{\text{сеч.}\ CB} < \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$. Таким образом, $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2} - x = S_{\triangle ABC} - 2S_{\text{сеч.}\ CB} > 0$, а следовательно, $\sin x + \operatorname{tg} x - 2x > 0$.

42. Решение. Напишем систему очевидных неравенств:

$$\frac{1}{2\cdot 3} < \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2},$$
$$\frac{1}{3\cdot 4} < \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\cdot n}.$$

Складывая их почленно, получим: $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$. Заметим, что $\frac{1}{(k-1)\cdot k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Поэтому левая часть последнего неравенства равна $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{2(n+1)}$, а правая часть равна $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-$ $-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$. Отсюда и вытекают требуемые неравенства.

**43.** Указание. При $x=1$ неравенство очевидно. При $x \neq 1$ воспользуйтесь тождеством $x^{2n}+x^{2n-1}+\ldots+x+1=\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}$.

**44.** Решение. Запишем данное уравнение в виде $5(\operatorname{tg}^7 x+\operatorname{ctg}^7 x)=$ $=8\sin x+6\cos x$ и рассмотрим две функции $y=5(\operatorname{tg}^7 x+\operatorname{ctg}^7 x)$ и $z=8\sin x+6\cos x$. Заменив $\operatorname{tg}^7 x$ через $t$, мы получим: $y=5\left(t+\frac{1}{t}\right)$, и так как $\left|t+\frac{1}{t}\right| \geqslant 2$, то $y \leqslant -10$ или $y \geqslant 10$.

С другой стороны, $z=8\sin x+6\cos x=10\sin\left(x+\arccos\frac{4}{5}\right)$, откуда следует, что $-10 \leqslant z \leqslant 10$. Теперь ясно, что данное уравнение может иметь только такие решения, которые одновременно обращают $y$ и $z$ в $-10$ или в $10$. Но $y=-10$ при $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, а $z=-10$ при $x=-\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n$. Так как эти множества не имеют общих значений $x$, то не существуют значения $x$, при которых $y=z=10$ одновременно.

**45.** Решение. 1) Докажем методом математической индукции, что последовательность $a_n$ возрастает.

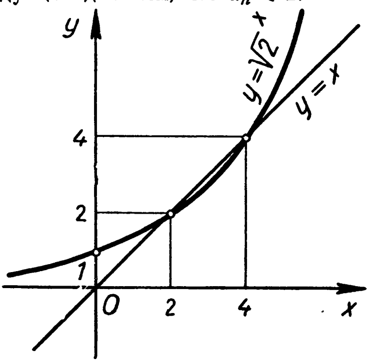
При $n=1$ имеем: $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, и поэтому $a_1<a_2$.

Предположим, что $a_k<a_{k+1}$. Тогда $a_{k+1}=\sqrt{2}^{a_k}<a_{k+2}=$ $=\sqrt{2}^{a_{k+1}}$, так как по предположению $a_k<a_{k+1}$ и $\sqrt{2}>1$.

2) Методом математической индукции докажем, что $a_n<2$.

При $n=1$: $a_1=\sqrt{2}<2$.

Предположим, что $a_k<2$. Тогда $a_{k+1}=\sqrt{2}^{a_k}<$ $<\sqrt{2}^2=2$.



Черт. 29

3) Так как последовательность $a_n$ возрастает и ограничена, то по теореме Вейерштрасса она имеет предел, обозначим его через $x$. Рассмотрим равенство $a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}$ как равенство двух последовательностей: $a_{n+1}$ и $\sqrt{2}^{a_n}$. Эти последовательности равны по условию, следовательно, и пределы их равны,

но $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = x$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2}^{\,n} = \sqrt{2}^{x}$. Таким образом, $x$ является одним из корней уравнения $x = \sqrt{2}^{x}$. Это уравненне имеет два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ (черт. 29). Так как $a_n < 2$, то число 4 не может быть пределом последовательности $a_n$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

**46.** Решение. Согласно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем:

$$1 + a_1 \geqslant 2\sqrt{a_1}$$
$$2 + a_2 \geqslant 2\sqrt{2a_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n + a_n \geqslant 2\sqrt{na_n}$$

Умножая почленно эти неравенства одного смысла с положительными частями, получаем: $(1 + a_1)(2 + a_2) \ldots (n + a_n) \geqslant 2\sqrt[n]{n!}$.

**47.** Решение. Обозначим левую часть неравенства через $x_n$ и заметим, что

$$x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)} = y_n.$$

Кроме того, $x_n \cdot y_n = \frac{1}{2n+1}$, или $x_n^2 < \frac{1}{2n+1}$, откуда $x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

## § 5.

**48.** Решение. В силу четности обеих функций нам достаточно решить данное неравенство при $x > 0$. Но при $x > 0$ данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2}^{x} < x$, которое имеет решение $2 < x < 4$ (чертеж к задаче 45). Ответ. $2 < x < 4$, или $-4 < x < -2$.

**50.** Указание. Докажите сначала тождество $3^{\log_2(x^3+3x+4)} = (x^3 + 3x + 4)^{\log_2 3}$ при всех допустимых значениях $x$. Обозначив затем $3^{\log_2(x^3+3x+4)}$ через $t$, вы придете к неравенству $t^2 - 8t - 9 < 0$, или $-1 < t < 9$, или $\log_2(x^3 + 3x + 4) < 2$.

Чтобы найти решение, разложите $x^3 + 3x + 4$ на множители. Ответ. $-1 < x < 0$.

**51.** $x > \frac{8}{3}$ или $x < 0$.

**52.** $0 < x < 3^{\frac{-7-\sqrt{33}}{4}}$, или $\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}$, или $3^{\frac{-7+\sqrt{33}}{4}} < x < 1$, или $x > 3$.

**53.** $5 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{146}-1}{2}$.

**54.** Решение. Представим данное неравенство в виде:

$$2\sin 2x - 5(\sin x + \cos x) + 4 < 0.$$

Сделаем замену $\sin x + \cos x = t$, тогда $\sin 2x = t^2 - 1$, и мы приходим к квадратному неравенству $2t^2 - 5t + 2 < 0$, из которого находим: $\frac{1}{2} < t < 2$, или $\frac{1}{2} < \sin x + \cos x < 2$, или $\frac{1}{2} <$ $< \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) < 2$, или $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{4}$. Решая последнее тригонометрическое неравенство, находим: $2\pi n + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} <$ $< x + \frac{\pi}{4} < \pi(2n+1) - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$, или $\frac{\pi}{4}(8n-1) + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} <$ $< x < \frac{\pi}{4}(8n+3) - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$. **55.** $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{7}$. **56.** $a$ не существует.

**57.** $-32°30' - \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{5} + 180°\cdot n < x < -32°30' +$ $+ \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{5} + 180°\cdot n$, или $35° + 180°\cdot n < x < 80° + 180°\cdot n$.

**58.** $\frac{5\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{7\pi}{3} + 4\pi n$, или $-\frac{\pi}{3} + 4\pi n < x < 4\pi n$, или $4\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 4\pi n$.

**59.** Решение. Заметим сразу, что $m$ положительно. Действительно, если $m < 0$, то решения квадратного неравенства составляют не более, чем интервал, и поэтому туда не могут входить все положительные числа. Если $m = 0$, то неравенство принимает вид: $-x + 3 > 0$, или $x < 3$, что также не годится. Итак, $m > 0$.

1) Пусть дискриминант $D < 0$. Тогда все такие значения $m$ нам годятся, так как в этом случае решениями будут все действительные числа, а значит, и все положительные. Рассматриваемый случай описывается системой $\begin{cases} m > 0, \\ m^2 - 2m + 1 - 12m < 0, \end{cases}$ решая которую, находим: $7 - 4\sqrt{3} < m < 7 + 4\sqrt{3}$.

2) Пусть дискриминант $D = 0$. Тогда $m_1 = 7 - 4\sqrt{3}$, $m_2 = 7 + 4\sqrt{3}$. При $m_1 = 7 - 4\sqrt{3}$ корень квадратного трехчлена равен $\frac{4\sqrt{3}-6}{2(7-4\sqrt{3})} > 0$; решения неравенства имеют вид: $x \neq \frac{4\sqrt{3}-6}{2(7-4\sqrt{3})}$ и потому содержат не все положительные числа. При $m_2 = 7 + 4\sqrt{3}$ корень равен $-\frac{2\sqrt{3}+3}{7+2\sqrt{3}} < 0$, и так как он отрицателен, то среди решений неравенства содержатся все положительные числа. Итак, $m_1 = 7 - 4\sqrt{3}$ не годится, а $m_2 = 7 + 4\sqrt{3}$ подходит.

3) Пусть $D > 0$. Тогда решения данного квадратного неравенства будут содержать все положительные числа в том и только в том случае, если больший корень не положителен. Рассматриваемый случай описывается системой неравенств:

$$\begin{cases} m > 0, \\ m^2 - 14m + 1 > 0, \\ \dfrac{-(m-1) + \sqrt{m^2 - 14m + 1}}{2m} \leqslant 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство системы в силу первого дает: $\sqrt{m^2-14m+1} \leqslant$ $\leqslant m - 1$, что равносильно системе

$$\begin{cases} m - 1 \geqslant 0, \\ m^2 - 14m + 1 \leqslant m^2 - 2m + 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m \geqslant 1, \\ m \geqslant 0, \end{cases} \text{ или } m \geqslant 1.$$

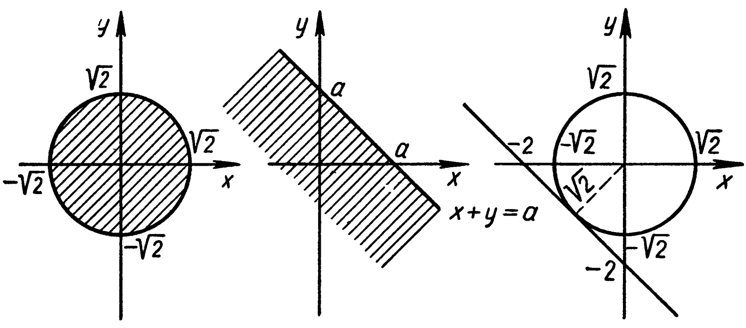
Итак, имеем: $\begin{cases} m > 0, \\ m^2 - 14m + 1 > 0, \\ m \geqslant 1, \end{cases}$

откуда находим: $m > 7 + 4\sqrt{3}$.

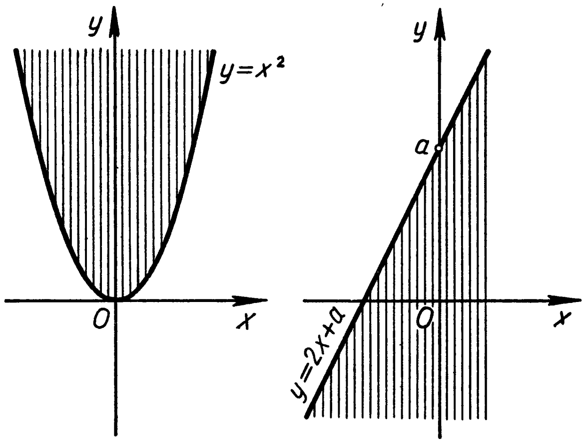
Объединяя все искомые значения $m$, полученные в трех рассмотренных случаях, получаем окончательный ответ: $m > 7 - 4\sqrt{3}$.

**60.** $-\dfrac{1}{3} \leqslant m < 0$.

**61.** Решение. Множество решений первого неравенства системы можно изобразить в виде точек плоскости, отнесенной к прямоугольной декартовой системе координат, которые находятся внутри круга с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2}$. Множество решений второго неравенства системы представляет собой множество точек, лежащих под прямой $x + y = a$ (чертеж к задаче 61). Теперь ясно, что система данных неравенств несовместна, если прямая $x + y = a$ касается снизу окружности $x^2 + y^2 = 2$ или лежит ниже этой окружности. Найдем, при каком значении $a$ прямая $x + y = a$ касается снизу окружности $x^2 + y^2 = 2$. Из чертежа 30 видно, что такое значение $a$ равно $-2$. Ответ. $a \leqslant -2$.




Черт. 30




Черт. 31

62. Решение. Аналогично предыдущей задаче мы можем рассматривать множество решений первого неравенства как множество точек, лежащих выше параболы $y = x^2$, а множество решений второго неравенства — как множество точек плоскости, лежащих ниже прямой $y = 2x + a$ (черт. 31). Теперь ясно, что последнее значение $a$, при котором данная система не совместна, т. е. значение $a$, при котором прямая $y = 2x + a$ касается параболы $y = x^2$. Найдем такое значение $a$. Нетрудно заметить, что искомое значение $a$ должно быть таким, чтобы уравнение $x^2 = 2x + a$ имело единственное решение, т. е. его дискриминант $4 + 4a$ равен 0, т. е. $a = -1$. Ответ. $a > -1$.

# Глава IX
# МНОГОЧЛЕНЫ И ИХ КОРНИ

При решении задач этой главы необходимо располагать начальными сведениями из теории многочленов над полем действительных чисел. Упражнения 99—102 относятся к теории многочленов над полем комплексных чисел.

Укажем эти сведения без доказательств.

*Многочленом степени n называется выражение*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

*где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — данные числа, причем $a_n \neq 0$.* Эти числа называются коэффициентами многочлена. Многочленом также считается константа. Если константа отлична от нуля, то степень многочлена равна нулю; если константа равна нулю, то такой многочлен называют *нуль-многочленом* или просто нулем. В отличие от всех других многочленов нуль-многочлен не имеет степени.

Для многочленов приняты обозначения $P(x)$, $Q(x)$, $S(x)$, $R(x)$ и т. д.; при этом степень многочлена $P(x)$ обозначается так: ст. $P(x)$. Многочлены можно складывать, умножать, вычитать по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов. При этом в результате получается снова многочлен. Полезно знать, как выражается степень результата этих трех операций через степени компонент:

$$\text{ст. } [P(x) \pm Q(x)] \leqslant \max\{\text{ст. } P(x), \text{ ст. } Q(x)\};$$
$$\text{ст. } [P(x) \cdot Q(x)] = \text{ст. } P(x) + \text{ст. } Q(x).$$

В задачах 67, 70 используется операция суперпозиции двух многочленов. Пусть даны два многочлена: $P(x)$ и $Q(x)$; тогда их *суперпозицией называется многочлен, обозначаемый через $P(Q(x))$, который получится, если в многочлене $P(x)$ вместо $x$ подставить многочлен $Q(x)$.* Например, если

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}x + \sqrt{2}, \quad Q(x) = x^2 - 7x + 1, \quad \text{то}$$

$$P(Q(x)) = Q^3(x) + 2Q^2(x) - \frac{1}{3}Q(x) + \sqrt{2} = (x^2 - 7x + 1)^3 +$$
$$+ 2(x^2 - 7x + 1)^2 - \frac{1}{3}(x^2 - 7x + 1) + \sqrt{2}.$$

Нетрудно заметить, что $P(Q(x))$, действительно, является многочленом и ст. $P(Q(x)) =$ ст. $P(x) \cdot$ ст. $Q(x)$.

Гораздо сложнее, чем с операциями сложения, вычитания и умножения, обстоит дело с делением в множестве многочленов. Мы говорим, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $S(x)$, если существует многочлен $Q(x)$, такой, что $P(x) = S(x) \cdot Q(x)$. Отнюдь не всегда многочлен $P(x)$ делится на многочлен $S(x)$; если делимость имеет место, то это обозначается так: $P(x) \vdots S(x)$. Например, $(x^3 - 1) \vdots (x^2 + x + 1)$; $x^2$ не $\vdots (x + 1)$.

Итак, множество многочленов напоминает нам множество целых чисел: операции сложения, вычитания, умножения всегда выполнимы, а операция деления не всегда. Есть и еще очень важное свойство многочленов, напоминающее нам множество целых чисел. Оно выражается теоремой о делении многочленов с остатком.

Теорема. *Если $P(x)$ и $S(x)$ — любые два многочлена ($S(x) \neq 0$), то существует и притом единственная пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, которая удовлетворяет двум условиям:*

1) $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$;

2) ст. $R(x) <$ ст. $S(x)$ или $R(x) = 0$.

Здесь $P(x)$ называется делимым, $S(x)$ — делителем, $Q(x)$ — частным, $R(x)$ — остатком.

Практически частное и остаток находят делением углом, известным из курса седьмого класса средней школы. Например, $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + 1$, $S(x) = x^2 - 7x + 3$. Найти частное и остаток от деления $P(x)$ на $S(x)$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + 1 & x^2 - 7x + 3 \\
\cline{2-2}
-\;2x^4 - 14x^3 + 6x^2 \phantom{+ x + 1} & 2x^2 + 17x + 108 \\
\cline{1-1}
17x^3 - 11x^2 + x + 1 & \\
-\;17x^3 - 119x^2 + 51x \phantom{+ 1} & \\
\cline{1-1}
108x^2 - 50x + 1 & \\
-\;108x^2 - 756x + 324 & \\
\cline{1-1}
706x - 323 &
\end{array}
$$

Частное: $Q(x) = 2x^2 + 17x + 108$; остаток: $R(x) = 706x - 323$.

Нетрудно заметить, что $P(x) \vdots S(x)$ тогда и только тогда, если остаток $R(x)$ равен нулю. Таким образом, деление углом позволяет практически выяснить вопрос о делимости данного многочлена $P(x)$ на данный многочлен $S(x)$.

Из определения многочлена видно, что всякий многочлен можно рассматривать и как функцию, область определения которой совпадает с множеством всех чисел (точнее, всех чисел данного числового поля). Поэтому можно говорить о значении многочлена $P(x)$ при данном значении аргумента $x_0$. Это значение записывается так: $P(x_0)$. Например, если $P(x) = x^3 + 2x^2 - 1$, то $P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 = 2$. Число $x_0$ называется корнем многочлена $P(x)$, если $P(x_0) = 0$. Например, число 2 является корнем многочлена $P(x) = x^3 + 6x^2 - 7x - 18$, а число 5 не является корнем этого многочлена, так как $P(2) = 0$, $P(5) \neq 0$. Возможность смотреть на многочлен, как на функцию, осложняет понятие равенства двух многочленов. Дело в том, что из определения многочлена следует: два многочлена равны, если их степени одинаковы и соответствующие коэффициенты равны. Равенство в этом смысле будем называть равенством многочленов в алгебраическом смысле. Но можно говорить о равенстве многочленов и в функциональном смысле. Как известно, две функции равны, если совпадают их области определения, и каждому числу из области определения и та и другая функции ставят в соответствие одно и то же число. Оказывается, однако, что на множестве многочленов эти два понятия равенства совпадают. А именно, если два многочлена равны в алгебраическом смысле, то они равны и в функциональном смысле, и, наоборот, если два многочлена равны как функции, то они равны и в алгебраическом смысле.

Мы уже говорили о том, что при делении одного многочлена на другой возникают единственные частное и остаток, которые можно найти, выполнив деление углом. Однако если делитель есть многочлен вида $x - \alpha$, то остаток можно найти проще по теореме Безу.

**Теорема Безу.** *При делении многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - \alpha)$ возникают частное и остаток, причем остаток есть константа, равная значению многочлена $P(x)$ при $x = \alpha$.* Иначе говоря, $R = P(\alpha)$.

Из теоремы Безу вытекают важные следствия. Укажем их:

1) *$P(x) \vdots (x - \alpha)$ тогда и только тогда, если $\alpha$ — корень многочлена $P(x)$.*

2) *Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — различные корни многочлена $P(x)$, то $P(x) \vdots [(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)]$.*

3) *Если $P(x) \neq 0$, то количество различных корней многочлена $P(x)$ не превосходит его степени.* В частности, отсюда следует, что *если $P(x)$ имеет больше различных корней, чем его степень, то $P(x) = 0$.*

4) *Если $x_1, \ldots, x_n$ — все корни многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, то $P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$.*

Теорема Безу позволяет найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - \alpha)$, но не указывает, как найти частное. Конечно, частное можно найти обычным делением углом. Однако в этом случае есть метод, который позволяет проще найти частное (и остаток). Этот метод называется с х е м о й  Г о р н е р а и состоит в следующем. Выделяются две строчки — верхняя и нижняя; в верхнюю строчку выписываются коэффициенты делимого многочлена. Левее старшего коэффициента в нижней строчке записывают число $\alpha$. Затем в нижней строчке под старшим коэффициентом делимого записывают этот старший коэффициент. Каждое следующее число нижней строчки получается прибавлением произведения предыдущего числа нижней строчки на число $\alpha$ к соответствующему коэффициенту верхней строчки. Когда таким образом заполнится нижняя строчка, то оказывается, что под свободным членом делителя стоит остаток, а остальные числа нижней строчки являются коэффициентами частного. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ делится на двучлен $x - \alpha$. Тогда схема Горнера принимает вид:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ |
| $\alpha$ | $b_{n-1}=a_n$ | $b_{n-2}=a_{n-1}+\alpha\, b_{n-1}$ | $b_{n-3}=a_{n-2}+\alpha\, b_{n-2}$ |

| | | |
|---|---|---|
| ... | $a_1$ | $a_0$ |
| ... | $b_0=a_1+b_1\alpha$ | $R=b_0\alpha+a_0$ |

**Пример.** Найти частное и остаток при делении многочлена $x^4-2x^3+3x^2-7$ на двучлен $x+2$.

Решение. Применим схему Горнера:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-2$ | 3 | 0 | $-7$ |
| $-2$ | 1 | $-4$ | 11 | $-22$ | 37 |

Ответ. Частное равно $x^3-4x^2+11x-22$, остаток равен 37.

Фактически следствием из теоремы Безу является и еще одна важная теорема — теорема Виета, которая известна из средней школы лишь для многочленов второй степени. Однако теорема Виета устанавливает соотношения между корнями приведенного многочлена любой степени (т. е. многочлена со старшим коэффициентом, равным 1) и его коэффициентами.

Теорема Виета для многочленов третьей степени. *Если приведенный многочлен третьей степени $x^3+px^2+qx+r$ имеет корни $x_1$, $x_2$, $x_3$, то сумма этих корней равна второму коэффициенту с противоположным знаком, сумма попарных произведений корней равна третьему коэффициенту, произведение корней равно свободному члену с противоположным знаком.* Иначе говоря, $x_1+x_2+x_3=-p$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q$, $x_1x_2x_3=-r$.

Аналогично формулируется теорема Виета для приведенного многочлена любой степени. В упражнениях, предлагаемых в главе IX, важно знать теорему Виета для многочленов третьей степени, а также тот факт, что сумма корней любого приведенного многочлена равна второму коэффициенту с противоположным знаком, сумма попарных произведений корней равна третьему коэффициенту.

Из курса средней школы известно, как найти корни любого многочлена 1-й и 2-й степени. Однако часто приходится искать корни многочленов более высокой степени. Здесь полезно знать две теоремы.

**Теоремы о целых корнях.** *Если многочлен с целыми коэффициентами имеет целый корень $\alpha$, то этот корень является делителем свободного члена.*

**Теорема о дробных корнях.** *Приведенный многочлен с целыми коэффициентами не может иметь дробных рациональных корней.*

Рассмотрим два примера.

1) Найти корни многочлена $2x^3-3x^2-13x+2$.

Решение. Пытаемся найти целые корни этого многочлена. По теореме о целых корнях ими могут быть только 4 числа: $\pm 1$, $\pm 2$. Проверкой убеждаемся, что $(-2)$ является корнем данного многочлена. Но тогда по следствию из теоремы Безу данный многочлен делится на двучлен. Находим частное по схеме Горнера:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -13 & 2 \\ \hline -2 & 2 & -7 & 1 & 0 \end{array}$$

Итак, $2x^3-3x^2-13x+2=(x+2)(2x^2-7x+1)$. Отсюда $x_{2,3}=\frac{7\pm\sqrt{41}}{4}$.

2) Доказать, что число $\sqrt{3-\sqrt[3]{2}}$ есть число иррациональное.

Решение. Обозначим $\sqrt{3-\sqrt[3]{2}}$ через $\alpha$. Тогда $\alpha^2-3=-\sqrt[3]{2}$ и $(\alpha^2-3)^3=-2$, или $\alpha^6-9\alpha^4+27\alpha^2-27+2=0$. Таким образом, $\alpha$ является корнем приведенного многочлена с целыми коэффициентами: $x^6-9x^4+27x^2-25$. По теореме о дробных корнях этот многочлен не имеет дробных рациональных корней. Целые его корни могут быть лишь среди чисел $\pm 1$, $\pm 5$, $\pm 25$. Так как $0<\alpha<2$, то достаточно проверить число 1. Оно не является корнем. Следовательно, $\alpha$ не является рациональным числом.

Рассмотренные утверждения не отвечают на один важный вопрос: всякий ли многочлен степени, большей или равной 1, имеет корни? Следует отметить, что содержание этого вопроса зависит от того, среди каких чисел мы ищем корни (точнее, в каком числовом поле ищутся корни). Легко привести пример многочлена, который не имеет действительных корней: $x^4+3$. Но, оказывается, в *множестве комплексных чисел всякий многочлен степени, большей или равной 1, с любыми комплексными коэффициентами имеет корень.* Это утверждение доказано Гауссом и носит название *основной теоремы алгебры.* Из основной теоремы алгебры следует, что многочлен степени $n$ имеет точно $n$ (не обязательно различных) комплексных корней. Кроме того, известна теорема: *Если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $x_0$, то число, сопряженное $x_0$, также является корнем данного многочлена.* Отсюда в силу основной теоремы алгебры и следствия 4) из теоремы Безу вытекает.

**Теорема.** *Всякий многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен в произведение многочленов с действительными коэффициентами степени не выше второй.*

Пример. Разложить на множители с действительными коэффициентами многочлен $P(x)=x^4+x^2+1$.

Решение. Многочлен $P(x)$ имеет 4 корня: $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. Найдя их, мы по следствию 4) можем утверждать, что $x^4+x^2+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$. Найдем корни. Обозначим $x^2$ через $t$. Получим уравнение $t^2+t+1=0$, откуда $t_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $t_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Для нахождения $x_{1,2}$ надо найти два значения $\sqrt{t_1}$, а для нахождения $x_{3,4}$ — два значения $\sqrt{t_2}$. Представим $t_1$ и $t_2$ в тригонометрической форме: $t_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $t_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$. Отсюда $x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$, $x_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $x_4 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$. Мы видим, что 4 корня $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ можно разбить на две пары сопряженных: $(x_1, x_4)$, $(x_2, x_3)$. Теперь можно записать: $x^4 + x^2 + 1 = [(x - x_1)(x - x_4)] \cdot [(x - x_2)(x - x_3)]$. Многочлены второй степени, стоящие в квадратных скобках, имеют действительные коэффициенты, ибо сумма и произведение сопряженных чисел — действительные числа. Поэтому $(x - x_1)(x - x_4) = x^2 - (x_1 + x_4)x + x_1x_4 = x^2 - 2\cos\frac{\pi}{3}x + 1 = x^2 - x + 1$, $(x - x_2)(x - x_3) = x^2 - (x_2 + x_3)x + x_2x_3 = x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{3}x + 1 = x^2 + x + 1$. Итак, $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Рассмотренные выше утверждения можно считать краткими сведениями по теории многочленов. Более полно о них можно прочесть в книге В. Г. Болтянского и Н. Я. Виленкина «Симметрия в алгебре» в разделе «Дополнения», стр. 153—162.

**1.** Доказать, что функция $f(x) = x^2 + \sqrt{x^2 + x}$ не является многочленом.

**2.** Найти приведенный многочлен степени 6, который при значениях аргумента, равных 1, 2, 3, 4, 5, 6, принимает значения, равные соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6.

**3.** Многочлен $P(x)$ обладает тем свойством, что для некоторой арифметической прогрессии с разностью, отличной от 0, соответствующие значения многочлена также образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что степень $P(x) \leqslant 1$.

**4.** Доказать, что функция $f(x) = \cos x$ не является многочленом.

**5.** Найти все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, обладающие тем свойством, что $P(P(x)) = P^2(x)$.

**6.** Найти частное и остаток при делении многочлена $P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x + 6$ на многочлен $S(x) = x^3 - x + 3$.

**7.** Ст. $P(x) = 10$, ст. $S(x) = 4$. При делении многочлена $P(x)$ на $S(x)$ возникают частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$.

Доказать, что при делении многочлена $P(x)$ на $Q(x)$ возникают частное, равное $S(x)$, и остаток, равный $R(x)$.

**8.** Доказать, что существует последовательность многочленов $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, ..., степени которых равны соответственно 0, 1, ..., $n$, ..., обладающая тем свойством, что $P_n(P_m(x)) = P_m(P_n(x))$ при любых целых неотрицательных $m$ и $n$.

**9.** Доказать, что при всех натуральных значениях $n$, не кратных трем, многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$.

**10.** Найти остаток, который дает многочлен $2^{100}x^{100} + 2^{99}x^{99} + \ldots + 2x + 1$ при делении на многочлен $2x - 1$.

**11.** Многочлен $P(x)$ при делении на многочлен $x - 2$ дает остаток, равный 2, число 3 является корнем многочлена $P(x)$. Какой остаток дает многочлен $P(x)$ при делении на $x^2 - 5x + 6$?

**12.** Числа 1, 2 являются корнями многочлена $P(x)$; свободный член его равен 4. Найти остаток, который дает многочлен при делении на $x^4 - 3x^2 + 2x$.

**13.** Найти многочлен степени не выше второй, график которого проходит через точки $A(1, 3)$, $B(-2, 4)$, $C(2, 1)$.

**14.** Найти многочлен, график которого проходит через точки $A(1, 2)$, $B(-3, 1)$, $C(4, 0)$, $D(0, 2)$, если его степень не выше третьей.

**15.** Доказать тождество:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\cdot\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

**16.** Доказать, что многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

**17.** Могут ли не пересекаться графики многочленов пятой и седьмой степени?

**18.** График многочлена $x^3$ пересекается (не касаясь) с графиком функции $a^x$. Если $a > 1$, то эти графики имеют не менее двух общих точек. Доказать.

**19.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x} = 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

**20.** $x_1$, $x_2$, $x_3$ — корни многочлена $x^3 - 2x + 5$. Составить приведенный многочлен, корнями которого были бы числа: $y_1 = \frac{1}{x_2x_3}$, $y_2 = \frac{1}{x_3x_1}$, $y_3 = \frac{1}{x_1x_2}$.

**21.** Найти сумму квадратов и сумму кубов корней многочлена $2x^3 - 2x^2 + 4x - 1$.

22. Доказать, что среди корней многочлена $x^3-3x^2+4x+9$ есть и комплексные.

23. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+4xy=-11, \\ x+y-2xy=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

24. Решить уравнения: а) $\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{4-x}=3$; б) $\sqrt[4]{4+x}+\sqrt[4]{13-x}=3$.

25. Решить уравнение $x^3-6x^2+qx+2=0$, если известно, что его корни образуют арифметическую прогрессию.

26. Решить уравнение $x^3-px^2+56x-64=0$, если известно, что его корни действительны и образуют геометрическую прогрессию.

27. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+6x+2$. Найти $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}$.

28. Один из корней многочлена $P(x)=x^3-7x^2+14x+r$ в два раза больше другого. Найти корни многочлена $P(x)$.

29. При каких значениях $a$ и $b$ система

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a, \\ x^3+y^3=b \end{cases}$$

имеет точно одно решение?

30. Если $x_1, x_2, x_3>0$, то справедливо неравенство: $(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\geqslant 9x_1x_2x_3$. Доказать.

31. Решить уравнения:

а) $x^4+x^3-15x^2+7x+6=0$;

б) $25x^4+15x^3+16x^2-9x+1=0$.

32. Доказать, что не существует двух рациональных дробей, у которых сумма и произведение были бы целыми числами.

33. Доказать, что $\operatorname{tg} 10^\circ$ — иррациональное число.

34. Решить неравенства:

а) $\dfrac{16x-7}{x^2+x+1}<3x$; б) $\dfrac{x^3-5x^2-2x+6}{x^3-2x^2+x-2}<0$;

в) $x^{\log^2_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} 2x} < 4$; г) $27^x - 3^{2x+1}\cdot 2^x - 3^{x+1}\cdot 2^{2x+1} + 9\cdot 2^{3x+1} < 0$.

35. Доказать, что уравнение $\sin^3 x + 2\sin x + 4 = \cos^2 x$ не имеет решения.

36. При каких значениях $a$ уравнение $x^3 + x^2 + 2x + a$ имеет корень в интервале $[-1, 1]$?

37. Разложить на множители с действительными коэффициентами многочлены: а) $x^4+x^3+x^2+x+1$; б) $x^6-x^3+1$.

38. $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ — все корни степени $n$ из единицы. Доказать тождества: а) $x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}=-1$; б) $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2=-1$; в) $(1-x_1)(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_{n-1})=n$; г) $(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_{n-1})=\begin{cases}0, & \text{если } n \text{ четно,}\\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно.}\end{cases}$

(Среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ нет единицы.)

39. Доказать, что многочлен $x^4-5x^3+3x^2-5x+2$ имеет чисто мнимые корни, и найти их.

40. Доказать, что многочлен $x^4+5x^3+x^2+18x+2$ не имеет чисто мнимых корней.

## ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

1. Решение. Функция $f(x)=x+\sqrt{x^2+x}$ не имеет значений при $0 > x > -1$ и поэтому не может быть многочленом, так как любой многочлен однозначно определен при всяком значении аргумента. 3. Решение. Обозначим арифметическую прогрессию, которую образуют аргументы, через $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, и пусть $d_0 \neq 0$ ее разность. Соответствующая арифметическая прогрессия значений многочлена $P(x)$ примет вид: $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n), \ldots$, ее разность обозначим через $d_1$. Рассмотрим линейную функцию $\alpha x+\beta$, где $\alpha=\frac{d_1}{d_0}$, $\beta=P(x_1)-\alpha x_1$. Тогда многочлен $P(x)-(\alpha x+\beta)$ имеет своими корнями все $x_n$, а так как все эти корни различны и их бесконечно много, то многочлен $P(x)-(\alpha x+\beta)$ равен нулю, или $P(x)=\alpha x+\beta$. 4. Решение. $f(x)=\cos x$ имеет бесчисленное множество различных корней: $\frac{\pi}{2}+\pi n$ и в то же время $f(x)\neq 0$. Следовательно, $f(x)$ не является многочленом. 5. Решение. Пусть ст. $P(x)=n$. Тогда ст. $P(P(x))=n^2$, ст. $P^2(x)=2n$ и по условию имеем: $n^2=2n$, откуда $n_1=0$, $n_2=2$. 1) $n_1=0$, тогда $P(x)=c$ — const, $P(P(x))=c$, $P^2(x)=c^2$. По условию $c=c^2$, откуда $c_1=0$, $c_2=1$; 2) $n_2=2$, тогда $P(x)=ax^2+bx+c$ и $P(P(x))=a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+$

$+c$, $P^2(x) = (ax^2+bx+c)^2$. Из равенства $P(P(x)) = P^2(x)$ вытекает следующая система равенств на коэффициенты многочлена $P(x)$:

$$\begin{cases} a^3 = a^2, \\ 2a^2b = 2a^2b, \\ 2a^2c + ab^2 + ab = b^2 + 2ac, \\ b^2 + 2abc = 2bc, \\ ac^2 + bc + c = c^2. \end{cases}$$

Так как $a \neq 0$ (иначе ст. $P(x) \neq 2$), то эта система имеет единственное решение: $a = 1$, $b = c = 0$. Ответ. 0, 1, $x^2$. 6. $x+2$, $6x^2$. 7. Решение. По условию $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$ (*). Так как ст. $P(x) = 10$, ст. $S(x) = 4$, то ст. $Q(x) = 6$, и поэтому ст. $R(x) <$ ст. $S(x) <$ ст. $Q(x)$. Следовательно, равенство (*) можно рассматривать как деление $P(x)$ на $Q(x)$ с частным $S(x)$ и остатком $R(x)$. 8. Указание. Искомую последовательность образуют многочлены $P_n(x) = x^n$. 9. Решение. По условию $n = 3k+1$ или $n = 3k-1$. Рассмотрим случай $n = 3k+1$ и проведем доказательство методом математической индукции. При $k = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение справедливо при $k = l$, т. е. $(x^{6l+2} + x^{3l+1} + 1) \vdots (x^2+x+1)$, и докажем, что оно выполняется при $k = l+1$, т. е. $(x^{6l+8} + x^{3l+4} + 1) \vdots (x^2 + x + 1)$.

Действительно, $x^{6l+8} + x^{3l+4} + 1 = (x^{6l+8} - x^{6l+2}) + (x^{3l+4} - x^{3l+1}) + (x^{6l+2} + x^{3l+1} + 1) = (x^6 - 1) \cdot x^{6l+2} + (x^3 - 1) \cdot x^{3l+1} + (x^{6l+2} + x^{3l+1} + 1)$. Ясно, что $(x^6 - 1) \vdots (x^2 + x + 1)$, $(x^3 - 1) \vdots (x^2 + x + 1)$, и по предположению $(x^{6l+2} + x^{3l+1} + 1) \vdots (x^2 + x + 1)$, а значит, и многочлен $x^{6l+8} + x^{3l+4} + 1$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$. Для случая $n = 3k - 1$ доказательство аналогично. 10. 101. 11. Решение. По теореме о делении с остатком на множестве многочленов мы можем записать: $P(x) = (x^2 - 5x + 6)Q(x) + R(x)$, где $R(x)$ — многочлен первой или нулевой степени, т. е. $R(x) = Ax + B$, и $P(x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot Q(x) + (Ax + B)$. Подставим теперь в это равенство $x = 2$ и $x = 3$, тогда получим:

$$\begin{cases} P(2) = 2A + B, \\ P(3) = 3A + B. \end{cases}$$

Но в силу теоремы Безу условия задачи дают: $P(2) = 2$, $P(3) = 0$. Поэтому система принимает вид:

$$\begin{cases} 2A + B = 2, \\ 3A + B = 0. \end{cases}$$

Откуда находим: $A = -2$, $B = 6$. Ответ. $R(x) = -2x + 6$. 12. $2x^2 - 6x + 4$. 13. $-\frac{5}{12}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{25}{6}$. 14. $-\frac{1}{84}x^3 - \frac{3}{28}x^2 + \frac{5}{42}x + 2$. 15. Решение. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \cdot \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2 \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - x^2.$$

Легко проверить, что $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$. Поэтому многочлен $Q(x)$ имеет не менее трех различных корней, а степень $Q(x) \leqslant 2$. В таком случае $Q(x) = 0$, откуда и вытекает требуемое тождество. **16.** Решение. Пусть $P_{2n-1}(x) = x^{2n-1} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ — данный многочлен степени $(2n-1)$. Запишем его в виде: $P_{2n-1} = x^{2n-1}\left(1 + \frac{a_{2n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{2n-2}} + \frac{a_0}{x^{2n-1}}\right)$. Отсюда ясно, что при $x \to +\infty$ $P_{2n-1}(x) \to +\infty$, а при $x \to -\infty$ $P_{2n-1}(x) \to -\infty$, т. е. $P_{2n-1}(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, а тогда $P_{2n-1}(x)$ как непрерывная функция принимает и значения, равные 0. **17.** Указание. Пусть $P_7(x)$ и $P_5(x)$ — данные два многочлена, тогда многочлен $Q(x) = P_7(x) - P_5(x)$ — многочлен нечетной степени (ст. $Q(x) = 7$), и в силу задачи 16 он имеет корень. **19.** Решение. 1) Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{n}{10^n}$ и докажем, что ее предел равен 0. а) $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{10^{n+1}} - \frac{n}{10^n} = \frac{1-9n}{10^{n+1}} < 0$, т. е. $a_{n+1} < a_n$, и последовательность $a_n$ убывает. б) Последовательность $a_n$ ограничена, так как она убывает, и члены ее положительны. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует. Обозначим его через $x$. Теперь представим член $a_{n+1}$ в виде:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{10^{n+1}} = \frac{\frac{n}{10^n} + \frac{1}{10^n}}{10} = \frac{a_n + \frac{1}{10^n}}{10}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу и учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, мы получим: $x = \frac{x}{10}$, откуда $x = 0$. 2) Пусть $x$ — любое действительное число. Определим функцию, которая для каждого действительного $x$ равна наибольшему целому числу, не превосходящему $x$. Эта функция называется целой частью $x$ и обозначается так: $[x]$ (например, $[2,7] = 2$, $[-3,1] = -4$, $[\sqrt{2}] = 1$). Будем теперь рассматривать $x \geqslant 1$, тогда $[x]$ — натуральное число. Из определения целой части имеем: $[x] \to +\infty$ при $x \to +\infty$; $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Отсюда следует: $\frac{[x]}{10^{[x]+1}} < \frac{x}{10^x} < \frac{[x]+1}{10^{[x]}}$ (*). В силу пункта 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[x]}{10^{[x]+1}} = \frac{1}{10} \lim\limits_{[x]\to+\infty} \frac{[x]}{10^{[x]}} = 0$, $\lim\limits_{[x]\to+\infty} \frac{[x]+1}{10^{[x]}} = \lim\limits_{[x]\to+\infty} \frac{[x]}{10^{[x]}} = 0$. Тогда из неравенств (*) следует, что и $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{10^x} = 0$. 3) Обозначим $10^x$ через $t$; тогда $x = \lg x$ и $t \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Получаем: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{t} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{10^x} = 0$. Из последнего равенства вытекает: $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\log_a t}{t} = \frac{1}{\lg a} \cdot \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\lg t}{t} = 0$, что и требовалось доказать. **20.** $y^3 - \frac{2}{25}y - \frac{1}{25}$. **21.** Решение. Пусть $x^3 + px + qx + r$ — приведенный многочлен третьей степени и $x_1, x_2, x_3$ — его корни. По теореме Виета имеем: $x_1+x_2+x_3=-p$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q$, $x_1x_2x_3=-r$. 1) Выразим $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ через коэффициенты $p, q, r$. $(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$. Отсюда $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=p^2-2q$. В нашем примере $p=-1$, $q=2$, $r=-\frac{1}{2}$, и поэтому $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(-1)^2-2\cdot 2=-3$.

2) Выразим $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ через коэффициенты $p, q, r$. Для этого рассмотрим тождество, вытекающее из пункта 1): $-(p^2-2q)\cdot p = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1+x_2+x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^2x_1+x_3x_1^2$. Отсюда $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-p(p^2-2q)-(x_1^2x_2+x_1x_2x_3+x_1x_2^2)-(x_2^2x_3+x_1x_2x_3+x_2x_3^2)-(x_3^2x_1+x_1x_2x_3+x_3x_1^2)+3x_1x_2x_3=-p(p^2-2q)-(x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+3x_1x_2x_3=-p(p^2-2q)+pq-3r=-p^3+3pq-3r$. В нашем примере $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(+1)^3+3(-1)\cdot 2-3\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{2}$.

**22.** Решение. В силу предыдущей задачи $x_1^2+x_2^2+x_3^2=9-8=1$. Предположим, что $x_1, x_2, x_3$ — действительные числа. Тогда из указанного равенства следует, что $|x_1|\leqslant 1$, $|x_2|\leqslant 1$, $|x_3|\leqslant 1$, что, однако, невозможно, так как $|x_1x_2x_3|=9$. **23.** а) $\{3, -2\}$, $\{-2, 3\}$, $\left\{\frac{\sqrt{34}-2}{2}, \frac{-\sqrt{34}-2}{2}\right\}$, $\left\{\frac{-\sqrt{34}-2}{2}, \frac{\sqrt{34}-2}{2}\right\}$; б) $\{1, 1, 2\}$, $\{1, 2, 1\}$, $\{2, 1, 1\}$. **24.** а) 3, $-4$; б) 12, $-3$. **25.** $2-\sqrt{5}$, 2, $2+\sqrt{5}$. **26.** 2, 4, 8. **27.** $-3$. **28.** 1, 2, 4. **29.** $a=\frac{3\sqrt[3]{2b^2}}{2}$. **30.** Решение.

$(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-9x_1x_2x_3=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2-6x_1x_2x_3=x_1(x_2-x_3)^2+x_2(x_3-x_1)^2+x_3(x_1-x_2)^2\geqslant 0$. **31.** а) 1, 3, $\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$; б) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

**32.** Решение. Предположим, что такие дроби существуют. Тогда они являются корнями приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами, что невозможно, так как приведенный многочлен с целыми коэффициентами не может иметь дробных корней. **33.** Указание. Если бы $\operatorname{tg} 10^\circ$ был рациональным числом, то $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{3\operatorname{tg} 10^\circ-\operatorname{tg}^3 10^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 10^\circ}$ тоже был бы рациональным числом, что не так.

**34.** а) $\frac{-3-\sqrt{30}}{3}<x<\frac{-3+\sqrt{30}}{3}$, или $x>1$; б) $2-\sqrt{10}<x<1$, или $2<x<2+\sqrt{10}$. **35.** Указание. Наименьшее значение левой части уравнения равно 1 при $\sin x=\pm 1$, наибольшее значение правой равно 1 при $\cos x=\pm 1$. **36.** Решение. Задача эквивалентна нахождению множества значений функции $f(x)=x^3+x^2+2x$ на отрезке $[-1, 1]$. Докажем, что на этом отрезке $f(x)$ возрастает. Выберем на отрезке $[-1, 1]$ два любых значения аргумента $x_1, x_2$, причем $x_2>x_1$.

Тогда $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\left(x_2^2+x_1x_2+x_2^2+x_2+x_1+2\right)$. Заметим, что $x_2^2+x_1x_2+x_1^2=\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\geqslant 0$ при всех $x_1$, $x_2$, кроме того, $x_1+x_2+2>0$, так как $x_1, x_2\in[-1, 1]$. Поэтому выражение, стоящее во второй скобке, положительно; выражение, стоящее в первой скобке, также положительно, так как $x_2>x_1$. Отсюда следует, что $f(x_2)>f(x_1)$, и, значит, на отрезке $[-1, 1]$ функция $f(x)=x^3+x^2+2x$ возрастает. В силу этого множество значений функции определяется ее значениями на концах отрезка. При $x=-1$ $f(x)=-2$, при $x=1$ $f(x)=4$. Ответ. $-2\leqslant a\leqslant 4$. **37.** а) $x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2-2\cos 72^\circ\cdot x+1)\cdot(x^2-2\cos 144^\circ x+1)$;

б) $x^6-x^3+1=(x^2-2\cos 20^\circ\cdot x+1)\cdot(x^2-2\cos 100^\circ\cdot x+1)\cdot(x^2-2\cos 140^\circ\cdot x+1)$. **38.** Решение. По условию $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ — все корни многочлена $x^n-1$, отличные от единицы. Поэтому $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ представляют все множество корней многочлена $\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1$. Тогда по одному из следствий из теоремы Безу мы имеем:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})\ (*).$$

а) По теореме Виета $x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}=-p=-1$; б) $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2=(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^2-2(x_1x_2+\ldots+x_{n-2}x_{n-1})=p^2-2q=(-1)^2-2\cdot 1=-1$ (здесь $n\geqslant 3$). в) Подставляя в тождество (*) $x=1$, получим: $n=(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{n-1})$. г) Подставляя в тождество (*) $x=-1$, получим: $(-1)^{n-1}+(-1)^{n-2}+\ldots+(-1)+1=(-1)^{n-1}(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{n-1})$; при $n$ четном: $0=-(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{n-1})$, откуда $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{n-1})=0$; при $n$ нечетном: $1=(-1)^{n-1}(1+x_1)\ldots(1+x_{n-1})$, откуда $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{n-1})=1$. **39.** $\pm i, \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$.

# Глава X ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразованием подобия мы называем такое взаимно однозначное соответствие между точками плоскости, которое изменяет расстояние между точками в одно и то же число раз ($k > 0$), т. е., какие бы две точки $M$ и $N$ мы ни взяли, в результате преобразования подобия они перейдут в такие точки $M'$ и $N'$, что

$$M'N' = k \cdot MN,$$

где через $MN$ обозначено расстояние между точками $M$ и $N$. Если $k = 1$ — расстояния между точками не изменяются. Такой частный вид преобразования подобия называется *движением* (или перемещением).

В преобразовании подобия точки, лежащие на одной прямой, преобразуются в точки, также лежащие на одной прямой с сохранением порядка их следования. Действительно, соотношение $AB + BC = AC$ выполняется только для трех точек одной прямой, когда $B$ лежит между $A$ и $C$. Но из справедливости этого соотношения для точек $A$, $B$, $C$ следует, что $A'B' + B'C' = k\ AB + k\ BC = k(AB + BC) = k\ AC = A'C'$, т. е. точки $A', B', C'$ также лежат на прямой и $B'$ — между $A'$ и $C'$. Преобразования подобия называют для краткости *подобиями*.

В этом смысле подобия переводят прямые в прямые с сохранением углов между ними, так как треугольники преобразуются в подобные (или равные) им треугольники. Важным свойством подобий является наличие или отсутствие в нем неподвижных точек и прямых, т. е. таких точек и прямых, которым соответствуют эти же точки и прямые (задачи 1, 8, 14 и др.). Всякое преобразование подобия имеет обратное. Последовательное выполнение двух подобий также является подобием, которое мы называем *произведением* данных подобий. Произведение подобий обладает *сочетательным свойством*. Произведение двух подобий может не обладать свойством перестановочности. Произведение взаимообратных подобий есть *тождественное преобразование*, оставляющее все точки на месте. Различают подобия первого и второго рода в зависимости от того, имеют ли данная и преобразованная фигуры одинаковые или противоположные ориентации. Простейшим движением второго рода является осевая симметрия, и всякое движение второго рода представимо в виде произведения нечетного числа симметрий. Тождественное преобразование — движение первого рода.

**Осевая симметрия** (отражение от прямой) есть преобразование, в котором отрезки, соединяющие пары соответственных точек (различных), перпендикулярны оси симметрии и делятся ею пополам. Точки оси симметричны в этом преобразовании сами себе. Симметрия есть *движение второго рода*. Произведение двух симметрий есть движение первого рода. Всякое движение может быть разложено в произведение симметрий. Симметрия задается осью или парой соответствующих точек $A$ и $A' \neq A$; соответствующую ось симметрии мы для краткости в ответах называем *медиатрисой* отрезка $AA'$.

**Параллельный перенос** есть такое преобразование, что для любых двух пар соответственных точек $A$ и $A'$, $B$ и $B'$ пары отрезков $(AA', BB')$, $(AB, A'B')$ параллельны (или лежат на прямой). Другими словами, для любой точки $A$ вектор $\overrightarrow{AA'}$ равен одному и тому же вектору $\vec{a}$ — вектору переноса.

Из определения следует, что перенос переводит прямые в параллельные им прямые (или в себя). Перенос определяется парой соответственных точек $A$, $A'$ или вектором $\overrightarrow{AA'}$. Построение точки $B$, если точка $B$ не лежит на прямой $AA'$, сводится к построению двух прямых, параллельных $AA'$ и $AB$ и проходящих через $B$ и $A'$ соответственно. В противном случае требуется вспомогательное построение пары соответственных точек $C$ и $C'$, не лежащих на прямой $AA'$. Часто множество пар соответственных точек переноса отождествляют с вектором переноса. Произведению переносов соответствует сумма векторов, их определяющих. Удобна векторная запись переноса:

$$\overline{Y} = \overline{X} + \overline{A}$$

(см. задачу 27). В такой записи начала всех векторов находятся в одной и той же точке и вектор обозначается той же буквой, что и его конец.

**Центральная симметрия** (отображение от точки) есть преобразование, при котором середины $O$ всех отрезков $AA'$ совпадают (*центр симметрии*). Это движение первого рода — частный случай вращения (на 180°) или гомотетии ($k = -1$). Центральная симметрия определяется центром или парой соответственных точек. Произведение двух симметрий есть перенос (или тождественное преобразование).

**Вращение** — это движение первого рода с одной неподвижной точкой (центром вращения), обладающее тем свойством, что угол между любыми двумя соответствующими лучами, исходящими из центра, один и тот же (угол вращения). Этот угол может иметь различные значения, отличающиеся на число, кратное 360°. Для задания вращения $O_\varphi$ достаточно указать его центр $O$ и угол $\varphi$ в интервале $0 < \varphi \leqslant 360°$ или $-180° < \varphi \leqslant 180°$. Для угла вращения, обратного углу $\varphi$, дана запись $-\varphi$ (даже если этот угол не попадает в указанные интервалы).

Вращение можно задать также центром $O$ и парой соответственных точек $A$, $A' \neq O$ $(OA = OA')$ или двумя парами соответствующих точек $A$, $A'$ и $B$, $B'$, таких, что медиатрисы отрезков $AA'$ и $BB'$ пересекаются (в центре вращения).

**Скользящее отражение** — это движение второго рода, которое *является произведением отражения от прямой* $s$ *и переноса на вектор* $\vec{a} \neq \vec{0}$, параллельного $s$. Последовательность, в которой выполняются оба преобразования, безразлична (задача 89). Перенос может быть заменен двумя отражениями от прямых $s_1$ и $s_2$, перпендикулярных $s$. Произведение отражений $s$, $s_1$ и $s_2$ ассоциативно, произведение отражений относительно перпендикулярных осей $s$ и $s_1$ можно заменить отражением от точки их пересечения. Следовательно, скользящее отражение можно представить произведением отражений от точки и прямой, причем точка не принадлежит прямой.

Всякое преобразование имеет обратное. В частности, обратным для симметрии (осевой или центральной) является это же преобразование. Обратным для переноса является перенос на противоположный вектор. Обратным для вращения — вращение с тем же центром на противоположный угол. Обратным для скользящего отражения — скользящее отражение с той же осью и противоположным вектором.

Два равных (конгруэнтных) отрезка могут быть совмещены либо одним вращением, либо одним переносом (задача 73). Если это два равных отрезка в равных фигурах, то фигуры после преобразования либо совпадут, либо потребуется еще одно отражение от прямой, чтобы они совпали. Но переносы и вращения разлагаются в произведение двух отражений от прямых, следовательно, всякое движение разлагается в произведение двух или трех отражений. Всякое движение первого рода — вращение или перенос; всякое движение второго рода — скользящее отражение или отражение.

**Гомотетия** с центром $O$ и коэффициентом $k \neq 0$ есть такое преобразование, которое каждой точке $M$ относит такую точку $M'$, что выполняется равенство: $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$. Если $k > 0$, то точки $M$ и $M'$ лежат по одну сторону от $O$, при $k < 0$ — по разные стороны от $O$.

При $k = -1$ гомотетия совпадает с центральной симметрией, при $k = 1$ — с тождественным преобразованием. Соответственные прямые в гомотетии либо параллельны, либо совпадают. Длины отрезков изменяются в $|k|$ раз, следовательно, гомотетия — преобразование подобия. Обратным преобразованием к гомотетии с коэффициентом $k$ является гомотетия с тем же центром и коэффициентом, равным $\frac{1}{k}$.

Общее преобразование подобия можно представить как произведение движения и гомотетии. Одну из двух одинаково ориентированных подобных фигур можно повернуть так, чтобы соответственные отрезки стали параллельными, тогда обе фигуры станут гомотетичными.

Большинство из предлагаемых задач в данном сборнике — это задачи на доказательство и построение. При решении задачи учащийся должен научиться увидеть преобразование в легкой задаче, решение которой ему известно. Решение задач с помощью преобразований бывает более экономным, так как каждое преобразование заменяет несколько мелких построений. Приобретение навыка «видеть» преобразование поможет учащимся успешнее справляться и с решением трудных задач.

Пример 1. Через точку, лежащую внутри угла, провести секущую так, чтобы ее отрезок с концами на сторонах угла делился данной точкой пополам.

«Обычное» решение. Предположим, что искомая секущая построена. Если догадаться провести через концы построенного отрезка прямые, параллельные сторонам угла, то данная точка $M$ окажется центром параллелограмма. Его вершина $O_1$, противоположная вершине $O$ данного угла, может быть построена из условия $OP = OP_1$. Параллелограмм определен. Искомый отрезок является диагональю этого параллелограмма.

Решение с помощью преобразований. Данная точка $M$ — середина искомого отрезка, поэтому симметрия с центром в точке $M$ преобразует этот отрезок в себя. Концы искомого отрезка лежат, с одной стороны, на сторонах данного угла, с другой стороны, на сторонах угла, симметричного данному относительно точки $M$. Остается построить угол, симметричный данному, и найти точки пересечения его сторон со сторонами данного угла. Решение задачи не изменится, если заменить угол, например, окружностью.

Пример 2. К трем данным отрезкам $a$, $b$ и $c$ построить четвертый пропорциональный отрезок $m$: $a : b = c : m$. Обычно эта задача решается с помощью откладывания отрезков, равных данным, на сторонах угла и проведения параллельных. Решим ее с помощью гомотетии. Имеем: $m = \frac{b}{a} c$. Следовательно, искомый отрезок равен отрезку, гомотетичному отрезку $c$ в гомотетии с произвольным центром и с коэффициентом гомотетии $b : a$.

В частности, если отложить на неподвижном луче гомотетии отрезки $OP = a$, $OP' = b$, а на другом луче отложить отрезок $OM = c$, то отрезок $OM' = \frac{b}{a} c$ будет искомым.

## § 1. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

**1.** Назвать неподвижные точки и неподвижные прямые преобразования осевой симметрии.

**2.** Изобразить два отрезка, соответствующих друг другу в осевой симметрии. Рассмотреть различные случаи взаимного расположения таких отрезков.

**3.** Сколько осей симметрии имеют следующие фигуры: 1) пара пересекающихся прямых; 2) пара параллельных прямых; 3) пара точек; 4) точка и прямая; 5) правильный треугольник; 6) квадрат; 7) правильный $n$-угольник.

**4.** Сколько осей симметрии имеют следующие фигуры: 1) окружность; 2) окружность и точка; 3) окружность и прямая; 4) две окружности; 5) три окружности.

**5.** Сколько осей симметрии имеет пара равных хорд окружности?

**6.** Сколько осей симметрии имеет фигура, состоящая из окружности и двух ее касательных?

**7.** Назвать вид четырехугольника, который имеет: 1) только одну ось симметрии; 2) только две оси симметрии; 3) более двух осей симметрии.

**8.** Сколькими неподвижными прямыми задается осевая симметрия?

**9.** Сколькими парами соответствующих точек определяется осевая симметрия?

**10.** Сколькими парами соответствующих прямых задается осевая симметрия?

**11.** Построить пятиугольник, имеющий: 1) одну ось симметрии; 2) две оси симметрии.

**12.** Даны две пересекающиеся прямые. В какой осевой симметрии одна прямая преобразуется в другую? В какой осевой симметрии одна из двух параллельных прямых преобразуется в другую?

**13.** Могут ли две осевые симметрии иметь общие пары соответствующих точек?

**14.** Охарактеризовать движение, если оно имеет две неподвижные точки.

**15.** Даны два равных и противоположно ориентированных треугольника $OAB$ и $OA_1B_1$. Доказать, что прямые $AA_1$ и $BB_1$ параллельны или совпадают.

**16.** Даны две точки $A$ и $B$ и прямая $l$, пересекающая отрезок $AB$. Найти на прямой $l$ такую точку $C$, чтобы биссектриса угла $ACB$ принадлежала прямой $l$.

17. Через точку, лежащую вне данной прямой, провести при помощи циркуля и линейки прямую, параллельную данной, пользуясь циркулем только два раза.

18. Даны две пересекающиеся прямые. Построить циркулем и линейкой оси симметрии этих прямых, пользуясь циркулем только два раза.

19. Через данную точку провести прямую, пересекающую две данные прямые под равными углами.

20. Продолжения боковых сторон $AD$ и $BC$ равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $S$. Доказать, что окружности, описанные около треугольников $ACS$ и $BDS$, пересекаются в центре окружности, описанной около данной трапеции.

21. Построить треугольник по стороне, разности двух других сторон и углу, заключенному между первой стороной и большей из двух других.

22. Построить треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

23. Построить треугольник $ABC$ по заданной вершине $C$ и двум прямым, которым принадлежат биссектрисы углов $A$ и $B$ (внутренние биссектрисы или внешние).

24. Дана прямая $a$ и две точки $M$ и $N$, не принадлежащие прямой. Построить на прямой такую точку $P$, чтобы сумма $MP+NP$ была наименьшей.

25. Внутри острого угла дана точка $M$. Построить треугольник $MAB$ наименьшего периметра, вершины $A$ и $B$ которого принадлежат сторонам угла.

26. Дана прямая, точка $M$, не принадлежащая прямой, и окружность $k$. Построить на прямой такую точку $P$, чтобы сумма $PM+d$, где $d$ — отрезок касательной к окружности $k$, проведенной из точки $P$, была наименьшей.

## § 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

27. Доказать, что формулой

$$\overline{Y}=\overline{X}+\overline{A},\quad \overline{A}\neq\overline{0},$$

задается параллельный перенос. (Начало векторов — произвольная точка плоскости, $X\to Y$.)

28. Даны две равные окружности. Указать вектор переноса, преобразующего одну окружность в другую.

**29.** В каком случае произведение двух переносов есть тождественное преобразование?

**30.** Доказать, что произведение отражений от параллельных прямых есть перенос. Построить вектор этого переноса.

**31.** Даны две параллельные прямые $a$ и $b$. В каких преобразованиях переноса: 1) прямая $a$ преобразуется в прямую $b$; 2) прямая $b$ преобразуется в $a$; 3) прямые $a$ и $b$ преобразуются в себя?

**32.** На стороне угла, вершина $O$ которого исключена, дана точка $M$. Построить отрезок, равный отрезку $OM$.

**33.** Даны две пересекающиеся прямые $a$ и $b$. Построить прямую $c$, параллельную третьей данной прямой так, чтобы данные две прямые отсекали на прямой $c$ отрезок, равный данному отрезку

**34.** Даны прямая и окружность. Построить отрезок данной длины, чтобы его концы лежали на прямой и окружности и чтобы он был параллелен данной прямой.

**35.** Даны две окружности. Построить отрезок данной длины так, чтобы его концы лежали на данных окружностях и чтобы он был параллелен данной прямой.

**36.** Доказать, что формулой

$$\overline{Y} = -\overline{X} + 2\overline{A}$$

задается центральная симметрия с центром $A$. (Начало векторов — любая точка плоскости, $X \to Y$.)

**37.** При каких условиях существует центральная симметрия, преобразующая данный отрезок $AB$ в другой данный отрезок $A_1B_1$?

**38.** Через точку, лежащую внутри окружности, провести хорду так, чтобы она делилась данной точкой пополам.

**39.** Доказать, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

**40.** Построить центрально симметричный шестиугольник.

**41.** В центральной симметрии окружность $k_1$ преобразуется в окружность $k_2$. В какой симметрии окружность $k_1$ преобразуется в себя ($k_2 \equiv k_1$)? Как расположены окружности $k_1$ и $k_2$, если центр симметрии лежит на $k_1$?

**42.** Дан параллелограмм с исключенными вершинами. Построить центр этого параллелограмма.

**43.** Внутри угла с исключенной вершиной $O$ дана точка $M$. Построить точку $P$, которая вместе с точкой $M$ и точкой $O$ принадлежит одной прямой.

44. Даны точка, окружность и прямая. Построить отрезок с концами на прямой и на окружности, чтобы он делился данной точкой пополам.

45. Даны две окружности и точка. Через точку провести секущую так, чтобы ее отрезок с концами на данных окружностях делился данной точкой пополам.

46. Доказать, что произведение двух центральных симметрий с различными центрами есть параллельный перенос. Построить вектор этого переноса.

47. Доказать, что произведение трех центральных симметрий есть центральная симметрия, и построить ее центр.

48. Даны три точки $A$, $B$ и $C$. Построить центры симметрий, являющихся произведениями трех симметрий с центрами в данных точках при различных последовательностях выполнения указанных симметрий.

49. Точка $M$ отражается последовательно от вершин $A$, $B$ и $C$ треугольника и после отражений занимает положение $M'$. Доказать, что середина отрезка $MM'$ есть точка, положение которой не зависит от выбора точки $M$. (Отражение от точки есть преобразование симметрии с центром в этой точке.)

50. Точка $M$ последовательно отражается от точек $A$, $B$, $C$, $A$, $B$ и $C$. Доказать, что в результате этих отражений точка $M$ преобразуется в себя.

51. Доказать, что произведение нечетного числа центральных симметрий есть центральная симметрия.

52. Доказать, что произведение четного числа центральных симметрий есть перенос или тождественное преобразование.

53. Дан шестиугольник $ABCDEF$, имеющий центр симметрии. Доказать, что существует бесчисленное множество шестиугольников, середины сторон которых совпадают с вершинами данного шестиугольника.

## § 3. ВРАЩЕНИЕ

54. Доказать, что произведение двух отражений от пересекающихся осей $a$ и $b$ есть вращение около точки пересечения этих осей на угол $\varphi$, равный удвоенному углу между данными осями ($\varphi = 2(a, b)$).

55. Представить данное вращение в виде произведения двух осевых симметрий.

**56.** Как расположены прямые $a$ и $b$, если произведение отражений от этих прямых не зависит от последовательности, в которой выполнены эти два отражения?

**57.** Доказать, что если вращением отрезок $AB$ преобразуется в отрезок $A_1B_1$, то угол этого вращения равен $\angle(\overline{AB}, \overline{A_1B_1})$.

**58.** Доказать, что произведение двух вращений относительно одного и того же центра есть вращение или тождественное преобразование.

**59.** Какими вращениями можно преобразовать данную прямую в себя?

**60.** Какими вращениями можно преобразовать одну прямую в другую?

**61.** Какое вращение имеет неподвижную прямую?

**62.** Каким вращением можно преобразовать данный отрезок в себя?

**63.** Каким вращением можно преобразовать пару пересекающихся прямых в себя? Рассмотреть частные случаи.

**64.** Какими вращениями можно преобразовать в себя: 1) две параллельные прямые; 2) параллелограмм?

**65.** Три прямые пересекаются в одной точке, при которой образованы шесть углов, равных по 60°. Какими вращениями можно преобразовать данные прямые в себя?

**66.** Даны две равные окружности. Какими вращениями можно одну из окружностей преобразовать в другую?

**67.** Какими вращениями можно преобразовать в себя: 1) квадрат; 2) правильный шестиугольник?

**68.** Какими вращениями можно преобразовать правильную пятиконечную звезду в себя?

**69.** Какими вращениями можно преобразовать данный равносторонний треугольник в себя?

**70.** Построить неправильный шестиугольник, который поворотом на 120° преобразуется в себя.

**71.** Построить неправильный восьмиугольник, который вращением на 90° преобразуется в себя.

**72.** Даны две равные окружности. Преобразованием вращения на угол 45° одна окружность преобразуется в другую. Построить центр этого вращения.

**73.** Даны два равных отрезка $AB$ и $A_1B_1$. Построить центр $M$ вращения $\omega$, в котором точка $A$ преобразуется в точку $A_1$, а точка $B$ — в точку $B_1$. Всегда ли существует точка $M$?

**74.** На прямой $a$ дана точка $A$, а на прямой $b$ — точка $B$. Вращением преобразовать прямую $a$ в прямую $b$, чтобы при этом точка $A$ совпала с точкой $B$.

**75.** Даны два равных отрезка $AB$ и $A_1B_1$. Вращение $\omega_1$ преобразует $AB$ в $A_1B_1$, а вращение $\omega_2$ — $AB$ в $B_1A_1$. Доказать, что углы вращения отличаются на 180°.

**76.** Даны два равных одинаково ориентированных равносторонних треугольника. Сколькими вращениями один из них можно преобразовать в другой?

**77.** Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Доказать, что они пересекают стороны квадрата в точках, являющихся вершинами квадрата.

**78.** Через точку, расположенную внутри квадрата, проведены две перпендикулярные секущие. Доказать, что если отрезки этих секущих расположены внутри квадрата, то эти отрезки равны между собой.

**79.** Даны два равных квадрата. Доказать, что в общем случае существуют четыре вращения, преобразующих один квадрат в другой и что центры этих вращений принадлежат одной прямой.

**80.** Даны две равные окружности $k_1(O_1, R)$ и $k_2(O_2, R)$ и на каждой из них по точке $A_1$ и $A_2$. Каким вращением можно преобразовать одну окружность в другую, чтобы при этом точка $A_1$ преобразовалась в точку $A_2$?

**81.** Построить для двух данных вращений такую точку, которая преобразуется в этих вращениях в одну и ту же точку.

**82.** Доказать, что произведение двух вращений около различных центров есть вращение или перенос. Построить центр этого вращения и угол поворота или вектор переноса.

**83.** Доказать, что произведение вращения на перенос есть вращение на тот же угол. Построить центр полученного вращения.

**84.** Даны два вращения $A_\alpha$ и $B_\beta$ с различными центрами Как расположены центры двух вращений $B_\beta \cdot A_\alpha$ и $A_\alpha \cdot B_\beta$ по отношению к прямой $AB$?

**85.** На сторонах $CA$ и $CB$ треугольника $ABC$ вне его построены квадраты $CAMN$ и $CBPQ$. Доказать, что прямая, проведенная через точку $C$ перпендикулярно к $AB$, делит отрезок $NQ$ пополам.

## § 4. СКОЛЬЗЯЩЕЕ ОТРАЖЕНИЕ

**86.** Доказать, что в скользящем отражении перенос и отражение перестановочны.

**87.** Даны два равных отрезка $AB$ и $A_1B_1$. Построить ось скользящего отражения, преобразующего точку $A$ в точку $A_1$ и точку $B$ — в точку $B_1$.

**88.** Скользящее отражение задано парой соответствующих точек и вектором перенсса. Построить для произвольной точки ей соответствующую в заданном преобразовании.

**89.** Даны две равные окружности $k_1(O_1, R)$ и $k_2(O_2, R)$ и на каждой из них соответственно по точке $A$ и $B$. Каким скользящим отражением можно преобразовать $k_1$ в $k_2$, чтобы при этом точка $A$ преобразовалась в точку $B$?

**90.** Скользящее отражение представлено в виде произведения отражения от прямой и отражения от точки, не принадлежащей прямой. Построить ось скользящего отражения и его вектор переноса.

**91.** Какое преобразование представляет собой произведение скользящего отражения и симметрии, центр которой принадлежит оси отражения?

**92.** Доказать, что произведение двух скользящих отражений с общей осью отражения есть параллельный перенос, или тождественное преобразование.

**93.** Доказать, что произведение двух скользящих отражений, оси которых параллельны, есть параллельный перенос.

**94.** Доказать, что преобразование, обратное скользящему отражению, имеет ту же самую ось отражения, что и данное преобразование, но противоположный вектор перенсса.

**95.** Доказать, что квадрат скользящего отражения есть параллельный перенос.

**96.** Даны два равных отрезка $AB$ и $A_1B_1$. Одно скользящее отражение преобразует $A$ в $A_1$, а $B$ в $B_1$; другсе скользящее отражение преобразует $A$ в $B_1$, а $B$ в $A_1$. Доказать, что оси этих скользящих отражений перпендикулярны.

**97.** Даны два равных отрезка $AB$ и $A_1B_1$. Одно скользящее отражение преобразует $A$ в $A_1$ и $B$ в $B_1$, а другое — $A$ в $B_1$ и $B$ в $A_1$. Доказать, что произведение этих двух скользящих отражений есть центральная симметрия.

**98.** Даны две прямые $a$ и $b$ и на каждой из них соответственно по точке $A$ и $B$. Определить скользящее отражение, преобразующее прямую $a$ и точку $A$ в прямую $b$ и точку $B$.

**99.** Даны две прямые $a$ и $b$ и на них отрезки $A_1A_2$, $A_2A_3$ и $B_1B_2$, $B_2B_3$, причем $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$. Доказать, что середины отрезков $A_1B_1$, $A_2B_2$ и $A_3B_3$ принадлежат одной прямой (или совпадают).

**100.** Три прямые $a$, $b$, $c$ не принадлежат одному пучку (не проходят через одну точку и не параллельны). Построить ось и вектор скользящего отражения, являющегося произведением отражений от этих прямых.

**101.** Даны два равных, но противоположно ориентированных треугольника $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Доказать, что середины отрезков $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ принадлежат одной прямой.

**102.** Доказать, что средняя линия $A_1B_1$ равностороннего треугольника $ABC$ неподвижна в преобразовании, являющемся произведением отражений от прямых $CA$, $AB$ и $BC$.

## § 5. ДВИЖЕНИЯ

**103.** Произведение трех отражений от различных прямых имеет неподвижную точку. Как расположены прямые?

**104.** Три прямые $a$, $b$ и $c$ пересекаются в одной точке $M$. Доказать, что произведение отражений от этих прямых есть отражение от прямой $d$, проходящей через точку $M$ (т. е. если $M \in (a, b, c)$, то $c \cdot b \cdot a = d$, $M \in d$). Построить прямую $d$.

**105.** Даны три отражения от параллельных прямых $a$, $b$ и $c$. Доказать, что произведение $c \cdot b \cdot a$ есть отражение от прямой $d$, параллельной данным прямым. Построить прямую $d$.

**106.** Даны три отражения от прямых $a$, $b$ и $c$. Доказать, что если $c \cdot b \cdot a = a \cdot b \cdot c$, то данные прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

**107.** Охарактеризовать взаимное расположение прямых $a$, $b$ и $c$, если отражения от этих прямых связаны равенством $c \cdot b \cdot a \cdot c = a \cdot b$.

**108.** Имеет ли произведение движения первого рода и движения второго рода неподвижную точку, неподвижную прямую?

**109.** В окружность вписан многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$. Прямые $a_{12}$, $a_{23}$, ..., $a_{n1}$ — серединные перпендикуляры отрезков $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_nA_1$. Какое преобразование представляет собой произведение отражений от серединных перпендикуляров: $a_{n1} \cdot \ldots \cdot a_{23} \cdot a_{12}$?

**110.** Даны четыре прямые $a$, $b$, $c$ и $d$. Доказать, что если произведение $d \cdot c \cdot b \cdot a$ есть центральная симметрия, то и произведение $a \cdot d \cdot c \cdot b$ — также центральная симметрия.

**111.** Произведение отражений от сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ четырехугольника $ABCD$ есть параллельный перенос. Доказать, что около такого четырехугольника можно описать окружность.

**112.** Доказать, что произведение четырех последовательных отражений от осей, содержащих биссектрисы углов четырехугольника общего вида, есть параллельный перенос.

**113.** В окружность с центром $O$ вписан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что произведение отражений от прямых $OA$, $OB$, $OC$ и $OD$ есть тождественное преобразование.

**114.** В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$. Доказать, что произведение отражений от прямых $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ есть отражение от прямой, перпендикулярной прямой $AC$.

**115.** В каком случае произведение вращения на отражение от прямой перестановочно?

**116.** Прямые $a$, $b$, $c$ — серединные перпендикуляры сторон $BC$, $CA$ и $AB$ треугольника $ABC$. Построить прямые $d_1$, $d_2$, $d_3$, где $d_1 = b \cdot c \cdot a$, $d_2 = c \cdot b \cdot a$, $d_3 = a \cdot c \cdot b$.

**117.** Через вершины треугольника $ABC$ проведены соответственно по две прямые $x$ и $x'$, $y$ и $y'$, $z$ и $z'$, причем так, что прямые $AB$, $AC$, $x$ и $x'$ имеют общую ось симметрии, аналогично $BC$, $BA$, $y$ и $y'$; $CA$, $CB$, $z$ и $z'$ также имеют общие оси симметрии. Доказать, что если прямые $x$, $y$, $z$ пересекаются в одной точке, то и прямые $x'$, $y'$, $z'$ также пересекаются в одной точке или, быть может, параллельны.

**118.** Доказать, что произведение четырех отражений от прямых, образующих своим пересечением прямоугольник, есть перенос. Рассмотреть различные последовательности четырех отражений.

**119.** Даны вращение $A_\alpha$ и точка $S$. Найти геометрическое место таких точек $X$, чтобы прямые $XX'$, где $X' = A_\alpha(X)$, проходили через точку $S$.

**120.** Точкой $M$ задана центральная симметрия, а прямыми $a$ и $b$ — осевые симметрии. Доказать, что если $a \cdot M = M \cdot b$, то $a \parallel b$ и $M$ — центр симметрии прямых $a$ и $b$.

**121.** Если точками $A$ и $B$ заданы центральные симметрии, а прямой $m$ — осевая симметрия, то из равенства произведений $A \cdot m$ и $m \cdot B$ следует, что точки $A$ и $B$ симметричны относительно прямой $m$.

**122*.** Даны три равных отрезка $A_1B_1$, $A_2B_2$ и $A_3B_3$. Вращение $A_\alpha$ преобразует $A_1B_1$ в $A_2B_2$, вращение $B_\beta$ преобразует $A_2B_2$ в $A_3B_3$, вращение $C_\gamma$ преобразует отрезок $A_3B_3$ в $A_1B_1$. Доказать, что углы треугольника $ABC$ (или внешние его углы) равны соответственно $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$.

**123.** Произведение трех вращений около различных точек $A$, $B$ и $C$ на углы по $120°$ есть тождественное преобразование. Доказать, что треугольник $ABC$ равносторонний.

**124*.** Произведение трех вращений $A_\alpha$, $B_\beta$, $C_\gamma$ есть тождественное преобразование. Доказать, что: 1) $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$, $\angle A = \frac{\alpha}{2}$, $\angle B = \frac{\beta}{2}$, $\angle C = \frac{\gamma}{2}$, треугольник $ABC$ ориентирован отрицательно или же 2) $\alpha+\beta+\gamma = 4\pi$, $\angle A = \pi - \frac{\alpha}{2}$, $\angle B = \pi - \frac{\beta}{2}$, $\angle C = \pi - \frac{\gamma}{2}$, треугольник $ABC$ ориентирован положительно.

**125.** Произведение четырех вращений около точек $A$, $B$, $C$, $D$ на углы по $90°$ есть тождественное преобразование. Доказать, что отрезки $AC$ и $BD$ перпендикулярны и равны.

**126.** На сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ вне его построены равносторонние треугольники $ACP$ и $BCQ$. Найти углы треугольника, у которого вершины совпадают с серединой $M$ стороны $AB$, с точкой $P$ и центром $O$ треугольника $BCQ$.

**127*.** На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ вне его построены равносторонние треугольники $ABM$, $BCN$, $CAP$. Доказать, что центры этих треугольников являются вершинами равностороннего треугольника.

## § 6. ГОМОТЕТИЯ

**128.** Разделить данный отрезок на части, пропорциональные данным отрезкам $m$ и $n$.

**129.** Даны два неравных параллельных отрезка. Какими преобразованиями гомотетии один из них можно преобразовать в другой? Какова зависимость между коэффициентами гомотетий?

**130.** Даны две прямые и точка. Через точку провести секущую так, чтобы ее отрезок с концами на данных прямых делился данной точкой в данном отношении.

**131.** Через данную точку $M$ провести прямую, пересекающую три данные прямые $a$, $b$ и $c$, проходящие через точку $S$, в трех точках $A$, $B$ и $C$ так, чтобы отношение $\overline{AB}:\overline{BC}$ было равно отношению данных отрезков $p$ и $q$.

**132.** Параллельно данной прямой провести прямую, пересекающую три данные прямые $a$, $b$ и $c$, образующие своим пересечением треугольник, в точках $A$, $B$ и $C$ так, чтобы отношение $\overline{AB}:\overline{BC}$ было равно отношению данных отрезков $p$ и $q$.

**133.** На прямой даны два неравных отрезка. Построить центры гомотетий, преобразующих один отрезок в другой.

**134.** Найти площадь трапеции, если даны площади треугольников, ограниченных диагоналями и основаниями трапеции.

**135.** Доказать, что формулой

$$\overline{Y} = k\overline{X} + \overline{B}, \quad k \neq 1, \ k \neq 0,$$

задается гомотетия. (Полюс — произвольная точка плоскости, $B$ — фиксированная точка, $k$ — данное число.)

**136.** Построить центр гомотетии, преобразующей одну из двух данных окружностей в другую.

**137.** Хорды окружности, имеющие общий конец, разделены в равных отношениях, считая от общего конца. Найти геометрическое место точек деления.

**138.** Через данную точку провести прямую, пересекающую две данные окружности под равными углами. (Угол между прямой и окружностью есть любой из углов между прямой и касательной к окружности, проведенной в точке пересечения.)

**139.** Построить окружность, касающуюся данной окружности и двух данных пересекающихся прямых.

**140.** Построить окружность, касающуюся двух параллельных прямых и окружности.

**141.** Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке $A$. Хорда $MN$ большей окружности касается меньшей окружности в точке $P$. Доказать, что луч $AP$ есть биссектриса угла $MAN$. Сформулировать и доказать теорему для случая, когда окружности касаются внешним образом.

**142.** В данную окружность вписать треугольник, имеющий заданные углы.

**143.** В окружности проведены два радиуса. Построить хорду этой окружности, такую, чтобы она данными радиусами делилась на три равные части.

**144.** Даны четыре окружности: $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$, которые последовательно (по циклу) касаются друг друга в точках $A_{12}$, $A_{23}$, $A_{34}$, $A_{41}$. Через произвольную точку $P_1$ окружности $k_1$ проведена прямая $P_1A_{12}$, пересекающая $k_2$ в точке $P_2$; далее проведена прямая $P_2A_{23}$, пересекающая $k_3$ в точке $P_3$, и наконец проведена прямая $P_3A_{34}$, пересекающая $k_4$ в точке $P_4$. Доказать, что точки $P_4$, $A_{41}$ и $P_1$ принадлежат одной прямой.

**145.** Доказать, что произведение двух гомотетий с различными центрами есть гомотетия или параллельный перенос.

**146*.** Около треугольника описана окружность. Через середины сторон треугольника проведена вторая окружность. Доказать, что центры гомотетий этих окружностей совпадают с точкой пересечения высот и точкой пересечения медиан данного треугольника.

## § 7. ПОДОБИЕ

**147.** Преобразование подобия первого рода задано двумя парами соответствующих точек. Построить неподвижную точку (центр) этого преобразования.

**148.** Построить центр преобразования подобия, заданного произведением гомотетии и вращения около различных центров.

**149.** Даны две окружности. Найти геометрическое место точек, являющихся центрами преобразования подобия, переводящих одну окружность в другую.

**150.** Даны прямая $a$ и точка $A$ на ней; найти геометрическое место центров преобразований подобия, в которых прямая $a$ и точка $A$ преобразуются в заданную прямую $b$ и точку $B$ на ней.

**151.** Даны центрально подобное преобразование $A_\varphi^k$ и точка $S$. Найти геометрическое место таких точек $X$, чтобы прямые $XX'$, где $X' = A_\varphi^k(X)$, проходили через точку $S$ ($k$ — коэффициент подобия, $\varphi$ — угол вращения преобразования подобия).

**152.** Даны два неравных, но одинаково ориентированных квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что центры преобразований подобия, переводящих $ABCD$ в: 1) $A_1B_1C_1D_1$, 2) $B_1C_1D_1A_1$, 3) $C_1D_1A_1B_1$, 4) $D_1A_1B_1C_1$, принадлежат одной окружности.

**153.** Две окружности $k_1$ и $k_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $P_1 \in k_1$ проведена прямая $P_1A$, пересекающая $k_2$ в точке $P_2$. Доказать, что угол $P_1BP_2$ и отношение $P_1B : P_2B$ не зависят от выбора точки $P_1$ на $k_1$.

**154.** Окружности $k_1$ и $k_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. В преобразовании подобия с центром $A$ окружность $k_1$ преобразуется в $k_2$. Найти угол вращения $\varphi$ и коэффициент подобия $k$ этого преобразования. Изменятся ли $\varphi$ и $k$, если за центр преобразования принять точку $B$? (Углы вращения считать положительными.)

**155.** Через точку пересечения $A$ двух окружностей проведена прямая $p$, пересекающая окружности в точках $M$ и $N$. Доказать, что угол, образованный касательными к окружностям в точках $M$ и $N$, не зависит от направления прямой $p$.

**156.** Через точку пересечения $A$ двух окружностей проведена прямая $m$, пересекающая окружности в точках $P$ и $Q$. Отрезок $\overline{PQ}$ разделен точкой $M$ в данном отношении. Найти геометрическое место точек $M$ при условии, что прямая $m$ опишет весь пучок с центром $A$.

**157.** Доказать, что если $\sigma$ есть преобразование подобия второго рода, отличное от движения, то $\sigma^2$ — гомотетия.

**158.** Доказать, что произведение гомотетии на симметрию относительно оси, не проходящей через центр гомотетии, можно представить как произведение гомотетии на симметрию относительно оси, проходящей через центр гомотетии.

**159*.** Преобразование подобия второго рода задано двумя парами соответствующих точек. Построить неподвижную точку и неподвижную прямую этого преобразования.

**160.** Даны две пересекающиеся прямые $a$ и $b$. Через точку $X$ проведены прямые, перпендикулярные к $a$ и $b$, пересекающие соответственно $b$ и $a$ в точках $B$ и $A$. Перпендикулярные прямые к $b$ и $a$ в точках $B$ и $A$ пересекаются в точке $X'$. Выяснить вид преобразования $X \to X'$.

**161.** Построить четырехугольник по четырем его сторонам, если известно, что он вписывается в окружность.

**162.** Три окружности $k_1$, $k_2$, $k_3$, проходящие через точку $M$, пересекаются вторично в точках $A_{12}$, $A_{23}$ и $A_{31}$. Через точку $P_1 \in k_1$ проводится прямая $P_1A_{12}$, пересекающая $k_2$ в точке $P_2$; через $P_2$ проводится прямая $P_2A_{23}$, пересекающая $k_3$ в точке $P_3$; через точку $P_3$ проводится прямая $P_3A_{31}$, пересекающая $k_1$ в точке $P_4$. Доказать, что $P_1 \equiv P_4$.

**163*.** Даны три равных одинаково ориентированных равносторонних треугольника $OAB$, $OCD$ и $OEF$. Доказать, что середины отрезков $BC$, $DE$ и $FA$ являются вершинами равностороннего треугольника или совпадают.

## § 8. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

**164.** Вычислить площадь шестиугольника, у которого противоположные стороны попарно параллельны и равны, если известны стороны и углы шестиугольника.

**165.** Построить треугольник по трем его медианам.

**166.** Диагональ $AC$ четырехугольника $ABCD$ подвергнута переносу на вектор $\overline{a}$, а диагональ $BD$ — на вектор $\overline{b}$. Доказать, что площадь полученного четырехугольника равна площади данного.

**167.** Построить треугольник по заданным серединам его сторон.

**168*.** Доказать, что формулой

$$\overline{Y} = -\overline{X} + \frac{2(\overline{A}\overline{X})}{|\overline{A}|^2}\overline{A}, \quad \overline{A} \neq \overline{0},$$

задается преобразование симметрии относительно оси $OA$, где $O$ — полюс, $A$ — произвольная точка.

**169*.** Доказать, что осевая симметрия относительно прямой, проходящей через точку $M$ параллельно вектору $\overline{A}\left(|\overline{A}| = 1\right)$, задается формулой

$$\overline{Y} = -\overline{X} + 2\left(\overline{A}\overline{X}\right)\overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{B} = 2\left[\overline{M} - \overline{A}\left(\overline{A} \cdot \overline{M}\right)\right].$$

**170*.** Доказать, что формулой $\overline{Y} = \overline{X} + 2\left[2\left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right)\overline{B} - \overline{A}\right]\left(\overline{A} \cdot \overline{X}\right) - 2\left(\overline{B} \cdot \overline{X}\right)\overline{B}$, $|\overline{A}| = |\overline{B}| = 1$, задается вращение около полюса на угол $\varphi$, где $\varphi = 2\left(\widehat{\overline{A}, \overline{B}}\right)$.

**171.** Даны два преобразования вращения около разных центров, но с одним и тем же углом вращения. В первом вращении точка $A$ преобразуется в $A_1$, а во втором вращении точка $A$ преобразуется в $A_2$. Доказать, что длина и направление отрезка $A_1A_2$ не зависят от выбора точки $A$.

**172.** Вращение $\omega_1$ преобразует точку $A$ в точку $A_1$, а точку $B$ — в точку $B_1$. Вращение $\omega_2$ преобразует $A$ в $B_1$, а $B$ — в $A_1$. Доказать, что отрезок, соединяющий центры вращения, виден из середины отрезка $AB$ и середины отрезка $A_1B_1$ под прямыми углами.

**173.** На прямой $a$ даны два отрезка $A_1A_2$ и $A_2A_3$, а на прямой $b$ — отрезки $B_1B_2$ и $B_2B_3$, такие, что $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$, $A_1A_3 = B_1B_3$. Доказать, что серединные перпендикуляры отрезков $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ пересекаются в одной точке, параллельны или совпадают.

**174.** Дан равносторонний треугольник $ABC$ и точка $M$. Доказать, что сумма любых двух из трех отрезков $MA$, $MB$ и $MC$ не меньше третьего.

**175.** Даны три параллельные прямые. Построить равносторонний треугольник, вершины которого расположены соответственно на данных прямых.

**176.** Даны две прямые $a$ и $b$ и точка $M$. Построить равносторонний треугольник $MAB$, вершины которого $A$ и $B$ лежат соответственно на $a$ и $b$.

**177.** На сторонах $CA$ и $CB$ треугольника $ABC$ вне его построены квадраты $CAMN$ и $CBPQ$. Доказать, что треугольник $ABS$ прямоугольный и равнобедренный, где $S$ — середина отрезка $MP$.

**178*.** На сторонах четырехугольника вне его построены квадраты. Доказать, что центры квадратов являются вершинами четырехугольника, у которого диагонали перпендикулярны и равны.

**179.** На сторонах треугольника вне его построены квадраты. Доказать, что расстояние между центрами двух квадратов равно расстоянию от центра третьего квадрата до соответствующей ему вершины данного треугольника.

**180*.** Боковые стороны $AD$ и $BC$ трапеции $ABCD$ повернуты около своих середин на углы $90°$, после чего они занимают положение $A_1D_1$ и $B_1C_1$. Доказать, что отрезки $A_1B_1$ и $C_1D_1$ равны.

**181.** Дан прямоугольный треугольник $ABC$ ($\angle C = 90°$). Построить ось скользящего отражения, представляющего собой произведение отражений от прямых: 1) $CA$, $AB$ и $BC$; 2) $AB$, $BC$ и $CA$; 3) $BC$, $CA$ и $AB$.

**182.** Дано вращение $A_\alpha$ и отражение от прямой $a$. Построить ось скользящего отражения $a \cdot A_\alpha$ и выразить модуль вектора переноса этого скользящего отражения через угол $\alpha$ и расстояние точки $A$ до прямой $a$.

**183.** Даны две прямые $a$ и $b$ и две точки $M$ и $N$. Если произведения $a \cdot M$ и $N \cdot b$ представляют собой одно и то же преобразование, то $a \parallel b$, $MN \perp a$, точки $M$ и $N$ одинаково удалены соответственно от $a$ и $b$, причем отрезок $MN$ либо пересекает обе прямые, либо не пересекает ни одну из них. Доказать.

**184.** Доказать, что произведение двух скользящих отражений, оси которых образуют угол $\alpha$, есть вращение на угол $2\alpha$.

**185*.** Если $\sigma$ — скользящее отражение, а $\alpha$ — движение второго рода, причем выполняется равенство

$$\sigma^{-1} = \alpha\sigma\alpha^{-1},$$

то $\alpha$ — отражение.

## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

### § 1.

**1.** а) Все точки оси симметрии; б) ось симметрии и прямые, перпендикулярные оси симметрии. **3.** 1) Две или четыре; 2) бесконечное множество (прямые, перпендикулярные данным, и прямая, равноудаленная от данных прямых); 3) две; 4) одну; 5) три; 6) четыре; 7) $n$ осей. **4.** 1) Бесконечно много; 2) одну или бесконечно много; 3) одну или две; 4) одну, две или бесконечно много **5.** Одну, две (два случая) или четыре. **6.** Одну или две. **7.** 1) Ромбоид или равнобочная трапеция; 2) ромб или прямоугольник, не являющиеся квадратами; 3) квадрат. **8.** Тремя, из которых только две параллельны. **9.** Одной парой, если точки различны; двумя, если соответственные точки совпадают. **10.** Двумя, в которых хотя бы одна пара соответственных прямых различна и прямые не проходят через одну точку. **11.** 1) Взять одну вершину на оси симметрии, две другие произвольно не на оси и построить им симметричные; 2) пятиугольник с двумя осями симметрии правильный. **12.** В симметрии относительно биссектрис двух пересекающихся прямых или относительно прямой, равноудаленной от двух параллельных прямых. **13.** Только точка пересечения двух осей симметрии является сдвоенной парой в двух симметриях. **14.** Симметрия или тождественное преобразование. **15.** Найти ось симметрии, преобразующей один из двух треугольников в другой. **16.** Применить симметрию относительно прямой $l$. **17.** С помощью двух окружностей с центрами на данной прямой построить точку $A'$, симметричную данной точке $A$ относительно данной прямой. Отрезок $AA''$ параллелен данной прямой, где $A''$ — точка, диаметрально противоположная точке $A'$ на одной из построенных окружностей. **18.** Провести две концентрические окружности с центром в точке пересечения данных прямых. Точки пересечения диагоналей равнобочных трапеций, полученных при пересечении окружностей с прямыми, лежат на осях симметрии. **19.** Воспользоваться преобразованием симметрии, переводящей данные прямые друг в друга. **20.** Использовать симметричность данной трапеции.

21. Отразить меньшую сторону относительно биссектрисы угла, противолежащего третьей стороне. 22. После применения симметрии относительно медиатрисы третьей стороны задача сводится к построению треугольника по двум сторонам и углу между ними. 23. Искомая сторона $AB$ лежит на прямой $C_1C_2$, где $C_1$ и $C_2$ — точки, симметричные точке $C$ относительно двух данных прямых. 24. Точка $P$ лежит на отрезке, соединяющем одну из данных точек с точкой, симметричной другой точке относительно прямой $a$. 25. Пусть $b$ — луч, на котором лежит точка $B$. Периметр треугольника $MAB$ равен периметру ломаной $MBA'M'$ ($A'$ и $M'$ — точки, симметричные $A$ и $M$ относительно $b$). Точка $A'$ на прямой $a'$ найдется из условия минимальности периметра ломаной $MA'M'$ (см. задачу 24). 26. Точку $M$ отразить от данной прямой и из полученной точки провести к окружности касательные.

## § 2.

28. Вектор переноса определяется центрами данных окружностей. 29. Когда векторы, задающие переносы, противоположны. 30. Вектор переноса равен удвоенному вектору, начало и конец которого лежат соответственно на осях первой и второй симметрии, и перпендикулярен осям. 31. 1) Любым вектором, начало которого лежит на прямой $a$, конец — на прямой $b$; 2) вектором с началом на прямой $b$ и концом на прямой $a$; 3) любым вектором, коллинеарным данным прямым. 32. Сторону угла, на которой лежит точка $M$, перенести в направлении другой стороны так, чтобы она пересекала эту сторону в доступной точке. 33. Перенести одну из прямых $a$ или $b$ параллельно третьей прямой на вектор, длина которого равна данному отрезку (два решения). 34. Перенести окружность (или прямую) в направлении прямой (как в задаче 33). 35. Перенести одну из окружностей так, как в задачах 33, 34. 36. Проверить, что точка $A$ неподвижна и векторы $\overline{X} - \overline{A}$ и $\overline{Y} - \overline{A}$ противоположны. 37. а) Середины отрезков $AA_1$ и $BB_1$ совпадают; б) если отрезки не лежат на одной прямой, то $ABA_1B_1$ — параллелограмм ($A$ и $A_1$ — противоположные вершины). 38. Общая хорда данной окружности и окружности ей симметричной относительно данной точки является искомой. 39. Найти последовательность четырех центральных симметрий относительно середин сторон четырехугольника, которые оставляют его вершину на месте. Использовать тот факт, что произведение двух симметрий есть перенос, его вектор определяется удвоенным отрезком, соединяющим центры симметрий. Произведение переносов — тождественное преобразование, если оно имеет неподвижную точку, а векторы, определяющие переносы, противоположны. 40. Центр симметрии и три вершины можно выбрать произвольно. 41. а) Симметрия относительно центра окружности; б) окружности касаются. 42. Центр симметрии параллелограмма найти как пересечение геометрических мест центров симметрий, переводящих одну из его сторон в другую. 43. Построить два вектора $\overline{AM}$ и $\overline{BM}$, параллельных сторонам угла, где точки $A$ и $B$ лежат на сторонах угла. Построить точку $P$ так, чтобы $\overline{MP} = \overline{AM} + \overline{BM}$ ($\overline{OM} = \overline{MP}$). 44. Построить фигуру, симметричную одной из данных фигур относительно данной точки. 45. То же построение, что в задаче 44. 46. Вектор переноса равен $2 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$, где $O_1$ и $O_2$ — центры первой и второй симметрий. Воспользо-

ваться формулами задач 27 и 36. **47.** Использовать свойство центральной симметрии преобразовывать вектор в противоположный вектор или воспользоваться формулой задачи 36. Центром искомой симметрии является такая точка $P$, что середины отрезков $O_1O_3$ и $O_2P$ совпадают ($O_i$ — последовательные центры данных симметрий). **48.** См. указание к задаче 47. **49.** См задачу 47. **50.** Использовать результат задачи 47. **51.** Данное преобразование есть произведение переноса и центральной симметрии (см. задачу 46 и 47) **52.** Воспользоваться результатом задачи 46. **53.** Используя результат задачи 46, доказать, что произведение шести центральных симметрий относительно последовательных вершин шестиугольника, равное произведению трех переносов, есть тождественное преобразование.

## § 3.

**54.** Найти неподвижную точку и использовать равенство соответственных углов в симметрии. **55.** Использовать результат задачи 54. **56.** Прямые перпендикулярны. **57.** Центр вращения — точка пересечения медиатрис данных отрезков, угол между которыми есть угол вращения. Этот угол равен углу между отрезками. **58.** Использовать определение и основное свойство вращения. **59.** Вращениями на угол 180° с центром в любой точке данной прямой. **60.** Вращениями около любой точки оси симметрии данных прямых на угол, равный одному из углов, образованных данными прямыми. **61.** При вращении на 180° каждая прямая, проходящая через центр вращения, неподвижна. **62.** Вращением на 180° относительно его середины. **63.** Вращением на 180° или 90° (если прямые перпендикулярны) относительно точки их пересечения. **64.** 1) Вращением на 180° относительно точки, равноудаленной от данных прямых; 2) вращением на 180° относительно центра параллелограмма. **65.** Вращением на $60°k$ ($k = 1,2,3,4,5$). **66.** Центром вращения может быть любая точка медиатрисы отрезка, соединяющего центры окружностей. **67.** Вращениями относительно центра фигуры: 1) на $90°\ k$ ($k = 1,2,3$); 2) на $60°\ k$ ($k = 1,2,3,4,5$). **68.** Вращениями на углы $72°k$ ($k = 1,2,3,4$). **69.** Вращениями на 120° и 240°. **70.** Вершины $A_2, A_4, A_6$ образуют правильный треугольник, вершина $A_1$ берется произвольно (так чтобы она была отлична от вершин треугольника $A_2A_4A_6$ и его центра $O$). Вершины $A_3$ и $A_5$ получаются из вершины $A_1$ вращением на 120° и 240° около центра $O$. **71.** Решается аналогично задаче 70. **72.** На медиатрисе отрезка, соединяющего центры окружностей, построить точку, из которой этот отрезок виден под углом 45°. **73.** Точка $M$ лежит в пересечении медиатрис отрезков $AA_1$ и $BB_1$. Если $AA_1 \parallel BB_1$, точка $M$ не существует. **74.** Центры вращений лежат в пересечении биссектрис углов, образованных прямыми $a$ и $b$ с медиатрисой отрезка $AB$. Если медиатриса отрезка $AB$ совпадает с одной из биссектрис, то один из центров найдется как точка пересечения перпендикуляров к прямым $a$ и $b$, восставленных в точках $A$ и $B$. **75.** Вращение $\omega_2$ можно представить как произведение вращения $\omega_1$ на симметрию около середины отрезка $A_1B_1$. **76.** Отрезок $OA$ можно вращением совместить с отрезками $O_1A_1$, $O_1B_1$ или $O_1C_1$ ($O$ и $O_1$ — центры соответствующих треугольников). Один из этих трех отрезков может оказаться параллельным $OA$, тогда соответствующего вращения не существует. Ответ. Двумя или тремя. **77.** Вращением на 90° около центра квадрата фигура совмещается с собой. **78.** Перенести секущие параллельно так, чтобы они проходили через центр квадрата, и применить вращение на 90°. **79.** Четыре центра вращения лежат на пересечении медиатрисы отрезка, соединяющего центры квадратов, с медиатрисами отрезков $AA_1$, $AB_1$, $AC_1$, $AD_1$, где $A$ — вершина первого квадрата, $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ — вершины второго. **80.** Центр вращения лежит в пересечении медиатрис отрезков $O_1O_2$ и $A_1A_2$. **81.** Искомая точка — центр вращения, которое является произведением одного из данных вращений на вращение, обратное второму. **82.** Используя результат задачи 54, представить каждое из вращений в виде произведения двух осевых отражений так, чтобы второе отражение в представлении первого вращения совпало с первым отражением в представлении второго вращения (таковым может быть только отражение от прямой, проходящей через центры двух данных вращений).

В полученном произведении четырех отражений два средних взаимообратны и вследствие сочетательного закона уничтожаются. Оставшиеся два отражения дадут вращение или перенос, если их оси окажутся параллельными. Центром вращения является точка пересечения осей, угол равен сумме углов данных вращений. Вектор переноса находится как в задаче 30. **83.** Представить каждое из данных движений в виде произведения двух отражений, как в решении задачи 82. Осью общего отражения в обоих представлениях является прямая, проходящая через центр вращения и перпендикулярная вектору переноса (см. указание к задаче 82). **84.** Центры симметричны относительно $AB$. Использовать построение в задаче 82. **85.** Пусть $H$ — основание высоты $CH$. Двумя вращениями на 90° и —90° соответственно с центром в точке $C$ преобразовать точку $A$ в $N$ и точку $B$ в $Q$. Рассмотреть трапецию $H_1NQH_2$, где $H_1$, $H_2$ — образы точки $H$ в каждом из двух вращений.

## § 4.

**86.** Проверить, что данная точка и ее образы при выполнении обеих последовательностей преобразований являются вершинами прямоугольника с двумя сторонами, параллельными оси. **87.** Осью является прямая $A_2B_2$, где $A_2$ — середина отрезка $AA_1$, $B_2$ — середина $BB_1$. Если $A_2 \equiv B_2$, то осью является прямая, проходящая через $A_2$ и перпендикулярная отрезку $AA_1$. **88.** Предварительно построить ось скользящего отражения. Ось проходит через середину отрезка, соединяющего данные точки. **89.** Для отыскания оси воспользоваться результатом задачи 87. Вектор переноса определится проекциями точек $O_1$ и $O_2$ на ось. **90.** Осью является прямая, проходящая через данную точку перпендикулярно данной прямой. Для построения вектора переноса найти образ точки пересечения данной прямой с построенной осью. **91.** Представить скользящее отражение в виде произведения отражений от прямой и точки (см. задачу 90). Ответ. Осевая симметрия. **92.** Представить первое из данных преобразований как произведение центральной и осевой симметрий, а второе — как произведение осевой (с той же осью) и центральной. **93.** См. указание к задаче 92. **94.** Найти неподвижную прямую и пару соответственных точек на оси (см. задачу 33). **95.** См. указание к задаче 92. **96.** Произведение двух скользящих отражений как произведение четного числа осевых отражений есть вращение или перенос. Произведение первого из данных преобразований и преобразования, обратного второму, преобразует отрезок $AB$ в $BA$, т.е. вращение на 180°. Разложив каждый сомножитель в произведение осевой и центральной симметрий, так чтобы оба центра совпали, сведем это преобразование к произведению двух осевых симметрий с перпендикулярными осями. **97.** См. решение задачи 96. **98.** Отложить от точек $A$ и $B$ на соответственных прямых по равному отрезку. Воспользоваться результатом задачи 87 (два решения). **99.** Середины отрезков лежат на оси скользящего отражения, переводящего отрезок $A_1A_2$ в $B_1B_2$ (сравни с задачей 87). **100.** Для нахождения оси построить две пары соответственных точек и воспользоваться построением задачи 87. Удобно строить образы (и прообразы) точек пересечения последовательных осей данных симметрий. **101.** Построить скользящее отражение, преобразующее один треугольник во второй. **102.** Данное преобразование второго рода и поэтому является скользящим отражением (см. задачу 87). Прямая $A_1B_1$ — его ось: $B_1$ — середина отрезка $BB''$, $A_1$ — середина отрезка $AA'$, где $A'$ — образ точки $A$ и $B''$ — прообраз точки $B$ в данном преобразовании.

## § 5.

**103.** Прямые пересекаются в одной точке или параллельны. Осями симметрии являются медиатрисы отрезков $MM_1$, $M_1M_2$, $M_2M$, где $M$ — неподвижная точка в данном преобразовании, $M_1$ и $M_2$ — ее образы в первом и произведении первых двух отражений. **104.** Всякое движение второго рода есть: 1) скользящее отражение, 2) осевая симметрия, если имеется неподвижная точка (см. задачу 87). Точка $M$ неподвижна, следовательно, данное движение — симметрия. **105.** Доказать, что скользящее отражение не может иметь неподвижных прямых, кроме оси. Учесть указание к задаче 104 и то, что данное преобразование имеет бесчисленное множество неподвижных прямых. **106.** Квадрат данного движения есть тождественное преобразование $(abc)(abc) = (abc)(cba) = abba = aa = e$, следовательно, имеет неподвижную точку и удовлетворяет условию задачи 103. **107.** Умножив равенство $cbac = ab$ слева на отражение $c$, получим: $bac = cab$ — условие задачи 106. **108.** Движение второго рода либо не имеет неподвижных точек и имеет единственную неподвижную прямую (скользящее отражение), либо имеет прямую неподвижных точек и пучок параллельных неподвижных прямых (симметрия). **109.** При $n$ четном — тождественное преобразование, при $n$ нечетном — отражение от прямой. **110.** Движение первого рода является вращением (или переносом — угол «вращения» равен нулю); $dcba = xy$, где $x$ и $y$ — отражения от перпендикулярных прямых; $adcb = a(xy)a = (ax)(ya)$. Угол последнего вращения равен сумме углов вращений $ax$ и $ya$, т.е. 180°, так как $x$ и $y$ перпендикулярны. **111.** Представить пары отражений как вращения. Так как угол «вращения» 360°, то сумма противоположных углов четырехугольника 180°. **112.** Одна из сторон четырехугольника неподвижна. Вращение на угол 360° не может иметь одну неподвижную прямую. **113.** Представить пары отражения вращениями. **114.** Проверить, что $AC$ — неподвижная прямая преобразования (см. указание к задаче 104). **115.** Вращение на 180° перестановочно с отражением от прямой, если центр вращения лежит на оси. **116.** $d_1 = OA$, $d_2 = OB$, $d_3 = OC$, если последовательность преобразований читать справа налево. **117.** Если три прямые $x, y, z$ пересекаются в точке или параллельны, то $xyz = zyx$, и обратно (задача 106). Пусть $a, b, c$ — прямые, на которых лежат стороны треугольника $ABC$. Вращение около вершины $A$ от $b$ к $x$ совмещает $x'$ с $c$ и т.д. Это означает, что $bx = x'c$,

$cy = y'a$, $az = z'b$. Используя эти соотношения, а также то, что $xyz = zyx$, $baz' = z'ab$, $cy'a = ay'c$, $x'cb = bcx'$, получим: $x'y'z' = (x'c)\,c\,(y'a)\,a\,(z'b)b = bxc\,cyaazb = bxyzb = bzyxb = ba(az)\,c\,(cy)b \times (bx)b = (baz')\,b\,(cy'a)\,b(x'cb) = (z'ab)\,b\,(ay'c)b\,(bcx') = z'y'x'$.
**118.** Проверить, что угол «вращения» равен 360°. **119.** Угол $AXS$ постоянный, так как $\angle XAX' = \alpha$ и треугольник $XAX'$ равнобедренный. **120.** Если $aM = Mb$, то $M = aMb$. Подействуем этими преобразованиями на прямую $b$ : $M(b) = aMb(b)$, но $b(b) = b$ (ось — неподвижная прямая), $M(b) = aMb$, т.е. прямая $M(b)$ — неподвижная в отражении от $a$, следовательно, $M(b) = a$; $a$ и $b$ симметричны относительно $M$. **121.** Задача, аналогичная задаче 120. **122.** Треугольник $ABC$ образован медиатрисами трех данных отрезков. Его углы равны углам между данными отрезками. **123.** Из условия следует, что $A_{120^\circ}B_{120^\circ} = C_{-120^\circ}$. Но центр вращения $A_{120^\circ}B_{120^\circ}$ можно получить, если представить каждое вращение как произведение двух отражений, одной из осей каждого из которых является прямая $AB$ и оси которых образуют углы по 60°. **124.** Если углы вращения измерить числами интервала $(0, 2\pi)$, то $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ или $4\pi$. Рассмотреть обе возможности и использовать формулу $C_x = A_\alpha B_\beta$, построив точку $C$, как в задаче 123. **125.** Построить центры вращений $A_{90^\circ}B_{90^\circ}$ и $C_{90^\circ}D_{90^\circ}$, как в задаче 123. Из условия следует, что оба центра совпадают в точке $O$. Рассмотреть прямоугольные равнобедренные треугольники $ABO$ и $CDO$. **126.** Рассмотреть произведение вращений $M_{180^\circ}O_{120^\circ}P_{60^\circ}$. Ответ: 90°, 60°, 30°. **127.** Рассмотреть произведение вращений на 120° с центрами в центрах построенных треугольников (см. задачу 120).

## § 6.

**128.** С помощью гомотетии преобразовать отрезок, на котором отложено $m$ и $n$ равных частей, в данный. **129.** Прямые, соединяющие концы данных отрезков $AB$ и $A_1B_1$, пересекаются в центре гомотетии: $O_1 = AA_1 \times BB_1$, $O_2 = AB_1 \times BA_1$. Коэффициенты двух гомотетий — противоположные числа. **130.** Построить прямую, гомотетичную одной из данных в гомотетии с центром в данной точке и коэффициентом, равным данному отношению. **131.** Построить отрезок, гомотетичный искомому относительно центра $S$. Для этого на прямой $a$ отложить от $S$ отрезки $SM$ и $MN$, равные $q$ и $p$, и из точки $M$ провести прямую, параллельную $c$. **132.** На данной прямой построить отрезок, гомотетичный искомому относительно точки пересечения двух из прямых $a$, $b$, $c$, и разделить его в отношении $p : q$. **133.** Построив на данных отрезках подобные фигуры (например, равносторонние треугольники), найти их центры подобия, соединяя соответствующие вершины (два случая). **134.** Площадь трапеции $S$ пропорциональна произведению диагоналей с тем же коэффициентом, что и указанные в задаче площади $S_1$ и $S_2$, пропорциональные произведению отрезков диагоналей. Учитывая, что отрезки диагоналей гомотетичны с коэффициентом $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}$, имеем: $S = \left(\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} + 1\right)^2 S_1 = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2}$. **135.** Если центр гомотетии в начале вектора точек, то формула гомотетии имеет вид: $\overline{Y} = k\overline{X}$. Если центр гомотетии в точке $A$, то $\overline{Y}-\overline{A}=k(\overline{X}-\overline{A})$. **136.** Вписать в окружности гомотетичные фигуры, например провести параллельные радиусы (два случая). **137.** Окружность, гомотетичная данной относительно центра пучка хорд. **138.** Провести прямую через данную точку и один из центров гомотетии или параллельно линии центров окружностей, если они равны. **139.** Уменьшением радиуса данной окружности до нуля и увеличением радиуса искомой окружности на столько же с одновременным «отодвиганием» данных прямых параллельно себе на такое же расстояние задача сводится к построению окружности через данную точку, касающейся двух прямых. Эта задача решается с применением гомотетии относительно точки пересечения этих прямых. **140.** См. указание к задаче 139. **141.** Построить хорду $M'N'$ меньшей окружности, гомотетичную хорде $MN$ относительно точки $A$, и рассмотреть дуги, заключенные между хордой $M'N'$ и касательной $MN$. **142.** Построить треугольник, подобный данному, и применить гомотетию, преобразующую окружность, описанную около этого треугольника, в данную окружность. **143.** Соединить концы радиусов хордой $AB$, на ее продолжении по обе стороны от нее отложить отрезки $AM$ и $BN$, равные $AB$. Искомая хорда гомотетична отрезку $MN$ относительно центра окружности.

**144.** Провести прямую $P_4A_{41}$, пересекающую окружность $k_1$ в точке $P_5$, и рассмотреть произведение четырех гомотетий, преобразующих последовательно окружность $k_1$ в $k_2$, $k_2$ в $k_3$, $k_3$ в $k_4$, $k_4$ в $k_1$ с центрами в точках касания. Это преобразование переводит $k_1$ в себя и является тождественным, поэтому $P_5 \equiv P_1$. **145.** Воспользоваться формулой задачи 135. **146.** Точка пересечения медиан есть центр гомотетии обоих треугольников. Остается убедиться, что точка пересечения медиатрис меньшего треугольника лежит посредине между точкой пересечения медиатрис и высот большего треугольника.

## § 7.

**147.** Пусть $O$ — искомый центр подобия (черт. 32). Тогда треугольники $ABO$ и $A'B'O$ подобны, одинаково ориентированы и вращением около точки $O$ один из них может быть приведен в положение, гомотетичное другому, причем угол вращения $\alpha$ равен углу между соответственными прямыми $AB$ и $A'B'$. Следовательно, отрезок $AA'$ виден из точек $O$ и $S$ под углом $\alpha$ и точки $A$, $A'$, $O$, $S$ лежат на окружности. Аналогично, $B$, $B'$, $O$, $S$ тоже лежат на окружности и $O$ есть вторая точка пересечения двух окружностей, проходящих через точки $A$, $A'$, $S$ и $B$, $B'$, $S$. Если $A'$ лежит на $AB$, то $S \equiv A'$ и первая из окружностей касается прямой $A'B'$ в точке $A'$. Если $AB \parallel A'B'$ (или оба отрезка лежат на одной прямой), то $O$ есть центр гомотетии $AB$ и $A'B'$; если, кроме того, $AB = A'B'$ (но не совпадают), то преобразование есть перенос и центр подобия не существует.

**148.** Построив две пары соответственных точек, например для центра гомотетии и прообраза центра вращения в гомотетии, свести задачу к предыдущей.

**149.** Отношение радиусов данных окружностей определяет коэффициент подобия $k$. Два центра гомотетии $A$ и $B$ (на линии центров $OO_1$) принадлежат искомому множеству и $AO : AO_1 = BO : BO_1 = k$. Если $M$ — центр подобия, отличный от $A$ и $B$, то $MO : MO_1 = k$ и по свойству биссектрис угла треугольника $MA$ — биссектриса угла $OMO_1$. Аналогично $MB$ — другая биссектриса (внешнего угла $OMO_1$). Угол между биссектрисами — прямой, поэтому точка $M$ лежит на окружности, описанной на $AB$ как на диаметре; эта окружность является искомым геометрическим местом.

**150.** Пусть $M$ — центр подобия. Угол вращения около $M$, переводящего $A$ и $a$ в гомотетичное положение с $B$ и $b$, равен углу между прямыми $a$ и $b$. Следовательно, точка $M$ лежит на окружности, описанной около треугольника $ABS$, где $S=a \cap b$ и любая точка этой окружности, кроме $A$ и $B$, может служить центром подобия. Если $a$ и $b$ параллельны или совпадают, то центры подобия — точки прямой $AB$ (кроме этих точек). Если $A \equiv B$, то центр подобия $M \equiv A \equiv B$.

**151.** Искомым геометрическим местом точек является дуга сегмента, вмещающего данный угол $\varphi$, построенного на $SQ$, где $Q$ — прообраз $S$ в данном подобии.

**152.** Воспользоваться решением задачи 147 и установить, что указанные центры подобия лежат на одной окружности.

**153.** Для решения воспользоваться подобием треугольников вида $P_1P_2B$, имеющих равные углы $AP_1B$ для различных положений точки $P_1$. То же для углов $AP_2B$.

**154.** Коэффициент подобия искомого преобразования равен отношению радиусов данных окружностей, угол поворота равен $\varphi$ или $360°$— — $\varphi$, где $\varphi$ — угол между радиусами, проведенными в точку $A$. При замене точки угол $\varphi_1$ меняется на $360° - \varphi_1$. **155.** Рассмотреть подобие с центром во второй точке пересечения окружностей, преобразующее точку $M$ в $N$. Угол между касательными равен углу подобия, рассматриваемого как произведение вращения в гомотетии. **156.** Окружность. **157.** Преобразование является произведением отражения от прямой и гомотетии. Проверить, что соответственные прямые в данном преобразовании параллельны. **158.** В данном подобии, представленном произведением отражения от прямой $a$ и гомотетии с центром $O$, найти неподвижную прямую (параллельную $a$) и неподвижную точку на перпендикуляре из $O$, проведенном к $a$. Эта прямая и точка являются искомыми осью и центром. **159.** Воспользоваться тем, что неподвижная точка $O$ данного преобразования совпадает с неподвижной точкой его квадрата (см. задачу 157), затем умножить данное преобразование на гомотетию с центром $O$ и коэффициентом $\frac{1}{k}$ ($k$ — коэффициент данного подобия). Полученное отражение определит неподвижную прямую. **160.** Подобие второго рода. **161.** Преобразованием подобия первого рода с центром в точке $A$ и углом, равным $A$, четырехугольник $ABCD$ преобразовать в $A_1B_1C_1D_1$ так, чтобы $B_1 \equiv D$. Тогда точки $C$, $D$, $C_1$ окажутся на прямой. Треугольник $CAC_1$ может быть построен по основанию $CC_1$, отношению сторон $AC_1 : AC$ (коэффициент подобия) и отрезку $AD$, соединяющему его вершину с точкой основания ($CD$ известно).

**162.** Рассмотреть произведение трех преобразований подобия первого рода, переводящих последовательно $k_1$ в $k_2$, $k_2$ в $k_3$, $k_3$ в $k_1$, задаваемых парами точек $O_1$, $P_1$; $O_2$, $P_2$; $O_3$, $P_3$ и $O_1$, $P_4$ ($O_i$ — центр окружности $k_i$). Вычислив коэффициент подобия и угол вращения этого преобразования (равный сумме углов $O_1MO_2$, $O_2MO_3$, $O_3MO_1$), убедиться, что оно тождественное.

**163.** Пусть $P$, $Q$, $R$ — середины отрезков $BC$, $DE$ и $FA$ и треугольник $PQR$ равносторонний. Покажем, что если треугольник $AOB$ преобразовать подобием первого рода (поворот и гомотетия) с центром в $O$ в треугольник $OA_1B_1$, оставив два других треугольника неизменными, то полученный треугольник $P_1QR_1$ также будет равносторонним ($P_1$ и $Q_1$ — середины отрезков $B_1C$ и $FA_1$). Треугольники $OAA_1$ и $OBB_1$ совмещаются при повороте, преобразующем отрезок $OA$ в $OB$ (на 60°, если $\triangle OAB$ положительно ориентирован). Отрезки $RR_1$ и $PP_1$ — средние линии в треугольниках $AA_1F$ и $BB_1C$ — равны между собой и параллельны отрезкам $AA_1$ и $BB_1$, поэтому они совместятся при вращении на 60°, преобразующем точку $R$ в точку $P$. Центр такого вращения есть точка $Q$, так как $PQR$ — равносторонний треугольник. Точка $R_1$ преобразуется при этом в $P_1$, следовательно, $\triangle P_1QR_1$ тоже равносторонний. Утверждение задачи справедливо для трех равных равнсстороних треугольников, полученных один из другого при вращении на 120°, так как при вращении на 120° вся фигура с треугольником $PQR$ преобразуется в себя. К произвольному расположению треугольников можно прийти последовательно, заменяя один из них, как описано выше. Задача обобщается на неравные равносторонние треугольники.

## § 8.

**164.** Пусть $M$ — такая точка внутри шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, что $A_1A_2A_3M$ — параллелограмм, тогда $A_3A_4A_5M$ и $A_5A_6A_1M$ тоже параллелограммы и площадь каждого из них равна произведению двух сторон шестиугольника на синус угла, заключенного между ними. **165.** Пусть $\triangle OAB$ — искомый треугольник. Тогда векторы с началами в его вершинах и концами в серединах противоположных сторон равны: $\bar{m}_1 = \frac{1}{2}\bar{A} + \frac{1}{2}\bar{B}$, $\bar{m}_2 = \frac{1}{2}\bar{A} - \bar{B}$, $\bar{m}_3 = \frac{1}{2}\bar{B} - \bar{A}$. Так как и сумма равна нуль-вектору, то из векторов, равных векторам $\bar{m}_1$, $\bar{m}_2$ $\bar{m}_3$, можно сложить треугольник. Такой треугольник может быть построен по трем сторонам, которые являются данными медианами. Этим определяются векторы $\bar{m}_1$, $\bar{m}_2$, $\bar{m}_3$. Точка $O$ может быть взята произвольно. Тогда $\bar{A} = \frac{2}{3}(\bar{m}_1 - \bar{m}_3)$, $\bar{B} = \frac{2}{3}(\bar{m}_1 - \bar{m}_2)$. **166.** Перенося сначала одну диагональ параллельно в направлении другой диагонали так, чтобы первая диагональ проходила через конец другой, убедиться, что площадь четырехугольника (выродившегося в треугольник) не изменится. То же проделать затем с другой диагональю. Площадь полученного треугольника равна площади исходного четырехугольника, выражаемой половиной произведения его диагоналей на синус угла между ними, а оно при параллельном переносе диагоналей не меняется. **167.** 1) Произведение трех центральных симметрий есть центральная симметрия. Вершина искомого треугольника — неподвижная точка в произведении трех симметрий относительно данных середин его сторон и является серединой отрезка, соединяющего пару соответственных точек в данном преобразовании.

2) Искомый треугольник гомотетичен треугольнику, образованному данными точками относительно точки пересечения его.

**168.** Проверить, что вектор $\bar{Y} - \bar{X}$ перпендикулярен вектору $\bar{A}$ (скалярное произведение равно нулю) и вектор $\frac{1}{2}(\bar{X} + \bar{Y})$ коллинеарен вектору $\bar{A}$.

**169.** Перенести начало в точку $M$. Формула преобразования получится из формулы задачи 168 заменой $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ на $\overline{X}-\overline{M}$ и $\overline{Y}-\overline{M}$. **170.** Составить произведение двух отражений, используя формулу задачи 168. **171.** Преобразование $A_1 \to A \to A_2$ есть перенос как произведение двух вращений на углы $\varphi$ и $-\varphi$ соответственно. **172.** Оба вращения преобразуют отрезок $AB$ в $A_1B_1$ и середину одного из них $M$ в середину другого $M_1$, поэтому центры вращений $O_1$ и $O_2$ лежат на медиатрисе отрезка $MM_1$. Вращение $\omega_2$ можно представить как произведение вращения $\omega_1$ и вращения на $180°$ около точки $M_1$.

Следовательно, углы вращений равны соответственно $\alpha$ и $180°+\alpha$, углы дельтоида $MO_1M_1O_2$ с вершинами в $O_1$ и $O_2$ равны $\alpha$ и $180°-\alpha$, следовательно, остальные углы по $90°$. **173.** Если прямые $a$ и $b$ параллельны, то серединные перпендикуляры параллельны или совпадают. В противном случае точки пересечения медиатрис отрезков $A_1B_1$, $A_2B_2$ и $A_3B_3$ являются центрами вращений, совмещающих равные отрезки прямых $a$ и $b$. Но фигура $A_1A_2A_3$ равна фигуре $B_1B_2B_3$, и вращение, совмещающее эти фигуры, единственно, следовательно, точка пересечения медиатрис единственна. **174.** Повернуть точку $M$ в положение $M_1$ около точки $A$ так, чтобы точка $B$ преобразовалась в точку $C$. Стороны треугольника $MM_1C$ равны данным отрезкам ($MM_1 = AM$, $M_1C = MB$) В частности, точки $M$, $M_1$, $C$ могут оказаться на одной прямой, и тогда сумма двух отрезков равна третьему. **175.** Применить вращение одной из прямых около точки, лежащей на другой прямой, на $60°$ и найти точку пересечения полученной прямой с третьей. **176.** Применить вращение одной из прямых на $60°$ около точки $M$. **177.** Точка $S$ является центром вращения, полученного как произведение двух вращений на один и тот же угол, равный $+90°$ ($-90°$), преобразующего точку $M$ в $C$ и затем в $P$ (вокруг $A$ и $B$ соответственно). *Получено вращение на 180°*, поэтому $S$ — середина $MP$. Остается убедиться, что в указанном преобразовании вершина прямоугольного равнобедренного треугольника, построенного на $AB$ как на основании, неподвижна. **178.** Произведение четырех вращений на $90°$ около центров квадратов, построенных на последовательных сторонах четырехугольника, оставляет одну его вершину на месте и является тождественным преобразованием (вращение на $360°$). Произведения первых двух из указанных вращений и последующих двух являются вращениями на $180°$, обратными друг другу, поэтому их центры совпадают с некоторой точкой $M$. Нетрудно убедиться, как и в задаче 177, что треугольники $O_1O_2M$ и $O_3O_4M$ равнобедренные прямоугольные ($O_i$ — центры последовательных вращений), а треугольники $O_1MO_3$ и $O_2MO_4$ равные и повернутые относительно друг друга на $90°$. **179.** См решение задачи 178. Вместо четвертого центра квадрата взять соответствующую вершину треугольника. **180.** Пусть $O$ — точка пересечения боковых сторон трапеции. Углы $B_1OC_1$ и $A_1OD_1$ равны (подобие), поэтому вращение, преобразующее луч $OB_1$ в $OC_1$, переводит точку $A_1$ в $D_1$ и, следовательно, отрезок $B_1A_1$ в $C_1D_1$. **181.** 1) Прямая, проходящая через вершину $C$ так, что катеты треугольника являются биссектрисами углов, образованных этой прямой и высотой $CH$. 2) Высота треугольника $CH$. 3) Высота $CH$ **182.** Ось $o$ проходит через основание $H$ перпендикуляра, опущенного из точки $A$ на прямую $a$, так что угол $(\widehat{a, o}) = \frac{\alpha}{2}$; модуль вектора переноса равен $2 \cdot AH \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **183.** Утверждение следует из того, что оба преобразования — скользящие отражения, оси которых перпендикулярны осям отражений $a$ и $b$, проходят через центры отражений $M$ и $N$, а векторы переносов равны соответственно $2\overline{MN}$ и $-2\overline{NP}$, где $N$ и $P$ — основания перпендикуляров, опущенных из $M$ на $a$ и из $N$ на $b$. (См. также задачу 90.) **184.** Представить первое отражение в виде $Ma$, второе — $bM$, где $M$ — точка пересечения осей данных преобразований, прямые $a$ и $b$ перпендикулярны соответственным осям и отстоят от точки $M$ на таких расстояниях и с той стороны, как это указано в решении задачи 183. Тогда $bMMa = ba$ есть вращение как произведение двух осевых отражений. (См. задачи 54, 90 и 183.) **185.** Пусть $s$ — ось скользящего отражения $\sigma$; $\alpha(s)$ — ее образ в преобразовании $\alpha$ второго рода, которое может быть скользящим отражением или отражением. Докажем, что первый случай невозможен, для чего найдем образ прямой $\alpha(s)$ в преобразованиях, стоящих в левой и правой частях данного равенства, учитывая, что $\sigma(s) = s$; $\sigma^{-1}(\alpha(s)) = \alpha\sigma\alpha^{-1}(\alpha(s)) = \alpha\sigma(s) = \alpha(s)$ Из равенства $\sigma^{-1}(\alpha(s)) = \alpha(s)$ следует, что прямая $\alpha(s)$ неподвижна в преобразовании $\sigma^{-1}$, но единственная неподвижная прямая в скользящем отражении—это его ось $s$. Следовательно, $\alpha(s) = s$, и если $\alpha$ — скользящее отражение, то его ось совпадает с $s$ По определению скользящих отражений $\sigma = s\,\tau_1$, $\alpha = s\,\tau_2$, где $s$ — отражение от прямой $s$, $\tau_1$ и $\tau_2$ — переносы параллельно $s$. Подставив эти выражения в исходное равенство и используя перестановочность преобразований $s$, $\tau_1$ и $\tau_2$, $\tau_1$, получим: $s\,\tau^{-1} = s\,\tau_1$, что возможно только при нулевом векторе переноса, а это противоречит условию задачи.

---


Мирра Александровна Доброхотова
Олесь Акимович Котий
Владимир Григорьевич Потапов
Алексей Николаевич Сафонов
Залман Алтерович Скопец
Геннадий Борисович Хасин
Ольга Павловна Шарова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Редактор *И. С. Комиссарова*
Художественный редактор *Е. Н Карасик*
Технический редактор *М И. Смирнова*
Корректор *Т. М. Графовская*

Сдано в набор 12/XI 1970 г. Подписано к печати 29/X 1971 г. 84×108¹/₃₂. Типографская № 3 Печ. л. 13. Услов. печ. л. 10,92 Уч-изд. л. 11,29. Тираж 200 тыс. экз. Пл 1971 г. № 202.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Полиграфкомбинат им. Я. Коласа Государственного Комитета Совета Министров БССР по печати, Минск, Красная, 23. Заказ 474.

Цена без переплета 28 коп., переплет 10 коп.

Цена 38 коп.