З. А. СКОПЕЦ
В. А. ЖАРОВ

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

ПЛАНИМЕТРИЯ

УЧПЕДГИЗ
1962

З. А. СКОПЕЦ и В. А. ЖАРОВ

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

(ПЛАНИМЕТРИЯ)

Пособие для студентов педагогических институтов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1962

Залман Алтерович Скопец
и *Виктор Александрович Жаров*

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ПО ГЕОМЕТРИИ
(планиметрия)

Редактор *М. Л. Смолянский*
Переплет художника *Н. Н. Румянцева*
Художественный редактор *А. В. Максаев*
Технический редактор *Т. Н. Зыкина*
Корректор *В. Г. Соловьева*

Сдано в набор 22/I 1962 г. Подписано к печати 4/VI 1962 г.
Печ. л. 10,25. Уч.-изд. л. 9,87. Тираж 38 000 экз.

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Полиграфический комбинат Ярославского совнархоза,
г. Ярославль, ул. Свободы, 97. Заказ № 54.

Цена без переплета 30 к., переплет 15 к.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение задач составляет существенную сторону процесса обучения математике: уровень математической подготовки во многом определяется глубиной навыков в решении задач.

Это обстоятельство побуждает с особым вниманием отнестись к организации в стенах педагогического института тщательно продуманных занятий, имеющих своей целью подготовить будущего педагога не только теоретически в области геометрии, но и научить его свободно применять приобретенные знания к решению нестандартных задач средней и повышенной трудности.

Предлагаемый сборник геометрических задач по планиметрии предназначен главным образом для студентов математической специальности педагогических институтов и преподавателей, ведущих занятия по специальному курсу элементарной геометрии, а также для учителей средней школы. Задачник может быть использован на занятиях и по другим дисциплинам геометрического цикла (аналитическая геометрия, проективная геометрия, основания геометрии).

Учитель средней школы найдет в задачнике материал для совершенствования своих знаний, для внеклассной работы с учащимися (занятия кружков, проведение математических олимпиад, индивидуальная работа с наиболее способными учениками и т. п.) и для классных занятий, посвященных повторению курса планиметрии.

Отличительной чертой сборника является *классификация задач на аксиоматической основе*, что соответствует современным взглядам на элементарную геометрию и требованиям вузовского преподавания. Характерным является и то, что в нем собраны лишь задачи на доказательство. Задачи на построение в данном сборнике не приводятся ввиду того, что им посвящены специальные руководства, широко представленные в учебной литературе.

Задачи сборника разбиты по характеру их содержания на четыре главы: глава I — «Абсолютная геометрия»; глава II — «Параллельность. Параллельность и равенство»; глава III — «Параллельность и непрерывность. Подобие»; глава IV — «Площади». Принятая классификация задачного материала соответствует школьному построению курса геометрии.

Существенным является выделение задач, относящихся к абсолютной геометрии (глава I), а также задач аффинного характера (глава II, § 5; глава III, § 11; глава IV, § 17).

Особое внимание уделено подбору задач, решаемых методом геометрических преобразований. Сборник содержит также задачи на максимум и минимум и на геометрические неравенства. В некоторых задачах введены ориентированные отрезки, треугольники и окружности для того, чтобы придать им более общий характер.

Задачи повышенной трудности помещены в конце каждой главы в параграфах «Смешанные задачи». К их решению целесообразно приступить после того, как решен ряд предыдущих задач соответствующей главы.

В задачнике не нашли отражения вопросы, связанные с элементарной теорией конических сечений, так как эта теория тесно связана со стереометрией. Отсутствие раздела, относящегося к теории кругов, вызвано тем, что задачи на эту тему и соответствующий теоретический материал имеются в известных курсах Адамара Ж., Перепелкина Д. И. и других пособиях.

Необходимо отметить, что в процессе решения каждой задачи предполагается использование тех средств, которые вытекают из названия соответствующей главы или параграфа, где помещена эта задача. Однако сделанное указание не исключает поисков других решений. Например, задача № 28 (глава I «Абсолютная геометрия») решается весьма просто в рамках евклидовой геометрии, между тем ее решение в рамках абсолютной геометрии может вызывать значительные затруднения. Задачу № 230 (§11 «Аффинные задачи») необходимо решить как задачу аффинной геометрии. Общеизвестное ее решение метрическими средствами в данном случае непригодно.

Задачи на доказательство не нуждаются в ответах, так как ответ содержится в самом условии задачи. Что касается указаний к их решению, то ими снабжены все задачи. Тексту задач предпослано небольшое введение, в котором приводится перечень известных формул и теорем элементарной геометрии (они могут быть использованы как дополнительный задачный материал), а также единая система обозначений, которой мы придерживаемся в тексте задачника.

Идея создания данного сборника появилась у авторов в результате работы со студентами математической специальности Ярославского пединститута в семинарах по специальному курсу элементарной математики, а также в семинаре по решению геометрических задач повышенной трудности.

Авторы глубоко благодарны А. М. Лопшицу, И. М. Яглому и В. М. Майорову за их ценные советы по улучшению сборника, а также Э. Г. Готману и О. А. Котию, использующим материалы задачника на занятиях со студентами пединститута и учащимися средних школ, за конкретные указания, которые содействовали улучшению задачника.

Авторы.

ВВЕДЕНИЕ

I. УПОТРЕБЛЯЕМЫЕ В СБОРНИКЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

(см. чертежи I, II и III)

$a, b, c, d\dots$ — стороны многоугольника;

$A, B, C, D\dots$ — вершины или углы при этих вершинах многоугольника;

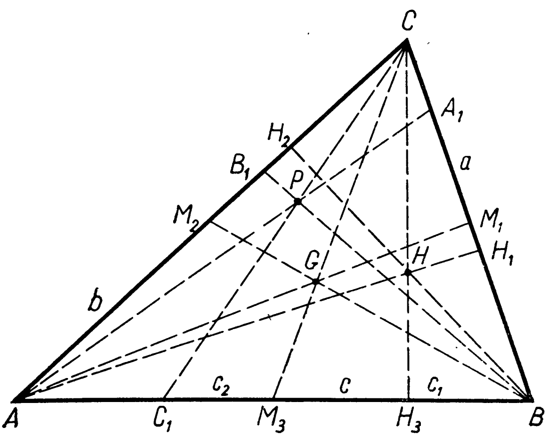
h_i $(i=1, 2, 3)$ — высоты, опущенные соответственно на стороны BC, CA, AB треугольника ABC;

h — высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу c;

H_i — основания высот треугольника;

m_i — медианы, проведенные соответственно к сторонам a, b и c треугольника ABC;

M_i — середины сторон треугольника;



Черт. I

AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC; точка A_1 принадлежит стороне BC, точка B_1 — стороне AC, точка C_1 — стороне AB;

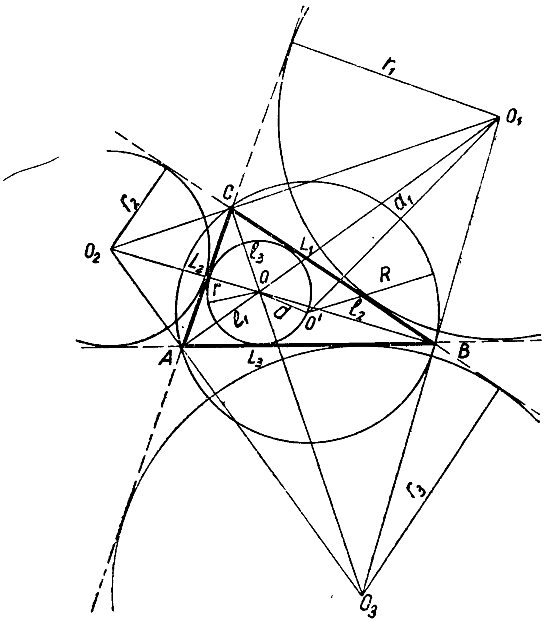
l_i — биссектрисы внутренних углов треугольника;

L_i — основания биссектрис треугольника;

c_1 и c_2 — проекции сторон b и a треугольника ABC на сторону AB;

H — точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника;

G — точка пересечения медиан (центроид, центр тяжести) треугольника;



Черт. II

O и R — центр и радиус описанной около треугольника (четырехугольника) окружности;

O' — центр вписанной в треугольник окружности (инцентр треугольника);

r — радиус вписанной в треугольник окружности;

O_i — центры вневписанных окружностей (эксцентры треугольника);

r_i — радиусы вневписанных окружностей;

d — расстояние между инцентром и центром описанной окружности;

d_i — расстояние между инцентром O' и эксцентром O_i;

$2p$ — периметр треугольника;

e и f — диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$;

μ_1 и μ_2 — средние линии четырехугольника $ABCD$ ($\mu_1 = M_1M_3$, $\mu_2 = M_2M_4$);

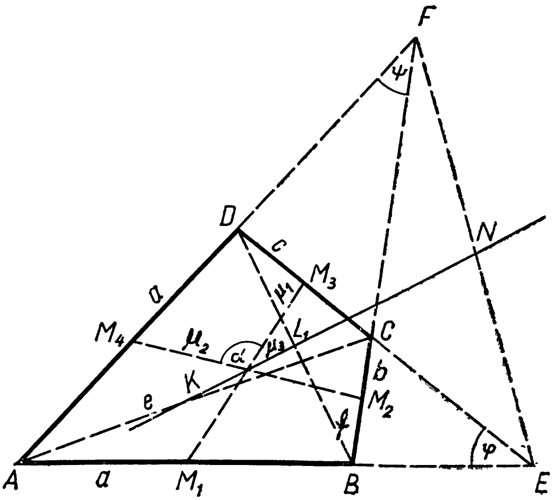
μ_3 — расстояние между серединами K и L диагоналей четырехугольника $ABCD$;

M — центр параллелограмма;

E, F — точки пересечения противоположных сторон AB и CD, BC и AD четырехугольника $ABCD$;

φ и ψ — углы между противоположными сторонами четырехугольника ($\angle AED = \varphi$, $\angle AFB = \psi$);

α — угол между диагоналями четырехугольника;



Черт. III.

(A, B, C) — окружность, проведенная через точки A, B и C;

(O, r) — окружность с центром в точке O и радиусом, равным r;

S — площадь геометрической фигуры;

(ABC), $(ABCD)$ — площадь треугольника ABC и площадь четырехугольника $ABCD$.

Малые буквы греческого алфавита

α — альфа	ι — иота	ρ — ро
β — бета	$\varkappa$ — каппа	σ — сигма
γ — гамма	λ — ламбда	τ — тау
δ — дельта	μ — мю (ми)	υ — ипсилон
ε — эпсилон	ν — ню (ни)	φ — фи
ζ — дзета	ξ — кси	χ — хи
η — эта	o — омикрон	ψ — пси
ϑ — тэта	π — пи	ω — омега

II. Теоремы, геометрические места.

Аффинные теоремы

1. Отрезки, соединяющие соответственно середины противоположных сторон и середины диагоналей четырехугольника, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

2. Отрезки, соединяющие вершины четырехугольника с соответствующими центроидами треугольников, образованных тремя другими вершинами, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины четырехугольника.

3. Если какая-либо прямая, не проходящая через вершины треугольника ABC, пересекает его стороны BC, CA, AB или их продолжения соответственно в точках L, M, N, то имеет место равенство:

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1. \tag{1}$$

Если точки L, M, N, не совпадающие с вершинами треугольника ABC, но лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB или их продолжениях, таковы, что выполняется условие (1), то эти три точки лежат на одной прямой (прямая и обратная теоремы Менелая).

4. Если точки A_1, B_1, C_1, взятые соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (или на продолжениях сторон), таковы, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны, то имеет место равенство:

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1. \tag{2}$$

Если точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC или на продолжениях этих сторон, причем выполняется условие (2), то три прямые AA_1, BB_1, CC_1 (чевианы) пересекаются в одной точке или параллельны между собой (прямая и обратная теоремы Чевы).

5. Если чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке P, то имеет место равенство (теорема Ван-Обеля):

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} + \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PC_1}}.$$

6. Если чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке P, то имеют место равенства:

$$1)\ \frac{\overline{PA_1}}{\overline{AA_1}} + \frac{\overline{PB_1}}{\overline{BB_1}} + \frac{\overline{PC_1}}{\overline{CC_1}} = 1;$$

$$2)\ \frac{\overline{AP}}{\overline{AA_1}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{BB_1}} + \frac{\overline{PC}}{\overline{CC_1}} = 2.$$

7. Прямая, проходящая через середины диагоналей четырехугольника, проходит через середину отрезка, соединяющего точки пересечения его противоположных сторон (прямая Гаусса).

8. Если на одной прямой даны точки A, B, C, а на другой прямой — точки A_1, B_1, C_1, причем прямая AB_1 параллельна прямой A_1B, а прямая BC_1 параллельна прямой B_1C, то прямая CA_1 параллельна прямой C_1A.

9. Если вершины двух треугольников соответствуют друг другу таким образом, что прямые, проходящие через соответствующие вершины, пересекаются в одной точке или параллельны, то точки пересечения соответствующих сторон (если они существуют) лежат на одной прямой.

Если вершины двух треугольников соответствуют друг другу таким образом, что соответствующие стороны треугольников пересекаются в точках, расположенных на одной прямой, то прямые, проходящие через соответствующие вершины, пересекаются в одной точке или параллельны (прямая и обратная теоремы Дезарга).

10. Если прямая пересекает пары противоположных сторон и пару диагоналей четырехугольника соответственно в парах точек A и A_1, B и B_1, C и C_1, то имеет место равенство:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1.$$

11. Для того чтобы точка P, не принадлежащая сторонам треугольника ABC, и прямая p, не проходящая через его вершины, были инцидентными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\left(\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} : \frac{\overline{CA_0}}{\overline{A_0B}}\right) + \left(\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} : \frac{\overline{CB_0}}{\overline{B_0A}}\right) = 1,$$

где A_0 и B_0 — точки пересечения прямой со сторонами CB и CA, а A_1 и B_1 — основания чевиан, проходящих через данную точку.

Метрические теоремы

12. Ортоцентр H, центроид G и центр O описанной около треугольника окружности расположены на одной прямой, причем $GH=2OG$ (прямая Эйлера).

13. Для всякого треугольника ABC справедливо следующее векторное равенство:

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OH},$$

где O — центр описанной окружности, а H — ортоцентр треугольника.

14. Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков высот, ограниченных вершинами треугольника и его ортоцентром, расположены на одной окружности (окружности девяти точек, или окружности Эйлера).

15. Окружность Эйлера касается вписанной и вневписанных окружностей треугольника, и ее центр расположен на прямой Эйлера и делит отрезок OH пополам.

16. Основания перпендикуляров, опущенных из любой точки окружности на стороны вписанного в нее треугольника, расположены на одной прямой (прямой Симсона).

17. Для того чтобы около выпуклого четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений противоположных сторон четырехугольника была равна произведению его диагоналей (теорема Птолемея и обратная ей теорема).

18. Для того чтобы перпендикуляры к сторонам треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство:

$$AC_1^2 - C_1B^2 + BA_1^2 - A_1C^2 + CB_1^2 - B_1A^2 = 0$$

(теорема Карно и обратная ей теорема).

19. Окружности, описанные около четырех треугольников, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми, не проходящими через одну точку, пересекаются в одной точке.

20. Шесть центров подобия трех неравных попарно окружностей, не принадлежащих одному пучку, являются вершинами полного четырехсторонника.

21. Середины диагоналей описанного около окружности четырехугольника и центр этой окружности расположены на одной прямой.

22. Точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника (если эти точки существуют) расположены на одной прямой (теорема Паскаля).

23. Прямые, проходящие через противоположные вершины шестиугольника, описанного около окружности, пересекаются в одной точке или параллельны (теорема Брианшона).

24. Для того чтобы три точки A_1, B_1, C_1, расположенные соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC, принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA} = -1$$

(теорема Менелая и ей обратная теорема в тригонометрической форме).

25. Для того чтобы три чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC принадлежали одному пучку, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA} = 1$$

(теорема Чевы и ей обратная теорема в тригонометрической форме).

26. Длина чевианы CC_1 треугольника ABC вычисляется по формуле:

$$CC_1^2 = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}} \cdot BC^2 + \frac{\overline{C_1B}}{\overline{AB}} \cdot AC^2 - \frac{\overline{AC_1} \cdot \overline{C_1B}}{\overline{AB}^2} \cdot AB^2$$

(теорема Стюарта).

27. Четыре ортоцентра четырех треугольников, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми, не проходящими через одну точку, расположены на одной прямой (прямая Обера).

28. Три отрезка, соединяющие произвольную точку плоскости с вершинами правильного треугольника, могут служить сторонами треугольника. Этот треугольник вырождается только для тех точек, которые расположены на окружности, описанной около равностороннего треугольника (теорема Помпею).

29. Из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, ортоцентрический треугольник (вершины которого совпадают с основаниями высот данного треугольника) имеет наименьший периметр.

30. Если больший угол треугольника меньше 120°, то наименьшую сумму расстояний до вершин треугольника имеет та точка плоскости, из которой стороны треугольника видны под равными углами (точка Торричелли). Если один из углов треугольника равен 120° или больше его, то точка плоскости, для которой сумма расстояний до вершин треугольника минимальна, совпадает с этой вершиной.

31. Если расстояния от точки, расположенной внутри треугольника, до его сторон пропорциональны сторонам, то сумма квадратов расстояний этой точки до сторон треугольника минимальна и равна

$$\frac{4\,(ABC)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

(точка Лемуана). Основания перпендикуляров, опущенных из точки Лемуана на стороны треугольника, являются вершинами треугольника, для которого точка Лемуана служит центроидом.

32. Среди всех отрезков секущих, расположенных внутри угла и проходящих через данную точку, та имеет наименьшую длину, для которой данная точка и основание перпендикуляра, опущенного из вершины угла на этот отрезок, симметричны относительно его середины (прямая, содержащая этот минимальный отрезок, называется прямой Филона).

33. Если даны такие две окружности, что одна из них служит описанной окружностью для какого-нибудь треугольника, а другая — вписанной или вневписанной окружностью для того же треугольника, то таких треугольников бесчисленное множество и каждая точка описанной окружности может служить вершиной такого треугольника.

34. Если около треугольника ABC описана окружность радиуса R и вписана окружность радиуса ρ, то расстояние d между центрами окружностей определяется по формуле:

$$d^2=R^2-2Rr$$

(формула Эйлера).

35. Если около треугольника ABC описана окружность радиуса R и вневписана окружность радиуса ρ, то расстояние между центрами этих окружностей определяется по формуле:

$$d^2=R^2+2R\rho.$$

36. Если известны три стороны четырехугольника и два угла, заключенные между их сторонами, то четвертая сторона может быть вычислена по формуле:

$$d^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos(\widehat{a,\ b})-2bc\cos(\widehat{b,c})-2ac\cos(\widehat{a,b}+\widehat{b,c})$$

(первая теорема косинусов для четырехугольника).

37. Стороны, диагонали и сумма двух противоположных углов четырехугольника связаны соотношением:

$$e^2f^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(A+C)$$

(вторая теорема косинусов для четырехугольника — теорема Бретшнейдера).

38. Расстояния от любой точки плоскости до вершин треугольника и до его центроида связаны соотношением:

$$3PG^2=PA^2+PB^2+PC^2-GA^2-GB^2-GC^2$$

(теорема Лейбница).

39. Расстояние между серединами диагоналей четырехугольника выражается через его стороны и диагонали по формуле:

$$KL^2=\mu_3^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2)$$

(теорема Эйлера).

40. Если внутри треугольника ABC дана точка N такая, что

$\angle NBA=\angle NAC=\angle NCB$ или $\angle NAB=\angle NBC=\angle NCA$, то

$$\operatorname{ctg}\omega=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C$$

(угол $NAB\equiv\omega$ — угол Брокара).

41. Алгебраическая сумма расстояний от центра окружности, описанной около треугольника, до его сторон равна сумме радиусов вписанной и описанной окружностей (теорема Карно).

42. Если расстояние от точки плоскости до центра окружности, описанной около треугольника, равно d, то площадь σ треугольника, вершины которого совпадают с основаниями перпендикуляров, опущенных из этой точки на его стороны, выражается через радиус R окружности и через площадь S данного треугольника формулой:

$$d^2 = R^2\left(1 \pm \frac{4\sigma}{S}\right).$$

43. Если в окружность вписан правильный многоугольник $A_1A_2...A_n$ с нечетным числом сторон, то сумма расстояний от любой точки дуги A_1A_n до вершин с четными номерами равна сумме расстояний от этой же точки до вершин с нечетными номерами.

44. Прямая Гаусса (теорема 7) и прямая Обера (теорема 27) полного четырехсторонника взаимно перпендикулярны.

45. Если каждый из углов треугольника разделен двумя лучами на три равные части, то точки пересечения каждой пары лучей, образующих с одной стороной углы, равные по одной трети углов, прилегающих к соответствующей стороне треугольника, являются вершинами равностороннего треугольника (теорема Морлея).

Геометрические места точек

46. Геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных упорядоченных точек равно отношению двух неравных отрезков, есть окружность (окружность Аполлония).

47. Геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до конца отрезка постоянна, есть окружность с центром в середине отрезка (существование окружности зависит от постоянной).

48. Геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до трех точек есть величина постоянная, есть окружность с центром в центроиде треугольника, вершины которого совпадают с данными тремя точками (треугольник может быть вырожденным).

49. Геометрическое место точек M, для которых $MA^2 - MB^2 = k$ (A и B — данные точки, k — постоянная), есть прямая, перпендикулярная к прямой AB.

50. Геометрическое место точек, расположенных внутри угла, для которых отношение расстояний до сторон этого угла постоянно, есть луч с началом в вершине угла (стороны угла упорядочены).

51. Геометрическое место точек, имеющих равные степени относительно двух неконцентрических окружностей, есть прямая (радикальная ось данных окружностей), перпендикулярная к линии центров окружностей (степень точки M относительно окружности $(O; R)$ равна $OM^2 - R^2$).

III. ФОРМУЛЫ

Метрические соотношения в треугольнике

1. $|a^2-b^2|=2c\cdot M_3H_3$;

2. $a^2-b^2=(r_1-r_2)(r+r_3)$;

3. $l_1{}^2=4bc(b+c)^{-2}p(p-a)$;

4. $l_1{}^2=bc-AL_3\cdot L_3B$;

5. $L_1L_2=\frac{abc}{(a+c)^2(b+c)^2}[c(a+c)(b+c)-2p(a-b)^2]$;

6. $m_1{}^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$;

7. $h_1{}^2=4a^{-2}p(p-a)(p-b)(p-c)$;

8. $H_1H_2=AB|\cos C|$;

9. $ab=2Rh_3$; $a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4Rr)$;

10. $4R^2=\frac{l_1^4\left(m_1^2-h_1^2\right)}{h_1^2\left(l_1^2-h_1^2\right)}$;

11. $AH^2=4R^2-a^2$;

12. $OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$; $O'H^2=4R^2+4Rr+3r^2-p^2$;

13. $AH=2R|\cos A|$;

14. $r^2=p^{-1}(p-a)(p-b)(p-c)$;

15. $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$;

16. $r_1{}^2=p(p-a)^{-1}(p-b)(p-c)$;

17. $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$;

18. $r_1+r_2+r_3=r+4R$;

19. $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=p^2$;

20. $r_1r_2r_3=pS$;

21. $rr_1r_2r_3=S^2$;

22. $16S^2=a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)$;

23. $S=pr$; $S\geqslant\sqrt{27}\,r^2$;

24. $S=(p-a)r_1$;

25. $OM_1+OM_2+OM_3=R+r \quad (OH\leqslant R)$;

26. $O'O_1\cdot O'O_2\cdot O'O_3=4R^2r$;

27. $O_1O_2=4R\cos\frac{C}{2}$;

28. $rr_1=(p-b)(p-c)$;

29. $r_1r_2=p(p-c)$;

30. $r_1+r_2=4R\cos^2\frac{C}{2}$;

31. $r+r_1+r_2-r_3=4R\cos C$;

32. $a\sin\frac{A}{2}=\sqrt{(p-b)(p-c)}$;

33. $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{p(p-c)}:\sqrt{ab}$;

34. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(p-c):p$;

35. $S=p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$;

36. $S=(p-b)(p-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$;

37. $S=\frac{c^2\sin A\cdot\sin B}{2\sin C}$;

38. $S=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$;

39. $S^2=abcp\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$;

40. $S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$;

41. $S=p^2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)^{-1}$;

42. $p=4R\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$;

43. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$;

44. $r=4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$;

45. $a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C = 2(R + r)$;

46. $O'O_1 : O'O_2 : O'O_3 = \sin\frac{A}{2} : \sin\frac{B}{2} : \sin\frac{C}{2}$;

47. $O_1O_2 : O_2O_3 : O_3O_1 = \cos\frac{C}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{A}{2}$;

48. $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$;

49. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

50. $\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{2}$;

51. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = -4\cos A\cos B\cos C$;

52. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C = 1$;

53. $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C$;

54. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$;

55. $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$;

56. $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$;

57. $\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{8}\sqrt{3}$;

58. $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geqslant \frac{3}{4}$;

59. $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2}$;

60. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{3}$;

61. $\sin A + \sin B + \sin C \geqslant \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$.

Метрические соотношения в четырехугольнике

62. $AC\cdot BD \leqslant AB\cdot CD + AD\cdot BC$;

63. $$\begin{vmatrix} 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 & 1 \\ BA^2 & 0 & BC^2 & BD^2 & 1 \\ CA^2 & CB^2 & 0 & CD^2 & 1 \\ DA^2 & DB^2 & DC^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

64. $4\mu_1^2 = e^2 + f^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2;$

65. $4\mu_2^2 = e^2 + f^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2;$

66. $2ac\cos\varphi = e^2 + f^2 - b^2 - d^2;$

67. $2ef\cos\alpha = \pm(a^2 + c^2 - b^2 - d^2);$

68. $2S = ef\sin\alpha;$

69. $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2};$

70. $16S^2 = 4e^2f^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2.$

Вписанный четырехугольник

71. $ef = ac + bd;$

72. $e^2 = (ad + bc)(ac + bd)(ab + cd)^{-1};$

73. $f^2 = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)^{-1};$

74. $2(ac + bd)\cos\alpha = \pm(a^2 + c^2 - b^2 - d^2);$

75. $16R^2 = (ad + bc)(ac+bd)(ab+cd)[(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)]^{-1};$

76. $\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} = (p-a)(p-d)(p-b)^{-1}(p-c)^{-1};$

77. $2(ab + cd)\cos B = a^2 + b^2 - c^2 - d^2;$

78. $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$

Четырехугольник одновременно вписанный и описанный

79. $O'O^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2};$

80. $S^2 = abcd.$

ГЛАВА I

АБСОЛЮТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Треугольники

1. Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон.

2. Доказать, что медиана CM_3 треугольника ABC образует с меньшей из двух сторон CA и CB больший угол. Доказать обратную теорему.

3. Доказать, что сторона треугольника тем больше, чем больше угол, под которым эта сторона видна из центроида треугольника. Доказать обратную теорему.

4. Биссектриса угла C треугольника ABC встречает его сторону AB в точке L_3. Доказать, что если $AC > BC$, то $AL_3 > BL_3$. Доказать обратную теорему.

5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяты две произвольные точки E и F, через которые проведены две прямые, образующие с основанием AC углы, равные углам при основании треугольника, и пересекающиеся в точке D (внутри треугольника), встречая его стороны BC и BA соответственно в точках L и K. Доказать, что $BK+KD=BL+LD$.

6. Внутри треугольника ABC взята точка M. Доказать, что угол ABC меньше угла AMC.

7. Доказать, что если биссектриса треугольника делит его периметр пополам, то треугольник равнобедренный.

8. Доказать, что если высота треугольника делит его периметр пополам, то треугольник равнобедренный.

9. Из точек A и B, расположенных на одной из сторон острого угла O, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на другую сторону угла. Доказать, что если $OA < OB$, то $\angle OAA_1 \geqslant \angle OBB_1$.

10. Доказать, что большей высоте треугольника соответствует меньшая сторона и обратно.

11. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC опущена на гипотенузу высота CH_3. Доказать, что $\angle ACH_3 \geqslant \angle ABC$, $\angle BCH_3 \geqslant \angle BAC$.

12. На боковых сторонах AC и BC равнобедренного треугольника даны соответственно точки M и N, причем $CM+CN=AC$. Доказать, что отрезок MN делится прямой, соединяющей середины боковых сторон, пополам.

13. Доказать, что если разность двух сторон одного треугольника равна разности соответствующих сторон другого треугольника, а третьи стороны и медианы, проведенные к этим сторонам, соответственно равны, то такие треугольники равны.

14. Доказать, что если два угла и сторона, прилежащая к одному из них, одного треугольника соответственно равны сходственным элементам второго треугольника, то треугольники равны.

15. Доказать, что два треугольника равны между собой, если две стороны и угол, лежащий против большей из них, одного треугольника соответственно равны сходственным элементам другого треугольника.

16. Доказать, что если медианы CM_3 и $C'M_3'$ треугольников ABC и $A'B'C'$ равны, а также равны соответствующие части углов C и C', на которые они делятся этими медианами, то треугольники равны.

17. На внешней биссектрисе угла C треугольника ABC взята точка M. Доказать, что $AC+CB<AM+MB$.

18. На биссектрисе угла C треугольника ABC (или ее продолжении) взята произвольно точка M. Доказать, что разность сторон AC и CB больше разности отрезков AM и MB (сторона AC больше стороны CB).

19. Доказать, что если две медианы треугольника равны, то треугольник равнобедренный. Доказать обратную теорему.

20. Доказать, что большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана и обратно.

21. Доказать, что если отрезок GM_3 медианы CM_3 треугольника ABC (G — центроид треугольника) равен $\frac{1}{2}AB$, то $CG=2GM_3$.

22. Доказать, что средняя линия треугольника не больше половины стороны, которую она не пересекает.

23. Гипотенузы двух прямоугольных треугольников равны. Доказать, что каждый катет одного треугольника не может быть больше каждого из катетов другого треугольника.

24. Даны две непересекающиеся прямые и их центр симметрии O. Прямой угол с вершиной в точке O вращается около своей вершины, причем одна его сторона пересекает прямую a в точке A, а другая — прямую b в точке B. Доказать, что расстояние прямой AB от точки O остается постоянным.

25. Через точку M, расположенную на основании AB равнобедренного треугольника ABC, проведена секущая, встречающая его боковые стороны в точках P и Q так, что $MP=MQ$. Доказать, что эта секущая отсекает на боковых сторонах от точек A и B равные отрезки (стороны здесь подразумеваются как прямые).

26. Через середину M основания AB равнобедренного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая одну боковую сторону и продолжение другой в точках P и Q, причем точка M лежит между точками P и Q. Доказать, что $AB < PQ$.

27. Доказать, что прямая, проходящая через середины двух сторон треугольника, перпендикулярна к прямой, проведенной перпендикулярно к третьей стороне через ее середину.

§ 2. Четырехугольники

28. Противоположные углы четырехугольника равны. Доказать, что его противоположные стороны также равны.

29. Углы B и D четырехугольника $ABCD$ равны и диагональ AC делится другой диагональю пополам. Доказать, что противоположные стороны четырехугольника равны.

30. Доказать, что если диагональ четырехугольника делит его периметр пополам и сама диагональ при этом делится второй диагональю пополам, то противоположные стороны четырехугольника равны.

31. Доказать, что если две противоположные стороны четырехугольника равны, а также равны два угла, прилежащие к третьей стороне, то остальные два угла четырехугольника равны.

32. Доказать, что если два угла четырехугольника, прилежащие к одной стороне, равны, а также равны два угла, прилежащие к противолежащей стороне, то: 1) две другие стороны равны, 2) обе диагонали равны.

33. Доказать, что если углы A и B четырехугольника $ABCD$ равны, а угол D больше угла C, то $BC > AD$.

34. Углы A и B четырехугольника $ABCD$ равны, а также равны стороны AD и BC. Доказать, что прямая, соединяющая середины сторон AB и CD, является осью симметрии четырехугольника.

35. Расстояния вершин A и B четырехугольника $ABCD$ до стороны CD равны. Доказать, что если $AC + CB = AD + DB$, то $AD = BC$ и $AC = BD$.

§ 3. Окружность

36. Доказать, что геометрическое место точек касания пар окружностей, касающихся данной прямой в данных двух ее точках, есть окружность.

37. Доказать, что угол, под которым диаметр окружности виден из точки этой окружности, не больше 90°.

38. Около окружности O описан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что $\angle BOC + \angle DOA = \angle AOB + \angle COD$.

39. Доказать, что суммы противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника равны между собой.

40. На продолжениях хорды AB данной окружности отложены равные отрезки MA и NB. Из точек M и N по разные стороны

от MN проведены к окружности касательные MT_1 и NT_2. Доказать, что отрезок T_1T_2 делит отрезок MN пополам.

41. В окружности проведены две пересекающиеся равные хорды. Доказать, что общая точка этих хорд делит их на соответственно равные части.

42. Около окружности описан четырехугольник, одна диагональ которого делится другой пополам. Доказать, что четырехугольник — дельтоид.

43. Даны две концентрические окружности с центром O и точки A и B, лежащие на внешней окружности. Из этих точек проведены к внутренней окружности касательные так, что одна касательная встречает другую в точке M, не расположенной с точкой O на перпендикуляре к хорде AB. В точках A и B к внешней окружности проведены касательные, пересекающиеся в точке P. Доказать, что отрезок OP виден из точки M под прямым углом.

44. Даны две концентрические окружности. Из двух точек A и B внешней окружности проведены к внутренней окружности по касательной. Доказать, что прямая, соединяющая точки касания, либо имеет с прямой AB общий перпендикуляр, либо делит хорду AB пополам.

45. 1) Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом. Доказать, что общие касательные данных окружностей в их точках касания пересекаются в одной точке.

2) На окружности даны две точки, касательные в которых к ней пересекаются. Доказать, что геометрическое место точек касания пар окружностей, из которых одна окружность каждой пары касается данной окружности в одной из данных на ней точках, а другая окружность соответствующей пары касается данной окружности в другой точке, есть окружность.

§ 4. Смешанные задачи

46. Из точки S к окружности O проведены касательные SA и SB (A, B — точки касания), которые пересечены третьей касательной в точках M и M_1. Доказать, что углы AOM и SOM_1 либо равны, либо их сумма составляет 180°.

47. Доказать, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

48. Доказать, что если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то его биссектрисы пересекаются в одной точке.

49. Углы A и C выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны и, кроме того, $AB+CD=BC+AD$. Доказать, что четырехугольник — дельтоид.

50. Доказать, что отрезок общей внутренней касательной, заключенный между внешними касательными, проведенными к двум равным окружностям, не больше расстояния между центрами окружностей.

51. На одной из двух произвольных прямых взяты точки A, B, C, а на другой — в той же последовательности и на таких же расстояниях друг от друга точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой или совпадают.

52. Доказать, что если две биссектрисы треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

53. На медиане CM_3 треугольника ABC взята произвольная точка P. Прямые AP и BP пересекают стороны BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Доказать, что если отрезки AA_1 и BB_1 равны, то треугольник равнобедренный.

54. С применением стереометрии доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

55. На высоте CH_3 треугольника ABC (точка H_3 лежит между вершинами A и B) дана произвольная точка P, прямые AP и BP пересекают соответственно стороны BC и AC в точках A_1 и B_1. Доказать, что H_3C — биссектриса угла $A_1H_3B_1$. Доказать обратную теорему.

56. Доказать, что если треугольник, вершины которого совпадают с основаниями биссектрис данного треугольника, прямоугольный, то соответствующий угол данного треугольника, противолежащий прямому углу, равен 120°. Доказать обратную теорему.

ГЛАВА II

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И РАВЕНСТВО

§ 5. Треугольники и четырехугольники (аффинные задачи)

57. В плоскости треугольника дана произвольная точка M, которая отражается последовательно относительно всех вершин треугольника один раз и затем второй раз. Доказать, что после последнего отражения отражаемая точка совпадает с точкой M.

58. Прямая, проведенная через центр параллелограмма, пересекает его стороны в точках P и Q, которые соединены с вершинами параллелограмма. Доказать, что точки пересечения отрезков AP, BP, CQ, DQ с диагоналями параллелограмма являются вершинами нового параллелограмма.

59. Доказать, что точки, симметричные с точкой M относительно середин сторон четырехугольника, являются вершинами параллелограмма.

60. Построены точки A_1, B_1, C_1, симметричные с точкой M относительно середин сторон треугольника ABC. Доказать, что: 1) треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны; 2) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

61. В плоскости четырехугольника $ABCD$ дана точка M. Построены точка M_1, симметричная с M относительно середины стороны AB; точка M_2, симметричная с M_1 относительно середины стороны BC; точка M_3, симметричная с M_2 относительно середины стороны CD. Доказать, что точки M_3 и M симметричны относительно середины стороны DA.

62. Две противоположные стороны одного четырехугольника соответственно равны и параллельны двум противоположным сторонам другого четырехугольника. Доказать, что средняя линия первого четырехугольника, делящая пополам две другие его противоположные стороны, параллельна и равна соответствующей средней линии другого четырехугольника. (Оба четырехугольника обладают тем свойством, что при одинаковом их обходе параллельные стороны сонаправлены.)

63. Через середину каждой стороны четырехугольника проведена прямая, параллельная отрезку, соединяющему произвольную точку M плоскости с серединой противолежащей стороны. Доказать, что: 1) эти прямые пересекаются в одной точке N; 2) точка N лежит с данной точкой M и точкой пересечения S средних линий четырехугольника на одной прямой; 3) точка S делит отрезок MN пополам.

64. Прямая m не пересекает стороны треугольника ABC. Через вершины треугольника проведены параллельные между собой прямые, пересекающие прямую m соответственно в точках A_1, B_1, C_1 так, что $AA_1+BB_1=CC_1$. Доказать, что прямые m, обладающие указанным свойством, принадлежат пучку.

65. В плоскости параллелограмма дана точка P, через которую проведены две прямые, параллельные сторонам параллелограмма и встречающие их соответственно в точках A и C, B и D. Доказать, что центр M параллелограмма, точка P и точка S пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ лежат на одной прямой, причем $MS=SP$.

66. Средняя линия четырехугольника делит его на два четырехугольника. Доказать, что середины диагоналей этих двух четырехугольников являются вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой, представляя собой вырожденный параллелограмм.

67. Даны выпуклый четырехугольник и две пересекающиеся прямые, не встречающие его стороны. Суммы расстояний противоположных вершин четырехугольника до одной прямой равны между собой, а также равны между собой суммы расстояний противолежащих вершин до другой прямой. Доказать, что суммы расстояний противолежащих вершин этого четырехугольника до всякой прямой, не встречающей его стороны, также равны между собой.

68. Доказать, что центроиды треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами четырехугольника, стороны и диагонали которого соответственно параллельны сторонам и диагоналям четырехугольника $ABCD$.

69. Доказать, что если в четырехугольнике средняя линия проходит через точку пересечения диагоналей и делится ею пополам, то четырехугольник — параллелограмм.

70. Отрезок, соединяющий середины M_1 и M_3 двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, встречает его диагонали в точках P и Q. Доказать, что если $M_1P=M_3Q$, то четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

71. Через центроид треугольника ABC проведена секущая. Прямые, проведенные через вершины треугольника параллельно друг другу, пересекают секущую соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что из полученных трех отрезков AA_1, BB_1, CC_1 сумма двух отрезков, расположенных по одну сторону от секущей, равна третьему отрезку.

§ 6. Треугольники и четырехугольники (метрические задачи)

72. На отрезках AB и BC (точка B лежит между A и C) одной и той же прямой по одну сторону от нее построены равносторонние треугольники AMB и BNC. Доказать, что середины отрезков MC, AN и точка B являются вершинами равностороннего треугольника. Выяснить справедливость теоремы для случая, когда точка C лежит между точками A и B, а построенные равносторонние треугольники расположены по разные стороны от прямой.

73. Сторона AC треугольника ABC повернута на угол $+90°$ около точки A, а сторона BC — на угол $-90°$ около точки B. Доказать, что если AC_1 и BC_2 суть новые положения повернутых сторон, то середина отрезка C_1C_2 не зависит от положения вершины C.

74. Сторона AC треугольника ABC повернута около вершины A на угол $+90°$ и после поворота занимает положение AC_1. Сторона BC повернута около вершины B на угол $+90°$ и занимает после поворота положение BC_2. Доказать, что отрезок C_1C_2 имеет постоянную длину и постоянное направление, не зависящие от положения точки C.

75. Доказать, что расстояние между серединами диагоналей выпуклого четырехугольника не меньше полуразности пары его противолежащих сторон.

76. Доказать, что два четырехугольника равны, если стороны и средняя линия одного из них соответственно равны сходственным элементам другого.

77. Доказать, что внутренние биссектрисы параллелограмма образуют прямоугольник, диагонали которого параллельны сторонам параллелограмма. Установить справедливость теоремы для биссектрис внешних углов.

78. Доказать, что: 1) если средние линии четырехугольника равны, то его диагонали перпендикулярны, и обратно; 2) если средние линии четырехугольника перпендикулярны, то его диагонали равны, и обратно.

79. Доказать, что каждая средняя линия четырехугольника с равными диагоналями встречает их под равными углами.

80. Прямая, соединяющая середины двух сторон четырехугольника, не являющегося трапецией, образует с двумя другими сторонами равные углы. Доказать, что последние две стороны равны.

81. Через точку P, расположенную на биссектрисе угла C треугольника ABC или на ее продолжении, проведены прямые, параллельные сторонам AC и BC. Доказать, что если отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны, то треугольник равнобедренный.

82. Доказать, что если диагонали трапеции равны, то трапеция равнобедренная.

83. Углы A и C четырехугольника $ABCD$ равны и диагональ

AC делится другой диагональю пополам. Доказать, что четырехугольник есть дельтоид или параллелограмм.

84. Плоскость подвергается преобразованию вращения последовательно около центров A, B, C, D в одном и том же направлении на 90° (около каждого центра). Доказать, что сумма этих вращений есть тождество тогда и только тогда, когда отрезки AC и BD равны и перпендикулярны.

85. На сторонах четырехугольника, как на диаметрах, построены полуокружности, причем две противоположные полуокружности обращены внутрь четырехугольника, а две другие — во внешнюю область. Доказать, что середины этих полуокружностей являются вершинами параллелограмма.

86. На сторонах четырехугольника, как на диаметрах, построены полуокружности, расположенные вне четырехугольника. Доказать, что середины дуг этих полуокружностей являются вершинами четырехугольника с равными и перпендикулярными диагоналями. Доказать справедливость теоремы для случая, когда полуокружности заменены своими дополнениями до полных окружностей.

87. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ вне его (внутри него) построены равносторонние треугольники BCM и CDN. Доказать, что треугольник AMN равносторонний.

88. Доказать, что если сумма средних линий четырехугольника равна его полупериметру, то четырехугольник — параллелограмм.

89. Доказать, что угол C треугольника ABC равен 135°, если $AH_3=2h_3$, $BH_3=3h_3$ (H_3 — основание высоты h_3).

§ 7. Окружность

90. Доказать, что угол, под которым виден из точки пересечения двух окружностей O_1 и O_2 отрезок O_1O_2, в два раза больше угла, под которым из этой точки виден отрезок общей касательной, расположенный с выбранной точкой пересечения по разные стороны от прямой O_1O_2. Как изменится теорема для отрезка второй общей касательной?

91. В одной из двух пересекающихся окружностей проведена хорда AB, а в другой — параллельная хорда CD. Доказать, что отрезок AC (AD) виден из одной точки пересечения окружностей под таким же углом или дополнительным до 180°, как отрезок BD (BC) виден из другой точки пересечения данных окружностей. Сформулировать и доказать обратную теорему.

92. Прямая встречает одну из двух пересекающихся окружностей в точках A и B, а другую окружность — в точках C и D. Доказать, что отрезок AC (AD) виден из одной точки пересечения окружностей под таким же углом или дополнительным до 180°, как отрезок BD (BC) виден из другой точки пересечения этих окружностей.

93. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, отражается относительно его сторон. Доказать, что полученные

точки A_1, B_1, C_1 являются вершинами треугольника, центрально-симметричного с данным, и что центр симметрии делит отрезок OH пополам, а также что точка O — ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$.

94. В двух фиксированных точках A и B окружности и в переменной точке M дуги AB проведены касательные. Доказать, что отрезок переменной касательной, высекаемый двумя постоянными касательными, виден из центра окружности под постоянным углом.

95. Биссектриса треугольника делит его на два треугольника, в которые вписаны окружности. Доказать, что если радиусы этих окружностей равны, то данный треугольник равнобедренный.

96. На продолжениях хорды AB данной окружности взяты точки C и D так, что отрезки CT_1 и DT_2 касательных, проведенных по одну сторону от хорды AB, равны. Доказать, что отрезки AC и BD равны, а прямая T_1T_2 параллельна прямой AB.

97. Хорда AB некоторой окружности продолжена в обе стороны и на продолжениях отложены равные отрезки AC и BD. Из точек C и D в одной полуплоскости относительно CD проведены к окружности касательные лучи CT_1 и DT_2. Доказать, что прямая T_1T_2 параллельна прямой AB.

98. Из вершин треугольника ABC исходят лучи, проходящие через точку M, лежащую на окружности, описанной около треугольника ABC. Доказать, что лучи, симметричные лучам AM, BM, CM относительно биссектрис соответствующих углов треугольника (или продолжения этих лучей), параллельны. Доказать обратную теорему.

99. Разность углов A и B треугольника ABC равна 90°. Доказать, что расстояние от основания высоты, опущенной на сторону AB, до середины этой стороны равно радиусу окружности, описанной около данного треугольника.

100. Одна из диагоналей вписанного в окружность четырехугольника является диаметром окружности. Доказать, что проекции противоположных сторон четырехугольника на вторую диагональ равны между собой.

101. Вершины четырехугольника расположены так: одна — в центре данной окружности, вторая — вне этой окружности, последние две — на касательных, проведенных из второй точки к окружности, на равных расстояниях от центра и по разные стороны от хорды, соединяющей точки касания. Доказать, что около этого четырехугольника можно описать окружность.

102. В концах хорды AB окружности O проведены касательные, встречающиеся в точке S. Доказать, что середина M дуги AB, расположенной вне треугольника ABC, является эксцентром этого треугольника.

103. Окружности O и O_1 пересекаются в точках A и B. Прямые OA и O_1A встречают окружности O_1 и O соответственно в точках C и D. Доказать, что точки B, O, D, C и O_1 принадлежат одной окружности.

104. Противоположные стороны AB и DE, BC и EF шестиугольника $ABCDEF$, вписанного в окружность, параллельны. Доказать, что его стороны CD и FA также параллельны.

105. Доказать, что если противоположные стороны вписанного в окружность шестиугольника $ABCDEF$ параллельны, то его диагонали AD, BE и CF равны.

106. Через точку пересечения двух окружностей проведена секущая, встречающая эти окружности вторично в точках A и B. Определить направление секущей, при котором отрезок AB становится наибольшим.

107. Через точки пересечения двух окружностей проведены параллельные секущие. Доказать, что отрезки этих секущих, заключенные внутри окружностей, равны.

108. К двум окружностям равных радиусов проведены общие касательные. Доказать, что отрезок общей внутренней касательной, заключенный между внешними касательными, равен отрезку внешней касательной, заключенному между точками касания.

109. Две равные окружности радиуса R пересекаются в точках A и B под углом φ ($\varphi = \angle O_1AO_2$). В одной из окружностей проведена хорда AM, а в другой — хорда AN так, что угол MAN равен $\frac{\varphi}{2}$ (или дополнительному углу). Доказать, что отрезок MN имеет постоянную длину.

110. Даны окружность и прямая. Из точек A и B этой прямой проведены к данной окружности по касательной. Доказать, что если отрезки касательных, ограниченные данными точками и точками касания, равны, то прямая, проведенная через точки касания, либо параллельна данной прямой, либо делит отрезок AB пополам.

111. Две окружности касаются между собой в точке T. Секущая встречает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Доказать, что биссектрисы углов ATB и CTD либо перпендикулярны, либо совпадают.

112. Доказать, что если две окружности пересекаются, то отрезок их общей касательной, ограниченный точками касания, виден из точек пересечения окружностей под углами, сумма которых равна 180°.

113. Две окружности имеют внутреннее касание в точке K. В произвольной точке P внутренней окружности проведена к ней касательная, встречающая внешнюю окружность в точках A и B. Доказать, что отрезки AP и BP видны из точки K под равными углами.

114. Две окружности пересекаются в точках A и B. Касательная к одной из них в произвольной точке T пересекает другую окружность в точках C и D. Доказать, что углы, под которыми отрезок CT виден из точки A и отрезок TD — из точки B, либо равны, либо в сумме составляют 180°.

115. Через точку пересечения двух окружностей проведена произвольная секущая, которая второй раз пересекает окружности в точках A и B. Доказать, что углы между касательными, проведенными к окружности в точках A и B, постоянны.

116. Окружности O и O_1 пересекаются в точках A и B. Из точки A под равными углами к общей хорде AB проведены в каждой окружности по хорде: в окружности O — хорда AEC, пересекающая окружность O_1 в точке E, и в окружности O_1 — хорда AFD, пересекающая окружность O в точке F. Доказать, что отрезки EC и FD этих хорд равны между собой.

117. Три попарно пересекающиеся окружности одного и того же радиуса имеют общую точку M. Доказать, что вторые точки A, B, C пересечения этих окружностей являются вершинами треугольника, для которого точка M — ортоцентр, а радиус описанной окружности равен радиусу каждой из данных окружностей.

118. Доказать, что угол, под которым пересекаются две прямые Симсона, соответствующие двум точкам, не зависит от самих точек, а зависит от стягиваемой ими хорды окружности (т. е. равным хордам соответствуют равные углы между прямыми Симсона).

119. Доказать, что внешняя биссектриса угла A, вписанного в окружность треугольника ABC, параллельна хорде, соединяющей середины дуг AB и AC.

120. Боковые стороны трапеции $ABCD$ продолжены до пересечения в точке E. Доказать, что окружности, описанные около треугольников DEC и ABE, касаются друг друга. Доказать также, что окружности, описанные около треугольников AMB и DMC, где M — точка пересечения диагоналей трапеции, касаются друг друга.

121. В окружность вписаны два одинаково ориентированных равносторонних треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, пересекаясь, также образуют равносторонний треугольник. Проверить справедливость аналогичной теоремы для двух правильных вписанных одноименных и одинаково ориентированных многоугольников.

122. Биссектриса угла C треугольника ABC встречает его сторону в точке C_1, из которой проведена касательная C_1K к окружности, вписанной в этот треугольник. Доказать, что касательная C_1K параллельна касательной, проведенной в точке C к окружности, описанной около треугольника ABC.

123. Доказать, что прямые, соединяющие середины дуг, стягиваемых противоположными сторонами вписанного в окружность четырехугольника, взаимно перпендикулярны.

124. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Через точку M проведена прямая, параллельная стороне BC, через точку N — прямая, параллельная стороне AC. Эти параллели встречают сторону AB в точках P и Q. Доказать, что четыре точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.

125. Из основания H_3 высоты CH_3 треугольника ABC опущены перпендикуляры H_3A_1 и H_3B_1 на две другие стороны. Доказать, что четыре точки A, B, A_1, B_1 расположены на одной окружности.

126. Три прямые проходят через одну точку S и образуют шесть углов по $60°$. Доказать, что проекции любой точки P (отличной от S) плоскости на эти прямые являются вершинами равностороннего треугольника.

127. Доказать, что серединный перпендикуляр стороны AB треугольника ABC и перпендикуляр к большей из двух других его сторон в точке M, делящей ломаную ACB пополам, пересекаются в точке P на окружности, описанной около треугольника.

128. Из точки пересечения диагоналей дельтоида опущены перпендикуляры на две его неравные смежные стороны, которые продолжены до пересечения с двумя другими сторонами дельтоида соответственно в точках E и F. Доказать, что прямая EF параллельна оси симметрии дельтоида.

129. Через точку пересечения двух окружностей проведены две произвольные секущие, встречающие второй раз окружности в точках C и C_1, D и D_1. Доказать, что угол между хордами CD и D_1C_1 постоянен.

130. Через точку A пересечения двух окружностей проведена секущая, встречающая окружности в точках C и D. Доказать, что серединный перпендикуляр отрезка CD проходит через фиксированную точку, когда секущая описывает пучок с центром в точке A.

131. Если окружности, вписанные в треугольники, на которые разбивается четырехугольник одной из своих диагоналей, касаются друг друга, то окружности, вписанные в треугольники, на которые четырехугольник разбивается второй диагональю, также касаются друг друга.

132. Через три пары вершин треугольника проведены соответственно три окружности так, что их дуги, лежащие вне треугольника, вмещают углы, сумма которых равна $180°$. Доказать, что эти окружности проходят через одну точку.

133. В описанном около окружности четырехугольнике проведена диагональ и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Доказать, что точки касания этих окружностей со сторонами четырехугольника являются вершинами вписанного четырехугольника.

§ 8. Замечательные точки и линии в треугольнике

134. Внутри треугольника ABC дана точка M, для которой $\angle MAB = \angle MCB$, $\angle MBA = \angle MCA$. Доказать, что точка M — ортоцентр треугольника.

135. В окружность O вписан треугольник ABC, описанный около окружности O'. Доказать, что если точка M есть середина дуги AB, не содержащей точку C, то $MA = MB = MO'$.

136. Около треугольника ABC описана окружность. Доказать, что точка D, диаметрально противоположная точке C, симметрична ортоцентру треугольника относительно середины стороны AB.

137. 1) Доказать, что во всяком треугольнике точки, симметричные с ортоцентром относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около треугольника.

2) Через точку M, расположенную в плоскости треугольника ABC, проведены прямые AM и BM, пересекающие противоположные стороны треугольника и окружность, описанную около треугольника, соответственно в точках A_1, A_2 и B_1, B_2. Доказать, что если $MA_1=A_1A_2$ и $MB_1=B_1B_2$, то точка M — центроид треугольника.

138. Доказать, что окружности, проходящие соответственно через каждые две вершины треугольника и его ортоцентр, равны окружности, описанной около треугольника.

139. Две пары перпендикулярных прямых образуют четыре прямоугольных треугольника. Доказать, что середины гипотенуз этих треугольников являются вершинами прямоугольника.

140. На стороне AB треугольника ABC, как на диаметре, построена полуокружность, встречающая стороны AC и BC или их продолжения соответственно в точках M и N. Доказать, что касательные, проведенные к полуокружности в точках M и N, пересекаются на высоте CH_3 треугольника или на ее продолжении.

141. Прямая, проведенная через центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC, отсекает от его сторон CA и CB равные отрезки CA_1, CB_1. Доказать, что угол C равен 60°.

§ 9. Геометрические места

142. Через концы отрезков AB и BC, принадлежащих одной прямой, проведены равные окружности, пересекающиеся вторично в точке M. Доказать, что геометрическое место точек M есть перпендикуляр (с исключенной точкой) к отрезку AC, проходящий через его середину.

143. Вершины острых углов прямоугольного треугольника скользят по сторонам прямого угла. Доказать, что геометрическое место вершин прямого угла треугольника есть пара отрезков, соответствующих двум возможным расположениям треугольника относительно сторон угла.

144. К сторонам угла C в некоторых точках A и B восставлены перпендикуляры, пересекающиеся в точке M. Доказать, что геометрическое место точек M при условии, что перпендикуляры к сторонам угла восставляются в точках, являющихся концами отрезков, параллельных AB, есть полупрямая.

145. Дан равносторонний треугольник ABC. Доказать, что геометрическое место таких точек M, для которых отрезки, высекаемые на прямых AM и BM сторонами треугольника или их продолжениями, равны, есть прямая и окружность.

146. Две окружности, касающиеся данной прямой в данных точках, касаются друг друга. Доказать, что геометрическое место точек касания окружностей есть окружность с двумя исключенными точками.

147. На каждой из двух пересекающихся в точках A и B окружностях O_1 и O_2 даны соответственно точки S_1 и S_2. Переменная прямая g_1, проходящая через точку S_1, пересекает окружность O_1 в точке P_1, а прямая AP пересекает окружность O_2 в точке P_2. Доказать, что геометрическое место точек пересечения прямой g_1 и прямой g_2, проходящих через точки P_2 и S_2, есть окружность, определяемая точками S_1, S_2, B.

148. Отрезок постоянной длины a скользит своими концами по сторонам угла. Доказать, что геометрическое место точек пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам угла в концах отрезка, есть дуга окружности.

149. На сторонах угла S даны две произвольные точки A и B. От этих точек по одну сторону от прямой AB на сторонах угла откладываются соответственно равные отрезки: $AD=BC$, $DD_1=CC_1$, $D_1D_2=C_1C_2$ и т. д. Доказать, что геометрическое место середин отрезков AB, CD, C_1D_1, C_2D_2 и т. д. есть луч, параллельный биссектрисе угла.

150. Через концы диаметра AB и хорды CD окружности O проведены прямые AC и BD, пересекающиеся в точке M. Доказать, что: 1) геометрическим местом точек M при условии, что диаметр AB делает полный оборот, является окружность; 2) геометрическим местом точек M при условии, что концы хорды CD скользят по окружности, является также окружность.

151. На стороне AB (или ее продолжении) треугольника ABC дана точка K, через которую проведена произвольная секущая, встречающая стороны AC и BC соответственно в точках M и N.

Окружности, описанные около треугольников AKM и BKN, пересекаются в точке P. Доказать, что геометрическим местом точек P является окружность, описанная около треугольника ABC.

152. На хорде AB окружности O, как на диаметре, описана вторая окружность O_1. Через точку A проведена секущая, встречающая окружности O_1 и O соответственно в точках M_i и N_i. Доказать, что геометрическое место точек, симметричных с N_i относительно точек M_i, когда секущая описывает пучок, есть окружность.

153. На сторонах угла C даны две точки A и B так, что $AC=BC$. Доказать, что геометрическим местом точек M, расположенных внутри угла и для которых луч MC есть биссектриса угла AMB, является открытая дуга окружности и биссектриса угла C (исключая вершину).

154. Доказать, что геометрическое место точек M, для которых перпендикуляры к прямым AM, BM и CM, проведенные соответственно через вершины A, B, C треугольника ABC, пересекаются в одной точке, есть окружность.

155. Доказать, что геометрическое место точек пересечения пар ортогональных окружностей, проходящих соответственно через точки A, C и B, C, есть окружность (или, в частности, прямая).

§ 10. Смешанные задачи

156. Из точки P, расположенной внутри равностороннего треугольника ABC, сторона AB видна под углом в 150°. Доказать, что на отрезках PA, PB, PC можно построить прямоугольный треугольник.

157. Доказать, что, для того чтобы угол треугольника был равен 45° или 135°, необходимо и достаточно, чтобы ортоцентрический треугольник данного треугольника был прямоугольным.

158. Высота и медиана треугольника, выходящие из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части. Доказать, что данный треугольник прямоугольный.

159. На стороне треугольника или на ее продолжении взята точка, из которой на две другие стороны опущены перпендикуляры. Доказать, что расстояние между основаниями этих перпендикуляров будет наименьшим, если взятая точка есть основание высоты треугольника.

160. Доказать, что если одна из диагоналей четырехугольника является биссектрисой одного из углов и делит периметр четырехугольника пополам, то четырехугольник есть дельтоид.

161. Разность углов B и A треугольника ABC равна 90°. Из основания H_3 высоты CH_3 опущены на стороны AC и BC перпендикуляры H_3M и H_3N. Доказать, что прямая MN перпендикулярна прямой AB.

162. Через вершины A и B основания AB равнобедренного треугольника ABC с углом 20° при вершине C проведены соответственно под углами 50° и 60° к основанию две секущие, встречающие стороны BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Доказать, что угол A_1B_1B равен 30°.

163. Доказать, что отрезок, соединяющий инцентр и эксцентр треугольника, делится окружностью, описанной около треугольника, пополам.

164. В точках A и B, расположенных на окружности O, проведены к ней касательные. Через произвольную точку M хорды AB перпендикулярно к прямой OM проведена секущая. Доказать, что отрезки секущей, заключенные между окружностью и касательными, равны между собой.

165. Из вершины C треугольника ABC проведены высота CH_3, биссектриса CL_3 и медиана CM_3. Доказать, что если углы ACH_3, H_3CL_3, L_3CM_3, M_3CB равны, то треугольник ABC прямоугольный с острым углом 22,5°.

166. Доказать, что, для того чтобы один из углов треугольника был равен 60° или 120°, необходимо и достаточно, чтобы расстоя-

ние от вершины треугольника до ортоцентра было равно радиусу описанной окружности.

167. В конце A хорды AB окружности O проведена к ней касательная, на которую опущен из точки B перпендикуляр BM, встречающий окружность вторично в точке C. Доказать, что центр O, точка N, делящая хорду AB в отношении $1:2$, и точка C', симметричная точке C относительно точки M, лежат на одной прямой.

168. Окружность O касается прямой m, к которой в ее точке M восставлен перпендикуляр, встречающий окружность в точках A и B. Доказать, что если точка A' симметрична точке A относительно точки M, то отрезок $A'B$ равен диаметру окружности и виден из точки касания под прямым углом.

169. Доказать, что если прямая проходит через вершину треугольника перпендикулярно к медиане, проведенной через эту же вершину, то сумма расстояний двух других вершин треугольника до этой прямой является наибольшей.

170. В плоскости треугольника ABC дана точка M, через которую проведены прямые, перпендикулярные к MA, MB и MC. Доказать, что точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения этих прямых с соответствующими сторонами треугольника, либо все лежат на продолжениях сторон, либо только одна из них лежит на продолжении одной из сторон треугольника.

171. В плоскости равностороннего треугольника ABC дана точка M. Доказать, что по отрезкам MA, MB, MC можно построить треугольник, который вырождается только для точек, расположенных на окружности, описанной около треугольника.

172. Треугольник ABC вписан в окружность. Через произвольную точку P окружности проведены прямые, параллельные сторонам треугольника и встречающие окружность вторично соответственно в точках C_1, A_1, B_1. Доказать, что: а) треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, б) прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны.

173. Из точки P, расположенной внутри прямого угла O, опущены на его стороны перпендикуляры PA и PB. Доказать, что если прямоугольник $OAPB$ сохраняет периметр, то перпендикуляр, опущенный из точки P на диагональ AB, проходит через фиксированную точку.

174. На окружности даны три точки A, B, C. Последняя отражена относительно середины отрезка AB. Полученная точка C_1 соединена с точкой D, диаметрально противоположной точке C. Доказать перпендикулярность прямых AB и C_1D.

175. Даны окружность и точки A и B, из которых проведены к окружности касательные. Доказать, что если прямая, проведенная через точки касания двух касательных, не выходящих из одной и той же точки, делит отрезок AB пополам или параллельна ему, то отрезки касательных, ограниченные данными точками и точками касания, равны между собой.

176. Две окружности O и O_1 равных радиусов пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена их общая секущая CAD,

на которую из точки B опущен перпендикуляр, пересекающий окружности в точках E и F. Доказать, что: а) точки C, E, D, F являются вершинами ромба со стороной, равной OO_1, б) противоположные стороны ромба параллельны линии центров.

177. К окружности проведены касательные AT_1 и AT_2, образующие угол, равный 60°. Через точку M, взятую произвольно на окружности, проведены прямые T_1M и T_2M, пересекающие касательные AT_2 и AT_1 соответственно в точках Q_1 и Q_2. Доказать, что отрезки T_1Q_1 и T_2Q_2 равны.

178. Через вершины треугольника ABC, вписанного в окружность, проведены параллельные друг другу прямые, каждая из которых встречает вторично окружность соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

179. Внутри остроугольного треугольника ABC дана точка M так, что $\angle MAB - \angle MBA = \angle MBC - \angle MCB = \angle MCA - \angle MAC$. Доказать, что точка M есть центр описанной около треугольника ABC окружности.

180. Через одну из вершин треугольника проведен диаметр описанной около этого треугольника окружности. Доказать, что биссектриса угла между диаметром и высотой, опущенной из этой же вершины на противоположную сторону, является также биссектрисой угла треугольника при этой вершине.

181. Доказать, что точка, симметричная центру окружности относительно середины средней линии треугольника, вписанного в эту окружность, лежит на высоте, перпендикулярной к этой средней линии.

182. Прямая, проведенная через вершину треугольника и середину противоположной стороны, проходит через центр окружности, описанной около этого треугольника. Доказать, что если треугольник разносторонний, то он прямоугольный.

183. Точки C_1 и C_2 получены отражением вершины C треугольника ABC относительно биссектрис углов A и B. Доказать, что точка касания вписанной в треугольник ABC окружности делит отрезок C_1C_2 пополам и этот отрезок виден из центра окружности под углом $180° - \angle C$.

184. На отрезке CH треугольника ABC (H — ортоцентр), как на диаметре, построена окружность, пересекающая стороны AC и BC соответственно в точках M и N. Доказать, что касательные к окружности в точках M и N пересекаются в середине стороны AB.

185. Прямоугольный треугольник делится высотой, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, на два треугольника, в которые вписаны окружности. Доказать, что линия центров этих окружностей перпендикулярна к биссектрисе прямого угла данного треугольника.

186. Прямоугольный треугольник ABC высотой CH_3, опущенной на гипотенузу, разбивается на два треугольника ACH_3 и BCH_3. Доказать, что центры O, O_1, O_2 окружностей, вписанных

соответственно в треугольники ABC, ACH_3, H_3BC, равноудалены от точки касания окружности O и гипотенузы AB.

187. Секущая, проведенная через вершину треугольника, разбивает его на два треугольника, в которые вписаны окружности. Доказать, что если радиусы этих окружностей равны, то отрезок секущей, заключенный между вершиной и общей внешней касательной этих окружностей, равен разности полупериметра треугольника и его стороны, являющейся отрезком второй внешней касательной данных окружностей.

188. Через вершины треугольника проведены прямые, перпендикулярные сторонам треугольника, сходящимся в эти вершины. Доказать, что эти перпендикуляры образуют два равных треугольника.

189. Биссектрисы углов, образованных противоположными сторонами выпуклого четырехугольника, перпендикулярны. Доказать, что около такого четырехугольника можно описать окружность.

190. Три прямые проходят через одну точку S, при которой образуются шесть углов по 60°. Доказать, что сумма расстояний любой точки от двух прямых равна расстоянию до третьей прямой.

191. Если четырехугольник обладает двумя из трех перечисленных ниже свойств, а именно: 1) диагонали четырехугольника перпендикулярны, 2) четырехугольник вписуем в окружность, 3) перпендикуляр, опущенный из вершины одной стороны на противоположную, проходит через точку пересечения диагоналей, то он обладает и третьим свойством.

192. Через вершину C прямого угла проведены две произвольные прямые. Из точек A и B, взятых на сторонах данного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и AA_2, BB_1 и BB_2 на данные прямые (A_1, A_2, B_1, B_2 — основания перпендикуляров). Доказать, что прямые A_1A_2 и B_1B_2 взаимно перпендикулярны.

193. Из вершин A и B треугольника ABC опущены высоты AH_1 и BH_2; из точек H_1 и H_2 проведены перпендикуляры H_1A_1 и H_2B_1 к тем же сторонам AC и BC. Доказать, что прямая A_1B_1 параллельна прямой AB.

194. Доказать, что если основания перпендикуляров, опущенных из точки M плоскости треугольника ABC на его стороны, лежат на одной прямой, то точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Проверить справедливость этой теоремы для того случая, когда через точку M проводятся наклонные к сторонам треугольника, образующие с ними равные углы.

195. Через вершину C треугольника ABC проведена секущая, на которую из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1. Из точек A_1 и B_1 соответственно на стороны BC и AC опущены перпендикуляры A_1A_2 и B_1B_2, пересекающиеся в точке D. Доказать, что прямая DC перпендикулярна стороне AB.

196. Даны два центрально-симметричных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что окружности, описанные около треугольников ABC, A_1BC_1, A_1B_1C, AB_1C_1, пересекаются в одной точке S.

197. Доказать, что если средняя линия четырехугольника, соответствующая одной паре противоположных сторон, образует с двумя другими сторонами равные углы, то последние стороны либо равны, либо параллельны.

198. Доказать, что если средняя линия четырехугольника, соответствующая одной паре противоположных сторон, равна полусумме двух других его сторон, то этот четырехугольник — трапеция (в частности, параллелограмм).

199. В окружность вписан четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей этого четырехугольника на его стороны, являются вершинами второго четырехугольника. Доказать, что в новый четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность.

200. Вписанный в окружность четырехугольник разбивается одной диагональю на два треугольника, в которые вписаны окружности, и второй диагональю — на два других треугольника, в которые также вписаны окружности. Доказать, что центры этих окружностей являются вершинами прямоугольника.

201. Из основания каждой высоты треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны треугольника. Доказать, что основания всех шести перпендикуляров лежат на одной окружности.

202. Доказать, что если ортоцентр треугольника лежит на окружности, проходящей через середины его сторон, то треугольник прямоугольный.

203. Правильный треугольник (n-угольник) повернут около своего центра на угол, меньший $120°$ $(\frac{1}{n}\cdot 360°)$. Доказать, что стороны данного треугольника (n-угольника) и стороны повернутого треугольника (n-угольника) являются сторонами равностороннего шестиугольника ($2n$-угольника), в который можно вписать окружность. (Такие $2n$-угольники называются полуправильными.)

204. Каждая сторона правильного треугольника разделена на три равные части. Доказать, что шестиугольник, образованный прямыми, проведенными через точки деления и противоположные вершины, полуправильный.

205. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC дана произвольная точка P. Доказать, что окружности, описанные около треугольников APC и BPC, ортогональны.

ГЛАВА III

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ПОДОБИЕ

§ 11. Пропорциональные отрезки (аффинные задачи)

206. Точка C делит отрезок AB внутренним образом в отношении k, а точка C_1 делит этот же отрезок внешним образом в том же отношении. Доказать, что середина отрезка CC_1 делит отрезок AB в отношении k_2 внешним образом.

207. На прямых m и n взяты соответственно точки A, B, C и A_1, B_1, C_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны. Доказать, что точки A_2, B_2, C_2, делящие отрезки AA_1, BB_1, CC_1 в равных отношениях, лежат на прямой, которая с прямыми m и n принадлежит одному пучку.

208. Через вершину C треугольника ABC проведена секущая, встречающая среднюю линию M_1M_3 и продолжение средней линии M_2M_3 соответственно в точках P и Q. Доказать, что AQ и BP параллельны.

209. Через вершины треугольника ABC и точку P, взятую внутри него, проведены прямые, встречающие противоположные стороны соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Прямая, проведенная через точку C_1 параллельно AA_1, пересекает стороны треугольника AC и BC соответственно в точках M и N, а отрезок BB_1 — в точке D. Доказать, что $NC_1^2 = MN \cdot ND$.

210. На стороне треугольника отложены два равных отрезка, считая от соответствующих вершин этой стороны. Через полученные точки проведены прямые, параллельные соответствующим сторонам треугольника. Доказать, что построенные прямые пересекаются на медиане треугольника, проведенной к первоначально выбранной стороне.

211. Через точку P, расположенную внутри треугольника ABC, проведены три луча: луч p_1, параллельный AB, пересекающий BC в точке A_1, луч p_2, параллельный BC, пересекающий CA в точке B_1, луч p_3, параллельный CA, пересекающий AB в точке C_1. Доказать, что имеет место следующее соотношение между образовавшимися отрезками:

$$\frac{PA_1}{AB} + \frac{PB_1}{BC} + \frac{PC_1}{CA} = 1.$$

При каких дополнительных условиях указанное соотношение остается справедливым для всех точек плоскости?

212. Доказать, что если отрезок, заключенный между противоположными сторонами четырехугольника и проведенный через точку пересечения его диагоналей параллельно одной из двух других сторон, делится этой точкой пополам, то четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

213. Прямая проведена параллельно основаниям трапеции. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между одной боковой стороной и одной диагональю трапеции (или их продолжениями), равен отрезку этой прямой, заключенному между второй боковой стороной и второй диагональю (или их продолжениями).

214. Через точку M стороны AB треугольника ABC проведены прямые MN и MK, параллельные соответственно AC и BC. Произвольная секущая, проходящая через вершину C, встречает отрезок MN в точке P, а продолжение KM — в точке Q. Доказать, что прямая AQ параллельна BP.

215. Через две противоположные вершины параллелограмма проведены прямые, каждая из которых встречает две другие стороны соответственно в точках M и N, K и L. Доказать, что полученные точки являются вершинами трапеции или параллелограмма. Сформулировать и доказать обратную теорему.

216. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена секущая, встречающая диагональ BD и сторону CD соответственно в точках P, Q. Доказать, что если $\frac{DQ}{QC}=\frac{1}{k}$, то $\frac{PD}{PB}=\frac{1}{k+1}$.

217. Произвольная точка P боковой стороны AB трапеции $ABCD$ соединена с вершинами C и D. Через вершины A и B трапеции проведены прямые, параллельные соответственно отрезкам PC и PD. Доказать, что построенные прямые пересекаются в точке на стороне CD. Выяснить справедливость обратной теоремы.

218. Доказать, что если центр гомотетии двух гомотетичных треугольников является центроидом одного из треугольников, то он является центроидом и для другого.

219. Середины двух противоположных сторон четырехугольника соединены с точкой, расположенной на диагонали. Доказать, что построенные две прямые делят две другие стороны четырехугольника соответственно в равных отношениях.

220. На диагонали AC трапеции $ABCD$ (сторона AD параллельна BC, $AD>BC$) отложен отрезок AP, равный OC, а на диагонали DB — отрезок DQ, равный OB (O — точка пересечения диагоналей) Доказать, что прямые, проведенные через точки B и P, C и Q, отсекают на большем основании равные отрезки AM и DN.

221. Прямая, проведенная через вершину C трапеции $ABCD$ (сторона AD параллельна стороне BC) параллельно стороне AB, отсекает на диагонали DB отрезок DP, равный отрезку OB (O — точка пересечения диагоналей трапеции). Доказать, что $AD^2=BC^2+AD\cdot BC$.

222. Через вершину C меньшего основания BC трапеции $ABCD$ проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке P. Доказать, что если $DP=BO$ (O — точка пересечения диагоналей), то прямая, параллельная CD и проходящая через вершину B, отсекает на второй диагонали отрезок AQ, равный OC.

223. На стороне AB треугольника ABC взята точка M. Три прямые m, n, p, параллельные прямой CM, пересекают прямую AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1 так, что $AA_1=BB_1=MC_1$. Доказать, что: 1) сумма отрезков параллельных прямых m и n, заключенных внутри треугольника, равна отрезку прямой p, заключенному внутри угла, смежного с углом C, 2) эти отрезки пропорциональны параллельным проекциям соответствующих сторон на произвольную ось (направление проектирования параллельно MC); отрезкам m, n, p соответствуют проекции сторон BC, CA, AB.

224. Стороны треугольника ABC разделены в направлении обхода вдоль его контура в одном и том же отношении λ. Стороны полученного треугольника $A_1B_1C_1$ также разделены при обратном обходе в том же отношении λ. Доказать, что третий полученный треугольник $A_2B_2C_2$ подобен и подобно расположен с данным.

225. Доказать, что если прямая, проходящая через середины противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей, то четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

226. В четырехугольник вписана трапеция, параллельные стороны которой параллельны его диагонали. Доказать, что непараллельные стороны трапеции пересекаются на другой диагонали четырехугольника.

227. Две прямые a и b пересечены двумя прямыми в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2. На секущей A_1B_1 дана произвольная точка P, которая соединена с точками A_2 и B_2. Через середину M_1 отрезка A_1B_1 проведены прямые a_1 и b_1, параллельные прямым a и b. Доказать, что точки пересечения прямых A_2P и a_1 и прямых B_2P и b_1 находятся на одной прямой с серединой M_2 отрезка A_2B_2.

228. Прямая встречает стороны AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ или их продолжения соответственно в точках P, Q, R, S. Доказать, что образовавшиеся отрезки удовлетворяют равенству:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{DS}}{\overline{SA}} = 1.$$

229. Противоположные стороны AB и DC, AD и BC четырехугольника $ABCD$ пересекаются соответственно в точках E и F. Доказать, что образовавшиеся отрезки удовлетворяют равенству:

$$\frac{AE \cdot CE}{BE \cdot DE} = \frac{AF \cdot CF}{BF \cdot DF}.$$

230. Четыре прямые, принадлежащие одному пучку, пересечены двумя прямыми соответственно в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1. Доказать, что образовавшиеся на секущих отрезки удовлетворяют равенству:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}} : \frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{D_1B_1}}.$$

231. Через точку M пересечения диагоналей четырехугольника проведена секущая. Отрезок этой секущей, заключенный между одной парой противоположных сторон четырехугольника, делится точкой M пополам. Доказать, что отрезок секущей, заключенный между продолжениями другой пары противоположных сторон четырехугольника, делится точкой M также пополам.

232. На сторонах AC и BC треугольника ABC даны по две точки M_1 и M_2, N_1 и N_2 так, что $AM_i : M_iC = CN_i : N_iB = k_i$ $(i=1,2)$. Доказать, что точка P, в которой пересекаются отрезки M_1N_1 и M_2N_2, делит каждый из этих отрезков в отношении k_2 и k_1.

233. Стороны треугольника разделены при обходе вдоль его контура в одном и том же отношении. Доказать, что точки деления являются вершинами треугольника, у которого центроид совпадает с центроидом данного треугольника. Проверить справедливость этой теоремы для четырехугольников.

234. Через точку M пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ проведена секущая, параллельная стороне AB и пересекающая три другие его стороны или их продолжения соответственно в точках P, Q, R (точка R лежит на прямой CD). Доказать, что образовавшиеся отрезки на секущей удовлетворяют равенству: $RM^2 = RP \cdot RQ$.

235. В плоскости треугольника ABC взята точка M, через которую проведены прямые AM, BM, CM, встречающие стороны треугольника соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = 2,$$

где
$$\alpha_1 = \frac{AM}{MA_1}, \quad \alpha_2 = \frac{BM}{MB_1}, \quad \alpha_3 = \frac{CM}{MC_1}.$$

236. На прямой даны две пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2. Доказать, что на прямой существует единственная точка P такая, что для нее выполняется равенство: $PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$.

237. Через центроид G треугольника проведена секущая, встречающая стороны треугольника или их продолжения соответственно в точках P, Q, R. Доказать, что

$$\frac{1}{GP} = \frac{1}{GQ} + \frac{1}{GR},$$

если точки Q и R лежаг по одну сторону от G.

238. На медиане CM_3 треугольника ABC дана точка M так, что $\frac{CM}{MM_3}=\alpha$. Через точку M проведена произвольная секущая, встречающая стороны AB, BC, CA треугольника или их продолжения соответственно в точках P, Q, R, из которых точки Q и R лежат по одну сторону от точки M. Доказать, что

$$\frac{1}{MQ}+\frac{1}{MR}=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{MP}.$$

239. Противоположные вершины одного параллелограмма расположены соответственно на противоположных сторонах (или на их продолжениях) другого параллелограмма. Доказать, что оба параллелограмма имеют общий центр симметрии.

240. На медиане CM_3 треугольника ABC дана точка M. Через нее проведены прямые AM и BM, пересекающие стороны BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Доказать, что отрезок A_1B_1 делится медианой CM_3 пополам и параллелен стороне AB.

241. Прямая встречает стороны треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 расположены на одной прямой. Проверить справедливость обратной теоремы.

242. Через вершину A параллелограмма $AMNK$ проведена прямая, пересекающая диагональ MK и стороны KN и MN или их продолжения соответственно в точках B, C, D. Доказать, что

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD},$$

где AB, AC, AD — направленные отрезки.

243. Через вершины A и B треугольника ABC проведены произвольные прямые, пересекающие стороны BC и AC соответственно в точках M и N; через последние проведены прямые, соответственно параллельные BN и AM и встречающие AC в точке L и BC в точке K. Доказать, что прямые LK и AB параллельны.

244. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции, есть среднее гармоническое между ее основаниями.

245. Доказать, что отрезок, параллельный основаниям трапеции и являющийся их средним геометрическим, делит своими концами боковые стороны трапеции в отношении $\sqrt{\frac{a}{c}}$, где a и c — длины оснований трапеции.

246. Построены три параллелограмма с соответственно параллельными сторонами, имеющие стороны данного треугольника своими диагоналями. Доказать, что вторые диагонали этих параллелограммов пересекаются в одной точке.

247. Противоположные стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ разделены соответственно точками M и N в равных отношениях, считая от вершин A и D. Доказать, что отрезок MN делит

среднюю линию четырехугольника в том же отношении и делится сам средней линией пополам.

248. Противоположные стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ разделены соответственно точками M и N в отношении $m : n$, считая от вершин A и B, а две другие стороны разделены аналогично точками E и F в отношении $p : q$. Доказать, что точка пересечения Q прямых MN и EF делит отрезок EF в отношении $m : n$, а отрезок MN — в отношении $p : q$.

249. Через вершину D параллелограмма $ABCD$ проведена одна прямая, пересекающая стороны AB и BC соответственно в точках P и M, и другая прямая, пересекающая эти же стороны соответственно в точках Q и N. Доказать, что

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{MC}{AQ} = \frac{NC}{AP}.$$

250. На стороне AB треугольника ABC дана точка P, через которую проведены прямые параллельно его медианам AM_1 и BM_2 и пересекающие соответствующие стороны треугольника в точках A_1 и B_1. Доказать, что середина отрезка A_1B_1, точка P и центроид G данного треугольника лежат на одной прямой.

251. В плоскости треугольника ABC дана точка P. Через центроиды G_3, G_1, G_2 треугольников ABP, BCP, CAP проведены прямые, соответственно параллельные прямым CP, AP, BP. Доказать, что эти прямые пересекаются в центроиде данного треугольника.

252. В плоскости треугольника ABC взята точка P, через которую проведены прямые, параллельные медианам треугольника и пересекающие соответственные стороны в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что центроид треугольника $A_1B_1C_1$ лежит в середине M отрезка, соединяющего точку P и центроид данного треугольника.

253. Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имеют общий центроид. Доказать, что если прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 параллельны, то соответствующие стороны треугольников пересекаются в точках, которые с общим центроидом расположены на одной прямой. Доказать обратную теорему.

254. Точка Q симметрична точке пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ относительно середины отрезка, соединяющего середины K и L этих диагоналей. Через точку Q проведена прямая, параллельная прямой KL. Доказать, что отрезок построенной прямой, заключенный между стороной AD и диагональю AC, равен отрезку этой прямой, заключенному между стороной BC и диагональю BD.

255. Прямые AB, AC, AD пересечены прямой соответственно в точках P, Q, R. Доказать, что если точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма (AC — диагональ), то между образовавшимися отрезками имеет место соотношение:

$$\frac{AB}{AP} + \frac{AD}{AR} = \frac{AC}{AQ}$$

(отрезки предполагаются ориентированными).

256. На сторонах AB, BC, CD, DE пятиугольника $ABCDE$ даны соответственно точки P, Q, R, S так, что $AP:PB=DR:RC=k_1$, $BQ:QC=ES:SD=k_2$. На полученных отрезках PR и QS построены соответственно точки M и N так, что $PM:MR=k_2$, $SN:NQ=k_1$. Доказать, что отрезок MN параллелен стороне AE и $MN=\dfrac{AE}{(k_1+1)(k_2+1)}$.

257. На прямой даны три равных отрезка AB, BC, CD. Через точку S, не лежащую на данной прямой, проведены прямые SA, SB, SC, SD. Произвольная секущая, не проходящая через точку S, встречает последние прямые соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Доказать, что

$$\frac{AA_1}{A_1S}+\frac{DD_1}{D_1S}=\frac{BB_1}{B_1S}+\frac{CC_1}{C_1S}$$

(отрезки предполагаются ориентированными).

258. Прямая p пересекает стороны треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1, а чевианы, проведенные через фиксированную точку P, пересекают соответствующие стороны треугольника в точках P_1, P_2, P_3. Доказать, что

$$\frac{CP_2}{P_2A}:\frac{CB_1}{B_1A}+\frac{CP_1}{P_1B}:\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CP}{PP_3}:\frac{CQ}{QP_3},$$

где Q—точка пересечения прямых CP_3 и p (отрезки предполагаются ориентированными).

259. Прямая пересекает стороны CA и CB и медиану CM_3 треугольника ABC соответственно в точках B_1, A_1, M_0. Доказать, что образовавшиеся отрезки удовлетворяют равенству:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{AB_1}{B_1C}+\frac{BA_1}{A_1C}\right)=\frac{M_3M_0}{M_0C}$$

(отрезки предполагаются ориентированными).

260. 1) Противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ пересекаются соответственно в точках E и F. Прямые, проведенные через вершины четырехугольника параллельно данному направлению, пересекают прямую EF соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Доказать, что

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{CC_1}=\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{DD_1}.$$

2) Треугольник $A_1B_1C_1$ вписан в треугольник ABC и перспективен с ним. Через вершины обоих треугольников проведены прямые, параллельные данному направлению и пересекающие прямую

Дезарга этих треугольников соответственно в точках A', B', C', A_1', B_1', C_1'. Доказать, что

$$\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}=\frac{1}{A_1A_1'}+\frac{1}{B_1B_1'}+\frac{1}{C_1C_1'}$$

(отрезки предполагаются ориентированными).

261. Сторона AB треугольника ABC разделена точками C_1 и C_2 соответственно внутренним и внешним образом в одном и том же отношении $\frac{u}{v}$. Стороны BC и CA делятся аналогичным образом точками A_1 и A_2, B_1 и B_2 соответственно в отношениях $\frac{v}{w}$ и $\frac{w}{u}$. Доказать, что середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой.

262. Соответствующие вершины двух параллелограммов соединяются отрезками, которые разделены в равных отношениях, считая от вершин одного параллелограмма. Доказать, что точки деления также являются вершинами параллелограмма и что центры трех параллелограммов лежат на одной прямой.

§ 12. Метрические соотношения в треугольнике

263. Доказать, что для всякого прямоугольного треугольника справедливо неравенство: $a+b<c+h$.

264. На продолжениях сторон CA и CB треугольника ABC отложены отрезки AA_1 и BB_1, равные соответственно отрезкам AL_3 и BL_3, где L_3 — основание биссектрисы угла C. Доказать, что точка L_3 есть инцентр треугольника A_1B_1C.

265. Доказать, что центр тяжести линейного треугольника совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника, вершины которого лежат в серединах сторон данного треугольника.

266. Доказать, что произведение расстояний вершины треугольника до его инцентра и соответствующего эксцентра равно произведению сторон треугольника, сходящихся в этой вершине.

267. Доказать, что если через вершину треугольника проведена внутри него секущая, рассекающая треугольник на два треугольника, каждый из которых подобен данному, то данный треугольник является прямоугольным и секущая проходит через вершину прямого угла перпендикулярно гипотенузе.

268. К окружности в конце M диаметра MN проведена касательная, на которой отложен отрезок AB. Прямые AN и BN пересекают окружность вторично в точках A_1 и B_1. Доказать, что треугольники NAB и NA_1B_1 подобны.

269. Внутри или вне данного угла через его вершину проведены два луча, образующие со сторонами угла равные углы. Доказать, что произведение расстояний двух точек, взятых соответственно на этих лучах, до одной стороны угла или ее продолжения равно произведению расстояний этих же точек до второй стороны угла или ее продолжения.

270. На биссектрисе угла дана точка, через которую проведена произвольная секущая, отсекающая на сторонах угла отрезки a и b. Доказать, что сумма $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ не зависит от направления секущей. Сформулировать и доказать обратную теорему.

271. На внешней биссектрисе угла дана точка, через которую проведена произвольная секущая, отсекающая от сторон угла или от продолжений обеих его сторон отрезки a и b. Доказать, что $\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right|$ не зависит от положения секущей. Сформулировать и доказать обратную теорему.

272. В треугольник ABC вписываются прямоугольники так, что две вершины каждого из них расположены на стороне AB, а две другие — на сторонах AC и BC. Доказать, что если основание AB равно соответствующей высоте треугольника, то периметры этих прямоугольников равны. Доказать обратную теорему.

273. Доказать, что если две стороны треугольника и высота, опущенная на третью сторону, удовлетворяют соотношению:

$$\frac{1}{h_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

то либо угол C прямой, либо абсолютное значение разности углов A и C равно $90°$.

274. На катете AC прямоугольного треугольника ABC отложен отрезок AN, равный радиусу вписанной окружности. Доказать, что прямая, определяемая точкой N и серединой M_1 катета BC, проходит через инцентр треугольника.

275. В прямоугольный треугольник и в два треугольника, которые образуются проведением высоты из вершины прямого угла, вписаны окружности соответственно радиусов r, r_1, r_2. Доказать, что $r^2=r_1^2+r_2^2$.

276. На гипотенузе AB (или ее продолжении) прямоугольного треугольника ABC взята точка P так, что $AP=m$, $BP=n$, $CP=k$. Доказать, что $a^2m^2+b^2n^2=c^2k^2$.

277. Доказать, что длина биссектрисы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, определяется по формуле: $l_3=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Как изменится эта формула для внешней биссектрисы?

278. Доказать, что расстояние от вершины C треугольника ABC до точки D, симметричной с центром описанной окружности относительно стороны AB, определяется по формуле:

$$CD^2=R^2+a^2+b^2-c^2.$$

279. Доказать, что если углы треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{9}{4},$$

то треугольник равносторонний.

280. Разность углов B и A треугольника ABC равна 90°. Доказать, что диаметр окружности, описанной около этого треугольника, определяется по формуле: $2R = \frac{b^2-a^2}{c}$.

281. Секущая, проведенная через вершину C треугольника ABC, делит его на два треугольника так, что радиусы вписанных в эти треугольники окружностей равны. Доказать, что отрезок секущей, заключенный внутри треугольника, равен

$$\sqrt{p(p-c)}.$$

282. На стороне AB треугольника ABC и на продолжении этой стороны даны соответственно точки M и N так, что имеет место пропорция $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NB}$. Доказать, что если угол MCN прямой, то CM есть биссектриса угла C данного треугольника.

283. На отрезке L_1L_2, соединяющем основания двух биссектрис треугольника ABC, взята произвольная точка. Доказать, что расстояние этой точки до стороны AB равно сумме расстояний этой же точки до двух других сторон треугольника.

284. Доказать, что для остроугольного треугольника ABC справедливо равенство:

$$AH \cdot AH_1 + BH \cdot BH_2 + CH \cdot CH_3 = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2),$$

где H, H_1, H_2, H_3 — ортоцентр и основания высот треугольника. Как изменится формула для тупоугольного треугольника?

285. Доказать, что инцентр треугольника ABC делит биссектрису угла C в отношении $\frac{a+b}{c}$, считая от вершины.

286. Доказать, что если прямая, проведенная через центроид и инцентр треугольника ABC, параллельна стороне AB, то между сторонами этого треугольника имеет место зависимость: $c = \frac{a+b}{2}$ Сформулировать и доказать обратную теорему.

287. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, чтобы точка касания стороны AB с вписанной в треугольник ABC окружностью делила отрезок, ограниченный основаниями высоты и медианы, пополам, есть равенство: $c = \frac{a+b}{2}$.

288. Доказать, что ортоцентр треугольника ABC делит его высоту CH_3 на отрезки, отношение которых, считая от вершины, равно

$$\frac{\cos C}{\cos A \cdot \cos B}.$$

289. Через каждую вершину треугольника проведена прямая, разделяющая периметр треугольника пополам. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.

290. На медиане CM_3 треугольника ABC дана точка P, через которую проведены прямые AP и BP, пересекающие стороны CB

и CA соответственно в точках A_1 и B_1. Доказать, что если $AA_1 = BB_1$, то треугольник равнобедренный.

291. На основании AB равнобедренного треугольника ABC дана точка P. Доказать, что $PC^2 = AC^2 - AP \cdot BP$. Выяснить, как изменится формула, если точка P расположена на продолжении основания AB.

292. Сторона AB разностороннего треугольника ABC наименьшая. На сторонах AC и BC отложены отрезки AD и BE, равные AB. Доказать, что

$$DE = \frac{c}{R}\sqrt{R(R-2r)}.$$

293. На продолжениях сторон CA и CB (за вершины A и B) треугольника ABC отложены отрезки AD и BE, равные третьей стороне AB. Доказать, что

$$DE = \frac{c}{R}\sqrt{R(R+2r_3)}.$$

294. Доказать, что радиус окружности, описанной около треугольника CDE (см. задачу № 293), равен расстоянию между инцентром треугольника и его эксцентром, расположенным внутри угла C.

295. На медиане CM_3 треугольника ABC дана точка P, через которую проведены прямые, параллельные сторонам CA и CB. Доказать, что если отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны между собой, то треугольник равнобедренный.

296. Через середины отрезков медиан треугольника, заключенных между вершинами и центроидом треугольника, проведены прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника и образующие второй треугольник. Доказать, что сумма квадратов расстояний любой точки плоскости до вершин одного треугольника равна сумме квадратов расстояний этой же точки до вершин другого треугольника.

297. Продолжения медиан треугольника пересекают описанную окружность соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что

$$\frac{AG}{GA_1} + \frac{BG}{GB_1} + \frac{CG}{GC_1} = 3,$$

где G — центроид треугольника ABC.

298. На сторонах треугольника ABC вне его построены подобные равнобедренные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1 (углы A_1, B_1, C_1 равны). Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

299. Доказать, что если радиус окружности, описанной около треугольника, равен диаметру вписанной в него окружности, то треугольник равносторонний.

300. Доказать, что радиус окружности, описанной около треугольника CDE (см. задачу 292), равен расстоянию между инцент-

ром треугольника ABC и центром описанной около него окружности.

301. Доказать, что произведение расстояний инцентра треугольника до его вершины и до соответствующего эксцентра равно произведению диаметров вписанной и описанной около этого треугольника окружностей.

302. Доказать, что расстояние d от вершины C треугольника ABC до инцентра может быть выражено формулой:

$$d^2=ab-4Rr.$$

303. Доказать, что если: 1) $\frac{1}{h_3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, то $\angle C\leqslant 120^\circ$, 2) $\frac{1}{m_3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, то $\angle C\geqslant 120^\circ$.

304. Биссектриса угла C пересекает описанную окружность в точке M. Доказать, что инцентр треугольника делит отрезок CM на части, произведение которых равно удвоенному произведению радиусов вписанной и описанной окружностей.

305. Через две вершины треугольника и его инцентр проведена окружность. Доказать, что отрезок касательной, проведенный к этой окружности из третьей вершины, есть среднее пропорциональное между сторонами треугольника, сходящимися в этой вершине.

306. Около треугольника ABC описана окружность. Касательная к окружности в вершине треугольника C пересекает противоположную сторону в точке D. Доказать, что точка D делит сторону AB внешним образом в отношении, равном отношению квадратов прилежащих сторон треугольника.

307. Доказать, что если между углами A и B треугольника ABC имеют место соотношения: 1) $A=2B$, 2) $A=3B$, то между сторонами существуют соответственно соотношения:

$$1)\quad a^2=b\,(b+c);$$

$$2)\quad c^2=\frac{1}{b}\,(a-b)\,(a^2-b^2).$$

308. В плоскости окружности дана точка. Доказать, что сумма квадратов расстояний этой точки до вершин вписанного в окружность правильного треугольника не зависит от положения последнего. Доказать справедливость этой теоремы для точки P, не лежащей в плоскости окружности.

309. Около треугольника ABC описана окружность. Доказать, что расстояние от центра O этой окружности до высоты CH_3 равно

$$\frac{|b^2-a^2|}{2c}.$$

310. Прямая отсекает от данного треугольника ABC равнобедренный треугольник BDE с равными сторонами BD и DE. Доказать, что отношение неравных сторон треугольника BDE равно

$$\frac{|a^2-b^2+c^2|}{ac}.$$

311. Доказать, что если отрезок высоты остроугольного треугольника, прилежащий к вершине, больше, равен или меньше радиуса описанной окружности, то угол при этой вершине соответственно меньше, равен или больше $60°$.

312. Доказать, что расстояние от ортоцентра треугольника ABC до его вершины C равно $AB\,|\mathrm{ctg}\, C|$.

313. Доказать, что расстояние между ортоцентром H и центром O описанной около треугольника окружности вычисляется по формуле:

$$OH^2=R^2\,(1-8\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C).$$

314. Доказать, что расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных на две стороны треугольника из основания высоты, проведенной к третьей стороне, не зависит от выбора высоты.

315. Медиана CM_3 треугольника ABC образует со стороной AB острый угол ε. Доказать, что

$$\mathrm{ctg}\,\varepsilon=\frac{1}{2}\,|\mathrm{ctg}\,A-\mathrm{ctg}\,B|.$$

316. Доказать, что длина биссектрисы l_3 треугольника ABC может быть вычислена по формуле:

$$l_3=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}.$$

317. Доказать, что для всякого треугольника справедливо тождество:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=\frac{CH}{R}.$$

318. Из основания H_3 высоты CH_3 треугольника ABC опущены на стороны AC и BC перпендикуляры H_3M и H_3N. Доказать, что отношение, в котором прямая MN делит высоту CH_3, равно $|\mathrm{tg}\, A\cdot\mathrm{tg}\, B|$.

319. Через вершину C треугольника ABC внутри него проведены две прямые, образующие со сторонами CA и CB равные углы и пересекающие третью сторону AB соответственно в точках M и N. Доказать, что

$$\frac{CA^2}{CB^2}=\frac{AM\cdot AN}{BM\cdot BN}.$$

320. Внутренняя и внешняя биссектрисы угла C треугольника ABC равны. Доказать, что между сторонами этого треугольника существует зависимость: $(b^2-a^2)^2=c^2\,(a^2+b^2)$. Проверить справедливость обратной теоремы.

321. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что котангенсы двух углов этого треугольника удовлетворяют условию:

$$\mathrm{ctg}\frac{B}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{A}{2}=3.$$

322. Через инцентр треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне AB. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника, равен

$$\frac{c\,(a+b)}{a+b+c}.$$

323. Доказать, что для всякого треугольника ABC справедлива зависимость:

$$O'A \cdot O'B \cdot O'C = 4Rr^2,$$

где O' — инцентр, а r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей этого треугольника.

324. В плоскости равностороннего треугольника дана произвольная прямая. Доказать, что расстояния m, n, p вершин треугольника до прямой и высота треугольника связаны соотношением:

$$(m-n)^2+(n-p)^2+(p-m)^2=2h^2.$$

325. В плоскости равностороннего треугольника со стороной a дана точка, расстояния которой от вершин треугольника равны m, n и p. Доказать, что указанные выше отрезки удовлетворяют равенству:

$$a^4+m^4+n^4+p^4=a^2m^2+a^2n^2+a^2p^2+m^2n^2+n^2p^2+m^2p^2.$$

326. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ так, что точки A_1, B_1, C_1 делят соответственно стороны BC, CA и AB в равных отношениях при определенном обходе контура треугольника. Доказать, что оба треугольника могут быть равносторонними только одновременно.

327. Доказать, что если сумма квадратов расстояний центроида треугольника до его вершин равна утроенному квадрату радиуса окружности, описанной около треугольника, то треугольник равносторонний.

328. Доказать, что если углы A, B, C треугольника ABC удовлетворяют равенству:

$$3\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{3A}{2}\cdot\sin\frac{3B}{2}\cdot\cos\frac{3C}{2}=0,$$

то стороны треугольника связаны зависимостью:

$$a^3+b^3=c^3.$$

329. В окружность вписан треугольник ABC; через точки A, B и C проведены касательные к окружности, которые образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Доказать, что произведение расстояний любой точки окружности до сторон одного треугольника равно произведению расстояний этой точки до сторон другого треугольника.

330. В вершине C треугольника ABC проведена касательная к окружности, описанной около треугольника. Доказать, что произведение расстояний любой точки окружности до касательной

и стороны AB равно произведению расстояний этой же точки до двух других сторон треугольника.

331. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольника с проекциями инцентра треугольника на его соответствующие серединные перпендикуляры, пересекаются в одной точке.

§ 13. Метрические соотношения в четырехугольнике

332. Доказать, что если биссектрисы двух противолежащих углов четырехугольника пересекаются на одной диагонали, то биссектрисы двух других углов пересекаются на другой диагонали.

333. Доказать, что произведение квадратов диагоналей параллелограмма, угол которого равен 45°, равно сумме четвертых степеней двух прилежащих его сторон.

334. Суммы квадратов противоположных сторон четырехугольника равны. Доказать, что диагонали четырехугольника перпендикулярны.

335. Диагональ четырехугольника является биссектрисой только одного из его углов. Доказать, что квадрат этой диагонали равен

$$ab+\frac{ac^2-bd^2}{a-b}.$$

где a, b, c, d — длины сторон четырехугольника, а диагональ сходится со сторонами длины a и b в одной вершине.

336. Каждая из двух противоположных сторон четырехугольника разделена на части, пропорциональные двум другим прилежащим сторонам четырехугольника. Доказать, что последние две стороны одинаково наклонены к прямой, соединяющей точки деления.

337. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон, увеличенной на удвоенное произведение оснований.

338. Доказать, что если a и c $(a>c)$ — основания трапеции, то

$$\frac{e^2+f^2}{a^2-b^2}=\frac{a+c}{a-c},$$

где e и d — длины диагонали и боковой стороны, исходящих из одной вершины большего основания, f и b — длины второй диагонали и второй боковой стороны.

339. Доказать, что если b и d — длины боковых сторон трапеции, а e и f — длины ее диагоналей, то $|e-f|>|b-d|$.

340. Доказать, что сумма диагоналей трапеции больше суммы ее боковых сторон.

341. Доказать, что если угол, под которым пересекаются противоположные стороны выпуклого четырехугольника при их продолжении, прямой, то сумма квадратов двух других сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей.

342. Диагонали четырехугольника перпендикулярны. Из точки пересечения диагоналей на стороны четырехугольника опущены

перпендикуляры, которые продолжены до пересечения с противоположными сторонами соответственно в точках M, N, K, L. Доказать, что $MNKL$ — прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям данного четырехугольника.

343. Диагонали четырехугольника перпендикулярны. Из точки O пересечения диагоналей на две смежные стороны опущены перпендикуляры OM и ON, которые продолжены до пересечения с двумя другими сторонами соответственно в точках P и Q. Доказать, что четырехугольник $MNPQ$ вписуем в окружность.

344. Доказать, что всякая сторона четырехугольника может быть выражена через три другие стороны и два угла, прилежащие к противоположной стороне, по формуле:

$$a^2=b^2+c^2+d^2-2bc\cos C-2cd\cos D-2bd\cos(C+D).$$

345. Доказать, что диагонали e и f и пары противоположных сторон a, c и b, d четырехугольника удовлетворяют неравенству:

$$e^2+f^2\leqslant b^2+d^2+2ac.$$

Выяснить, в каком случае имеет место равенство.

346. Доказать, что для всякого четырехугольника сумма квадратов его сторон не меньше суммы квадратов его диагоналей.

347. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ являются биссектрисами его углов A и B. Доказать, что для всякой точки, расположенной внутри четырехугольника, сумма ее расстояний до сторон AD и BC больше, чем расстояние до стороны AB.

348. Произведения косинусов противолежащих углов четырехугольника равны. Доказать, что четырехугольник есть трапеция или параллелограмм.

349. На плоскости дан четырехугольник $ABCD$. Для трех точек M, расположенных в его плоскости, но не лежащих на одной прямой, выполняется равенство: $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$. Доказать, что данный четырехугольник — прямоугольник.

350. Боковые стороны четырехугольника повернуты около своих середин на 90°. Доказать, что если данный четырехугольник — трапеция, то полученные четыре точки являются вершинами четырехугольника с равными диагоналями, и обратно.

351. Доказать, что диагонали трапеции выражаются через ее стороны по формулам:

$$e^2=ac+\frac{ad^2-cb^2}{a-c},\quad f^2=ac+\frac{ab^2-cd^2}{a-c},$$

где a и c — длины оснований трапеции.

352. Доказать, что отрезки диагонали e трапеции, на которые она делится другой диагональю, равны

$$\frac{c}{a+c}\sqrt{ac+\frac{ad^2-cb^2}{a-c}}\quad\text{и}\quad\frac{a}{a+c}\sqrt{ac+\frac{ad^2-cb^2}{a-c}},$$

где a и c — длины оснований трапеции.

353. Стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ разделены на части, пропорциональные двум другим прилежащим сторонам четырехугольника. Доказать, что квадрат расстояния между точками деления равен

$$\frac{bd}{(b+d)^2}(e^2+f^2+2bd-a^2-c^2).$$

Доказать, что расстояние между точками деления может быть вычислено по формуле:

$$t=\frac{2bd\cos\frac{\psi}{2}}{b+d}.$$

354. Построена биссектриса угла, образованного боковыми сторонами трапеции, продолженными до точки их пересечения. Доказать, что отрезок t этой биссектрисы, заключенный между основаниями трапеции, выражается через ее стороны формулой:

$$t^2=\frac{4bd}{(b+d)^2}(p-a)(p-c),$$

где p — полупериметр, а a и c — длины оснований трапеции.

355. Пользуясь теоремой Птолемея, доказать: а) теорему Пифагора; б) теорему о квадрате стороны треугольника, лежащей против острого угла и против тупого угла; в) теоремы сложения для синуса и косинуса острых углов; г) что если вершины A, B, C правильного треугольника ABC соединены с любой точкой P дуги BC описанной окружности, то $AP=BP+CP$; д) что если $ABCDEFG$ — правильный семиугольник, то

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$

356. Доказать, что для всякого вписанного четырехугольника абсолютное значение разности диагоналей не больше абсолютного значения разности пары противоположных сторон.

357. Доказать, что если сумма квадратов сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей, то четырехугольник — параллелограмм.

358. Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция с основаниями $2a$ и $2c$. Доказать, что $r^2=ac$.

359. На прямой, проходящей через точки пересечения E и F противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника, взята произвольная точка P, из которой на стороны четырехугольника опущены перпендикуляры. Доказать, что прямые, соединяющие основания перпендикуляров, опущенных на противоположные стороны, параллельны.

360. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность. Доказать, что произведение расстояний любой точки этой окружности до одной пары противоположных сторон равно произведению расстояний этой точки до другой пары противоположных сторон, а также и до его диагоналей.

361. В окружность вписан четырехугольник, произведения противоположных сторон которого равны. Доказать, что расстояния точки пересечения диагоналей четырехугольника до его сторон пропорциональны этим сторонам.

362. Около окружности описан квадрат. Произвольная касательная к окружности пересекает одну пару противоположных сторон квадрата (или их продолжений) в точках P и R, а другую пару — в точках Q и S. Доказать, что обе пары точек делят друг друга гармонически.

363. Доказать, что квадраты расстояний центра окружности, вписанной в четырехугольник, до двух его противоположных вершин относятся как произведение сторон четырехугольника, сходящихся в соответствующих вершинах.

Проверить справедливость теоремы для четырехугольников, описанных около окружности. Рассмотреть три случая: четырехугольник выпуклый, вогнутый, самопересекающийся.

364. На сторонах выпуклого четырехугольника с перпендикулярными диагоналями вне его построены подобные равнобедренные треугольники, оси симметрии которых являются серединными перпендикулярами сторон данного четырехугольника. Доказать, что вершины этих равнобедренных треугольников, из которых стороны данного четырехугольника видны под равными углами, являются вершинами четырехугольника с равными диагоналями.

365. Доказать, что биссектрисы углов, образованных при продолжении противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника, пересекают стороны этого четырехугольника в точках, являющихся вершинами ромба, стороны которого параллельны диагоналям четырехугольника.

366. Биссектрисы углов, образованных при продолжении противоположных сторон выпуклого четырехугольника, пересекают какую-либо пару смежных сторон четырехугольника соответственно в точках M и N. Доказать, что если прямая MN параллельна диагонали четырехугольника, то около него можно описать окружность или же у четырехугольника два противоположных угла равны.

367. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность O и описан около окружности O'. Доказать, что точки касания вписанной окружности делят противоположные стороны AB и DC (AD и BC) в равных отношениях.

368. Четырехугольник вписан в окружность и описан около окружности. Доказать, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, перпендикулярны.

§ 14. Метрические соотношения в окружности

369. Дуги AM и BM двух окружностей радиуса AB пересекаются в точке M. В полученный криволинейный треугольник AMB впи ана окружность радиуса r. Доказать, что $r=\frac{3}{8}AB$.

370. Около треугольника ABC описана окружность. Через основания высот AH_1 и BH_2 проведена прямая H_1H_2, встречающая окружность в точках P и Q, а продолжение третьей стороны в точке S. Доказать, что $SP \cdot SQ=SH_1 \cdot SH_2$.

371. К окружности в точке M диаметра MN проведена касательная. Через концы хорды AB, параллельной MN, проведены прямые NA и NB, пересекающие касательную в точках P и Q. Доказать, что произведение $MP \cdot MQ$ не зависит от выбора параллельной хорды.

372. В концах диаметра AB окружности O проведены касательные. Касательная, проведенная в точке M окружности O, пересекает касательные и диаметр AB соответственно в точках K, L и N. Доказать, что $\frac{KM}{ML}=\frac{KN}{NL}$.

373. Из точки S к окружности O проведены две касательные ST_1 и ST_2. Касательная, проведенная в любой точке M окружности, пересекает соответственно ST_1, ST_2, T_1T_2 в точках K, L, N. Доказать, что

$$\frac{KM}{ML}=\frac{KN}{NL}.$$

374. Через точку M, лежащую внутри окружности, проведена хорда AB. Расстояние точки M до касательных к окружности, проведенных в точках A и B, равны m и n. Доказать, что сумма $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ не зависит от направления хорды. Доказать, что если точка M лежит вне окружности, то разность $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$ (по абсолютному значению) не зависит от положения хорды.

375. Внутри окружности O дана точка M, через которую проведена хорда AB. Доказать, что произведение

$$\operatorname{tg}\frac{\angle AOM}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle BOM}{2}$$

не зависит от направления хорды. Выразить это произведение через радиус окружности и расстояние точки M от центра. Проверить справедливость теоремы для точки M, лежащей вне окружности.

376. Из точки S проведены к окружности O касательные ST_1 и ST_2. На хорде T_1T_2 взята произвольная точка M, через которую проведена прямая, перпендикулярная к OM. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный внутри угла T_1ST_2, делится точкой M пополам.

377. Из точек A и B, лежащих вне окружности, проведены к к ней касательные AT_1 и BT_2. Доказать, что отрезок AB делится прямой T_1T_2 в отношении $AT_1 : BT_2$. Рассмотреть два случая, соответствующие внутреннему и внешнему делению ($AT_1 \neq BT_2$).

378. В вершине A вписанного в окружность треугольника ABC проведена касательная. Прямая, параллельная стороне BC, пересекает две другие стороны треугольника в точках M и N, окружность — в точках P и Q, касательную — в точке S. Доказать, что $SM \cdot SN = SP \cdot SQ$.

379. В вершине A вписанного в окружность треугольника ABC проведена касательная. Прямая, параллельная стороне AB, пересекает две другие стороны в точках M и N, окружность — в точках P и Q и касательную — в точке S. Доказать, что $NS \cdot MN = NP \cdot NQ$.

380. Две пересекающиеся окружности имеют общую хорду AB, через произвольную точку которой проведены наименьшие хорды этих окружностей. Доказать, что концы последних двух хорд являются вершинами прямоугольника.

381. Через точку A пересечения двух окружностей проведены секущие CAD и EAF. Доказать, что отношение отрезков EF и CD равно отношению их расстояний от точки B — второй точки пересечения этих окружностей.

382. На диагоналях трапеции, как на диаметрах, описаны окружности. Доказать, что общая хорда этих окружностей перпендикулярна основаниям трапеции и проходит через точку пересечения непараллельных сторон.

383. В окружность вписан четырехугольник, у которого произведения противоположных сторон равны. Доказать, что касательные к окружности в противоположных вершинах четырехугольника пересекаются соответственно на диагоналях или параллельны им.

384. В точке K окружности O проведена к ней касательная, на которой последовательно от точки K отложены два равных отрезка KM и MN. Прямая, проведенная через точку N и точку L, диаметрально противоположную точке K, встречает окружность в точке P. Доказать, что прямая MP является касательной к окружности O.

385. К окружности в конце M диаметра MN проведена касательная, на которой последовательно отложены равные отрезки AB и BC. Прямые, проходящие через точку N и точки A, B, C встречают окружность в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что касательные к окружности в точках A_1 и C_1 пересекаются на прямой NB.

386. В окружность вписан четырехугольник. Доказать, что если касательные к окружности в двух противоположных вершинах пересекаются на одной диагонали, то две другие касательные, проведенные в оставшихся вершинах, пересекаются на другой диагонали или параллельны ей.

387. В окружность вписаны два перспективных четырехугольника. Доказать, что если произведения противоположных сторон

одного четырехугольника равны между собой, то таким же свойством обладают стороны второго четырехугольника.

388. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена произвольная окружность, пересекающая прямую AB в точке B', прямую AC — в точке C', прямую AD — в точке D'. Доказать, что $AC \cdot AC' = AB \cdot AB' + AD \cdot AD'$.

389. Доказать теорему, обратную теореме Птолемея: если произведение диагоналей четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон, то около такого четырехугольника можно описать окружность.

390. Через точку E, в которой пересекаются две противоположные стороны четырехугольника, вписанного в окружность, проведена к окружности касательная ET. Доказать, что если одна диагональ четырехугольника параллельна касательной, то другая диагональ делит отрезок ET пополам, и обратно.

391. Даны две пересекающиеся окружности и проведена прямая, проходящая через точки их пересечения. Доказать, что квадрат отрезка касательной, проведенной из любой точки одной окружности к другой, пропорционален расстоянию этой точки до прямой.

392. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Из точки B, взятой на одной окружности, проведена касательная BT к другой окружности. Доказать, что отношение $BA : BT$ не зависит от выбора точки B на первой окружности.

393. Две окружности разных радиусов касаются в точке K, через которую проведена в одной окружности хорда KA, а в другой — перпендикулярная ей хорда KB. Доказать, что прямая AB проходит через центр гомотетии окружностей. Как изменится теорема, если окружности равны?

394. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Общая внешняя касательная этих окружностей касается их соответственно в точках T_1 и T_2. Доказать, что расстояния хорд KT_1 и KT_2 до соответствующих центров относятся как кубы этих хорд.

395. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A исходят хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей. Доказать, что прямые BC и BD симметричны относительно прямой AB, а отрезки BC и BD относятся, как радиусы данных окружностей.

396. Доказать, что для всякой хорды AB данной окружности отношение $AB^2 : d$, где d — расстояние точки A до касательной к окружности в точке B, есть величина постоянная.

397. К окружности в конце M ее диаметра MN проведена касательная, на которой по разные стороны от точки M отложены пары отрезков MA и MB, произведение которых постоянно. Прямые, проходящие через точку N и точки A и B, пересекают окружность вторично в точках C и D. Доказать, что хорды CD проходят через одну и ту же точку или параллельны между собой.

398. На параллельных касательных к окружности даны по точке, из которых к этой окружности проведены вторые касательные. Доказать, что произведение расстояний данных двух точек до точ-

ки пересечения этих касательных равно квадрату расстояния ее до центра окружности.

399. Общие внешние касательные двух окружностей определяют четыре точки касания, являющиеся вершинами описанного четырехугольника. Доказать, что при этом условии окружности касаются.

400. Общие внутренние касательные двух окружностей определяют четыре точки касания, являющиеся вершинами четырехугольника, описанного около окружности. Доказать, что расстояние между центрами окружностей выражается через их радиусы формулой:

$$d^2=(R+r)^2+4Rr.$$

401. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены к ней две касательные AT_1 и AT_2. Из произвольной точки M окружности выходят три луча MM_1, MT_1, MT_2, образующие с касательной в точке M к окружности соответственно углы ε, φ, ψ (M_1 — вторая точка пересечения прямой AM с окружностью). Доказать, что указанные выше углы связаны соотношением:

$$\operatorname{ctg}\varepsilon=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}\psi).$$

402. Три окружности имеют две общие точки. Через одну из этих точек проходит секущая, встречающая данные окружности вторично в трех точках. Доказать, что простое отношение этих трех точек не зависит от направления секущей.

403. Дан отрезок AB, равный a. Проведены две окружности радиуса a с центрами в точках A и B, пересекающиеся в точке C. В криволинейный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся отрезка AB в точке M, а дуги AC — в точке N. Доказать, что радиус окружности, вписанной в криволинейный треугольник AMN, равен $\frac{27-12\sqrt{2}}{98}a$.

404. Даны треугольник ABC и точка M, не принадлежащая его сторонам или их продолжениям. В точке M к окружностям, проходящим через тройки точек (A, B, M), (B, C, M) и (C, A, M), проведены касательные, пересекающие соответственно стороны AB, BC и CA в точках P, Q, и R. Доказать, что эти три точки лежат на одной прямой.

405. Две окружности радиусов r_1 и r_2 касаются внешним (внутренним) образом окружности O радиуса r в точках, расстояние между которыми равно m. Доказать, что длина t_{12} общей внешней касательной первых двух окружностей определяется по формуле:

$$t_{12}=\frac{m}{r}\sqrt{(r\pm r_1)(r\pm r_2)}$$

(знак минус соответствует внешнему касанию).

406. Четыре окружности O_i $(i=1,2,3,4)$ касаются последовательно внешним (внутренним) образом некоторой окружности O.

Доказать, что отрезки t_{ik} общих внешних касательных каждой пары окружностей O_i связаны соотношением:

$$t_{12}\cdot t_{34}+t_{23}\cdot t_{41}=t_{13}\cdot t_{24}.$$

Проверить справедливость этого равенства для случая, когда данные четыре окружности касаются прямой и расположены по одну сторону от прямой.

407. На плоскости даны ориентированная прямая t и ориентированная окружность O. Через точку M прямой t проведены к окружности две касательные t_1 и t_2, направленные в соответствии с ориентацией окружности. Доказать, что произведение

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

не зависит от положения точки M на прямой t (α и β — ориентированные углы, образованные прямыми t_1 и t_2 с прямой t). Выразить полученную постоянную через радиус окружности и расстояние прямой от центра.

§ 15. Геометрические места

408. Вершины треугольников, имеющих общее основание, расположены на одной прямой. Доказать, что геометрическое место центроидов этих треугольников есть прямая.

409. Переменная секущая отсекает на сторонах данного угла отрезки, считая от вершины, сумма которых постоянна. Доказать, что геометрическое место центроидов образовавшихся треугольников есть отрезок.

410. На одной прямой дан ряд точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, а на другой прямой — ряд точек $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$, причем

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_3A_4}{B_3B_4}=\ldots=\frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}.$$

Доказать, что геометрическое место точек, делящих отрезки A_iB ($i=1, 2, 3, \ldots, n$) в равных отношениях, есть прямая или точка.

411. Переменный n-угольник деформируется так, что все его стороны остаются параллельными самим себе, а $n-1$-вершина его перемещается соответственно по $n-1$-прямым. Доказать, что последняя вершина при этом описывает прямую.

412. В треугольник вписано семейство параллелограммов, стороны которых параллельны двум данным направлениям, причем две вершины каждого параллелограмма, определяющие его сторону, принадлежат одной и той же стороне треугольника, а две другие вершины расположены на двух других сторонах треугольника. Доказать, что геометрическое место центров построенных параллелограммов есть открытый отрезок.

413. В четырехугольник вписано семейство параллелограммов, стороны которых параллельны диагоналям четырехугольника. До-

казать, что геометрическое место центров этих параллелограммов есть открытый отрезок.

414. Доказать, что геометрическое место точек, расстояния которых до двух сторон треугольника обратно пропорциональны расстояниям их до соответствующих противолежащих вершин, есть окружность, описанная около треугольника.

415. Дана прямая t и точка A на ней. Доказать, что геометрическое место точек M, для которых отношение $\frac{MA^2}{d}$ есть величина постоянная (d — расстояние точки M до прямой t), есть пара окружностей.

416. Доказать, что геометрическое место точек, для каждой из которых произведение расстояний до боковых сторон данного равнобедренного треугольника равно квадрату расстояния до основания этого треугольника, есть окружность.

417. Доказать, что геометрическое место точек, расположенных внутри данного угла α ($\alpha > 60°$, $\alpha \neq 90°$), для каждой из которых сумма расстояний до сторон угла равна расстоянию до его вершины, есть два луча. Как изменится теорема, если

$$\alpha = 60°, \ \alpha < 60°, \ \alpha = 90°.$$

418. Дан равносторонний треугольник ABC. Доказать, что геометрическое место точек M, для каждой из которых справедливо равенство

$$MC^2 = MA^2 + MB^2,$$

есть окружность.

419. Доказать, что геометрическое место точек, из которых каждая имеет равные суммы расстояний до одной пары противоположных вершин прямоугольника и до другой пары его вершин, есть пара перпендикулярных прямых.

420. Через точку P, расположенную на стороне AB треугольника ABC, проведены прямые, параллельные медианам AM_1 и BM_2 и встречающие стороны BC и AC соответственно в точках N_1 и N_2. Доказать, что геометрическое место центроидов треугольников PN_1N_2, когда точка P описывает отрезок AB, есть отрезок.

421. Отрезки AC и BC, не принадлежащие одной прямой, делятся соответственно точками Q и P — один внешним, а другой внутренним образом — так, что $CA : AQ = CP : PB$, причем точки A и Q лежат по разные стороны от точки C. Доказать, что геометрическое место точек пересечения прямых AP и BQ есть полупрямая.

422. На прямой фиксирован отрезок AB. Через данную точку M этой прямой проведена прямая, на которой выбираются точки P и Q так, что отношение $\frac{MP}{MQ}$ постоянно. Доказать, что геометрическое место точек пересечения прямых AP и BQ есть прямая.

423. В треугольник ABC вписан квадрат $MNKL$ так, что его вершины L и K лежат на стороне AB (или ее продолжении), а вершины M и N — соответственно на сторонах AC и BC. Доказать, что геометрическое место вершин M и N квадратов при условии, что вершина C данного треугольника перемещается по прямой, не параллельной стороне AB, есть пара прямых.

424. В треугольник ABC вписан квадрат (см. задачу 423). Доказать, что геометрическое место центров квадратов есть прямая, если вершина C треугольника перемещается по прямой, параллельной стороне AB.

425. Прямые m и n параллельны соответственно двум сторонам треугольника, и отрезки этих прямых, заключенные соответственно между двумя другими сторонами треугольника, равны. Доказать, что геометрическое место точек пересечения прямых m и n есть отрезок прямой.

426. Дано семейство трапеций с общим основанием AD, у которых стороны AB и BC имеют постоянную длину. Доказать, что геометрическое место точек пересечения диагоналей трапеций данного семейства есть окружность.

427. Внутри окружности дана точка M, из которой проводятся пары взаимно перпендикулярных лучей, определяющие своим пересечением с окружностью две точки. Доказать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки M на прямые, соединяющие эти пары точек, есть окружность.

428. На прямой даны две пары точек A, B, и C, D (все четыре точки различны). Доказать, что геометрическое место точек P, для которых окружности, проведенные через тройки точек A, B, P и C, D, P, касаются в точке P, есть окружность.

429. Через точку A, являющуюся одной из точек пересечения двух окружностей, проведена переменная прямая, пересекающая окружности вторично в точках M и N. Отрезок MN разделен точкой P в отношении k. Доказать, что геометрическое место точек P есть окружность.

430. Доказать, что геометрическое место точек, отношение расстояний которых до диагоналей трапеции обратно отношению их длин, есть пара прямых, из которых одна параллельна основаниям трапеции, а другая проходит через середины этих оснований.

431. Доказать, что геометрическое место точек, из которых каждая имеет фиксированное отношение степеней относительно двух данных окружностей, есть окружность или, в частности, прямая.

432. Даны две точки. Доказать, что все прямые, по отношению которых данные точки лежат по одну сторону и md_1+nd_2 есть величина постоянная (m и n — положительные числа, d_1 и d_2 — расстояния данных точек до прямой), касаются одной и той же окружности.

433. Из точки M, лежащей внутри треугольника ABC, на его стороны опущены перпендикуляры MK, ML, MN. Доказать, что

совокупность точек M, для которых из отрезков MK, ML и MN можно построить треугольник, расположена внутри треугольника, вершины которого совпадают с основаниями биссектрис треугольника ABC.

§ 16. Смешанные задачи

434. 1) Даны угол и его биссектриса. Произвольная окружность, проходящая через вершину угла, отсекает на сторонах угла и его биссектрисе соответственно отрезки a, b, l. Доказать, что отношение

$$\frac{a+b}{l}$$

не зависит от положения окружности.

2) Даны угол и его внешняя биссектриса. Произвольная окружность, проходящая через вершину угла, отсекает на сторонах угла и его биссектрисе отрезки a, b, l. Доказать, что отношение

$$\frac{|a-b|}{l}$$

не зависит от положения окружности.

435. Две пары перпендикулярных прямых образуют четыре подобных треугольника. Гипотенузы этих треугольников делятся в одном и том же отношении, считая от сходственных вершин. Доказать, что точки деления являются вершинами прямоугольника.

436. Доказать, что высота h прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, и радиус r вписанной окружности связаны неравенством:

$$h\leqslant r(1+\sqrt{2}).$$

437. Внутри (вне) данного угла S через его вершину проведены два луча, образующие со сторонами угла равные углы. Доказать, что произведение расстояний двух точек, взятых соответственно на этих лучах, до одной стороны угла равно произведению расстояний этих точек до другой стороны угла.

438. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей. Доказать, что

$$\frac{AC^2}{AD^2}=\frac{BC}{BD}.$$

439. В квадрат вписана окружность единичного радиуса. Доказать, что расстояния a, b, c, d любой точки окружности до вершин квадрата связаны соотношением:

$$a^2c^2+b^2d^2=10.$$

440. На двух сторонах CA и CB треугольника ABC вне его построены квадраты. Стороны квадратов, противолежащие сторонам треугольника, продолжены до взаимного пересечения. Доказать, что прямая, проведенная через полученную точку S и общую вер-

шину C квадратов, делит третью сторону треугольника на отрезки, пропорциональные квадратам прилежащих сторон треугольника.

441. Через вершину A равностороннего треугольника ABC проведена секущая, встречающая сторону BC в точке M, а прямую, проведенную через вершину C параллельно стороне AB, в точке N. Доказать, что

$$\frac{1}{m^2} - \frac{1}{mn} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2},$$

где $m=AM$, $n=AN$, a — сторона треугольника.

442. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Доказать, что если CC_1 есть биссектриса угла $A_1C_1B_1$, то CC_1 есть высота треугольника ABC.

443. Стороны треугольника ABC по обходу его контура разделены в одном и том же отношении $2 : (1+\sqrt{5})$ точками A_1, B_1, C_1. Доказать, что средние линии треугольника $A_1B_1C_1$ проходят через вершины данного треугольника.

444. На средних линиях равностороннего треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что: 1) эти точки можно выбрать так, чтобы прямая C_1A_1 проходила через точку A; прямая A_1B_1 — через точку B, прямая B_1C_1 — через точку C; 2) треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний; 3) точка C_1 делит среднюю линию M_1M_2 в отношении $(1+\sqrt{5}) : 2$. Исследовать решение при условии, что точки A_1, B_1, C_1 находятся на продолжениях средних линий.

445. Из вершин треугольника ABC опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на произвольную прямую. Из точек A_1, B_1, C_1 — оснований этих перпендикуляров — опущены перпендикуляры A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно на стороны BC, CA, AB. Доказать, что последняя тройка перпендикуляров проходит через одну точку.

446. Через центр O равностороннего треугольника ABC со стороной a проведена прямая A_1B_1, отсекающая от сторон AC и BC отрезки x и y ($x=AB_1$, $y=BA_1$). Доказать, что эти отрезки удовлетворяют уравнению:

$$3xy - 2a(x+y) + a^2 = 0.$$

447. Перпендикуляры, опущенные из вершин одного треугольника на соответствующие стороны другого треугольника, пересекаются в одной точке. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из вершин второго треугольника на соответствующие стороны первого, также пересекаются в одной точке.

448. В плоскости треугольника ABC дана точка M, через которую проведены прямые, перпендикулярные к MA, MB и MC. Доказать, что точки пересечения A_1, B_1, C_1 этих перпендикуляров с соответствующими сторонами треугольника лежат на одной прямой.

449. Высоты AH_1 и BH_2 треугольника ABC продолжены за вершины и на их продолжениях отложены соответственно отрезки AA_2 и BB_2, равные BC и AC. Доказать, что отрезки A_2C и B_2C перпендикулярны и равны.

450. В серединах M_3, M_1, M_2 сторон AB, BC, CA треугольника ABC восставлены к ним перпендикуляры, на которых вне треугольника отложены отрезки M_3C_1, M_1A_1, M_2B_1, соответственно равные половинам сторон AB, BC, CA. Доказать, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 соответственно равны и перпендикулярны отрезкам B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1, а также, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

451. Доказать, что если высоты и радиус вписанной в треугольник окружности удовлетворяют равенству

$$h_1+h_2+h_3=9r,$$

то треугольник равносторонний.

452. Стороны треугольника разделены в равных отношениях при одном обходе его контура и при противоположном обходе. Доказать, что если оба треугольника, вершинами которых являются соответственно обходу точки деления, имеют по две соответственно равные стороны, то данный треугольник равносторонний.

453. Доказать, что, для того чтобы треугольник ABC был остроугольным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C<1,$$

а для того, чтобы он был тупоугольным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C>1.$$

454. Из вершины C треугольника ABC проведены медиана и биссектриса, образующие между собой угол α. Доказать, что

$$\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta,$$

где β — острый угол, образованный биссектрисой и стороной AB.

455. Доказать, что необходимое и достаточное условие параллельности прямой, проходящей через ортоцентр и центроид треугольника к его стороне AB, может быть выражено равенством:

$$\operatorname{tg}A\ .\ \operatorname{tg}B=3.$$

456. Около остроугольного треугольника ABC с углом C, равным 45°, описана окружность O. На стороне AB, как на диаметре, описана другая окружность, встречающая стороны AC и BC соответственно в точках M и N. Доказать, что отрезок MN перпендикулярен отрезку OC и что $MN=\frac{AB\sqrt{2}}{2}$.

457. Треугольник вписан в окружность. Касательные к окружности в вершинах треугольника образуют другой треугольник, периметр которого в два раза больше периметра данного треуголь-

ника. Доказать, что это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы данный треугольник был равносторонним.

458. Доказать, что во всяком треугольнике через любую его вершину можно провести секущую, разбивающую треугольник на такие два треугольника, что вписанные в них окружности касаются друг друга. Найти отношение, в котором секущая делит сторону треугольника.

459. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC, CA соответственно в точках M, N, K. Середины M_1, N_1, K_1 радиусов $O'M$, $O'N$, $O'K$ соединены соответственно с вершинами C, A, B. Доказать, что прямые AN_1, BK_1, CM_1 пересекаются в одной точке.

460. Доказать, что середина высоты треугольника, его инцентр и точка касания соответствующей вневписанной окружности со стороной треугольника, на которую опущена высота, расположены на одной прямой.

461. Доказать, что прямая, проведенная через вершину C треугольника ABC параллельно прямой, проходящей через его инцентр и середину стороны AB, делит периметр треугольника пополам.

462. Доказать, что если d_1, d_2, d_3 — расстояния инцентра треугольника до его вершин, то

$$d_1^2 : d_2^2 : d_3^2 = \frac{p-a}{a} : \frac{p-b}{b} : \frac{p-c}{c}.$$

Определить отношение:

$$d_1^2 : \frac{p-a}{a}.$$

463. Стороны треугольника пересечены прямой в точках A_1, B_1, C_1. На отрезках AA_1, BB_1, CC_1, как на диаметрах, построены окружности. Доказать, что эти три окружности принадлежат одному пучку.

464. На стороне треугольника взята точка, из которой на две другие стороны опущены перпендикуляры. Доказать, что расстояние между основаниями этих перпендикуляров будет наименьшим, если точка на стороне совпадает с основанием высоты треугольника. Выразить длину этого наименьшего отрезка через основные элементы треугольника.

465. Доказать, что если через вершину C треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе этого угла, то произведение расстояний вершин A и B до этой прямой будет больше, чем произведение расстояний этих же вершин до любой другой прямой, проходящей через ту же вершину.

466. Через вершину B параллелограмма $ABCD$ проведена секущая, встречающая продолжения сторон DA и DC соответственно в точках P и Q. Доказать, что сумма отрезков PA и CQ будет наименьшей, если каждый из этих отрезков равен $\sqrt{ab}$ (a и b — длины сторон параллелограмма).

467. Через вершину B трапеции $ABCD$ проведена секущая, встречающая продолжения сторон DA и DC трапеции соответствен-

но в точках P и Q. Доказать что если $PA=\sqrt{cd}-(a-c)$ (a — большее основание трапеции, c — меньшее основание, вершина A принадлежит большему основанию), то сумма отрезков PA и CQ будет наименьшей.

468. Доказать, что прямая, проходящая через середину стороны AB треугольника ABC и его инцентр, делит отрезок, соединяющий вершину C с точкой касания вписанной окружности со стороной AB, пополам.

469. Через инцентр треугольника ABC проведена переменная секущая, встречающая стороны CA и CB соответственно в точках P и Q. Доказать, что треугольник равносторонний, если

$$\frac{AP}{PC}+\frac{BQ}{QC}=1.$$

470. Сторона правильного пятиугольника равна a. Доказать, что диагональ пятиугольника равна: $d=\frac{a}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1)$.

471. Прямая m пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1, для которых построены на сторонах четвертые гармонические A_2, B_2, C_2 относительно вершин треугольника. Доказать, что середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой.

472. Доказать, что касательные, проведенные к окружности в вершинах вписанного разностороннего треугольника, пересекают его противоположные стороны в точках, расположенных на одной прямой.

473. Доказать, что если окружности, вписанные в треугольники, на которые данный треугольник разбивается своей медианой, равны, то данный треугольник равнобедренный.

474. Пользуясь формулой

$$e^2f^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(A+C),$$

связывающей стороны, диагонали и сумму противоположных углов четырехугольника, вывести теорему Стюарта (см. теорему № 26).

475. Дан четырехугольник $ABCD$, у которого угол D равен 30° и $AB=BC=CA$. Доказать, что на отрезках DA, DB, DC можно построить прямоугольный треугольник.

476. Пользуясь теоремой Птолемея, доказать теорему Стюарта, и обратно (см. теоремы № 17 и № 26)..

477. Стороны треугольника ABC удовлетворяют условию:

$$b^2+c^2\geqslant 5a^2.$$

Доказать, что сторона BC является наименьшей стороной треугольника.

478. В плоскости треугольника ABC дана точка M, из которой стороны его видны под углами в 120° (предполагается, что такая точка существует). Доказать, что: 1) квадрат суммы расстояний

этой точки до вершин треугольника равен $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+4(ABC))\sqrt{3}$; 2) сумма квадратов расстояний этой точки до вершин треугольника равна

$$\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2-\frac{4\,(ABC)}{\sqrt{3}}\right).$$

479. Касательная t к вписанной в треугольник ABC окружности пересекает его стороны AC и AB соответственно в точках B_1 и C_1. Доказать, что отрезки x и y ($AC_1=x$, $AB_1=y$) удовлетворяют уравнению:

$$pxy-bc\,(x+y)+bc\,(p-a)=0.$$

Доказать, что если отсекаемые прямой t отрезки x и y на сторонах AC и AB, считая от вершины A, удовлетворяют последнему уравнению, то эта прямая является касательной к вписанной окружности. Как изменится уравнение, если касательная t пересекает продолжение одной из сторон AB или AC?

480. Из точки A, лежащей вне окружности, проведены к ней две касательные AT_1 и AT_2 и секущая BD (B и D — точки пересечения с окружностью). Доказать, что точки A, B, C и D образуют гармоническую четверку, то есть

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC},$$

где точка C есть точка встречи хорды T_1T_2 и секущей.

481. В концах диаметра MN окружности O проведены касательные MK и NL. На касательной MK последовательно отложены равные отрезки AB и BC и из точек A, B и C к окружности проведены касательные, которые пересекают касательную NL соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что точки N, C_1, B_1, A_1 составляют гармоническую четверку.

482. Из точки S к окружности O проведены касательные ST_1 и ST_2, которые пересечены еще двумя касательными соответственно в точках M, M_1 и N, N_1. Доказать, что

$$\frac{T_1N}{NM}:\frac{TS}{SM}=\frac{SN_1}{N_1M_1}:\frac{ST_2}{T_2M_1}.$$

483. На окружности даны две четверки точек A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1, расположенные так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 пересекаются в одной точке. Доказать, что если одна четверка точек гармоническая, то и другая четверка точек также гармоническая.

484. На плоскости дана замкнутая выпуклая линия, обладающая тем свойством, что отрезки касательных, проведенных из каждой точки, расположенной во внешней области по отношению к линии, равны между собой. Доказать, что эта линия есть окружность.

485. Окружность O_3 касается окружностей O_1 и O_2. Доказать, что прямая, проходящая через точки касания, проходит через один

из центров подобия окружностей O_1 и O_2. Отдельно рассмотреть случай, когда радиусы окружностей O_1 и O_2 равны.

486. Дана окружность и точка P в ее плоскости. Доказать, что сумма квадратов расстояний этой точки до вершин вписанного прямоугольника не зависит от положения последнего.

487. Две окружности радиусов R и r касаются внутренним (внешним) образом ($R>r$). Доказать, что радиус r_0 окружности, касающейся данных двух окружностей и их линии центров, определяется по формуле:

$$r_0 = \frac{4Rr(R\mp r)}{(R\pm r)^2},$$

где верхние знаки соответствуют внутреннему касанию.

488. Через середину M хорды AB данной окружности проведены хорды CD и EF. Доказать, что прямые CE (CF) и DF (DE) пересекают прямую AB в точках, симметричных относительно точки M.

489. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательная MT и секущая, встречающая окружность в точках P и Q. Через концы C и D хорды CD, параллельной касательной MT, проведены прямые CP и CQ, встречающие последнюю в точках A и B. Доказать, что $TM^2=MA\cdot MB$.

490. Через концы диаметра AB некоторой окружности проведены прямые, пересекающиеся в точке M. Прямая AM пересекает окружность в точке D, а прямая BM — в точке C. Доказать, что

$$AB^2=AM\cdot AD\pm BM\cdot BC.$$

491. Около окружности описана равнобочная трапеция. Произвольная касательная пересекает одну пару противоположных сторон трапеции в точках P и R, а другую пару — в точках Q и S. Доказать, что

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{RS}{SR}.$$

492. В трапецию вписана окружность. Прямая, проходящая через точку касания на одном основании трапеции и точку пересечения ее боковых сторон, пересекает окружность в точке, в которой построена касательная. Доказать, что последняя делит второе основание трапеции пополам.

493. Доказать, что биссектрисы углов, образованных противоположными сторонами вписанного в окружность четырехугольника, пересекаются в точке, лежащей на прямой, проходящей через середины диагоналей четырехугольника.

494. В окружность вписан четырехугольник. Касательные в вершинах четырехугольника образуют описанный четырехугольник. Доказать, что произведение расстояний любой точки окружности до сторон вписанного четырехугольника равно произведению расстояний до сторон описанного четырехугольника. Проверить

правильность этой теоремы для вписанного n-угольника и соответствующего ему описанного n-угольника.

495. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, у которого касательные в противоположных вершинах пересекаются в точках M и N. Доказать, что: 1) противоположные стороны четырехугольника пересекаются на прямой MN и 2) полученная точка пересечения делит отрезок MN в отношении $MA : ND$.

496. В окружность O радиуса R вписан четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями, причем точка пересечения M диагоналей отстоит от центра O на расстоянии d_0. Доказать, что радиусы окружностей, вписанной и описанной около четырехугольника, вершинами которого являются основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны данного четырехугольника, соответственно равны

$$\frac{R^2-d_0^2}{2R} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\sqrt{2R^2-d_0^2}\,.$$

497. Около окружности описан четырехугольник. Доказать, что диагонали четырехугольника и прямые, проходящие через точки касания на противоположных сторонах, пересекаются в одной точке.

498. Через центр гомотетии двух окружностей, пересекающихся в точках A и B, проведена произвольная секущая. Доказать, что отрезок этой секущей, ограниченный гомотетичными точками, виден из точки A (B) либо под углом α, либо под углом $180°-\alpha$ (α).

499. Две окружности радиуса R и r касаются друг друга и сторон данного угла α. Доказать, что между радиусами окружностей и данным углом имеет место зависимость:

$$r = R\,\mathrm{tg}^2\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right).$$

500. В плоскости четырехугольника $ABCD$ взята точка M. Через точки A, B и M проведена окружность, касательная к которой в точке M пересекает сторону AB или ее продолжение в точке P. Касательная в точке M к окружности, проведенной через точки B, C и M, встречает сторону BC или ее продолжение в точке Q. Аналогично строятся точки R и S на сторонах CD и DA или их продолжениях. Доказать, что если точки P, Q, R, S лежат на одной прямой, то четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Доказать обратную теорему.

501. Пользуясь результатом задачи № 127 (обратная теорема Архимеда), доказать справедливость тождества

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

при условии, что сумма углов α и β не превосходит $180°$.

502. Доказать, что треугольник ABC равносторонний, если

$$R\,(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C)=2p.$$

503. В треугольник вписана окружность радиуса r. Построены три окружности, касающиеся двух сторон треугольника и вписанной окружности. Доказать, что между радиусами R_1, R_2, R_3 последних трех окружностей имеет место зависимость:

$$\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_3R_1}=r.$$

504. Точки A и B имеют равные степени относительно окружности. Секущая, проведенная через точку A, пересекает окружность в точках M и N, а секущая, проведенная через точку B, пересекает окружность в точках P и Q. Доказать, что прямые MP и NQ пересекают прямую AB в точках E и F, имеющих также равные степени относительно окружности.

505. Через вершины A и B равностороннего треугольника ABC проведена окружность. Через вершины A и C проведена другая окружность, пересекающая первую в точке P под прямым углом. Доказать, что можно построить прямоугольный треугольник, катеты которого равны отрезкам BP, CP, а гипотенуза — отрезку AB.

506. Вписанный в окружность четырехугольник разбивается одной диагональю на два треугольника, в которые вписаны окружности радиусов r_1 и r_2, а второй диагональю — на два других треугольника, в которые вписаны окружности радиусов r_3 и r_4. Доказать, что $r_1+r_2=r_3+r_4$.

507. Около треугольника ABC описана окружность. Биссектриса угла C треугольника встречает окружность в точке C_1. Доказать, что если $CC_1=R+2r$, то либо угол C равен 60°, либо

$$h_3=\frac{R}{2}+2r.$$

508. В плоскости треугольника ABC дана точка P. Доказать, что по отрезкам $PA\cdot\sin A$, $PB\cdot\sin B$, $PC\cdot\sin C$ можно построить треугольник, который вырождается для точек P, расположенных на окружности, описанной около данного треугольника.

509. В окружность O вписан четырехугольник. Пара его противоположных сторон пересекается в точке E, через которую проведена прямая t, перпендикулярная OE. Доказать, что две другие стороны, равно как и диагонали, пересекают прямую t в точках, соответственно симметричных относительно точки E.

510. Каждый из внешних углов треугольника разделен на три равные части. К каждой стороне прилегают две трисектрисы, образующие с этой стороной углы, каждый из которых равен одной трети внешнего угла треугольника. Доказать, что точки пересечения этих пар трисектрис являются вершинами равностороннего треугольника.

511. В плоскости треугольника ABC дана точка M. Построены окружности (A, B, M), (B, C, M), (C, A, M). К последним в точке

M проведены касательные, встречающие стороны AB, BC, CA соответственно в точках C_1, A_1, B_1. Доказать, что полученные точки принадлежат одной прямой. Рассмотреть случай вырождения.

512. На прямой l даны последовательно три точки A, B, C ($AB=m$, $BC=n$), через которые проведены прямые, образующие равносторонний треугольник. Доказать, что из всех равносторонних треугольников наибольший имеет сторону, равную

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{m^2+mn+n^2}\,.$$

513. В плоскости треугольника ABC даны две точки M и N. Доказать, что

$$MN^2=p_1r_1{}^2+p_2r_2{}^2+p_3r_3{}^2-(a^2p_2p_3+b^2p_3p_1+c^2p_1p_2),$$

где $r_1=NA$, $r_2=NB$, $r_3=NC$, $p_1=\frac{MA_1}{AA_1}$, $p_2=\frac{MB_1}{BB_1}$, $p_3=\frac{MC_1}{CC_1}$

(имеются в виду отношения направленных отрезков на чевианах точки M).

514. В плоскости треугольника ABC дана точка M, расстояния которой d_1, d_2, d_3 до вершин треугольника удовлетворяют равенству:

$$d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Доказать, что точка M — центроид треугольника.

515. Доказать, что расстояния d_1, d_2, d_3 инцентра треугольника до его вершин удовлетворяют равенству:

$$\frac{d_1^2}{bc}+\frac{d_2^2}{ca}+\frac{d_3^2}{ab}=1.$$

Доказать обратную теорему.

516. В окружность вписаны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, причем прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке S. Прямые PA_1, PB_1, PC_1 (P — произвольная точка окружности) пересекают соответствующие стороны треугольника ABC в точках A_2, B_2, C_2. Доказать, что полученные точки лежат с точкой S на одной прямой.

ГЛАВА IV

ПЛОЩАДИ

§ 17. Аффинные задачи

517. Доказать, что из всех секущих, проведенных через данную точку, расположенную внутри данного угла, та отсекает от сторон угла треугольник наименьшей площади, отрезок которой, высекаемый сторонами угла, делится данной точкой пополам.

518. Через центроид треугольника проведена произвольная секущая. Доказать, что отношение площади образовавшегося треугольника к площади четырехугольника не больше $\frac{4}{5}$.

519. На продолжениях сторон AB, BC, CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что $AB=BC_1$, $BC=CA_1$, $CA=AB_1$. Доказать, что отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равно $1:7$.

520. Через вершины треугольника ABC проведены параллельные между собой прямые, пересекающие его противоположные стороны соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что отношение площади данного треугольника к площади треугольника $A_1B_1C_1$ равно $1:2$.

521. Доказать, что, для того чтобы точка M, лежащая внутри треугольника ABC, была центроидом этого треугольника, необходимо и достаточно, чтобы треугольники MAB, MBC, MCA были равновелики.

522. Внутри угла S дана точка M. Произвольная секущая, проходящая через точку M, пересекает стороны угла в точках A и B. Доказать, что

$$\frac{1}{(AMS)}+\frac{1}{(BMS)}=\text{const}.$$

523. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ и около него описан треугольник $A_2B_2C_2$, причем соответствующие стороны последних двух треугольников параллельны. Доказать, что

$$(ABC)^2=(A_1B_1C_1)\cdot(A_2B_2C_2)$$

524. На медиане CM_3 треугольника ABC дана произвольная точка P. Прямые AP и BP пересекают стороны треугольника соответственно в точках A_1 и B_1. Доказать, что площади треугольников AA_1C и BB_1C равны.

525. Даны треугольник ABC и точка P. Доказать, что из трех треугольников AM_1P, BM_2P, CM_3P (M_i — середины сторон треугольника) сумма площадей двух равна площади третьего треугольника.

526. Из вершин треугольника ABC проведены параллельные наклонные AA_1, BB_1, CC_1 к прямой m. Отрезки этих наклонных разделены точками A_2, B_2, C_2 соответственно в одном и том же отношении k, считая от их оснований. Доказать, что отношение площадей ориентированных треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ равно $(k+1):k$.

527. На сторонах AC и BC треугольника ABC даны точки M и N так, что $\frac{AM}{MC}=\frac{CN}{NB}=k$. На отрезке MN взята точка P таким образом, что $MP:PN=k$. Доказать, что

$$(AMP)^{\frac{1}{3}}+(BNP)^{\frac{1}{3}}=(ABC)^{\frac{1}{3}}.$$

528. Доказать, что отношение площади данного четырехугольника к площади четырехугольника, вершины которого находятся в серединах сторон данного, равно 2.

529. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ продолжены за вершины C и D и удвоены. Доказать, что отношение площади данного четырехугольника к площади четырехугольника ABC_1D_1 (точки C_1 и D_1 — построенные точки на продолжениях диагоналей) равно $1:4$.

530. Доказать, что если две противоположные вершины четырехугольника сместить на равные отрезки в одном и том же направлении, то площади данного четырехугольника и полученного четырехугольника будут равны.

531. Средние линии четырехугольника разбивают его на четыре четырехугольника. Доказать, что сумма площадей одной пары неприлежащих четырехугольников равна сумме площадей другой пары.

532. Доказать, что площадь треугольника, вершинами которого являются вершина параллелограмма и середины сторон, сходящихся в противоположной его вершине, составляет $\frac{3}{8}$ площади этого параллелограмма.

533. Отрезок, параллельный основаниям a и c трапеции и заключенный между ее боковыми сторонами, равен среднему геометрическому этих оснований. Доказать, что отношение площадей трапеций, на которые этот отрезок разбивает данную трапецию, равно $a:c$

534. Доказать, что если только одна из средних линий четырехугольника делит его площадь пополам, то четырехугольник — трапеция.

535. Точки M и N делят стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ в равных отношениях, считая от вершин A и D. Доказать, что данный четырехугольник есть трапеция, если прямая MN делит его площадь в том же отношении.

536. Противоположные стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ разделены в равных отношениях точками M и N, считая от вершин A и D. Доказать, что четырехугольник есть трапеция, если треугольники ABN и CDM равновелики.

537. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ дана точка M такая, что $(MAB)=(MBC)=(MCD)=(MDA)$. Доказать, что четырехугольник есть параллелограмм.

538. Через две противоположные вершины выпуклого четырехугольника проведены прямые, каждая из которых делит площадь четырехугольника пополам и встречает соответствующую сторону четырехугольника в точках M и N. Доказать, что прямая MN параллельна диагонали четырехугольника, соединяющей указанные вершины.

539. Четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника. Если квадрат площади одного из этих треугольников равен произведению площадей прилежащих к нему треугольников, то четырехугольник есть трапеция или параллелограмм.

540. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) пересекаются в точке O. Доказать, что

$$\sqrt{(ABCD)} = \sqrt{(ABO)} + \sqrt{(CDO)}.$$

541. Произведение площадей треугольников, на которые четырехугольник разбивается одной из своих диагоналей, равно произведению площадей треугольников, на которые он разбивается другой диагональю. Доказать, что четырехугольник есть трапеция или, в частности, параллелограмм.

542. Два четырехугольника имеют общие середины сторон. Доказать, что четырехугольники равновелики.

543. Точка M отражается относительно середин сторон четырехугольника. Доказать, что полученные точки являются вершинами четырехугольника, площадь которого не зависит от выбора точки M.

544. На продолжениях сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ взяты соответственно точки P, Q, R, S так, что $AB=BP$, $BC=CQ$, $CD=DR$, $DA=AS$. Доказать, что отношение площадей четырехугольников $ABCD$ и $PQRS$ равно $1:5$.

545. На сторонах AB, BC, CD, DA (или их продолжениях) четырехугольника $ABCD$ взяты точки P, Q, R, S так, что $AP=m\cdot AB$, $BQ=m\cdot BC$, $CR=m\cdot CD$, $DS=m\cdot DA$. Доказать, что отношение площадей четырехугольников $PQRS$ и $ABCD$ равно $2m^2-2m+1$.

546. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ даны соответственно точки M, N, P, Q так, что $\frac{AM}{MB}=k_1, \frac{BN}{NC}=k_2$, $\frac{CP}{PD}=k_1$, $\frac{DQ}{QA}=k_2$. Доказать, что прямые AP, BQ, CM, DN, пересекаясь, образуют второй параллелограмм и что отношение площади этого параллелограмма к площади данного параллелограмма равно

$$\frac{k_1 . k_2}{(1+k_1)\ (1+k_2)+1}.$$

547. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены параллелограммы. Стороны параллелограммов, противолежащие сторонам AC и BC, продолжены и пересекаются в точке D. Доказать, что сумма площадей двух построенных параллелограммов равна площади параллелограмма, построенного на отрезках AB и CD, причем стороны параллелограмма параллельны этим отрезкам.

548. Через середину каждой диагонали четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная другой диагонали. Доказать, что если эти прямые пересекаются в точке M, то площади четырехугольников MM_1AM_4, MM_1BM_2, MM_2CM_3, MM_3DM_4 равны между собой (M_i — середины сторон четырехугольника).

549. Прямая, проведенная через середины диагоналей четырехугольника, встречает его противоположные стороны AB и CD в точках M и N. Доказать, что $AM : MB=CN : ND$ и что треугольники ABN и CDM равновелики.

550. Середина каждой стороны параллелограмма соединена с вершинами, принадлежащими противоположной стороне. Доказать, что отношение площади образовавшегося восьмиугольника к площади параллелограмма равно $\frac{1}{6}$.

551. Через каждую вершину треугольника проведены по две прямые, разделяющие противоположные стороны на три равные части. Доказать, что отношение площади шестиугольника, образованного этими прямыми, к площади данного треугольника равно $\frac{1}{10}$.

552. В плоскости треугольника ABC взята точка M, через которую проведены лучи, параллельные ориентированным сторонам AB, BC, CA треугольника. На лучах от точки M отложены отрезки, равные сторонам: $MP=CA$, $MQ=AB$, $MR=BC$. Доказать, что: 1) точка M — центроид треугольника PQR и 2) отношение площадей треугольников ABC и PQR равно $1 : 3$.

553. Противоположные стороны AB и CD, BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ продолжены и пересекаются соответственно в точках E и F. Доказать, что треугольники EKL и FKL равновелики (точки K и L — середины диагоналей).

554. На сторонах треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что площадь треугольника $A_1B_1C_1$ не меньше наименьшей площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C.

555. Через точку M, не принадлежащую сторонам и их продолжениям треугольника ABC, проведена секущая, встречающая стороны этого треугольника (или их продолжения) соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать справедливость равенства:

$$\frac{(ABM)}{MC_1} + \frac{(BCM)}{MA_1} + \frac{(CAM)}{MB_1} = 0,$$

в котором площади и отрезки предполагаются ориентированными.

556. На сторонах AC и BC треугольника ABC даны соответственно по две точки M_1 и M_2, N_1 и N_2 так, что

$$AM_1 : M_1C = CN_1 : N_1B = k_1, \quad AM_2 : M_2C = CN_2 : N_2B = k_2.$$

Отрезки M_1N_1 и M_2N_2, пересекающиеся в точке L, разделены точками P_1 и P_2 так, что $M_1P_1 : P_1N_1 = k_1$, $M_2P_2 : P_2N_2 = k_2$. Доказать, что

$$(AM_1P_1)^{\frac{1}{3}} + (P_1LP_2)^{\frac{1}{3}} + (P_2N_2B)^{\frac{1}{3}} = (ABC)^{\frac{1}{3}}.$$

557. Через точку M, взятую на стороне четырехугольника AB, проведена прямая параллельно диагонали AC и пересекающая сторону BC в точке N; через N проведена прямая параллельно BD и пересекающая CD в точке P; через P проведена прямая параллельно AC и пересекающая AD в точке Q. Доказать, что прямые QM и BD параллельны и что отношение площадей четырехугольников $ABCD$ и $MNPQ$ равно $\frac{(1+k)^2}{2k}$, где $AM : MB = k$.

558. Сходственные вершины двух n-угольников $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ и $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ соединены прямыми. Доказать, что если эти прямые параллельны и отрезки A_iB_i рассекаются некоторой прямой в данном отношении k, то $(A_1A_2A_3 \ldots A_n) : (B_1B_2B_3 \ldots B_n) = k$.

§ 18. Метрические задачи

559. В плоскости треугольника ABC дана точка M, через которую проведены три не лежащие в одной полуплоскости луча, перпендикулярные сторонам треугольника. На этих лучах от точки M отложены отрезки MA_1, MB_1, MC_1, соответственно равные сторонам треугольника. Доказать, что: 1) точка M есть центроид треугольника $A_1B_1C_1$, 2) отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равно $1 : 3$.

560. На сторонах AC и CB равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки: $AM = BN = \frac{1}{4}AB$. Доказать, что площадь треугольника ABC рассекается ломаной MON на две равновеликие части (точка O — центр треугольника).

561. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен $80°$, а боковая сторона и основание соответственно равны a и b. Доказать, что площадь треугольника равна

$$\frac{a^3b}{4(b^2-a^2)}.$$

562. На касательную к окружности, вписанной в треугольник ABC и пересекающую его стороны CA и CB, опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что

$$CC_1 \cdot AB - AA_1 \cdot BC - BB_1 \cdot AC = 2(ABC).$$

563. Доказать, что из всех треугольников, имеющих общее основание и равные периметры, равнобедренный имеет наибольшую площадь.

564. Доказать, что из всех треугольников с общим основанием и одинаковыми площадями равнобедренный треугольник имеет наименьший периметр.

565. Доказать, что любая секущая, проведенная через инцентр треугольника, делит его площадь и периметр в равных отношениях. Доказать обратную теорему.

566. В окружность вписан остроугольный треугольник, вершины которого отражены относительно центра окружности. Доказать, что площадь образовавшегося шестиугольника в два раза больше площади данного треугольника.

567. Доказать, что если площадь треугольника равна произведению отрезков, на которые разбивается его сторона точкой касания вписанной окружности, то треугольник прямоугольный.

568. Сторона AB треугольника ABC является средней по длине стороной треугольника. Доказать, что можно провести единственную прямую, пересекающую стороны CA и CB так, что при этом периметр и площадь треугольника делятся пополам.

569. Доказать, что расстояние d произвольной точки P плоскости до центра O окружности, описанной около треугольника ABC, определяется по формуле:

$$d^2 = R^2 - [a^2 (CAM)(AMB) + b^2 (ABM)(BCM) + \\ + c^2 (BCM)(CAM)] \cdot \frac{1}{(ABC)^2}.$$

570. Из точки P опущены перпендикуляры PP_1, PP_2, PP_3 на стороны треугольника ABC. Доказать, что расстояние d от точки P, расположенной внутри описанной окружности, до ее центра O определяется по формуле:

$$d^2 = R^2 \left(1 - \frac{4\,(P_1P_2P_3)}{(ABC)}\right).$$

Как изменится формула, если точка P лежит вне описанной окружности?

571. На продолжениях сторон AB, BC, CA равностороннего треугольника ABC даны соответственно точки C_1 и C_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2 так, что $AC_1 = BC_2$, $BA_1 = CA_2$, $CB_1 = AB_2$. Доказать, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равновелики и что они имеют равные суммы квадратов сторон.

572. Доказать, что для всякого треугольника имеет место неравенство: $S > 2R^{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}}$.

573. Доказать, что из всех четырехугольников с данными сторонами вписанный в окружность имеет наибольшую площадь.

574. Из середин M_1 и M_3 сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры M_1N_1 и M_3N_3 на его противоположные стороны CD и AB. Доказать, что площадь данного четырехугольника может быть вычислена по формуле:

$$(ABCD) = \frac{1}{2}(AB \cdot M_3N_3 + CD \cdot M\,N_1).$$

575. Основания трапеции равны a и c. Отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции и параллельный ее основаниям, делит площадь трапеции пополам. Доказать, что длина этого отрезка равна

$$\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}.$$

576. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. В середине M_1 стороны AB восставлен к ней перпендикуляр M_1N_1, равный $\frac{1}{2}AB$. На полупрямой EA отложен отрезок EN, равный EN_1. Доказать, что прямая, проведенная через точку N параллельно основаниям трапеции, делит ее площадь пополам.

577. Из центроида треугольника на его стороны опущены перпендикуляры. Доказать, что площадь треугольника, вершины которого совпадают с основаниями этих перпендикуляров, выражается через стороны и площадь данного треугольника по формуле:

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\,(ABC)^3.$$

578. Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность O. Из точки пересечения диагоналей на стороны опущены перпендикуляры, основания которых являются вершинами нового четырехугольника. Доказать, что в последний четырехугольник можно вписать окружность O' и что площади четырехугольников относятся, как радиусы окружностей O и O'.

579. Внутри окружности радиуса R, в которую вписан равносторонний треугольник ABC, дана точка P. Доказать, что между площадью S_1 треугольника, построенного на отрезках PA, PB, PC, и расстоянием d от точки P до центра окружности имеет место зависимость: $d^2 + \frac{4S_1}{\sqrt{3}} = R^2$.

§ 19. Геометрические места

580. Доказать, что геометрическое место точек M, для которых $(MAB)=(MBC)=(MCA)$, где A, B, C — вершины треугольника, есть четверка точек.

581. На плоскости даны два отрезка AB и CD, не принадлежащие одной прямой. Доказать, что геометрическое место точек, для которых площади треугольников ABM и CDN равны, есть пара прямых.

582. Доказать, что геометрическое место точек M, расположенных внутри треугольника ABC, для которых

$$(MAB)=(MBC)+(MCA),$$

есть средняя линия треугольника.

583. Дан равносторонний треугольник ABC. Доказать, что геометрическое место точек P, для которых площади треугольников со сторонами, равными PA, PB, PC, равны между собой и меньше $\frac{1}{3}(ABC)$, есть пара окружностей с общим центром в центре данного треугольника, а в противном случае это геометрическое место есть только одна окружность или же окружность и точка.

584. Доказать, что геометрическое место точек P, для которых проекции P_1, P_2, P_3 на стороны данного треугольника являются вершинами треугольников с постоянной площадью, есть пара окружностей, концентрических с окружностью, описанной около данного треугольника. Выяснить, в каком случае геометрическое место представляет собой одну окружность.

585. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. Доказать, что геометрическое место точек M, для которых площади ориентированных треугольников удовлетворяют соотношению $(AMB)+(CDM)=(BCM)+(DAM)$, есть прямая, проходящая через середины диагоналей четырехугольника.

§ 20. Смешанные задачи

586. Доказать, что расстояние m между основаниями перпендикуляров, проведенных к двум сторонам треугольника ABC из основания его высоты, опущенной на третью сторону, определяется по формуле:

$$m=\frac{(ABC)}{R}.$$

587. Доказать, что если высота треугольника равна $R\sqrt{2}$, то отрезок прямой, проходящий через основания перпендикуляров, опущенных из основания этой высоты на две другие стороны, делит площадь треугольника пополам.

588. Из основания высоты треугольника на две другие его стороны опущены перпендикуляры. Доказать, что если отрезок, соединяющий основания этих перпендикуляров, проходит через центр описанной около треугольника окружности, то этот отрезок разбивает площадь треугольника на две равновеликие части.

589. В треугольник, не имеющий тупых углов, вписаны два квадрата так, что вершины квадрата лежат на сторонах треуголь-

ника. Доказать, что; 1) если квадраты равны, то треугольник равнобедренный или прямоугольный, 2) если квадраты не равны, то две вершины большего квадрата лежат на стороне, меньшей той стороны треугольника, на которой лежат две вершины меньшего квадрата.

590. Доказать, что отношение площади четырехугольника к площади треугольника, вершинами которого являются середины диагоналей и точка пересечения продолжений пары противоположных сторон четырехугольника, равно 4.

591. В окружность вписан треугольник ABC. На дуге BC окружности взята произвольная точка M. Доказать, что

$$BC^2\cdot (MAB)(MAC)=AB^2 (MCA)(MCB)+AC^2 (MBA)(MBC).$$

592. Доказать, что всякая прямая, проходящая через центр многоугольника, описанного около окружности, делит его площадь и периметр в равных отношениях.

593. На полуокружности с диаметром AB даны точки C и D. Доказать, что из всех четырехугольников $ACDB$ тот имеет максимальную площадь, у которого вершины C и D делят полуокружность на три равные части.

594. Доказать, что отношение площади данного треугольника к площади треугольника, вершины которого совпадают с основаниями его высот, равно

$$1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C,$$

если треугольник остроугольный, и

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-1,$$

если данный треугольник тупоугольный.

595 Доказать, что отрезок d прямой, параллельный основаниям трапеции и делящий ее площадь в отношении $p:q$, можно определить по формуле:

$$d=\sqrt{\frac{qa^2+pc^2}{p+q}},$$

где a и c — основания трапеции.

596. Через вершины трапеции $ABCD$ проведены параллельные между собой прямые, которые пересекают произвольную прямую соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точками A_0, B_0, C_0, D_0 разделены в равных отношениях, считая от вершин трапеции. Доказать, что: 1) четырехугольник $A_0B_0C_0D_0$ есть трапеция и 2) отношения соответствующих оснований трапеций равны.

597. Доказать, что 1) $(ABC)\leqslant\frac{1}{2}(a^2-ab+b^2)$;

2) $(ABC) \leqslant \left(\frac{a+b}{2\sqrt{2}}\right)^2$.

598. Доказать, что: 1) $(ABC) \leqslant \frac{a^2+b^2}{4}$; 2) $(ABCD) \leqslant \frac{e^2+f^2}{4}$;

3) $(ABCD) \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$.

599. Доказать, что: 1) $(ABC) < \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$;

2) $(ABCD) < \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}{6}$.

600. Внутри треугольника ABC взята точка M, через которую проведены прямые AM, BM, CM, пересекающие соответствующие стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что сумма

$$\frac{AM}{MA_1} + \frac{BM}{MB_1} + \frac{CM}{MC_1}$$

и произведение

$$\frac{AM}{MA_1} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{CM}{MC_1}$$

достигают минимума в центроиде треугольника.

601. На плоскости даны пять прямых; для каждых четырех из них построена прямая Гаусса. Доказать, что пять прямых Гаусса пересекаются в одной точке или параллельны между собой.

602. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках T_1, T_2, T_3. Доказать, что площадь треугольника $T_1T_2T_3$ относится к площади данного треугольника, как $r : 2R$, где r и R—соответственно радиус вписанной окружности и радиус описанной окружности около данного треугольника.

603. В плоскости четырехугольника $ABCD$ дана точка O. Доказать, что

$$[(AOB) + (COD)] - [(BOC) - (DOA)] = 4(KOL),$$

где K — середина диагонали AC, а L — середина диагонали BD (приведенные в формуле площади треугольников считать положительными или отрицательными в зависимости от ориентаций этих треугольников).

604. Два равновеликих параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ расположены так, что угол A у них общий. Доказать, что прямая CC_1 пересекает продолжение сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно в точках M и M_1, для которых справедливо равенство $CM = CM_1$.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. Продолжить медиану CM_3 за точку M_3 и построить точку C_1 так, чтобы $CM_3 = M_3C$. Рассмотреть треугольник CC_1A.

2. См. указание к задаче № 1.

3. Пусть $AB > BC$. Отсюда $\angle AM_2B > \angle CM_2B$. Но тогда $AG > CG$ и $M_2GA < M_2GC$. Рассмотреть углы, смежные с последними.

4. Заметить, что $A < 180° - B$. Отразить меньшую сторону BC относительно биссектрисы CL_3. Если B_1 — отраженная вершина, то рассмотреть треугольник AB_1L_3.

5. Рассмотреть три образовавшихся равнобедренных треугольника. Из равенства $AB = BC$ следует, что $BK + KA = BL + LC$, $BK + KD + DF = BL + LD + DE$ и $BK + KD = BL + LD$.

6. Провести прямую BM и воспользоваться дважды теоремой о внешнем угле треугольника.

7. Первый способ. Доказательство вести методом от противного, используя осевую симметрию и теорему о соотношении сторон треугольника.

Второй способ. Пусть $CA + AL_3 = CB + BL_3$, где CL_3 — биссектриса угла C треугольника ABC. На продолжении CA отложить отрезок AM, равный AL_3, а на продолжении CB — отрезок BN, равный BL_3. Доказать равенство треугольников AL_3M и BL_3N.

8. Доказательство вести методом от противного, воспользовавшись теоремой о сравнительной длине перпендикуляра и наклонной. Второй способ решения аналогичен второму способу решения задачи № 7.

9. Учесть, что $\angle OBB_1 + \angle A_1AB < 180°$, а $\angle OAA_1 + \angle A_1AB = 180°$. Значит, $\angle OAA_1 \geqslant \angle OBB_1$.

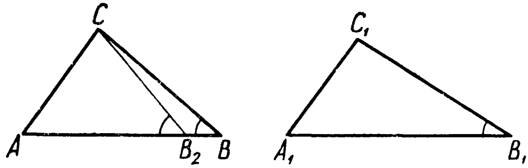
10. Пусть $AH_1 > BH_2$ и предположить, что $BC > AC$. Совместить прямоугольные треугольники ACH_1 и BCH_2 их равными острыми углами и рассмотреть четырехугольник с двумя прямыми прилежащими углами. Воспользоваться результатом задачи № 9.

11. Продолжить катет AC за вершину C и построить точку C_1 так, чтобы $AC_1 = AB$. Опустить из точки C_1 на AB перпендикуляр C_1D_1. Заметить, что $\angle AC_1D_1 = \angle ABC$, $\angle AC_1D_1 \leqslant \angle ACH_3$ (см. задачу № 9).

12. Из точек M и N опустить перпендикуляры на прямую, соединяющую середины равных сторон, и дважды воспользоваться признаками равенства прямоугольных треугольников.

13. Предположить противное. Тогда $\angle AM_3C \neq \angle A'M_3'C'$, пусть $\angle AM_3C > \angle A'M_3'C'$, а значит $\angle CM_3B < \angle C'M'_3B'$. Рассмотрев две пары треугольников с двумя соответственно равными сторонами, установить, что $AC > A'C'$ и $CB < C'B'$, откуда $AC - CB > A'C' - C'B'$, что противоречит условию задачи.

14. П е р в ы й с п о с о б. Предположить противное. Наложить надлежащим образом (черт. 1) один треугольник на другой и использовать теорему о внешнем угле треугольника.



Черт. 1

В т о р о й с п о с о б. Пусть $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$. Установить равенство высот CD и C_1D_1, а затем отрезков AD и A_1D_1, BD и B_1D_1.

15. Пусть $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $BC > AC$, $\angle A = \angle A_1$. Предположим, что $AB > A_1B_1$. Построить на AB точку B_2 так, чтобы $AB_2 = A_1B_1$. Из равенства треугольников AB_2C и $A_1B_1C_1$ следует, что $CB = CB_2$, значит, угол B острый, а угол AB_2C, равный B_1, тупой. Но это противоречит условию теоремы.

16. П е р в ы й с п о с о б. Предположить противное. Наложить один треугольник на другой и, установив равенство образовавшихся треугольников, обнаружить противоречие с теоремой о внешнем угле треугольника.

В т о р о й с п о с о б. Продолжить медианы CM_3 и $C'M'_3$ за точки M_3 и M_3' и построить точки E и E' так, чтобы $CM_3 = M_3E$, $C'M_3' = M_3'E'$. Рассмотреть треугольники CEB и $C'E'B'$.

17. Отразить точку B относительно биссектрисы. Полученную на продолжении стороны AC точку B' соединить с точкой M и рассмотреть треугольник AMB', в котором $AB' = AC + CB$, $MB' = MB$. Аналогично рассмотреть случай, когда точка M лежит на другой биссектрисе.

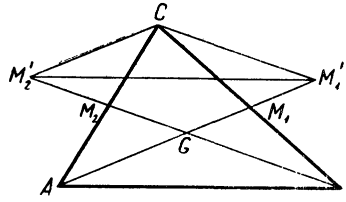
18. Воспользоваться указанием к задаче № 17.

19. Доказательство вести методом от противного. Каждую медиану удвоить, продолжая ее за основание, и воспользоваться прямой и обратной теоремами о треугольниках с двумя соответственно равными сторонами.

20. Пусть сторона BC треугольника ABC больше стороны AC. Докажем, что $AM_1 < BM_2$. Обозначим точку пересечения медиан AM_1 и BM_2 через G. Удвоим GM_1 и GM_2 (черт. 2). Полученные

точки M'_1 и M'_2 соединим с вершиной C. Углы CM'_2G и CM'_1G равны между собой. Кроме того, $BG > AG$, поэтому $CM'_1 > CM'_2$. Из треугольника $CM'_1M'_2$ находим, что $CM'_1M'_2 < \angle CM'_2M'_1$. Значит, $\angle GM'_1M'_2 > \angle GM'_2M'_1$ и $GM'_2 > GM'_1$. Отсюда следует, что $GM_2 > GM_1$ и $BM_2 > BM_1$, что и требовалось доказать.

21. Продолжить медиану CM_3 за точку M_3 и построить точку C' так, чтобы $GM_3 = M_3C'$. Из вершин C, B и точки C' опустить на медиану AM_1 перпендикуляры CC_0, BB_0, $C'C'_0$ и доказать, что $CC_0 = BB_0$, $BB_0 = C'C'_0$, обратив внимание на равенства: $BG = C'A$, $\angle C'AG = \angle BGA$.



Черт. 2

22. На среднюю линию M_1M_2 опустить перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1. Доказать, что $A_1B_1 = 2M_1M_2$, рассматривая три пары равных прямоугольных треугольников. Учесть, что в четырехугольнике AA_1B_1B углы при вершинах A_1 и B_1 прямые и $AA_1 = BB_1$. Следовательно, $A_1B_1 \leqslant AB$, или $M_1M_2 \leqslant \frac{1}{2}AB$. При доказательстве рассмотреть все возможные случаи.

23. Приложить оба треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ друг к другу так, чтобы их гипотенузы совпали. Заметить, что отрезок CC_1 пересекает сторону AB. Отсюда предположение, что $AC > A_1C_1$, $BC > B_1C_1$, приводит к противоречию.

24. Продолжить луч OA до пересечения с прямой b и, используя свойства центральной симметрии, установить равенство двух прямоугольных треугольников. Расстояние точки O до прямой AB равно расстоянию этой точки до данной прямой b.

25. Опустить из точек P и Q перпендикуляры PP_1 и QQ_1 на основание AB треугольника и рассмотреть пары равных треугольников: MPP_1, MQQ_1 и PP_1A, QQ_1B.

26. Опустить из точек P и Q, принадлежащих соответственно BC и AC, перпендикуляры PP_1 и QQ_1 на прямую AB и установить, что $P_1B < Q_1A$, а следовательно, и $PQ > P_1Q_1 > AB$.

27. Опустить на прямую перпендикуляры из вершин треугольника и рассмотреть четырехугольник с двумя прямыми углами и двумя равными сторонами, для которого серединный перпендикуляр данного треугольника есть ось симметрии.

28. Провести в четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC и предположить, что $\angle DCA > \angle CAB$, тогда $\angle DAC > \angle ACB$; и, отражая треугольник ADC относительно прямой AC, обнаружить противоречие с результатом задачи № 6.

29. Доказательство вести методом от противного, отразив треугольник ABC относительно точки пересечения диагоналей четырехугольника.

30. Доказать методом от противного, используя симметрию относительно точки пересечения диагоналей.

31. Середину третьей стороны соединить с вершинами, расположенными на противолежащей стороне, и рассмотреть три образовавшихся треугольника.

32. Воспользоваться результатом задачи № 31, теоремой о внешнем угле треугольника и признаком равенства треугольников. Рассуждения вести методом от противного.

33. Доказать методом от противного, воспользовавшись результатом задачи № 31 и теоремой о внешнем угле треугольника.

34. Соединить вершины C и D с серединой M стороны AB и рассмотреть высоту в равнобедренном треугольнике CDM.

35. Отразить точку B относительно DC и полученную точку B' соединить с точкой A. Если AB' пересекает CD в точке M, то $AC+CB>AB'$. Для всех точек P, расположенных на стороне CD, $AP+PB<AC+CB$ $(P\neq M)$, причем если $P_1M>P_2M$, то $AP_1+P_1B>AP_2+P_2B$. Следовательно, отрезки CM и DM не могут быть неравны, иначе это будет противоречить условию. Итак, $CM=DM$. Если точка A' симметрична A относительно CD, то $AA_1=BB_1$ и $BM=AM$. Поэтому перпендикуляр, проведенный через точку M к AB есть ось симметрии четырехугольника и $AD=BC$, $AC=BD$.

36. Провести к двум касающимся друг друга окружностям общую касательную t в их точке касания T. Если t встречает данную прямую в точке M,то установить, что отрезок TM сохраняет постоянную длину.

37. Пусть AB — диаметр окружности O, а C — точка на окружности. Рассмотреть два равнобедренных треугольника AOC и BOC и учесть, что сумма углов треугольника не превосходит $180°$.

38. Опустить из центра окружности перпендикуляры на стороны четырехугольника. Рассмотреть четыре пары равных углов и заметить, что их сумма равна $360°$.

39. Соединить центр окружности с вершинами четырехугольника и рассмотреть углы при основании образовавшихся равнобедренных треугольников (три случая).

40. Построить окружность, концентрическую с данной и проходящую через точки M и N, продолжить касательные до пересечения с построенной окружностью и для полученного четырехугольника построить ось симметрии. Установить перпендикулярность хорды T_1T_2 к этой оси. Воспользоваться задачей № 27.

41. Соединить концы равных хорд AB и CD, пересекающихся в точке M, и установить равенство отрезков AC и BD, треугольников ABC и DBC, углов CBM и MCB.

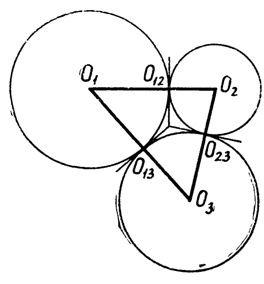
42. Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке O, причем $BO=OD$. Отразим треугольник ABC около середины M стороны AC в треугольник ACB', полагая, что $AO>AM$. Четырехугольник $ACDB'$ обладает тем свойством, что расстояния его вершин D и B' до стороны AC равны. Кроме того, из равенства $AB+CD=BC+AD$ следует, что $B'C+CD=B'A+AD$, ибо $B'C=AB$, $B'A=BC$. Согласно задаче № 35 заключаем, что $B'C=AD$, $B'A=CD$,

или $AB=AD$, $BC=CD$. Итак, $ABCD$ — дельтоид, у которого диагональ AC является осью симметрии.

43. Пусть прямые AM и BM пересекают внешнюю окружность в точках C и D. Касательные в точках C и D пересекаются в точке Q, симметричной с P относительно оси симметрии четырехугольника $ABCD$. Учесть, что диагонали AC и BD делят отрезок PQ пополам (см. задачу № 40) и поэтому PQ проходит через M перпендикулярно к OM.

44. Воспользоваться результатами задач № 27 и 40.

45. 1) Соединить попарно центры O_i (черт. 3) окружностей и установить, что точки касания данных окружностей определяют на сторонах треугольника точки, в которых вписанная окружность касается его сторон. Воспользоваться для этого соотношением $O_1O_{12} = p - a$, где $2p$ — периметр треугольника, а $O_2O_3 = a$.



Черт. 3

2) Воспользовавшись первой частью задачи, установить, что искомое геометрическое место точек есть окружность с центром в точке пересечения касательных в данных двух точках.

46. Пусть окружность лежит вне треугольника SMM_1 и касается стороны MM_1 в точке T. Учесть, что $\angle AOM = \angle MOT$, $\angle TOM_1 = \angle M_1OB$, $\angle AOS = \angle SOB$. Отсюда $2\angle AOM + \angle TOS = 2\angle BOM_1 - \angle TOS$, или $\angle AOM = \angle BOM_1 - \angle TOS$, т. е. $\angle AOM = \angle SOM_1$. Аналогичным образом рассмотреть второй случай, когда окружность расположена внутри треугольника SMM_1.

47. Пусть высоты AH_1 и CH_3 пересекаются в точке H. Отразить прямую H_1H_3 относительно AH_1 и CH_3. Доказать, что точка A одинаково удалена от отраженных прямых, что влечет за собой пересечение этих прямых в некоторой точке P. Вершины A и C лежат на одной оси симметрии прямых H_1P и H_3P. Поэтому точка P лежит на стороне AC. Это значит, что PH есть третья биссектриса треугольника ABC и $PH \perp AC$. Наконец, установить, что вершина B лежит на внутренней биссектрисе угла P треугольника H_1H_3P.

Другое решение этой задачи может быть основано на применении результата задачи № 55.

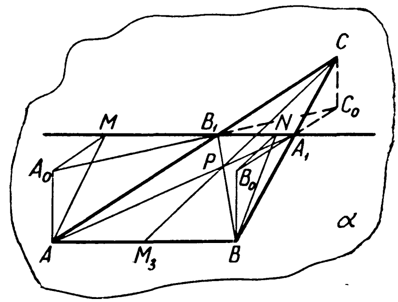
48. Согласно условию $AB+CD=AD+BC$. Отсюда $AB-BC=AD-DC$, поэтому если $AB>BC$, то $AD>DC$. На сторонах AB и AD откладываем отрезки AM и AN так, чтобы $BC=BM$, $DC=DN$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC (или CD) в точке K, что устанавливается на основании аксиомы Паша. Но тогда биссектриса угла B (или D) пересекает отрезок AK в точке O. Эта точка является центром окружности, описанной около треугольника MNC. Поэтому DO (или BO) — биссектриса угла D (или B).

49. В данный четырехугольник вписать окружность и устано-

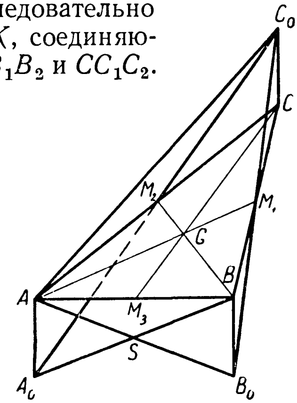
вить равенство сторон AB и BC, пользуясь свойством касательных, проведенных из одной точки к окружности.

50. Соединить центры O_1 и O_2 с точками P и Q, в которых внутренняя касательная пересекает внешние. Точка пересечения диагоналей полученного четырехугольника O_1PO_2Q является его центром симметрии. Отсюда противоположные углы четырехугольника равны, но $\angle O_1PO_2=90°$, поэтому $\angle PO_2Q\leqslant 90°$, а значит, $PQ\leqslant O_1O_2$.

51. Подвергнуть точки A, B и C центральной симметрии, приняв за центр симметрии середину M отрезка AA_1, и рассмотреть получившиеся равнобедренные треугольники $B_1A_1B_2$ и $C_1A_1C_2$ с общим углом при вершине A_1, биссектриса которого перпендикулярна основаниям B_1B_2 и C_1C_2, а следовательно (см. задачу № 26), и прямым MN и MK, соединяющим середины сторон треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2.



Черт. 4



Черт. 5

52. Доказать методом от противного. Допустить, что равные биссектрисы AL_1 и CL_3 не симметричны относительно биссектрисы BL_2, и показать, что это приводит к противоречию.

53. В точках A, B, C к плоскости треугольника ABC восставить перпендикуляры (черт. 4) и отложить на них отрезки AA_0, BB_0 и CC_0 так, чтобы прямая B_0C_0 проходила через точку A_1, а прямая A_0C_0 — через точку B_1. При этом окажется, что $AA_0=BB_0$, так как отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются на медиане. Далее, из точек A_0 и B_0 опустить на прямую A_1B_1 перпендикуляры A_0M и B_0N и учесть, что прямые A_1B_1 и A_0B_0 лежат в одной плоскости $A_0B_0C_0$. Из равенства треугольников AA_0M и BB_0N следует, что $AM=BN$. Но согласно условию $AA_1=BB_1$. Поэтому $\triangle AMA_1=\triangle BNB_1$ и $\angle AA_1M=\angle BB_1N$. Значит, $A_1P=B_1P$, $AP=BP$ и $M_3P\perp AB$. Отсюда CM_3—медиана и высота и $AC=CB$.

54. К плоскости треугольника в точках A, B, C восставить перпендикуляры и отложить на них равные отрезки AA_0, BB_0, CC_0 (черт. 5), из которых два отрезка (AA_0 и BB_0) направить по одну сторону плоскости, а третий — по другую сторону плоскости. Провести плоскости A_0BC_0 и AB_0C_0, пересекающиеся по прямой, проходящей через точку C_0, через точку пересечения медиан AM_1, BM_2 данного треугольника и через точку S пересечения прямых

AB_0 и A_0B. Спроектировать ортогонально эти три точки на плоскость треугольника.

55. Пара прямых H_3A_1, H_3B_1 делит гармонически пару прямых H_3C и H_3A (свойство полного четырехугольника). Но по условию прямые CH_3 и AB перпендикулярны, а следовательно, прямые CH_3 и AB — оси симметрии для пары прямых H_3A_1 и H_3B_1. Поскольку эти рассуждения одинаково справедливы как в евклидовой плоскости, так и в плоскости Лобачевского, то теорема относится к абсолютной геометрии. Аналогично доказывается обратная теорема.

56. Пусть L_1, L_2, L_3 — основания биссектрис треугольника ABC и угол $L_1L_3L_2$ прямой. Пара прямых L_3L_1 и L_3L_2 делит гармонически пару прямых L_3C и L_3A. Поэтому $\angle CL_3L_2 = \angle AL_3L_2$ и $\angle CL_3L_1 = \angle BL_3L_1$. Если прямые AL_1 и L_2L_3 пересекаются в точке M, а прямые BL_2 и L_3L_1 — в точке N, то лучи CM, CL_3, CN делят угол C на четыре равные части. Но пара прямых CA и CL_3 делит гармонически пару прямых CM и CL_1. Но CM делит угол ACL_3 пополам, поэтому $CM \perp CL_1$ и $\angle C = 120°$. Обратная теорема доказывается аналогично. Ввиду того что доказательство теоремы сохраняет силу и для плоскости Лобачевского, эта теорема относится к абсолютной геометрии.

57. Воспользоваться тем, что сумма двух отражений относительно двух точек есть параллельный перенос, и установить, что сумма указанных отражений относительно вершин треугольника — тождественное преобразование.

58. Рассмотреть параллелограммы $APCQ$ и $QDPB$, имеющие своим центром центр данного параллелограмма, и показать, что в полученном четырехугольнике диагонали при пересечении делятся пополам.

59. Воспользоваться свойством средней линии треугольника и показать, что противоположные стороны полученного четырехугольника параллельны и равны соответствующим диагоналям данного четырехугольника.

60. Воспользоваться свойством средней линии треугольника и доказать, что соответственные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Затем показать, что AB_1A_1B и B_1CBC_1 — параллелограммы с общим центром симметрии, через который проходят диагонали AA_1, BB_1 и CC_1.

61. Установить равенство и параллельность отрезков M_3D, CM_2, M_1B и AM. Следовательно, четырехугольник M_3DMA — параллелограмм и точка M симметрична точке M_3 относительно середины стороны AD.

62. Пусть для четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ имеет место: $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$, $\vec{DC} = \vec{D_1C_1}$, причем M и N — середины AD и BC, а M_1, N_1 — середины A_1D_1 и B_1C_1. Перенести векторы AB и DC в точку M и показать, что концы перенесенных векторов лежат на одной прямой с точкой N. Аналогичные преобразования прове-

сти с векторами $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$. Равенство векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{M_1N_1}$ устанавливается непосредственно параллельным переносом $\overrightarrow{MM_1}$.

63. Рассмотреть два образовавшихся параллелограмма, для которых средние линии четырехугольника являются диагоналями, и воспользоваться свойством диагоналей параллелограмма.

64. Через середину M_3 стороны AB провести прямую, параллельную CC_1 и пересекающую прямую m в точке N_3. Согласно условию $CC_1=2M_3N_3$, и поэтому CM_3 пересекает прямую m в точке D так, что $CM_3=M_3D$. Итак, точка D фиксированная и прямые m принадлежат пучку с центром в точке D.

65. Воспользоваться тем, что в четырехугольнике $ABCD$ точка S и середины K и L диагоналей AC и BD лежат на одной прямой, причем $KS=SL$. Доказав, что $PLMK$ — параллелограмм, установить, что MP и LK, как диагонали этого параллелограмма, пересекаются в точке S и делятся в ней пополам.

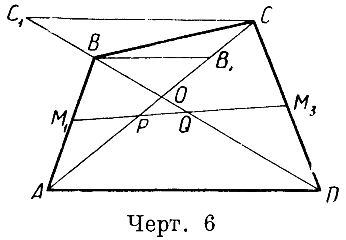
66. Воспользоваться тем, что средняя линия и соответствующая ей медиана треугольника, пересекаясь, делятся пополам. Применить это свойство дважды.

67. Установить, что данный четырехугольник — параллелограмм, пользуясь свойством средней линии трапеции и признаком параллелограмма. Доказательство вести методом от противного.

68. Воспользоваться тем, что центроид треугольника делит каждую медиану в отношении $2:1$.

69. Установить, что прямая, соединяющая середины диагоналей, проходит через точку их пересечения. Значит, обе диагонали имеют общую середину.

70. Пусть точка M_1 — середина AB, а точка M_3 — середина DC (черт. 6). Предположить противное и провести через вершины B и C четырехугольника $ABCD$ прямые BB_1 и CC_1, встречающие диагонали AC и BD или их продолжения соответственно в точках B_1 и C_1. Тогда $BB_1=2M_1P$ и $CC_1=2M_3Q$, а следовательно, четырехугольник BC_1CB_1 — параллелограмм. Последнее быть не может, так как противоположные стороны его C_1B и CB_1 пересекаются в точке O.



Черт. 6

71. Если точки A и B находятся по одну сторону от секущей, то через середину M_3 стороны AB провести прямую, параллельную AA_1. Воспользоваться свойством средней линии трапеции и свойством точки пересечения медиан треугольника.

72. Установить равенство треугольников ABN и MBC и воспользоваться вращением одного из этих треугольников вокруг точки B на угол $60°$.

73. Сумма двух вращений около двух центров соответственно на $90°$ в одном и том же направлении есть центральная симметрия.

В этой симметрии точка C_1 переходит в точку C_2. Следовательно, середина M отрезка C_1C_2 и есть центр симметрии, который с точками A и B образует прямоугольный равнобедренный треугольник с прямым углом в вершине M.

74. Сумма двух указанных вращений есть параллельный перенос. Поэтому вектор $\overrightarrow{C_1C_2}$ характеризует этот перенос. Если точка C совпадает с A, то C_1 также совпадает с A, а точка C_2 вместе с A и B образуют прямоугольный равнобедренный треугольник с прямым углом в вершине C_2. Итак, $|\overrightarrow{C_1C_2}|=\text{const}$ и $(\overrightarrow{AB},\widehat{\overleftarrow{C_1C_2}})=45°$.

75. Рассмотреть треугольник с вершинами в серединах диагоналей и одной из сторон четырехугольника. Использовать соотношение между сторонами треугольника и свойство средней линии треугольника.

76. Рассмотреть параллелограммы, вершины которых совпадают с концами средней линии и серединами диагоналей данных четырехугольников, и установить их равенство. Затем перенести среднюю линию параллельно себе в направлении одной из сторон на отрезок, равный половине этой стороны, и рассмотреть получившийся при этом треугольник, который полностью определен двумя сторонами и углом, заключенным между ними.

77. Так как биссектрисы двух последовательных углов параллелограмма перпендикулярны, то образованный ими четырехугольник $MNPQ$ — прямоугольник. Продолжить биссектрису AM до пересечения с BC в точке E, а биссектрису CP — до пересечения с AD в точке F и установить, что $AM=ME=CP=PF$, т. е. $MECP$ — параллелограмм и $MP \parallel BC$.

78. Рассмотреть параллелограмм, вершины которого совпадают с концами средних линий четырехугольника (в первом случае этот параллелограмм — прямоугольник, а во втором — ромб), и использовать свойство средней линии треугольника.

79. Рассмотреть ромб с вершинами в серединах сторон четырехугольника.

80. Рассмотреть параллелограмм, вершины которого совпадают с серединами двух первых сторон и серединами диагоналей данного четырехугольника, и доказать, что он является ромбом.

81. Заметить, что образовавшийся параллелограмм с диагональю PC есть ромб.

82. Используя параллельный перенос, доказать, что диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ образуют равные углы с основанием AD. Треугольники ABD и ACD равны, откуда следует равенство боковых сторон AB и CD данной трапеции.

83. Если угол AOB прямой, то BD — ось симметрии и четырехугольник $ABCD$ — дельтоид. Если же этот угол острый, то, отразив точку C относительно диагонали BD, получим точку C' такую, что около четырехугольника $AC'BD$ можно описать окружность, причем этот четырехугольник — трапеция. Отсюда $C'B=AD=CB$.

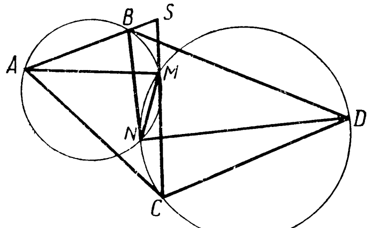
84. Докажем, что отрезки AC и BD равны и перпендикулярны. Сумма вращений около вершин A и B есть симметрия. Сумма вращений около вершин C и D также есть симметрия. Сумма этих двух симметрий есть тождество. Значит, оба центра симметрии совпадают. Из этого центра симметрии M отрезки AB и CD видны под прямыми углами, причем $MA=MB$ и $MC=MD$. Поворотом около точки M на $90°$ точка A переходит в B, а точка C — в D. Значит, отрезок AC переходит в BD, и поэтому $AC=BD$ и $AC \perp BD$.

85. Обозначим середины полуокружностей через O_1, O_2, O_3, O_4. Сумма вращений около этих центров на углы $+90°$, $-90°$, $+90°$, $-90°$ переводит вершину A четырехугольника $ABCD$ в себя. Следовательно, сумма этих четырех вращений есть тождество. Сумма первых двух вращений есть перенос, сумма последних двух вращений есть обратный перенос. Эти переносы образуют равные углы с O_1O_2 и O_3O_4. Значит, $O_1O_2 \parallel O_3O_4$. Аналогично $O_2O_3 \parallel O_4O_1$. Поэтому четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$— параллелограмм.

86. Обозначим середины полуокружностей, построенных на сторонах AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ вне его, соответственно через O_1, O_2, O_3, O_4. Вращение вершины A вокруг этих центров последовательно на $90°$ в одном и том же направлении переводит точку A в себя. Следовательно, сумма этих четырех вращений есть тождественное преобразование. Согласно задаче № 84 точки O_i служат вершинами четырехугольника с равными и перпендикулярными диагоналями.

87. Установить равенство отрезков AM, AN, MN, используя признак равенства треугольников и свойство углов параллелограмма.

88. Установить, что расстояние между серединами двух противоположных сторон четырехугольника не больше полусуммы двух других противоположных сторон, т. е. $m_1 \leqslant \frac{a+c}{2}$ и $m_2 \leqslant \frac{b+d}{2}$, причем равенство может быть только у трапеции. Следовательно, $m_1 + m_2 \leqslant \frac{a+b+c+d}{2}$, поэтому данное в условии равенство возможно лишь тогда, когда $m_1 = \frac{a+c}{2}$ и $m_2 = \frac{b+d}{2}$, что влечет за собой параллельность обеих пар противоположных сторон.



Черт. 7

89. Дополнить треугольник ABC до параллелограмма $ACBD$ и доказать, что его диагональ CD равна и перпендикулярна стороне AC.

90. Соединить центры с точками касания и рассмотреть равнобедренные треугольники.

91. Провести общую хорду MN окружностей и продолжить CM до пересечения с продолжением AB в точке S (черт. 7). Очевидно, $\angle BND = \angle BAM + \angle MCD = \angle BAM + \angle MSB = \angle AMC$.

92. Воспользоваться свойствами вписанных в окружности углов и вписанного четырехугольника.

93. Воспользоваться свойствами средней линии треугольника, признаком и свойствами параллелограмма.

94. Рассмотреть два случая, соответствующие двум дугам AB. В одном случае постоянный угол равен $90° - \frac{\angle C}{2}$, а в другом — $90° + \frac{\angle C}{2}$, где C есть точка пересечения касательных в точках A и B. Обратить внимание на случай, когда касательные в точках A и B параллельны.

95. Воспользоваться тем, что касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, а также тем, что если углы между касательными, проведенными к равным окружностям, равны, то равны и отрезки касательных.

96. Установить равенство треугольников CT_1T_2 и DT_1T_2, что приводит к параллельности CD и T_1T_2. Построить ось симметрии полученной равнобочной трапеции. Заметить, что задача может быть отнесена к абсолютной геометрии.

97. Установить равенство углов CT_1T_2 и DT_2T_1 и равенство отрезков CT_1 и DT_2 (см. задачу № 96).

98. Воспользоваться тем, что дуги, заключенные между параллельными хордами, равны, и теоремой, ей обратной.

99. Установить, что окружность, описанная около данного треугольника, касается высоты CH_3. Обнаружить, что четырехугольник OCH_3M_3 — прямоугольник.

100. Из центра окружности опустить перпендикуляр на диагональ, не являющуюся диаметром окружности.

101. Соединить центр окружности с точками касания и рассмотреть два равных прямоугольных треугольника.

102. Убедиться, что AM и BM являются внешними биссектрисами углов A и B треугольника ABM.

103. Установить, что точки C и D принадлежат окружности, описанной около треугольника OO_1B. Воспользоваться свойствами четырехугольника, который может быть вписан в окружность.

104. Установить равенство диагоналей AD и CF шестиугольника, используя теорему о равенстве хорд одной окружности, стягивающих равные дуги.

105. Воспользоваться теоремой о равенстве хорд, стягивающих равные дуги в одной и той же окружности.

106. Из центров окружностей опустить перпендикуляры на произвольную секущую; через середину одной из хорд провести прямую, параллельную линии центров, и рассмотреть образовавшийся прямоугольный треугольник.

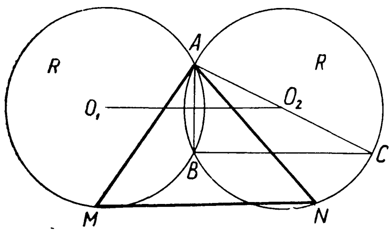
107. Рассмотреть две равнобочные трапеции, имеющие общую сторону, вписанные в данные окружности.

108. Соединить каждую из точек пересечения внутренней касательной данных окружностей и их внешними касательными с цент-

рами окружностей и установить, что образовавшийся четырехугольник — прямоугольник. Воспользоваться центральной симметрией данных окружностей.

109. Так как угол O_1AO_2 равен φ, то $\angle BAC = \angle MAN = \frac{\varphi}{2}$ (черт. 8). Отсюда $\angle MB = \angle NC$. Совмещая окружности параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$, убедиться, что точка B совпадает с точкой C, а поэтому точка M — с точкой N. Итак, $MN \parallel O_1O_2$, $MN = O_1O_2$.

110. См. указания к задачам № 40 и 96.



Черт. 8

111. Пусть окружности касаются внешним образом. Провести прямые TC и TD, встречающие первую окружность в точках C_1 и D_1. Установить параллельность хорд AB и C_1D_1 и перпендикулярность биссектрис углов ATB и D_1TC_1. Аналогичные рассуждения провести для второго случая, когда окружности касаются внутренним образом.

112. Пусть окружности пересекаются в точках A и B, а общая касательная касается их в точках T_1 и T_2. Установить, что $\angle AT_1T_2 = \angle T_1BA$, $\angle AT_2T_1 = \angle T_2BA$.

113. Если KA и KB пересекают внутреннюю окружность в точках A_1 и B_1, то установить параллельность прямых AB и A_1B_1. Заметить, что точка T является серединой дуги A_1TB_1.

114. Пусть точка T лежит между C и D. Если AT и BT пересекают окружность вторично в точках P и Q, то $\angle ATC = \angle ABT = \angle APQ$, и поэтому $PQ \parallel CD$. Значит, $PC = QD$ и $\angle CAP = \angle QBD$. Если точка T лежит вне отрезка CD, то $\angle ATC + \angle ABT = 180°$, $\angle ABT = \angle APQ$. Следовательно, $\angle ATC + \angle APQ = 180°$ и $CD \parallel PQ$. Далее, $\angle CAT + \angle DBT = (180° - \angle PAC) + (180° - \angle DBQ) = 180°$.

115. Соединить точки A и B_1 со второй точкой пересечения данных окружностей, а также соединить обе точки пересечения. Воспользоваться свойствами вписанных углов и углов, образованных касательной и хордой. Рассмотреть случай, когда точка пересечения окружностей лежит между точками A и B_1, и случай, когда она лежит вне отрезка AB.

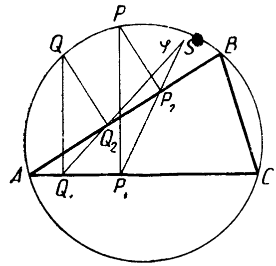
116. Установить равенство треугольников BCE и BDF, используя свойства вписанных углов и вписанных в окружность четырехугольников.

117. Рассмотреть два случая: точка M лежит внутри треугольника ABC, и точка M лежит вне этого треугольника. В первом случае имеем: $\angle MAC = \angle MBC$, $\angle MAB = \angle MCB$, $\angle MCA = \angle MBA$. Отсюда следует, что $MA \perp BC$, $MB \perp AC$. Заметить, что сторона AB видна из точек C и M под углами, сумма которых равна 180°. Воспользоваться геометрическим местом точек, из которых отрезок виден под данным углом. Второй случай аналогичен.

118. Если из точек P и Q окружности, описанной около треугольника ABC (черт. 9), опущены перпендикуляры PP_1, PP_2 и QQ_1, QQ_2 соответственно на стороны AB и AC, то угол φ между прямыми P_1P_2 и Q_1Q_2 равен разности $|\angle P_1P_2A - \angle Q_1Q_2A|$. Последнюю разность заменить разностью углов P_1PA и Q_1QA, которая зависит только от хорды PQ, т. е. равным хордам PQ соответствуют равные углы φ.

119. Установить, что хорда, соединяющая середины дуг AB и AC, перпендикулярна биссектрисе угла A. Воспользоваться свойствами вписанных углов и углов с вершинами внутри окружности.

120. 1) Допустить противоположное. Провести в точке E касательные к обеим окружностям, которые должны образовать со стороной EC равные углы, и обнаружить противоречие. 2) Решение аналогично первому.



Черт. 9

121. Установить, что $\angle AA_1B = \angle A_1BB_1 = \angle 60°$. Для многоугольника доказать, что он равноугольный и описанный, а поэтому правильный.

122. Проверить справедливость следующих равенств: $\angle CBC_1 = \angle CLC_1$, $\angle CBA = \angle ACS$, где S — точка на касательной к описанной окружности в точке C, $L \equiv (AC \times C_1K)$.

123. Воспользоваться теоремой об измерении угла с вершиной внутри окружности.

124. Доказать, что $\angle A = \angle PMN = \angle NQB$, пользуясь свойствами углов вписанного в окружность четырехугольника.

125. Заметить, что $\angle B_1A_1C = \angle B_1H_3C$, учитывая, что около четырехугольника $CA_1H_3B_1$ можно описать окружность. Затем доказать, что $\angle A = \angle B_1H_3C$.

126. Доказать, что окружность, построенная на диаметре SP, проходит через основания перпендикуляров, опущенных из точки P на данные прямые. Воспользоваться свойствами вписанных углов.

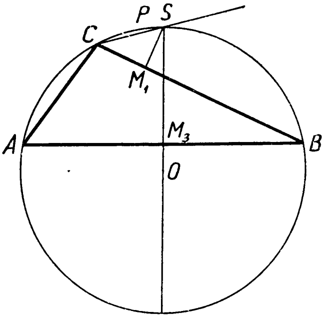
127. Предположить противное. Пусть описанная окружность пересекает серединный перпендикуляр в точке S, отличной от P (черт. 10). Опустить из точки S на BC перпендикуляр и установить, что его основание M_1 есть точка, для которой $AC + CM_1 = BM_1$, что противоречит условию задачи. Для доказательства последнего равенства убедиться в том, что CS есть внешняя биссектриса угла C.

128. Если точки E и F лежат на сторонах AD и DC дельтоида, то около четырехугольника $OEDF$ можно описать окружность. Заметить, что $\angle EOD = \angle EFD = \frac{\angle C}{2}$.

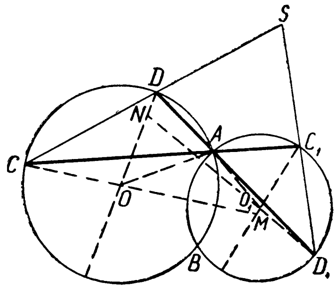
129. Через точки C и C_1, D и D_1 провести диаметры (черт. 11). Из точки A опустить на них перпендикуляры и показать, что углы

между этими парами диаметров равны или в сумме составляют 180°. Связать этот угол с углом OAO_1 и углом между продолжениями хорд.

130. Отразить точку A относительно середины отрезка O_1O_2 и из полученной точки A' опустить на секущую перпендикуляр. Доказать, что отрезок этой секущей, ограниченный точками пересечения с окружностями, делится перпендикуляром пополам. Опустить из точек O_1 и O_2 на секущую перпендикуляры и воспользоваться теоремами о сравнительных длинах проекций отрезков на данную секущую.



Черт. 10



Черт. 11

131. Установить, что если указанные окружности касаются, то в четырехугольник можно вписать окружность, а затем методом от противного доказать обратное.

132. Установить, что точка пересечения двух окружностей лежит на третьей окружности. Воспользоваться свойствами углов вписанных четырехугольников.

133. Доказать, что стороны четырехугольника, о котором идет речь в задаче, параллельны соответствующим сторонам четырехугольника с вершинами в точках касания данного четырехугольника с вписанной в него окружностью.

134. Дважды используя признак вписанного в окружность четырехугольника, установить равенство углов MAC и MBC.

135. Установить равенство углов MBO' и $MO'B$. Воспользоваться свойствами вписанных углов и свойством внешнего угла треугольника.

136. Учесть, что расстояние от ортоцентра H треугольника до его вершины C равно двум расстояниям центра описанной окружности до соответствующей стороны. Соединить центр описанной окружности с серединой отрезка CH. Воспользоваться теоремой о средней линии треугольника.

137. Продолжить высоту CH_3 до пересечения с описанной окружностью в точке C_0 и доказать равенство углов HBA и ABC_0.

Воспользоваться свойствами вписанных углов и углов с перпендикулярными сторонами.

138. Установить, что каждая из этих окружностей симметрична с описанной окружностью относительно соответствующей стороны треугольника. Воспользоваться результатом задачи № 137.

139. Пусть углы B и D четырехугольника $ABCD$ прямые, E и F — точки пересечения его пар противоположных сторон. Провести прямую AC и установить, что $AC \perp EF$. Доказать, что середины гипотенуз являются вершинами четырехугольника, стороны которого параллельны AC и EF.

140. Доказать, что $\angle MKN = 2\angle C$ (или $\angle MKN + 2\angle C = 360°$). Учитывая, что $MK = NK$, установить, что K — центр окружности, описанной около треугольника MNC. На этой окружности лежит и точка H. Поскольку HC — диаметр окружности, доказать, что точка K принадлежит CH.

141. Опустить из центра O описанной окружности перпендикуляр OM_2 на AC. Треугольники CM_2O и CHH_1 равны и $CH_1 = \frac{1}{2}AC$, а это значит, что $\angle C = 60°$.

142. Установить, что треугольник AMC (AMB) равнобедренный и точка M проектируется в постоянную точку прямой AC. Рассмотреть два случая: 1) точка B лежит между A и C, 2) точка C лежит между A и B.

143. Если вершина прямого угла скользящего треугольника и вершина данного прямого угла лежат по разные стороны от гипотенузы, то искомым геометрическим местом является отрезок, образующий со сторонами угла углы, равные углам прямоугольного треугольника; концы отрезка отстоят от вершины данного угла на расстояниях, равных гипотенузе и одному из катетов. Аналогично рассмотреть случай, когда вершины прямых углов лежат по одну сторону от гипотенузы.

144. Описать около четырехугольника $AMBC$ окружность. Установить, что отрезок CM_i образует со сторонами данного угла постоянные углы.

145. Заметить, что прямые MA и MB либо пересекаются на биссектрисе угла C, либо $\angle AMB = 120°$, либо $\angle AMB = 60°$.

146. Доказать, что из точки касания окружностей отрезок их общей касательной виден под прямым углом. Искомое геометрическое место точек есть окружность, имеющая своим диаметром отрезок с концами в данных двух точках, которые геометрическому месту не принадлежат.

147. Построить две точки геометрического места и рассмотреть две пары равных вписанных углов. Воспользоваться признаком принадлежности четырех точек к одной окружности.

148. Установить, что точка пересечения перпендикуляров в концах отрезка находится от вершины угла на постоянном расстоянии, равном диаметру переменной окружности постоянного радиуса, определяемого данным углом и данным отрезком. Геометрическое

место точек представляет собой дугу окружности с центром в вершине данного угла, причем концами дуги являются точки, в которых окружность пересекается перпендикулярами к сторонам угла в его вершине.

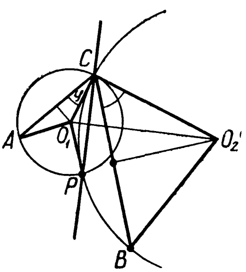
149. Использовать результат задачи № 51 и установить, что геометрическим местом середин отрезков является луч с началом в середине отрезка AB.

150. 1) Установить, что угол CMD принимает два значения, сумма которых равна 180°. 2) Окружность проходит через концы диаметра AB. Если поменять местами обозначения концов хорды, то получим вторую окружность, симметричную первой относительно диаметра AB. Обе эти окружности касаются окружности, полученной выше, в пункте 1.

151. Установить, что $\angle APB+\angle C=180°$, или $\angle APB=\angle C$. Рассмотреть четырехугольники $AMPK$ и $BNKP$, вписанные в данные окружности.

152. Отраженная точка P обладает тем свойством, что $\angle APB= =\angle ANB$, или $\angle APB+\angle ANB=180°$. Искомое геометрическое место точек есть окружность, симметричная данной относительно прямой AB.

153. Геометрическим местом точек M является биссектриса угла C и дуга окружности, стягиваемая хордой AB и вмещающая угол $(180°-\angle C)$. Для установления этого рассмотреть случай, когда $MA=MB$ и когда $MA\neq MB$.



Черт. 12

154. Если перпендикуляры в точках A и B пересекаются в точке P, то отрезок PM виден из вершин A и B треугольника под прямыми углами. Установить, что точка C лежит на окружности, описанной около четырехугольника $AMBP$. Геометрическое место есть описанная около треугольника окружность.

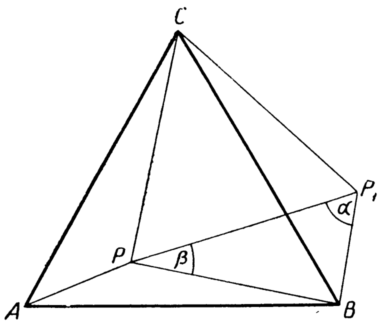
155. Пусть две ортогональные окружности O_1 и O_2 пересекаются в точке P (черт. 12). Положим, $\angle O_1CA=\angle O_1AC=\varphi$, $\angle O_2CB=\angle O_2BC= =\psi$, $\angle CO_1P=\alpha$, причем $\angle O_1CO_2=\angle O_1PO_2= =90°$. Отсюда $\angle AO_1P=180°-\alpha-2\varphi$ и $\angle O_1PA=\frac{1}{2}[180°-(180°-\alpha- -2\varphi)]$. Итак, $\angle O_1PA=\varphi+\frac{\alpha}{2}$. Аналогично $\angle O_2PB=\frac{1}{2}[180°- -(180°-2\psi-180°+\alpha)]=90°+\psi-\frac{\alpha}{2}$.

Поэтому $\angle APB=360°-\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)-\left(90°+\psi-\frac{\alpha}{2}\right)-90°= =180°-(\varphi+\psi)=90°+\angle C$, т. е. отрезок AB виден из точки P под постоянным углом. Рассмотреть еще два случая расположения точек O_1 и O_2 относительно сторон угла ACB. Если $\angle C=90°$, то геометрическое место есть прямая. Другое решение основано на применении преобразования инверсии с центром в точке C.

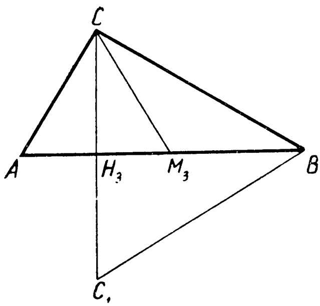
156. Повернуть отрезок CP (черт. 13) около точки C на 60° в положение CP_1. Положим, $\angle PP_1B=\alpha$, $\angle P_1PB=\beta$. Тогда $\angle APC = \angle CP_1B=60^\circ+\alpha$, $\angle BPC=60^\circ+\beta$. Следовательно, $150^\circ+60^\circ+\alpha+60^\circ+\beta=360^\circ$ и $\alpha+\beta=90^\circ$. Отсюда $\angle PBP_1=90^\circ$.

157. Рассмотреть четырехугольники, вписуемые в окружность, и воспользоваться свойствами вписанных углов.

158. Пусть $\angle ACH_3=\angle H_3CM_3=\angle M_3CB$ (черт. 14). Заметить, что $BM_3=2M_3H_3$. Отразить вершину C относительно AB в точку C_1 и доказать, что в треугольнике BCC_1 точка M_3 является центроидом и инцентром. Следовательно, треугольник BCC_1 равносторонний и $\angle ACB=90^\circ$.



Черт. 13



Черт. 14

159. П е р в о е р е ш е н и е. Из точки M стороны AB опущены на две другие стороны перпендикуляры MP и MQ, которые удвоены (черт. 15). Установить, что $CP_1=CQ_1=MC$, $P_1Q_1=2PQ$ и $\angle P_1CQ_1=2\angle ACB$. Следовательно, основание P_1Q_1 равнобедренного треугольника P_1CQ_1 с постоянным углом при вершине C будет наименьшим тогда, когда боковая сторона его будет наименьшей. Последнее возможно при условии, что CM — высота треугольника ABC.

В т о р о е р е ш е н и е. Рассмотреть четырехугольник $MPCQ$ (черт. 15) и установить, что около него можно описать окружность диаметра MC. Отсюда хорда PQ равна $MC \sin C$. Очевидно, последнее выражение будет иметь минимум, если MC — высота треугольника.

160. Предположить противное, отразить один из треугольников относительно данной диагонали и воспользоваться теоремой о соотношении сторон треугольника.

161. П е р в ы й с п о с о б. Доказать, что $\angle BH_3N = \angle A$ и поэтому прямая H_3N пересекает сторону AC в ее середине S. Установить, что треугольник CH_3S равнобедренный, а четырехугольник MNH_3C вписанный.

В т о р о й с п о с о б. В вершине B тупого угла треугольника ABC восставить перпендикуляр к стороне AB, встречающий сторону AC в точке D; угол CBD равен углу A. Но углу A равен $\angle MH_3C$, а следовательно, и $\angle MNC$ (четырехугольник MNH_3C вписуем). Отсюда прямые BD и MN параллельны.

162. Провести через вершину A секущую под углом в 60° к основанию AB (черт. 16), которая пересечет отрезок BB_1 и сторону BC соответственно в точках M и N. Установить, что треугольники AMB и MNB_1 равносторонние, а треугольник A_1MB равнобедренный ($MB = AB = A_1B$). Отсюда в треугольниках A_1MB_1 и $A_1NB_1 : B_1M = B_1N$, A_1B_1 — общая сторона и $\angle A_1NB_1 = \angle A_1MB_1 = 100°$, т. е. треугольники равны.

163. Заметить, что треугольник $O'O_3A$ является прямоугольным, и воспользоваться результатом задачи № 135.

164. Пусть секущая встречает BC в точке P, а продолжение AC — в точке Q. Рассмотреть два вписуемых четырехугольника $OMAQ$ и $OMPB$. Доказать равенство углов QOM и MOP, используя равенство углов CAB и CBA. Отсюда $QM = MP$.

165. Установить, что равенство углов ACH_3 и M_3CB влечет за собой перпендикулярность сторон AC и BC. Следовательно, $\angle B = 22{,}5°$.

166. Заметить, что расстояние от центра описанной окружности до соответствующей стороны треугольника равно $\frac{R}{2}$. Рассмотреть два случая, когда угол при данной вершине острый и тупой.

167. Установить, что треугольник BAC' прямоугольный. Опустить из центра O на хорду AB перпендикуляр, встречающий BC' в S, и доказать, что точка S — середина BC'. Провести в треугольнике $AC'N$ среднюю линию, параллельную катету AC'.

168. Установить, что $\angle A'TM = \angle TBA'$, откуда следует, что $TA' \perp TB$ (T — точка касания). Провести через точку T диаметр TT_1 и доказать параллельность BT_1 и $A'T$.

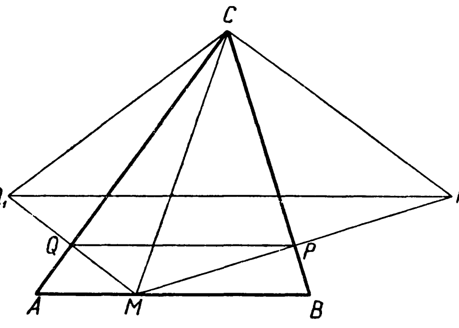
169. Отразить треугольник и секущую относительно середины стороны и рассмотреть получившийся прямоугольник. На двух сторонах параллелограмма, как на диаметрах, описать окружности и установить, что отрезок секущей, проходящий через вершину треугольника и заключенный внутри окружностей, будет максимальным, если он параллелен линии центров.

170. Рассмотреть три случая, соответствующие различным возможным положениям точки M относительно треугольника ABC. Например, если точка M лежит внутри треугольника, то два угла при этой точке обязательно тупые, а третий может быть острым, прямым или тупым. Выясним справедливость теоремы для каждого из этих углов: а) если угол острый, то только одна из точек A_1, B_1, C_1 лежит на продолжении стороны треугольника; б) если угол прямой, то также только одна из них лежит на продолжении стороны (две другие — вершины треугольника); в) если угол тупой, то точки A_1, B_1, C_1 лежат на продолжениях сторон. Аналогично выяснить два других случая.

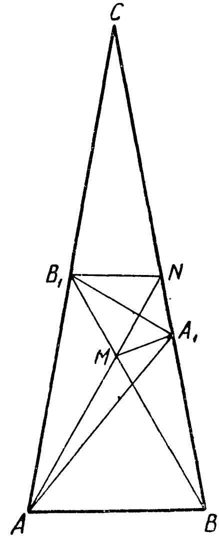
171. Повернуть отрезок MB вокруг точки M на 60°, образуя равносторонний треугольник MBB_1 и два равных треугольника ABM и BB_1C. Установить, что если точка M лежит на описанной около данного треугольника окружности, то треугольник MB_1C вырождается.

172. Углы A_1PC_1 и ABC равны (или в сумме составляют 180°). Отсюда следует, что $AC = A_1C_1$. Из равенств $A_1C = BP$ и $BP = AC_1$ следует, что $A_1C = AC_1$. Таким образом, $AA_1 \parallel CC_1$.

173. На сторонах прямого угла от его вершины отложить отрезки, равные полупериметру прямоугольника, и построить на них квадрат. Затем установить, что все указанные в задаче прямые проходят через вершину квадрата, лежащую вне сторон прямого угла. Обратить внимание на то, что оба прямоугольника, которые получаются внутри квадрата при построении произвольного прямоугольника с данным периметром, обладают тем свойством, что их диагонали попарно перпендикулярны.



Черт. 15

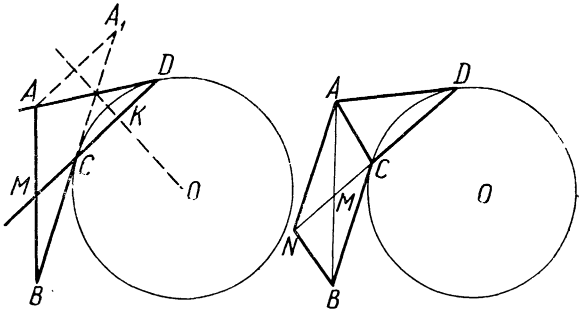


Черт. 16

174. Рассмотреть треугольник CC_1D и установить, что средняя линия OM_3 этого треугольника перпендикулярна хорде AB.

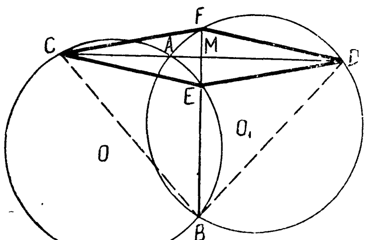
175. Первый способ. Из центра опустить перпендикуляр на хорду, соединяющую точки касания, и рассмотреть его как ось симметрии для касательных. Отразить точку A относительно этой оси и воспользоваться теоремой о средней линии треугольника (черт. 17).

Второй способ. Через одну из данных точек провести прямую, параллельную касательной, проведенной из второй точки, и установить, что получившийся при этом четырехугольник с диагональю AB — параллелограмм. Затем доказать, что сторона параллелограмма, противоположная отрезку касательной, равна отрезку второй касательной, как боковые стороны равнобедренного треугольника. Если точки касания лежат по одну сторону от AB, то доказательство аналогичное.



Черт. 17

176. 1) Так как $\angle DCB = \angle CDB$ и $BF \perp CD$ (черт. 18), то высота BM (M — точка пересечения CD и BF) будет являться и медианой равнобедренного треугольника CBD, т. е. $CM = MD$. Затем устанавливается равенство ME и MF, как проекций наклонных AE и AF, которые равны в силу того, что стягивают равные дуги ($\angle ABF$ измеряется половиной $\smile AE$ или половиной $\smile AF$). 2) Воспользовавшись свойствами вписанных углов и углов с перпендикулярными сторонами, установить, что $ED \parallel OO_1$. Равенство отрезков ED и OO_1 установить посредством параллельного переноса.



Черт. 18

177. Установить равенство треугольников AT_1Q_1 и $T_2T_1Q_2$, используя свойство углов, связанных с окружностью, и то, что треугольник AT_1T_2 равносторонний.

178. Воспользоваться свойствами параллельных хорд, проведенных в окружности.

179. Предположить противное, т. е. $\angle MAB > \angle MBA$. Тогда $\angle MBC > \angle MCB$ и $\angle MCA > \angle MAC$. Рассмотрев стороны AM, MB и MC образовавшихся треугольников, получить противоречие: $AM < BM < MC < AM$.

180. Продолжить высоту до пересечения ее с окружностью и полученную точку соединить со вторым концом диаметра. Затем установить, что проведенный отрезок параллелен стороне треугольника, а, значит, биссектриса делит дугу, стягиваемую этой стороной, пополам.

181. Установить, что если точка M — середина средней линии A_1B_1 треугольника ABC и ON — перпендикуляр, опущенный на сторону AB из центра O описанной окружности, то NC пересечет

A_1B_1 в точке M и $CM = MN$. Следовательно, отрезку NO симметричным относительно точки M будет некоторый отрезок CK, лежащий на высоте CH_3.

182. Предположить противное; тогда медиана BM_2 треугольника ABC делит сторону AC пополам, а также делит ее пополам перпендикуляр, опущенный из центра O окружности на эту сторону. Противоречие отвергает предположение.

183. Рассмотреть треугольник CC_1C_2 и установить, что точка O' пересечения биссектрис углов A и B равноудалена от точек C, C_1 и C_2, откуда и следует, что перпендикуляр $O'K$, опущенный из точки O' на сторону AB, делит C_1C_2 пополам. Установив, что $\angle C_1O'C_2 = 2\angle C_1CC_2$, подсчитать, что $\angle C_1O'C_2 = 180° - \angle ACB$.

184. Установить равенство углов NAB и ANK (K — точка пересечения AB с касательной в точке N), используя свойства углов с перпендикулярными сторонами, а также равенство углов, связанных с окружностью. Затем рассмотреть прямоугольный треугольник ANB и показать равенство углов KNB и KBN, после чего усмотреть, что точка K — середина стороны AB.

185. Рассмотреть треугольник CO_1O_2 с вершинами в центрах O_1 и O_2 вписанных окружностей и в вершине C прямого угла данного треугольника ABC и установить, что отрезки биссектрис углов A и B являются высотами треугольника CO_1O_2. Следовательно, биссектриса угла C, встречая биссектрисы углов A и B в точке их пересечения, также будет высотой треугольника CO_1O_2.

186. Провести биссектрисы CC_1 и CC_2 углов ACH_3 и BCH_3; установить, что треугольник CC_1O_2 прямоугольный и равнобедренный, пользуясь при этом перпендикулярностью BO' и CC_1. Показать далее, что угол $C_1O'C_2$ прямой, как центральный угол окружности, описанной около треугольника CC_1C_2. Проверить принадлежность точек C_1, O_1, O', O_2, C_2 к одной окружности с диаметром C_1C_2.

187. Рассмотреть периметры треугольников (данного и полученных от проведения секущей) и воспользоваться результатом задачи № 108.

188. Установить, что эти треугольники имеют соответственно параллельные стороны. Воспользовавшись окружностью, описанной около данного треугольника, и свойствами параллелограмма, показать равенство какой-либо пары сходственных сторон этих треугольников. Обратить внимание на то, что противоположные стороны параллелограммов одинаково удалены от центра описанной окружности.

189. Рассмотреть четырехугольники, на которые разбивается данный биссектрисами. Установить, что они попарно имеют по два соответственно равных угла, а поэтому суммы двух других углов также равны. Из последних равенств следует, что суммы противоположных углов данного четырехугольника равны.

190. Через данную точку P провести прямую, параллельную той из данных трех прямых, от которой точка P наиболее удалена.

Рассмотреть образовавшийся равносторонний треугольник и установить, что сумма расстояний точки P до двух его сторон равна высоте треугольника.

191. Пусть, например, выполнены первые два условия, тогда через середину одной из сторон и точку пересечения диагоналей провести прямую, а затем, воспользовавшись свойствами вписанных углов и углов с соответственно перпендикулярными сторонами, доказать, что эта прямая перпендикулярна к противоположной стороне. Аналогично доказываются и другие случаи.

192. Описать около четырехугольников AA_1CA_2 и BB_1CB_2 окружности и воспользоваться свойствами вписанных углов и углов с соответственно перпендикулярными сторонами. Доказать, что стороны углов AA_2A_1 и B_1B_2C соответственно перпендикулярны.

193. Рассмотреть два вписуемых четырехугольника ABH_1H_2 и $A_1B_1H_1H_2$ и установить параллельность прямых AB и A_1B_1 на основании равенства соответственных углов.

194. Воспользовавшись свойствами трех вписуемых четырехугольников и равенством вертикальных углов, образуемых прямой, соединяющей основания перпендикуляров, и стороной BC треугольника, установить, что угол CMB равен углу A или дополняет его до $180°$ (обратная теорема Симсона).

195. Установить, что четырехугольник $A_1C_1B_1D$ вписуемый, рассматривая вписуемые четырехугольники AA_1CH_3, BB_1CH_3, A_2CB_2D. Затем доказать, что точки D, C, H_3 расположены на одной прямой.

196. Согласно теореме Эйлера такие шесть точек служат серединами сторон и диагоналей некоторого четырехугольника, а окружности, описанные около рассматриваемых треугольников, являются окружностью Эйлера соответствующих четырех треугольников, а последние пересекаются в одной точке.

197. Параллельно перенести стороны AB и CD так, чтобы их концы B и C совместились в середине M_2 стороны BC. В образовавшемся треугольнике $A'M_2D'$ медиана M_2M_4 является также биссектрисой.

198. Провести диагональ четырехугольника и доказать методом от противного.

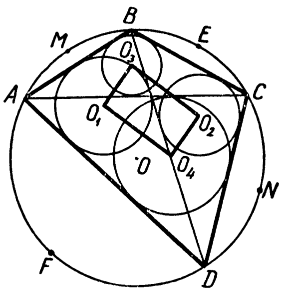
199. Установить, что точка пересечения диагоналей данного четырехугольника является точкой пересечения биссектрис углов нового четырехугольника. Затем установить, что сумма противоположных углов этого четырехугольника выражается через углы данного четырехугольника $ABCD$ следующим образом: $4d - 2(\angle BCA + \angle CAD)$. Но $\angle BCA + \angle CAD = d$ $(AC \perp BD)$.

200. Доказать, что если M, N, E, F — середины дуг AB, CD, BC и AD, на которые разбивается окружность вершинами четырехугольника $ABCD$ (черт. 19), то центры O_1 и O_2, O_3 и O_4 окружностей, вписанных в данные треугольники, лежат в точках пересечения биссектрис AE и BF с окружностью, описанной из точки M радиусом MA, и в точках пересечения биссектрис CF и DE с окруж-

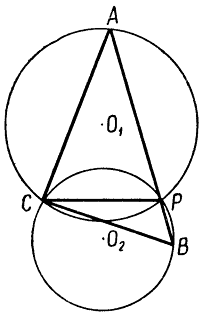
ностью, описанной из точки N радиусом NC. Затем установить перпендикулярность пар прямых: NM и EF, O_1O_3 и MN, O_3O_4 и MN (из равнобедренных треугольников MO_1O_3 и NO_2O_4).

201. Если основания перпендикуляров обозначим соответственно через A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, то установить, что следующие четверки точек принадлежат одной окружности: A_1, A_2, C_1, B_2; A_1, A_2, B_1, C_2; A_1, A_2, C_1, C_2.

202. Доказать методом от противного, воспользовавшись свойством окружности Эйлера для треугольника.



Черт. 19



Черт. 20

203. Если треугольник $A_1A_2A_3$ занимает после поворота положение $B_1B_2B_3$, то установить параллельность прямых A_2B_2, A_3B_1 и A_1B_3 и симметрию образовавшегося шестиугольника относительно диаметра, перпендикулярного A_2B_2. Аналогичным образом обнаружить наличие еще двух осей симметрии шестиугольника и равенство всех его сторон. Для n-угольника доказательство аналогичное.

204. Воспользоваться свойствами осевой симметрии и понятием полуправильных многоугольников.

205. Если $\angle ACO_1 = \alpha$, $\angle BCO_2 = \beta$ (где O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ACP и BCP), то $\angle APC = 90° - \alpha$, $\angle BPC = 90° + \beta$ (черт. 20). Итак, $(90° - \alpha) + (90° + \beta) = 180°$ и $\alpha = \beta$. Значит, $\angle O_1CO_2 = 90°$ и окружности O_1 и O_2 ортогональны.

206. Нетрудно установить, что $AM = \frac{1}{2}(AC + AC_1)$ и $BM = \frac{1}{2}(BC + BC_1)$. Но $AC = \frac{k}{1+k}AB$, $CB = \frac{AB}{1+k}$; $AC_1 = -\frac{k}{1-k} \cdot AB$; $BC_1 = \frac{AB}{1-k}$. Отсюда имеем: $AM : BM = -k^2$, т. е. деление отрезка AB точкой M будет внешним в отношении k^2.

207. Воспользоваться теоремой о пересечении пучка прямых параллельными прямыми и показать, что секущая, проведенная через точку A_2 и точку пересечения прямых m и n, разделит отрезки BB_1 и CC_1 в отношении $AA_2 : A_2A_1$, т. е. эта секущая пройдет

через точки B_2 и C_2. Если прямые m и n параллельны, то доказательство упрощается.

208. Продолжить M_1M_3 до пересечения с AQ в точке S и, пользуясь основной теоремой о пропорциональных отрезках, доказать, что $PM_3 = M_3S$, т. е. четырехугольник $APBS$ — параллелограмм и прямые AQ и BP параллельны.

209. Рассмотреть пучки прямых с вершинами в точках C и B, пересеченных параллельными прямыми AA_1 и MN, и установить, что $MN : C_1N = AA_1 : PA_1 = C_1N : ND$, откуда и следует искомое равенство.

210. Пусть прямые, проведенные соответственно через точки E и F основания AB треугольника ABC, пересекаются в точке P. Тогда прямая CP пересечет сторону AB в такой точке S, что $AE : ES = CP : PS = BF : FS$. Но по условию $AE = BF$, поэтому и $ES = FS$, т. е. CS — медиана треугольника ABC.

211. Все точки, расположенные внутри треугольника или на его сторонах, удовлетворяют этому условию, и поэтому они принадлежат геометрическому месту. Если точка лежит вне треугольника, то данное в условии равенство не выполняется. Для доказательства провести через точку P чевианы и рассмотреть сумму отношений отрезков чевиан, прилегающих к сторонам, к соответствующим чевианам.

212. Рассмотреть две пары образовавшихся подобных треугольников и установить, что диагонали данного четырехугольника делятся точкой их пересечения в равных отношениях.

213. Рассмотреть две пары подобных треугольников и использовать свойство пропорций.

214. Установить, что $AM : MB = AK : KC = MM_1 : MP$ (M_1— точка пересечения прямых AQ и MN), откуда следует подобие треугольников AMM_1 и BMP, а значит, и параллельность прямых AQ и BP.

215. Если прямые MN и LK проведены соответственно через вершины A и C, то установить, что треугольники MBL и NDK подобны. Для этого рассмотреть ряд подобных треугольников и показать, что $MB : BL = KD : DN$.

216. Заметить, что $\frac{DP}{PB} = \frac{DQ}{DC}$ и $\frac{DP}{PB} = \frac{1}{k+1}$.

217. Предположить противное, тогда данные прямые пересекут сторону CD соответственно в точках Q_1 и Q_2. Затем продолжить AQ_1 до пересечения с BC в точке K и BQ_2— до пересечения с AD в точке L и установить, что $\frac{BC}{CK} = \frac{BP}{PA} = \frac{DL}{AD}$, а значит, и $\frac{DQ_1}{Q_1C} = \frac{AD}{CK} = \frac{DL}{BC} = \frac{DQ_2}{Q_2C}$. Следовательно, точки Q_1 и Q_2 делят отрезок DC внутренним образом в одном и том же отношении, т. е. $Q_1 \equiv Q_2$.

218. Если два треугольника гомотетичны, то их центроиды также гомотетичны. Но если один центроид совпадает с центром гомо-

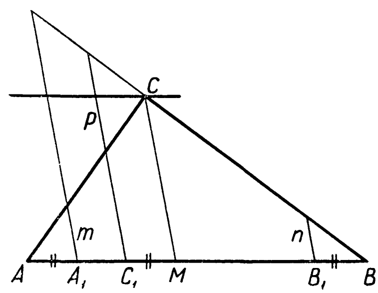
тетии, то гомотетичная ему точка также совпадает с центром гомотетии, ибо центр гомотетии есть инвариантная точка преобразования.

219. Пусть прямая, проведенная через точку P, лежащую на продолжении диагонали DB, и середину M_1 стороны AB, встречает сторону AD в точке K. Если на эту прямую опустить перпендикуляры AA_1, BB_1, DD_1 и рассмотреть образовавшиеся подобные треугольники AA_1K и DD_1K, PDD_1 и PBB_1, то будем иметь: $DK : KA = DP : PB$. Аналогично установить, что $CL : LB = DP : PB$.

220. Отрезки, входящие в очевидную пропорцию $\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB}$, заменить равными отрезками и из полученной после этого пропорции $\frac{AP}{PC} = \frac{DQ}{QB}$ и подобных треугольников AMP и BPC, DNQ и BQC установить равенство отрезков AM и DN.

221. Из подобия треугольников AOD и BOC, ABD и KPD (K — точка пересечения прямых CP и AD), учитывая равенство $BO = PD$, установить, что $BC : AD = BO : OD = PD : BP = KD : AK = (AD - BC) : BC$. Отсюда следует, что $AD^2 = BC^2 + AD \cdot BC$.

222. Установить равенство отношений: $CO : AC = (AD - BC) : AD$ (см. указание к задаче № 221) и $AQ : AC = AL : AD$ (из подобия треугольников ACD и AQL), где L — точка пересечения прямых AD и BQ. Но $AD - BC = AL$, следовательно, и $CO = AQ$.



Черт. 21

223. а) Через вершину C (черт. 21) провести прямую, параллельную стороне AB, и рассмотреть две пары соответственно равных треугольников; б) рассмотреть несколько пар образовавшихся подобных треугольников.

224. Провести прямую C_1M, параллельную AC и пересекающую BC в точке M и A_1B_1 — в точке N, и установить, что $B_1N : B_1C_2 = \lambda + 1$ и $B_1C_1 : B_1A_2 = \lambda + 1$, т. е. A_2C_2 параллельна C_1M и стороне AC. Аналогично доказывается, что $C_2B_2 \parallel CB$ и $AB \parallel A_2B_2$.

225. Продолжить отрезки OM_2 и OM_4 средней линии M_2M_4 (O — точка пересечения диагоналей AC и BD) за точки M_2 и M_4. На этих продолжениях отложить отрезки $OM_2 = M_2K$ и $OM_4 = M_4L$ и рассмотреть параллелограммы $AODL$ и $BOCK$. Установить подобие треугольников OCK и ODL, а затем и равенство отношений: $AO : OC = DO : OB$.

226. Установить, что непараллельные стороны MN и LK трапеции $MNKL$ делят диагональ DB внешним образом в одном и

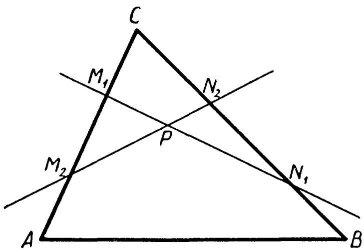
том же отношении. Для этого применить теорему Менелая к треугольнику ABD и секущей MN, а также к треугольнику BCD и секущей LK.

227. Очевидно, $\frac{A_2X}{XP}=\frac{A_1M_1}{M_1P}$, $\frac{PM_1}{M_1B_1}=\frac{PY}{YB_2}$. Отсюда почленным умножением получаем: $\frac{A_2X}{XP}\cdot\frac{PY}{YB_2}=-1$. Но согласно теореме Менелая $\frac{A_2X}{XP}\cdot\frac{PY}{YB_2}\cdot\frac{B_2M'_2}{M'_2A_2}=-1$, следовательно, $B_2M'_2=$ $=M'_2A_2$ и $M_2=M'_2$.

228. Применить теорему Менелая к треугольникам, на которые делится данный четырехугольник одной из своих диагоналей и секущей PS; полученные равенства перемножить.

229. Применить результат задачи № 228 к четырехугольнику $ABCD$ и секущей EF.

230. Воспользовавшись результатом задачи № 229, рассмотреть четырехугольник ABB_1A_1 и секущую CC_1, а затем тот же четырехугольник и секущую DD_1. Полученные равенства приравнять.



Черт. 22

231. Пусть секущая EMF встречает стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ в точках E и F, а продолжения сторон AB и CD — в точках K и L. Тогда, воспользовавшись теоремой Менелая для треугольников KMB и LMD, пересеченных прямыми AED и BFC, установить, что $\frac{ME}{EK}\cdot\frac{KA}{AB}\cdot\frac{BD}{DM}=$ $=-1$ и $\frac{MF}{FL}\cdot\frac{LC}{CD}\cdot\frac{DB}{BM}=-1$, а следовательно, $\frac{ME}{EK}\cdot\frac{FL}{MF}\cdot\frac{KA}{AB}\cdot\frac{BD}{DM}\cdot\frac{CD}{LC}\cdot\frac{BM}{DB}=1$. Но по условию $ME=MF$, и, кроме того, для четырехугольника $KBDL$ и секущей AMC по теореме Менелая имеем: $\frac{KA}{AB}\cdot\frac{BM}{MD}\cdot\frac{DC}{CL}\cdot\frac{LM}{MK}=1$. Значит, $\frac{FL}{EK}=\frac{LM}{MK}$, или $\frac{FL}{EK}=\frac{MF}{ME}$. Отсюда $EK=FL$ и $KM=ML$.

232. Используя свойства пропорций, установить равенство следующих отношений: $\frac{AM_1}{CN_1}=\frac{AM_2}{CN_2}=\frac{M_1M_2}{N_1N_2}$ (черт. 22). Применив далее теорему Менелая к треугольнику M_1N_1C и секущей M_2N_2, а также к треугольнику M_2N_2C и секущей M_1N_1, доказать, что $\frac{M_1P}{PN_1}=k_2$ и $\frac{M_2P}{PN_2}=k_1$.

233. Провести среднюю линию A_2C_2 треугольника ABC, которая встретит в точке P сторону A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ с вершинами в указанных точках деления. На основании результата задачи № 232 заключаем, что B_1P — медиана треугольника $A_1B_1C_1$, пересекающая медиану CC_2 треугольника ABC в точке M так, что $C_2M:MC=PM:MB_1=1:2$,

т. е. точка M — общий центроид этих треугольников. Эта теорема обобщается для четырехугольника. Действительно, построим четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника $ABCD$; стороны его A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2 и D_2A_2 встречают стороны данного четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ в точках M, N, P и Q. Так как ряды точек A, A_1, A_2, B и B, B_1, B_2, C подобны, то на основании задачи № 232 точки M, N, P и Q — середины сторон A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 и D_1A_1, а $MNPQ$, равно как и $A_2B_2C_2D_2$, параллелограмм, причем последние имеют общий центр симметрии, являющийся общим центроидом четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

234. Прямые, выходящие из точек C и D, высекают на прямых QR и AB пропорциональные отрезки: $MP : PR = AB : BS$ и $QM : MR = AB : BS$, т. е. $MP : PR = QM : MR$, или $\frac{MP+PR}{PR} = \frac{QM+MR}{MR}$. Отсюда $RM^2 = RP \cdot RQ$.

235. Рассмотреть треугольники ACB и AMB и установить, что отношение высот CC_2 и MM_2, опущенных на общую сторону AB этих треугольников, равно $\frac{CC_1}{MC_1}$. Отсюда следует, что

$$\alpha_3 = \frac{CM}{MC_1} = \frac{(ABC)-(AMB)}{(AMB)} = \frac{(AMC)+(CMB)}{(AMB)}.$$

Аналогично определяются α_1 и α_2. Затем составить требуемое отношение и выполнить тождественные преобразования над площадями, в результате чего получить искомое равенство. Доказательство, не опирающееся на понятие площади, более громоздко.

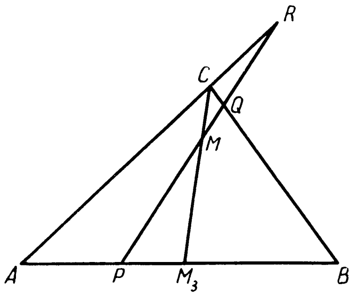
236. Через точки A_1 и A_2 провести окружность, пересекающую окружность, проведенную через точки B_1 и B_2. Если отрезки A_1A_2 и B_1B_2 не имеют общей середины, то обе окружности пересекаются в точках, расположенных на прямой, пересекающей данную прямую в искомой точке. Единственность устанавливается методом от противного посредством вычисления. Если середины указанных отрезков совпадают, то такой точки P не существует.

237. Через центроид треугольника провести прямую параллельную той стороне треугольника, на которой лежит точка P, а через вершины, лежащие на этой стороне,— прямые, параллельные секущей PR, и рассмотреть три пары образовавшихся при этом подобных треугольников.

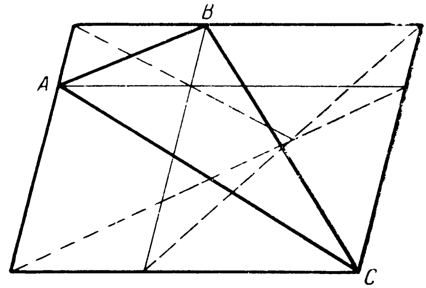
238. Обозначим отношение $\frac{AM_3}{M_3P}$ через β (черт. 23). Тогда, применяя теорему Менелая к треугольнику BCM_3 и секущей PR, будем иметь: $\frac{QC}{CB} = \frac{\alpha}{\beta-\alpha-1}$. На основании той же теоремы определим: $\frac{PM}{MQ} = \frac{\beta-\alpha-1}{\alpha\beta}$ (треугольник BPQ и секущая CM_3).

Аналогично устанавливаем, что $\frac{CA}{CR} = \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha}$ ($\triangle AM_3C$ и секущая CM_3) и $\frac{PM}{MR} = \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ ($\triangle APR$ и секущая CM_3). Отсюда $\frac{PM}{MQ} + \frac{PM}{MR} = \frac{2}{\alpha}$, или $\frac{1}{MR} + \frac{1}{MQ} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{MP}$.

239. Установить, что отрезки каждой диагонали данного параллелограмма, лежащие вне вписанного в него параллелограмма, равны. Отсюда и следует, что точка пересечения диагоналей данного параллелограмма является центром симметрии вписанного параллелограмма.



Черт. 23



Черт. 24

240. Рассмотреть четырехугольник MA_1CB_1 и воспользоваться теоремой Гаусса (см. теорему 7).

241. Провести в данном треугольнике средние линии и применить обратную теорему Менелая к треугольнику, образованному этими средними линиями, и серединам отрезков AA_1, BB_1, CC_1.

242. Рассмотреть две пары подобных треугольников ABK и DBM, ACK и CDN и показать, что $\frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$, или $\frac{AD}{AB} = \frac{AD+AC}{AC}$.

243. Рассмотреть две пары подобных треугольников LCM и NCB, CNK и CAM, откуда и следует подобие треугольников LCK и ACB.

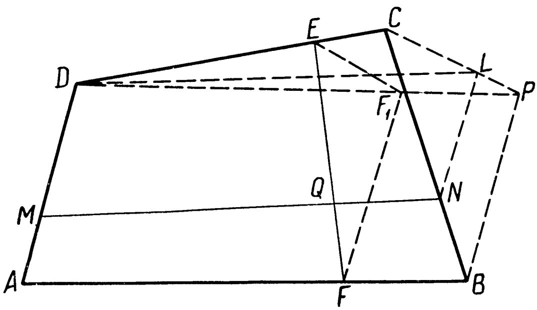
244. Установить, что этот отрезок делится пополам точкой пересечения диагоналей, и доказать, что сумма отношений половины этого отрезка к основаниям трапеции равна 1.

245. Если AB и CD — основания трапеции $ABCD$, равные соответственно a и c, а точки M и N искомые, то, используя параллельный перенос отрезков AM и MD стороны AD и подобие полученных треугольников, установить, что $\frac{AB-MN}{MN-CD} = \frac{AM}{MD}$. Учитывая, что по условию задачи $MN^2 = ac$, подстановкой находим, что $AM : MD = \sqrt{\frac{a}{c}}$.

246. Доказать методом от противного, используя теорему Менелая. Рассмотреть два треугольника, на которые разбивается один из параллелограммов диагональю, не являющейся стороной данного треугольника, и их секущие — диагонали двух других параллелограммов (черт. 24).

247. На сторонах AD и AB построить параллелограмм $ABSD$ и в образовавшемся треугольнике DCS провести медиану DR и отрезок NQ, параллельный CS, пересекающиеся в точке P. Доказать, что прямые PK и QM (K — точка пересечения средней линии M_2M_4 и отрезка MN) параллельны.

248. Перенести сторону AB четырехугольника $ABCD$ параллельно себе в направлении AD так, чтобы она заняла положение DP (черт. 25), и показать, что если точка F стороны AB перейдет в точку F_1 отрезка DP, то EF_1 параллельна CP. В треугольнике CDP точкой L разделить сторону CP в отношении $m : n$ и установить, что $LDMN$ — параллелограмм. Затем доказать, что отрезок,



Черт. 25

соединяющий точку пересечения DL и EF_1 с точкой пересечения EF и MN, параллелен LN и FF_1, и рассмотреть треугольники EFF_1, DCP и DCL.

249. Рассмотреть две пары подобных треугольников: ADP и BMP, ADQ и QBN.

250. Установить, что каждая из медиан делит соответственно отрезки PA_1 и PB_1 в отношении $2 : 1$.

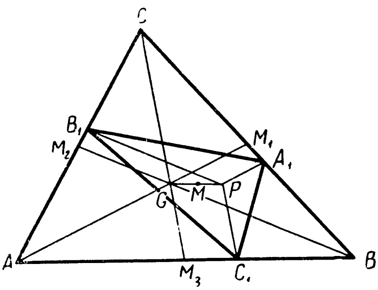
251. Заметить, что треугольник $G_1G_2G_3$ гомотетичен данному с коэффициентом гомотетии, равным $\frac{1}{3}$. В силу гомотетии прямые, проведенные через точки G_1, G_2, G_3 параллельно соответственно AP, BP, CP, пересекаются в одной точке, расположенной на медиане данного треугольника.

252. Применить к решению задачи результат задачи № 251, рассматривая треугольник $A_1B_1C_1$ и точку M. Воспользоваться также результатом задачи № 250 и установить, что центроид треугольника MA_1B_1 лежит на средней линии параллельных прямых CM_3 и PC_1, для чего провести через точку M прямую, параллельную AB (черт 26).

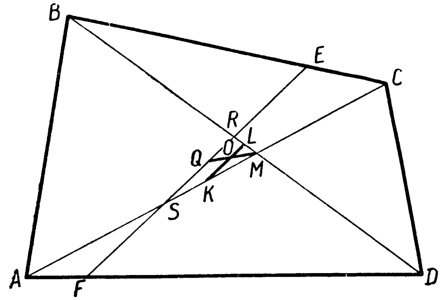
253. Если прямые, соединяющие соответствующие вершины двух треугольников, параллельны, то такие треугольники имеют ось перспективы, на которой пересекаются сходственные стороны этих треугольников (теорема Дезарга). Один треугольник получается из другого преобразованием косого сжатия к оси перспек-

тивы. Но в этом преобразовании центроид одного треугольника переходит в центроид другого. Если же центроид одного треугольника лежит на оси перспективы, то центроид второго треугольника совпадает с центроидом первого, ибо все точки оси перспективы суть инвариантные точки преобразования.

254. Рассмотреть треугольник MRS и секущие AD и BC (черт. 27) и дважды воспользоваться теоремой Менелая. При этом учесть, что на стороне MS точки A и C симметричны относительно середи-



Черт. 26



Черт. 27

ны K, а на стороне MR точки B и D симметричны относительно середины L. В таком случае и точки E и F на стороне SR симметричны относительно середины L.

255. Провести через точки D и C прямые, параллельные секущей и встречающие прямую AB в точках N и M. Воспользоваться пропорциями $AD : AR = AN : AP$, $AC : AQ = AM : AP$ и равенством отрезков AN и BM.

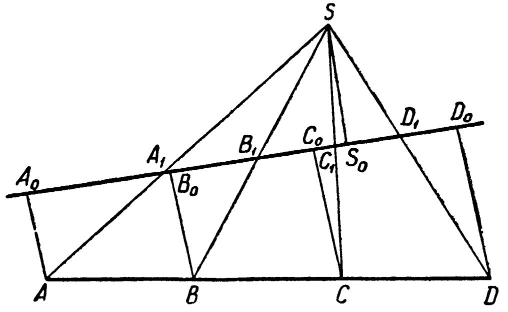
256. Установить, что RN встречает BE в точке L так, что $EL : LB = k_1$. Поэтому $PL \parallel AE$, причем $PL = \dfrac{AE}{k_1+1}$. Аналогично выясняем, что $LN : NR = k_2$ и $PM : MR = k_2$. Поэтому $LP \parallel NM$, причем $MN = \dfrac{PL}{k_2+1}$. Итак, $MN \parallel AE$ и $MN = \dfrac{AE}{(k_1+1)(k_2+1)}$ (см. задачу № 248).

257. Через точки A, B, C, D, S провести параллельные между собой прямые, встречающие секущую в точках A_0, B_0, C_0, D_0, S_0 (черт. 28). Очевидно, $\dfrac{AA_1}{A_1S} + \dfrac{DD_1}{D_1S} = \dfrac{AA_0+DD_0}{SS_0}$ и $\dfrac{BB_1}{B_1S} + \dfrac{CC_1}{C_1S} = \dfrac{BB_0+CC_0}{SS_0}$. Но $AA_0 + DD_0 = BB_0 + CC_0$, как суммы оснований двух трапеций с общей средней линией.

258. Спроектировать треугольник на другую плоскость так, чтобы секущая p стала несобственной прямой. В новой плоскости необходимо установить справедливость равенства: $\dfrac{C'P_2'}{P_2'A'} + \dfrac{C'P_1'}{P_1'B'} = \dfrac{C'P'}{P'P_3'}$, так как при проектировании двойные отношения

сохраняются (задача № 230), причем в данном случае они заменяются простыми отношениями. Далее смотрите теорему Ван-Обеля.

259. Воспользоваться результатом задачи № 258, полагая, что точка P совпадает с центроидом треугольника.



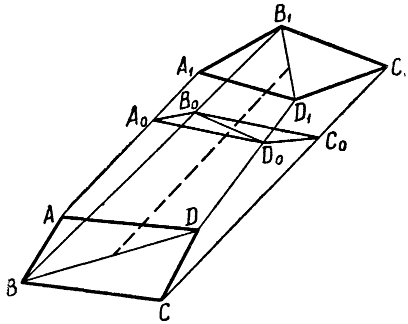
Черт. 28

260. Рассмотреть треугольник BEC, пересеченный секущей FDA, и воспользоваться теоремой Менелая, при этом учесть, что

$$\frac{ED}{DC}=\frac{d_D}{d_C-d_D},\quad \frac{CF}{FB}=-\frac{d_C}{d_B}\ \text{ и }\ \frac{BA}{AE}=\frac{d_B-d_A}{d_A}.$$

261. Воспользоваться теоремой Менелая и результатом задачи № 206.

262. Рассмотрим четырехугольники ABB_1A_1 и CDD_1C_1, вершины которых совпадают с вершинами параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (черт. 29). Пусть точки A_0, B_0, C_0, D_0 делят отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 в одном и том же отношении, тогда отрезки A_0B_0 и C_0D_0 равны и параллельны. В самом деле, параллельным переносом отрезков AB и A_1B_1 в точку A_0 получаем треугольник $A_0A_2B_2$ и аналогично можно получить треугольник $C_0C_2D_2$, который параллельным переносом может быть совмещен с первым. При этом A_0B_0 совпадет с C_0D_0. Далее смотрите задачу № 248



Черт. 29

263. Заметить, что $b - h_c = k\,(c - a)$, где $k < 1$. Воспользоваться подобием треугольников ACH_3 и ABC.

264. Воспользоваться свойством биссектрисы угла треугольника и установить подобие треугольников ABC и A_1B_1C, откуда и следует, что $AB \parallel A_1B_1$. Затем показать, что A_1L есть биссектриса угла CA_1B_1.

265. В серединах сторон данного треугольника сосредоточить массы, равные соответствующим сторонам, и найти центр тяжести последнего треугольника.

266. Установить, что треугольники O_3AC и $O'BC$ подобны $\left(\angle ACO_3 = \angle BCO',\ \angle CBO' = \frac{\beta}{2}\right.$ и $\angle AO_3C = 180° - \left(90° + \frac{\alpha}{2} + \right.$ $\left.\left. + \frac{\gamma}{2}\right) = 90° - \frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$, откуда следует отношение: $\frac{CO_3}{BC} = \frac{AC}{CO'}$, или $AC \cdot BC = CO_3 \cdot CO'$.

267. Рассмотреть подобные треугольники и установить равенство одного угла данного треугольника сумме двух других углов.

268. Провести в точке N касательную NK и установить равенство углов NA_1B_1 и KNB_1, KNB_1 и MBN, воспользовавшись свойством углов, связанных с окружностью и образованных при параллельных прямых.

269. Опустить перпендикуляры из двух взятых точек на стороны угла и рассмотреть две пары образовавшихся подобных треугольников.

270. Через данную точку провести прямую, параллельную одной из сторон угла, и рассмотреть образовавшиеся подобные треугольники.

271 См. указание к задаче № 270

272 Опустить высоту на основание треугольника и рассмотреть образовавшиеся подобные треугольники.

273. Справедливость указанного соотношения для прямоугольного треугольника устанавливается на основании того, что высота, опущенная на его гипотенузу, разбивает треугольник на два других, подобных данному, и на основании теоремы Пифагора. Если отразить меньший катет AC прямоугольного треугольника ABC относительно высоты CD, то он займет положение $A'C$; очевидно, указанное соотношение будет справедливо и для тупоугольного треугольника $CA'B$.

274. Провести через точки N и O прямую и показать, что она встретит другой катет в его середине Действительно, треугольники NOK и MOL подобны (K и L — точки касания вписанной окружности катетов AC и BC), а следовательно, $\frac{NK}{r} = \frac{r}{ML}$, или $\frac{b-2r}{r} = \frac{r}{MC-r}$ Выполнив несложные преобразования и учитывая, что $c^2 = a^2 + b^2$, $r = p - c$, $b - 2r = c - a$, получим, что $MC = \frac{a}{2}$.

275 Данный треугольник и два полученных подобны, а следовательно, $\frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{b} = \frac{r}{c}$. Поэтому в силу равенства $a^2+b^2=c^2$, получаем искомую зависимость: $r_1^2 + r_2^2 = r^2$

276. Провести $PK \perp BC$ и $PL \perp AC$ и рассмотреть две пары подобных треугольников APL и ABC, BPK и ABC, откуда $PL = \frac{am}{c}$

и $PK = \frac{bn}{c}$ Но $PL^2 + PK^2 = KL^2$ и $KL = CP$, поэтому $\left(\frac{am}{c}\right)^2 + \left(\frac{bn}{c}\right)^2 = k^2$ или $a^2m^2 + b^2n^2 = c^2k^2$.

277. Первое решение. Опустить из основания биссектрисы перпендикуляр на один из катетов треугольника и рассмотреть образовавшийся равнобедренный треугольник с боковой стороной $\frac{ab}{a+b}$.

Второе решение. Установить, что гипотенуза делится биссектрисой прямого угла на отрезки, равные $\frac{bc}{a+b}$ и $\frac{ac}{a+b}$, а затем воспользоваться результатом задачи № 276. Для внешней биссектрисы формула будет следующей: $d = \frac{ab\sqrt{2}}{a-b}$.

278. Медиана CM_3 треугольника OCD равна $\frac{CO^2 + CD^2}{2} - \left(\frac{OD}{2}\right)^2$. Но CM_3 является медианой и треугольника ABC, поэтому она равна $\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Учитывая, что $\left(\frac{OD}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{c^2}{4}$, имеем: $\frac{CO^2+OD^2}{2} - \left(R^2 - \frac{c^2}{4}\right) = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$, откуда $CD^2 = R^2 + a^2 + b^2 - c^2$.

279. Из условия задачи на основании теоремы синусов следует, что в треугольнике ABC $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2$. Но расстояние между центром описанной около треугольника окружности и ортоцентром равно $\sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$ (см. формулу 12), поэтому точки O и H совпадают, что равносильно доказываемому.

280. Восставить в вершине B перпендикуляр к стороне AB, который встретит сторону AC в точке D, и рассмотреть два подобных треугольника ABC и BCD, показав, что $BD = \frac{ac}{b}$ и $DC = \frac{a^2}{b}$. Затем из прямоугольного треугольника ABD установить зависимость между сторонами треугольника $c^2(a^2 + b^2) = (a^2 - b^2)^2$ и воспользоваться тем, что $a = 2R\sin\alpha$ и $b = 2R\cos\alpha$.

281. Если секущая встречает сторону AB в точке C_1, то, положив $C_1A = c_1$, $C_1B = c_2$, $CC_1 = x$, обнаружить $(a + x)c_1 = (b + x)c_2$ и $c_2 = \frac{c(a+x)}{2x+a+b}$ Далее воспользоваться пропорцией $\frac{x}{p-c} = \frac{h}{h-2r}$, где h — высота, а r — радиус вписанной окружности треугольника BCC_1 (см. задачу № 187).

282. Если точка S — середина отрезка MN, то установить, что $SM^2 = SA \cdot SB$. Далее доказать, что SC — касательная к описанной около треугольника ABC окружности. Рассмотреть два равных угла SMC и MCS, из которых один измеряется полусуммой двух дуг, а другой — половиной дуги описанной окружности.

283. Если обозначить через x, y и z расстояния произвольной точки P до сторон треугольника и рассмотреть образовавшиеся подобные треугольники, то $ny + mz = mn$ (1), где m и n — расстояния точек L_1 и L_2 до сторон AC и BC треугольника ABC. Затем через точку L_2 провести прямую, параллельную AB, и из подобия образовавшихся треугольников установить, что $(m - n)\, y = m\,(x - n)$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что $x = y + z$.

284. Установить, пользуясь теоремой косинусов и подобием треугольников, что $AH \cdot AH_1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$.

285. Первое решение. Воспользоваться теоремой Ван-Обеля (теорема 5).

Второе решение. Дважды воспользоваться свойством биссектрисы угла треугольника.

286. Воспользоваться результатом задачи № 285 и теоремой о пересечении медиан треугольника.

287. Установить, что $MH = \frac{b^2-a^2}{2c}$ $(b>a)$, $AH = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$, $AT = p - a$.

288. Воспользоваться теоремой Ван-Обеля и тем, что сумма углов A, B и C равна 180° (теорема 5).

289. Заметить, что отрезки на сторонах треугольника соответственно равны $p - a$, $p - b$, $p - c$, и применить обратную теорему Чевы (см. теорему 4).

290. Воспользоваться теоремой Чевы (теорема 4) и установить, что четырехугольник AB_1A_1B — равнобочная трапеция.

291. Воспользоваться теоремой Стюарта (теорема 26) или же метрическими соотношениями в окружности и в треугольнике.

292. Воспользоваться теоремой Стюарта для треугольников ABC и AEC и выполнить ряд преобразований.

293. См. указание к задаче № 292.

294. Воспользоваться результатом задачи № 293, формулой для вычисления $O'O_3$ и тем, что $c = 2R \sin C$, а $DE = 2R_x \sin C$. Установить, что $\frac{DE}{c} = \frac{O'O_3}{R}$, а следовательно, $O'O_3 = R_x$.

295. Так как отрезки MN и KL, заключенные внутри треугольника, параллельны сторонам CB и CA, то четырехугольник $CKPM$ — параллелограмм, диагональ MK которого делится медианой CM_3 пополам. Следовательно, отрезки MK и AB параллельны, а четырехугольник $AMKB$ — равнобочная трапеция ($AM = KL = MN = KB$).

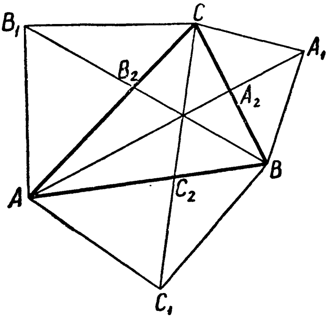
296. Установить, что второй треугольник может быть получен из данного поворотом последнего вокруг его центроида на 180°, и воспользоваться теоремой Лейбница (см. теорему 38).

297. Пользуясь понятием степени точки, установить, что

$$\frac{AG}{GA_1} + \frac{BG}{GB_1} + \frac{CG}{GC_1} = \frac{AG^2+BG^2+CG^2}{R^2-d^2}.$$

Но на основании теоремы Лейбница $AG^2 + BG^2 + CG^2 = 3R^2 - 3d^2$.

298. Установить, что прямая CC_1 (черт. 30) пересекает сторону AB в такой точке C_2, что $AC_2 : C_2B = (ACC_1) : (BCC_1)$, а сторона BC разбивается прямой AA_1 в точке A_2 так, что $BA_2 : A_2C = (BAA_1) : (CAA_1)$, наконец, точка B_2 пересечения отрезков BB_1 и AC делит последний в отношении $AB_2 : B_2C = (ABB_1) : (CBB_1)$. Затем доказать равновеликость треугольников ACC_1 и ABB_1, BCC_1 и BAA_1, CAA_1 и CBB_1 и воспользоваться обратной теоремой Чевы.



Черт. 30

299. Воспользоваться теоремой Эйлера о расстоянии между инцентром и центром описанной окружности.

300. Использовать теорему Эйлера, результат задачи № 292 и формулы: $c = 2R \sin C$, $DE = 2R_x \sin C$.

301. Воспользоваться тем, что середина отрезка $O'O_3$ принадлежит описанной окружности, понятием степени точки для инцентра O' и теоремой Эйлера. В результате этого последовательно будем иметь: $CO' \cdot O'O_3 = CO' \cdot 2O'M = 2(R^2 - d^2) = 2[R^2 - (R^2 - 2Rr)] = 4Rr$ (M — точка пересечения $O'O_3$ с описанной окружностью).

302. Воспользовавшись результатами задач № 266 и 301, показать, что $d(d + O'O_3) = AC \cdot CB$ и $d \cdot O'O_3 = 4Rr$, а следовательно, $d^2 + 4Rr = AC \cdot CB$.

303. Проведем через основание L_3 биссектрисы CL_3 прямую, параллельную AC и встречающую BC в точке N (черт. 31). Как легко проверить, $\frac{1}{CN} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ и $CL_3 = 2CN \cos\frac{C}{2}$.

1) $h_3 = CN \leqslant CL_3$; отсюда $\cos\frac{C}{2} \geqslant \frac{1}{2}$, $C \leqslant 120°$.

2) $m_3 = CN \geqslant CL_3$; отсюда $\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{2}$, $C \geqslant 120°$.

304. Рассмотреть треугольник MOC и использовать теорему Стюарта, а затем воспользоваться теоремой Эйлера.

305. Установить, что центр окружности, проведенной через вершины A и B треугольника ABC и инцентр O' (черт. 32), лежит в точке M пересечения отрезка $O'O_3$ и описанной окружности. Поэтому степень вершины C относительно окружности равна $CO' \cdot CO_3$ или квадрату отрезка CK касательной, проведенной к этой окружности. Но на основании задачи № 266 $CO' \cdot CO_3 = AC \cdot CB$. Значит, $CK^2 = AC \cdot CB$.

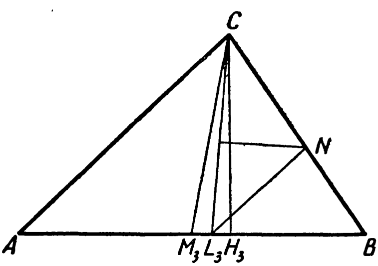
306. Рассмотреть подобные треугольники DBC и ACD и использовать понятие степени точки.

307. 1) Провести биссектрису AL_1 угла A и описать около треугольника ABL_1 окружность. Установить, что так как $\angle L_1BA = \angle L_1AC$, то AC — касательная и степень точки C будет равна: $CA^2 = CL_1 \cdot CB$, или $b^2 = CL_1 \cdot a$. Учитывая, что $CL_1 = \frac{a}{b+c} \cdot b$, получаем $b^2 = \frac{a^2b}{b+c}$, или $a^2 = b(b+c)$.

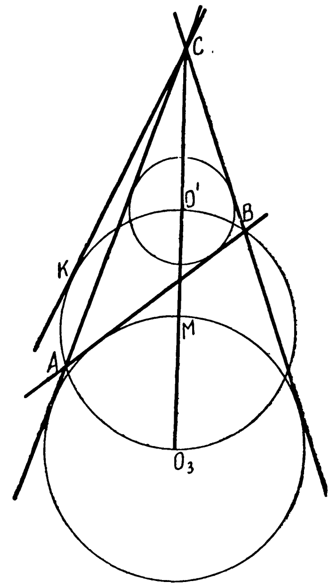
2) Провести AD и AE, делящие угол A на три равные части, и воспользоваться свойствами биссектрисы угла и равнобедренного треугольника.

308. Воспользоваться теоремой Лейбница (см. теорему № 38).

309. Чтобы определить расстояние OM от центра O до высоты CH_3, про-



Черт. 31



Черт. 32

должить эту высоту до пересечения с окружностью в точке E и провести диаметр CD, а затем доказать, что четырехугольник $ABED$ — равнобочная трапеция, и использовать теорему Птолемея (черт. 33). Отсюда $DE = \frac{|b^2 - a^2|}{c}$, а OM, как средняя линия треугольника DCE, равно $\frac{1}{2} DE$, или $\frac{|b^2 - a^2|}{2c}$.

310. Выразить косинус общего угла B обоих треугольников через их стороны, заметив, что значение косинуса равно отношению неравных сторон равнобедренного треугольника.

Искомое отношение равно $\frac{|a^2 - b^2 + c^2|}{ac}$.

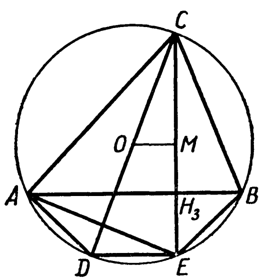
311. Выразить отрезок высоты треугольника, прилежащий к вершине, через угол при этой вершине и противоположную сторону. Выразить последнюю через диаметр описанной окружности и угол.

312. Воспользоваться тем, что хорда равна произведению диаметра и синуса угла, под которым видна хорда из точки окружности.

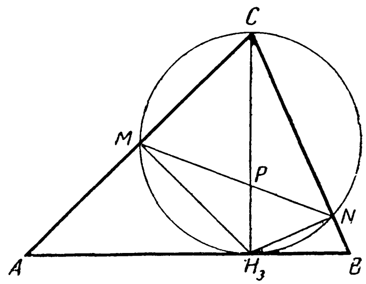
313. Применить теорему косинусов к треугольнику COH, в котором $CO = R$, $CH = 2R \operatorname{ctg} C$, $\angle OCH = |\angle A - \angle B|$, считая, не нарушая общности, что $\angle C < 90°$.

314. Установить, что расстояние между основаниями перпендикуляров выражается через высоту и синус угла треугольника формулой $d = h_3 \sin C$, и заметить, что $h_1 \sin A = h_2 \sin B = h_3 \sin C$.

315. Заметить, что $\operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{a^2-b^2}{2c} : h_3$ $(a > b)$. Отсюда $\operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{b^2-a^2}{4S}$. Но $\sin A = \frac{2S}{bc}$, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ и $\operatorname{ctg} A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$.



Черт. 33



Черт. 34

316. Через основание L_3 биссектрисы CL_3 провести прямую, параллельную стороне AC и пересекающую сторону BC в точке A_1, и установить, что $CA_1 = A_1L_3 = \frac{ab}{a+b}$. Затем опустить перпендикуляр A_1K на биссектрису CL_3 и рассмотреть прямоугольный треугольник CA_1K.

317. Учитывая, что CH равно $c \operatorname{ctg} C$, а $R = \frac{c}{2 \sin C}$, найти отношение CH к R и воспользоваться теоремой косинусов.

318. Описать около четырехугольника CMH_3N окружность и установить, что $\angle CMN = \angle CH_3N = \angle B$ (черт. 34). Тогда в прямоугольном треугольнике MCH_3, острые углы которого равны $\angle A$ и $90° - \angle A$, через вершину M прямого угла проведена под углом B к катету MC прямая, встречающая гипотенузу CH_3 в точке P. Воспользовавшись теоремой синусов, будем иметь: $\frac{CP}{PM} = \frac{\sin B}{\sin(90°-A)} = \frac{\sin B}{\cos A}$ и $\frac{PH_3}{PM} = \frac{\sin(90°-B)}{\sin A} = \frac{\cos B}{\sin A}$, т. е. $\frac{CP}{PH_3} = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B$.

319. Выразить расстояния точек M и N до сторон AC и BC треугольника ABC через AM, BM, AN, BN, а затем воспользоваться результатом задачи № 269 и теоремой синусов.

320. Установить, что биссектриса CL_3 угла C делит основание AB на части, равные $\frac{bc}{a+b}$ и $\frac{ac}{a+b}$, а затем воспользоваться

теоремой синусов для $\triangle ADC$ и выполнить ряд тождественных преобразований: $\frac{bc}{(a+b)\sin\frac{C}{2}} = \frac{b}{\sin\varphi}$ ($\varphi = \angle ADC$), или $\sin\varphi = \frac{a+b}{c}\sin\frac{C}{2}$, следовательно, $\sin^2\varphi = \frac{(a+b)^2}{c^2}\cdot\frac{1-\cos C}{2} = \frac{(a+b)^2}{2c^2}\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) = \frac{(a+b)^2}{2c^2}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2\,[c^2-(a-b)^2]}{4abc^2}$.

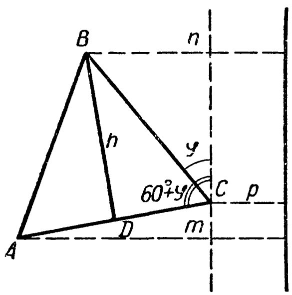
Так как $\varphi = 45°$, то получим искомое соотношение.

321. Воспользоваться теоремой синусов и выразить один из углов через два остальных, а затем выполнить тождественные преобразования.

322. Искомый отрезок, параллельный стороне AB, разбивается инцентром на два других, которые соответственно равны $\frac{bc}{2p}$ и $\frac{ac}{2p}$, а сумма их равна $\frac{(a+b)c}{a+b+c}$.

323. Выразив OA, OB и OC через радиус r вписанной окружности и синусы половинных углов треугольника, а последние — через стороны треугольника ABC, установить, что

$$OA\cdot OB\cdot OC = \frac{r^3abc}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{r^3abcp}{S^2} = \frac{r^3abc}{rS} = 4Rr^2.$$



Черт. 35

324. Не нарушая общности решения, прямую можно провести через одну из вершин треугольника (черт. 35). Если эта прямая образует с одной стороной угол φ, то с другой стороной она образует угол $60°+\varphi$, а с третьей $60°-\varphi$. После этого остается доказать, что $a^2[\sin^2\varphi + \sin^2(60°-\varphi) + \sin^2(60° + \varphi)] = 2h^2$. Установить, что выражение в скобках не зависит от φ.

325. Обозначить углы ABM и MBC через α и β и установить, что $\cos(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{2}$, или $\cos\alpha\cdot\cos\beta \pm \sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}$. По возведении в квадрат последнего равенства и выполнении преобразований, установить, что $4\cos^2\alpha + 4\cos^2\beta - 4\cos\alpha\cdot\cos B = 3$. Учитывая, что $2\cos\alpha = \frac{a^2+n^2-m^2}{an}$ и $2\cos\beta = \frac{a^2+n^2-p^2}{an}$, доказать справедливость искомого соотношения.

326. Если треугольник ABC равносторонний, то легко доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ с вершинами в точках деления сторон AB, BC и CA также равносторонний. Для того чтобы доказать обратное, разделим стороны равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$ в том же отношении λ ($AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \lambda$), но при обратном обходе. Очевидно, полученный таким образом

новый треугольник $A_2B_2C_2$ также равносторонний, а на основании задачи № 224 треугольник $A_2B_2C_2$ гомотетичен треугольнику ABC, т. е. и последний равносторонний.

327. Воспользоваться теоремой Лейбница (теорема 38), полагая, что участвующая в теореме произвольная точка P совпадает в данном случае с центром описанной окружности.

328. Учитывая, что $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$, преобразовать левую часть данного в условии задачи равенства в выражение: $3\sin A + 3\sin B - 3\sin C - \sin 3A - \sin 3B + \sin 3C$, откуда $2(\sin A + \sin B - \sin C) + (\sin A - \sin 3A) + (\sin B - \sin 3B) - (\sin C - \sin 3C) = 0$, или $\sin A\,(1 - \cos 2A) + \sin B\,(1 - \cos 2B) = \sin C\,(1 - \cos 2C)$. Следовательно, $\sin^3 A + \sin^3 B = \sin^3 C$. Но $a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C = 2R$, поэтому $a^3 + b^3 = c^3$.

329. Рассмотреть равнобедренные треугольники ABC_1, AB_1C, A_1BC и использовать результат задачи № 416.

330. Рассмотреть аналогичную задачу для вписанного в окружность четырехугольника и применить полученный результат для того случая, когда две вершины сливаются.

331. Установить, что прямая, проходящая через вершину C и проекцию инцентра на серединный перпендикуляр стороны AB, рассекает ее на части соответственно $p - b$ и $p - a$. Воспользоваться теоремой Чевы.

332. Если биссектрисы углов A и C пересекаются в точке M диагонали BD, то $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MD} = \frac{BC}{CD}$, или $AB\cdot CD = AD\cdot BC$. Отсюда следует, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, т. е. биссектрисы углов B и D будут делить диагональ в одном и том же отношении.

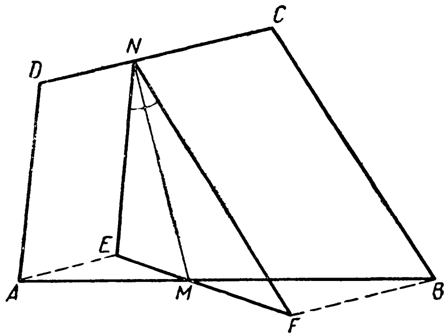
333. Выразить диагонали параллелограмма через его стороны, воспользовавшись теоремой косинусов.

334. Предположить противное и опустить перпендикуляры BP и DQ на диагональ AC. Тогда $AP^2 - P^2C = AB^2 - BC^2$ и $AQ^2 - QC^2 = AD^2 - DC^2$, но по условию $AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2$. Следовательно, $AP^2 - PC^2 = AQ^2 - QC^2$, что возможно при одном условии: $P \equiv Q$.

335. Воспользоваться теоремой косинусов. Очевидно, решение имеет место при $a \neq b$, т. е. диагональ дельтоида не определена данными условиями.

336. Точки M и N делят стороны AB и CD так, что $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{AD}{BC}$ (черт. 36). Подвергнем стороны AD и BC параллельному переносу в направлении стороны CD на векторы $\overrightarrow{DN}$ и $\overrightarrow{CN}$ так, чтобы точки C и D совпали с точкой N. Соединить точки E и F (новое положение точек A и B) с точкой M, установить подо-

бие треугольников AME и BMF, заключить, что точки E, M и F лежат на одной прямой и $\frac{EM}{MF}=\frac{AM}{MB}=\frac{AD}{BC}$, т. е. в треугольнике ENF NM есть биссектриса угла ENF.



Черт. 36

337. Дважды воспользоваться теоремой косинусов, рассмотрев углы α и $180°-\alpha$; аналогичным образом дважды применить теорему косинусов, рассмотрев углы β и $180°-\beta$. Углы расположены против диагоналей.

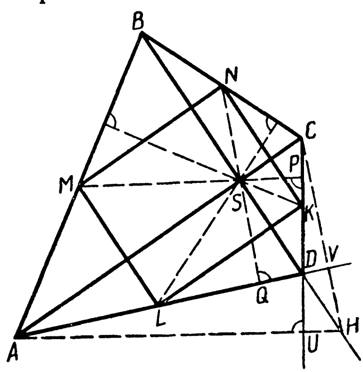
338. Воспользоваться зависимостями между сторонами и диагоналями трапеции, возникающими при решении задачи № 337.

339. Воспользоваться результатом задачи № 310, а также теоремой, что в четырехугольнике произведение диагоналей не превосходит сумму произведений его противоположных сторон.

340. Воспользоваться результатом задачи № 337 и теоремой, что произведение диагоналей четырехугольника не меньше суммы произведений его противоположных сторон.

341. Воспользоваться несколько раз теоремой Пифагора.

342. Пусть S — точка пересечения диагоналей AC и BD (черт. 37), $SP \perp DC$, $SQ \perp AD$ и прямые SP и SQ пересекают AB и BC соответственно в точках M и N. Провести высоты AU и CV треугольника ACD, пересекающиеся в точке H на DS. Заметить, что $AM:MB=HS:SB=CN:NB$.



Черт. 37

343. См. решение и результат предыдущей задачи.

344. Рассмотреть треугольник KLM_3 с вершинами в серединах диагоналей и стороны CD четырехугольника $ABCD$. По теореме косинусов имеем: $KL^2=\frac{b^2+d^2}{4}-\frac{bd}{2}\cos M_3$. Но по теореме Эйлера (теорема 39) $KL^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2)$. Из этих равенств $a^2=e^2+f^2-c^2-\frac{bd}{2}\cos M_3$. Заменив e^2 и f^2 их выражениями из треугольников ACD и DCB, получим требуемое соотношение.

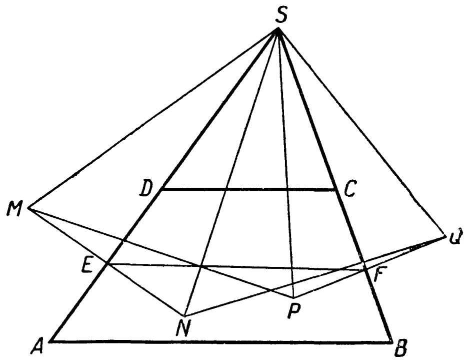
345. Так как квадрат средней линии вычисляется по формуле $\mu_2{}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2 + e^2 + f^2)$ и $\mu_2{}^2 \leqslant \frac{(a+c)^2}{4}$, то $a^2 + c^2 - b^2 - d^2 + e^2 + f^2 \leqslant a^2 + 2ac + c^2$, откуда $e^2 + f^2 \leqslant b^2 + d^2 + 2ac$.

346. Воспользоваться зависимостью между сторонами, диагоналями и расстоянием между серединами диагоналей произвольного четырехугольника (см. теорему 39).

347. Требует особого доказательства тот случай, когда точка M лежит внутри треугольника DOC. Для этого продолжить отрезок AM до пересечения с CD в точке N и воспользоваться результатом задачи № 283, а также подобием образовавшихся треугольников.

348. Привести равенство $\cos A \cdot \cos C = \cos B \cdot \cos (A + B + C)$ к виду $\sin (A + B) = \sin (B + C)$.

349. Соединить точку M с серединами диагоналей четырехугольника и воспользоваться геометрическим местом точек (см.стр.13, №48). Установить совпадение середин диагоналей и равенство последних.



Черт. 38

350. Продолжить боковые стороны AD и BC (черт. 38) до пересечения в точке S и соединить ее с концами M и N, P и Q отрезков, полученных вращением сторон AD и BC около их середин E и F. Установить, что прямоугольные треугольники SEN и SFQ подобны, а следовательно, $\angle ASN = \angle BSQ$. Затем, воспользовавшись теоремой косинусов и теоремой Пифагора, вычислить MP из треугольника MPS и NQ из треугольника SNQ, показав, что каждая из них равна $\sqrt{\frac{AB^2 + CD^2}{2}}$.

351. Перенести сторону AD параллельно себе на отрезок DC и из треугольника ACB по теореме Стюарта (теорема 26) определить: $ad^2 = e^2(a - c) + b^2c - ac(a - c)$, или $e^2 = ac + \frac{ad^2 - cb^2}{a - c}$. Аналогично определить и f^2.

352. Воспользоваться подобием треугольников и результатом задачи № 351.

353. Точки M и N делят стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ так, что $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{AD}{BC}$. Воспользовавшись теоремой Стюарта для треугольников ANB, DBC и DAC, а также результатом задачи № 336 и выполнив ряд преобразований, показать, что $MN^2 = \frac{AD \cdot BC}{(AD + BC)^2}(AC^2 + BD^2 + 2AD \cdot BC - AB^2 - CD^2)$.

Воспользовавшись полученным результатом и формулой для вычисления угла между противоположными сторонами четырехугольника, из равенств $t^2 = \frac{bd}{(b+d)^2}(e^2 + f^2 + 2bd - a^2 - c^2)$ и $\cos\psi = \frac{e^2+f^2-a^2-c^2}{2bd}$ получить требуемое соотношение.

354. Боковые стороны AD и BC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке S, образуя угол, биссектриса которого встречает основания CD и AB в точках M и N. Установить, что $\frac{DM}{MC} = \frac{AN}{NB} = \frac{AD}{BC}$, и использовать результаты задач № 337 и 353. Следовательно,

$$t^2 = \frac{bd}{(b+d)^2}[(b+d)^2 - (a-c)^2] = \frac{bd}{(b+d)^2}(b + d + a - c)(b + d - a + c) = \frac{4bd}{(b+d)^2}(p-a)(p-c),$$

где $2p = a + b + c + d$.

355. а) Дополнить прямоугольный треугольник ABC до прямоугольника $ADBC$. б) Дополнить треугольники до равнобочных трапеций. в) Если углы BAC и CAD равны соответственно α и β, то, описав окружность, проходящую через их общую вершину A, и используя зависимость между хордой, диаметром и углом, опирающимся на эту хорду, получим искомую формулу для $\sin(\alpha+\beta)$. Аналогичным образом поступают для вывода остальных формул. г) Воспользоваться тем, что $AB = BC = CA$. д) Рассмотреть четырехугольник $ACDE$.

356. Воспользоваться результатом задачи № 345 и теоремой Птолемея, в результате чего будем иметь:

$$\begin{cases} e^2 + f^2 \leqslant b^2 + d^2 + 2ac; \\ 2ef = 2bd + 2ac. \end{cases}$$

Отсюда $(e-f)^2 \leqslant (b-d)^2$, или $|e-f| \leqslant |b-d|$.

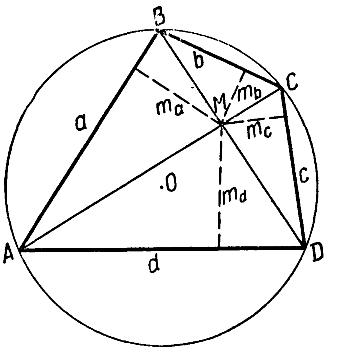
357. Воспользоваться теоремой Эйлера (теорема 39), и доказать, что расстояние между серединами диагоналей четырехугольника равно нулю.

358. Соединить центр O вписанной окружности с вершинами A и D трапеции $ABCD$ и с K — точкой касания боковой стороны с этой окружностью. Из прямоугольного треугольника AOD следует, что $r^2 = OK^2 = AK \cdot KD = ac$.

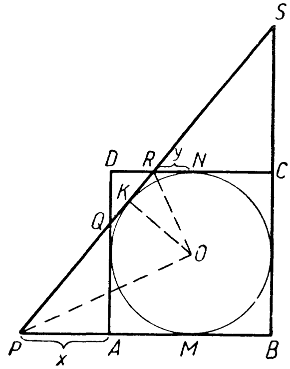
359. PA', PB', PC', PD' — перпендикуляры, опущенные из точки P на стороны DA, AB, BC, CD. Рассмотрев прямоугольные треугольники и вписанные четырехугольники $EA'C'P$ и $PB'D'F$, установить, что $\angle DA'C' = \angle EPC' = \psi$, $\angle C'PB' = \angle ABE = \angle ADC = \delta$, $\angle FPB' = \angle B'D'C = \varphi$. Следовательно, $\varphi+\psi+\delta = 180^\circ$ и из треугольника $A'DL$ (L — точка пересечения $A'C'$ и DF) угол $A'LD$ равен $180^\circ - \psi - \delta$ и равен $\angle B'D'D$, т. е. $A'C' \parallel B'D'$.

360. Воспользоваться теоремой о том, что произведение двух сторон треугольника равно произведению диаметра описанной окружности на высоту, проведенную к третьей стороне.

361. Если точка M пересечения диагоналей AC и BD (черт. 39) отстоит от сторон AB, BC, CD и DA на расстоянии m_a, m_b, m_c, m_d, то отношение площадей треугольников AMB и BMC будет



Черт. 39



Черт. 40

равно: $AM : MC = a \cdot m_a : b \cdot m_b = a^2 : b^2$. Отсюда $m_a : m_b = a : b$. Аналогично установить, что $m_b : m_c = b : c$ и $m_c : m_d = c : d$. Следовательно, $m_a : m_b : m_c : m_d = a : b : c : d$ (см. задачу № 306).

362. Из подобия треугольников PAQ и QDR следует, что $\frac{PQ}{QR} = \frac{PA}{DR}$, а из подобия треугольников PSB и RSC имеем, что $\frac{PS}{RS} = \frac{PB}{RC}$ (черт. 40). Затем установить равенство отношений $\frac{PA}{DR}$ и $\frac{PB}{RC}$, соединив центр окружности O с точками P, R и точкой касания K и рассмотрев прямоугольный треугольник POR с высотой OK, равной радиусу r вписанной окружности. Очевидно, $r^2 = PK \cdot KR = PM \cdot RN = (r+x) \cdot y$, где M и N—точки касания сторон AB и CD, $x = PA$, $y = RN$. Следовательно, $\frac{r}{y} = \frac{r+x}{r}$, или $\frac{r+y}{r-y} = \frac{2r+x}{x}$, или $\frac{x}{r-y} = \frac{2r+x}{r+y}$, т. е. $\frac{PA}{DR} = \frac{PB}{RC}$.

363. Так как $\angle AOD + \angle BOC = 2d$ и $\angle COE + \angle BOC = 2d$, то $\angle AOD = \angle COE$ (E и F —точки пересечения прямых BO и DO с диагональю AC). Тогда из треугольника AOC имеем:

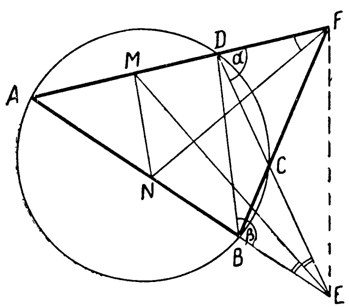
$$\frac{AO^2}{OC^2} = \frac{AF \cdot AE}{CE \cdot CF} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{AF}{FC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AD}{DC}$$

(BO и DO —биссектрисы углов).

364. Воспользоваться дважды теоремой косинусов для четырехугольника (см. теорему 36). Обратить внимание на то, что: 1) средние линии данного четырехугольника равны; 2) суммы расстояний от двух смежных вершин четырехугольника, расположенных по

одну сторону от средней линии, до этой средней линии равны между собой; 3) суммы квадратов противоположных сторон четырехугольника равны между собой.

365. Воспользовавшись свойством углов с вершиной вне круга и тем, что углы BMC и ANB делятся биссектрисами, встречающими стороны AD и BC, CD и AB четырехугольника $ABCD$ в точках K и L, P и Q, пополам, установить перпендикулярность KL и PQ. Следовательно, в треугольнике MPQ биссектриса MO является высотой (O — точка пересечения KL и PQ), а значит, и медианой: $PO = OQ$. Аналогично показать, что $KO = OL$. Отсюда следует, что $KQLP$ — ромб.



Черт. 41

Затем рассмотреть треугольники AMD и CND и, используя свойство биссектрис и теорему синусов, доказать, что $\frac{CP}{PD} = \frac{AK}{KD}$, т. е. $AC \parallel KP$.

366. Согласно условию $\frac{AM}{MD} = \frac{AN}{NB}$ (черт. 41); но $\frac{AM}{MD} = \frac{AE}{DE}$, $\frac{AN}{NB} = \frac{AF}{FB}$. Отсюда $\frac{AE}{DE} = \frac{AF}{FB}$, или $\frac{AE}{AF} = \frac{DE}{FB}$. Но стороны AE и AF треугольника AEF обратно пропорциональны его высотам. Поэтому $\frac{VE}{FU} = \frac{DE}{FB}$, или $\frac{VE}{DE} = \frac{FU}{FB}$. Итак, $\alpha = \beta$, или $\alpha + \beta = 180°$, что приводит к равенствам: $\angle B = \angle D$, или $\angle B + \angle D = 180°$.

367. Установить, что прямоугольные треугольники AMO_1 и O_1NC подобны (M и N — точки касания окружности O_1 и сторон AB и CD), откуда следует, что $AM \cdot NC = O_1M \cdot O_1N = r^2$. Аналогично показать, что $MB \cdot DN = r^2$. Следовательно, $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC}$.

368. Так как $\angle MO_1F + \angle B = 180°$ и $\angle MO_1E = 2 \cdot \angle MNE$ (M, E, N и F — точки касания окружности O_1 и сторон AB, BC, CD и DA), то $\angle MNE = \frac{180° - \angle B}{2}$. Аналогично $\angle FEN = \frac{180° - \angle D}{2}$. Следовательно, $\angle MNE + \angle FEN = 180° - \frac{\angle B + \angle D}{2} = 90°$ и $MN \perp EF$.

369. Воспользоваться тем, что точка A, инцентр O и точка K касания окружностей лежат на одной прямой, а также понятием степени точки (A) относительно окружности (O).

370. Воспользоваться свойствами вписанного в окружность четырехугольника и установить подобие следующих пар треугольников: SAP и SBQ, SAB_1 и SA_1B.

371. Установить, что треугольники подобны и $MP \cdot MQ = MN^2$.

372. Рассмотреть подобные треугольники ANK и BNL и воспользоваться равенством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

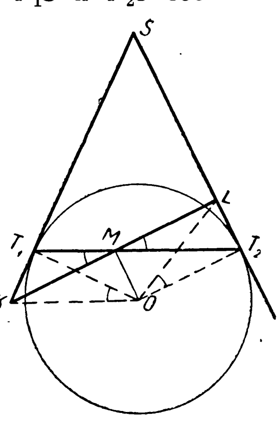
373. Через точку K провести прямую, параллельную ST_2, до пересечения в точке P с прямой T_1T_2, и установить, что $PK = KT_1 = KM$ и $T_2L = LM$. Учитывая эти равенства и подобие треугольников NKP и NLT_2, показать, что $\frac{KN}{NL} = \frac{KP}{LT_2} = \frac{KM}{ML}$.

374. Через точку B провести диаметр BC. Треугольники ABC, AMN и MBK подобны (N и K — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на касательные AS и BS). Следовательно, $\frac{1}{m} = \frac{BC}{AM(MB+AM)}$ и $\frac{1}{n} = \frac{BC}{MB(AM+MB)}$, или $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{BC}{AM \cdot MB}$. Аналогично решается вторая часть задачи.

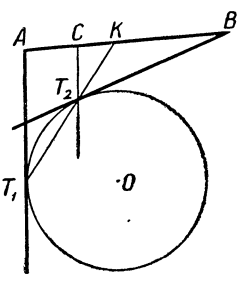
375. По теореме косинусов вычислить AM и BM из треугольников AOM и BOM и воспользоваться тем, что $AM \cdot MB = R^2 - OM^2$. Установить, что

$$\operatorname{tg} \frac{\angle AOM}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle BOM}{2} = \frac{R-d}{R+d}.$$

376. Пусть прямая, перпендикулярная к OM, пересекает касательные T_1S и T_2S соответственно в точках K и L (черт. 42). Установить, что четырехугольники T_1KOM и $OMLT_2$ описанные и $\angle T_1OK = \angle T_1MK$, а $\angle LOT_2 = \angle LMT_2$; но так как $\angle LMT_2 = \angle T_1MK$, то и $\angle T_1OK = \angle LOT_2$.



Черт. 42



Черт. 43

Следовательно, $\triangle T_1KO = \triangle T_2OL$; значит, $\triangle OKL$ равнобедренный и высота OM является одновременно его медианой.

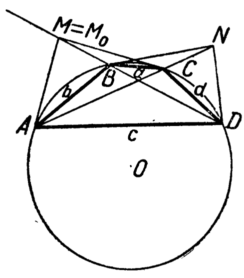
377. Установить, что T_1T_2 есть биссектриса угла BT_2C ($T_2C \parallel T_1A$), а затем, воспользовавшись свойством биссектрисы треугольника и рассмотрев образовавшиеся подобные треугольники, показать, что T_1T_2 делит отрезок AB в отношении, равном AT_1 :

$: BT_2$ (черт. 43). Если T_1T_2 пересекает продолжение отрезка AB, то следует рассмотреть образовавшиеся подобные треугольники.

378. Установить, что окружность, проходящая через точки A, M, N, касается прямой AS в точке A. Следовательно, степень точки S относительно этих окружностей одна и та же, отсюда $AS^2 = SM \cdot SN = SP \cdot SQ$.

379. Установить, что точки A, M, C, S лежат на одной окружности, и показать, что каждое из искомых произведений равно $AN \cdot NC$.

380. Воспользоваться тем, что наименьшие хорды делятся в точке, через которую они проведены, пополам, а также тем, что произведения отрезков хорд, проходящих через одну точку, равны.



Черт. 44

381. Установить, что треугольники BCD и BEF подобны, и воспользоваться тем, что соответственные высоты подобных треугольников пропорциональны соответственным сторонам.

382. Воспользоваться тем, что общая хорда двух окружностей перпендикулярна их линии центров, и тем, что середины диагоналей трапеции лежат на ее средней линии, а затем установить, что если общая хорда окружностей, делящая большее основание трапеции на отрезки m и p, а меньшее — на отрезки n и q, разбивается большим основанием на отрезки u и v, то $mq = uv = np$, т. е. боковые стороны пересекают общую хорду в одной точке.

383. Доказать методом от противного. Предположить, что касательные к окружности в точках A и C встречают диагональ DB соответственно в точках M и M_0 (черт. 44). Затем установить, что $\frac{d^2}{a^2} = \frac{DM}{MB}$ и $\frac{c^2}{b^2} = \frac{DM_0}{M_0B}$. Но так как $\frac{d^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2}$, то точки M и M_0 совпадают. Аналогично решается и вторая половина задачи.

384. Установить, что треугольник KNP прямоугольный, а следовательно, $KM = MP = MN$ и $\angle PKM = \angle KPM$; так как угол PKM, составленный касательной и хордой, равен углу между той же хордой KP и прямой PM, то последняя касается окружности.

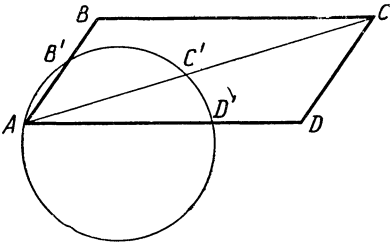
385. Установить подобие треугольников ABN и A_1B_1N, BCN и B_1C_1N (провести в точке N касательную к окружности), откуда следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{NB}{NA_1}$ и $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{NB}{NC_1}$. Перемножив последние равенства, получим, что произведения противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника равны ($A_1B_1 \cdot NC_1 = B_1C_1 \cdot NA_1$); следовательно, касательные к окружности в точках A_1 и C_1 пересекутся на диагонали (см. задачу № 383).

386. Рассмотреть две пары подобных треугольников и установить, что если касательные пересекаются на диагонали, то произведения противоположных сторон четырехугольника равны. Затем точку

пересечения других двух касательных соединить с вершиной четырехугольника и методом от противного доказать, что эта прямая пройдет и через вторую (противоположную) вершину, т. е. будет являться диагональю.

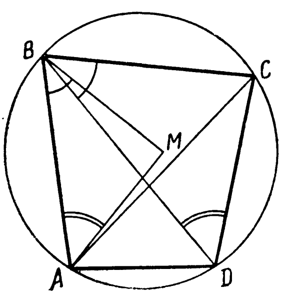
387. Воспользоваться подобием треугольников, сходственными сторонами которых являются сходственные стороны перспективных треугольников и имеющих общей вершиной центр перспективы.

388. По теореме Птолемея в четырехугольнике $AB'C'D'$ (черт. 45) $AC'\cdot B'D' = AB'\cdot C'D' + AD'\times$ $\times B'C'$. Установив подобие треугольников ACD и $B'C'D'$ и заменив в полученном равенстве $B'D'$, $C'D'$, $B'C'$ через λAC, λDC, λAD, получим искомое равенство.

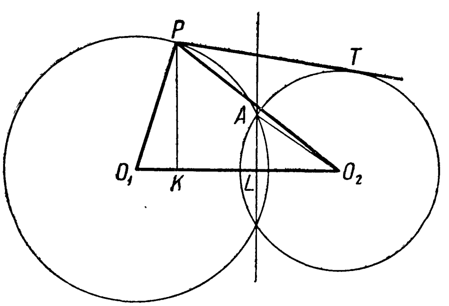


Черт. 45

389. Пусть произведение диагоналей четырехугольника $ABCD$ равно сумме произведений противоположных сторон (черт. 46). Построить точку M такую, что $\angle BAM = \angle BDC$ и $\angle ABM =$ $= \angle CBD$. Из подобия треугольников ABM и BCD установить, что $AB : BD = AM : DC$ и $AB\cdot CD = AM\cdot BD$ (1), а из подобия треугольников ABD и BMC — $BC\cdot AD = BD\cdot MC$ (2). Складывая равенства (1) и (2) и сравнивая с условием задачи, показать, что $AM + MC = AC$, т. е. точка M принадлежит диагонали AC и $\angle BAC = \angle BDC$.



Черт. 46



Черт. 47

390. Если стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E и $AC \parallel ET$, то $EM^2 = MB\cdot MD = MT^2$, что следует из подобия треугольников EMD и EMB.

391. Соединить произвольную точку P окружности O_1 (из которой проведена касательная PT к окружности O_2) с центрами O_1 и O_2 (черт. 47). Обозначив проекцию отрезка PO_2 на линию центров через KO_2, а проекцию радиуса O_2A, проведенного в точку пересечения окружностей, на линию центров через LO_2, будем иметь, что расстояние

h точки P до прямой равно разности отрезков KO_2 и LO_2. Последние можно определить по теореме косинусов из треугольников O_1PO_2 и O_1AO_2. Учитывая, что $PO_2^2 = O_2T^2 + PT^2$, получим, что $PT^2 = 2O_2O_1 \cdot h$.

392. Воспользовавшись теоремой Стюарта, определить BA из треугольника OBO_1 и O_1B^2 заменить через $BT^2 - r_1^2$. Выполнив преобразования, показать, что $\frac{BA}{BT} = \sqrt{\frac{r}{r+r_1}}$.

393. Установить параллельность радиусов O_1A и O_2B, используя для этого свойство углов, связанных с окружностью. Рассмотреть внутреннее и внешнее касание данных окружностей. Если окружности равны, то AB сохраняет постоянную длину ($2R$) и постоянное направление.

394. Так как $\frac{T_1K^2}{T_1T_2^2} = \frac{r}{r+r_1}$ и $\frac{T_2K^2}{T_1T_2^2} = \frac{r_1}{r+r_1}$ (см. указание к задаче № 392), то $\frac{T_1K^2}{T_2K^2} = \frac{r}{r_1}$. Затем установить подобие треугольников OKM и O_1KN (M и N — основания перпендикуляров, опущенных из центров O и O_1 окружностей на хорды), откуда $\frac{r}{r_1} = \frac{OM}{KN} = \frac{KM}{O_1N}$, или $\frac{r^2}{r_1^2} = \frac{OM}{O_1M} \cdot \frac{KM}{KN} = \frac{OM}{O_1N} \cdot \frac{KT_1}{KT_2}$, следовательно, $\frac{T_1K^4}{T_2K^4} = \frac{OM}{O_1N} \cdot \frac{KT_1}{KT_2}$, или $\frac{T_1K^3}{T_2K^3} = \frac{OM}{O_1N}$ (черт. 48).

395. Воспользоваться свойствами вписанного угла и угла, образованного касательной и хордой, а также тем, что хорда окружности равна произведению диаметра на синус угла, под которым видна эта хорда из любой точки окружности.

396. Так как $\frac{AB}{d} = \frac{1}{\sin\alpha}$ (α — угол между хордой и касательной) и $AB = 2R \cdot \sin\beta$ (β — угол, под которым видна хорда из любой точки окружности), то в силу равенства $\alpha = \beta$ имеем: $\frac{AB^2}{d} = 2R$.

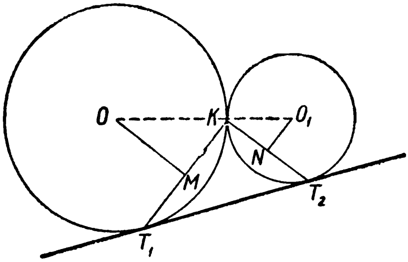
397. Установить подобие треугольников AMN и MCN, BMN и MDN и, воспользовавшись формулой площади треугольника, показать, что $\frac{MN}{AM} = \frac{CM}{CN}$ и $\frac{MN}{BM} = \frac{MD}{ND}$ (черт. 49), откуда

$$\frac{MN^2}{AM \cdot BM} = \frac{CM \cdot MD}{CN \cdot ND} = \frac{(CMD)}{(CND)} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{NP}{PM}$$

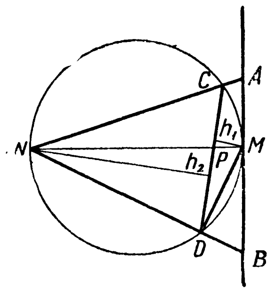
(h_1 и h_2 — высоты треугольников MCD и NCD, опущенные на сторону CD, P — точка пересечения отрезков MN и CD). В связи с тем, что отношение $\frac{NP}{PM}$ постоянно $\left(\text{равно } \frac{MN^2}{AM \cdot BM}\right)$, то все хорды CD проходят через одну и ту же точку.

398. Если точка A принадлежит первой, а точка B — второй касательной, причем вторые касательные из этих точек пересекаются в точке M, то убедиться, что $\triangle AMO = \triangle OBM$.

399. Обозначим радиусы окружностей O и O_1 через R и r, расстояние между центрами этих окружностей через d, хорды, соединяющие точки касания, соответственно через $2x$ и $2y$, отрезки касательных через t. Затем составим систему трех уравнений, откуда получим, что $d = R + r$. Так как четырехугольник опи-



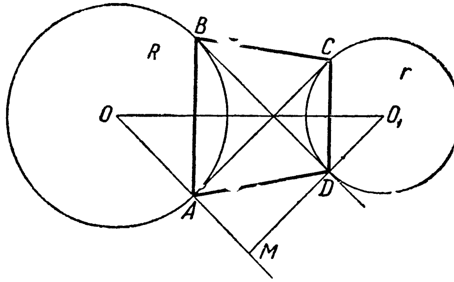
Черт. 48



Черт. 49

санный, то $x + y = t$; два других соотношения будем иметь из подобия двух пар треугольников $\left(\frac{x}{y} = \frac{R}{r} \text{ и } \frac{t}{d} = \frac{x}{R}\right)$.

400. Обозначим точки касания через A, B, C и D, радиусы окружностей O и O_1 через R и r, расстояние OO_1 между их центрами через d, отрезки внутренних касательных AC и BD через t, хорды AB и CD окружностей соответственно через $2x$ и $2y$, отрезки AD и BC через m (черт. 50). Затем составим систему пяти уравнений с семью неизвестными, откуда и получим искомое соотношение. [Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный и описанный около окружности, то $x + y = m$ и $t^2 = m^2 + 4xy$ (теорема Птолемея). Если продолжить радиус OA до пересечения его в точке M с перпендикуляром, опущенным на прямую OA, то по теореме Пифагора $d^2 = (R + r)^2 + t^2$. Наконец, из рассмотрения двух пар подобных треугольников имеем: $x = \frac{R \cdot t}{d}$ и $y = \frac{r \cdot t}{d}$].



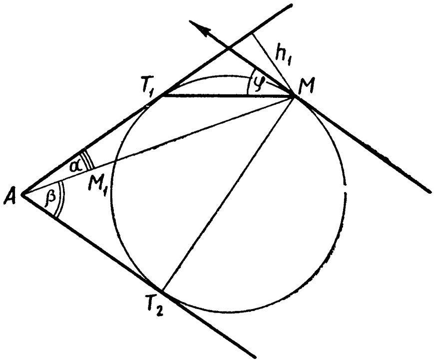
Черт. 50

401. Опустить из точки M перпендикуляры h_1 и h_2 на касательные AT_1 и AT_2 (черт. 51) и, установив, что $\alpha = \varepsilon - 2\varphi$ и $\beta = 2\psi - \varepsilon - 180°$, выразить h_1 и h_2 из образовавшихся треугольников:

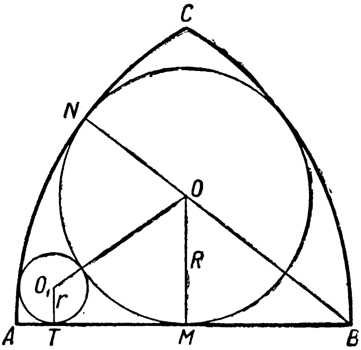
$$h_1 = AM \cdot \sin\alpha = AM \cdot \sin(\varepsilon - 2\varphi), \quad h_1 = MT_1 \cdot \sin\varphi = 2r \cdot \sin^2\varphi;$$
$$h_2 = AM \cdot \sin\beta = AM \cdot \sin(\varepsilon - 2\psi), \quad h_2 = MT_2 \cdot \sin\psi = 2r \cdot \sin^2\psi.$$

Отсюда $\frac{\sin(\varepsilon - 2\varphi)}{\sin(\varepsilon - 2\psi)} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\psi}$. Выполнив ряд тождественных преобразований, получим искомое соотношение.

402. Опустить из центров окружностей на одну из возможных секущих перпендикуляры и доказать, что простое отношение трех точек на секущей и трех центров на линии центров окружностей равны.



Черт. 51



Черт. 52

403. Установить, что точки N, O и B (черт. 52) лежат на одной прямой (O — центр окружности радиуса R, вписанной в криволинейный треугольник ABC), и показать, что степень точки B относительно окружности O равна $\frac{a^2}{4}$ или $a(a-2R)$ и $R = \frac{3}{8}a$. Точка M — проекция центра O, точка T — проекция центра O_1 окружности, вписанной в криволинейный треугольник. Показать, что $\frac{1}{4}TM^2 = R \cdot r$, $BT = BM + MT = \frac{a}{2} + 2\sqrt{R \cdot r}$. Так как степень точки B относительно окружности O_1 равна $BT^2 = a(a-2r)$ и $R = \frac{3}{8}a$, то $\left(\frac{a}{2} + 2\sqrt{R\cdot r}\right)^2 = a(a-2r)$, откуда получим квадратное уравнение $196r^2 - 108ar + 9a^2 = 0$, решив которое получим для r единственное решение $\frac{27 - 12\sqrt{2}}{98}a$.

404. Заметить, что касательная к окружности в вершине C вписанного треугольника ABC пересекает противоположную сторону AB в точке C_1, для которой $AC_1 : C_1B = AC^2 : BC^2$. Применить обратную теорему Менелая.

405. Используя теорему Пифагора, установить зависимость между t_{12} и O_1O_2, а затем из треугольников OO_1O_2 и OK_1K_2 (K_1 и K_2 — точки касания) определить квадрат стороны O_1O_2 и m^2, что даст возможность доказать справедливость требуемой зависимости.

406. Воспользоваться результатом задачи № 405.

407. Выразить отношение радиуса r окружности к расстоянию d ее центра до прямой t через тангенсы половинных углов α и β и, воспользовавшись свойствами пропорций, установить, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r-d}{r+d}$.

408. Приняв середину основания за центр гомотетии и преобразовав данную прямую с коэффициентом $\frac{1}{3}$, получим прямую — искомое геометрическое место точек.

409. Пусть секущая отсекает на сторонах угла S отрезки, сумма которых равна $2a$. Установить, что геометрическое место середин отрезков таких секущих есть отрезок MN, отсекающий на сторонах угла отрезки $SM = SN = a$ (см. задачу № 12). Искомое геометрическое место точек является также отрезком, гомотетичным полученному отрезку MN.

410. Рассмотреть четырехугольники $A_1A_3B_3B_1$, $A_2A_4B_4B_2$, $A_3A_5B_5B_3$, ... и воспользоваться результатом задачи № 248.

411. Находим две точки геометрического места и доказываем, используя свойства пропорциональных отрезков, что всякая третья точка искомого геометрического места лежит на прямой, соединяющей первые две.

412. Установить, что вписанные в треугольник ABC параллелограммы $M_iN_iK_iL_i$ делят стороны AB и BC в отношении $\frac{M_1M_2}{K_1K_2}=\frac{M_2M_3}{K_2K_3}=\ldots$, и использовать результат задачи № 410.

413. Убедиться, что если в четырехугольник $ABCD$ вписан указанным образом параллелограмм $MNKL$, то $AM:MB = CN:NB = CK:KD$. Затем рассмотреть две прямые AB и CD и подобные тройки точек A, M, B и C, K, D, откуда следует, что середины отрезков AC, MK и BD лежат на одной прямой (см. задачу № 410). Отсюда заключаем, что диагональ MK делится отрезком PQ (точки P и Q — середины диагоналей AC и BD) пополам. Искомым геометрическим местом является отрезок PQ.

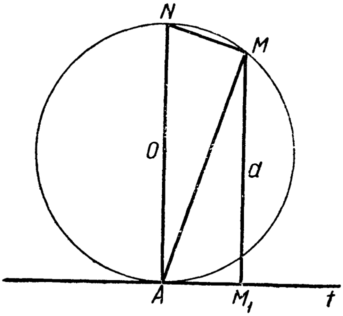
414. Рассмотреть два подобных прямоугольных треугольника и воспользоваться признаком принадлежности четырех точек одной окружности.

415. Восставить в точке A перпендикуляр к прямой t и отложить на нем отрезок AN, равный $\frac{AM^2}{d}$ (черт. 53). Отсюда следует, что $\frac{AM}{d}=\frac{AN}{AM}$ и в силу равенства углов, заключающих пропорциональные стороны, треугольники AMM_1 и AMN будут подобными, а значит, угол AMN прямой и геометрическим местом точек является окружность радиуса $\frac{AN}{2}$, касающаяся прямой t в точке A, а также окружность ей симметричная относительно этой прямой.

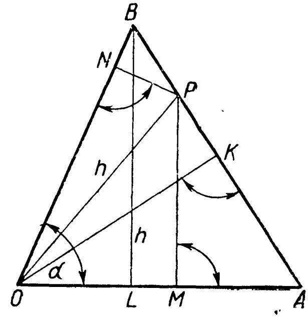
416. Обозначив основания перпендикуляров через A', B' и C', рассмотреть два подобных четырехугольника $AB'MC'$ и $A'BC'M$

и показать, что $\angle AMB$ равен $180° - \angle A$ или A. Следовательно, искомым геометрическим местом является окружность.

417. Провести прямую, отсекающую на сторонах данного угла O равные отрезки OA и OB (черт. 54). Если P есть точка искомого геометрического места на отрезке AB, то $PM + PN = h$, где M и N — основания перпендикуляров, опущенных на стороны угла или их продолжения, а h — высота на сторону OA. Но тогда $OA > PO = h > OK$, где K — середина AB. Отсюда, если $\angle AOB = \alpha$, $OA = a$, имеем: $a > a \sin\alpha > a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$, что приводит к тому, что $\alpha \neq 90°$, $\alpha > 60°$. При $\alpha = 60°$ имеем один луч OK; при $\alpha < 60°$ и $\alpha = 90°$ геометрическое место пусто.



Черт. 53



Черт. 54

418. Пусть точка M, лежащая внутри треугольника ABC, принадлежит к искомому геометрическому месту точек. Повернув AM по часовой стрелке вокруг точки A на 60° до положения AD, получим равносторонний треугольник AMD и два равных треугольника ABM и ACD ($AB = AC$, $AM = AD$ и $\angle BAM = \angle CAD$). Следовательно, $AM = MD$, $BM = CD$ и треугольник DMC имеет сторонами отрезки AM, BM и MC, т. е. он прямоугольный и $\angle MDC$ прямой. Отсюда заключаем, что угол AMB, равный углу ADC, должен быть постоянным и равным 150°. Аналогично доказывается тот случай, когда точка лежит вне треугольника, а также выясняется справедливость противоположной теоремы.

Искомым геометрическим местом является окружность с центром вне треугольника ABC, для которой сторона AB является хордой, стягивающей дуги в 60 и 300°.

419. Провести диагонали прямоугольника $ABCD$ и рассмотреть треугольники AMC и BMD, имеющие общую медиану MO (M — точка искомого геометрического места точек, O — точка пересечения диагоналей AC и BD). Установив равенство $AM^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ и учитывая, что, кроме того, $AM + MC = MB + MD$, показать возможность одного из двух следующих случаев: 1) $AM = MB$ и $MC = MD$ и 2) $AM = MD$ и $BM = MC$. Иско-

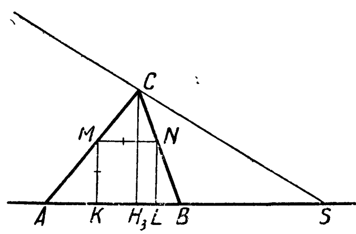
мым геометрическим местом точек является пара взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через середины сторон прямоугольника перпендикулярно этим сторонам.

420. См. задачу № 250.

421. Воспользоваться теоремой Менелая для треугольника BCQ и секущей AP и установить, что отрезок BQ делится точкой искомого геометрического места точек пополам. Отсюда следует, что прямая, параллельная прямой AC и делящая отрезок CB пополам, есть искомое геометрическое место точек.

422. Воспользоваться теоремой Менелая и установить, что отношение $AK : KP$ постоянно. (K — точка пересечения AP и BQ). Следовательно, искомым геометрическим местом точек будет прямая, параллельная прямой MP.

423. Установить, что стороны AC и BC (черт. 55) делятся точками M и N в отношении $AB : CH_3$ (CH_3 — высота треугольника ABC). Следовательно, $AM_i : M_iC_i = BN_i : N_iC_i = AB : C_iH_3^{(i)}$. Затем, воспользовавшись теоремой, обратной теореме Менелая, убедиться, что точки M, M_i и S (точка пересечения прямой и продолжения основания AB) лежат на одной прямой. Отсюда следует, что искомыми геометрическими местами точек являются прямые MS и NS.



Черт. 55

424. Так как вершины квадрата делят боковые стороны AC и BC в отношении $AB : CH_3$ (причем последние постоянны), то вписанные квадраты равны и искомым геометрическим местом точек будет прямая, параллельная основанию.

425. Пусть $m = KK_1$, $n = LL_1$ (точки K и L принадлежат стороне AB, $AC \neq BC$). Если C_1 — основание биссектрисы угла C, то вычислить KC_1 и LC_1 и доказать, что $C_1K : C_1L = a : b = C_1B : C_1A$. Дополнить данный треугольник до параллелограмма и установить гомотетию треугольников KLP и ABD, где P — точка пересечения KK_1 и LL_1, D — четвертая вершина параллелограмма. Искомое геометрическое место точек есть отрезок DE, где E — точка пересечения прямой DC_1 с меньшей из сторон CA и CB. Если данный треугольник равнобедренный, то искомым геометрическим местом точек является отрезок CD.

426. Рассмотреть геометрическое место точек B, затем геометрическое место точек C и, наконец, геометрическое место точек O. Воспользоваться преобразованиями параллельного переноса и гомотетии. Искомым геометрическим местом точек будет окружность.

427. Показать, что основания перпендикуляров, опущенных из точки M на хорды, отстоят от середины отрезка OM на постоян-

ном расстоянии, равном $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-OM^2}$. Искомым геометрическим местом является окружность.

428. Установить, что касательная к окружностям в точке P пересекает прямую AB в постоянной точке M, воспользовавшись для этого тем, что $MP^2 = MA\cdot MB = MC\cdot MD$.

429. В середине отрезка AP восставить перпендикуляр, встречающий линию центров O_1O_2 в точке Q. Убедиться, что $O_1Q : QO_2 = k$, и тем самым установить однозначное положение точки Q. Отсюда следует, что $QP = QA = \text{const}$. Искомое геометрическое место есть окружность.

430. Через точку O пересечения диагоналей AC и BD трапеции провести прямую, параллельную основанию AB, образующую с диагоналями углы α и β. Расстояния d_1 и d_2 любой точки этой прямой до диагоналей пропорциональны синусам углов α и β, а из треугольника ABO находим: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{AO}{BO} = \frac{AC}{BD}$. Аналогично проверить справедливость теоремы для другой прямой. Для точек P, не лежащих на указанных выше двух прямых, отношение синусов углов, образованных OP с диагоналями, отлично от $\sin\alpha : \sin\beta$ и тем самым от $AC : BD$.

431. Если данная постоянная равна $k (k \neq 1)$, то линию центров окружностей разделить в отношении $-k$ и полученную точку принять за центр искомой окружности. Затем применить теорему Стюарта (см. теорему 26, стр. 11). При $k=1$ имеем прямую.

432. Воспользоваться свойствами пропорциональных отрезков и показать, что все прямые касаются окружности радиуса $\frac{md_1+nd_2}{n+m}$.

433. Воспользоваться результатами задач № 283 и 347 и установить, что к искомой совокупности принадлежат лишь точки, расположенные внутри треугольника, вершинами которого являются основания биссектрис данного треугольника.

434. Воспользоваться теоремой Птолемея и доказать, что $\frac{a+b}{l}$ равно отношению основания к боковой стороне равнобедренного треугольника, угол при вершине которого постоянен. Аналогично решается вторая часть задачи.

435. Рассмотреть четырехугольник, образованный данными прямыми, и прямую, соединяющую точки пересечения его противоположных сторон. Стороны четырехугольника, определяемого точками деления гипотенуз данных прямоугольных треугольников, параллельны двум перпендикулярным прямым на основании свойств пропорциональных отрезков.

436. Из центра вписанной окружности опустить на высоту перпендикуляр и сравнить катет $h-r$ и гипотенузу $r\sqrt{2}$ прямоугольного треугольника.

437. Рассмотреть образовавшиеся прямоугольные треугольники и выразить расстояния точек через их расстояния до вершины S и тригонометрические функции образовавшихся углов.

438. Установить подобие треугольников ABC и DBA.

439. Опустить перпендикуляры на диагонали квадрата и воспользоваться теоремой Пифагора.

440. Заметить, что $b : SC = \sin\varphi$, $a : SC = \sin\psi$, где $\varphi = \angle ACC_1$, $\psi = \angle BCC_1$ (C_1—точка пересечения прямых AB и CS). Но $AC_1 : C_1B = (ACC_1) : (BCC_1) = b\sin\varphi : a\sin\psi$. Отсюда $AC_1 : C_1B = b^2 : a^2$.

441. Повернуть секущую около точки A на $60°$ так, чтобы образовался треугольник ANK, подобный треугольнику ABM. Тогда $m : a = NK : n$, или $NK = \frac{mn}{a}$, а из треугольника ANK — $NK^2 = m^2 + n^2 - mn$. Следовательно, $m^2 - mn + n^2 = \frac{m^2n^2}{a^2}$.

442. Пусть B_1C_1 пересекает AA_1 в точке P, а прямые AA_1, BB_1, CC_1 проходят через точку S (черт. 56). Доказать, что $AP : PS = AA_1 : SA_1$, для чего воспользоваться теоремой Чевы и Менелая применительно к треугольнику ABS, точке C и секущей B_1C_1. Учитывая, что C_1S — внутренняя биссектриса угла $B_1C_1A_1$, то C_1A будет внешней и $CC_1 \perp AB$. Для доказательства обратной теоремы воспользоваться окружностью Аполлония (см. стр. 13).

443. Решить задачу для равностороннего треугольника, для чего соединить точку C с серединой C_2 отрезка A_1B_1. Положив $CA_1 = kx$, $CB_1 = x$, где $k = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$, вычислить из треугольника B_1CC_2 косинус угла B_1C_2C и убедиться, что $CC_2 \parallel B_1C_1$. В силу того, что теорема носит аффинный характер, то из ее справедливости для равностороннего треугольника следует ее справедливость для любого треугольника.

444. Положим $M_1B_1 = l$, $B_1M_3 = 1 - l$, $M_3A_1 = s$. $A_1M_2 = 1 - s$, $M_2C_1 = k$, $C_1M_1 = 1 - k$, считая, что $AB = BC = CA = 2$. Установить, что $l(1+s) = 1$, $s(1+k) = 1$, $k(1+l) = 1$. Отсюда обнаружить, что $l = s = k = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5} - 1)$. Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ также равносторонний. Заметить, что $s : (1 - s) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Если точки взяты на продолжениях сторон, то $l = s = k = -\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

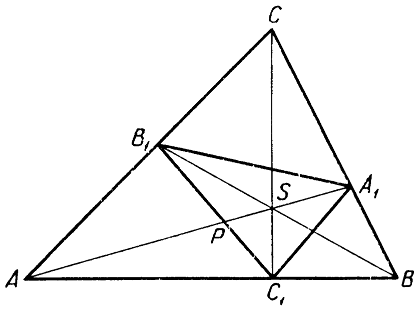
445. Воспользоваться необходимым и достаточным признаком того, что перпендикуляры к сторонам треугольника в данных на сторонах точках пересекаются в одной точке (см. теорему 18).

446. Выразить площадь четырехугольника ABA_1B_1 через x, y и a двумя способами: $(ABA_1B_1) = (B_1AO) + (OAB) + (BA_1O) = \frac{(a+x+y)a\sqrt{3}}{12}$ и $(ABA_1B_1) = (ABA_1) + (AA_1B_1) = \frac{y}{a}(ABC) +$

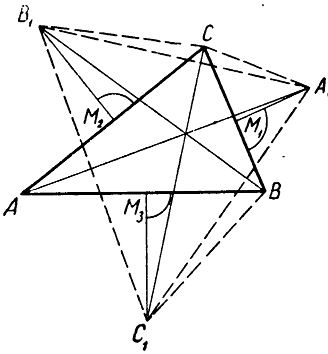
$+\left(1-\frac{y}{a}\right)\cdot\frac{x}{a}\cdot(ABC)$. Приравнивая правые части полученных равенств, найдем искомую зависимость.

447. См. указание к задаче № 444.

448. Пусть MC пересекает AB в точке C_2 и $\angle AMC_2=\varphi$, $\angle BMC_2=\psi$. Установить, что $AC_1:C_1B=AM\cos\varphi:BM\cos\psi$. Воспользоваться обратной теоремой Менелая и результатом задачи № 170.



Черт. 56



Черт. 57

449. Установить равенство треугольников ACA_2 и BCC_2 по двум сторонам и углу, заключенному между ними. Доказать, что $\angle A_2CA+\angle B_2CB=|90^\circ-\angle C|$. Рассмотреть случаи, когда угол C острый и тупой.

450. Длину отрезка CC_1 вычислить по теореме косинусов из треугольника CBC_1, а длину отрезка A_1B_1 — из треугольника A_1B_1C: $CC_1^2=\frac{a^2+b^2}{2}+2(ABC)$. Проверить, что $B_1C_1^2+CA_1^2=$ $=C_1A_1^2+CB_1^2$. Воспользоваться результатом задачи № 447 применительно к треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 57).

451. Воспользоваться равенством $h_1:r=2p:a$, а также тем, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$ и что равенство достигается только при $a=b$.

452. Из того, что сторона одного треугольника равна соответствующей стороне другого треугольника, следует, что данный треугольник равнобедренный.

453. Воспользоваться тождеством $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+$ $+2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=1$, справедливым для всякого треугольника.

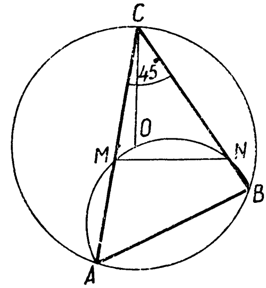
454. Предварительно доказать справедливость равенств:

$$\frac{\sin\left(\frac{C}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\left(\beta+\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\beta-\frac{C}{2}\right)},$$

используя теорему синусов и свойство внутренней биссектрисы треугольника. Рассмотреть треугольники ACM_3 и BCM_3.

455. Воспользоваться зависимостью $AH_3 \cdot BH_3 = HH_3 \cdot H_3C$ и учесть, что $3HH_3 = H_3C$.

456. Установить, что центр O лежит на второй окружности и $\smile AMO = \smile ONB = 90°$, а также показать, что $\smile MON = 90°$ (черт. 58). Следовательно, $MN = AO = \frac{AB}{\sqrt{2}}$, $\smile AM = \smile ON$, $\smile MO = \smile NB$, откуда $MO \parallel AN$ и $ON \parallel MB$. Так как $AN \perp CB$ и $BM \perp AC$, то MO и NO — высоты треугольника MCN, а значит, и CO — высота, т. е. $OC \perp MN$.



Черт. 58

457. Исходим из известных неравенств (черт. 59):

$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$.

Но $\frac{1}{2}(\angle B + \angle C) + \frac{1}{2}(\angle C + \angle A) + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180°$, поэтому $\sin\frac{B+C}{2} + \sin\frac{C+A}{2} + \sin\frac{A+B}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$, или $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (аналогично $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2}$). Равенство имеет место при $\angle A = \angle B = \angle C$. Кроме того, известно, что $\operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}$ (так как $(ABC) \geqslant \sqrt{27} \cdot r^2$). Согласно условию имеем:

$$2p_1 = 2r \cdot \left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) = 2p \cdot \frac{r}{p} \cdot \left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) = 2p \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2} \cdot \left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) \leqslant 2p \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = p; \text{ итак, } 2p_1 \leqslant p.$$

Равенство имеет место при $\angle A = \angle B = \angle C$ (см. стр. 15, 16).

458. Заметить, что основание секущей делит отрезок, концы которого совпадают с точками касания вписанных окружностей, пополам. Искомая секущая проходит через точку касания вписанной в данный треугольник окружности.

459. Установить, что CM_1 пересекает AB в точке C_1 (черт. 60), для которой

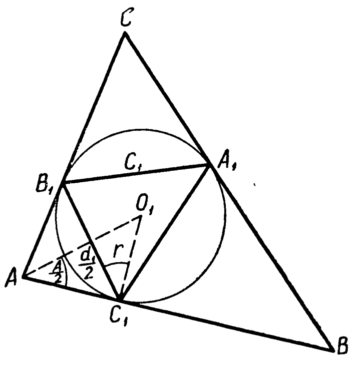
$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{2p(p-a)+bc}{2p(p-b)+ac}.$$

Аналогично

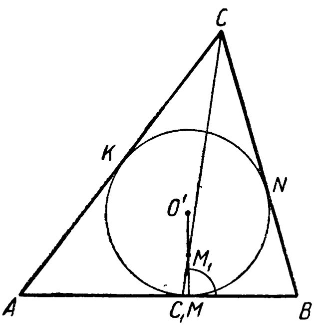
$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{2p(p-b)+ac}{2p(p-c)+ab}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{2p(p-c)+ab}{2p(p-a)+bc}.$$

Воспользоваться теоремой Чевы (теорема 4).

460. Рассмотреть треугольник CH_3T_3 и три точки на его сторонах. Применить обратную теорему Менелая (теорема 3).



Черт. 59



Черт. 60

461. Соединить центр O с точкой касания T_3 вписанной окружности и опустить высоту CH_3. Рассмотреть подобные треугольники CH_3P_3 и OT_3M_3 ($OM_3 \parallel CP_3$). Доказать, что $AP_3 = p - b$.

462. Положив $x^2 = \frac{a \cdot d_1^2}{p-a}$, отметить, что $p - a = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$, $d_1 = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$. Окончательно $x^2 = 4Rr$.

463. Заметить, что центры трех окружностей расположены на одной прямой (прямая Гаусса), которая служит для этих окружностей осью симметрии. Пусть две окружности проходят через точку M. Согласно задаче № 448 отрезки AA_1, BB_1, CC_1 видны из точки M под прямыми углами. Следовательно, третья окружность проходит через точку M и все три окружности принадлежат одному пучку.

464. Расстояние d между основаниями перпендикуляров определяется по формуле: $d = 2R_1 \cdot \sin C$; d будет наименьшим при $2R_1 = h_3$.

465. Произведение расстояний равно $ab \cos\varphi \cdot \cos\psi$ ($\varphi + \psi = C$ или $180° - C$). Максимум произведения $\cos\varphi \cdot \cos\psi$ достигается при $\varphi = \psi = \frac{C}{2}$. Искомая прямая является внешней биссектрисой треугольника при вершине C.

466. Если $PA = x$, $CQ = y$, то $xy = ab$. Положив $x + y = s$, найдем, что $s = \frac{x^2+ab}{x}$, или $s = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{ab}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{ab}$;

$$s_{\min} = 2\sqrt{ab} \text{ при } x = y = \sqrt{ab}.$$

467. Если $PA = x$, $CQ = y$, то $(a + x) : c = (d + y) : d$, откуда $ay + xy = cd + cy$. Положив $x + y = s$, найдем:

$$s = \frac{x^2 + x(a-c) + cd}{x+a-c} = x + \frac{cd}{x+a-c},$$

$$s = \left(\sqrt{x+a-c} - \sqrt{\frac{cd}{x+a-c}}\right)^2 + 2\sqrt{cd} - (a-c).$$

Отсюда $s_{\min} = 2\sqrt{cd} - (a-c)$ при $x + a - c = \sqrt{cd}$, или $x = \sqrt{cd} - (a-c)$.

468. Четыре точки A, C_1, B и C являются вершинами вырожденного описанного четырехугольника; следовательно, середина M_3 стороны AB и середина N отрезка CC_1 являются серединами диагоналей и лежат с центром вписанной окружности на одной прямой (см. теорему 21).

469. Пусть прямая PQ пересекает продолжение стороны AB в точке D. Применяем теорему Менелая дважды: к треугольникам CAL_3 и CBL_3 и секущей PQ.

470. Воспользоваться тем, что диагонали правильного пятиугольника равны, и тем, что $d^2 = a^2 + ad$, откуда $d = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$.

471. Дважды применить теорему Менелая.

472. Касательные, проведенные к окружности в вершинах треугольника ABC, встречают противолежащие стороны в точках A_1, B_1 и C_1. Установить, что $AC_1 : C_1B = -AC^2 : CB^2$, $BA_1 : A_1C = -BA^2 : AC^2$, $CB_1 : B_1A = -CB^2 : BA^2$, и воспользоваться теоремой, обратной теореме Менелая.

473. Первое решение. Воспользоваться формулой $r = \frac{S}{p}$, где r — радиус вписанной окружности, S — площадь, p — полупериметр треугольника. Площади рассматриваемых треугольников и радиусы вписанных окружностей согласно условию равны. Значит, равны и периметры этих треугольников, и поэтому данный треугольник равнобедренный.

Второе решение. Провести вторую общую внешнюю касательную и рассмотреть два образовавшихся описанных четырехугольника, у которых суммы противолежащих сторон равны.

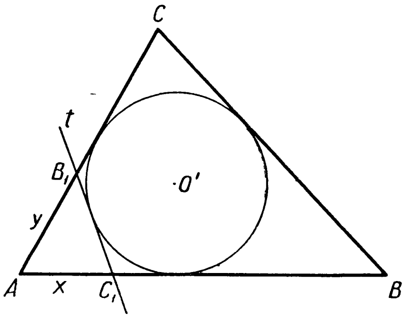
474. Чтобы получить зависимость

$$BD^2 \cdot AC = AB^2 \cdot DC + BC^2 \cdot AD - AC \cdot AD \cdot DC,$$

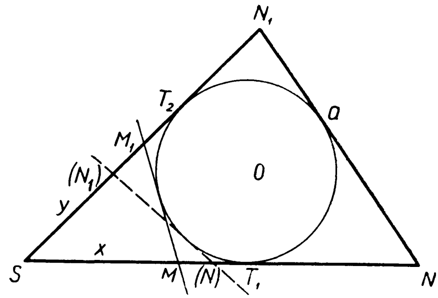
рассмотреть вырожденный четырехугольник $ABCD$ с углом D, равным 180°. Отдельно проверить случай, когда точка D лежит на продолжении AC.

475. Учитывая, что $\angle B + \angle D = 90°$, воспользоваться тем, что $AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot AD^2 = AC^2 \cdot BD^2$, и теоремой, обратной теореме Пифагора.

476. Пусть требуется определить расстояние от точки P стороны AB треугольника ABC до вершины C. Продолжить отрезок PC до пересечения в точке D с окружностью, описанной около этого треугольника, и рассмотреть вписанный четырехугольник $ACBD$ и две пары образовавшихся подобных треугольников. Ис-



Черт. 61



Черт. 62

пользуя теорему Птолемея и выполнив ряд тождественных преобразований, показать, что $CP^2 = \frac{1}{AB} \cdot (AC^2 \cdot BP + BC^2 \cdot AP - AB \times \times AP \cdot BP)$. Для доказательства обратной теоремы воспользоваться приведенным указанием, выполнив преобразования в обратном порядке.

477. При помощи теоремы косинусов доказать, что

$$\cos \angle BGC = \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{18BG \cdot CG} \geqslant 0.$$

Отсюда находим, что $\angle BGC \leqslant 90°$. Следовательно, углы BGA и CGA тупые. Воспользоваться результатом задачи № 3.

478. 1) На стороне AB вне треугольника ABC построить равносторонний треугольник ABP и доказать, что $CP = AM + BM + CM$. Затем воспользоваться теоремой косинусов, примененной к треугольнику APC. 2) Использовать ее также для треугольников AMB, BMC, CMA.

479. Из условия задачи следует, что $B_1C_1 + a = (b - y) + (c - x)$, или же $B_1C_1 - a = (x - c) - (b - y)$, или же $B_1C_1 - a = (y - b) - (c - x)$. Во всех трех случаях имеем:

$$B_1C_1^2 = x^2 + y^2 - \frac{xy}{bc} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) = (x + y)^2 - 4(p - a)(x + y) + 4(p - a)^2.$$

После упрощений получаем искомую зависимость между x и y (черт. 61). Рассматривая выкладки в обратном порядке, обнаружить справедливость обратной теоремы. Если точка C_1 лежит на продолжении BA за вершину A, то зависимость между x и y имеет вид: $-pxy - bc(-x + y) + bc(p - a) = 0$.

480. Из подобия треугольников ABT_1 и AT_1D, ABT_2 и ADT_2 установить, что

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BT_1 \cdot BT_2}{DT_1 \cdot DT_2}. \qquad (1)$$

Далее показать, что отношение $\frac{BC}{DC}$ равно отношению площадей треугольников BT_1T_2 и DT_1T_2, т. е.

$$\frac{BC}{DC} = \frac{BT_1 \cdot BT_2}{DT_1 \cdot DT_2}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует искомое соотношение.

481. Соединить A, A_1 и T (T — точка касания AA_1 к окружности) с центром O. AO и A_1O, как биссектрисы смежных углов, перпендикулярны, а OT — высота прямоугольного треугольника AOA_1, следовательно, $OT^2 = AT \cdot TA_1$, или $r^2 = MA \cdot NA_1$. Аналогично $r^2 = MB \cdot NB_1$ и $r^2 = MC \cdot NC_1$. А так как $MB = \frac{1}{2}(MA + MC)$, то $\frac{1}{NB_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{NA_1} + \frac{1}{NC_1}\right)$.

482. Положим $SM = x$, $SM_1 = y$, $SN = c$, $SN_1 = b$, $NN_1 = a$ (черт. 62). Из условия того, что прямая MM_1 касается окружности, вписанной в треугольник SNN_1, следует, что $a + MM_1 = MN + M_1N_1$. Из этого равенства вытекает, что $pxy - bc(x + y) + bc(p - a) = 0$. Проверить, что соотношение между отрезками на касательных, которое дано в условии задачи, совпадает с вышеполученным. При решении задачи рассмотреть случай, когда окружность вневписана относительно треугольника SNN_1, а касательная MM_1 пересекает продолжения сторон SN или SN_1.

483. Если одна четверка точек является гармонической, то у соответствующего ей четырехугольника произведения противоположных сторон равны. Согласно задаче № 387 четырехугольник с вершинами в другой четверке точек обладает тем же свойством, и поэтому вторая четверка точек также является гармонической.

484. Описать около кривой треугольник ABC, тогда $CA_1 = CB_1$, $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$ (A_1, B_1, C_1 — точки касания) и

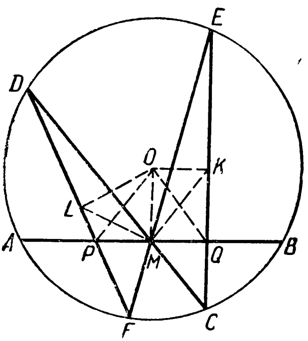
$$AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2.$$

Отсюда следует, что перпендикуляры, восставленные в точках A_1 B_1, C_1, должны пересекаться в одной точке; обозначим ее через O. Рассмотрев равные прямоугольные треугольники, убедиться, что $OA' = OB' = OC'$, т. е. точки кривой находятся на равных расстояниях от точки O (см. теорему 18).

485. Так как точки касания являются центрами подобия окружностей, то прямая, проходящая через два центра подобия, обязательно пройдет и через третий центр подобия (см. теорему 20).

486. Рассмотреть два треугольника с общей медианой и выразить квадрат длины медианы через квадраты сторон каждого треугольника.

487. Соединить попарно центры трех окружностей и рассмотреть получившийся треугольник со сторонами $R-r$, $r+r_0$, $R-r_0$ и с высотой r_0. Воспользоваться теоремой Пифагора.



Черт. 63

488. Опустить перпендикуляры OK и OL из центра O на хорды CE и DF (черт. 63) и установить подобие треугольников KEM и LDM, а затем и треугольников CME и FDM. Наконец, доказать равенство углов OPM и OKM, а также углов OQM и OLM, использовав с этой целью то, что точки O, K, P и M, равно как и точки O, M, Q, B, лежат на одной окружности (P и Q — точки, симметрию которых требуется доказать).

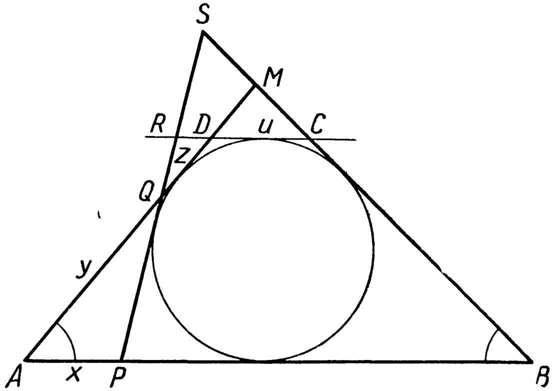
489. Показать, что треугольники MAP и MBQ подобны и $MA \cdot MB = MP \cdot MQ$, а так как $MT^2 = MP \times MQ$, то $MA \cdot MB = MT^2$.

490. Провести прямые AC и BD, пересекающиеся в точке N, и прямую MN, встречающую AB в точке K. Затем рассмотреть четырехугольники $ADNK$, $DMCN$ и $CBKN$, около которых можно описать окружности, и показать, что $BK \cdot AB = BN \cdot BD = BM \cdot BC$ и $AM \cdot AD = AC \cdot AN = AB \cdot AK$, откуда следует, что $AB^2 = AM \cdot AD \pm BM \cdot BC$ (знак зависит от того, встречает MN диаметр AB или его продолжение).

491. Пусть боковые стороны AD и BC трапеции (черт. 64) пересекаются в точке M. Положим $AB = c$, $BM = AM = b$, $PA = x$, $AQ = y$, $DQ = z$, $DC = u$. Отрезки x и y удовлетворяют уравнению: $pxy - bc(x+y) + bc(p-b) = 0$, где p — полупериметр треугольника ABM, а точка P лежит на стороне AB. Установить, что $AD = \frac{bc}{p}$, $u = \frac{c(p-c)}{p}$, $z = \frac{x}{y} \cdot \frac{bc-py}{p}$. Проверить, что из пропорции $PQ : QR = PS : SR$ следует указанная выше зависимость между x и y и обратно (см. задачу № 479).

492. Установить, пользуясь преобразованием гомотетии, что прямая, проведенная через точку пересечения F боковых сторон BC и AD трапеции $ABCD$ и точку касания T на основании CD, пересекает основание AB в точке K, симметричной с точкой касания L окружности со стороной AB относительно ее середины M. Если FT пересекает окружность в точке S, то касательная в точке S к окружности проходит через точку M.

493. Воспользоваться решением задачи № 366. Установить, что биссектрисы углов E и F (черт. 65), образованные противоположными сторонами данного четырехугольника $ABCD$, пересекают эти стороны в точках, являющихся вершинами параллелограмма, стороны которого параллельны диагоналям данного четырехугольника. Далее выявить, что центры параллелограммов,

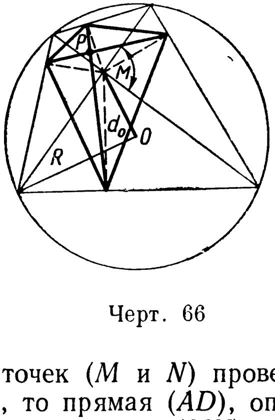


Черт. 64

стороны которых параллельны диагоналям данного четырехугольника, расположены на прямой, соединяющей середины его диагоналей.

494. Рассмотреть образовавшиеся равнобедренные треугольники и воспользоваться результатом задачи № 416.

Черт. 65

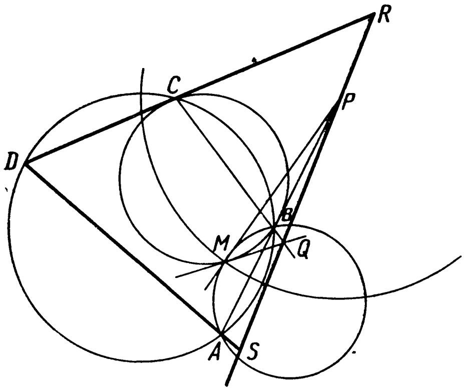


Черт. 66

495. Установить, что если из двух точек (M и N) проведены к окружности касательные (MA и ND), то прямая (AD), определяемая точками касания (A и D), разделит отрезок (MN), соединяющий данные точки, в отношении, равном отношению отрезков касательных ($MA : ND$). В зависимости от расположения касательных деление отрезка может быть внутренним и внешним (каса-

тельные MA и NB или MA и ND). Воспользоваться этими результатами для решения предложенной задачи.

496. Если a_1, b_1, c_1 d_1 — стороны второго четырехугольника (черт. 66), то $a_1 = \frac{ud_1}{2R}$, $b_1 = \frac{u_1d_2}{2R}$, $c_1 = \frac{vd_1}{2R}$, $d_1 = \frac{v_1d_2}{2R}$, где d_1, d_2 — диагонали, а u, u_1, v, v_1 — отрезки этих диагоналей, на которые они делятся точкой P. Вычислить периметр $2p_1$ этого четырехугольника, а также синус одного из его углов, например $\sin(a_1, b_1) = \frac{2uv_1}{u^2+v_1^2}$. Далее, найти площадь этого четырехугольника: $S_1 = \frac{R^2-d_0^2}{4R^2}\cdot 2S$, где S — площадь исходного четырехугольника, пользуясь тем, что $uv = u_1v_1 = R^2 - d_0^2$. Радиус вписанной в четырехугольник окружности равен $S_1 : p_1$.



Черт. 67

497. Доказать, что обе диагонали делят отрезок, соединяющий точки касания на двух противолежащих сторонах, в равных отношениях.

498. Провести общую касательную и доказать, что α $(180°-\alpha)$ есть угол, под которым из точки A виден отрезок общей касательной.

499. Рассмотреть отношение разности радиусов к их сумме и выразить отношение радиусов через тригонометрические функции угла.

500. Построим окружности с центрами в точках P, Q, R, S соответственно радиусами PM, QM, RM, SM (черт. 67). Согласно условию центры этих окружностей принадлежат одной прямой. Следовательно, окружности принадлежат одному пучку. Точки A и B инверсны относительно первой окружности, точки B и C — относительно второй. Значит, окружность (ABC) перпендикулярна двум окружностям пучка, и поэтому она перпендикулярна и двум остальным окружностям пучка. Но C и D инверсны относительно третьей окружности, поэтому окружность (ABC) проходит через точку D, что и требовалось доказать.

501. Перпендикуляр, опущенный из середины M дуги ACB на хорду AC, делит ее пополам в точке P. Если $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle MAB = \gamma$, $\angle CAM = \delta$, то

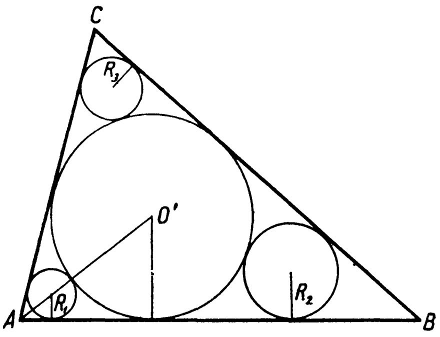
$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \delta = \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad (\beta \geqslant \alpha),$$

$$AP = \frac{1}{2}(AC + CB) = R(\sin\alpha + \sin\beta) = 2R\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

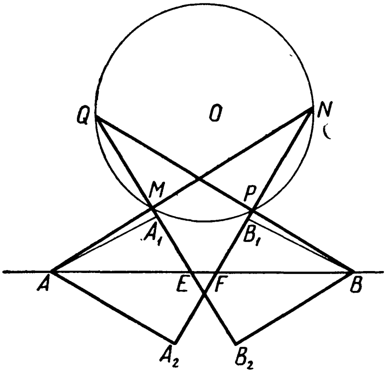
Отсюда

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

502. Опишем около треугольника ABC окружность и в вершинах треугольника проведем к ней касательные, образующие другой треугольник, периметр которого равен $2R(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$. Итак, периметр описанного треугольника в два раза больше периметра вписанного. Согласно задаче № 457 заключаем, что данный треугольник равносторонний.



Черт. 68



Черт. 69

503. Очевидно, что $(r + R_1) : (r - R_1) = 1 : \sin\frac{A}{2}$ (черт. 68).

Отсюда $R_1 = \dfrac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\cdot r$, или $R_1 = \operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{A}{4}\right)\cdot r$. Отсюда

$$\sqrt{R_1R_2} + \sqrt{R_2R_3} + \sqrt{R_3\cdot R_1} =$$
$$= \left[\operatorname{tg}\left(45° - \frac{A}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(45° - \frac{B}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(45° - \frac{B}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(45° - \frac{C}{4}\right) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{tg}\left(45° - \frac{C}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(45° - \frac{A}{4}\right)\right]\cdot r.$$

Но $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$ при $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.

В нашем случае

$$\alpha = 90° - \frac{\angle A}{2},\quad \beta = 90° - \frac{\angle B}{2},\quad \gamma = 90° - \frac{\angle C}{2},$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 270° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = 180°.$$

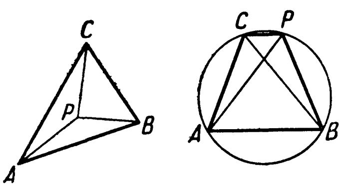
Следовательно, выражение в квадратных скобках равно 1 и

$$\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_3R_1}=r.$$

504. Из равенства углов AME и FPB (черт. 69) следует, что $AM:BP=AA_1:BB_1$, где $AA_1\perp QE$, $BB_1\perp NF$.

Из равенства углов ANF и EQB следует, что $AN:BQ=AA_2:BB_2$, где $AA_2\perp PN$, $BB_2\perp MQ$. Отсюда $\frac{AM\cdot AN}{BP\cdot BQ}=\frac{AA_1\cdot AA_2}{BB_1\cdot BB_2}$. Но согласно условию $AM\cdot AN=BP\cdot BQ$. Следовательно, $AA_1\cdot AA_2=BB_1\cdot BB_2$ и $\frac{AA_1}{BB_2}=\frac{BB_1}{AA_2}$, или $AE:BE=BF:AF$, т. е. $AE=BF$ и точки E и F равноудалены от центра окружности.

505. Воспользоваться решениями задач № 155 и № 205, учитывая, что треугольник ABC равносторонний.



Черт. 70

506. По теореме Эйлера для каждого треугольника имеем: $OO_1^2=R^2-2Rr_1$, $OO_2^2=R^2-2Rr_2$, $OO_3^2=R^2-2Rr_3$, $OO_4^2=R^2-2Rr_4$. А так как центры O_1, O_2, O_3 и O_4 являются вершинами прямоугольника (см. задачу № 200) и, кроме того, суммы квадратов расстояний какой-либо точки до противоположных вершин равны, то

$$R^2-2Rr_1+R^2-2Rr_2=R^2-2Rr_3+R^2-2Rr_4,$$

откуда следует, что $r_1+r_2=r_3+r_4$.

507. Около $\triangle ABC$ описана окружность O и вписана в него окружность O'. Воспользовавшись теоремой Эйлера и определением степени точки O' относительно окружности O, установить, что $2Rr=CO'\cdot O'C_1$, т. е. учитывая условие $CC_1=CO'+O'C=R+2r$, возможны два случая: 1) $R=O'C_1$, $2r=CO'$ и $\angle O'CB=30^\circ=\frac{1}{2}\angle ACB$; 2) $R=CO'$, $2r=O'C_1$. Тогда установить, что $AC_1=C_1B=C_1O'$, т. е. равно $2r$, и воспользоваться теоремой Птолемея: $a\cdot 2r+b\cdot 2r=c\,(R+2r)$, или $(a+b+c)\cdot 2r=c\,(R+4r)$, т. е. $4S=2c\cdot h_3=c\,(R+4r)$, или $h_3=\frac{R}{2}+2r$.

508. Согласно теореме 37 (черт. 70) имеем, что

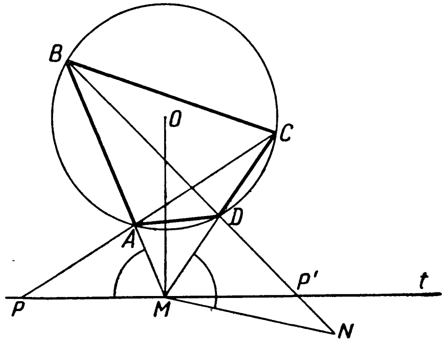
$$PA^2\cdot BC^2\leqslant PB^2\cdot AC^2+PC^2\cdot AB^2+2PB\cdot AC\cdot PC\cdot AB,$$

или $PA\cdot BC\leqslant PB\cdot AC+PC\cdot AB$. Заменив в этом неравенстве стороны треугольника ABC синусами противоположных углов, получим: $PA\cdot\sin A\leqslant PB\cdot\sin B+PC\cdot\sin C$. Равенство имеет место для того и только того случая, когда точка P лежит на окружности, описанной около данного треугольника.

509. Если диагонали CA и BD четырехугольника $ABCD$ (черт. 71) пересекают прямую t в точках P и P', то для доказательства симметрии точек P и P' относительно точки пересечения $M \equiv E$ сторон BA и CD достаточно установить, что степени их относительно окружности O равны. Пользуясь понятием степени точки, можно установить, что

$$PM^2 - P'M^2 = uv - u_1v_1, \quad (1)$$

где $u = PA$, $v = PC$, $u_1 = P'D$, $v_1 = P'B$. Но, с другой стороны, разность этих же квадратов на основании теоремы Стюарта из треугольников PMC и $P'BM$ выразится следующим образом:



Черт. 71

$$P^2M - P'M^2 = \frac{m^2v - q^2u}{v - u} + uv - \frac{p^2v_1 - n^2u_1}{v_1 - u_1} - u_1v_1, \quad (2)$$

где $m = MA$, $n = MB$, $p = MD$, $q = MC$. Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\frac{m^2v - q^2u}{v - u} = \frac{p^2v_1 - n^2u_1}{v_1 - u_1}. \quad (3)$$

Далее, проведем прямую так, чтобы угол DMN был равен углу AMP, и, воспользовавшись свойством изогональных прямых и подобием треугольников PMC и BMN, установим, что

$$\frac{p^2}{n^2} = \frac{m^2}{q^2} = \frac{u_1u_2}{v_1 \cdot v_2} = \frac{uu_1}{vv_1}, \quad (4)$$

где $u_2 = ND$, $v_2 = NB$. Так как $\frac{m^2}{uu_1} = \frac{q^2}{vv_1}$, то $\frac{m^2v - q^2u}{uv(u_1 - v_1)} = \frac{m^2}{uu_1}$. Аналогичным образом получим, что

$$\frac{p^2v_1 - n^2u_1}{u_1v_1(u - v)} = \frac{p^2}{uu_1}. \quad (5)$$

Из равенств (4) и (5) найдем отношение:

$$\frac{m^2}{p^2} = \frac{(m^2v - q^2u) \cdot u_1v_1(u - v)}{uv(u_1 - v_1)(p^2v_1 - n^2u_1)}. \quad (6)$$

Учитывая равенство (3) и то, что $(u-v)^2:(u_1-v_1)^2=m^2:p^2$, из равенства (6) следует, что $uv=u_1v_1$.

510. Обозначить внешние углы треугольника ABC соответственно через 3α, 3β, 3γ. Тогда $\alpha+\beta+\gamma=120^\circ$. Установить, что сторона построенного треугольника равна $8R\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$, где R — радиус окружности, описанной около данного треугольника. Итак, построенный треугольник равносторонний.

511. Установить, что $AC_1:C_1B=-(MA^2:MB^2)$, и воспользоваться теоремой Менелая (теорема 3).

512. Через точку C проводим прямую l_c под углом α к прямой l, через точку B — прямую l_b под углом $60^\circ+\alpha$, через точку A — прямую l_a под углом $120^\circ+\alpha$, образующие равносторонний треугольник. Сторона x этого треугольника равна $m\cos\alpha-\frac{m+2n}{\sqrt{3}}\times$ $\times\sin\alpha$. Максимум имеет место при $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{m+2n}{m\sqrt{3}}$.

513. Пусть CM пересекает AB в точке C_1. На основании теоремы Чевы установить, что $AC_1:C_1B=p_2:p_1$. По теореме Стюарта вычислить NC_1^2 из треугольника ABN. Далее доказать на основании теоремы Ван-Обеля (см. теорему 5), что $CM:MC_1=$ $=\frac{p_1+p_2}{p_3}$. По теореме Стюарта из треугольника CNC_1 вычислить MN^2.

514. Согласно формуле, полученной при решении задачи № 513, имеем: $MG^2=\frac{1}{3}(d_1^2+d_2^2+d_3^2)-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$. Учитывая условие задачи, устанавливаем, что $MG=0$ и $M\equiv G$.

515. Воспользоваться формулой, приведенной в задаче № 513, имея в виду, что $M\equiv N\equiv O'$. Для доказательства обратной теоремы воспользоваться той же формулой и на основании данного соотношения обнаружить, что расстояние данной точки от инцентра треугольника равно нулю.

516. Применить дважды теорему Паскаля (теорема 22) к шестиугольникам, вписанным в окружность. Из рассмотрения шестиугольника $ACBB_1PA_1$ следует, что точки B_2, A_2 и S принадлежат одной прямой (черт. 72), а из рассмотрения шестиугольника ACC_1PBB_1 следует, что точки B_2, S и C_2 принадлежат одной прямой. Случаи параллельности рассмотреть отдельно.

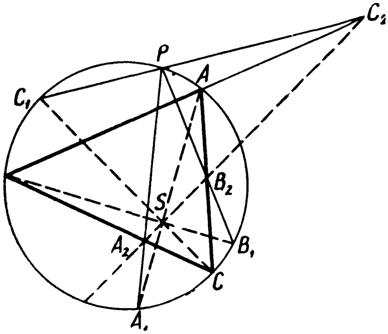
517. Провести через середину M_1 стороны BC треугольника ABC секущую, встречающую лучи AB и AC соответственно в точках B_1 и C_1. Через вершину C провести прямую, параллельную AB и встречающую B_1C_1 в точке P, после чего сравнить площади треугольников M_1CB_1 и MC_1B.

518. Провести через центроид треугольника секущую, параллельную стороне, и установить, что она рассекает треугольник на треугольник и четырехугольник, отношение площадей которых равно 4 : 5. Далее воспользоваться результатом предыдущей задачи.

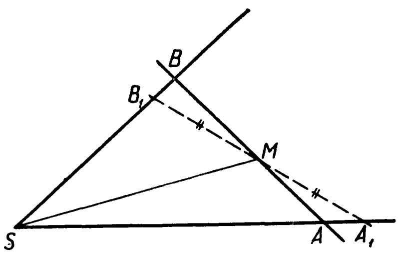
519. Соединить точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 и рассмотреть треугольники AA_1B_1, AA_1C, CA_1C_1 и т. д., равновеликие треугольнику ABC.

520. Так как $(A_1B_1C_1) = (A_1B_1C) + (B_1C_1C) + (C_1A_1C)$, а $(B_1C_1C) = (C_1CB)$ и $(C_1A_1C) = (CC_1A)$, то $(A_1B_1C_1) = (A_1B_1C) + (ACB) = 2\,(ACB)$. Следовательно, $(ACB) : (A_1B_1C_1) = 1 : 2$. Если $(\overline{ABC})$ выражает площадь ориентированного треугольника ABC, то $(\overline{ABC}) : (\overline{A_1B_1C_1}) = -\frac{1}{2}$.

521. Воспользовавшись свойством медианы, делить площадь треугольника пополам; показать, что если точка G — центроид треугольника, то площади треугольников GAB, GBC, GCA равны. Затем установить, что если площади этих треугольников равны,



Черт. 72



Черт. 73

то прямая AG равноудалена от вершин B и C и встречает сторону BC в точке M_1 — ее середине; аналогично прямая BG встречает сторону AC в точке M_2 — ее середине. Следовательно, AM_1 и BM_2, пересекающиеся в точке G, суть медианы.

522. Провести секущую, отрезок A_1B_1 которой, заключенный внутри угла ASB, делится в точке M пополам (черт. 73). Установить, что

$$\frac{(SAM)-(SA_1M)}{(SMB_1)-(SMB)} = \frac{(AMA_1)}{(BMB_1)} = \frac{AM}{MB} = \frac{(SAM)}{(SMB)},$$

где $(SA_1M) = (SMB_1)$. В результате преобразований перейти к равенству:

$$\frac{1}{(SAM)} + \frac{1}{(SMB)} = \frac{2}{(SA_1M)}.$$

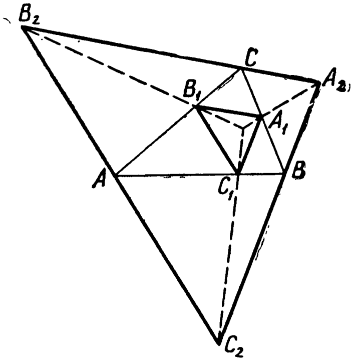
523. Установить, что (черт. 74) $(ABC) : (A_1B_1C_1) = A_2B_2 : A_1B_1$, $(ABC) : (A_2B_2C_2) = A_1B_1 : A_2B_2$.

524. Установить, что отрезок A_1B_1 делится медианой CM_3 пополам, и сравнить площади двух пар треугольников: APC, BPC и CPA_1, CPB_1.

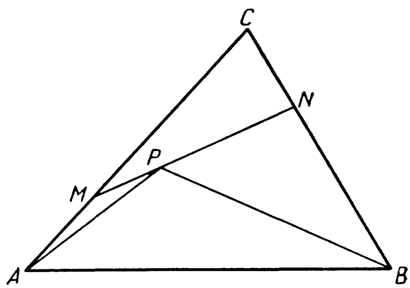
525. Спроектировать треугольник параллельным проектированием в равносторонний и использовать результат задачи № 190.

526. Каждый из треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ разбивается одной из наклонных на два треугольника, у которых имеется соответственно общая сторона. Доказать, что отношение общей стороны первой пары треугольников к общей стороне второй пары треугольников равно $(k+1):k$, и учесть равенство высот, опущенных на общие стороны.

527. Положим $(AMP) = x$, $(BNP) = y$, $(MCP) = u$, $(CPN) = v$, $(ABC) = s$. Тогда $u = kv$, $x = ku$, $v = ky$, $S = \frac{(k+1)^2}{k}(u+v)$. Из полученных равенств исключить u, v, k (черт. 75).



Черт. 74



Черт. 75

528. Первый способ. Воспользоваться тем, что площадь четырехугольника выражается формулой $(ABCD) = \frac{1}{2} ef \sin\varphi$, а второй четырехугольник есть параллелограмм со сторонами $\frac{e}{2}$, $\frac{f}{2}$ и с углом φ между ними.

Второй способ. Заметить, что средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого равна одной четвертой части площади данного треугольника.

529. Воспользоваться тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей и синуса угла между ними.

530. У обоих четырехугольников диагонали соответственно равны и образуют в каждом из них углы, равные между собой. Воспользоваться известной формулой площади четырехугольника.

531. Соединить точку пересечения средних линий с вершинами четырехугольника и рассмотреть восемь образовавшихся треугольников.

532. Пусть точки E и F — середины сторон BC и CD. Треугольники ABE, AEC, ACF и AFD равновелики, а значит, площадь $AECF$ равна половине площади параллелограмма $ABCD$. Установив, что площадь треугольника CEF равна $\frac{1}{8}$ площади параллелограмма, определить площадь треугольника AEF.

533. Воспользоваться тем, что отношение высот образовавшихся трапеций равно $\frac{a-\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}-c}$.

534. Доказать, что если в данном четырехугольнике $ABCD$ площади $AMNB$ и $MNCD$ равны, то в силу равенства $(MNC) = (MBN)$ равны площади треугольников MAB и MCD, имеющих равные основания AM и MD. Отсюда следует равенство высот последних треугольников, а значит, и параллельность сторон AD и BC.

535. Воспользоваться замечаниями к задаче № 534.

536. Установить, что отрезок MN параллелен сторонам AD и BC данного четырехугольника.

537. Доказать, что прямые MB и MD делят диагональ AC пополам и поэтому точка M есть середина диагонали AC.

538. Прямые AM и CN, встречающие соответственно стороны CD и AD в точках M и N $[(ABC) < (ACD)]$, делят площадь четырехугольника пополам. Следовательно, треугольники AMD и CND равновелики, откуда следует равновеликость треугольников AMC и CNA, имеющих общее основание AC.

539. Так как $s_1^2 = s_2 \cdot s_4$, то $s_1 : s_2 = s_4 : s_1$ и $h_1 : h_2 = h_4 : h_3$, где h_1 и h_2, h_3 и h_4 — высоты, опущенные из вершин четырехугольника на его диагонали. Отсюда заключаем, что диагонали при пересечении разбиваются на пропорциональные отрезки.

540. Через вершину D провести прямую, параллельную диагонали AC и пересекающую продолжение AB в точке E. Установить равновеликость треугольника EBD и данной трапеции. Рассмотреть подобные треугольники EBD, ABO и CDO. Воспользоваться теоремой об отношении площадей подобных фигур.

541. П е р в ы й с п о с о б. Так как $(s_1 + s_2)(s_3 + s_4) = (s_1 + s_4)(s_2 + s_3)$, то после несложных преобразований получим, что $(s_4 - s_2) \cdot (s_1 - s_3) = 0$. Отсюда заключаем, что если один из сомножителей равен нулю, то четырехугольник — трапеция, если оба — параллелограмм.

В т о р о й с п о с о б. Установить, что $\sin A \cdot \sin C = \sin B \times \sin D$. Учитывая зависимость $\angle D = 360° - (\angle A + \angle B + \angle C)$, получить равенство $\sin(A + B) \cdot \sin(B + C) = 0$.

542. См. решение задачи № 528.

543. Показать, что полученный четырехугольник — параллелограмм со сторонами, равными и параллельными диагоналям данного четырехугольника. Следовательно, площадь его не зависит от выбора точки M.

544. Провести диагональ AC и установить, что $(ADC) = (ADR) = (ARS)$, $(ABC) = (BCP) = (CPQ)$, затем провести диагональ BD и также найти равные площади. Затем показать, что искомое отношение равно $1 : 5$.

545. Провести диагональ AC и установить, что площади треугольников BPC и QCP соответственно равны $(m-1) \cdot (ABC)$ и $(m-1)^2 \cdot (ABC)$, а площади треугольников ADR и ARS равны

$(m-1)\cdot(ADC)$ и $(m-1)^2\cdot(ADC)$. Аналогично, проведя вторую диагональ, найдем сумму площадей треугольников CQR и APS, она равна $m(m-1)\cdot(ABCD)$. Отсюда $(PQRS)=(2m^2-2m+1)\times$ $\times(ABCD)$. Если $(PQRS)=2(ABCD)$, то $m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

546. Установить, что

$$\frac{(AMCP)}{(ABCD)}=\frac{k_1}{1+k_1} \text{ и } \frac{(A_1B_1C_1D_1)}{(AMCP)}=\frac{k_2(1+k_1)}{1+(k_1+1)(k_2+1)},$$

где $(A_1B_1C_1D_1)$ — площадь второго параллелограмма.

547. Оба параллелограмма, построенные на сторонах AC и BC, заменить равновеликими с общей стороной CD и рассмотреть полученный при этом построении треугольник, равный данному.

548. Соединить точку M с вершинами четырехугольника и, рассмотрев образовавшиеся при этом попарно равновеликие треугольники, установить, что сумма площадей четырехугольников AM_1MM_4 и MM_2CM_3 равна половине площади данного четырехугольника. Затем, выяснив равновеликость четырехугольников AM_1MM_4 и AM_1KM_4, MM_2CM_3 и KM_2CM_3 (K — середина диагонали AC), показать равенство площадей треугольников AM_1K и KM_2C, AKM_4 и KCM_3, а следовательно, и равенство площадей четырехугольников AM_1KM_4 и KM_2CM_3.

549. 1) Воспользоваться теоремой Менелая. 2) Опустить на прямую MN перпендикуляры из вершин четырехугольника и установить, что $AA_1=CC_1$ и $BB_1=DD_1$. Отсюда следует, что треугольники ABN и CDM равновелики как треугольники, составленные из равновеликих треугольников с общим основанием MN.

550. Для удобства доказательства и не нарушая общность решения, можно предположить, что данный параллелограмм есть квадрат, а восьмиугольник в таком случае полуправильный. Рассмотреть восьмую часть квадрата и принадлежащую ей восьмую часть восьмиугольника, представляющие собой два треугольника с общим углом и с отношением произведений, заключающих общий угол сторон, равным 6.

551. Если $BA_1=A_1A_2=A_2C$, $CB_1=B_1B_2=B_2A$, $AC_1=$ $=C_1C_2=C_2B$ и $AA_1\times BB_2\equiv M$, $CM\times AB\equiv M_3$, то $GM\times$ $\times GM_3=2:5$; если $AA_1\times BG\equiv N$, то $GN:GB=1:4$ (черт. 76). Следовательно, $(GMN):(GBM_3)=\frac{1}{10}$, и поэтому искомое отношение также равно $1:10$. При вычислении полученных выше отношений воспользоваться теоремой Менелая. Не нарушая общности, можно предположить, что данный треугольник равносторонний. Далее см. задачу № 204.

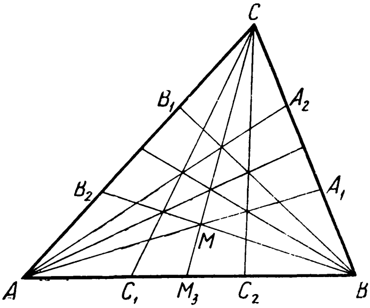
552. Треугольники MPQ, MQR, MRP равновелики с данным треугольником (см. задачу № 521).

553. Так как прямая KL делит отрезок EF пополам (прямая Гаусса), то перпендикуляры, опущенные из точек E и F на прямую MN, равны.

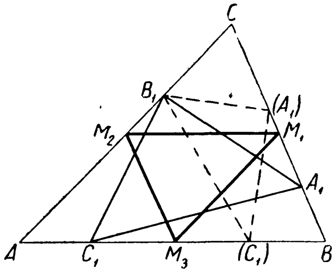
554. Положим, $AB_1 : B_1C = \lambda$, $CA_1 : A_1B = \mu$, $BC_1 : C_1A = \nu$. (черт. 77). Положим, 1) $\lambda \geqslant \nu \geqslant \mu \geqslant 1$. В этом случае $\frac{(CA_1B_1)}{(C_1A_1B_1)} = \frac{\mu(1+\nu)}{1+\lambda\mu\nu}$. Отсюда следует, что

$$1+\lambda\mu\nu-\mu(1+\nu) \geqslant 1+\mu^3-\mu(1+\mu)=(1+\mu)(\mu-1)^2 \geqslant 0,$$

или $(CA_1B_1):(C_1A_1B_1) \leqslant 1$, т. е. $(C_1A_1B_1) \geqslant (CA_1B_1)$. Остается рассмотреть случай, когда 2) $\lambda \geqslant 1$, $\mu \leqslant 1$; нетрудно проверить, что $1+\lambda\mu\nu-\mu(1+\nu)=\mu\nu(\lambda-1)+(1-\mu) \geqslant 0$ и $(C_1A_1B_1) \geqslant (CA_1B_1)$.



Черт. 76



Черт. 77

555. Через точку M провести прямую, перпендикулярную к данной секущей, и представить площади данных в условии треугольников через проекции сторон треугольника ABC на вспомогательную прямую и соответственно через отрезки MA_1, MB_1, MC_1: $\frac{(ABM)}{MC_1} = \frac{1}{2}A_0B_0$, $\frac{(BCM)}{MB_1} = \frac{1}{2}B_0C_0$, $\frac{(CAM)}{MB_1} = \frac{1}{2}C_0A_0$, где A_0, B_0, C_0 — проекции вершин данного треугольника на вспомогательную прямую.

556. Установить, что точки P_1 и L делят отрезок M_1N_1 (равно как и точки L и P_2 делят отрезок M_2N_2,) так же, как точки M_1 и M_2 делят сторону AC. Следовательно, четверки точек на прямых AC, M_1N_1, M_2N_2 подобны и $AM_1 : M_1M_2 = M_1P_1 : P_1L = M_2L : LP_3$. Отсюда имеем (см. задачу № 527):

$$(AM_1P_1)^{\frac{1}{3}} + (P_1LP_2)^{\frac{1}{3}} = (AM_2P_2)^{\frac{1}{3}} \text{ и}$$

$$(AM_2P_2)^{\frac{1}{3}} + (P_2N_2B)^{\frac{1}{3}} = (ABC)^{\frac{1}{3}}$$

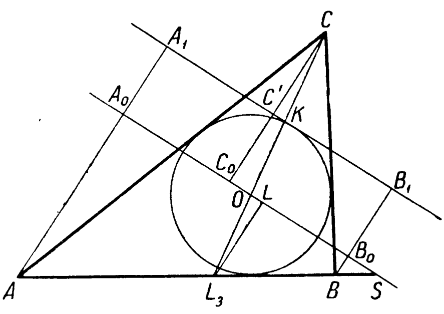
557. 1) Воспользоваться свойствами пропорциональных отрезков, высекаемых параллельными прямыми на сторонах угла, и обратной теоремой; 2) выразить площади треугольников MBN, NCP, PDQ и QAM через k.

558. Воспользоваться результатом задачи № 526, предварительно разбив оба n-угольника соответственными диагоналями, выходящими из одной вершины, на треугольники.

559. Установить, что каждый из образовавшихся при точке углов в сумме с соответствующим углом треугольника составляет 180° и, воспользовавшись тем, что площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, показать, что площадь каждого из треугольников A_1MB_1, B_1MC_1 и C_1MA_1 равна площади данного треугольника. Отсюда: 1) точка M — центроид треугольника $A_1B_1C_1$ и 2) отношение площадей треугольников равно 1 : 3 (см. задачу № 521).

560. Воспользовавшись тем, что площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, установить, что площадь четырехугольника $MONC$ равна $\frac{1}{4}ah$, где a — сторона треугольника ABC, h — его высота.

561. Через вершину большего угла треугольника провести внутри него прямую, отсекающую от него треугольник, подобный данному, и треугольник с углом 30°. Вычислить площадь последнего треугольника и затем площадь данного треугольника.



Черт. 78

562. Для секущей, проходящей через инцентр треугольника ABC (черт. 78), имеем:

$$CC_0 \cdot AB = AA_0 \cdot BC + BB_0 \cdot CA$$

(секущая встречает продолжение AB). Но $AA_1 = A_0A + r$, $BB_1 = BB_0 + r$, $CC_1 = CC_0 - r$, что приводит к равенству:

$$CC_1 \cdot AB = AA_1 \cdot BC + BB_1 \cdot CA + (AB + BC + CA)\, r.$$

563. Первое решение. Рассмотреть равнобедренный треугольник ABC с данным основанием AB и данным периметром и другой треугольник ABD с тем же периметром. Установить, что точка D лежит вне треугольника ABC и точка C — вне треугольника ABD. Если AD пересекает BC в точке E, то: 1) $BE < AE$ и 2) $DE < CE$, ибо 1) $\angle EAB < \angle ABE$, 2) предположение, что $DE > CE$, приводит к противоречию с условием: $AC + CB = AD + DB$.

Второе решение. Воспользоваться формулой Герона, предполагая, что $2p$ и $p - c$ являются постоянными.

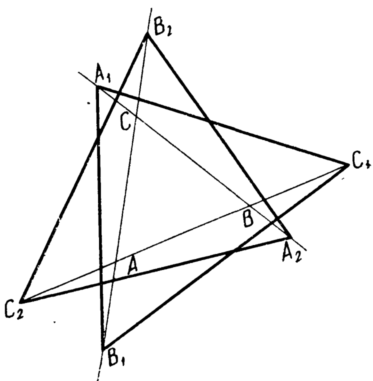
564. Рассмотреть геометрическое место вершин равновеликих треугольников, имеющих общую сторону.

565. Соединить вершины треугольника с инцентром и воспользоваться тем, что высоты образовавшихся треугольников равны между собой.

566. Если треугольник $A_1B_1C_1$ симметричен треугольнику ABC, то $2(OAB) = (OBA_1) + (OB_1A)$; $2(OBC) = (OCB_1) + (OC_1B)$; $2(OCA) = (OAC_1) + (OA_1C)$.

567. Пусть сторона AC треугольника ABC разбивается точкой касания K на отрезки KA и KC, произведение которых равно площади треугольника. Тогда $AK = p - a$, $KC = p - c$ и $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-a)(p-c)$, откуда после несложных преобразований следует, что $b^2 = a^2 + c^2$.

568. Из условия задачи можно составить квадратное уравнение, корнями которого являются отрезки, отсекаемые прямой на сторонах треугольника и в сумме составляющие полупериметр данного треугольника. Исследование решения квадратного уравнения и дает основание для заключения о возможности построения и единственности такой прямой.



Черт. 79

569. Воспользоваться формулой, приведенной в задаче № 513.

570. Выразить площадь треугольника $P_1P_2P_3$ через площади треугольников (CAP), (ABP), (BCP) и элементы данного треугольника. Воспользоваться формулой, полученной при решении задачи № 569. Если точка P лежит вне описанной окружности, то $d^2 = R^2\left(1 + \frac{4(P_1P_2P_3)}{(ABC)}\right)$.

571. Положим $AC_1 = x$, $BA_1 = y$, $CB_1 = z$ (черт. 79) и вычислим сумму площадей треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, а также сумму квадратов сторон B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 этих треугольников.

572. В треугольнике ABC $h_i > 2r$, или $2Rh_i > 4Rr$. Но $2h_1R = bc$, $2Rh_2 = ca$, $2Rh_3 = ab$; следовательно, $bc > 4Rr$, $ca > 4Rr$, $ab > 4Rr$, откуда имеем: $abc > 8R^{\frac{3}{2}}r^{\frac{3}{2}}$, или $4RS > 8R^{\frac{3}{2}}r^{\frac{3}{2}}$.

573. Воспользовавшись формулами: $S = \frac{1}{2}ef\sin\varphi$, $\cos\varphi = \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2ef}$, доказать, что $16S^2 = (b+d-a+c)(b+d+a-c)(a+c-b+d)(a+b+c-d) - 4(ac+bd-ef)(ac+bd+ef)$. Площадь четырехугольника S будет максимальной, если второе слагаемое равно нулю, т. е. если $ef = ac + bd$. Последнее соотношение между диагоналями и сторонами имеет место только для вписанного четырехугольника.

574. Установить, что площадь четырехугольника AM_1CM_3 равна $\frac{1}{4}(AB \cdot M_3N_3 + CD \cdot M_1N_1)$, рассматривая его площадь как сумму площадей двух треугольников. Затем удостовериться, что площадь этого четырехугольника в два раза меньше площади данного четырехугольника (провести диагональ AC).

575. Установить, что отношение высот данной трапеции $ABCD$ и образовавшейся трапеции $EBCF$ равно отношению $\frac{AD - BC}{EF - BC}$, и, воспользовавшись условием задачи, найти, что $EF^2 = \frac{AD^2 + BC^2}{2}$.

576. Обозначив длину отрезка AB через b, выразить длины отрезков BE и NE через a, b, c и установить, что

$$AN : NB = \left(a - \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}\right) : \left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}} - c\right).$$

Убедиться, что длина отрезка прямой, расположенного внутри трапеции и проходящего через точку N параллельно основаниям, равна $\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$ (сравнить с задачей № 575).

577. Воспользоваться формулой:

$$GO^2 = R^2\left(1 - \frac{4\,(A_1B_1C_1)}{(ABC)}\right)$$

(см. теорему 42) и учесть, что

$$OH^2 = 9\,OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

578. Выразить суммы противоположных сторон второго четырехугольника через диагонали данного четырехугольника и соответствующие синусы его углов и установить равенство этих сумм. Воспользоваться известными формулами для вычисления площади четырехугольника, описанного около окружности, и площади четырехугольника с перпендикулярными диагоналями.

579. Учесть, что $PA^2 + PB^2 + PC^2 = a^2 + 3d^2$, где $a = AB$ (см. теорему Лейбница). Воспользовавшись решением задачи № 325, получить: $9d^4 - 6a^2d^2 - 48S_1^2 + a^4 = 0$, откуда $d^2 = R^2 \pm \frac{4S_1}{\sqrt{3}}$.

580. Заметить, что геометрическое место точек M, для которых $(MAB) = (MBC)$ есть пара прямых: прямая BM_1 и прямая, проходящая через вершину B параллельно стороне AC.

581. Если прямые AB и CD пересекаются, то искомое геометрическое место точек представляет собой пару прямых, проходящих через точку их пересечения. Если прямые AB и CD параллельны, то геометрическое место представляет собой пару прямых, параллельных данным. [Если прямые AB и CD совпадают, то геометрическое место есть прямая AB или вся плоскость].

582. Установить, что чевиана точки M делится точкой M пополам, т. е. принадлежит его средней линии, и, обратно, каждая точка средней линии треугольника обладает указанным в условии свойством.

583. Между отрезками $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$ и стороной a данного треугольника имеет место зависимость: $a^4 + x^4 + y^4 + z^4 = a^2(x^2 + y^2 + z^2) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ (см. задачу № 325). Отсюда следует, что $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + z^2) - 48S_1^2 + 4a^4 = 0$, где $16S_1^2 = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4$. Итак, $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2 \pm 4S_1\sqrt{3}$. Если $S_1 = \text{const}$, то и $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$ и искомое геометрическое место есть одна или две окружности с общим центром в центре треугольника. При $S_1 \leqslant \frac{S}{3}$ — два решения, при $S_1 > \frac{S}{3}$ — одно.

584. Воспользоваться результатом задачи № 570. При $S_0 = (P_1P_2P_3) > \frac{(ABC)}{4}$ геометрическое место представляет собой только одну окружность.

585. Взять точку M на указанной прямой и установить, что $(DAM) + (BCM) = (DAF) + (BCF)$ и $(ABM) + (CDM) = (ABF) + (CDF)$, где F — середина диагонали BD.

586. Заметить, что $m = h_3 \sin C$, $h_3 = \frac{2S}{c}$, $c = 2R \sin C$.

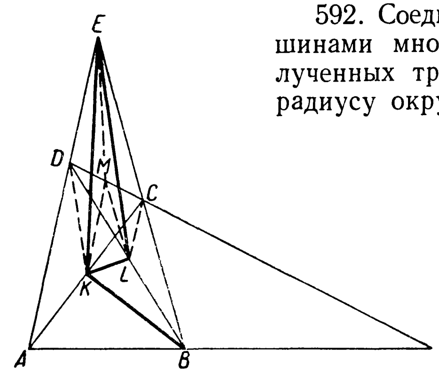
587. Заметить, что отрезок m отсекает от данного треугольника треугольник со сторонами $R\sqrt{2}\sin A$, $R\sqrt{2}\sin B$ и углом C между ними. Воспользоваться формулой: $abc = 4RS$.

588. Установить, что отрезок m, соединяющий основания опущенных перпендикуляров, антипараллелен стороне треугольника и поэтому он параллелен касательной к описанной около треугольника окружности в противолежащей стороне вершине. Отсюда высота отсеченного отрезком m треугольника равна R.

589. 1) Вычислить стороны квадратов: $x = \frac{ch_3}{c + h_3}$ и $y = \frac{bh_2}{b + h_2}$. Из условия $x = y$ следует: $c + h_3 = b + h_2$. Кроме того, $h_3c = h_2b$, следовательно, $b = c$, или $b = h_3$. 2) Если $x > y$ то $c + h_3 < b + h_2$, или $(c - b)(bc - 2S) < 0$. Но $bc > 2S$, поэтому $c < b$.

590. Пусть K и L — середины диагоналей AC и BD четырехугольника, а E — точка пересечения AD и BC (черт. 80). Тогда $(BCDK) = \frac{1}{2}(ABCD)$, $(CDKL) = \frac{1}{2}(BCDK)$. Следовательно, $(CDKL) = \frac{1}{4}(ABCD)$. Соединим точки K и L с серединой M стороны CD. Тогда $(DKE) = (DME)$, $(LCE) = (CEM)$. Отсюда $(DKE) + (LCE) = (DCE)$. Значит, $(KLE) = (KLCED) - (DKE) - (LCE) = (KLCED) - (DCE) = (CDKL) = \frac{1}{4}(ABCD)$.

591. Данное в условии соотношение считать доказанным. Упростить его, сведя к равенству, характеризующему зависимость между сторонами и диагоналями вписанного четырехугольника (теорема Птолемея). Затем в обратном порядке восстановить равенство, подлежащее доказательству.



Черт. 80

592. Соединить центр окружности с вершинами многоугольника и учесть, что в полученных треугольниках одна из высот равна радиусу окружности.

593. Проведем радиусы OC и OD. Площадь четырехугольника $ACDB$ равна $\frac{1}{2}R^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$, где $\alpha+\beta+\gamma=180°$; $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\times\cos\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (см. стр. 16). Поэтому $(ACDB)\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$, причем знак равенства имеет место при $\alpha=\beta=\gamma=60°$.

594. Установить, что площадь треугольника AB_1C_1 равна $(ABC)\cos^2 A$.

595. Обозначим искомый отрезок через x. Тогда

$$\frac{(a+x)\cdot u}{(c+x)\cdot v}=\frac{p}{q},$$

где отношение $u:v$ равно отношению отрезков, на которые секущая делит боковую сторону трапеции. С другой стороны,

$$\frac{u}{v}=\frac{a-x}{x-c}.$$

После исключения $\frac{u}{v}$ найдем:

$$x^2=\frac{qa^2+pc^2}{p+q}.$$

596. Воспользоваться результатом задачи № 526. Из равенства $\frac{(ABC)}{(A_0B_0C_0)}=\frac{(ABD)}{(A_0B_0D_0)}$ следует, что $(A_0B_0C_0)=(A_0B_0D_0)$, так как $(ABC)=(ABD)$. Значит, четырехугольник $A_0B_0C_0D_0$ —трапеция. На основании этой же задачи нахсдим, что

$$\frac{AB}{CD}=\frac{(ABC)}{(CDA)}=\frac{(A_0B_0C_0)}{(C_0D_0A_0)}=\frac{A_0B_0}{C_0D_0}.$$

597. 1) $(ABC) = \frac{ab \sin C}{2} \leqslant \frac{(a-b)^2+ab}{2} = \frac{1}{2}(a^2-ab+b^2)$.

$$2)\ (ABC) = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{4ab \sin C}{8} \leqslant \frac{(a-b)^2+4ab}{8} = \left(\frac{a+b}{2\sqrt{2}}\right)^2.$$

Знак равенства имеет место для прямоугольного равнобедренного треугольника.

598. 1) $(ABC) = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{2ab \sin C}{4} \leqslant \frac{(a-b)^2+2ab}{4} = \frac{a^2+b^2}{4}$;

$$2)\ (ABCD) = \frac{ef \sin \varphi}{2} = \frac{2ef \sin \varphi}{4} \leqslant \frac{(e-f)^2+2ef}{4} = \frac{e^2+f^2}{4};$$

$$3)\ (ABCD) = (ABC) + (DAC) \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}.$$

В первом случае знак равенства имеет место для прямоугольного равнобедренного треугольника; во втором случае — для четырехугольника с равными и перпендикулярными диагоналями (для псевдоквадрата); в третьем случае — для квадрата.

599. 1) На основании результата задачи № 598, имеем:

$$(ABC) \leqslant \frac{a^2+b^2}{4},\ (ABC) \leqslant \frac{b^2+c^2}{4},\ (ABC) \leqslant \frac{a^2+c^2}{4},$$

причем знак равенства может иметь место только в одном из этих трех неравенств. Итак, после почленного сложения получаем:

$$(ABC) < \frac{a^2+b^2+c^2}{6};$$

$$2)\ (ABCD) = \frac{1}{2}[(ABC)+(BCD)+(CDA)+(DAB)] < \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

600. Заметить, что

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{S_2+S_3}{S_1},\ \frac{BM}{MB_1} = \frac{S_3+S_1}{S_2},\ \frac{CM}{MC_1} = \frac{S_1+S_2}{S_3},$$

где $(MBC) = S_1$, $(MCA) = S_2$, $(MAB) = S_3$.

Далее,

$$\frac{AM}{MA_1}+\frac{BM}{MB_1}+\frac{CM}{MC_1} = \left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+\left(\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_2}\right)+\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right) \geqslant 6,$$

ибо $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2\,(a>0,\ b>0)$. Знак равенства имеет место при $S_1 = S_2 = S_3$, т. е. для центроида. Аналогично

$$\frac{AM}{MA_1}\cdot\frac{BM}{MB_1}\cdot\frac{CM}{MC_1}=\frac{(S_1+S_2)(S_2+S_3)(S_3+S_1)}{S_1\cdot S_2\cdot S_3}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{8\sqrt{S_1S_2}\sqrt{S_2S_3}\sqrt{S_3S_1}}{S_1S_2S_3}=8.$$

601. Воспользоваться результатом задачи № 585. Предположить, что две прямые Гаусса пересекаются в некоторой точке, и доказать, что она принадлежит третьей прямой Гаусса. Если же две прямые Гаусса параллельны, то тогда все пять прямых Гаусса параллельны между собой.

602. Воспользоваться формулами 34 и 42 (см. стр. 12 и 13).

603. Воспользоваться равенством $(ABC)=(OAB)+(OBC)+(OCA)$, где O — любая точка плоскости, а так же тем, что медиана треугольника делит его площадь пополам.

604. Установить параллельность прямых B_1D, BD_1 и CC_1.

Для этого рассмотреть равновеликие треугольники AD_1P и ABP, где P — точка пересечения сторон CD и B_1C_1. Далее убедиться, что AP делит BD_1 пополам и поэтому $BD_1 \parallel B_1D$. Аналогичным образом обнаружить параллельность CC_1 и BD_1. Наконец, заметить, что $MC=B_1D=M_1C_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журнал «Вестник опытной физики и элементарной математики (полный комплект).
2. Журнал «Математическое просвещение», Гостехиздат (полный комплект).
3. Журнал «Математика в школе», Учпедгиз (полный комплект).
4. Реферативный журнал «Математика», изд. АН СССР, М., 1953—1956.
5. Адамар Ж., Элементарная геометрия, ч. 1, Учпедгиз, М., 1948.
6. Делоне Б. и Житомирский О., Задачник по геометрии, Гостехиздат, М. — Л., 1950.
7. Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, ч. 1, Гостехиздат, М.— Л., 1955.
8. Ефремов Д., Новая геометрия треугольника, Одесса, 1902.
9. Зетель С. И., Новая геометрия треугольника, Учпедгиз, М., 1940.
10. Перепелкин Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
11. Пржевальский Е., Собрание геометрических теорем и задач, М., 1909.
12. Шаль М., Руководство высшей геометрии, М., 1910.
13. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, геометрия (планиметрия), Гостехиздат, М.—Л., 1952.
14. C. de Comberousse, Cours de mathematiques, tome deuxieme, Paris, 1893.
15. Par F. G.—M., Exercices de geometrie.
16. Lietzmann—Zühlke, Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie, Leipzig—Berlin, 1919.
17. Max Simon, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX Jahrhundert, Leipzig, 1906.

СОДЕРЖАНИЕ

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
16	3 сверху	$O_1O_2 : O_2O_3 : O_3O_1$	$O_1O_2 : O_1O_3 : O_2O_3$
29	17 снизу	треугольник.	треугольник или же пересекаются в одной точке.
31	11 сверху	точка M — центроид	точка M — ортоцентр
38	7 сверху	в отношении k_2	в отношении k^2
69	15 снизу	$\frac{PQ}{QR} = \frac{RS}{SR}$.	$\frac{PQ}{QR} = \frac{PS}{SR}$.
94	16 снизу	точки A и B_1	точки A и B
94	12 снизу	между точками A и B_1,	между точками A и B,
138	3 сверху	к задаче № 444.	к задаче № 445.