ISSN 0208-0060

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ, ТОМ 13

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ, ТОМ 13

SIBERIAN BRANCH OF THE USSR
ACADEMY OF SCIENCE

PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS
VOLUME 13

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE STOCHASTIC PROCESS DISTRIBUTIONS

Edited by A. A. Borovkov

NOVOSIBIRSK
"NAUKA"
SIBERIAN BRANCH
1989

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ответственный редактор
член-корреспондент АН СССР *А. А. Боровков*

НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1989

УДК 519.21

Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— 196 с.
ISBN 5—02—028625—7.

Сборник посвящен актуальным проблемам современной теории вероятностей и математической статистики. Основное внимание в книге уделено предельным теоремам для функционалов от случайных блужданий, включены также работы по уравнениям в частных производных со случайными коэффициентами.

Издание будет полезно научным работникам, студентам и аспирантам, специализирующимся в области теории вероятностей и ее приложений.

Рецензенты

доктора физико-математических наук
Б. А. Рогозин, А. И. Хисамутдинов

Ответственный за выпуск
кандидат физико-математических наук С. А. Утев

Утверждено к печати Институтом математики СО АН СССР

А $\dfrac{1602090000—816}{055(02)—89}$ 46—89, кн. 2

ISBN 5—02—028625—7

Памяти
Андрея Николаевича КОЛМОГОРОВА
посвящается

Материалы сборника посвящены разработке и использованию асимптотических методов изучения случайных процессов или последовательностей таких процессов. Основная часть статей так или иначе связана с процессами, порожденными суммированием случайных величин. Эти направления исследований восходят к фундаментальным работам Андрея Николаевича Колмогорова, которые во многом определили пути развития современной теории вероятностей и, в частности, асимптотических методов изучения случайных процессов. Посвящая этот сборник памяти Андрея Николаевича, авторы отдают дань памяти своему учителю, поскольку почти все они являются его учениками в первом, втором или третьем поколениях.

Первая группа работ связана главным образом с предельными теоремами для процессов, порожденных суммами случайных элементов. Такие процессы и эмпирические поля в банаховых пространствах рассматриваются в работе И. С. Борисова. Получены оценки скорости сходимости для распределений гладких по Фреше функционалов и новые оценки в принципе инвариантности. Дальнейшему исследованию принципа инвариантности для сумм разнораспределенных одномерных слагаемых посвящена работа А. И. Саханенко. Асимптотические разложения типа Бергстрема для распределений сумм случайных элементов в гильбертовом пространстве рассматриваются в работе С. В. Нагаева и В. И. Чеботарева. Значительное продвижение в изучении сумм зависимых случайных величин осуществлено С. А. Утевым, в работе которого найдены оценки вероятностей больших уклонений и оптимальные условия для сходимости процессов, порожденных суммами, к винеровскому процессу. С распределениями сумм случайных элементов связана и работа М. С. Сгибнева, в которой изучается асимптотика безгранично делимых многомерных распределений.

Процессам, заданным на цепях Маркова, посвящены работы В. И. Лотова и С. Ю. Новака. Полные асимптотические разложения включая зоны больших уклонений в задачах с двумя границами найдены В. И. Лотовым. В работе С. Ю. Новака асимптотические разложения получены для распределения максимальной длины серии «успехов» для простейших цепей Маркова.

Сравнительно новый класс задач для случайных процессов рассмотрен в работе А. А. Боровкова и А. А. Могульского, в которой изучаются вероятности так называемых малых уклонений случайных процессов в том числе для процессов, порожденных суммами. Эти теоремы в известном смысле аналогичны локальным предельным теоремам для сумм в эвклидовом пространстве.

Заключают сборник работы В. В. Юринского и А. В. Пожидаева, в которых исследуются асимптотические свойства случайных блужданий, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных со случайными коэффициентами.

Книга будет полезна научным работникам, студентам и аспирантам, специализирующимся в области теории вероятностей и ее приложений.

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. С. БОРИСОВ

В работе получены оценки типа Берри — Эссена близости распределений гладких по Фреше функционалов от сумм независимых разнораспределенных случайных элементов (с. э.) и соответствующих гауссовских с. э. в произвольном банаховом пространстве. При этом не предполагается выполнение центральной предельной теоремы для исходной последовательности с. э. (требуется лишь предгауссовость их распределений). В качестве приложений рассматривается принцип инвариантности для эмпирических полей, а также классический принцип инвариантности Донскера — Прохорова.

Всюду в дальнейшем символами C, C_k обозначаются абсолютные (т. е. не зависящие от параметров задачи) положительные постоянные. При этом индексы будут использоваться лишь при необходимости подчеркнуть различие постоянных. Зависимость постоянных от тех или иных параметров задачи будет обозначаться функциональной записью вида $C(\cdot)$ или буквами, отличными от C (в случае, когда аргумент у $C(\cdot)$ слишком неудобен для записи). Нумерация теорем, лемм и формул своя в каждом параграфе. При ссылках на леммы или формулы из другого параграфа используется двойная нумерация. Первая цифра — номер параграфа.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\{\xi_{ni};\ i \leqslant n\}$, $n \geqslant 1$,— последовательность серий независимых в каждой серии случайных элементов (с. э.) в произвольном банаховом пространстве $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$. Предполагается, что при любых i, n распределение с. э. ξ_{ni} имеет в $\mathfrak{X}$ сепарабельный носитель, $\mathbf{E}\xi_{ni}=0$, $\sigma_{ni}^2 = \mathbf{E}\|\xi_{ni}\|^2 < \infty$ и, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{i\leqslant n} \sigma_{ni} = 0$, $\sum\limits_{i\leqslant n} \sigma_{ni}^2 = 1$. Предположим также, что распределение каждого с. э. ξ_{ni} предгауссово. Соответствующие гауссовские с. э. обозначим через γ_{ni}.

Рассмотрим с. э. $S_n = \sum\limits_{i\leqslant n} \xi_{ni}$, $W_n = \sum\limits_{i\leqslant n} \gamma_{ni}$. В качестве меры близости распределений с. э. S_n и W_n выберем метрику

$$d_F(S_n, W_n) = \sup_{z\in R} |\mathbf{P}(F(S_n) < z) - \mathbf{P}(F(W_n) < z)|,$$

где F — некоторый непрерывный функционал. Запись $F \in \mathscr{C}(m, \beta, \alpha)$, где $m = 0, 1, \ldots$, $\beta \in [0, 1]$, $\alpha \geqslant 0$, будет означать, что

$$\begin{gathered} \|F^{(k)}(x)\|^* \leqslant C_0(F)\exp\{\alpha\|x\|\}, \quad k=0, 1, \ldots, m, \\ \|F^{(m)}(x) - F^{(m)}(y)\|^* \leqslant C_0(F)\exp\{\alpha\|x\| + \alpha\|y\|\}\|x-y\|^\beta, \end{gathered} \tag{1}$$

где $F^{(k)}(x)[\cdot]$ — k-я производная Фреше функционала F, $\|\cdot\|^*$ — стандартная норма полилинейного функционала.

Введем дополнительные ограничения на последовательности $\{\xi_{ni}\}$ и $\{\gamma_{ni}\}$, а также на F. Пусть для любого подмножества $N \subseteq \{1, \ldots, n\}$ выполнено

$$\mathbf{E}\Big\| \sum_{i\in N} \xi_{ni} \Big\|^2 \leqslant A \sum_{i\in N} \sigma_{ni}^2, \qquad \mathbf{E}\Big\| \sum_{i\in N} \gamma_{ni} \Big\|^2 \leqslant A \sum_{i\in N} \sigma_{ni}^2, \tag{2}$$

где постоянная A не зависит от n и N, но может зависеть от $\mathfrak{X}$ и тех или иных вероятностных характеристик $\{\xi_{ni}\}$ и $\{\gamma_{ni}\}$. Например, если $\mathfrak{X}$ — пространство типа 2, то (2) выполнено и $A = A(\mathfrak{X})$. Но (2) может иметь место и в других банаховых пространствах. Скажем, пусть

$$\xi_{ni} = \frac{\xi_i}{(n\mathbf{E}\|\xi_1\|^2)^{1/2}}, \tag{3}$$

где $\{\xi_{ni}\}$ — независимые одинаково распределенные с. э. Если последовательность $\{\xi_i\}$ удовлетворяет центральной предельной теореме в $\mathfrak{X}$, то (2) выполнено и $A = \sup\limits_n \mathbf{E}\|S_n\|^2$.

В самом деле, если с. э. S_n слабо сходится к гауссовскому с. э. γ, то, как показано в [1],

$$A = \sup_n \mathbf{E}\|S_n\|^2 < \infty, \qquad \mathbf{E}\|\gamma\|^2 \leqslant A.$$

Стало быть,

$$\mathbf{E}\Big\|\sum_{i\in N}\xi_{ni}\Big\|^2 = \frac{\mathrm{Card}\,(N)}{n}\mathbf{E}\Big\|\sum_{i\in N}\xi_i(\mathrm{Card}\,(N)\,\mathbf{E}\|\xi_1\|^2)^{-1/2}\Big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant An^{-1}\,\mathrm{Card}\,(N) = A\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2,$$

$$\mathbf{E}\Big\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\Big\|^2 = \frac{\mathrm{Card}\,(N)}{n}\mathbf{E}\|\gamma\|^2 \leqslant A\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2,$$

что и требовалось доказать.

Отметим также, что в общих банаховых пространствах каждое из соотношений (2) не следует из другого.

Известно, что с помощью одних лишь условий (1) и (2) нельзя получить удовлетворительные оценки для $d_F(S_n, W_n)$ (см. [2]). Следуя Ф. Гётце (см. [3, 4]), мы добавим еще своеобразное условие стохастической отделимости от нуля первой производной Фреше функционала F: для любого n существует такое подмножество индексов $N(\delta, n)$, что $\sum\limits_{i\in N(\delta,n)} \sigma_{ni}^2 \geqslant \delta$ и для всех подмножеств $N \subseteq N(\delta, n)$, удовлетворяющих требованию

$$\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2 \geqslant \varepsilon(n) \equiv \sum_{i\leqslant n}\mathbf{E}\min\{\|\xi_{ni}\|^3, \|\xi_{ni}\|^2\}, \tag{4}$$

выполнено

$$\sup_{z>0} z^{-M}\mathbf{P}\Big(\sum_{i\in N} D_{ni}(W_n) < z\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\Big) \leqslant B, \tag{5}$$

где постоянные $\delta \in (0, 1)$ и B не зависят от n и N; $M = \max\{(5+\beta)/\beta, 25\}$,

$$D_{ni}(x) = \mathbf{E}(F^{(1)}(x)[\bar{\xi}_{ni}])^2 =$$

$$= (\mathbf{E}F^{(1)}(x)[\xi_{ni}I(\|\xi_{ni}\| \leqslant Q\widehat{\sigma}_{ni})])^2/\mathbf{P}(\|\xi_{ni}\| \leqslant Q\widehat{\sigma}_{ni}) -$$

$$- (\mathbf{E}F^{(1)}(x)[\xi_{in}I(\|\xi_{ni}\| \leqslant Q\widehat{\sigma}_{ni})])^2/\mathbf{P}^2(\|\xi_{ni}\| \leqslant Q\widehat{\sigma}_{ni}),$$

$I(\cdot)$ — индикатор события, $Q \geqslant 2$ — некоторая постоянная, $\widehat{\sigma}_{ni} = \sigma_{ni} + \varepsilon(n)$.

Отметим, что при выполнении (3) требование (4) излишне, а (5), по существу, совпадает с условием регулярности Ф. Гётце (см. [3, 4]).

Теорема 1. *Пусть* $F \in \mathscr{C}(4, \beta, \alpha)$, $\beta > 0$, *и выполнены условия* (2) *и* (5). *Тогда*

$$d_F(S_n, W_n) \leqslant C(F, A, B, \delta, Q) \sum_{i \leqslant n} \mathbf{E} \min \{ \| \xi_{ni} \|^3, \| \xi_{ni} \|^2 \}, \tag{6}$$

где $C(F, A, B, \delta, Q)$ — *постоянная, зависящая только от* $C_0(F)$ *и* α *в* (1), *а также* A, Q, B *и* δ.

Замечание. Приведенная теорема позволяет получать достаточно хорошие оценки и в случае, когда последовательность серий с. э. $\{\xi_{ni}; i \leqslant n\}$ не удовлетворяет центральной предельной теореме в $\mathfrak{X}$ (т. е. когда в $\mathfrak{X}$ не существует слабого гауссовского предела последовательности с. э. $\{S_n\}$).

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы* 1 *с. э.* $\{\xi_{ni}\}$ *определены в* (3) *и* $\mathbf{E} \| \xi_1 \|^3 < \infty$. *Тогда*

$$d_F(S_n, W_n) \leqslant C(F, A, B, \delta, Q) \frac{\mathbf{E} \| \xi_1 \|^3}{(\mathbf{E} \| \xi_1 \|^2)^{3/2} n^{1/2}}, \tag{7}$$

где $\gamma \overset{d}{=} W_n$ — *гауссовский с. э. с той же ковариацией, что и с. э.* ξ_1.

Неулучшаемые оценки (6) и (7) в известной степени усиливают и обобщают результаты [3 — 5]. Отметим также, что для неодинаково распределенных с. э. $\{\xi_{ni}\}$ ранее были получены оценки лишь для $F(x) = (Dx, x)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$, где D — положительный линейный оператор (см. [5, 6]).

Особый интерес теорема 1 представляет для принципа инвариантности. Наряду с $\{\xi_{ni}\}$ и $\{\gamma_{ni}\}$ рассмотрим следующие с. э. в $B_{\mathfrak{X}}[0, 1]$ (пространство ограниченных $\mathfrak{X}$-значных функций на $[0, 1]$ с равномерной нормой):

$$\begin{aligned} X_{ni} &\equiv X_{ni}(t) = \xi_i I_{i/n}(t), \\ Y_{ni} &\equiv Y_{ni}(t) = \gamma_{ni} I_{i/n}(t), \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \tag{8}$$

где $I_z(t) = 0$, если $t < z$, и $I_z(t) = 1$ в противном случае. Тогда $S_n = \sum_{i \leqslant n} X_{ni} \equiv \sum_{i \leqslant nt} \xi_{ni}$ — так называемая случайная ломаная или «процесс накопления сумм», $W_n = \sum_{i \leqslant n} Y_{ni} \equiv \sum_{i \leqslant nt} \gamma_{ni}$ — аналогичная ломаная, построенная по гауссовским с. э. $\{\gamma_{ni}\}$.

Следствие 2. *Пусть* F: $B_{\mathfrak{X}}[0, 1] \to \mathbf{R}$ *и* $F \in C(4, \beta, \alpha)$, $\beta > 0$. *Пусть* $\{\xi_{ni}\}$ *и* $\{\gamma_{ni}\}$ *удовлетворяют* (2), *и для последовательностей* $\{X_{ni}\}$, $\{Y_{ni}\}$, *введенных в* (8), *выполнено* (5). *Тогда имеет место оценка* (6).

В качестве примера рассмотрим принцип инвариантности для эмпирических полей. Обозначим через $G_n(z_1, \ldots, z_k)$ эмпирическую функцию распределения, построенную по выборке объема n с функцией распределения $G(z_1, \ldots, z_k)$ в $\mathbf{R}^k$. Рассмотрим случайное поле

$$S_n^{(k)}(t, z_1, \ldots, z_k) = \frac{[nt]}{\sqrt{n}} (G_{[nt]}(z_1, \ldots, z_k) - G(z_1, \ldots, z_k)).$$

Пусть $W_n^{(k)}(t, z_1, \ldots, z_k)$ — центрированное гауссовское поле с той же ковариацией, что и $S_n^{(k)}(\cdot)$. Будем рассматривать $S_n^{(k)}(\cdot)$ и $W_n^{(k)}(\cdot)$ как элементы гильбертова пространства $L_2([0, 1] \times \mathbf{R}^k, \lambda)$, где $\lambda(\cdot)$ — произвольная конечная мера на $[0, 1] \times R^k$. Введем класс функционалов на $L_2([0, 1] \times \mathbf{R}^k, \lambda)$, определяемых формулами

$$F(X) = \int_0^1 \int_{R^k} f(X(t, z_1, \ldots, z_k), t, z_1, \ldots, z_k) \lambda(dt, dz_1, \ldots, dz_k).$$

Следствие 3. *Пусть функции $f(x, t, \bar{z})$, $G(\bar{z})$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\inf_x \frac{\partial}{\partial x} f(x, t, \bar{z}) \geqslant g(t, \bar{z}) \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\inf_{\bar{a} \leqslant \bar{z}, \bar{z}' \leqslant \bar{b}} \{G(\bar{z} \wedge \bar{z}') - G(\bar{z}) G(\bar{z}')\} > 0, \ \int_{1/2}^{1} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} g(t, \bar{z}) \lambda(dt, d\bar{z}) > 0$$

(*или* (9) *имеет место для* $-f$), *где* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{z}$, $\bar{z}' \in \mathbf{R}^k$ *и для* $\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} f(x, t, \bar{z})$ *выполнено* (1) *равномерно по всем* $t \in [0, 1]$, $\bar{z} \in \mathbf{R}^k$. *Тогда*

$$d_F(S_n^{(k)}, W_n^{(k)}) \leqslant C(f, \lambda) n^{-1/2}.$$

В случае $\mathfrak{X} = \mathbf{R}^k$ следствие 2 позволяет также в известной степени усилить результаты [7].

Теперь подробней остановимся на классическом принципе инвариантности Донскера — Прохорова. В этом случае $\mathfrak{X} = \mathbf{R}$ и случайную ломаную $S_n(t)$ удобно определять по формуле

$$S_n(t) = \sum_{i: t_{ni} \leqslant t} \xi_{ni}, \tag{10}$$

где $t_{ni} = \sum_{k \leqslant i} \sigma_{nk}^2$ (напомним, что $\sum_{k \leqslant n} \sigma_{nk}^2 = 1$). В качестве аппроксимирующего гауссовского процесса здесь фигурирует стандартный винеровский процесс $W(t)$ (а не гауссовская случайная ломаная). Будем рассматривать случайные процессы $S_n(t)$ и $W(t)$ как элементы гильбертова пространства $L_2([0, 1], \lambda)$, где λ — произвольная конечная мера на $[0, 1]$. Доказательство приводимой ниже теоремы 2 существенно опирается на теорему 1.

Теорема 2. *Пусть функционал* $F: L_2([0, 1], \lambda) \to \mathbf{R}$ *удовлетворяет следующим условиям:* $F \in \mathscr{C}(4, \beta, \alpha)$, $\beta > 0$, *и для некоторых* v, $\Delta \in (0, 1)$

$$\sup_{z > 0} z^{-M} \mathbf{P}\left(\inf_{s \in [v, v+\Delta]} |F^{(1)}(W)[I_s]| < z\right) \leqslant C(F), \tag{11}$$

где $M = 2 \max\{(5 + \beta)/\beta, 25\}$. *Тогда, если* $\mathbf{E}|\xi_{ni}|^s < \infty$, $S \in (2, 3]$, *для всех* i, n, *то*

$$d_F(S_n, W) \leqslant C(F)(\delta(n) + L_{ns}), \tag{12}$$

где $\delta(n) = \sum_{i \leqslant n} \sigma_{ni}^2 \lambda((t_{ni-1}, t_{ni}])^{1/2}$, $L_{ns} = \sum_{i \leqslant n} \mathbf{E}|\xi_{ni}|^s$.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы* 2 *с. в.* ξ_{ni} *определены в* (3). *Тогда*

$$d_F(S_n, W) \leqslant C(F, \lambda) \frac{\mathbf{E}|\xi_1|^s}{(\mathbf{E}\xi_1^2)^{s/2}} \cdot n^{(2-s)/2}, \tag{13}$$

где $s \in (2, 3]$.

Оценка (13) является следствием (12) и неравенства Коши — Буняковского, в силу которого

$$\delta(n) \leqslant \left(\sum_{i \leqslant n} \sigma_{ni}^2 \lambda((t_{ni-1}, t_{ni}])\right)^{1/2} \leqslant (\lambda([0, 1]))^{1/2} \max_{i \leqslant n} \sigma_{ni}.$$

Замечание. Оценка (13) имеет место при замене условия (11) более слабым

$$\sup_n \sup_{n^{1/2} \leqslant m \leqslant \delta n} \sup_{z > 0} z^{-M/2} \mathbf{P}\left(\frac{1}{m} \sum_{i \leqslant m} (F^{(1)}(W)[I_{i/n}])^2 < z\right) \leqslant B, \tag{14}$$

где $\delta \in (0, 1/2)$.

Следствие 2. *Если λ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет ограниченную плотность, то*

$$d_F(S_n, W) \leqslant C(F, \lambda) L_{ns}. \tag{15}$$

Оценка (15) в известной мере усиливает результаты в [8].

Следствие 3. *Пусть функционал F определен по формуле*

$$F(X) = \int_0^1 f(X(t))\, dt.$$

Тогда если $f \in \mathscr{C}(4, \beta, \alpha)$, $\beta > 0$, f монотонна и при всех $x \in \mathbf{R}$

$$|f'(x)| \geqslant \min\{c, |x|^r\}, \quad c, r > 0,$$

то имеют место оценки (12)—(14).

Отметим, что оценки (13) и (14) в рассматриваемой общности неулучшаемы. Однако без каких-либо ограничений на $\lambda(\cdot)$ оценка (14) неверна.

Теорема 3. *Существуют такие с. в. $\{\xi_{ni};\ i \leqslant n\}$, мера $\lambda(\cdot)$ и функционал F, удовлетворяющие условиям теоремы 2, что*

$$\begin{gathered} \delta(n) \leqslant L_{ns}^{2/s}, \\ C_1 L_{ns}^{2/s} \leqslant d_F(S_n, W) \leqslant C_2 L_{ns}^{2/s}. \end{gathered} \tag{16}$$

Соотношения (13)—(16) показывают, что оценка (12) не только неулучшаема, но и достаточно универсальна.

Замечание. Теоремы 2, 3, а также следствие 2 теоремы 1 могут быть легко переформулированы и для более общих, чем (10), случайных процесов вида

$$S_n'(t) = \sum_{i:\, t_{ni} \leqslant t} \xi_{ni} \cdot l_{ni}(t),$$

где $l_{ni}(t)$ — неслучайные функции. Скажем, если $l_{ni}(t) = I_{i/n}(t)$, то $S_n'(t) = S_n(t)$. Если же

$$l_{ni}(t) = \max\{0, \min\{(t - t_{ni-1})\sigma_{ni}^{-2}, 1\}\},$$

то $S_n'(t)$ представляет из себя непрерывную случайную ломаную.

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем в рассмотрение с. э. $\{\xi_{ni}'\}$, $\{\xi_{ni}^{(1)}\}$, $\{\xi_{ni}^{(2)}\}$, определяемые по формулам

$$\xi_{ni}' = \xi_{ni} I(\|\xi_{ni}\| \leqslant c^*/\alpha), \tag{1}$$

где c^* будет выбрано позднее;

$$\begin{gathered} \mathbf{P}(\xi_{ni}^{(1)} \in A) = \mathbf{P}(\xi_{ni}' \in A \mid \|\xi_{ni}'\| \leqslant Q\widehat{\sigma}_{ni}), \quad Q \geqslant 2, \\ \mathbf{P}(\xi_{ni}^{(2)} \in A) = 2\mathbf{P}(\xi_{ni}' \in A) - \mathbf{P}(\xi_{ni}^{(1)} \in A). \end{gathered}$$

Отметим, что распределение с. э. $\xi_{ni}^{(2)}$ определено корректно, так как правая часть последнего равенства неотрицательна в силу оценки

$$\mathbf{P}(\|\xi_{ni}'\| \leqslant Q\sigma_{ni}) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{E}\|\xi_{ni}'\|^2}{Q^2\sigma_{ni}^2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Пусть $\{\nu_i\}$ — последовательность независимых с. в., распределенных по закону Бернулли ($\nu_i = 0$ или 1 с вероятностью 1/2). Всюду в дальнейшем предполагается, что последовательности $\{\xi_{ni}\}$, $\{\xi_{ni}'\}$, $\{\xi_{ni}^{(1)}\}$, $\{\xi_{ni}^{(2)}\}$ и $\{\nu_i\}$ независимы в совокупности. В этом случае

$$\xi_{ni}' \overset{d}{=} \xi_{ri}^{(1)}\nu_i + \xi_{ni}^{(2)}(1 - \nu_i). \tag{2}$$

Это соотношение неоднократно будет использоваться при доказательстве теоремы 1 (см. также [9—11]).

Лемма 1. *Для любого подмножества* $N \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и $r \leqslant \alpha(8c^*)^{-1}$

$$\mathbf{E}\exp\left\{r\left\|\sum_{i\in N}{}^{'}\xi'_{ni}\right\|\right\} \leqslant 3\exp\{\alpha r/c^* + rA^{1/2} + 8r^2\} \tag{3}$$

и для любого $s \geqslant 1$

$$\mathbf{E}\exp\left\{s\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|\right\} \leqslant (1 + 2s(2\pi A)^{1/2})\exp\{s^2A^2/2 + sA^{1/2}\}. \tag{4}$$

Доказательство. С помощью неравенства (4) из [12] имеем

$$\mathbf{E}\exp\left\{r\left|\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\| - \mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right|\right\} =$$

$$= 1 + r\int_0^\infty e^{rz}\mathbf{P}\left(\left|\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\| - \mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right| \geqslant z\right)dz \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 2r\int_0^\infty \exp\left\{rz - \frac{z^2}{2(1 + z/(8r))}\right\}dz \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 2r\left\{\int_0^{8r} + \int_{8r}^\infty\right\} \leqslant 1 + 2(\exp\{8r^2\} - 1) +$$

$$+ 2r\int_{8r}^\infty \exp\left\{rz - \frac{z^2}{2(1 + z/(8r))}\right\}dz. \tag{5}$$

Так как для $z \in (8r, \infty)$

$$\frac{z^2}{2(1 + z/(8r))} \geqslant 2rz,$$

то из (5) окончательно получаем

$$\mathbf{E}\exp\left\{r\left|\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\| - \mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right|\right\} \leqslant 3\exp\{8r^2\}. \tag{6}$$

Теперь отметим, что из (1.2) вытекает оценка

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\| \leqslant \mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi_{ni}\right\| + \sum_{i\in N}\mathbf{E}\|\xi_{ni}\|I(\|\xi_{ni}\| > c^*/\alpha) \leqslant A^{1/2} + \alpha/c^*. \tag{7}$$

Неравенство (3) следует из (6), (7) и соотношения

$$\mathbf{E}\exp\left\{r\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right\} \leqslant \mathbf{E}\exp\left\{r\left|\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\| - \mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right|\right\}\exp\left\{r\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\|\right\}.$$

Для доказательства (4) воспользуемся неравенством (см. [12])

$$\mathbf{P}(|\|\gamma\| - \mathbf{E}\|\gamma\|| > z) \leqslant 2\exp\left\{-\frac{z^2}{2\mathbf{E}\|\gamma\|^2}\right\}, \tag{8}$$

где γ — произвольный гауссовский с. э. в $\mathfrak{X}$ с нулевым средним. Далее, аналогично выводу (5), получаем

$$\mathbf{E}\exp\left\{s\left|\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\| - \mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|\right|\right\} =$$

$$= 1 + s\int_0^\infty e^{sz}\mathbf{P}\left(\left|\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\| - \mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|\right| \geqslant z\right)dz \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 2s\int_0^\infty \exp\left\{sz - \frac{z^2}{2\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\right\|^2}\right\}dz \leqslant 1 + (2\pi\mathbf{E}\|\cdot\|)^{1/2}\exp\left\{\frac{(s\mathbf{E}\|\cdot\|)^2}{2}\right\}2s.$$

Отсюда и из (12) следует (4). Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем символом $\mathbf{E}_\zeta$ обозначается условное математическое ожидание при фиксированном с. э. ζ или фиксированной последовательности с. э. $\{\zeta_i\}$, если таковая рассматривается.

Лемма 2. *Пусть Ψ — произвольная выпуклая четная функция на $\mathfrak{X}$. Тогда для любого $N \subseteq \{1, \ldots, n\}$*

$$\mathbf{E}\Psi\left(\sum_{i\in N}(\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)})\,\nu_i\right) \leqslant \mathbf{E}\Psi\left(2\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right),$$

$$\mathbf{E}\Psi\left(\sum_{i\in N}(\xi_{ni}^{(2)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)})(1-\nu_i)\right) \leqslant \mathbf{E}\Psi\left(2\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right),$$

$$\mathbf{E}\Psi\left(\sum_{i\in N}\left(\nu_i\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)} + (1-\nu_i)\,\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)\right) \leqslant \mathbf{E}\Psi\left(\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right).$$

Доказательство. Обозначим через $\{\eta_{ni}^{(k)}\}$, $k = 1, 2$, независимые копии $\{\xi_{ni}^{(k)}\}$, $k = 1, 2$. Тогда с помощью неравенства Йенсена (см. [1]) можем записать

$$\mathbf{E}_\nu\Psi\left(\sum_{i\in N}(\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)})\,\nu_i\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}_\nu\Psi\left(\sum_{i\in N}(\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)})\,\nu_i + \sum_{i\in N}(\xi_{ni}^{(2)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)})(1-\nu_i)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}_\nu\Psi\left(\sum_{i\in N}(\xi_{ni}^{(1)}\nu_i + \xi_{ni}^{(2)}(1-\nu_i)) - \sum_{i\in N}(\eta_{ni}^{(1)}\nu_i + \eta_{ni}^{(2)}(1-\nu_i))\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}_\nu\Psi\left(2\sum_{i\in N}(\xi_{ni}^{(1)}\nu_i + \xi_{ni}^{(2)}(1-\nu_i))\right).$$

Имея в виду представление (2), получаем первое утверждение леммы. Второе неравенство доказывается совершенно аналогично. Третье следует из соотношения

$$\Psi\left(\sum_{i\in N}\left(\nu_i\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)} + (1-\nu_i)\,\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)\right) \leqslant \mathbf{E}_\nu\Psi\left(\sum_{i\in N}(\xi_{ni}^{(1)}\nu_i + \xi_{ni}^{(2)}(1-\nu_i))\right),$$

которое, в свою очередь, вытекает из неравенства Йенсена и (2). Лемма доказана.

Лемма 2 будет использована в доказательстве основной теоремы в случаях, когда $\Psi(x) = \|x\|^{1+c}$, $\Psi(x) = \exp\{c\|x\|\}$.

Лемма 3. *Для любого $r \geqslant 1$ при выполнении* (1.4)

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}(\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)})\,\nu_i\right\|^r \leqslant C(A, r, \alpha, Q)\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)^{r/2}, \tag{9}$$

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\left((\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)})\,\nu_i + \mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)\right\|^r \leqslant C(A, r, \alpha)\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)^{r/2}. \tag{10}$$

Доказательство. В [13] доказано, что для любых независимых с. э. $y_1, \ldots, y_m$ с конечными моментами порядка $r \geqslant 1$ нормы справедливо неравенство

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\leqslant m}y_i\right\|^r \leqslant C(r)\max\left\{\left(\mathbf{E}\left\|\sum_{i\leqslant m}y_i\right\|\right)^r, \left(\sum_{i\leqslant m}\mathbf{E}\|y_i\|^2\right)^{r/2}, \sum_{i\leqslant m}\mathbf{E}\|y_i\|^r\right\}. \tag{11}$$

Положим $y_i = (\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)})\,\nu_i$. Тогда из леммы 2 и (1.2) следует

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}y_i\right\| \leqslant 2\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi'_{ni}\right\| \leqslant 2\mathbf{E}\left\|\sum_{i\in N}\xi_{ni}\right\| + 2\sum_{i\in N}\mathbf{E}\|\xi_{ni}\|\,I(\|\xi_{ni}\| > c^*/\alpha) \leqslant$$
$$\leqslant C(A, \alpha)\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)^{r/2}.$$

Кроме того, $\mathbf{E}\|y_i\|^p \leqslant C(Q, p)\,\sigma_{ni}^2\widehat{\sigma}_{ni}^{p-2}$ для любого $p \geqslant 2$. Поэтому при выполнении (1.4)

$$\sum_{i\in N}\mathbf{E}\|y_i\|^r\leqslant C(r,Q)\Big(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^r+\varepsilon(n)^{r-2}\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C(r,Q)\left\{\Big(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\Big)^{r/2}+\Big(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\Big)^{r-1}\right\}\leqslant C_1(r,Q)\Big(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\Big)^{r/2}$$

для любого $r\geqslant 2$. В случае $1\leqslant r<2$ для доказательства (9) мы должны использовать неравенство Гельдера, которое позволяет свести оценку $\mathbf{E}\|\sum y_i\|^r$ к рассмотренному ранее случаю.

Неравенство (10) доказывается аналогично. Заметим только, что

$$\|\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\|^r\leqslant\Big(\int_{\mathfrak{X}}\|z\|\mathbf{P}(\xi_{ni}^{(2)}\in dz)\Big)^r\leqslant 2^r\Big(\int_{\mathfrak{X}}\|z\|\mathbf{P}(\xi_{ni}'\in dz)\Big)^r\leqslant 2^r\sigma_{ni}^r.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любого центрированного гауссовского с. э.* $\gamma\in\mathfrak{X}$ *и произвольного* $r\geqslant 1$

$$\mathbf{E}\|\gamma\|^r\leqslant 2^{r-1}(r2^{r/2}\Gamma(r/2)+1)(\mathbf{E}\|\gamma\|^2)^{r/2},\tag{12}$$

где $\Gamma(z)$ — *гамма-функция.*

Доказательство. Так же как и при выводе (4) с помощью (8) получаем

$$\mathbf{E}|\|\gamma\|-\mathbf{E}\|\gamma\||^r=r\int_0^\infty z^{r-1}\mathbf{P}(|\|\gamma\|-\mathbf{E}\|\gamma\||\geqslant z)\,dz\leqslant$$

$$\leqslant 2r\int_0^\infty z^{r-1}\exp\left\{-\frac{z^2}{2\mathbf{E}\|\gamma\|^2}\right\}dz=2^{r/2}r\Gamma(r/2)(\mathbf{E}\|\gamma\|^2)^{r/2}.$$

Остается только воспользоваться элементарным неравенством

$$\mathbf{E}\|\gamma\|^r\leqslant 2^{r-1}(\mathbf{E}(\|\gamma\|-\mathbf{E}\|\gamma\|)^r+(\mathbf{E}\|\gamma\|^2)^{r/2}).$$

Лемма доказана.

В силу очевидного неравенства $\mathbf{E}(l(\xi_{ni}^{(2)}))^2\leqslant 2\mathbf{E}(l(\xi_{ni}))^2$, $l\in\mathfrak{X}^*$, можно утверждать (см. подробнее [14]), что распределение с. э. $\xi_{ni}^{(2)}$, как и ξ_{ni}, будет предгауссовым. Обозначим через $\gamma_{ni}^{(2)}$ центрированный гауссовский с. э., имеющий ту же ковариацию, что и $\xi_{ni}^{(2)}$.

Лемма 5. *Для любого подмножества* $N\subseteq\{1,\ldots,n\}$

$$\mathbf{E}\Big\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}^{(2)}\Big\|\leqslant 2\sqrt{2}\,\mathbf{E}\Big\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\Big\|.\tag{13}$$

Доказательство. Пусть ζ — произвольный предгауссовский с. э. в $\mathfrak{X}$, P — распределение с. э. ζ. В основе наших рассуждений лежит представление гауссовского с. э. γ, имеющего ту же ковариацию, что и ζ, в виде стохастического интеграла (см. [15])

$$\gamma=\int_{\mathfrak{X}}xW_P(dx),\tag{14}$$

где $W_P(\cdot)$ — центрированная гауссовская случайная мера (поле) с ковариацией

$$\mathbf{E}W_P(A)W_P(B)=P(A\cap B).\tag{15}$$

Интеграл в (14) понимается как предел по вероятности последовательности интегральных сумм

$$\gamma_m=\sum_{i\leqslant m}y_{mi}W_P(B_{mi}),$$

где $\{B_{mi}\}$ — конечное разбиение $\mathfrak{X}$ на измеримые подмножества, $\{y_{mi}\}$ выбраны так, что

$$\zeta=\operatorname*{Pr\text{-}Lim}_{m\to\infty}\sum_{i\leqslant m}y_{mi}I(\zeta\in B_{mi}).\tag{16}$$

Обозначим через $P_{ni}(\cdot)$ и $P^{(2)}_{ni}(\cdot)$ распределения с. э. ξ_{ni} и $\xi^{(2)}_{ni}$ соответственно. Для каждой фиксированной пары i, n определим последовательности серий $\{B_{mj}(i, n)\}$ и $\{y_{mj}(i, n)\}$, $j \leqslant m$, $m = 1, 2, \ldots$, так, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

$$\operatorname*{Lim}_{m\to\infty} P_{ni}\left(y \in \mathfrak{X}: \left\| \sum_{j\leqslant m} y_{mj}(\cdot)\, I(y \in B_{mj}(\cdot)) - y \right\| > \varepsilon\right) = 0. \tag{17}$$

В силу очевидного неравенства $P^{(2)}_{ni}(A) \leqslant 2P_{ni}(A)$ соотношение (17) будет иметь место и при замене P_{ni} на $P^{(2)}_{ni}$. Далее, используя определение стохастического интеграла, независимость с. в. $\{W_P(B_{mj}(\cdot));\ j \leqslant m\}$, а также так называемые теоремы сравнения (см. [1, с. 108]), получаем

$$\mathbf{E}\left\| \sum_{i\in N} \gamma^{(2)}_{ni} \right\| = \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \mathbf{E}\left\| \sum_{i\in N} \sum_{j\leqslant m} y_{mj}(n, i)\, W^{(i)}_{P^{(2)}_{ni}}(B_{mj}(n, i)) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \max_{i,j:\, i\leqslant n,\, j\leqslant m} \left(\frac{P^{(2)}_{ni}(B_{mj}(n, i))}{P_{ni}(B_{mj}(n, i))} \right)^{1/2} \times$$

$$\times\, \mathbf{E}\left\| \sum_{i\in N} \sum_{j\leqslant m} y_{mj}(n, i)\, W^{(i)}_{P_{ni}}(B_{mj}(n, i)) \right\| \leqslant 2\sqrt{2}\, \mathbf{E}\left\| \sum_{i\in N} \gamma_{ni} \right\|,$$

где с. п. $\left\{W^{(i)}_{P_{ni}}(\cdot)\right\}$, $\left\{W_{P^{(2)}_{ni}}(\cdot)\right\}$ определены в (15) и независимы. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть ζ — произвольный предгауссовский центрированный с. э. в $\mathfrak{X}$, γ — соответствующий гауссовский с. э. Тогда для любой непрерывной билинейной формы $L(x, y)$, заданной на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, справедливо соотношение*

$$\mathbf{E}L(\zeta, \zeta) = \mathbf{E}L(\gamma, \gamma). \tag{18}$$

Доказательство. Вновь воспользуемся представлением (14). Поскольку $\mathbf{E}\|\zeta\|^2 < \infty$, из определения стохастического интеграла в (14) следует

$$\mathbf{E}L(\gamma, \gamma) = \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \mathbf{E}L\left(\sum_{j\leqslant m} y_{mj} W_P(B_{mj}),\ \sum_{j\leqslant m} y_{mj} W_P(B_{mj}) \right) =$$

$$= \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \sum_{i,j\leqslant m} P(B_{mi} \cap B_{mj})\, L(y_{mi}, y_{mj}) =$$

$$= \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} \sum_{i,j\leqslant m} \mathbf{E}L(I(\zeta \in B_{mi})\, y_{mi},\ I(\zeta \in B_{mj})\, y_{mj}) = \mathbf{E}L(\zeta, \zeta);$$

здесь $\{y_{mi}\}$, $\{B_{mi}\}$ определены в (16). Лемма доказана.

Замечание. В работе [16] соотношение (18) доказано при более жестких ограничениях, когда распределение с. э. ζ удовлетворяет центральной предельной теореме. Отметим также, что для $L(x, y) = l_1(x) l_2(y)$, $l_j \in \mathfrak{X}^*$, соотношение (18) следует из определения предгауссовости с. э. ζ.

Пусть $\{y_i\}$ — последовательность независимых ограниченных центрированных с. э. в $\mathfrak{X}$. Пусть $N = \bigcup_{j\leqslant m+1} N_j$ — некоторое конечное подмножество натуральных чисел, где $\{N_j\}$ — попарно несовместные подмножества. Обозначим $S(N_k) = \sum_{i\in N_k} y_i$ и для любого $L \in \mathfrak{X}^*$

$$\mu_m(L, N) = \sum_{j\leqslant m+1} \sum_{i\in N_j} \mathbf{E}\,|L(y_i)|^3 \left(\mathbf{E}(L(S(N_j)))^2\right)^{-1}. \tag{19}$$

Некоторые из приводимых далее утверждений усиливают соответствующие результаты в [3].

Лемма 7. *Пусть L и L_m — непрерывные линейный и m-линейный функционалы, заданные на $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^m$ соответственно. Если $\mu_m(L, N)\,|t| \leqslant 1/4$, то*

$$|\,\mathbf{E}L_m(S(N), \ldots, S(N)) \exp\{itL(S(N))\}\,| \leqslant$$

$$\leqslant m^m \|L_m\|^* \left(\sum_{j\leqslant m+1} \mathbf{E}\|S(N_j)\|^m \right) \sum_{j\leqslant m+1} \exp\left\{ -\frac{t^2}{3} \mathbf{D}L(S(N_j)) \right\}. \tag{20}$$

Доказательство. Обозначим через J левую часть (20). Тогда имеем

$$J=\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{m+1}\mathbf{E}L_m\left(S\left(N_{i_1}\right),\ \ldots,\ S\left(N_{i_m}\right)\right)\exp\left\{it\sum_{j\leqslant m+1}L\left(S\left(N_j\right)\right)\right\}\right|.$$

В сумме $\sum_{j\leqslant m+1}L(S(N_j))$ найдется по крайней мере одно слагаемое $L(S(N_{j*}))$, где $j^*=j^*(i_1,\ \ldots,\ i_m)$, которое не зависит от $S(N_{i_1}),\ \ldots$ $\ldots,\ S(N_{i_m})$. Поэтому

$$J\leqslant\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{m+1}\mathbf{E}\left|L_m\left(S\left(N_{i_1}\right),\ \ldots,\ S\left(N_{i_m}\right)\right)\right|\left|\mathbf{E}\exp\left\{itL\left(S\left(N_{j*}\right)\right)\right\}\right|. \tag{21}$$

Хорошо известно (см. [17]), что если

$$|t|\sum_{k\in N_{j*}}\mathbf{E}\left|L\left(y_k\right)\right|^3\left(\mathbf{E}L\left(S\left(N_{j*}\right)\right)^2\right)^{-1}\leqslant 1/4,$$

то

$$\left|\mathbf{E}\exp\left\{itL\left(S\left(N_{j*}\right)\right)\right\}\right|\leqslant\exp\left\{-\frac{t^2}{3}\mathbf{D}L\left(S\left(N_{j*}\right)\right)\right\}. \tag{22}$$

Так как для каждого $j\leqslant m+1$

$$\sum_{k\in N_j}\mathbf{E}\left|L\left(y_k\right)\right|^3\left(\mathbf{E}L\left(S\left(N_{j*}\right)\right)^2\right)^{-1}\leqslant\mu_m(L,\ N),$$

то из (21) и (22) легко следует (20). Лемма доказана.

Лемма 8. *Для любых положительных чисел* $\{u_i;\ i\leqslant m\}$ *и* $\{v_i;\ i\leqslant m\}$ *справедливо двойное неравенство*

$$\min_{i\leqslant n}\frac{u_i}{v_i}\leqslant\frac{\sum_{i\leqslant m}u_i}{\sum_{i\leqslant m}v_i}\leqslant\max_{i\leqslant m}\frac{u_i}{v_i}. \tag{23}$$

Доказательство следует из очевидного тождества

$$\frac{\sum_{i\leqslant m}u_i}{\sum_{i\leqslant m}v_i}=\frac{\sum_{i\leqslant m}\left(\frac{u_i}{v_i}\right)v_i}{\sum_{i\leqslant m}v_i}.$$

Следствие. *Неравенство* (20) *имеет место, если*

$$\|L\|^*\,|t|\max_{k\in N}\operatorname{ess\,sup}|y_k|\leqslant 1/4.$$

Утверждение следует из (19) и (23).

Замечание. Если $\{y_i\}$ — центрированные гауссовские с. э. в $\mathfrak{X}$, то (20) имеет место для всех $t\in\mathbf{R}$.

Для любого подмножества $N\subseteq\{1,\ \ldots,\ n\}$ введем следующие обозначения:

$$S_{nk}(N)=\sum_{i<k,\,i\notin N}\xi'_{ni}+\sum_{i>k,\,i\notin N}\gamma_{ni}+\sum_{i<k,\,i\in N}\left(\xi_{ni}^{(2)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)\left(1-\nu_i\right)+$$
$$+\sum_{i<k,\,i\in N}\left\{\left(\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)\nu_i+\mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right\},$$

$$\delta_{nk}(N)=\sum_{i<k,\,i\in N}\left(\xi_{ni}^{(1)}-\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}\right)\nu_i+\sum_{i>k,\,i\in N}\gamma_{ni},\qquad \Delta_n(N)=\left(\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)^{1/2}. \tag{24}$$

Лемма 9. *Пусть* $F\in\mathscr{C}(m,\ \beta,\ \alpha)$. *Тогда для любого натурального* $r\leqslant$ $\leqslant m$ *при выполнении* (1.4)

$$\mathbf{E}\left|F^{(r)}\left(S_{nk}(N)\right)\left[\delta_{nk}(N)^r\right]\right|\leqslant C(F,\ A,\ r,\ Q)\,\Delta_n(N)^r.$$

Доказательство. Из лемм 1—4 и неравенства Гёльдера следует

$$\mathbf{E}|F^{(r)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)^r]| \leqslant C_0(F)\mathbf{E}^{1/2}\|\delta_{nk}(N)\|^{2r}\mathbf{E}^{1/2}\exp\{2\alpha\|S_{nk}(N)\|\} \leqslant$$
$$\leqslant C(F,\ A,\ r,\ Q)\mathbf{E}^{1/2}\exp\{2\alpha(\|\Sigma_1\|+\|\Sigma_2\|+\|\Sigma_3\|+\|\Sigma_4\|)\}\Delta_n(N)^r,$$

где Σ_j — частичные суммы в правой части формулы для $S_{nk}(N)$ в (24) в порядке их следования. Еще дважды применяя неравенство Гёльдера, окончательно получаем

$$\mathbf{E}^{1/2}\exp\{2\alpha(\|\Sigma_1\|+\|\Sigma_2\|+\|\Sigma_3\|+\|\Sigma_4\|)\} \leqslant \prod_{j=1}^{4}\mathbf{E}^{1/8}\exp\{8\alpha\|\Sigma_j\|\}.$$

В силу лемм 1 и 2 величины $\mathbf{E}\exp\{8\alpha\|\Sigma_j\|\}$ при достаточно малом c^* в (1) ограничены равномерно по n. Лемма доказана.

Обозначим

$$S_{nk} = \sum_{i<k}\xi'_{ni} + \sum_{i>k}\gamma_{ni}, \quad \sigma_n(N) = \max_{i\in N}\widehat{\sigma}_{ni}. \tag{25}$$

Лемма 10. *Пусть $H\in\mathscr{C}(m,\ \beta,\ \alpha)$, $F\in\mathscr{C}(r,\ \beta,\ \alpha)$, $m\geqslant 1$, $r\geqslant 2$, и пусть $\{N_j;\ j\leqslant 4r+m+1\}$ — попарно несовместные подмножества натуральных чисел, для которых $N=\bigcup_j N_j\subset\{1,\ \ldots,\ n\}$. Если $\Delta_n^2(N)|t|\leqslant 1$ и $QC_0(F)\sigma_n(N)^{1-v}|t|\leqslant 1/8$ для некоторого $v\in(0,\ 1)$, то для любого $p>1$ при выполнении* (1.4)

$$|\mathbf{E}H(S_{nk})\exp\{itF(S_{nk})\}| \leqslant$$
$$\leqslant C(F,H,A,v,m,r,Q)\Big\{\Delta_n(N)^{m+\beta}+|t|\Delta_n(N)^{r+\beta}+|t|^5\Delta_n(N)^{10}+$$
$$+\max_{j\leqslant 4r+m+1}\mathbf{E}^{1/p}\exp\Big\{-\frac{t^2p}{3}\mathbf{E}_{S_{nk}(N),v}\big(F^{(1)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N_j)]\big)^2\Big\}\Big\}. \tag{26}$$

Доказательство. Используя формулу Тейлора, получаем

$$|\mathbf{E}H(S_{nk})\exp\{itF(S_{nk})\}| \leqslant \Big|E\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}H^{(l)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)^l]\times$$
$$\times\exp\Big\{it\Big\{F(S_{nk}(N))+\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s!}F^{(s)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)^s]\Big\}\Big\}\Big|+$$
$$+C(H,Q)\Delta_n(N)^{m+\beta}+C(H,F,Q)|t|\Delta_n(N)^{r+\beta}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{l=0}^{m}\mathbf{E}\Big|\mathbf{E}_{S_{nk}(\cdot),v}\frac{1}{l!}H^{(l)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)^l]\exp\{itF^{(1)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)]\}\times$$
$$\times\Big\{1+\sum_{d=1}^{4}\frac{1}{d!}\Big(it\sum_{s=2}^{r}\frac{1}{s!}F^{(s)}(S_{nk}(N))[\delta_{nk}(N)^s]\Big)^d\Big\}\Big|+$$
$$+C(H,F,Q)\{\Delta_n(N)^{m+\beta}+|t|\Delta_n(N)^{r+\beta}+|t|^5\Delta_n(N)^{10}\}. \tag{27}$$

Теперь рассмотрим условное математическое ожидание $\mathbf{E}_{S_{nk}(\cdot),v}$ в правой части (27) соответственно на множествах $\Omega_1=\{\|S_{nk}(N)\|\leqslant v\alpha^{-1}|\log\sigma_n(N)|\}$ и $\Omega_2=\{\|S_{nk}(N)\|>v\alpha^{-1}|\log\sigma_n(N)|\}$. Это математическое ожидание оценивается на множестве Ω_1 с помощью лемм 7 и 9, поскольку правая часть (27), по существу, содержит выражения вида

$$\Big|\mathbf{E}_{S_{nk}(N),v}L_l\big(\delta_{nk}(N)^l\big)\exp\{itL(\delta_{nk}(N))\}\Big|,$$

где $l\leqslant 4r+m$,

$$\|L\|^*\leqslant C_0(F)\exp\{\alpha\|S_{nk}(N)\|\},$$
$$\|L_l\|^*\leqslant C_0(F)\exp\{(4r+m)\alpha\|S_{nk}\|\}.$$

Кроме того, надо учесть, что на Ω_1

$$\|L\|^* \max_{i\in N} \operatorname{ess\,sup} \left| \left(\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}\right) \nu_i \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2Q\sigma_n(N) \| F^{(1)}(S_{nk}(N)) \|^* \leqslant 2QC_0(F)\,\sigma_n(N)^{1-v}.$$

Следовательно, в условиях леммы

$$\left| \mathbf{E}_{S_{nk}(N),\nu} L_l \left(\delta_{nk}(N)^l\right) \exp\{itL(\delta_{nk}(N))\} \right| \leqslant$$
$$\leqslant C(F, H, m, r, Q) \exp\{(4r+m)\,\alpha \| S_{nk}(N)\|\} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{4r+m+1} \mathbf{E}_\nu \|\delta_{nk}(N_j)\|^l \sum_{j=1}^{4r+m+1} \exp\left\{ -\frac{t^2}{3} \mathbf{E}_{S_{nk}(N),\nu} \left(F^{(1)}(S_{nk}(N))\,[\delta_{nk}(N_j)]\right)^2 \right\} + \right.$$
$$\left. + I\left(\|S_{nk}(N)\| > v\alpha^{-1}\right) \right\}. \qquad (28)$$

Оценим вероятность события Ω_2. Используя неравенства Гёльдера и Йенсена, а также леммы 1 и 2, получаем

$$\mathbf{P}(\Omega_2) \leqslant \mathbf{E}^{1/2} \exp\left\{ \frac{\alpha}{8c^*} \| S_{n,n+1} \| \right\} \times$$
$$\times\, \mathbf{E}^{1/2} \exp\left\{ \frac{\alpha}{8c^*} \| W_n \| \right\} \exp\left\{ -\frac{v}{16c^*} |\log \sigma_n(N)| \right\} \leqslant C(A, \alpha)\,\sigma_n(N)^{v/(16c^*)}. \qquad (29)$$

Далее, усредняя обе части неравенства (28), применяя снова неравенство Гёльдера и ранее доказанные леммы, окончательно получаем из (27) оценку (26).

Лемма 11. *Пусть* $|t|\Delta_n(N) \geqslant 1$, $t^2\Delta_n(N)^3 \leqslant 1$ *и* $|t\Delta_n(N)|^6 \varepsilon(n) \leqslant 1$. *Тогда если* N *удовлетворяет* (1.4), *то*

$$\mathbf{E} \exp\left\{ -t^2 \mathbf{E}_{S_{nk}(N),\nu} \left(F^{(1)}(S_{nk}(N))\,[\delta_{nk}(N_j)] \right)^2 \right\} \leqslant$$
$$\leqslant C(F, A, Q) \left\{ \mathbf{E}^{3/4} \exp\left\{ -t^2 \mathbf{E}_{W_n,\nu} \left(F^{(1)}(W_n)\,[\delta_{nk}(N_j)] \right)^2 \right\} + \right.$$
$$\left. + \left[(t^2\Delta_n(N)^3)^6 + \left(|t\Delta_n(N)|^6 \varepsilon(n) \right)^{7/2} \right] \right\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$\Phi_{kj}(x) = \mathbf{E}_\nu \left(F^{(1)}(x)\,[\delta_{nk}(N_j)] \right)^2,$$
$$e_{nk}(N) = \sum_{i<k,\, i\in N} \left(\left(\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)} \right) \nu_i + \mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)} \right), \qquad (30)$$
$$S_{nkr}(N) = \sum_{i<r,\, i\in N} \left(\xi_{ni}^{(2)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)} \right)(1-\nu_i) + \sum_{i<r,\, i\notin N} \xi'_{ni} +$$
$$+ \sum_{r<i\leqslant k,\, i\in N} \gamma_{ni}^{(2)} (1-\nu_i) + \sum_{i>r,\, i\notin N} \gamma_{ni}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем, конечно, предполагается, что последовательности $\{\xi'_{ni}\}$, $\{\xi_{ni}^{(2)}\}$, $\{\gamma_{ni}\}$, $\{\gamma_{ni}^{(2)}\}$ и $\{\nu_i\}$ независимы в совокупности.

Теперь воспользуемся методом композиций (операторный метод Линдеберга) доказательства центральной предельной теоремы (см. [3]). Нам понадобится следующий вариант формулы Тейлора:

$$\exp\{-t^2\Phi_{kj}(x+\delta)\} = \exp\{-t^2\Phi_{kj}(x)\} \times$$
$$\times \left\{ 1 - t^2\Phi_{kj}^{(1)}(x)[\delta] + \frac{t^4}{2}\left(\Phi_{kj}^{(1)}(x)[\delta]\right)^2 - \frac{t^2}{2}\Phi_{kj}^{(2)}(x)[\delta^2] \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\theta)^2\, \Psi(x+\theta\delta, t) \exp\{-t^2\Phi_{kj}(x+\theta\delta)\}\, d\theta, \qquad (31)$$

где

$$\Psi(x, t) = t^6 \left(\Phi_{kj}^{(1)}(x)[\delta]\right)^3 - 3t^4\Phi_{kj}^{(1)}(x)[\delta]\,\Phi_{kj}^{(2)}(x)[\delta^2] + t^2\Phi_{kj}^{(3)}(x)[\delta^3].$$

Отметим, что если $F \in \mathscr{C}(4, \beta, \alpha)$ то $\Phi_{kj} \in \mathscr{C}(3, \beta, \alpha)$. Далее имеем

$$\begin{aligned} &|\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nk}(N))\} - \mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\}| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{r<k} \mathbf{E}\,|\mathbf{E}_\nu \exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \tilde{\xi}_{nr})\} - \\ &- \mathbf{E}_\nu\exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \tilde{\gamma}_{nr})\}| + \\ &+ |\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nko}(N) + e_{nk}(N))\} - \mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\}|, \end{aligned} \tag{32}$$

где $\tilde{\xi}_{nr} = \xi'_{nr}$, $\tilde{\gamma}_{nr} = \gamma_{nr}$, если $r \notin N$ и $\tilde{\xi}_{nr} = (\xi_{nr}^{(2)} - E\xi_{nr}^{(2)})(1 - \nu_r)$, $\tilde{\gamma}_{nr} = \gamma_{nr}^{(2)}(1 - \nu_r)$, если $r \in N$. Теперь применим формулу (31) для каждого члена разности, стоящей под знаком суммы в правой части (32), соответственно при $x = S_{nkr}(N) + e_{nk}(N)$, $\delta = \tilde{\xi}_{nr}$ или $\delta = \tilde{\gamma}_{nr}$. Заметим, что при фиксированных с. в. $\{\nu_i\}$ $S_{nkr}(N)$ состоит из независимых с. э. и из условий теоремы следуют соотношения

$$\mathbf{E}_\nu\Phi_{kj}^{(1)}(x)[\xi'_{nr}] = \mathbf{E}_\nu\Phi_{kj}^{(1)}(x)[\xi_{nr}I(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha)],$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_{\nu,x}L_2(x)[\xi'^2_{nr}] - E_{\nu,x}L_2(x)[\gamma^2_{nr}]| &= |E_{\nu,x}L_2(x)[\xi'^2_{nr}] - \mathbf{E}_{\nu,x}L_2(x)[\xi^2_{nr}]| \leqslant \\ &\leqslant 2\|L_2(x)\|^*\,\mathbf{E}\|\xi_{nr}\|^2 I(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\mathbf{E}_\nu L_2(x)[(\xi_{nr}^{(2)} - E\xi_{nr}^{(2)})^2] = \mathbf{E}_\nu L_2(x)[(\gamma_{nr}^{(2)})^2],$$

где $L_2(x)$ — произвольный билинейный непрерывный функционал. Например, $L_2(x)[z, y] = \Phi_{kj}^{(2)}(x)[z, y]$ или $L_2(x)[z, y] = \Phi_{kj}^{(1)}(x)[z]\,\Phi_{kj}^{(1)}(x)[y]$ (см. лемму 6).

Таким образом, с помощью (31) и (33) можем оценить

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\,|\mathbf{E}_\nu\exp\{-t^2\Phi_{kj}(x + \tilde{\xi}_{nr})\} - \mathbf{E}_\nu\exp\{-t^2\Phi_{kj}(x + \tilde{\gamma}_{nr})\}| \leqslant \\ &\leqslant C(F, Q)\,|t\Delta_n(N)|^4\,\mathbf{E}\|\xi_{nr}\|^2 I(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha) \times \\ &\times \mathbf{E}^{(q-1)/q}\exp\left\{\frac{4q\alpha}{q-1}(\|S_{nkr}(N)\| + \|e_{nk}(N)\|)\right\}\mathbf{E}^{1/q}\exp\{-qt^2\Phi_{kj}(x)\} + \\ &+ C(F, Q)\,|t\Delta_n(N)|^6\,\mathbf{E}^{(q-1)/q}\exp\left\{\frac{6\alpha q}{q-1}(\|S_{nkr}(N)\| + \|e_{nk}(N)\| + 2c^*/\alpha)\right\} \times \\ &\times \sup_{\theta\in[0,1]} \mathbf{E}\|\tilde{\xi}_{nr}\|^3\,\mathbf{E}^{1/q}_{\tilde{\xi}_{nr}}\exp\{-qt^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\tilde{\xi}_{nr})\} + \\ &+ C(F, Q)\,\mathbf{E}^{(q-1)/q}\|\tilde{\gamma}_{nr}\|^{3q/(q-1)}\exp\left\{\frac{6\alpha q}{q-1}\|\tilde{\gamma}_{nr}\|\right\} \times \\ &\times \mathbf{E}^{(q-1)/q}\exp\left\{\frac{6\alpha q}{q-1}(\|S_{nkr}(N)\| + \|e_{nk}(N)\|)\right\} \times \\ &\times \sup_{\theta\in[0,1]} \mathbf{E}^{1/q}\exp\{-qt^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\tilde{\xi}_{nr})\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Используя леммы 1—5 и (1.2), получаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}^{(q-1)/q}\|\tilde{\gamma}_{nr}\|^{3q/(q-1)}\exp\left\{\frac{6\alpha q}{q-1}\|\tilde{\gamma}_{nr}\|\right\} \leqslant \mathbf{E}^{(q-1)/2q}\|\tilde{\gamma}_{nr}\|^{6q/(q-1)}\,\mathbf{E}^{(q-1)/2q} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{12\alpha q}{q-1}\|\tilde{\gamma}_{nr}\|\right\} \leqslant C(q, A)\,\sigma^3_{nr} \leqslant C_1(q, A)\,\{(\mathbf{E}\|\xi_{nr}\|^2 I(\|\xi_{nr}\| \leqslant c^*/\alpha))^{3/2} + \\ &+ (\mathbf{E}\|\xi_{nr}\|^2 I(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha))^{3/2}\} \leqslant C_1(q, A)\,\{\mathbf{E}\|\xi'_{ni}\|^3 + \mathbf{E}\|\xi_{nr}\|^2 I(\|\xi_{nr}\| > c^*/\alpha)\}. \end{aligned}$$

Таким образом, из (34) вытекает оценка первой суммы в правой части (32):

$$\sum_{r<k} \leqslant C(F, A, q, Q)\,|t\Delta_n(N)|^6 \times$$

$$\times \Big\{\varepsilon(n) \sup_{\theta\in[0,1],\, r<k} \mathbf{E}^{1/q} \exp\{-qt^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\tilde{\gamma}_{nr})\} +$$

$$+ \sum_{r<k} \sup_{\theta\in[0,1]} \mathbf{E}\,\|\tilde{\xi}_{nr}\|^3 E^{1/q} \exp\{-qt^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\tilde{\xi}_{nr})\}\Big\}. \quad (35)$$

Здесь, конечно, предполагается, что c^* в (1) достаточно мало. Выбором c^* обеспечивается существование величины

$$\sup_{r,k,n} \exp\{C\,\|S_{nkr}(N)\|\}$$

для любого наперед заданного C.

Для оценки второго слагаемого правой части (32) нам понадобится следующее простое неравенство

$$|\mathrm{e}^{-x} - e^{-y}| \leqslant \mathrm{e}^{-y} \sum_{j\leqslant m} \frac{1}{j!}|x-y|^j + \frac{|x-y|^{m+1}}{(m+1)!}, \quad (36)$$

где m — произвольное натуральное число, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Тогда с помощью лемм 1—5, условия (1.2) и неравенства Гёльдера получаем

$$|\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nko}(N) + e_{nk}(N))\} - \mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\}| \leqslant$$

$$\leqslant C(F, m)\,\mathbf{E}^{1/q}\exp\{-qt^2\Phi_{kj}(W_n)\}\,\mathbf{E}^{(q-1)/q}\Big\{\sum_{l\leqslant m}\mathbf{E}_\nu\|\delta_{nk}(N_j)\|^{2l}\,|t|^{2l}\times$$

$$\times\Big(\|e_{nk}(N)\|^l + \mathbf{E}_\nu\Big\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}^{(2)}(1-\nu_i)\Big\|^l + \mathbf{E}\Big\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\Big\|^l\Big)\Big\}^{q/(q-1)}\times$$

$$\times\exp\Big\{\frac{2lq}{q-1}(\|S_{nko}(N)\| + \|e_{nk}(N)\| + \|W_n\|)\Big\} +$$

$$+ C(F, m)\,|t|^{2(m+1)}\,\mathbf{E}^{1/2}\exp\{4(m+1)(\|S_{nko}(N)\| + \|e_{nk}(N)\| + \|W_n\|)\}\times$$

$$\times\mathbf{E}^{1/2}\Big(\|e_{nk}(N)\|^{m+1} + \Big\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}^{(2)}(1-\nu_i)\Big\|^{m+1} + \Big\|\sum_{i\in N}\gamma_{ni}\Big\|^{m+1}\Big)\times$$

$$\times\mathbf{E}_\nu\|\delta_{nk}(N_j)\|^{4(m+1)} \leqslant C(F, A, m, q, Q)\,\{E^{1/q}\exp\{-qt^2\Phi_{kj}(W_n)\} +$$

$$+ |t\Delta_n(N)|^{2(m+1)}\,\Delta_n(N)^{m+1}\}. \quad (37)$$

Из (32)—(37) следует

$$E\exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nk}(N))\} \leqslant C(F, A, m, q, Q)\,\{\mathbf{E}^{1/q}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\} +$$

$$+ |t\Delta_n(N)|^6\Big\{\varepsilon(n)\sup_{\theta\in[0,1],\, r<k} E^{1/q}\exp\{-qt^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\gamma_{nr})\} +$$

$$+ \sum_{r<k}\sup_{\theta\in[0,1]}\mathbf{E}\|\tilde{\xi}_{nr}\|^3\,\mathbf{E}^{1/q}_{\tilde{\xi}_{nr}}\exp\{-qt^2\Phi_{kj}(S_{nkr}(N) + e_{nk}(N) + \theta\tilde{\xi}_{nr})\}\Big\} +$$

$$+ \{|t\Delta_n(N)|^{2(m+1)}\,\Delta_n(N)^{m+1}\}. \quad (38)$$

Неравенство (38), по существу, рекуррентное, потому что с. э. $S_{nkr}(N)$ и $S_{nkr}(N) + \theta\gamma_{nr}$ при фиксированных $\{\nu_i\}$ и θ состоят из независимых с. э. Следовательно, для каждого из математических ожиданий правой части (38), где имеется с. э. $S_{nkr}(N)$, справедлива оценка (37) (равномерная по $\theta\in[0, 1]$). Применяя данное рекуррентное неравенство трижды, имеет

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nk}(N))\} \leqslant C(F, A, m, q, Q)\,\Big\{\mathbf{E}^{1/q^4}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\} +$$

$$+ (t^2\Delta_n(N)^3)^{(m+1)/q^3} + (|t\Delta_n(N)|^6\,\varepsilon(n))^{1+1/q+1/q^2+1/q^3}\Big\}.$$

Полагая $q = (4/3)^{1/4}$, $m = 7$, получаем требуемое. Лемма доказана.

Лемма 12. *Если* $QC_0(F)|t|\sigma_n(N)^{1-v}\leqslant 1/8$, *то при достаточно большом* n *и выполнении* (1.4)

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\}\leqslant \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{3t^2}{8}\Phi^*_{kj}(W_n)\right\}+C(A,\alpha,v)\sigma_n(N)^4,$$

где $\Phi^*_{kj}(x)=\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)\left[\sum_{i\in N_j,i<k}(\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni})+\sum_{i\in N_j,i>k}\gamma_{ni}\right]\right)^2.$

Доказательство. Обозначим $W'_n=W_nI\left(\|W_n\|\leqslant\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right)$. Тогда

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\}\leqslant\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W'_n)\}+\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}\exp\left\{-t^2\mathbf{E}_{W_n}\left(F^{(1)}(W_n)\left[\sum_{i\in N_j,i<k}\gamma_{ni}\right]\right)^2\right\}\times$$

$$\times\prod_{i\in N_j,i>k}\left\{1-\frac{1}{2}\left(1-\exp\left\{-t^2\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(W'_u)[\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}])^2\right\}\right)\right\}+$$

$$+\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right).$$

С помощью простых неравенств

$$1-e^{-x}\geqslant x-x^2/2,\quad \prod_{i\in N}\{1-y_i\}\leqslant\exp\left\{-\sum_{i\in N}y_i\right\}$$

получаем

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(W_n)\}\leqslant\mathbf{E}\exp\left\{-t^2\mathbf{E}_{W_n}\left(F^{(1)}(W_n)\left[\sum_{i\in N_j,i>k}\gamma_{ni}\right]\right)^2\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\sum_{i\in N_j,i<k}\mathbf{E}_{W_N}(F^{(1)}(W'_n)[\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}])^2+\right.$$

$$\left.+\frac{t^4}{4}\sum_{i\in N_j,i<k}\left(\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(W'_n)[\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}])^2\right)^2\right\}+\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}\exp\{-t^2\mathbf{E}_{W_n}(\ldots)^2\}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}(1-2C_0(F)^2t^2\sigma_n(N)^{2(1-v)}Q^2)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{i\in N_j,i<k}\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(W_n)[\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}])^2\right\}+2\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right).\tag{39}$$

Последний член правой части (39) оценивается с помощью неравенства (8) и условия (1.2): если $v\log\sigma_n(N)>2\alpha A^{1/2}$ (постоянная A определена в (1.2)), то

$$\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}|\log\sigma_n(N)|\right)\leqslant\exp\left\{-\frac{(v\alpha^{-1}|\log\sigma_n(N)|-\mathbf{E}\|W_n\|)^2}{2\mathbf{E}\|W_n\|^2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-\frac{(v\alpha^{-1}|\log\sigma_n(N)|-A^{1/2})^2}{2A}\right\}\leqslant(\sigma_n(N))^{\frac{v}{8A\alpha}|\log\sigma_n(N)|}.$$

Выбором достаточно большого n показатель степени правой части этого неравенства может быть сделан сколь угодно большим. Лемма доказана.

Следствие. *В условиях лемм* 11, 12 *и при выполнении неравенства* $\inf_{k,j}\Delta_n(N_j\setminus\{k\})\geqslant C\Delta_n(N)$ *имеет место оценка*

$$\max_{k,j}\mathbf{E}\exp\{-t^2\Phi_{kj}(S_{nk}(N))\}\leqslant C(F,A,B,Q)\{|t\Delta_n(N)|^{-3M/2}+$$

$$+(t^2\Delta_n(N)^3)^6+(\varepsilon(n)(t\Delta_n(N))^6)^{7/2}\}.\tag{40}$$

Доказательство. Из равенства ковариаций с. э. ξ_{ni} и γ_{ni} следует

$$\Phi^*_{kj}(W_n)=\mathbf{E}_{W_n}\left(F^{(1)}(W_n)\left[\sum_{i\in N_j,i<k}(\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni})\right]\right)^2+$$
$$+\sum_{i\in N_j,i>k}\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(W_n)[\xi^{(1)}_{ni}\nu_i+\xi^{(2)}_{ni}(1-\nu_i)])^2\equiv J.$$

Используя простое соотношение $\mathbf{E}(\zeta+c)^2\geqslant\mathbf{E}(\zeta-\mathbf{E}\zeta)^2$ и неравенство Йенсена, получаем

$$J\geqslant\sum_{i\in N_j,i<k}\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(W_n)[\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}])^2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i\in N_j,i>k}\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(W_n)[\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}])^2\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i\in N_j\setminus\{k\}}\mathbf{D}_{ni}(W_n). \tag{41}$$

Неравенство (40) следует из (41), лемм 10, 12 и оценки

$$\mathbf{E}\exp\{-t^2\zeta\}=t^2\int_0^\infty\mathbf{P}(\zeta<x)\exp\{-t^2x\}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant e^{-t^2}+Bt^2\int_0^1 x^M\exp\{-t^2x\}\,dx\leqslant C(B)\,|t|^{-2M}, \tag{42}$$

где $\zeta=\sum_{i\in N}\mathbf{D}_{ni}(W_n)\Delta_n^{-2}(N)$.

Лемма 13. *Пусть H и F удовлетворяют условия леммы 10. Тогда ция, имеющая 12 ограниченных производных. Тогда при выполнении* (1.4)

$$\mathbf{E}G(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(S_{nk}(N)))\leqslant C(F,A,Q)\sup_{z\in\mathbf{R},s\leqslant 12}\left|\frac{d^s}{dz^s}G(z)\right|\times$$
$$\times\{\mathbf{E}G(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(W_n))^{3/4}+\Delta_n(N)^6+\varepsilon(n)^{7/2}\}. \tag{43}$$

Доказательство, по существу, повторяет рассуждения леммы 11, в которых вместо $\exp\{-t^2z\}$ нужно рассматривать $G(t^2z)$ и положить затем $t=\Delta_n(N)^{-1}$.

Лемма 14. *Пусть H и F удовлетворяют условиям леммы 10. Тогда для любого $t\in\mathbf{R}$ при выполнении* (1.5)

$$|\mathbf{E}H(W_n)\exp\{itF(W_n)\}|\leqslant C(F,H,A,B)\,|t|^{-\mu},$$

где $\mu\equiv\mu(v,\beta,r,m)=\min\{m,r\}+\beta/4$.

Доказательство. В силу безграничной делимости с. э. W_n можно представить как

$$W_n\overset{d}{=}W^{(0)}_n(1-|t|^{2(v-1)})^{1/2}+(m+1)^{-1/2}\,|t|^{v-1}\sum_{j=1}^{m+1}W^{(j)}_n,$$

где $\{W^{(j)}_n;\ j=0,1,\ldots\}$ — независимые в совокупности копии с. э. W_n, $|t|\geqslant 2$, $v\in(0,1)$. Положим $v=\beta(2\min\{m,r\})^{-1}$. Точно так же, как и при доказательстве леммы 10, получаем (см. также лемму 7)

$$|\mathbf{E}H(W_n)\exp\{itF(W_n)\}|\leqslant\sum_{l=0}^m\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{W^0_n}\frac{b^l_{v,m}(t)}{l!}\times\right.$$
$$\times H^{(l)}(a_v(t)W^{(0)}_n)\left[\left(\sum_{j=1}^{m+1}W^{(j)}_n\right)^l\right]\exp\left\{itF^{(1)}(a_v(t)W^{(0)}_n)\left[\sum_{j=1}^{m+1}W^{(j)}_n\right]\right\}\times$$
$$\left.\times\left\{1+\sum_{d=1}^{R(m,r)-1}\frac{(it)^d}{d!}\left(\sum_{s=2}^r\frac{b^s_{v,m}(t)}{s!}\cdot F^{(s)}(a_v(t)W^{(0)}_n)\left[\left(\sum W^{(j)}_n\right)^s\right]\right)^d\right\}\right|+$$

$$+C(\cdot)\{b_{v,m}(t)^{m+\beta}+|t|\,b_{v,m}(t)^{r+\beta}+(|t|\,b^2_{v,m}(t))^{R(m,r)}\}\leqslant$$
$$\leqslant C_1(\cdot)\,\mathbf{E}\exp\left\{-C_2t^2E_{W_n^{(0)}}(F^{(1)}(a_v(t)\,W_n^{(0)})\,[W_n^{(1)}])^2\right\}+$$
$$+C_1(\cdot)\{b^{m+\beta}_{v,m}(t)+|t|\,b^{r+\beta}_{v,m}(t)+(|t|\,b^2_{v,m}(t))^{R(m,r)}\},\qquad(44)$$

где $a_v(t)=(1-|t|^{2(v-1)})^{1/2}$, $b_{v,m}(t)=|t|^{v-1}(m+1)^{-1/2}$, $R(m,r)=m+r+3$. Используя неравенства $x^2\geqslant 1/2y^2-(x-y)^2$, $\mathbf{E}(\zeta+c)^2\geqslant\mathbf{E}(\zeta-\mathbf{E}\zeta)^2$, а также равенство ковариаций с. э. ξ_{ni} и γ_{ni}, получаем

$$\mathbf{E}_{W_n^{(0)}}(F^{(1)}(a_v(t)\,W_n^{(0)})\,[W_n^{(1)}])^2\geqslant\frac{1}{2}E_{W_n^{(0)}}\left(F^{(1)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\leqslant n}\xi_{ni}\right]\right)^2-$$
$$-C(A,F)\,|t|^{4(v-1)}\|W_n^{(0)}\|^2\exp\{2\alpha\|W_n^{(0)}\|\}=$$
$$=\frac{1}{2}E_{W_n^{(0)}}\left(F^{(1)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\leqslant n}(\xi^{(1)}_{ni}v_i+\xi^{(2)}_{ni}(1-v_i))\right]\right)^2-\ldots$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n^{(0)}}\mathbf{E}_{W_n^{(0)},\xi^{(2)},v}\left(F^{(1)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\leqslant n}(\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni})\,v_i\right]\right)^2-\ldots$$
$$=\frac{1}{4}\mathbf{E}_{W_n^{(0)}}\left(F^{(1)}(W_n^{(0)})\left[\sum_{i\leqslant n}(\xi^{(1)}_{ni}-\mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni})\right]\right)^2-\ldots=$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{i\leqslant n}\mathbf{D}_{ni}(W_n^{(0)})-C(A,F)\,|t|^{4(v-1)}\|W_n^{(0)}\|^2\exp\{2\alpha\|W_n^{(0)}\|\}.\qquad(45)$$

Теперь как и при доказательстве (40), окончательно получаем

$$|\mathbf{E}H(W_n)\exp\{itF(W_n)\}|\leqslant C(\cdot)\,\mathbf{E}\exp\left\{-Ct^2\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(a_v(t)\,W_n)\,[\cdot])^2\right\}\times$$
$$\times I\left(\|W_n\|\leqslant\frac{v}{\alpha}\log|t|\right)+C(\cdot)\,\mathbf{P}\left(\|W_n\|>\frac{v}{\alpha}\log|t|\right)+C(\cdot)\,|t|^{-\mu(\cdot)}\leqslant$$
$$\leqslant C_1(\cdot)\,\mathbf{E}\exp\left\{-C_1t^2\sum_{i\leqslant n}\mathbf{D}_{ni}(W_n)\right\}+C_2(\cdot)\exp\left\{-\frac{v^2}{2\alpha^2A}(\log|t|)^2\right\}+$$
$$+C(\cdot)\,|t|^{-\mu(\cdot)}\leqslant C_3(\cdot)\,|t|^{-\mu(\cdot)}$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если* $F\in\mathscr{C}(1,\beta,\alpha)$ *то при выполнении* (1.5)

$$|\mathbf{E}\exp\{itF(W_n)\}|\leqslant C(\cdot)\,|t|^{-1-\beta/4}.$$

Отсюда, в частности, следует существование ограниченной равномерно по n плотности распределения с. в. $F(W_n)$.

Лемма 15. *Для любых* $z>0$ *и* $v\in(0,1)$

$$\mathbf{P}(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(S_{nk}(N))<z)\leqslant C(F,A,B,v,Q)\,z^{-12}\times$$
$$\times\{z^{3M/4}+(\Delta_n(N)^2\sigma_n(N)^{v-2})^{-3M/4}+\Delta_n(N)^6+\varepsilon(n)^{7/2}\},$$

где M *и* $\Phi_{kj}(x)$ *определены соответственно в* (1.5) *и* (30), $\min\limits_{k,j}\Delta_n(N_i\setminus\{k\})\geqslant C\Delta_n(N)$.

Доказательство. Пусть неотрицательная функция $G(z)$ удовлетворяет условиям леммы 13 и

$$G(z)\geqslant C_0,\ \text{если}\ |z|\leqslant 1,$$
$$G(z)=0,\ \text{если}\ |z|\geqslant 2.$$

Тогда из (43) следует

$$\mathbf{P}(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(S_{nk}(N))<z)\leqslant C_0^{-1}G(z^{-1}\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(S_{nk}(N)))\leqslant$$
$$\leqslant C(F,G,A,Q)\,z^{-12}\{\mathbf{P}^{3/4}(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(W_n)<2z)+\Delta_n(N)^6+\varepsilon(n)^{7/2}\}.$$

Обозначим $W'_n = W_n I\left(\|W_n\| \leqslant \frac{v}{2\alpha} |\log \sigma_n(N)|\right)$. Имеем

$$\mathbf{P}(\Delta_n(N)^{-2}\Phi_{kj}(W_n) < 2z) \leqslant \mathbf{P}\left(\Phi_{kj}(W_n) - \frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W_n) < 0\right) +$$
$$+ \mathbf{P}\left(\frac{1}{4}\sum_{i\in N_j\setminus\{k\}} \mathbf{D}_{ni}(W_n) < 2z\Delta_n(N)^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left(\Phi_{kj}(W'_n) - \frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W'_n) < 0\right) + C(B, \alpha, v)\{z^M + \sigma_n(N)^8\}. \quad (46)$$

Для оценки первого слагаемого правой части (46) воспользуемся неравенством Бернштейна и (42):

$$\mathbf{P}\left(\Phi_{kj}(W^1_n) - \frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W'_n) < 0\right) =$$
$$= \mathbf{E}\mathbf{P}_{W_n}\left(-\Phi_{kj}(W'_n) + \mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W'_n) > \frac{1}{2}\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W'_n)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{C(Q)\left(E_{W_n}\Phi_{kj}(W'_n)\right)^2}{\sum_{i\in N_j}\left(\mathbf{E}_{W_n}(F^{(1)}(W'_n)[\xi^{(1)}_{ni} - \mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}])^2\right)^2 + \sigma_n^2(N)\|F^{(1)}(W'_n)\|^{*2}\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W'_n)}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}\exp\left\{-\sigma_n(N)^{v-2}C(F, Q)\mathbf{E}_{W_n}\Phi_{kj}(W'_n)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C(F, B, Q)\{(\Delta_n(N)^2\sigma_n(N)^{v-2})^{-M} + \sigma_n(N)^8\}.$$

Лемма доказана.

Обозначим

$$\mu_{nm}(x, N, v) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\sum_{i\in N_j} \mathbf{E}_v |F^{(1)}(x)[\xi^{(1)}_{ni} - \mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}]\, v_i|^3}{\sum_{i\in N_j} \mathbf{E}_v (F^{(1)}(x)[\xi^{(1)}_{ni} - \mathbf{E}\xi^{(1)}_{ni}]\, v_i)^2}, \quad (47)$$

где $N = \bigcup_{j\leqslant m} N_j$, $N_k \cap N_j = \varnothing$.

Лемма 16. *Для любой фиксированной числовой последовательности* $\{v_i\}$, *удовлетворяющей условию* $\sum_{i\in N_j} v_i > 0$, $j \leqslant m$, *функционал* $\mu_{nm}(x, N, v)$ *имеет две непрерывные производные Фреше, причем вторая производная удовлетворяет условию Липшица. Кроме того,*

$$\mu_{nm}(x, N, v) \leqslant C(F, Q)\sigma_n(N)\exp\{\alpha\|x\|\}, \quad (48)$$

$$\|\mu^{(1)}_{nm}(x, N, v)\|^* \leqslant C(F, Q)\exp\{3\alpha\|x\|\}\sigma_n(N)\left\{1 + \sum_{j=1}^{m}\Delta_n(N_j)^2(\Phi_{n+1,j}(x)^{-1}\right\}, \quad (49)$$

$$\|\mu^{(2)}_{nm}(x, N, v)\|^* \leqslant C(F, Q)\exp\{5\alpha\|x\|\}\sigma_n(N)\times$$
$$\times\left\{1 + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{m}\Delta_n(N_j)^{2k}(\Phi_{n+1,j}(x))^{-k}\right\}, \quad (50)$$

$$\|\mu^{(2)}_{nm}(x+h, N, v) - \mu^{(2)}_{nm}(x, N, v)\|^* \leqslant C(F, Q)\|h\|\times$$
$$\times\exp\{7\alpha\|x\|\}\sigma_n(N)\left\{1 + \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{m}\Delta_n(N_j)^{2k}(\Phi_{n+1,j}(x))^{-k}\right\}. \quad (51)$$

Доказательство. Существование у функции $\mu_n(x, N, v)$ второй производной Фреше, удовлетворяющей условию Липшица, сразу следует из (47) (отметим, что функция $|z|^3$ дважды непрерывно дифференцируема и вторая производная удовлетворяет условию Липшица). Для получения оценок (48)—(51) нам понадобится неравенство (23). Имеем

$$\mu_{nm}(x, N, \nu) \leqslant \max_{j \leqslant m, i \in N_j} \frac{m\mathbf{E}_\nu \left| F^{(1)}(x)\left[\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}\right]\right|^3}{\mathbf{E}_\nu\left(F^{(1)}(x)\left[\xi_{ni}^{(1)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)}\right]\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant C(F, Q)\,\sigma_n(N)\exp\{\alpha\|x\|\}. \tag{52}$$

При выводе (52) использовалось также неравенство $\left|\xi_{ni}^{(1)}\right| \leqslant C(Q)\,\sigma_n(N)$. Оценим $\mu_{nm}^{(1)}(x, \cdot)$. Имеем

$$\mu_{nm}^{(1)}(x, N, \nu)[h] = \sum_{j=1}^{m} \frac{3\sum\limits_{i\in N_j}\nu_i\mathbf{E}\left\{\left(F^{(1)}(x)[\cdot]\right)^2 \operatorname{sgn}\left(F^{(1)}(x)[\cdot]\right)F^{(2)}(x)[\cdot, h]\right\}}{\sum\limits_{i\in N_j}\nu_i\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)[\cdot]\right)^2} -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\frac{\sum\limits_{i\in N_j}\nu_i\mathbf{E}\left|F^{(1)}(x)[\cdot]\right|^3 2\sum\limits_{i\in N_j}\nu_i\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)[\cdot]\,F^{(2)}(x)[\cdot, h]\right)}{\left(\sum\limits_{i\in N_j}\nu_i\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)[\cdot]\right)^2\right)^2}. \tag{53}$$

Обозначим первую и вторую суммы правой части (53) соответственно R_1 и R_2. Далее, с помощью (23) получаем

$$|R_1| \leqslant 3m\cdot\max_{j\leqslant m, i\in N_j}\frac{\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)[\cdot]\right)^2\left|F^{(2)}(x)[\cdot, h]\right|}{\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)[\cdot]\right)^2} \leqslant C(Q)\,m\left\|F^{(2)}(x)\right\|^*\|h\|\,\sigma_n(N).$$

Для R_2 справедлива оценка

$$R_2 \leqslant \sum_{j=1}^{m}\frac{C(Q)\,\sigma_n(N_j)\left\|F^{(1)}(x)\right\|^{*2}\left\|F^{(2)}(x)\right\|^*\|h\|\,\Delta_n^2(N_j)}{\sum\limits_{i\in N_j}\nu_i\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)[\cdot]\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant C(F, Q)\,\sigma_n(N)\exp\{3\alpha\|x\|\}\sum_{j=1}^{m}\frac{\Delta_n^2(N_j)}{\Phi_{n+1,j}(x)}.$$

Вывод (50) и (51) проводится совершенно аналогично. Лемма доказана.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Обозначим через $N^* = \{j(n, k);\ k = 1, \ldots, k(n)\}$ — подмножество индексов, определяемое условиями

$$m_{nj(n,1)} \equiv \left(\mathbf{E}\left\|\xi'_{nj(n,1)}\right\|^3 + \mathbf{E}\left\|\xi_{nj(n,1)}\right\|^2 I\left(\left\|\xi_{nj(n,1)}\right\| < c^*/\alpha\right)\sigma_{nj(n,1)}^{-2} = \max_{j\leqslant n} m_{nj},$$

$$m_{nj(n,k)} = \max_{j\leqslant n;\, j\notin\{j(n,1),\ldots,j(n,k-1)\}} m_{nj}, \quad k \geqslant 2,$$

$$\delta/4 \leqslant \Delta_n^2(N^*) \leqslant \delta/2.$$

Пусть N^0 такое подмножество $N(\delta, n)\setminus N^*$, что

$$\left|\Delta_n^2(N^0) - \varepsilon(n)^{1,88}\right| \leqslant C\sigma_n^2(N^0),$$

где $\varepsilon(n)$ определено в (1.4), а $\Delta_n(N)$, $\sigma_n(N)$ — соответственно в (2.24) и (2.25). Обозначим

$$S_n^0 = \sum_{i\leqslant n, i\notin N^0}\xi'_{ni} + \sum_{i\in N^0}\left(\xi_{ni}^{(2)} - \mathbf{E}\xi_{ni}^{(2)}\right)(1 - \nu_i) + e_{n,n+1}(N^0),$$

$$\tilde{\mu}_n(x) = \varepsilon(n) + \mu_{n,20}(x, N^0, \nu).$$

В дальнейшем предполагается, что $N^0 = \bigcup\limits_{j\leqslant 20} N_j^0$, где $\{N_j^0\}$ попарно несовместны и

$$\left|\Delta_n(N_j^0)^2 - \varepsilon(n)^{1,88}/20\right| \leqslant C\sigma_n^2(N^0).$$

Кроме того, в леммах 2.10—2.16 множества N и $\{N_j\}$ таковы, что $N \subseteq N(\delta, n) \setminus \{N^0 \cup N^*\}$ и

$$|\Delta_n^2(N_j) - \Delta_n^2(N)m^{-1}| \leqslant C\sigma_n^2(N), \quad N = \bigcup_{j \leqslant m} N_j.$$

Обозначим через τ с. в. с плотностью распределения

$$\frac{d}{dx} K(x) = Cx^{-10}(\sin(x/40))^{10}.$$

Отметим, что $\mathbf{E}\tau^8 < \infty$ и, кроме того,

$$\widehat{K}(t) = \int_{\mathbf{R}} \exp\{itx\}\, dK(x) = \begin{cases} \geqslant C, & \text{если } |t| \leqslant 1/8, \\ 0, & \text{если } |t| \geqslant 1/4. \end{cases}$$

Предполагается, что с. в. τ не зависит от ранее введенных с. э.

Дальнейшие рассуждения в известной степени аналогичны доказательству основной теоремы в [3]. Имеем

$$d_F(S_n, W_n) \leqslant \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P}\left(F(S_{n,n+1}) + \tau\widetilde{\mu}_n(S_n^0) < x\right) - \right.$$

$$- \mathbf{P}(F(W_n) < x)\Big| + \sup_{x \in \mathbf{R}} \Big| \mathbf{P}\left(F(S_{n,n+1}) + \tau\widetilde{\mu}_n(S_n^0) < x\right) -$$

$$- \mathbf{P}(F(S_{n,n+1}) < x)\Big| + \sum_{i \leqslant n} \mathbf{P}(\|\xi_{ni}\| > c^*/\alpha). \qquad (1)$$

Обозначим через I_1, I_2 соответственно первое и второе слагаемое правой части (1), а через $f_{n1}(t)$, $f_{n2}(t)$ и $f_{n3}(t)$ — характеристические функции с. в. $F(S_{n,n+1})$, $F(S_{n,n+1}) + \tau\widetilde{\mu}_n(S_n^0)$, $F(W_n)$.

На основании формулы Бэрри (см. [17]) и леммы 2.14 получаем

$$I_1 \leqslant \int_{|t| < b\varepsilon(n)^{-1}} |t|^{-1} |f_{n2}(t) - f_{n3}(t)|\, dt + C(F, A, B)\,\varepsilon(n). \qquad (2)$$

Введем следующие обозначения:

$$I_1^{(1)} = \int_{|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}} |t|^{-1} |f_{n1}(t) - f_{n3}(t)|\, dt, \quad b = (56QC_0(F))^{-1}\delta,$$

$$I_1^{(2)} = \int_{|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}} |t|^{-1} |f_{n2}(t) - f_{n1}(t)|\, dt,$$

$$I_1^{(3)} = \int_{b\varepsilon(n)^{v-1} \leqslant |t| \leqslant b\varepsilon(n)^{-1}} |t|^{-1} |f_{n2}(t)|\, dt,$$

$$I_1^{(4)} = \int_{b\varepsilon(n)^{v-1} \leqslant |t| \leqslant b\varepsilon(n)^{-1}} |t|^{-1} |f_{n3}(t)|\, dt,$$

где v далее будет выбрано. Из (2) следует, что

$$I_1 \leqslant \sum_{k \leqslant 4} I_1^{(k)} + C(A, B, F)\,\varepsilon(n). \qquad (3)$$

Оценка $I_1^{(4)} \leqslant C(F, A, B)\,\varepsilon(n)$ сразу следует из леммы 2.14.

Лемма 1. *Для любого подмножества* $N \subseteq N(\delta, n) \setminus N^*$

$$\sigma_n(N) \leqslant (1 + 4\delta^{-1}\sqrt{2})\,\varepsilon(n).$$

Доказательство. Из определения N^* следует

$$\sigma_n(N)=\varepsilon(n)+\max_{i\in N}\frac{\sigma_{ni}^3}{\sigma_{ni}^2}\leqslant\min_{i\in N^*}\frac{\sqrt{2}\left(\mathbf{E}\|\xi'_{ni}\|^3+\mathbf{E}\|\xi_{ni}\|^2 I\left(\|\xi_{ni}\|>\frac{c^*}{\alpha}\right)\right)}{\sigma_{ni}^2}+$$

$$+\varepsilon(n)\leqslant\frac{\sqrt{2}\sum\limits_{i\in N^*}\left(\mathbf{E}\|\xi'_{ni}\|^3+\mathbf{E}\|\xi_{ni}\|^2 I(\ldots)\right)}{\sum\limits_{i\in N^*}\sigma_{ni}^2}+\varepsilon(n)\leqslant\left(1+4\sqrt{2}/\delta\right)\varepsilon(n);$$

здесь было использовано неравенство (2.23). Лемма доказана.

Лемма 2.

$$I_1^{(1)}\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)\,\varepsilon(n).$$

Доказательство. Методом композиции (операторный метод Линдеберга, см. доказательство леммы 2.11) получаем

$$|f_{n1}(t)-f_{n3}(t)|\leqslant\sum_{k\leqslant n}\{|\mathbf{E}\varphi_t^{(1)}(S_{nk})[\xi'_{nk}]|+$$

$$+\frac{1}{2}|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\xi'^2_{nk}]-\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\gamma_{nk}^2]|+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1(1-\theta)^2|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta\xi'_{nk})[\xi'^2_{nk}]|\,d\theta+\frac{1}{2}\int_0^1(1-\theta)^2|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta\gamma_{nk})[\gamma_{nk}^3]|d\theta, \tag{4}$$

где $\varphi_t(x)=\exp\{itF(x)\}$. С помощью (2.40) и лемм 1, 2.10, 2.11, где мы полагаем $\Delta_n(N)\sim|t|^{v_1-1}$, легко получаем при $|t|\leqslant(56QC_0(F))^{-1}\times\times\varepsilon(n)^{v-1}\cdot\delta$

$$|\mathbf{E}\varphi_t^{(1)}(S_{nk})[\xi'_{nk}]|=|E\varphi_t^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk}]|\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk}]\exp\{itF(S_{nk})\}\right||t|\leqslant$$

$$\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)|t|g(t)\,\mathbf{E}\|\xi_{nk}\|I(\|\xi_{nk}\|>c^*/\alpha),$$

где

$$g(t)=|t|^{-3v_1M/(2p)}+|t|^{v_1-(1-v_1)(3+\beta)}+\left(|t|^{21v_1}\varepsilon(n)^{7/2}\right)^{1/p},\qquad p\in(1,2).$$

Как и при доказательстве леммы 2.11 мы имеем

$$|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\xi'^2_{nk}]-\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\gamma_{nk}^2]|\leqslant2|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk},\xi_{nk}]|\leqslant$$

$$\leqslant2|t|\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(2)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk},\xi_{nk}]\exp\{itF(S_{nk})\}\right|+$$

$$+2t^2\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk}]F^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}]\exp\{itF(S_{nk})\}\right.$$

и с помощью (2.40) получаем

$$\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(2)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk},\xi_{nk}]\exp\{itF(S_{nk})\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)\left(g(t)+|t|^{-(1-v_1)(2+\beta)}\right)\mathbf{E}\|\xi_{nk}\|^2I(\|\xi_{nk}\|>c^*/\alpha),$$

$$\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_{\xi_{nk}}F^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}-\xi'_{nk}]F^{(1)}(S_{nk})[\xi_{nk}]\exp\{itF(S_{nk})\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C(F,A,B,\delta,Q))\,g(t)\,\mathbf{E}\|\xi_{nk}\|^2I(\|\xi_{nk}\|>c^*/\alpha).$$

Оценка $\varphi_t^{(3)}(\cdot)[\cdot]$ в (4) аналогична рассмотренной выше:

$$|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta\xi'_{nk})[\xi'^3_{nk}]|\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)|t|\left(g(t)+|t|^{-(1-v_1)(1+\beta)}\right)\mathbf{E}\|\xi'_{nk}\|^3,$$

$$|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta\gamma_{nk})[\gamma_{nk}^3]|\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)|t|\left(g(t)+|t|^{-(1-v_1)(1+\beta)}\right)\mathbf{E}\|\gamma_{nk}\|^3.$$

Заметим, что на основании (1.2) и леммы 2.4 имеет место следующее неравенство:

$$\mathbf{E}\|\gamma_{nk}\|^3 \leqslant C(A)\,\sigma_{nk}^3 \leqslant C_1(A)\left(\mathbf{E}\|\xi'_{nk}\|^3 + \mathbf{E}\|\xi_{nk}\|^2 I(\|\xi_{nk}\| > c^*/\alpha)\right).$$

Таким образом, если $|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}$ и $p = 16/15$, $v_1 = \min\left\{\frac{2\beta}{3(4+\beta)}, \frac{1}{15}\right\}$,

$$M > \frac{2p}{3v_1} = \max\left\{\frac{16(4+\beta)}{15\beta}, \frac{32}{3}\right\}, \tag{5}$$

то

$$|f_{n1}(t) - f_{n3}(t)| \leqslant C(F, A, B, \delta, Q)\,|t|^{-\mu}\varepsilon(n).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.

$$I_1^{(2)} \leqslant C(F, A, B, \delta, Q)\,\varepsilon(n).$$

Доказательство. Имеем

$$I_1^{(2)} = \int\limits_{|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}} |t|^{-1}\left|\mathbf{E}\exp\{itF(S_{n,n+1})\}\{\widehat{K}(t\widetilde{\mu}_n(S_n^0)) - 1\}\right| dt. \tag{6}$$

Используя формулу Тейлора для $\widehat{K}(\cdot)$

$$\widehat{K}(t\widetilde{\mu}_n(S_n^0)) = 1 + t\int_0^1 d\theta \int_R \exp\{i\theta u t\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\}\, u\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\, dK(u),$$

получаем из (6) с переменным теоремы Фубини

$$I_1^{(2)} \leqslant \int\limits_{|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}} dt \int_{\mathbf{R}} |u|\, dK(u) \times$$

$$\times \int_0^1 d\theta \left| \mathbf{E}_{\delta_{n,n+1}(N^0)} \exp\{it\{F(S_n^0 + \delta_{n,n+1}(N^0)) + \theta u\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\}\}\times\right.$$

$$\left.\times \widetilde{\mu}_n(S_n^0)\, I\left\{\mathbf{E}_{S_n^0, \nu}\left(F^{(1)}(S_n^0)[\delta_{n,n+1}(N^0)]\right)^2 > |t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2\right\}\right| +$$

$$+ C(F, A)\,\mathbf{E}^{1/26}\widetilde{\mu}_n(S_n^0)^{26} \int\limits_{|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}} \mathbf{P}^{25/26}\left(\mathbf{E}_{S_n^0, \nu}\left(F^{(1)}(S_n^0)[\delta_{n,n+1}(N^0)]\right)^2 \leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant |t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2\right). \tag{7}$$

Из леммы 2.16 следует

$$\|\widetilde{\mu}_n^{(k)}(x)\|^* \leqslant C(F, \delta)\,|t|^{kv_2}\varepsilon(n)\exp\{(2k+1)\alpha\|x\|\},$$

если только $\mathbf{E}_\nu\left(F^{(1)}(x)[\delta_{n,n+1}(N^0)]\right)^2 > |t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2$, где $k = 1, 2, 3$ (для $k = 3$ величина $\widetilde{\mu}_n^{(3)}(\cdot)$ обозначает постоянную в локальном условии Липшица). Следовательно, для любых фиксированных t, θ, u, y функции $\varepsilon(n)^{-1}\widetilde{\mu}_n(x)$ и $\psi_{\theta,u,y}(x) = F(x+y) - \theta u\widetilde{\mu}_n(x)$ принадлежат $\mathscr{C}(2, 1, 7\alpha)$ с константами типа $C(F, \delta)$ θ $|u|\,|t|^{3v_2}\exp\{\alpha\|y\|\}$. Поэтому в случае $|t| \leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}$ из леммы 2.11 получаем $(\widetilde{S}_n^0 = S_n^0 - \delta_{n,n+1}(N)$, $N \subseteq N(\delta, n)\setminus\{N^* \cup N^0\})$

$$J(t) \equiv \left|\mathbf{E}_{\delta_{n,n+1}(N^0)}\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\exp\left\{it\psi_{\theta,u,\delta_{n,n+1}(N^0)}(S_n^0)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times I\left\{\mathbf{E}_{S_n^0, \nu}\left(F^{(1)}(S_n^0)[\delta_{n,n+1}(N^0)]\right)^2 \leqslant |t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C(\cdot)\,\varepsilon(n)(1 + |u|^5)\,|t|^{3v_2}\exp\{\alpha\|\delta_{n,n+1}(N^0)\|\}\times$$

$$\times\left\{\max_{j\leqslant 12}\mathbf{E}^{1/p}_{\delta_{n,n+1}(N^0)}\exp\left\{-\frac{t^2}{3}\mathbf{E}_{\widetilde{S}^0_n,\nu}\left(\psi^{(1)}_{\theta,u,\delta_{n,n+1}(N^0)}\left(\widetilde{S}^0_n\right)[\delta_{n,n+1}(N_j)]\right)^2\right\}\times\right.$$

$$\times I\left\{\mathbf{E}_{S^0_n,\nu}\left(F^{(1)}\left(S^0_n\right)[\delta_{n,n+1}(N^0)]\right)^2\leqslant|t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2\right\}+|t|\,\Delta_n(N)^3+$$

$$\left.+|t|^5\,\Delta_n(N)^{10}\right\}\leqslant C(\cdot)\,\varepsilon(n)\,(1+|u|^5)\,|t|^{3v_2}\exp\{\alpha\,\|\delta_{n,n+1}(N^0)\|\}\times$$

$$\times\left\{\max_{j\leqslant 12}\mathbf{E}^{1/p}_{\delta_{n,n+1}(N^0)}\exp\left\{-\frac{t^2}{3}\mathbf{E}_{\widetilde{S}^0_n,\nu}\left(F^{(1)}\left(\widetilde{S}^0_n\right)[\delta_{n,n+1}(N_j)+\delta_{n,n+1}(N^0)]\right)^2\right\}+\right.$$

$$\left.+|t|\,\Delta_n(N)^3+\left(|t|^{1+v_2}\Delta_n(N)\,\varepsilon(n)\right)^{2/p}+|t|^5\,\Delta_n(N)^{10}\right\}. \tag{8}$$

Так как

$$\mathbf{E}_{\widetilde{S}^0_n,\nu,\delta_{n,n+1}(N^0)}\left(F^{(1)}\left(\widetilde{S}^0_n\right)[\delta_{n,n+1}(N_j)+\delta_{n,n+1}(N^0)]\right)^2\geqslant$$

$$\geqslant\mathbf{E}_{\widetilde{S}^0_n,\nu}\left(F^{(1)}\left(\widetilde{S}^0_n\right)[\delta_{n,n+1}(N_j)]\right)^2,$$

то, полагая $\Delta_n(N)\sim|t|^{v_3-1}$, окончательно получаем из (8)

$$J(t)\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)\,\varepsilon(n)\,(1+|u|^5)\,|t|^{3v_2}\exp\{\alpha\,\|\delta_{n,n+1}(N^0)\|\}\times$$

$$\times\left\{|t|^{-3v_3M/2p}+|t|^{3v_3-2}+\left(|t|^{v_2+v_3}\varepsilon(n)\right)^{2/p}\right\},$$

где M удовлетворяет условию (5) и, кроме того,

$$\begin{gathered}5v_2+2v_3\leqslant(1+v)(1-v)^{-1},\\ v_2+v_3<1/3,\\ 3v_3M/2p-3v_2>1.\end{gathered} \tag{9}$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части (8) оценивается величиной $C(A,\ B,\ F,\ \delta,\ Q)\,\varepsilon(n)$. Для оценки второго слагаемого воспользуемся леммами 2.15 и 1

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{E}_{S^0_n,\nu}\left(F^{(1)}\left(S^0_n\right)[\sigma_{n,n+1}(N^0)]\right)^2\leqslant|t|^{-v_2}\Delta_n(N^0)^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant C(F,A,B,\delta,a,Q)\left\{|t|^{-3v_2M/4}+\varepsilon(n)^{3(2v_3-a)M/4}+\varepsilon(n)^{7/2}+|t|^{-9(1-v_3)/2}\right\}|t|^{12v_2}. \tag{10}$$

Положим $v_2=1/6$, $v_3=5v=1/10$, $a=1/10$, $p=16/15$, $M\geqslant 25$. Тогда выполнены соотношения (9) и, кроме того,

$$3v_2M/4-12v_2\geqslant 25/24,\quad 3(2v_3-a)\,M/4-12v_2\geqslant 5/4. \tag{11}$$

Утверждение леммы следует из (6)—(11). Отметим, что для оценки второго слагаемого правой части (7) мы должны предполагать в (2.1), что $c^*\leqslant 1/52$ (для того чтобы существовали соответствующие экспоненциальные моменты с. в. $\|S_{nk}\|$).

Лемма 4.

$$I^{(3)}\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)\,\varepsilon(n).$$

Доказательство. Из определения функции $\widehat{K}(t)$ следует

$$I^{(3)}_1=\int\limits_{b\varepsilon(n)^{v-1}\leqslant|t|\leqslant b\varepsilon(n)^{-1}}|t|^{-1}\left|\mathbf{E}\exp\{itF(S_{n,n+1})\}\,\widehat{K}\left(t\widetilde{\mu}_n\left(S^0_n\right)\right)\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}\int\limits_{\substack{b\varepsilon(n)^{-0,98}\leqslant|t|\leqslant b\varepsilon(n)^{-1}\\ |t|\widetilde{\mu}_n\left(S^0_n\right)\leqslant 1/4}}|t|^{-1}\int\limits_{R}dK(u)\left|\mathbf{E}_{S^0_n}\exp\{itF(S_{n,n+1})\}\right|dt.$$

На основании лемм 2.7—2.12 имеем для $|t|\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\leqslant 1/4$

$$\left|\mathbf{E}_{S_n^0}\exp\{itF(S_{n,n+1})\}\right|\leqslant C(F,A,B,\delta,Q)\exp\{5\alpha\|S_n^0\|\}\times$$
$$\times\{|t|\,\Delta_n(N^0)^4+|t|^5\,\Delta_n(N^0)^{10}+\left(\Delta_n(N^0)\,\varepsilon(n)^{-0,98}\right)^{-3M/2p}+$$
$$+(t^2\Delta_n(N^0)^3)^6+(\varepsilon(n)\,t^6\Delta_n(N^0)^6)^{7/2p}.$$

Полагая $\Delta_n(N^0)=\varepsilon(n)^{0,94}$, $M\geqslant 25$, $p=16/15$, легко получаем утверждение леммы.

Далее, оценим I_2. Обозначим $r(u)=\max\{1,\ |u|\}$. Почти дословно повторяя доказательство соответствующего утверждения из [3], получаем

$$I_2\leqslant\sup_{z\in\mathbf{R}}\mathbf{P}\left(|F(S_{n,n+1})-z|\leqslant r(\tau)\,\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\right)=\sup_{z\in\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\mathbf{P}\left(|F(S_{n,n+1})-z|\leqslant\right.$$
$$\left.\leqslant r(u)\,\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\right)dK(u)\leqslant C\sup_{z\in\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}K\left(\frac{F(S_{n,n+1})-z}{r(u)\,\widetilde{\mu}_n(S_n^0)}\right)dK(u)=$$
$$=C_1\sup_{z\in\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}dK(u)\,\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}}\exp\left\{-\frac{it(F(S_{n,n+1})-z)}{r(u)\,\widetilde{\mu}_n(S_n^0)}\right\}\widehat{K}(t)\,dt=$$
$$=C_1\sup_{z\in\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}dK(u)\,\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}}\exp\{-iy(F(S_{n,n+1})-z)\}\widehat{K}\left(r(u)\,y\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\right)r(u)\,\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\times$$
$$\times dy\leqslant C_1\sup_{z\in\mathbf{R}}\left|\mathbf{E}\iiint\limits_{r(u)|y|\,\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\leqslant 1/4}r(u)\,dy\,dK(u)\,dK(s)\,\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\times\right.$$
$$\left.\times\exp\{-iyF(S_{n,n+1})+r(u)\,sy\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\}\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_1\left\{\iiint\limits_{|y|\leqslant b\varepsilon(n)^{v-1}}r(u)\,dy\,dK(u)\,dK(s)\left|E\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\exp\{\cdots\}\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\mathbf{E}\iiint\limits_{|y|\,\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\leqslant 1/4,\,|y|>b\varepsilon(n)^{v-1}}r(u)\,dy\,dK(u)\,dK(s)\,\widetilde{\mu}_n(S_n^0)\exp\{\ldots\}\right|\right\}. \qquad (12)$$

Оценка типа $C(A,\ B,\ F,\ \delta,\ Q)\,\varepsilon(n)$ для каждого из двух интегралов в правой части (12), по существу, содержится в леммах 3 и 4.

Теорема доказана.

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРИНЦИПУ ИНВАРИАНТНОСТИ ДОНСКЕРА — ПРОХОРОВА

Доказательство теоремы 2. Введем в рассмотрение следующие с. э. в пространстве $L_2([0,\ 1],\ \lambda)$:

$$\gamma_{n,k}\equiv\gamma_{n,k}(t)=(W(t_{n,k})-W(t_{n,k-1}))\,I_{t_{n,k}}(t),$$
$$w_{n,k}\equiv w_{n,k}(t)=W((t\vee t_{n,k-1})\wedge t_{n,k})-W(t_{n,k-1}),$$
$$w_{n,k}^0\equiv w_{n,k}^0(t)=(W(t)-W(t_{n,k-1}))\left(I_{t_{n,k-1}}(t)-I_{t_{n,k}}(t)\right),$$

где, как и прежде, $I_z(t)=1$ при $t\geqslant z$, $I_z(t)=0$ в противном случае; $W(t)$ — стандартный винеровский процесс на $[0,\ 1]$. Очевидно, $W(t)=\sum\limits_{i\leqslant n}w_{ni}(t)$. Положим $W_n(t)=\sum\limits_{i\leqslant n}\gamma_{ni}(t)$. Тогда легко видеть, что

$$W(t)-W_n(t)=\sum_{i\leqslant n}w_{ni}^0(t).$$

Предположим сначала, что выполнено условие (1.5). Применительно к нашей схеме соотношение (1.5) имеет вид

$$\sup_{z>0} z^{-M}\mathbf{P}\left(\sum_{i\in N}(\mathbf{D}\bar{\xi}_{ni})\left(F^{(1)}(W_n)[I_{t_{ni}}]\right)^2 < z\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\right)\leqslant B \tag{1}$$

равномерно по всем подмножествам $N\subseteq N(\delta, n)$, удовлетворяющим условию

$$\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2\geqslant L_{ns}, \tag{2}$$

где с. в. $\{\bar{\xi}_{ni}\}$ определены так же, как и в (1.5). Несколько позже будет показано, что условие (1.11) влечет за собой (1). Отметим также, что в условиях теоремы 2 имеет место неравенство $\varepsilon(n)\leqslant 2L_{ns}\lambda^s([0, 1])$. Так что, если выполнены (1) и (2), то в качестве следствия теоремы 1 получаем оценку

$$d_F(S_n, W_n)\leqslant C(F, \lambda)L_{ns}, \tag{3}$$

при этом, правда, необходимо иметь в виду, что в норме пространства $L_2([0, 1], \lambda)$ для с. э. $\{X_{ni}\}$ и $\{Y_{ni}\}$ в (1.8), вообще говоря, не выполнено условие нормировки:

$$\sum_{i\leqslant n}\sigma_{ni}^2=\sum_{i\leqslant n}\lambda([t_{ni}, 1])\,\mathbf{E}\xi_{ni}^2\neq\ . \tag{4}$$

Однако при получении (3) важно, чтобы равномерно по всем n

$$C_1\leqslant\sum_{i\leqslant n}\sigma_{ni}^2\leqslant C_2, \tag{5}$$

что как раз и имеет место в (4). При выполнении (5) задача легко сводится к уже рассмотренной заменой функционала $F(x)$ на $F_n(x)\equiv\equiv F\left(x\left(\sum_{i\leqslant n}\sigma_{ni}^2\right)^{1/2}\right)$, причем $F_n\in\mathscr{C}(m, \beta, \alpha)$ равномерно по всем n, а константы вида $C(F, \cdot)$ в теореме 1 зависят от F только через постоянные α и $C_0(F)$ в (1.1). Приведенное замечание в равной степени относится и к принципу инвариантности для эмпирических полей (см. § 1).

Таким образом, для доказательства теоремы 2 необходимо оценить величину $d_F(W_n, W)$. Эта задача во многом схожа с уже рассмотренной в § 2, и ее решение в значительной степени повторяет ход доказательства теоремы 1. Однако рассуждения при этом сильно упрощаются, поскольку в рассмотрении участвуют лишь гауссовские с. э.

Из формулы Берри (см. [17]) и леммы 2.14 следует

$$\begin{aligned}d_F(W_n, W)&\leqslant C\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon(n)^{-1}}|t|^{-1}|f_n(t)-f(t)|\,dt+C\varepsilon(n)\leqslant\\&\leqslant C\int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon(n)^{v-1}}|t|^{-1}|f_n(t)-f(t)|\,dt+C\int\limits_{\varepsilon(n)^{v-1}\leqslant|t|\leqslant\varepsilon(n)^{-1}}|f_n(t)||t|^{-1}\,dt+\\&\quad+C\int\limits_{\varepsilon(n)^{v-1}\leqslant|t|\leqslant\varepsilon(n)^{-1}}|f(t)||t|^{-1}\,dt+C\varepsilon(n),\end{aligned} \tag{6}$$

где $f_n(t)$ и $f(t)$ — характеристические функции с. в. $F(W_n)$ и $F(W)$ соответственно, $\varepsilon(n)$ введено в (1.4). Так же как и при доказательстве теоремы 1, воспользуемся методом композиций для оценки величины $|f_n(t)-f(t)|$. Аналогично выводу (3.4) получаем

$$\begin{aligned}|f_n(t)-f(t)|&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k\leqslant n}\left|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[Y_{nk}^2]-\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk}^2]\right|+\\&+\frac{1}{2}\sum_{k\leqslant n}\left\{\int_0^1(1-\theta)^2\left|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta Y_{nk})[Y_{nk}^3]\right|d\theta+\right.\\&\left.+\int_0^1(1-\theta)^2\left|\mathbf{E}\varphi_t^{(3)}(S_{nk}+\theta w_{nk})[w_{nk}^3]\right|d\theta\right\},\end{aligned} \tag{7}$$

где $S_{nk} = \sum_{j<k} w_{nj} + \sum_{j>k} Y_{nj}$, $\varphi_t(x) = \exp\{itF(x)\}$. Здесь использованы соотношения

$$\mathbf{E}\varphi_t^{(1)}(S_{nk})[Y_{nk}] = \mathbf{E}\varphi_t^{(1)}(S_{nk})[w_{nk}] = 0.$$

Для оценки первой суммы правой части (7) прежде всего отметим, что $w_{nk} = Y_{nk} + w_{nk}^0$. Поэтому

$$|\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk}^2] - \mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[Y_{nk}^2]| \leqslant |\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk}^2] -$$
$$- \mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk}, Y_{nk}]| + |\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[Y_{nk}^2] - \mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk}, Y_{nk}]| =$$
$$= |\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk}, w_{nk}^0]| + |\mathbf{E}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[w_{nk}^0, Y_{nk}]|. \tag{8}$$

Анализ $\mathbf{E}_{w_{nk}}\varphi_t^{(2)}(S_{nk})[\cdot]$ проводится по схеме доказательства леммы 2.14. Причем необходимо иметь в виду следующую оценку показателя экспоненты в (1.41):

$$t^2\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)\left[\sum_{k\in N} w_{nk}\right]\right)^2 \geqslant \frac{t^2}{2}\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)\left[\sum_{k\in N} Y_{nk}\right]\right)^2 - t^2\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)\left[\sum_{k\in N} w_{nk}^0\right]\right)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{t^2}{2}\mathbf{E}\left(F^{(1)}(x)\left[\sum_{k\in N} Y_{nk}\right]\right)^2 - t^2\|F^{(1)}(x)\|^{*2}\sum_{k\in N}\mathbf{E}\|w_{nk}^0\|^2 \equiv$$
$$\equiv \frac{t^2}{2}\sum_{k\in N}\sigma_{nk}^2\left(F^{(1)}(x)[I_{t_{nk}}]\right)^2 - R(x,t). \tag{9}$$

Здесь использовано элементарное неравенство $(x+y)^2 \geqslant x^2/2 - y^2$, а символом $\|\cdot\|$ обозначается обычная норма в $L_2([0,1]\ \lambda)$. Тогда при $N \cap N^* = \varnothing$ (см. лемму 3.1), $\|x\| \leqslant \frac{v}{2\alpha}|\log\varepsilon(n)|$ и $|t| \leqslant \varepsilon(n)^{v-1}$ имеем

$$R(x,t) \leqslant C_0^2(F)\,t^2\exp\{2\alpha\|x\|\}\sum_{k\in N}\sigma_{nk}^2\lambda((t_{n,k-1}, t_{nk}]) \leqslant$$
$$\leqslant C_0^2(F)\,\varepsilon(n)^{v-2}\lambda([0,1])\max_{k\in N}\sigma_{nk}^2 \leqslant C(F)\,\delta^{-1}\varepsilon(n)^v\lambda([0,1]). \tag{10}$$

Далее используем срезки с. в. $\|S_{nk}\|$ так же, как и при доказательстве леммы 2. Это позволяет свести оценки соответствующих характеристических функций к оценке величины

$$\mathbf{E}\exp\left\{-Ct^2\sum_{l\in N}\sigma_{nl}^2\left(F^{(1)}(S_{nk})[t_{nl}]\right)^2\right\},$$

что уже, по существу, проделано в леммах 2.9—2.14. Опуская малосущественные детали, так или иначе обсуждавшиеся в процессе доказательства теоремы 1, получаем из (7)—(10) в зоне $|t| \leqslant \varepsilon(n)^{v-1}$

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant C(F, B)|t|^{-v_0}\left\{\sum_{k\leqslant n}(\mathbf{E}\|w_{nk}^0\|^2\,\mathbf{E}\|w_{nk}\|^2)^{1/2} + \sum_{k\leqslant n}\mathbf{E}\|w_{nk}\|^3\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_1(F, B, \lambda)|t|^{-v_0}\left\{\sum_{k\leqslant n}\sigma_{nk}^2(\lambda((t_{n,k-1}, t_{nk}]))^{1/2} + \sum_{k\leqslant n}\sigma_{nk}^3\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_1(F, B, \lambda)|t|^{-v_0}(\delta(n) + L_{ns}). \tag{11}$$

Оценка вида $C(\cdot)\varepsilon(n)$ второго интеграла правой части (6), по существу, содержится в лемме 2.14. Последнее слагаемое в (6) оценивается почти так же, за исключением оценки подынтегральных функций вида

$$\psi(t) = \mathbf{E}\exp\left\{-Ct^2\mathbf{E}\left(F^{(1)}(\cdot)\left[\sum_{k\in N} w_{nk}\right]\right)^2\right\},$$

где с. э. w_{nk} так же, как и в (9), необходимо заменить на с. э. Y_{nk} для того, чтобы можно было воспользоваться условием (1). Прежде отметим, что

$$\sup_{\varepsilon(n)^{v-1}\leqslant|t|<\varepsilon(n)^{-1}} \psi_1(t) \leqslant \mathbf{E}\exp\left\{-C\varepsilon(n)^{2(v-1)}\mathbf{E}\left(F^{(1)}(\cdot)\left[\sum_{k\in N} w_{nk}\right]\right)^2\right\},$$

а затем применим неравенство (9), в котором полагаем $t=\varepsilon(n)^{v-1}$. Тем самым задача практически будет сведена к уже рассмотренной (см. доказательство леммы 2.14).

Далее отметим, что утверждение леммы 2.11 в условиях теоремы 2 останется в силе, если вместо с. п. $W_n(t)$ подставить $W(t)$, а вместо $\varepsilon(n)$ — величину $\varepsilon_0(n)=\varepsilon(n)+\sum\limits_{k\leqslant n}\sigma_{nk}^2(\lambda((t_{nk-1},t_{nk}]))^{1/2}$ (см. вывод (11)). Так что условие (1) в этом случае можно заменить требованием

$$\sup_{z>0} z^{-M}\mathbf{P}\left\{\sum_{k\in N}(\mathbf{D}\bar{\xi}_{ni})\left(F^{(1)}(W)[I_{t_{nk}}]\right)^2<\Delta_n^2(N)z\right\}\leqslant B \tag{12}$$

для любого $N\subseteq N(\delta,n)$. Так же как и при доказательстве основной теоремы, считаем, что $N\cap N^*=\varnothing$ (N^* определено в § 3). Поэтому с помощью леммы 2.8 получаем для любого $k\in N(\delta,n)$

$$\sigma_{ni}^{-2}(\mathbf{E}|\xi'_{ni}|^3+\mathbf{E}\{\xi_{ni}^2I(|\xi_{ni}|>c^*/\alpha)\})\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{i\in N^*}\sigma_{ni}^2\right)^{-1}\sum_{i\in N^*}(\mathbf{E}|\xi'_{ni}|^3+\mathbf{E}\{\xi_{ni}^2I(|\xi_{ni}|>c^*/\alpha)\})\leqslant\frac{4}{\delta}\varepsilon(n).$$

Иными словами, для любого $i\in N(\delta,n)$

$$\frac{\mathbf{E}|\xi'_{ni}|^3}{\varepsilon(n)}\leqslant\frac{4}{\delta}\sigma_{ni}^2. \tag{13}$$

Отсюда следует нижняя оценка

$$\mathbf{D}\bar{\xi}_{ni}=\mathbf{E}(\xi_{ni}^{(1)})^2-(\mathbf{E}\xi_{ni}^{(1)})^2=p^{-1}\mathbf{E}(\xi'_{ni})^2I(|\xi'_{ni}|\leqslant$$
$$\leqslant Q\hat{\sigma}_{ni})-p^{-2}(\mathbf{E}\xi'_{ni}I(|\xi'_{ni}|\leqslant Q\hat{\sigma}_{ni}))^2\geqslant p^{-1}\mathbf{E}(\xi'_{ni})^2-p^{-1}(Q\varepsilon(n))^{-1}\mathbf{E}|\xi'_{ni}|^3-$$
$$-2p^{-2}\{(\mathbf{E}\xi_{ni}I(|\xi_{ni}|>c^*/\alpha))^2+(\mathbf{E}\xi'_{ni}I(|\xi'_{ni}|>Q\hat{\sigma}_{ni}))^2\}\geqslant p^{-1}\sigma_{ni}^2-$$
$$-p^{-1}\mathbf{E}\xi_{ni}I(|\xi_{ni}|>c^*/\alpha)-p^{-1}(Q\varepsilon(n))^{-1}\mathbf{E}|\xi'_{ni}|-$$
$$-2p^{-2}\{\alpha^2\sigma_{ni}^4(c^*)^{-2}+(Q\varepsilon(n))^{-1}\mathbf{E}|\xi'_{ni}|^3\}, \tag{14}$$

где $p=\mathbf{P}(|\xi_{ni}|\leqslant Q\hat{\sigma}_{ni})\geqslant 3/4$ (см. § 2).

Таким образом, из (13) и (14) получаем для достаточно большого Q и любого $N\subseteq N(\delta,n)$, удовлетворяющего неравенству $\Delta_n^2(N)\geqslant\varepsilon(n)$, выполнено

$$\sum_{i\in N}\mathbf{D}\bar{\xi}_{ni}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i\in N}\sigma_{ni}^2=\frac{1}{2}\Delta_n^2(N).$$

Так что условие (1.11) для $N\subseteq N(\delta,n)$ и $\Delta_n^2(N)\geqslant\varepsilon(n)$, влечет за собой (12). Теорема 2 доказана.

Теперь приведем пояснения к условию (1.14). Прежде всего отметим, что если требовать выполнение (1.5) не для всех $N\subseteq N(\delta,n)$, удовлетворяющих (1.4), а лишь для конкретного набора подмножеств $N_{nk}\subseteq N(\delta,n)$; $k\leqslant\operatorname{Card}(N(\delta,n))$, где N_{nk} — некоторое k-элементное подмножество $N(\delta,n)$, удовлетворяющее неравенству $\Delta_n(N_{nk})\geqslant C\varepsilon(n)$, то, как следует из доказательства теоремы 1 (см. леммы 2.7—2.16), оценка для величины $d_F(\cdot)$ в (1.6) будет иметь вид $C(\cdot)\left(\varepsilon(n)+\max\limits_{k\in N(\delta,n)}\sigma_{nk}\right)$. Эта оценка, вообще говоря, слабее (1.6). Однако при выполнении (1.3) она, по существу, совпадает с оценкой Берри — Эссеена. Кроме того, в этом случае $t_{nk}=k/n$, $\mathbf{D}\bar{\xi}_{ni}\geqslant C/n$. Поэтому под знаком вероятности в (12) на самом деле будет стоять сумма вида

$$\sum_{k\in N_{ni}} \frac{1}{n}\left(F^{(1)}(W)\,[I_{k/n}]\right)^2.$$

Легко проверить, что в этом случае (1.5) будет следовать из (1.14).

Доказательство теоремы 3, по существу, содержится в [8], где рассмотрен случай линейного непрерывного функционала

$$F(X)=X(1/2). \tag{15}$$

Будем предполагать, что F задан на $L_2([0,\ 1],\ \delta_{1/2})$, где $\delta_{1/2}(A)=I(1/2\in A)$. Очевидно, $F\in\mathscr{C}(m,\ \alpha,\ \beta)$ при любом m. Правда, необходимо отметить, что в [8] рассматриваются только непрерывные ломаные $S_n(t)$. Но в [8] все останется в силе и для ломаных (1.10). Поскольку для функционалов вида (15) справедливо соотношение $F^{(1)}(X)[h]\equiv F(h)$, то

$$\inf_{t\in[0,1/4]} |F^{(1)}(X)\,[I_t]|\equiv 1,$$

т. е. условие (1.11) выполнено. Стало быть, имеет место оценка (1.12). Для специально подобранной в [8] последовательности серий $\{\xi_{ni}\}$ имеем

$$\delta(n)\leqslant \max_{i\leqslant n}\sigma_{ni}^2\leqslant L_{ns}^{2/s},\quad s\in(2,3].$$

Такой же порядок имеет и нижняя оценка для $d_F(S_n,\ W)$ (см. [8]).

§ 5. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ОТ НУЛЯ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Сначала покажем, что условие (1.9) обеспечивает выполнение (1.5) в принципе инвариантности для эмпирических мер. В самом деле, для интегральных функционалов

$$F(X)=\int_0^1\int_{R^k} f(X(t,\bar z),t,\bar z)\,\lambda(dt,d\bar z),\quad t\in[0,1],\ \bar z\in\mathbf{R}^k, \tag{1}$$

k-я производная Фреше в пространстве $L_2([0,\ 1]\times\mathbf{R}^k,\ \lambda)$ имеет вид

$$F^{(k)}(X)\,[h_1,\ldots,h_k]=\int_0^1\int_{\mathbf{R}^k}\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(X(t,\bar z),t,\bar z)\prod_{j\leqslant k}h(t,\bar z)\,\lambda(dt,d\bar z). \tag{2}$$

Так что если $f(x,\ t,\ \bar z)$, $x\in\mathbf{R}$, удовлетворяет по x условиям (1.1) (равномерно по $t,\ \bar z$), то легко видеть, что и $F(X)$ будет удовлетворять аналогичным требованиям. Далее, так как в рассматриваемом случае $\xi_{ni}(\bar z)=\{I(\zeta_{11}<z_1,\ \ldots,\ \zeta_{1k}<z_k)-G(z_1,\ \ldots,\ z_k)\}I_{i/n}(t)n^{-1/2}$ (здесь $G(\cdot)$ — функция распределения вектора $(\zeta_{11},\ \ldots,\ \zeta_{1k})$), то срезки $\bar\xi_{ni}(\cdot)$ в (1.5) при достаточно большом Q совпадут с $\xi_{ni}(\cdot)$. Учитывая это, а также (2) и (1.9), получаем

$$\sum_{i\leqslant m}\mathbf{E}_{W_n^{(k)}}\left(F^{(1)}(W_n^{(k)})\,[\xi_{ni}]\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i\leqslant m}\int_{i/n}^1\int_{i/n}^1\int_{\mathbf{R}^k}\int_{\mathbf{R}^k}\frac{\partial}{\partial x}f(W_n^{(k)}(t,\bar z),t,\bar z)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}f(W_n^{(k)}(t',\bar z'),t',\bar z')\mathbf{E}\xi_{ni}(\bar z)\,\xi_{ni}(\bar z')\,\lambda(dt,d\bar z)\,\lambda(dt',d\bar z')=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i\leqslant m}\int_{i/n}^1\int_{i/n}^1\int_{\mathbf{R}^k}\int_{\mathbf{R}^k}\frac{\partial}{\partial x}f(W_n^{(k)}(t,\bar z),t,\bar z)\frac{\partial}{\partial x}f(W_n^{(k)}(t',\bar z'),t',\bar z')\times$$

$$(G(\min\{\bar z, \bar z'\}) - G(\bar z) G(\bar z'))\lambda(dt, d\bar z)\lambda(dt', d\bar z') \geqslant \frac{m}{n} \int\limits_{m/n}^{1}\int\limits_{m/n}^{1} \iint\limits_{\substack{\bar a \leqslant \bar z \leqslant \bar b \\ \bar a \leqslant \bar z' \leqslant \bar b}} g(t, \bar z) \times$$

$$\times g(t', \bar z')(G(\min\{\bar z, \bar z'\}) - G(\bar z) G(\bar z'))\lambda(dt, d\bar z)\lambda(dt', d\bar z') \leqslant C(\cdot)\, m/n, \tag{3}$$

если только $m \leqslant n/2$. Таким образом, условие (1.5) (ослабленный вариант) выполнено (см. пояснения в § 4 к условию (1.14)). Принимая во внимание конкретный вид $\xi_{ni}(\cdot)$, из теоремы 1 получаем

$$d_F(S_n^{(k)}, W_n^{(k)}) \leqslant C(f, k, \lambda)\, n^{-1/2}. \tag{4}$$

Рассмотрим отдельно случай, когда $k = 1$ и $G(z) \equiv z$ — функция равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$. В этом случае гауссовское поле $W_n^{(1)}(t, z)$ (поле Кифера) имеет ковариацию

$$\mathbf{E} W_n^{(1)}(t, z)\, W_n^{(1)}(t', z') = \min\left\{\frac{[nt]}{n}, \frac{[nt']}{n}\right\}\{\min\{z, z'\} - zz'\}, \tag{5}$$

при $t, t', z, z' \in [0, 1]$, и может быть представлено в виде

$$W_n^{(1)}(t, z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leqslant nt} W_i^0(z), \tag{6}$$

где $\{W_i^0(\cdot), i \geqslant 1\}$ — независимые «броуновские мосты», т. е. центрированные гауссовские процессы с ковариацией

$$\mathbf{E} W_i^0(z)\, W_i^0(z') = \min\{z, z'\} - zz'.$$

Предположим, что мера $\lambda(\cdot)$ в (1) абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в $\mathbf{R}^2$ и

$$\inf_{\substack{0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 \leqslant z \leqslant 1}} \frac{\lambda(dt, dz)}{dt\, dz} = \nu > 0, \tag{7}$$

а функция $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t, z)$ неотрицательна и, кроме того, удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, t, z) \geqslant C |x|^r \tag{8}$$

при всех $t \in [0, \delta]$, $x, z \in [-\delta, \delta]$ и некоторых $C, r > 0$, $\delta \in (0, 1/2)$ (или сформулированное условие имеет место для функции $-f$).

Лемма 1. *При выполнении* (7) *и* (8) *имеет место ослабленный вариант условия* (1.5), *и, стало быть, справедлива оценка* (4).

Доказательство. Аналогично (3) получаем для любого $m \leqslant n\delta/2$

$$D \equiv \sum_{i \leqslant m} \mathbf{E}_{W_n^{(1)}} (F^{(1)}(W_n^{(1)})[\xi_{ni}])^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i \leqslant m} \int\limits_{i/n}^{1}\int\limits_{i/n}^{1}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1} \frac{\partial}{\partial x} f(W_n^{(1)}(t, z), t, z) \frac{\partial}{\partial x} f(W_n^{(1)}(t', z'), t', z') \times$$

$$\times \lambda(dt, dz)\lambda(dt', dz')(\min\{z, z'\} - zz') \geqslant \frac{m\nu}{n} \int\limits_{\delta/2}^{\delta} dt \int\limits_{\delta/2}^{\delta} dt' \times$$

$$\times \int\limits_{0}^{1} dz \frac{\partial}{\partial x} f(\cdot)(1 - z) \int\limits_{0}^{z} dz' \frac{\partial}{\partial x} f(\cdot)\, z' \geqslant \frac{m\nu}{2n} \cdot y^\theta \int\limits_{\delta/2}^{\delta} dt \int\limits_{\delta/2}^{\delta} dt' \times$$

$$\times \int\limits_{2y^\theta}^{3y^\theta} \frac{\partial}{\partial x} f(W_n^{(1)}(t, z), t, z)\, dz \int\limits_{y^\theta}^{2y^\theta} \frac{\partial}{\partial x} f(W_n^{(1)}(t', z'), t', z')\, dz', \tag{9}$$

где $\theta > 0$, $y > 0$, $3y^\theta \leqslant \delta \leqslant 1/2$. Обозначим

$$\| W_n^{(1)} \|_{\delta, y} = \sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant \delta \\ 0 \leqslant z \leqslant 3y^\theta}} | W_n^{(1)}(t, z) |.$$

Очевидно,

$$\mathbf{P}(D < ym/n) \leqslant \mathbf{P}(D < ym/n, \| W_n^{(1)} \|_{\delta, y} \leqslant \delta) + \mathbf{P}(\| W_n^{(1)} \|_{\delta, y} > \delta). \tag{10}$$

Для оценки первого слагаемого правой части (10) прежде всего отметим, что в (8) без ограничения общности можно полагать $r \geqslant 2$. Далее, с помощью неравенства Гёльдера и теоремы Фубини получаем

$$\mathbf{P}(D < ym/n, \| W_n^{(1)} \|_{\delta, y} \leqslant \delta) \leqslant \mathbf{P}\left(\frac{C\nu}{2} \int_{\delta/2}^{\delta} dt \int_{2y^\theta}^{3y^\theta} | W_n^{(1)}(t, z) |^r dz < y^{1/2 - \theta} \right) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta} dt' \int_{y^\theta}^{2y^\theta} | W_n^{(1)}(t', z') |^r dz' < y^{1/2} \right) \leqslant \mathbf{P}\left(\left(\frac{C\nu}{2} \right)^{2/r} \left\{ \int_{\delta/2}^{\delta} dt \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int_{2y^\theta}^{3y^\theta} (W_n^{(1)}(t, z))^2 dz \right)^{r/2} \right\}^{2/r} < y^{2(1/2 - \theta)/r} \right) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\left\{ \int_{\delta/2}^{\delta} dt' \left(\int_{y^\theta}^{2y^\theta} (W_n^{(1)}(t', z'))^2 dz' \right\}^{1/r} < y^{1/r} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left(\left(\frac{C\nu}{2} \right)^{2/r} \int_{\delta/2}^{\delta} dt \int_{2y^\theta}^{3y^\theta} (W_n^{(1)}(t, z))^2 dz < y^{(1 - 2\theta)/r} \right) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta} dt' \int_{y^\theta}^{2y^\theta} (W_n^{(1)}(t', z'))^2 dz' < y^{1/r} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left(\left(\frac{C\nu}{2} \right)^{2/r} \int_{2y^\theta}^{3y^\theta} dz \left(\int_{\delta/2}^{\delta} W_n^{(1)}(t, z) dt \right)^2 < y^{(1 - 2\theta)/r} \right) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\int_{y^\theta}^{2y^\theta} dz' \left(\int_{\delta/2}^{\delta} W_n^{(1)}(t', z') dt' \right)^2 < y^{1/r} \right). \tag{11}$$

Дальнейшая оценка обеих вероятностей правой части (11) проводится однотипно, в силу чего ограничимся оценкой слагаемого

$$R = \mathbf{P}\left(\int_{y^\theta}^{2y^\theta} dz \left(\int_{\delta/2}^{\delta} W_n^{(1)}(t, z) dt \right)^2 < y^{1/r} \right).$$

Прежде всего отметим, что случайный процесс

$$\zeta_n(z) = \int_{\delta/2}^{\delta} W_n^{(1)}(t, z) dt, \quad z \in [0, 1],$$

совпадает по распределению с процессом $C(\delta, n) W^0(z)$, где $W^0(z)$ — броуновский мост,

$$C(\delta, n) = \left(\int_{\delta/2}^{\delta} \int_{\delta/2}^{\delta} \min\left\{ \frac{[nt]}{n}, \frac{[ns]}{n} \right\} dt ds \right)^{1/2}.$$

Это следует из равенства (см. (5))

$$\mathbf{E}\zeta_n(z)\zeta_{n'}(y) = (\min\{z, y\} - zy) \int\limits_{\delta/2}^{\delta}\int\limits_{\delta/2}^{\delta} \min\left\{\frac{[nt]}{n}, \frac{[ns]}{n}\right\} dtds.$$

Очевидно,

$$\inf_{n>(2\delta)^{-1}} C(\delta, n) = C_0(\delta) > 0.$$

Следовательно, при $n > (2\delta)^{-1}$

$$R \leqslant \mathbf{P}\left(\int\limits_{y^\theta}^{2y^\theta} (W^0(z))^2\, dz < C_0^{-2}(\delta)\, y^{1/r}\right). \tag{12}$$

В [18] показано, что для любого события A из σ-алгебры, порожденной траекториями процесса $W^0(t)$ за время от 0 до $1-v$, имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(W^0(\cdot) \in A) \leqslant v^{-1/2}\mathbf{P}(W(\cdot) \in A), \tag{13}$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. Стало быть, с учетом соотношения $y^\theta < 1/4$ из (12) и (13) следует

$$R \leqslant \sqrt{2}\,\mathbf{P}\left(\int\limits_{y^\theta}^{2y^\theta} W^2(z)\, dz < C_0^{-2}(\delta)\, y^{1/r}\right). \tag{14}$$

Для оценки правой части (14) нам понадобится известное разложение стандартного винеровского процесса $W(z)$ в ряд Фурье в пространстве $L_2([a, b], dt)$ (см. [19]):

$$W(z) = \sum_{k \geqslant 1} \lambda_k^{1/2} \gamma_k \varphi_k(z),$$

где $\{\gamma_k\}$ — независимые стандартные нормальные с. в., λ_k, φ_k — собственные числа и функции ковариационного оператора процесса $W(z)$, причем $\lambda_k > 0$. Отметим, что $\{\varphi_k(\cdot)\}$ образуют ортонормированный базис в $L_2([a, b], dt)$, в силу чего

$$\|W\|^2 \equiv \int\limits_a^b W^2(z)\, dz = \sum_{k \geqslant 1} \lambda_k \gamma_k^2. \tag{15}$$

Из (15) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство (по распределению)

$$\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} W^2(z)\, dz \stackrel{d}{=} \varepsilon^2 \sum_{k \geqslant 1} \lambda_k \gamma_k^2; \tag{16}$$

здесь был использован очевидный факт: $W(\varepsilon z) \stackrel{d}{=} \varepsilon^{1/2} W(z)$ (в смысле равенства конечномерных распределений).

Положим в (16) $a = 1$, $b = 2$, $\varepsilon = y^\theta$. Поскольку в (16) $\lambda_k > 0$, то из (14) окончательно получаем

$$R \leqslant \sqrt{2}\,\mathbf{P}\left(\sum_{k \geqslant 1} \lambda_k \gamma_k^2 < C_0^{-2}(\delta)\, y^{1/r - 2\theta}\right) = o\left(y^{(1/r - 2\theta)M}\right)$$

при $y \to 0$, где M — сколь угодно большое число. Остается только положить $\theta = (4r)^{-1}$.

Таким образом, первое слагаемое правой части (10) при $y \to 0$ убывает быстрее любой степени y.

Для оценки второго слагаемого в (10) воспользуемся сначала представлением (6) и неравенством Леви (см. [20]), в силу которого

$$\mathbf{P}\left(\|W_n^{(1)}\|_{\delta, y} > \delta\right) \leqslant 2\mathbf{P}\left(([n\delta]/n)^{1/2} \sup_{0 \leqslant z \leqslant 3y^\theta} |W^0(z)| > \delta\right);$$

здесь так же, как и в (12), было применено равенство

$$W_n^{(1)}\left(\frac{[n\delta]}{n}, z\right) = \left(\frac{[n\delta]}{n}\right)^{1/2} W^0(z).$$

Используя известные оценки (см. [19]) для распределения равномерной нормы случайного процесса $W^0(z)$ (или $W(z)$, см. (13)), окончательно получаем при $n > (2\delta)^{-1}$

$$\mathbf{P}(\|W_n^{(1)}\|_{\delta,y} > \delta) \leqslant C \exp\{-C_1\delta^2 y^{-\theta}\}, \tag{17}$$

что и требовалось показать. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь условие стохастической отделимости первой производной Фреше функционалов вида

$$F(x) = \int_0^1 f(x(t), t)\, dt \tag{18}$$

в классическом принципе инвариантности Донскера — Прохорова.

Лемма 2. *При выполнении условий*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \geqslant 0, \quad \inf_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \geqslant |x|^r \wedge b \tag{19}$$

при всех $x \in \mathbf{R}$, $t \in [0, 1]$ *и некоторых* b, $r > 0$, $\delta \in (0, 1/2)$, *для функционалов* (18) *выполнено* (1.11).

Доказательство. Для любого $y \in (0, 1)$ имеем

$$R \equiv \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{1} \frac{\partial}{\partial x} f(W(t), t)\, dt < y\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta(1+y^\theta)/2} \frac{\partial}{\partial x} f(W(t), t)\, dt < y\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta(1+y^\theta)/2} \frac{\partial}{\partial x} f(W(t), t)\, dt < y, |W(\delta/2)| \leqslant b/2, \right.$$

$$\left. \sup_{\delta/2 \leqslant t \leqslant \delta(1+y^\theta)/2} |W(t) - W(\delta/2)| \leqslant b/4\right) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta(1+y^\theta)/2} \frac{\partial}{\partial x} f(W(t), t) dt < y, |W(\delta/2)| > b/2, \right.$$

$$\left. \sup_{\delta/2 \leqslant t \leqslant \delta(1+y^\theta)/2} |W(t) - W(\delta/2)| \leqslant b/4\right) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\sup_{\delta/2 \leqslant t \leqslant \delta(1+y^\theta)/2} |W(t) - W(\delta/2)| > b/4\right). \tag{20}$$

Обозначим первое, второе и третье слагаемые правой части (20) соответственно R_1, R_2 и R_3. Аналогично (17) получаем

$$R_3 \leqslant C \exp\{-C_1(\delta y^\theta)^{-1}\}. \tag{21}$$

Далее, пусть $y \in (0, 1)$. Тогда в силу (19), а также (16) и неравенства Гёльдера

$$R_1 \leqslant \mathbf{P}\left(\int_{\delta/2}^{\delta(1+y^\theta)/2} W(t)^2\, dt < y^{1/r}\right) \leqslant C(M, r, \delta)\, y^M, \tag{22}$$

где M — сколь угодно большое число, $\theta = (2r)^{-1}$, $r \geqslant 2$ (без ограничения общности рассуждений);

$$R_2 \leqslant I(\delta y^\theta b^2/32 < y) \equiv 0 \tag{23}$$

при всех $y \leqslant (\delta b^2/32)^{\frac{1}{1-\theta}}$. Утверждение леммы следует из (2) и (20)—(23).

В заключение более подробно остановимся на замечании к теореме 1 в § 1. Рассмотрим в пространстве $L_2([0, 1], dt)$ следующую последовательность серий с. э. $\{\xi_{ni};\ i \leqslant n\}$:

$$\xi_{ni} \equiv \xi_{ni}(t) = \begin{cases} n^{-1/2}\zeta_i I_{i/2n}(t), & \text{если } n \text{ четное}, \\ n^{-1/2}\zeta_i I_{1/2+i/2n}(t) & \text{в противном случае}, \end{cases} \tag{24}$$

где по-прежнему $I_z(t) = 0$ или 1 соответственно при $t < z$ или $t \geqslant z$; $\{\zeta_i\}$ — независимые, одинаково распределенные с. в. с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным абсолютным третьим моментом. Через $\{\tau_{ni}\}$ определим по аналогии с (24) соответствующие гауссовские с. э. Очевидно, последовательность $\{\xi_{ni}\}$ не удовлетворяет в $L_2([0, 1], dt)$ центральной предельной теореме, поскольку подпоследовательности $\{\xi_{2n,i}\}$ и $\{\xi_{2n+1,i}\}$ при $n \to \infty$ слабо сходятся в $L_2(\cdot)$ к различным гауссовским процессам.

Теперь рассмотрим интегральный функционал

$$F(X) = \int_0^1 X(t)\,dt. \tag{25}$$

Как уже отмечалось, в этом случае $F^{(1)}(X)[h] \equiv F(h)$ и условие (1.5) с учетом (24) принимает вид

$$\sup_{z>0,\,n\geqslant 1} z^{-M} I\left\{(\operatorname{Card}(N))^{-1} \sum_{i\in N}\left\{1 - i/n - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2} I\{n \in \{2m-1;\ m = 1, 2, \ldots\}\}\right\}^2 < z\right\} \leqslant B$$

равномерно по всем $N \equiv N(\delta, n) \subseteq \{1, \ldots, n\}$, где $N(\cdot)$ удовлетворяет требованию $\operatorname{Card}(N(\cdot)) \sim \delta n$. Остается только положить $\delta = 1/4$, $N(\delta, n) = \{i:\ i \leqslant n/4\}$.

Таким образом, для последовательности серий с. э. (24) и функционала (25)

$$d_F(S_n, W_n) \leqslant C(\cdot) n^{-1/2},$$

несмотря на то что с. э. $\{\xi_{ni};\ i \leqslant n\}$ не удовлетворяют центральной предельной теореме в $L_2([0, 1], dt)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Araujo A., Gine E.** The central limit theorem for real and Banach valued random variables.— New York: John Wiley and Sons, Inc., 1980.— 233 p.
2. **Rhee W. S., Talagrand M.** Bad rates of convergence for central limit theorem in Hilbert Space // Ann. Probab.— 1984.— V. 12, N 3.— P. 843—850.
3. **Götze F.** On the rate of convergence in the central limit theorem in Banach spaces.— Cologne, 1981.— 33 p.— (Preprints in Statistics, N 68; University of Cologne).
4. **Götze F.** On the rate of convergence in the central limit theorem in Banach spaces // Ann. Probab.— 1986.— V. 14, N 3.— P. 922—942.
5. **Ульянов В. В.** Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин в гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— Т. 31, № 1.— С. 31—46.
6. **Нагаев С. В., Чеботарев В. И.** О зависимости оценки скорости сходимости к нормальному закону от ковариационного оператора. Случай неодинаково распределенных слагаемых // Там же.— 1983.— Т. 28, № 3.— С. 599—600.
7. **Дронов С. В., Саханенко А. И.** О скорости сходимости в многомерном принципе инвариантности для функционалов интегрального типа // Сиб. мат. журн.— 1987.— Т. 28, № 3.— С. 78—88.
8. **Борисов И. С.** О скорости сходимости распределений функционалов интегрального типа // Теория вероятностей и ее применения.— 1976.— Т. 21, № 2.— С. 283—299.
9. **Виноградова Т. Р.** О точности нормальной аппроксимации на множествах, определяемых гладкими функциями. I // Там же.— 1985.— Т. 30, № 2.— С. 219—229.

10. **Виноградова Т. Р.** О точности нормальной аппроксимации на множествах, определяемых гладкими функциями. II // Там же.— 1985.— Т. 30, № 3.— С. 554—557.
11. **Юринский В. В.** О точности нормального приближения вероятности попадания в шар // Там же.— 1982.— Т. 27, № 2.— С. 270—278.
12. **Пинелис И. Ф., Саханенко А. И.** Замечания о неравенствах для вероятностей больших уклонений // Там же.— 1985.— Т. 30, № 1.— С. 127—131.
13. **Пинелис И. Ф.** О распределении сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве // Там же.— 1978.— Т. 23, № 3.— С. 630—637.
14. **Tortra A.** Lois indéfinment divisibles ($\mu \in I$) dans un group topologique abelian metrisable. Cas des espaces vectoriels // C. r. Acad. Sci. Ser. A.— 1965.— V. 261, N 23.— P. 4973—4975.
15. **Rosinski J., Suchanecki Z.** On the space of vector-valued functions integrable with respect to the white noise // Colloq. Math.— 1980.— V. 43, N 1.— P. 183—201.
16. **Götze F.** On Edgeworth expansions in Banach spaces // Ann. Probab.— 1981.— V. 9, N 5.— P. 852—859.
17. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.— 414 с.
18. **Борисов И. С.** О скорости сходимости в «условном» принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применения.— 1978.— Т. 23, № 1.— С. 67—79.
19. **Скороход А. В.** Теория случайных процессов. Т. 1.— М.: Наука, 1971.— 664 с.
20. **Булдыгин В. В.** Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.— Киев: Наук. думка, 1980.— 240 с.

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

А. И. САХАНЕНКО

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\forall j \quad \mathbf{M}\xi_j = 0, \ \mathbf{D}\xi_j < \infty. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение случайную ломаную $S = S(t)$, полагая

$$S(t_n) = \sum_{j \leqslant n} \xi_j \quad \text{при} \quad t_n = \sum_{j \leqslant n} \mathbf{D}\xi_j \tag{2}$$

и доопределяя $S(t)$ монотонно на каждом из интервалов $[t_{n-1}, t_n]$. Другими словами,

$$S(t) = S(t_{k-1}) + \xi_k h_k(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \tag{3}$$

где в качестве $\{h_k(\cdot)\}$ можно брать любые монотонные функции, для которых верны неравенства

$$0 \leqslant h_k(t) \leqslant 1 \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k] \quad \forall k. \tag{4}$$

Тем самым S может быть как случайной ступенчатой функцией, когда $h_k(t) \equiv 0$, так и непрерывной случайной ломаной, если $h_k(t) = (t - t_{k-1})/\mathbf{D}\xi_k$ при $\mathbf{D}\xi_k > 0$.

Мы будем рассматривать $S = S(t)$ как случайный процесс, определенный при $t \leqslant T$, где

$$T = [0, \infty) \cap [0, B^2] \quad \text{при} \quad B^2 \equiv \sum \mathbf{D}\xi_j. \tag{5}$$

Нетрудно понять, что ввиду (2)—(4) траектории процесса S с вероятностью 1 принадлежат некоторому сепарабельному подпространству $\mathscr{R}(T)$ пространства всех функций, не имеющих разрывов второго рода. Здесь $\mathscr{R}(T)$ рассматривается как нормированное пространство с равномерной нормой

$$\|u\| = \sup_{t \in T} |u(t)| \quad \text{при} \quad u \in \mathscr{R}(T) \tag{6}$$

и соответствующей борелевской σ-алгеброй. Причем мы предполагаем, что $\mathscr{R}(T)$ содержит все непрерывные функции, так что с вероятностью 1 пространству $\mathscr{R}(t)$ принадлежат траектории стандартного винеровского процесса $W=W(t)$, определенного при $t\in T$.

В дальнейшем не исключается случай, когда $\xi_j=0$ при $j>n$, т. е. когда ломаная S построена по конечному числу случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$. В частности, условимся полагать $S=S_n$ в простейшем случае, когда $\xi_j\equiv 0$ при $j>n$ и $\xi_j=\zeta_j/n^{1/2}$ при $j=1, \ldots, n$, где $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{M}\zeta=0,\ \mathbf{D}\zeta=1 \quad \text{при} \quad \zeta=\zeta_1. \tag{7}$$

В частности, $T=[0, 1]$, если $S=S_n$.

Хорошо известно, что при естественных предположениях распределение в пространстве $\mathscr{R}(T)$ случайного процесса S близко к соответствующему распределению стандартного винеровского процесса W. Этот факт носит название принципа инвариантности Донскера — Прохорова или функциональной центральной предельной теоремы. (Точную формулировку можно найти, например, в [1, 2 или 3].)

Естественным образом возникает вопрос о точности в названном выше приближении, т. е. вопрос о скорости сходимости в принципе инвариантности. Этой проблеме посвящено большое количество статей, среди которых надо в первую очередь отметить работы Ю. В. Прохорова [1], А. В. Скорохода [4], А. А. Боровкова [5], Дж. Комлоша, П. Майора, Г. Тушнади [6].

Просматривая доказательства всех перечисленных выше результатов, можно заметить, что общим и самым трудным местом в этих доказательствах является решение следующей задачи: *требуется таким образом построить процессы S и W на одном вероятностном пространстве, чтобы вероятности вида*

$$\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant\varepsilon) \tag{8}$$

были бы как можно меньше при всех ε или при некотором специально выбранном $\varepsilon>0$. Другими словами, задача состоит в построении процесса W, близкого к S потраекторно, причем (см. [7]) всегда можно считать, что W является функцией лишь от S и некоторой случайной величины с равномерным распределением.

В таком виде поставленная задача систематически исследовалась в [6] при $S=S_n$ и в работах [8, 9] в общем случае. В § 2 и 3 настоящей статьи уточняются оценки для вероятностей вида (8), установленные в работах [8, 9]. Целью остальных параграфов работы является получение следствий из этих оценок в целом ряде направлений. Часть результатов работы впервые получена в [10].

Во всех доказываемых оценках для вероятностей вида (8) используются условия типа

$$\mathscr{L}(H)\equiv\sum\mathbf{M}H(\xi_j)<\infty, \tag{9}$$

причем рассматриваются только такие функции $H(\cdot)$, что

$$0<H(-x)/x^2=H(x)/x^2\uparrow \quad \text{при} \quad x>0. \tag{10}$$

При $\alpha\geqslant 2$ полагаем

$$\mathscr{L}_\alpha=\mathscr{L}(H)=\sum\mathbf{M}|\xi_j|^\alpha \quad \text{при} \quad H(x)=x^\alpha. \tag{11}$$

В части результатов дополнительно требуется, что $B<\infty$ и вводятся ограничения на величину

$$\sup_j \mathbf{M}H(\xi_j)/\mathbf{D}\xi_j.$$

Условимся, что всюду в работе считаются выполненными предположения, введенные в (1)—(7) и (9), (10), даже если это не оговорено специально. Подчеркнем, что все утверждения работы имеют сплошную нумерацию и что в каждом параграфе сначала приводятся основные результаты, а затем их доказательства. Формулы в каждом параграфе имеют свою нумерацию. Ссылки на формулы из других параграфов не допускаются. Отметим, что в (5), (9)—(11) и далее символы $\sum$ и max употребляются лишь вместо $\sum\limits_{j\geqslant 1}$ и $\max\limits_{j\geqslant 1}$, а знаки $\uparrow$ и $\downarrow$ означают соответствующую монотонность функций. Будем считать, что умножение выполняется вперед деления, т. е. будем писать $ab/2cd$ вместо $ab/(2cd)$. Всюду ниже знак □ означает конец доказательства, символы $C<\infty$ и $c>0$ могут заменять любые положительные абсолютные постоянные, а $C(\alpha)$ и $c(\alpha)$ обозначают постоянные, зависящие только от α.

§ 2. КЛЮЧЕВЫЕ ТЕОРЕМЫ

В данном параграфе будут доказаны два утверждения, которые усиливают основные результаты работ [8, 9] (см. теорему 1 в [8] и теорему 2 в [9]).

Теорема 1. *Пусть существует такое число* $\lambda>0$, *что*

$$\forall j \quad \mathbf{M}\xi_j^2 e^{\lambda|\xi_j|} \leqslant 3\mathbf{D}\xi_j. \tag{1}$$

Тогда для некоторого винеровского процесса W справедливо неравенство

$$c\mathbf{M}\|S-W\|^2 e^{c\lambda\|S-W\|} \leqslant \sum \mathbf{D}\xi_j. \tag{2}$$

Замечание 1. Как отмечено в [11] условие (1) эквивалентно классическому условию Бернштейна.

Предположим теперь, что случайные величины $\{\xi_j\}$ ограничены, т. е.

$$\forall j \quad \mathbf{P}(|\xi_j|\leqslant r)=1, \quad 0<r<\infty. \tag{3}$$

В этом случае условие (1), очевидно, выполнено при $\lambda=1/r$ и, значит, можно при указанном λ воспользоваться утверждением теоремы 1. Однако для ограниченных случайных величин приводимая ниже теорема 2 содержит более сильный результат.

Обозначим через $\mathscr{H}$ множество всех четных функций $H(\cdot)$, удовлетворяющих следующим двум ограничениям

$$0<H(x)/x^2\leqslant H(y)/y^2\leqslant 1=H(1) \quad \forall 0<x\leqslant y\leqslant 1, \tag{4}$$

$$\mathscr{K}(H)\equiv-\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\ln H(2^{-m})<\infty. \tag{5}$$

К классу $\mathscr{H}$ принадлежат, например, функции $H(x)=x^\alpha$ при $\alpha\geqslant 2$ и $H(x)=x^2\exp(c-c|x|^{-\beta})$ при $0\leqslant\beta<1$ и $c\geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (3), *а функция* $H\in\mathscr{H}$. *Тогда существует такой винеровский процесс* W, *что*

$$\mathbf{M}e^{c\|S-W\|/r}\leqslant e^{\mathscr{K}(H)}\left(1+\sum \mathbf{M}H(\xi_j/r)\right). \tag{6}$$

Приступим к доказательству сформулированных теорем. Положим

$$\begin{gathered}\Delta\equiv\sup_n|S(t_n)-W(t_n)|, \quad \eta_n=W(t_n)-W(t_{n-1}),\\ w_n=\max\{|W(t)-W(t_{n-1})|,\ t\in[t_{n-1},t_n]\}.\end{gathered}\tag{7}$$

Лемма 1.

$$\Delta\leqslant\|S-W\|\leqslant\Delta+2\sup_j w_j.$$

Доказательство следует из определения процесса S, поскольку функция $S(t)$ монотонна при $t\in[t_{n-1},t_n]$. Далее, из (7) и свойств максимума винеровского процесса [12, с. 371] вытекает

Лемма 2.

$$\mathbf{P}(w_j\geqslant x)\leqslant 4\mathbf{P}(\eta_j\geqslant x)\leqslant 4\exp(-x^2/2\mathbf{D}\xi_j).$$

В основе доказательства теоремы 1 лежит следующее утверждение, являющееся основным результатом работы [8].

Лемма 3. *Пусть существует такое число* $\tau>0$, *что*

$$\forall j \quad \tau \mathbf{M} |\xi_j|^3 e^{\tau|\xi_j|} \leqslant \mathbf{D}\xi_j. \tag{8}$$

Тогда для некоторого винеровского процесса W *справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}e^{8c\tau\Delta} \leqslant 1+\tau\left(\sum \mathbf{D}\xi_j\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Далее, в леммах 4—8 будем предполагать, что выполнены все условия теоремы 1 и что символ c обозначает постоянную из (9), причем, не уменьшая общности, считаем, что $c \leqslant 1/64$.

Лемма 4. *Условие* (8) *справедливо при* $\tau=\lambda/2$. *Кроме того, при всех* j *и* $|h|\leqslant 1$

$$\lambda^2 \mathbf{D}\xi_j \leqslant 4, \quad \mathbf{M}e^{h\lambda\xi_j/2} \leqslant 1+h^2\lambda^2\mathbf{D}\xi_j/6. \tag{10}$$

Доказательство. При $\xi=\xi_j$ и $\tau=\lambda/2>0$ воспользуемся соотношениями

$$\tau|\xi|^3 e^{\tau|\xi|} \leqslant \xi^2(e^{2\tau|\xi|}-1)/2, \tag{11}$$

$$e^{h\tau\xi} \leqslant 1+h\tau\xi+h^2\tau^2\xi^2/2+h^2\tau^3|\xi|^3e^{\tau|\xi|}/6. \tag{12}$$

Из (1) и (11) вытекает (8). Далее, в силу неравенства Гёльдера

$$\tau\mathbf{M}|\xi|^3e^{\tau|\xi|} \geqslant \tau\mathbf{M}|\xi|^3 \geqslant \tau(\mathbf{D}\xi)^{3/2}. \tag{13}$$

Подставляя (8) в (12) и (13) при $\tau=\lambda/2$, находим (10). □

Ввиду леммы 4 считаем далее, что процессы S и W удовлетворяют утверждению (9) леммы 3 при $\tau=\lambda/2$.

Лемма 5.

$$\mathbf{P}(\max w_j \geqslant x) \leqslant 6\exp(-\lambda^2x^2/16)\sum \mathbf{D}\xi_j/x^2.$$

Доказательство. Из леммы 2 и неравенства $ye^{-2y} \leqslant e^{-y-1}$ имеем

$$\mathbf{P}(\max w_j \geqslant x) \leqslant 4\sum \exp(-2y_j) \leqslant 4e^{-1}\sum \exp(-y_j)/y_j,$$

где $y_j \equiv x^2/4\mathbf{D}\xi_j \geqslant \lambda^2x^2/16 \equiv y$ в силу (14). □

Положим

$$B \equiv \left(\sum \mathbf{D}\xi_j\right)^{1/2}, \quad \Psi(x)=x^2e^{c\lambda|x|}. \tag{14}$$

Выведем основную часть теоремы 1, когда

$$0<c\leqslant 1/64, \quad \lambda B \geqslant 1. \tag{15}$$

Лемма 6. *Если выполнено дополнительное предположение* (15), *то справедливо утверждение теоремы* 1.

Доказательство. Из лемм 1, 3 и 5 при $\tau=\lambda/2$ и $\lambda x \geqslant 1$ находим

$$\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant 2x) \leqslant \mathbf{P}(\Delta \geqslant x)+\mathbf{P}(2\max w_j \geqslant x) \leqslant$$
$$\leqslant (1+\tau B)e^{-8c\tau x}+6\lambda^2B^2e^{-\lambda x/16} \leqslant 8\lambda^2B^2e^{-4c\lambda x}. \tag{16}$$

Если же $\lambda x \leqslant 1$, то неравенство (16) выполняется очевидным образом, так как правая часть в нем больше единицы ввиду (15). Из (16) имеем

$$\mathbf{M}\Psi(\|S-W\|)=\int_0^\infty \mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant x)\,d\Psi(x) \leqslant$$

$$\leqslant 8\lambda^2B^2\int_0^\infty e^{-2c\lambda x}(2x+\lambda x^2)e^{c\lambda x}dx = 32c^{-2}B^2. \tag{17}$$

Требуемая оценка (2) вытекает из (17) при соответствующем выборе абсолютных постоянных. □

Рассмотрим теперь дополнительный случай в теореме 1, когда

$$0 < c \leqslant 1/64, \quad 16c\lambda B \leqslant 1. \tag{18}$$

Положим

$$Y = \sup_{n \geqslant 1} \left| \sum_{j \leqslant n} \xi_j \right|, \quad X = \sum \xi_j. \tag{19}$$

Лемма 7. *При дополнительном предположении* (18) *верно неравенство*

$$\mathrm{M}\Psi(Y) \leqslant 2^7 B^2. \tag{20}$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением

$$\mathrm{M}\Psi(Y) \leqslant \mathrm{M}\left(|X| \int_0^Y x^{-1} d\Psi(x)\right) \equiv \mathrm{M}_0, \tag{21}$$

доказанным в [13, с. 285—286] для класса функций Ψ, включающего функцию из (14). Правую часть в (21) легко привести к виду

$$M_0 = \mathrm{M}|X| Y e^{c\lambda Y} + \mathrm{M}|X| (e^{c\lambda Y} - 1)/c\lambda. \tag{22}$$

Рассматривая отдельно случаи $|X| \leqslant Y/4$ и $Y < 4|X|$, получаем

$$M_0 \leqslant \mathrm{M}\Psi(Y)/2 + 8\mathrm{M}X^2 e^{4c\lambda|X|}. \tag{23}$$

Суммируя (21)—(23), находим

$$\mathrm{M}\Psi(Y) \leqslant 16\mathrm{M}X^2 e^{4c\lambda|X|}. \tag{24}$$

Далее, сравнивая производные, нетрудно установить, что

$$x^2 e^{|x|} \leqslant e^{2x} + e^{-2x} - 2 \quad \text{для } \forall x. \tag{25}$$

Полагая $x = 4c\lambda X$ в (25), имеем

$$\mathrm{M}X^2 e^{4c\lambda|X|} \leqslant (\mathrm{M}e^{8c\lambda X} + \mathrm{M}e^{-8c\lambda X} - 2)/(4c\lambda)^2. \tag{26}$$

Из леммы 4 при $h = \pm 16c$ следует, что

$$\mathrm{M}e^{\pm 8c\lambda X} \leqslant \exp\left(\sum h^2\lambda^2 \mathrm{D}\xi_j/6\right) = \exp\{(16c\lambda B)^2/6\} \leqslant 1 + (16c\lambda B)^2/4. \tag{27}$$

При выводе последнего неравенства в (27) использовано (18). Из (24), (26) и (27) вытекает (20). □

Лемма 8. *Если выполнено дополнительное предположение* (18), *то верно утверждение теоремы* 1.

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать, что $B < \infty$. Положим $Y^* = \max\{|W(t)|: t \in T\}$. Поскольку винеровский процесс W можно рассматривать как предел соответствующих сумм независимых случайных величин, имеющих одинаковое нормальное распределение, по аналогии с леммой 7 имеет место оценка

$$\mathrm{M}\Psi(Y^*) \leqslant 2^7 B^2. \tag{28}$$

Из выпуклости функции $\Psi(\cdot)$ и неравенств (20) и (28) находим, что

$$\mathrm{M}\Psi(\|S - W\|/2) \leqslant \mathrm{M}\Psi((Y + Y^*)/2) \leqslant \mathrm{M}\Psi(Y)/2 + \mathrm{M}\Psi(Y^*)/2 \leqslant 2^7 B^2. \tag{29}$$

Сравнивая (14) и (29), получаем, что

$$\mathrm{M}\|S - W\|^2 e^{c\|S-W\|/2} \leqslant 2^9 B^2, \tag{30}$$

где постоянная $c > 0$ определена в лемме 3. Из (30) вытекает (2) при соответствующем выборе абсолютной постоянной. □

Таким образом, теорема 1 доказана полностью в леммах 6 и 8. Перейдем теперь к выводу теоремы 2. В основе этого вывода лежит следующее утверждение, вытекающее из теоремы 2 в [9] при $a = 1$ и $H(\cdot)$, удовлетворяющих (4) и (5), если эту теорему применить к случайным величинам $\{\xi_j/2r\}$.

Лемма 9. *Если выполнены условия теоремы 2, то существует такой винеровский процесс W, что при всех $x>0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(\Delta \geqslant C(x+r\mathscr{K}(H))) \leqslant e^{-x/r}\left(1+\sum \mathbf{M}H(\xi j/2r)+\sum H\left(\mathbf{D}^{1/2}\xi_j/2r\right)\right). \tag{31}$$

Далее, в этом пункте предполагается, что выполнены все предположения теоремы 2 и что процессы S и W удовлетворяют (31).

Лемма 10. *Если $H(\cdot)\in\mathscr{H}$, то*

$$4H(x/2)\leqslant H(x)\leqslant x^2 \quad \forall x\in[0,\ 1], \tag{32}$$

$$H(x)\geqslant e^{-2\mathscr{K}(H)/x} \quad \forall x\in(0,\ 1], \tag{33}$$

$$\mathscr{K}(H)\geqslant -\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\ln 2^{-2m}>2. \tag{34}$$

Доказательство. Соотношение (32) вытекает из (4), а (34) следует из (5) и (32). Далее, функция $H(x)$ монотонна ввиду (5). Поэтому

$$\mathscr{K}(H)\geqslant -2^{-N}\ln H(x)\geqslant -(x/2)\ln H(x) \tag{35}$$

при $2^{-N+1}>x\geqslant 2^{N}$. Из (35) находим (33). □

Лемма 11. *При всех j*

$$\mathbf{M}H(\xi_j/2r)\leqslant \mathbf{M}H(\xi_j/r)/4, \tag{36}$$

$$H(\mathbf{D}^{1/2}\xi_j/2r)\leqslant \mathbf{M}H(\xi_j/r)/3. \tag{37}$$

Доказательство. Неравенство (36) вытекает из (32) при $x=$ $=\xi_j/r$. Чтобы доказать (37), положим

$$\xi=\xi_j/r,\quad \sigma=\mathbf{D}^{1/2}\xi,\quad h(x)=H(x)/x^2 \tag{38}$$

и заметим, что функция $h(x)$ монотонно не убывает, как функция от $|x|$ ввиду (4). Следовательно,

$$\begin{gathered}\mathbf{M}H(\xi)+H(\sigma/2)=\mathbf{M}\xi^2h(\xi)+(\sigma/2)^2h(\sigma/2)\geqslant\\ \geqslant \mathbf{M}\{\xi^2h(\sigma/2);\ |\xi|\geqslant\sigma/2\}+\mathbf{M}\{\xi^2h(\sigma/2);\ |\xi|<\sigma/2\}=\mathbf{M}\xi^2h(\sigma/2)=\\ =4(\sigma/2)^2h(\sigma/2)=4H(\sigma/2).\end{gathered} \tag{39}$$

Подставив (38) в (39), найдем (37). □

Положим

$$K=\mathscr{K}(H),\quad L=\sum \mathbf{M}H(\xi_j/r) \tag{40}$$

Лемма 12.

$$\mathrm{P}(\max w_j>2(x+rK))\leqslant 2e^{-x/r}L \quad \forall x\geqslant 0.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством

$$-2^2(x+rK)^2/2\mathbf{D}\xi_j\leqslant -x/r-4Kr/\mathbf{D}^{1/2}\xi_j \quad \forall x\geqslant 0, \tag{41}$$

которое справедливо, поскольку $\mathbf{D}\xi_j\leqslant r^2$ и $K\geqslant 2$ в силу (3) и (34). Подставляя (41) в утверждение леммы 2, получаем, что

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(\max w_j\geqslant 2(x+rK))\leqslant 4\sum\exp\left(-x/r-4rK/\mathbf{D}^{1/2}\xi_j\right)\leqslant\\ \leqslant 4e^{-x/r}\sum H\left(\mathbf{D}^{1/2}\xi_j/2r\right).\end{gathered} \tag{42}$$

При выводе последнего неравенства в (42) использовано (33). Из (42) и (37) находим требуемое утверждение леммы 12. □

Лемма 13. *При всех $y\geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(\|S-W\|/r\geqslant y)\leqslant e^{K-4cy}(1+3L). \tag{43}$$

Доказательство. Подставляя оценки (36) и (37) в (31), получаем

$$\mathbf{P}(\Delta\geqslant C(x+rK))\leqslant e^{-x/r}(1+L) \quad \forall x\geqslant 0. \tag{44}$$

Из лемм 1 и 12 и неравенства (44) имеем

$$\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant(C+4)(x+rK))\leqslant\mathbf{P}(\Delta\geqslant C(x+rK))+$$
$$+\mathbf{P}(2\max w_j\geqslant 4(x+rK))\leqslant \mathrm{e}^{-x/r}(1+3L)\quad \forall x\geqslant 0. \tag{45}$$

Положим

$$y=(C+4)(x/r+K),\quad 4c=1/(C+4). \tag{46}$$

Из (45) и (46) вытекает (43) при $4cy\geqslant K$. Если же $4cy<K$, то неравенство (43) справедливо подавно, так как правая часть в нем больше единицы. □

Завершим вывод теоремы 2. Из леммы 13 имеем

$$\mathbf{M}\mathrm{e}^{c\|S-W\|/r}=1+\int_0^\infty \mathbf{P}(\|S-W\|/r>y)\,d\mathrm{e}^{cy}\leqslant$$
$$\leqslant 1+\mathrm{e}^K(1+3L)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-3cy}c\,dy=1+\mathrm{e}^K(1+3L)/3. \tag{47}$$

Из (47) с учетом (34) и (40) вытекает требуемое неравенство (6).

§ 3. ОСНОВНЫЕ ОЦЕНКИ

Цель настоящего параграфа — распространить результаты § 2 на более широкий класс случайных величин $\{\xi_j\}$, отказавшись от требования их ограниченности или существования у них экспоненциальных моментов.

Пусть $H(\cdot)$ — некоторая четная функция, удовлетворяющая условию

$$0<h(x)=H(x)/x^2\uparrow \text{ при } x>0, \tag{1}$$
$$\mathscr{L}(H)\equiv\sum \mathbf{M}H(\xi_j)<\infty. \tag{2}$$

Предположим, что при некоторых фиксированных $v>0$ и $b\geqslant 1$

$$\lambda_0(x)\equiv x^{-1}\ln(bH(x)/\mathscr{L}(H))\downarrow \text{ при } x\geqslant v, \tag{3}$$

и что

$$H_v(x)\equiv H(vx)/H(v)\in\mathscr{H}. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть функция $H(\cdot)$ и число $v>0$ удовлетворяют условиям (1)—(4). Тогда существует такой винеровский процесс W, что неравенство*

$$\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant C(v\mathscr{K}(H_v)+x)+8bz)\leqslant(1+b)\mathrm{e}^{-x/v}+$$
$$+(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b+\mathbf{P}(\max|\xi_j|>z) \tag{5}$$

справедливо при всех $x>0$, $z\geqslant v$ и $b\geqslant 1$.

Замечание 2. Подчеркнем, что в теоремах 3—7 и следствиях 1—3 способ построения винеровского процесса W зависит от числа v и вида функции $H(\cdot)$, но не зависит от чисел b, x и z. Независимость от x и z сохраняется и в остальных результатах работы.

Положим

$$\lambda(v)=\min_{0<x\leqslant v} x^{-1}\ln(2+H(x)/x^2) \tag{6}$$

и введем ограничения

$$\forall j\quad \mathbf{M}H(\xi_j)\leqslant\mathbf{D}\xi_j,\quad B^2\equiv\sum\mathbf{D}\xi_j<\infty. \tag{7}$$

Теорема 4. *Пусть функция $H(\cdot)$ и число $v>0$ удовлетворяют условиям (1)—(3) и (6). Тогда существует такой винеровский процесс W, что неравенство*

$$\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant Cx+8bz)\leqslant x^{-2}B^2\mathrm{e}^{-\lambda(v)x}+$$
$$+(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b+\mathbf{P}(\max|\xi_j|>z) \tag{8}$$

справедливо при всех $x>0$, $z\geqslant v$ и $b\geqslant 1$.

Неулучшаемость в определенном смысле утверждений теорем 3 и 4 в случае $H(x)=x^{\alpha}$ будет показана в § 5.

Перейдем к доказательству теорем 3 и 4. Будем повторять вывод теоремы 4 из работы [9]. Условимся через $\xi_j^{[v]}$ обозначать срезку случайной величины ξ_j на уровне $v>0$, т. е. $\xi_j^{[v]}$ равно ξ_j или 0 в зависимости от того $|\xi_j|\leqslant v$ или $|\xi_j|>v$. Положим

$$\xi_j^{(v)}=\xi_j-\xi_j^{[v]},\quad \xi_j'=\xi_j^{[v]}-\mathbf{M}\xi_j^{[v]}. \tag{9}$$

В [9] доказана элементарная

Лемма 14. *Если* $\xi=\xi_j$, *то*

$$\mathbf{P}(|\xi'|\leqslant 2v)=1, \tag{10}$$

$$|\mathbf{M}\xi^{[v]}|=|\mathbf{M}\xi^{(v)}|\leqslant \mathbf{M}|\xi^{(v)}|, \tag{11}$$

$$2\mathbf{M}(\xi^{(v)})^2\geqslant \mathbf{D}\xi-\mathbf{D}\xi'\geqslant \mathbf{M}(\xi^{(v)})^2\geqslant 0. \tag{12}$$

Обозначим через S' случайную ломаную, которая получится, если в определении ломаной S заменить все величины ξ_j на ξ_j'. В силу (9), (11) имеет место

Лемма 15.

$$|S-S'|=\max_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j\leqslant k}(\xi_j-\xi_j^{[v]}-\mathbf{M}\xi_j^{[v]})\right|\leqslant \sum|\xi_j^{(v)}|+\sum \mathbf{M}|\xi_j^{(v)}|.$$

Пусть

$$\sigma_j=(\mathbf{D}\xi_j'/\mathbf{D}\xi_j)^{1/2},\quad \sigma^2(v)=\sum(1-\sigma_j^2)\,\mathbf{D}\xi_j. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение непрерывный гауссовский процесс W' с независимыми приращениями, полагая

$$W'(t)=W'(t_j)+\sigma_j(W(t)-W(t_j)) \tag{14}$$

при $t\in[t_j,\ t_{j+1}]$, где W — некоторый стандартный винеровский процесс.

Лемма 16.

$$\mathrm{P}(\|W-W'\|\geqslant x)\leqslant 4\exp(-x^2/2\sigma^2(v))\quad \forall x>0.$$

Доказательство. Обозначим $W^{(v)}(t)=W(t)-W'(t)$ и заметим, что ввиду (14)

$$W^{(v)}(t)=W^{(v)}(t_j)+(1-\sigma_j)(W(t)-W(t_j)) \tag{15}$$

при $t\in[t_j,\ t_{j+1}]$. Из (15) вытекает, что $W^{(v)}(t)$ — непрерывный гауссовский процесс с независимыми приращениями. Следовательно, в силу неравенства Леви

$$\mathbf{P}(\|W^{(v)}\|\geqslant \mathrm{x})\leqslant 2\mathbf{P}(|W^{(v)}(t_\infty)|>x). \tag{16}$$

Кроме того, ввиду (13) и (15)

$$\mathbf{D}W^{(v)}(t_\infty)=\sum(1-\sigma_j)^2\,\mathbf{D}(W(t_{j+1})-W(t_j))=\sigma^2(v). \tag{17}$$

Из (16) и (17) вытекает требуемое утверждение, поскольку величина $W^{(v)}(t_\infty)$ имеет нормальное распределение. □

Лемма 17.

$$\sigma^2(v)\leqslant 4\sum(\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2)^2/\mathbf{D}\xi_j.$$

Эти неравенства следуют из (12) и (13), поскольку

$$0\leqslant 1-\sigma_j\leqslant 1-\sigma_j^2\leqslant 2\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2/\mathbf{D}\xi_j.$$

Приступим теперь к основной задаче — оцениванию разности $\|S'-W'\|$.

Лемма 18. *Если выполнено условие* (4), *то процессы* S' *и* W' *можно так задать на одном вероятностном пространстве, что*

$$\mathbf{P}(\|S'-W'\|\geqslant C(x-v\mathcal{K}(H_v)))\leqslant(1+\mathcal{L}(H)/H(v))e^{-v/x}\quad \forall x>0. \tag{18}$$

Доказательство. Определим непрерывную монотонно возрастающую функцию $\tau(t)$ как решение уравнения

$$\mathbf{D}W'(\tau(t))=t \text{ для } \forall t. \tag{19}$$

В этом случае, в силу (13), (14) и (19)

$$S'(\tau(t_k'))=\sum_{j<k}\xi_j' \text{ при } t_k'=\sum_{j<k}\mathbf{D}\xi_j'. \tag{20}$$

Кроме того,

$$\Delta'\equiv\|S'-W'\|=\sup_t|S'(\tau(t))-W'(\tau(t))|. \tag{21}$$

Учитывая (4), (10) и (19)—(21), получаем, что $W'(\tau(t))$ — стандартный винеровский процесс, а процесс $S'(\tau(t))$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 при $r=4v$ и $H(\cdot)=H_v(\cdot)$. Таким образом, из теоремы 2 при $C=4/c$ и всех $x'>0$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\Delta'\geqslant Cx')&\leqslant\exp(-cCx'/4v)\,\mathbf{M}\exp(c\Delta'/4v)\leqslant\\&\leqslant\exp(-x'/v+\mathscr{K}(H_v))\left(1+\sum\mathbf{M}H_v(\xi_j'/4v)\right),\end{aligned} \tag{22}$$

если только мы выберем винеровский процесс $W'(\tau(\cdot))$ соответствующим образом.

Используя (9) и определение срезки $\xi_j^{[v]}$ при $\xi=\xi_j$, находим

$$H_v(\xi'/4v)\leqslant H_v(\max\{2|\xi_j^{[v]}|,2|\mathbf{M}\xi_j^{[v]}|\}/4v)\leqslant H_v(|\xi|/2v)+H_v(\mathbf{D}^{1/2}\xi/2v). \tag{23}$$

Из (4), (23) и леммы 11 вытекает, что

$$\mathbf{M}H_v(\xi_j'/4v)\leqslant\mathbf{M}H_v(\xi_j/v)=\mathbf{M}H(\xi_j)/H(v). \tag{24}$$

Подставляя (24) в (22) при $x'=x+v\mathscr{K}(H_v)$, получаем (18). □

Применяя к процессам $S'(\tau(\cdot))$ и $W'(\tau(\cdot))$ теорему 1 вместо теоремы 2, находим, что верна

Лемма 19. *Если число $\lambda>0$ удовлетворяет условию*

$$\forall_j\quad\mathbf{M}(\xi_j')^2\exp(\lambda|\xi_j'|)\leqslant3\mathbf{D}\xi_j, \tag{25}$$

то процесс W' можно построить таким образом, что

$$\mathbf{P}(\|S'-W'\|\geqslant Cx)\leqslant x^{-2}B^2e^{-\lambda x}\quad\forall x>0. \tag{26}$$

Лемма 20. *Если $h(v)=H(v)/v^2\geqslant2$ и выполнены условия* (1) *и* (7), *то*

$$\forall j\quad\mathbf{M}H(\xi_j'/4)\leqslant\mathbf{D}\xi_j'. \tag{27}$$

Доказательство. При сделанном предположении, в силу (1)

$$2\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2\leqslant2\mathbf{M}H(\xi_j^{(v)})/h(v)\leqslant\mathbf{M}H(\xi_j^{(v)}). \tag{28}$$

Повторяя вывод соотношения (23) и леммы 11, находим

$$\begin{aligned}\mathbf{M}H(\xi_j'/4)&\leqslant\mathbf{M}H(\xi_j^{[v]}/2)+H(\mathbf{M}^{1/2}(\xi_j^{[v]})^2/2)\leqslant\\&\leqslant\mathbf{M}H(\xi_j^{[v]})=\mathbf{M}H(\xi_j)-\mathbf{M}H(\xi_j^{(v)}).\end{aligned} \tag{29}$$

Далее, сравнивая (12) и (28), имеем

$$\mathbf{D}\xi_j'\geqslant\mathbf{D}\xi_j-\mathbf{M}H(\xi_j^{(v)}). \tag{30}$$

Из (29) и (30) вытекает (27). □

Лемма 21. *Если выполнены условия* (1) *и* (7), *то неравенство* (26) *верно при $\lambda=\lambda(v)/8$, где функция $\lambda(v)$ определена в* (6).

Доказательство. Ввиду (6) и (10)

$$(\xi_j')^2\exp(\lambda(v)|\xi_j'|/8)\leqslant(\xi_j')^2(2+h(\xi_j'/8))^{1/2}\leqslant2(\xi_j')^2+H(\xi_j'/4). \tag{31}$$

Таким образом, если $h(v) \geqslant 2$, то (25) следует из (31) и леммы 20. Если же $h(v) = H(v)/v^2 < 2$, то

$$\lambda(v)/8 \leqslant (8v)^{-1} \max_{0<x\leqslant v} \ln(2 + H(x)/x^2) = (8v)^{-1} \ln(2 + h(v)) < 1/2v. \quad (32)$$

При выводе (32) использовалось также (1) и (6). Но при $\lambda \leqslant 1/2v$ неравенства (25) верны очевидным образом в силу (10). Из справедливости условия (25) и леммы 19 вытекает требуемое утверждение (26) при соответствующем выборе процесса W'. □

Лемма 22. *Если при некоторых $v > 0$ и $b \geqslant 1$ выполнены предположения* (1)—(3), *то*

$$\mathbf{P}(\|S - S'\| \geqslant 2bz) \leqslant (\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b + \mathbf{P}(\max|\xi_j| > z) \quad \forall z \geqslant v. \quad (33)$$

Доказательство. Фиксируем число $z > v$ и положим $\tau_j = |\xi_j| = |\xi_j^{(v)}|$, при $v < |\xi_j| \leqslant z$ и $\tau_j = 0$ в противном случае. Используя (3), при $\lambda = \lambda_0(z)$ и $\xi = \xi_j$ получаем

$$m_j \equiv \mathbf{M}(\exp(\lambda\tau_j) - 1) = \mathbf{M}\{\mathrm{e}^{\lambda|\xi|} - 1;\ v < |\xi| \leqslant z\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{M}\{\exp(\lambda_0(\xi)|\xi|;\ |\xi| \leqslant z\} \leqslant b\mathbf{M}H(\xi_j)/\mathscr{L}(H). \quad (34)$$

Суммируя (34), находим

$$\mathbf{M}\exp\left(\lambda\sum\tau_j\right) \leqslant \exp\left(\sum m_j\right) \leqslant \mathrm{e}^b. \quad (35)$$

Из (3) и (35) имеем

$$\mathbf{P}\left(\sum\tau_j \geqslant bz\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda bz}\mathbf{M}\exp\left(\lambda\sum\tau_j\right) \leqslant \mathrm{e}^{b-\lambda bz} =$$
$$= (\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b \text{ при } \lambda = \lambda_0(z). \quad (36)$$

Определение величин $\{\tau_j\}$ и лемма 15 дают нам неравенство

$$\mathbf{P}\left(\|S - S'\| \geqslant bz + \sum\mathbf{M}|\xi_j^{(v)}|\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sum\tau_j > bz\right) + \mathbf{P}(\max|\xi_j| > z). \quad (37)$$

Далее, будем считать, что

$$\mathscr{L}(H)/H(v) = b\exp(-v\lambda_0(v)) \leqslant b. \quad (38)$$

Действительно, в противном случае, $\lambda_0(z) \leqslant \lambda_0(v) < 0$, и правые части в (36) и (33) больше единицы. Применяя (1) и неравенство Чебышева, имеем

$$\sum\mathbf{M}|\xi_j^{(v)}| \leqslant v\mathscr{L}(H)/H(v) \leqslant bv. \quad (39)$$

Подставляя (36) и (39) в (37), находим требуемое соотношение (33). □

Лемма 23. *При выполнении условий леммы* 22

$$\mathbf{P}(\|W - W'\| \geqslant 4bz) \leqslant 4(\mathscr{L}(H)/bH(z))^{2b} \ \forall z \geqslant v. \quad (40)$$

Доказательство. Применяя лемму 17 и неравенство Чебышева, легко вывести, что

$$\sigma^2(v) \leqslant 4v^2\mathscr{L}(H)/H(v) = 4v^2b\exp(-v\lambda_0(v)). \quad (41)$$

Следовательно,

$$4v^2b/\sigma^2(v) \geqslant \exp(v\lambda_0(v)) \geqslant v\lambda_0(v) \geqslant v\lambda_0(z). \quad (42)$$

Поэтому, в силу леммы 16 при $z \geqslant v$

$$\mathbf{P}(\|W - W'\| \geqslant 4bz) \leqslant 4\exp(-8b^2zv/\sigma^2(v)) \leqslant$$
$$\leqslant 4\exp(-2bz\lambda_0(z)) = 4(\mathscr{L}(H)/bH(z))^{2b}, \quad (43)$$

что доказывает (40). При выводе соотношений (41)—(43) использовались также условия (1) и (3). □

Лемма 24. *Если при некоторых $v > 0$ и $b \geqslant 1$ выполнены предположения* (1) *и* (3), *то*

$$\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant x_0+8bz) \leqslant \mathbf{P}(\|S'-W'\| \geqslant x_0)+\mathbf{P}(\|S-S'\| \geqslant 4bz)+$$
$$+\mathbf{P}(\|W-W'\| \geqslant 4bz) \leqslant \mathbf{P}(\|S'-W'\| \geqslant x_0)+\mathbf{P}(\max|\xi_j|>z)+$$
$$+(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b \tag{44}$$

при всех $x_0 > 0$ и $z \geqslant v$.

Доказательство. Из лемм 22 и 23 вытекает неравенство (44), если только в (44) заменить последнее слагаемое на

$$(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/2bH(z))^{2b}+4(\mathscr{L}(H)/bH(z))^{2b}. \tag{45}$$

Далее, мы можем считать справедливым предположение

$$\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z) \leqslant 1, \tag{46}$$

так как в противном случае правая часть в (44) больше единицы. Но при выполнении (46) и $b \geqslant 1$ выражение (45) не превосходит последнего слагаемого в (44), что и требовалось. □

Теорема 3 вытекает теперь из лемм 18 и 24 и неравенства (38), а теорема 4 следует из лемм 21 и 24.

§ 4. УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК ЗА СЧЕТ ВЫДЕЛЕНИЯ БОЛЬШИХ СКАЧКОВ

Если выполнены условия теоремы 3 или теоремы 4, то

$$\forall x>0 \quad \sum \mathbf{P}(|\xi_j|>x) \leqslant \mathscr{L}(H)/H(x) < \infty, \tag{1}$$

т. е. с вероятностью 1 лишь конечное число величин ξ_j превосходит по модулю любой положительный уровень. Поэтому с вероятностью 1 можно определить случайную величину $\xi_{\nu(k)}$, как k-ю по модулю среди величин $\{\xi_j\}$, $k=1, \ldots, m$. Другими словами,

$$|\xi_{\nu(1)}| \geqslant |\xi_{\nu(2)}| \geqslant \ldots \geqslant |\xi_{\nu(k)}| \geqslant \xi_j \quad \forall j \neq \nu(1), \ldots, \nu(k). \tag{2}$$

Обозначим теперь через $Z^{[m]}$ случайный процесс, который получится, если в определении процесса S заменить нулями случайные величины $\xi_{\nu(1)}, \ldots, \xi_{\nu(m-1)}$, так что $Z^{[1]}=S$.

Теорема 5. *Утверждения теорем 3 и 4 при $b \geqslant m$ останутся справедливыми, если в них процесс S заменить на $Z^{[m]}$, а вероятность $\mathbf{P}(\max|\xi_j|>z)$ на $\mathbf{P}(|\xi_{\nu(m)}|>z)$.*

Следствие 1. *Пусть справедливы все условия теоремы 3 при $b=m$. Тогда существует такой винеровский процесс W, что*

$$\mathbf{P}(\|Z^{[m]}-W\| \geqslant C(v\mathscr{K}(H_v)+x)+12mz) \leqslant$$
$$\leqslant (1+\mathscr{L}(H)/H(v))\,\mathrm{e}^{-x/v}+(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/mH(z))^m \tag{3}$$

при всех $x > 0$ и $z \geqslant v$.

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 4 при $b=m$. Тогда существует такой винеровский процесс W, что*

$$\mathbf{P}(\|Z^{[m]}-W\| \geqslant Cx+12mz) \leqslant x^{-2}B^2\mathrm{e}^{-\lambda(v)x}+(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/mH(z))^m$$
$$\forall x>0, \ \forall z \geqslant v, \tag{4}$$

где $\lambda(v)$ по-прежнему определяется из равенства

$$\lambda(v)=\min_{0<x\leqslant v} x^{-1}\ln(2+H(x)/x^2). \tag{5}$$

Обозначим через $S^{(v)}$ случайный процесс, который получится, если в определении процесса S все величины ξ_j заменить на $\xi_j^{(v)}-\mathbf{M}\xi_j^{(v)}$. В частности

$$S=S'+S^{(v)}. \tag{6}$$

Подчеркнем, что в следующих двух утверждениях процессы $S^{(v)}$ и W выбираются независимо, а процесс W' связан с винеровским процессом W, как было описано перед леммой 16. Положим

$$\sigma_0^2(v) = \sum \mathbf{D}\xi_j \mathbf{P}(|\xi_j| > v). \tag{7}$$

Теорема 6. *Пусть функция $H(\cdot)$ такова, что*

$$H_v(x) \equiv H(vx)/H(v) \in \mathscr{H}. \tag{8}$$

Тогда существует такой винеровский процесс W, что W и $S^{(v)}$ — независимы и при всех $x > 0$ и $z > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\|S - W' - S^{(v)}\| \geqslant C(v\mathscr{K}(H_v) + x + z)) \leqslant \\ \leqslant (1 + \mathscr{L}(H)/H(v))\, e^{-x/v} + 4\left(\sigma_0^2(v)/zv\right)^{z/v}. \end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 7. *Пусть функция $H(\cdot)$ такова, что*

$$\forall j \quad \mathbf{M}H(\xi_j) \leqslant \mathbf{D}\xi_j. \tag{10}$$

Тогда найдется такой винеровский процесс W, что W и $S^{(v)}$ независимы и верно неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\|S - W' - S^{(v)}\| \geqslant C(x + z)) \leqslant x^{-2}B^2 e^{-\lambda(v)x} + \\ + 4\exp\left(\lambda^2(v)\sigma_0^2(v) - \lambda(v)z\right) \quad \forall x > 0, \quad \forall z \geqslant 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\lambda(v)$ определено в (5).

Следствие 5. *Утверждения теорем* 6 *и* 7 *останутся справедливыми, если в них процесс W' заменить на W, а к правой части неравенств* (9) *и* (11) *добавить слагаемое* $4\exp(-z^2/\sigma^2(v))$.

Замечание 3. Идея выбирать винеровский процесс W независимым от $S^{(v)}$ впервые использовалась автором в [14], где применялся метод одного вероятностного пространства Скорохода. В приложении к рассматриваемому методу аналогичная идея впервые систематически изучалась в [15]. Отметим, что в [15] при задании на одном вероятностном пространстве вместо вводимого ниже тождества (25) использовалось более простое представление

$$\xi_j = \xi_j^{(v)} + \zeta_j - \zeta_j\mu_j, \tag{12}$$

где величины $\{\zeta_j\mu_j\}$ оказываются достаточно малыми, а $\{\zeta_j\}$ выбираются независимыми от $\{\xi_j^{(v)}\}$. Однако более сложно определяемое равенство (25) имеет по сравнению с (12) то преимущество, что в нем случайные величины $\xi_j^{[*]}$ имеют более простое распределение, чем условное распределение (21) аналогичных им величин ζ_j из (12).

Приступим к выводу сформулированных теорем и следствий.

Лемма 25. *Если выполнены предположения леммы* 22, *то*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Delta \equiv \|Z^{[m]} - S'\| \geqslant 2bz) \leqslant \mathbf{P}(|\xi_{\nu(m)}| > z) + (e\mathscr{L}(H)/bH(z))^b \\ \forall z \geqslant v, \ \forall b \geqslant m. \end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство. Нетрудно понять, что

$$\Delta \leqslant \sum_{k \leqslant m} |\mathbf{M}\xi_{\nu(k)}| + \sum_{k \leqslant m} |\xi_{\nu(k)}| \leqslant 2mv \text{ при } |\xi_{\nu(m)}| \leqslant v. \tag{14}$$

Если же $|\xi_{\nu(m)}| > v$, то по аналогии с леммой 15

$$\|Z^{[m]} - S'\| \leqslant \sum_{j \neq \nu(1), \ldots, \nu(m-1)} |\xi_j^{(v)}| \sum_j \mathbf{M}|\xi_j^{(v)}|. \tag{15}$$

Повторяя вывод леммы 22 и применяя формулу (15) вместо леммы 15, получим, что $\mathbf{P}(\Delta \geqslant 2bz, |\xi_{\nu(m)}| > v)$ не превосходит правой части в (13). Из этого факта и (14) вытекает требуемое утверждение. □

Если теперь в доказательстве леммы 24 заменить S на $Z^{[m]}$ и использовать лемму 25 вместо леммы 22, то легко получается

Лемма 26. *При справедливости условий леммы* 22

$$\mathbf{P}(\|Z^{[m]}-W\|\geqslant x_0+8bz)\leqslant \mathbf{P}(\|S'-W\|\geqslant x_0)+ \\ +\mathbf{P}(|\xi_{\nu(m)}|>z)+(e\mathscr{L}(H)/bH(z))^b \tag{16}$$

при всех $x_0>0$, $z\geqslant v$ *и* $b\geqslant m$.

Теорема 5, очевидно, следует из лемм 18, 21 и 26.

Лемма 27.

$$\mathbf{P}(|\xi_{\nu(m)}|>z)\leqslant\left(\sum \mathbf{P}(|\xi_j|>z)\right)^m/m!.$$

Это известное утверждение легко доказывается индукцией по m.

Доказательство следствий 1 и 2. Не уменьшая общности, будем предполагать, что

$$\mathscr{L}(H)/mH(z)\leqslant 1, \tag{17}$$

так как в противном случае правые части в неравенствах (3) и (4) больше 1. Далее, из леммы 27 и неравенства Чебышева (1) вытекает, что

$$\mathbf{P}(|\xi_{\nu(m)}|>z)\leqslant e^{-1}(e\mathscr{L}(H)/mH(z))^m, \tag{18}$$

если учтем еще, что $m!>e^{-1}m^m/e^m$. Из (17) и (18) следует

$$(e\mathscr{L}(H)/bH(z))^b+\mathbf{P}(|\xi_{\nu(m)}|>z)\leqslant(e\mathscr{L}(H)/mH(z))^m \text{ при } b=2m. \tag{19}$$

Неравенство (19) и теорема 5 дают требуемые утверждения. □

Приступим к выводу теорем 6—8. Обозначим через μ_j — индикатор события $\{|\xi_j|>v\}$, т. е.

$$\{\mu_j=1\}=\{\mu_j\neq 0\}=\{|\xi_j|>v\}=\{\xi_j^{(v)}\neq 0\}. \tag{20}$$

Введем в рассмотрение независимые последовательности $\{\xi_j\}$, $\{\overset{*}{\mu}_j\}$ и $\{\zeta_j\}$, каждая из которых состоит из независимых случайных величин. Причем будем предполагать, что при каждом j величина $\overset{*}{\mu}_j$ одинаково распределена с μ_j, а

$$\mathbf{P}(\zeta_j<x)=\mathbf{P}(\xi_j<x\,|\,\mu_j=0)\quad \forall x. \tag{21}$$

Положим

$$\zeta_j^*=\xi_j^{[v]}+\zeta_j\mu_j=\xi_j-\xi_j^{(v)}+\zeta_j\mu_j, \tag{22}$$

$$\xi_j^{[*]}=\zeta_j^*(1-\overset{*}{\mu}_j),\ \xi_j^*=\xi_j^{[*]}-\mathbf{M}\xi_j^{[*]}, \tag{23}$$

$$\zeta_j^{(*)}=\xi_j^{[v]}\overset{*}{\mu}_j-\zeta_j(1-\overset{*}{\mu}_j)\mu_j, \tag{24}$$

и будем пользоваться тождеством

$$\xi_j=\xi_j^{(v)}+\xi_j^{[*]}+\zeta_j^{(*)}, \tag{25}$$

которое вытекает из (22)—(24).

Лемма 28. *При каждом j случайные величины $\xi_j^{[*]}$ одинаково распределены с $\xi_j^{[v]}$. Кроме того, последовательность $\{\xi^{(v)}\}$ не зависит от последовательности $\{\xi_j^{[*]}\}$, состоящей из независимых случайных величин.*

Доказательство. В силу (20)—(23) возможны два взаимно дополняющих варианта. Если $\mu_j=1$, то $\xi_j^{(v)}\neq 0$, $\xi_j^{[v]}=0$ и $\zeta_j^*=\zeta_j$ не зависит от $\xi_j^{(v)}$. Если же $\mu_j=0$, то $\xi_j^{(v)}=0$, $\zeta_j^*=\xi_j^{[v]}$, а следовательно, ζ_j^* одинаково распределена с ζ_j и не зависит от неслучайной $\xi_j^{(v)}=0$. Таким образом, ζ_j^* имеет то же распределение, что и ζ_j и не зависит от $\xi_j^{(v)}$. Далее, величина $\zeta_j^*(1-\overset{*}{\mu}_j)$ одинаково распределена с $\zeta_j(1-\mu_j)$, а последняя по построению имеет то же распределение, что и $\xi_j^{[v]}$. □

Обозначим через S^* и $Z^{(*)}$ случайные процессы, которые получатся, если в определении процесса S случайные величины ξ_j заменить на ξ_j^* и $\zeta_j^{(*)}$ соответственно.

Лемма 29. *Случайный процесс S^* не зависит от процесса $S^{(v)}$ и одинаково распределен с процессом S'. При этом*

$$S = S^{(v)} + S^* + Z^{(*)}. \tag{26}$$

Доказательство. Требуемая независимость вытекает из леммы 28. Равенство (26) следует из тождеств (6) и (25). □

Лемма 30. *Если выполнено условие* (8), *то существует не зависящий от $S^{(v)}$ процесс W такой, что*

$$\mathbf{P}(\|S^* - W'\| > C(x + v\mathscr{K}(H_v))) \leqslant (1 + \mathscr{L}(H)/H(v))\,e^{-x/v} \quad \forall x > 0. \tag{27}$$

Существование процесса W, удовлетворяющего (27), вытекает из леммы 18. Независящим от $S^{(v)}$ этот процесс можно сделать ввиду леммы 29. Аналогично из лемм 21 и 29 следует

Лемма 31. *При выполнении условий теоремы 7 существует независящий от $S^{(v)}$ процесс W такой, что*

$$\mathbf{P}(\|S^* - W'\| \geqslant Cx) \leqslant x^{-2}B^2 e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0. \tag{28}$$

Лемма 32. *При всех $\lambda > 0$ и $x > 0$*

$$\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\| \geqslant 2x) \leqslant 4\exp\left(-\lambda x + \lambda^2 \sum b_j(\lambda)\, p_j\right), \tag{29}$$

где

$$b_j(\lambda) = \mathbf{M}(\xi_j^{[v]})^2 \exp(\lambda |\xi_j^{[v]}|), \quad p_j = P(|\xi_j| > v). \tag{30}$$

Доказательство. Ввиду определения процесса $Z^{(*)}$

$$\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\| \geqslant 2x) = \mathbf{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j<k} \zeta_j^{(*)}\right| \geqslant 2x\right) \leqslant P_1 + P_2, \tag{31}$$

где

$$P_1 \equiv P\left(\sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j<k} (\xi_j^{[v]}\mu_j - \mathbf{M}\xi_j^{[v]}\mu_j^*)\right| \geqslant x\right), \tag{32}$$

$$P_2 \equiv P\left(\sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j<k} (\zeta_j(1-\mu_j^*)\mu_j - \mathbf{M}\xi_j^{[v]}\mu_j^*)\right| \geqslant x\right) = P_1. \tag{33}$$

Последнее равенство следует из того факта, что случайные величины $\zeta_j(1-\mu_j^*)$, $\zeta_j^*(1-\mu_j^*)$ и $\xi_j^{[v]}$ одинаково распределены в силу леммы 28. Далее

$$P_1 \leqslant P_+ + P_-, \tag{34}$$

где

$$P_\pm = \mathbf{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\left(\pm\sum_{j<k} (\xi_j^{[v]}\mu_j^* - \mathbf{M}\xi_j^{[v]}\mu_j^*)\right) > x\right). \tag{35}$$

Повторяя стандартный вывод экспоненциальных неравенств, получаем

$$\mathbf{P}_\pm \leqslant \prod_{j\geqslant 1} \mathbf{M}_j, \tag{36}$$

где

$$\mathbf{M}_j = \exp(\mp \lambda \mathbf{M}\xi_j^{[v]}\mu_j^*)\,\mathbf{M}\exp(\pm\lambda\xi_j^{[v]}\mu_j^*). \tag{37}$$

Полагая $\xi = \pm\xi_j^{[v]}$ и $p = p_j = \mathbf{P}(\mu_j^* = 1)$, находим

$$\mathbf{M}_j = e^{-p\lambda \mathbf{M}\xi}(1 - p + p\mathbf{M}e^{\lambda\xi}) \leqslant e^{p\lambda\mathbf{M}\xi}(1 - p + p + p\lambda\mathbf{M}\xi + p\lambda^2\mathbf{M}\xi^2 e^{\lambda|\xi|}) \leqslant \exp(p\lambda^2\mathbf{M}\xi^2 e^{\lambda|\xi|}) = \exp(\lambda^2 b_j(\lambda)\, p_j). \tag{38}$$

Суммируя (31)—(38), получаем (29). □

Лемма 33.

$$\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\| \geqslant 6z) \leqslant 4(\sigma_0^2(v)/zv)^{z/v} \quad \forall z > 0. \tag{39}$$

Доказательство. Поскольку $|\xi_j^{[v]}|\leqslant v$, то $b_j(\lambda)\leqslant \mathbf{M}\xi_j^2 e^{\lambda v}$ и из (7) и (29) имеем

$$\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\|\geqslant 6z)\leqslant 4\exp(-3\lambda z+\lambda^2 e^{\lambda v}\sigma_0^2(v)). \tag{40}$$

Поскольку $\lambda^2 e^{\lambda v}\leqslant \lambda e^{2\lambda v}/v$, полагая в (40)

$$\lambda=(2v)^{-1}\ln(zv/\sigma_0^2(v)), \tag{41}$$

найдем (39), если только $\lambda>0$. Если же $\lambda\leqslant 0$, то из (41) вытекает (39), так как в этом случае правая часть в (39) больше единицы. □

Лемма 34. *Если выполнены условия теоремы* 7, *то*

$$\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\|\geqslant 4z)\leqslant 4\exp(\lambda^2(v)\sigma_0^2(v)-\lambda(v)z)\quad \forall z>0. \tag{42}$$

Доказательство. Из (5) и (30) при $\lambda\leqslant\lambda(v)$ имеем

$$\begin{aligned}b_j(\lambda)\leqslant \mathbf{M}(\xi_j^{[v]})^2\exp(\ln(2+H(\xi_j^{[v]})/(\xi_j^{[v]})^2)&=\\ +2\mathbf{M}(\xi_j^{[v]})^2+\mathbf{M}H(\xi_j^{[v]})&\leqslant 3\mathbf{D}\xi_j.\end{aligned} \tag{43}$$

Последнее неравенство в (43) вытекает из (10). Подставляя (43) в (29) при $x=2z$ и $\lambda=\lambda(v)/2$, получаем (42). □

Теорема 6 следует теперь из лемм 30, 33 и неравенства

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\|S-W'-S^{(v)}\|\geqslant x_0+Cz)=\mathbf{P}(\|S^*-W'+Z^{(*)}\|\geqslant\\ \geqslant x_0+Cz)\leqslant \mathbf{P}(\|S^*-W'\|\geqslant x_0)+\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\|\geqslant Cz),\end{aligned}$$

справедливого в силу леммы 29. Аналогично теорема 7 вытекает из (44) и лемм 31 и 34. Для доказательства следствия 3 надо воспользоваться леммой 16 при $x=2z$ и увеличить постоянную C в (9) и (11).

§ 5. ОЦЕНКИ В ТЕРМИНАХ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ

В данном параграфе рассматривается случай, когда $H(x)=x^\alpha$ и

$$L_\alpha\equiv\sum\mathbf{M}|\xi_j|^\alpha<\infty,\quad 2\leqslant\alpha<\infty. \tag{1}$$

Следствие 4. *Для любых чисел $\alpha\geqslant 2$ и $b\geqslant 1$ существует такой винеровский процесс W, что неравенство*

$$\mathbf{P}(|S-W|\geqslant C\alpha bx)\leqslant(L_\alpha/bx^\alpha)^b+\mathbf{P}(\max|\xi_i|>x) \tag{2}$$

справедливо при всех $x>0$.

Следствие 5. *В условиях следствия* 4

$$\mathbf{M}\|S-W\|^\alpha\leqslant(C\alpha)^\alpha L_\alpha. \tag{3}$$

Ранее неравенства, аналогичные (2) и (3), были получены в [9, теорема 5], но с худшей зависимостью от параметров α и b. Отметим, что в следствиях 4 и 5 не исключается случай, когда

$$t_\infty\equiv B^2\equiv\sum\mathbf{D}\xi_j=\infty. \tag{4}$$

Замечание 4. Воспользуемся соотношением

$$\mathbf{P}(\|S\|>(1+C\alpha)bx)\leqslant\mathbf{P}(\|W\|>bx)+\mathbf{P}(\|S-W\|>C\alpha bx). \tag{5}$$

Из (2) и (5) получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\sup_{n\geqslant 1}\left|\sum_{j\leqslant n}\xi_j\right|>(1+C\alpha)bx\right)\leqslant 2\exp(-b^2x^2/2B^2)+\\ +(L_\alpha/bx^\alpha)^b+\sum\mathbf{P}(|\xi_j|>x)\quad\forall x=0.\end{aligned} \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что с точностью до постоянной C оценка (6) совпадает с соответствующим неравенством С. В. Нагаева — Д. Х. Фука (см. [16, следствие 3]). Таким образом, оценку (2) можно рассматривать как усиление неравенства (5), причем в (2) отсутствует («сокращается») слагаемое, зависящее от B, т. е. соответствующее «нормальной компоненте». В частности, неравенство (2) имеет смысл и при выполнении (4), в то время как соотношения (5) и (6) становятся тривиальными.

Если из процесса S «выбросить» $m-1$ наибольших скачков, то неравенство (2) можно усилить.

Следствие 6. *В условиях следствия 4 при всех натуральных m*

$$\mathbf{P}(\|Z^{[m]}-W\| \geqslant C\alpha m x) \leqslant (L_\alpha/mx^\alpha)^m \quad \forall x>0. \tag{7}$$

Выделим теперь из процесса S «ступенчатую составляющую» $S^{(c)}$.

Следствие 7. *Для любого $v>0$ существует независящий от $S^{(v)}$ винеровский процесс W, удовлетворяющий неравенству*

$$\mathbf{P}(\|S-W-S^{(v)}\| \geqslant C(\alpha v+x)) \leqslant 9e^{-x/v} \tag{8}$$

при всех таких x, что

$$x \geqslant L_\alpha/v^{\alpha-1} \quad \text{или} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2v. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь более частный случай, когда

$$B^2 = \sum \mathbf{D}\xi_j = 1, \tag{10}$$

$$\forall j \quad \mathbf{M}|\xi_j|^\alpha \leqslant l^{\alpha-2}\mathbf{D}\xi_j. \tag{11}$$

Следствие 8. *Пусть выполнены условия* (10), (11) *и*

$$v^{\alpha-2} \geqslant l^\alpha \ln(2+v/l). \tag{12}$$

Тогда существует независящий от $S^{(v)}$ винеровский процесс W такой, что при всех $b \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\|S-W'-S^{(v)}\| \geqslant C(\alpha)(1+b)v) \leqslant (l/v)^b. \tag{13}$$

Следствие 9. *Пусть верны предположения* (10)—(12) *и дополнительно*

$$v^{2\alpha-2} \geqslant l^{2\alpha-4}\ln(2+v/l). \tag{14}$$

Тогда утверждение следствия 8 остается справедливым при замене в нем процесса W' на винеровский процесс W.

При некотором фиксированном n рассмотрим более простой процесс $S=S_n$, определенный во введении. Предположим дополнительно, что

$$\mathbf{M}|\zeta|^\alpha < \infty, \quad \alpha>2. \tag{15}$$

В этом случае условие (11) справедливо при

$$l = l_{\alpha,n} = (\mathbf{M}|\zeta|^\alpha)^{1/(\alpha-2)}/n^{1/2} \geqslant n^{1/2}. \tag{16}$$

Обозначим

$$v_0(n) = ((\mathbf{M}|\zeta|^\alpha)^{\alpha/(\alpha-2)}\ln(n+1)/n^{\alpha/2})^{1/(\alpha+2)}, \tag{17}$$

$$v(n) = (\mathbf{M}|\zeta|^\alpha \ln^{1/2}(n+1)/n^{(\alpha-2)/2})^{1/(\alpha-1)} \text{ при } \alpha \leqslant 4, \tag{18}$$

$$v(n) = v_0(n) \text{ при } \alpha \geqslant 4. \tag{19}$$

Подставляя $v=v_0(n)$ в следствие 8 и $v=v(n)$ в следствие 9 и учитывая предположения (15)—(19), нетрудно понять, что при соответствующем выборе чисел b справедливо

Следствие 10. *Если $S=S_n$ и $v=v_0(n)$, то найдется независящий от $S^{(v)}$ винеровский процесс W такой, что*

$$\mathbf{P}(\|S-W'-S^{(v)}\| > C(\alpha)v) \leqslant 2(\mathbf{M}|\zeta|^\alpha)^{1/(\alpha-2)}/n^{1/2}. \tag{20}$$

Если же $v=v(n)$, то в (20) *процесс W' можно заменить на винеровский процесс W.*

З а м е ч а н и е 5. Неравенства вида (8), (13), (20) впервые изучались в [15]. Отметим, что при $\alpha<4$ оценка (20) точнее, чем соответствующие утверждения из следствий 3 и 4 работы [15]. Это усиление точности объясняется тем, что в [15] вместо $S^{(v)}$ использовался процесс более сложного вида.

Доказательство следствия 4. В силу определения класса $\mathscr{H}$ см. § 2 в рассматриваемом случае $H_v(x) = H(x) = x^\alpha$ и

$$\mathscr{K}(H_v) = \sum_{m\geqslant 1} 2^{-m} \ln 2^{\alpha m} = C\alpha. \tag{21}$$

Пусть

$$x = 4\alpha b y, \quad z = 4y, \quad v = \mathrm{e}(L_\alpha/b)^{1/\alpha}. \tag{22}$$

Заметим, что в этом случае

$$(1+b)e^{-4\alpha b y/v} \leqslant (L_\alpha/by^\alpha)^b/2^\alpha, \tag{23}$$

$$(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b \leqslant (L_\alpha/by^\alpha)^b/2^\alpha. \tag{24}$$

Подставляя (21)—(24) в утверждение теоремы 3, находим, что

$$\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant C\alpha(v+by)) \leqslant (L_\alpha/by^\alpha)^b + \mathbf{P}(\max|\xi_j| > y). \tag{25}$$

Если $x = y \geqslant v/\mathrm{e}$, то (2) следует из (25). Если же $x < v/\mathrm{e}$, то неравенство (2) выполняется очевидным образом, так как правая часть в нем больше единицы ввиду (22). □

Совершенно аналогично из (21)—(24) и следствия 1 вытекает следствие 6.

Доказательство следствия 5. Из (2) при $b = 2$ имеем

$$\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant C\alpha x) \leqslant (L_\alpha/x^\alpha)^2 + \sum \mathbf{P}(|\xi_j| > x). \tag{26}$$

Воспользуемся теперь неравенством

$$\mathbf{M}|\zeta|^\alpha = \int_0^\infty \mathbf{P}(|\zeta| > x)\, dx^\alpha. \tag{27}$$

При $\zeta = \|S-W\|/C\alpha$ из (26) и (27) находим, что

$$\mathbf{M}\|S-W\|^\alpha/(C\alpha)^\alpha \leqslant A^\alpha + \int_A^\infty (L_\alpha/x^\alpha)^2\, dx^\alpha +$$
$$+ \sum \int_0^\infty \mathbf{P}(|\xi_j| > x)\, dx^\alpha = A^\alpha + L_\alpha^2/A^\alpha + L_\alpha. \tag{28}$$

Последнее равенство в (28) вытекает из (27) при $\zeta = \xi_j$. Полагая $A^\alpha = L_\alpha$ в (28), получаем (3). □

Доказательство следствия 7. Если $x \leqslant 2v$, то неравенство (8) выполнено очевидным образом, так как правая часть в нем в этом случае больше единицы. Поэтому далее предполагаем справедливым левое неравенство в (9). Из этого факта и леммы 17 имеем

$$\sigma^2(v) \leqslant 4\sum \mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2 \leqslant 4L_\alpha/v^{\alpha-2} \leqslant 4vx. \tag{29}$$

Далее, ввиду неравенств Гёльдера и Чебышева

$$\sigma_0^2(v) \leqslant \sum (\mathbf{M}|\xi_j|^\alpha)^{2/\alpha}\mathbf{M}|\xi_j|^{\alpha-2}/v^{\alpha-2} \leqslant \sum \mathbf{M}|\xi_j|^\alpha/v^{\alpha-2} = L_\alpha/v^{\alpha-2} \leqslant vx. \tag{30}$$

Воспользуемся теперь теоремой 6 и следствием 3, заменив в них x и z на $2x$ и $\mathrm{e}x$ соответственно. Учитывая (21), получаем

$$\mathbf{P}(\|S-W-S^{(v)}\| \geqslant C(\alpha v + x)) \leqslant (1 + L_\alpha/v^\alpha)\,\mathrm{e}^{-2x/v} +$$
$$+ 4(\sigma_0^2(v)/\mathrm{e}xv)^{x/v} + 4\exp(-4x^2/\sigma^2(v)). \tag{31}$$

Подставляя (29) и (30) в (31), находим (8). □

Лемма 35. *Если выполнено* (11), *то утверждение теоремы* 7 *справедливо при*

$$\lambda(v) = c(\alpha)v^{-1}\ln(2+v/l). \tag{32}$$

Доказательство. Условие (11) совпадает с основным предположением теоремы 7 при $H(x)=x^{\alpha}/l^{\alpha-2}$. Следовательно, нам осталось доказать лишь, что

$$g(x)\equiv x^{-1}\ln(2+(x/l)^{\alpha-2})\geqslant c(\alpha)g(v)\quad \forall x\in(0,\ v]. \tag{33}$$

Но (33) легко проверить непосредственно, если разобрать два варианта: $x\geqslant 2l$ и $x\leqslant 2l$. □

Лемма 36. *Если справедливы предположения* (10) *и* (11), *то*

$$\sigma_0^2(v)\leqslant l^{\alpha}/v^{\alpha}\qquad \forall v>0, \tag{34}$$

$$\sigma^2(v)\leqslant 4l^{2(\alpha-2)}/v^{2(\alpha-2)}\quad \forall v>0. \tag{35}$$

Доказательство. Используя (11) и неравенство Чебышева, находим

$$\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2=\mathbf{M}\{|\xi_j|^2;\ |\xi_j|>v\}\leqslant \mathbf{M}|\xi_j|^{\alpha}/v^{\alpha-2}\leqslant \mathbf{D}\xi_j(l/v)^{\alpha-2}. \tag{36}$$

Из (36) и леммы 17 немедленно следует, что

$$\sigma^2(v)\leqslant 4\sum(\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2)^2/\mathbf{D}\xi_j\leqslant 4(l/v)^{2(\alpha-2)}\sum \mathbf{D}\xi_j. \tag{37}$$

Далее, опять воспользуемся неравенствами Гёльдера, Чебышева и (11). При всех j имеем

$$\mathbf{D}^{\alpha/2}\xi_j\leqslant \mathbf{M}|\xi_j|^{\alpha}\leqslant l^{\alpha-2}\mathbf{D}\xi_j, \tag{38}$$

$$\mathbf{P}(|\xi_j|>v)\leqslant \mathbf{M}|\xi_j|^{\alpha}/v^{\alpha}\leqslant l^{\alpha-2}\mathbf{D}\xi_j/v^{\alpha}. \tag{39}$$

Из (38) и (39) немедленно получаем

$$\forall j\quad \mathbf{D}\xi_j\leqslant l^2,\quad \mathbf{P}(|\xi_j|>v)\leqslant l^{\alpha}/v^{\alpha}. \tag{40}$$

Неравенство (40) показывает, что

$$\sigma_0^2(v)\equiv\sum \mathbf{D}\xi_j\mathbf{P}(|\xi_j|>v)\leqslant(l^{\alpha}/v^{\alpha})\sum \mathbf{D}\xi_j. \tag{41}$$

Подставляя равенство (10) в (41) и (37), находим (34) и (35) соответственно.

Доказательство следствия 8. Пусть до конца параграфа $c(\alpha)$ обозначает постоянную, введенную в (32) и (33). Положим

$$x=(\alpha/c(\alpha)+b/c(\alpha)+2)v,\quad z=(4c(\alpha)+b/c(\alpha)+4/c(\alpha))v. \tag{42}$$

Таким образом, ввиду (32) и (42)

$$(2+v/l)^{\alpha}e^{-\lambda(v)x}=(2+v/l)^{-b-2c(\alpha)}\leqslant(l/v)^b, \tag{43}$$

$$e^{(4c(\alpha)-z)\lambda(v)}=(2+v/l)^{-b-4}\leqslant(l/v)^b/16. \tag{44}$$

Применяя (12) и (42), находим

$$x^{-2}\leqslant v^{-2}/4\leqslant(v/l)^{\alpha}/4\ln(2+v/l)\leqslant(2+v/l)^{\alpha}/2. \tag{45}$$

Из (10), (43) и (45) получаем

$$x^{-2}B^2e^{-(\lambda v)x}\leqslant(l/v)^b/2. \tag{46}$$

Далее, используя (12), (32) и (34), нетрудно установить, что

$$2\lambda(v)\sigma_0^2(v)\leqslant 2c(\alpha)(l^{\alpha}/v^{\alpha+1})\ln(2+v/l)\leqslant 2c(\alpha)v. \tag{47}$$

Но из (44) и (47) немедленно вытекает

$$4\exp(2\lambda^2(v)\sigma_0^2(v)-\lambda(v)z)\leqslant(l/v)^b/4. \tag{48}$$

Подставив неравенства (46) и (48) в теорему 7, найдем требуемую оценку (13). □

Доказательство следствия 9. Ввиду (32), (35) и (14)

$$\sigma^2(v)\lambda(v)\leqslant 4(l/v)^{2(\alpha-2)}c(\alpha)v^{-1}\ln(2+v/l)\leqslant 4c(\alpha)v\leqslant z. \tag{49}$$

Из (44) и (49) имеем

$$4\exp(-z^2/\sigma^2(v))\leqslant 4e^{-z\lambda(v)}\leqslant(l/v)^b/4. \tag{50}$$

Воспользуемся теперь следствием 3, заменяя в нем теорему 7 более частным следствием 8. Находим, что требуемая оценка является суммой неравенств (46), (48) и (50) при x и z, определенных в (42).

§ 6. ОЦЕНКИ В ТЕРМИНАХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ

Пусть четная функция $H(\cdot)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4, т. е.

$$\forall j \quad \mathbf{M}H(\xi_j)\leqslant \mathbf{D}\xi_j, \tag{1}$$

$$0\leqslant h(x)\equiv H(x)/x^2\uparrow \text{ при } x\geqslant 0. \tag{2}$$

Предположим дополнительно, что

$$h_0(x)\equiv x^{-1}\ln(2+h(x))\geqslant h_0(y)/K \quad \forall 0\leqslant x\leqslant y, \tag{3}$$

где $K\geqslant 1$ — некоторая постоянная.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (1)—(3), *а число* v *удовлетворяет неравенству*

$$B^2\equiv \sum \mathbf{D}\xi_j\leqslant K^2H(v). \tag{4}$$

Тогда существует такой винеровский процесс W, *что*

$$\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant CKbv)\leqslant B^2/bH(v)h^b(v)+\mathbf{P}(\max|\xi_j|>v) \quad \forall b\geqslant 1. \tag{5}$$

Следствие 11. *Пусть выполнено условие*

$$\forall_j \quad \mathbf{M}\xi_j^2\exp(|\lambda\xi_j|^\beta)\leqslant 3D\xi_j \tag{6}$$

где

$$0\leqslant\beta\leqslant 1,\quad \lambda>0. \tag{7}$$

Тогда при любом фиксированном $v>0$ *найдется такой винеровский процесс* W, *что*

$$\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant Cv)\leqslant 4B^2v^{-2}\exp(-(\lambda v)^\beta). \tag{8}$$

Следствие 12. *Пусть четная функция* $H_0(\cdot)$ *и положительные числа* K_0, x_0 *и* γ *удовлетворяют следующим условиям*:

$$\forall j \quad \mathbf{M}H_0(\xi_j)\leqslant K_0\mathbf{D}\xi_j, \tag{9}$$

$$0\leqslant H_0(x)/x^{2+\gamma}\uparrow \text{ при } x\geqslant 0, \text{ где } \gamma>0, \tag{10}$$

$$x^{-1}\ln H_0(x)\downarrow \text{ при } x\geqslant x_0\geqslant 0. \tag{11}$$

Тогда для любого v *такого, что* $H_0(v)\geqslant K_0v^2$, *можно построить так винеровский процесс* W, *что будет верно неравенство*

$$\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant CKv)\leqslant 2B^2/H(v), \tag{12}$$

где постоянная K *зависит только от чисел* K_0, x_0 *и* γ.

Таким образом, следствие 12 содержит в качестве частного случая утверждение теоремы 4 из [6], где рассматривался простейший процесс $S=S_n$. Отметим еще, что в теореме 8 и следствиях 11 и 12 способ построения процесса W существенно зависит от числа $v>0$.

При доказательстве теоремы 8 будем следовать схеме вывода теоремы 4 и будем использовать очевидное соотношение

$$\mathbf{P}(\|S-S'\|\neq 0)=\mathbf{P}(\max|\xi_j|>v) \tag{13}$$

вместо более точной, но и более сложной, оценки из леммы 22.

Лемма 37. *Если выполнены условия теоремы* 8, *то при всех* $b\geqslant 1$

$$\mathbf{P}(\|S'-W'\|\geqslant CKbv)\leqslant B^2/2bH(v)h^b(v). \tag{14}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что в силу (3)

$$\lambda(v)\equiv\min_{0<x\leqslant v} h_0(x)\geqslant h_0(v)/K. \tag{15}$$

Требуемое утверждение (14) вытекает из (15) и леммы 21 при $x = 4Kbv$, так как в этом случае

$$x^{-2}B^2e^{-\lambda(v)x/4} \leqslant (4bv)^{-2}B^2(2+h(v))^{-b}. \ \Box$$

Лемма 38. *Если выполнены условия теоремы* 8, *то*

$$\mathbf{P}(\|W - W'\| \geqslant 8bv) \leqslant B^2/2bH(v)h^b(v). \tag{16}$$

Доказательство. Применяя неравенство Чебышева и учитывая (1) и (2), получаем

$$\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2 = \mathbf{M}\{|\xi_j|^2; |\xi_j| > v\} \leqslant \mathbf{M}H(\xi_j)/h(v) \leqslant D\xi_j/h(v). \tag{17}$$

Из (17) и леммы 17 имеем

$$\sigma^2(v) \leqslant 4\sum(\mathbf{D}\xi_j/h(v))^2\,\mathbf{D}\xi_j = 4B^2/h^2(v). \tag{18}$$

Используя (18) и лемму 16, находим

$$\mathbf{P}(\|W - W'\| \geqslant 4Kbv) \leqslant 4\exp(-8b^2K^2v^2h(v)/B^2) \leqslant$$
$$\leqslant 4(B^2/8bK^2H(v)h(v))^b \quad \forall b \geqslant 1. \tag{19}$$

Из (4) и (19) вытекает (16). $\Box$

Подставляя теперь неравенства (13), (14) и (16) в лемму 24, немедленно получаем требуемое утверждение (5).

Доказательство следствия 11. Из (6)—(7) вытекает справедливость всех условий теоремы 8 при

$$H(x) = x^2\exp(|\lambda x|^\beta)/3 \text{ и } K = C \geqslant 2. \tag{20}$$

Кроме того, будем считать, что выполнено условие (4) и

$$4B^2 \leqslant v^2\exp((\lambda v)^\beta) = 3H(v), \tag{21}$$

поскольку в противном случае правая часть в (8) больше единицы. Далее, используя (1) и неравенство Чебышева, имеем

$$\mathbf{P}(\max|\xi_j| > v) \leqslant \sum\mathbf{M}H(\xi_j)/H(v) \leqslant B^2/H(v). \tag{22}$$

Учитывая (20)—(22), из теоремы 8 при $b = 3$ находим (8). $\Box$

Доказательство следствия 12. Нам достаточно убедиться, что предположения (9)—(11) влекут справедливость условий (1)—(3) теоремы 8 при

$$H(x) = H_0(x)/K_0 \text{ и } h(x) = H_0(x)/K_0x^2. \tag{23}$$

При этом нужно лишь проверить, что из (10) и (11) вытекает (3) при некотором K, зависящем от K_0, x_0 и $\gamma > 0$.

Заметим, что в силу (10) существует такое x_*, что

$$h(x_*) \geqslant 2, \quad K_0x_*^2 \geqslant 2, \tag{24}$$

$$(H_0(x_*)/x_*^{2+\gamma/2})^{1-\rho} \geqslant K_0 \text{ при } \rho = \gamma/(4+\gamma) > 0. \tag{25}$$

Ввиду (24)

$$H_0(x) = K_0x^2h(x) \geqslant 2 + h(x) \quad \forall x \geqslant x_*, \tag{26}$$

а из (25) при тех же x вытекает

$$h(x) = H_0^\rho(x)(H_0(x)/x^{2+\gamma/2})^{1-\rho}/K_0 \geqslant H^\rho(x). \tag{27}$$

Из (26) и (27) имеем

$$h_0(x) \geqslant x^{-1}\ln h(x) \geqslant \rho x^{-1}\ln H_0(x) \geqslant \rho h_0(x) \quad \forall x \geqslant x_*. \tag{28}$$

Поскольку $h(x)$ монотонно возрастает в силу (10), очевидно

$$x^{-1}\ln 2 \leqslant h_0(x) \leqslant x^{-1}\ln(2 + h(x_*)) \quad \forall x \in (0, x_*]. \tag{29}$$

Так как функции x^{-1} и $x^{-1}\ln H_0(x)$ монотонны ввиду (11), то из (28) и (29) нетрудно извлечь (3) при $K = \ln(2 + h(x_*))/\rho\ln 2$.

Таким образом, следствие 12 вытекает из теоремы 8 при $b=1$ и $H(x)$, определенной в (23), поскольку мы можем всегда предполагать, что $2B^2 \leqslant H(v)$, так как в противном случае правая часть в (12) больше единицы. □

§ 7. ОЦЕНКИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПОПАДАНИЯ В МНОЖЕСТВА

Целью настоящего параграфа является получение оценок для вероятностей вида $\mathbf{P}(S \in A)$, где A — некоторое множество из σ-алгебры $\mathscr{B}$ борелевских множеств пространства $\mathscr{R}(T)$, которому принадлежат траектории процессов S и W. Ключевую роль при этом будет играть следующее известное

Предложение 1. *Если процессы S и W заданы на одном вероятностном пространстве, то для всех борелевских $A \in \mathscr{R}(T)$*

$$\mathbf{P}(S \in A) \leqslant \mathbf{P}(W \in A^{(\varepsilon)}) + \mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{1}$$

где символ $A^{(\varepsilon)}$ обозначает ε-окрестность множества A.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Lambda(\varepsilon) = \sup_{A \in \mathscr{B}} \{\mathbf{P}(S \in A) - \mathbf{P}(W \in A^{(\varepsilon)})\}, \tag{2}$$

которая, как отмечено в [17], является удобной характеристикой близости между распределениями процессов S и W. В частности [1], величина

$$\Lambda = \min\{\varepsilon\colon \Lambda(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}, \tag{3}$$

называется *расстоянием Прохорова* между распределениями процессов S и W. Из (1) и (2) легко выводится известное

Предложение 2. *Если процессы S и W заданы на одном вероятностном пространстве, то*

$$\Lambda(\varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Таким образом, подставив в (1) или (4) любую из полученных выше оценок для $\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant \varepsilon)$, мы автоматически получим оценки для вероятностей $\mathbf{P}(S \in A)$ и расстояний $\Lambda(\varepsilon)$ и Λ. Мы не будем перечислять результаты, которые при этом получатся. Отметим лишь один частный случай следствия 5 и соотношений (2) и (3).

Следствие 13. *Для всех $\alpha \geqslant 2$*

$$\Lambda(\varepsilon) \leqslant (C\alpha)^\alpha L_\alpha/\varepsilon^\alpha \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{5}$$

$$\Lambda \leqslant C\alpha L_\alpha^{1/(\alpha+1)}. \tag{6}$$

В [9] оценки (5) и (6) были получены с α^2 вместо α.

Остановимся теперь на оценках снизу. По аналогии с теоремой 1 в [14] далее доказывается простая

Теорема 9. *Для всех $x \geqslant 2\varepsilon \geqslant 0$*

$$\Lambda(\varepsilon) \geqslant \mathbf{P}(\max|\xi_j| \geqslant x) - \mathbf{P}(\max|\eta_j| \geqslant x - 2\varepsilon), \tag{7}$$

где $\eta_j = W(t_j) - W(t_{j-1})$.

Замечание 6. Из (7) вытекает, что

$$\Lambda(\varepsilon) \geqslant (1/2)\mathbf{P}(\max|\xi_j| \geqslant 4\varepsilon), \tag{8}$$

если только

$$\mathbf{P}(\max|\eta_j| \leqslant 2\varepsilon) \leqslant (1/2)\mathbf{P}(\max|\xi_j| \geqslant 4\varepsilon). \tag{9}$$

Поскольку величины $\{\eta_j\}$ имеют нормальные распределения, неравенства (8) и (9) имеют место достаточно часто. В частности, все полученные в работе оценки будут неулучшаемыми каждый раз, когда правая часть в них лишь на константу отличается от $\mathbf{P}(\max|\xi_j| \geqslant z)$.

Отметим еще, что теорема 9 содержит в явном виде неравенство, которое фактически использовалось рядом авторов при доказательстве неулучшаемости неравенства (6).

Обозначим через $\Lambda^{[m]}(\varepsilon)$ величину, которая получится, если в определении (4) заменить S на $Z^{[m]}$, т. е. если у процесса S «выбросить» $m-1$ наибольших скачков. Нетрудно понять, что в этом случае сохранятся все проведенные выше в этом параграфе рассуждения, если в них использовать $Z^{[m]}$ и $|\xi_{\nu(m)}|$ вместо S и $|\xi_{\nu(1)}|=\max|\xi_j|$. В частности, из следствия 6 вытекает

Следствие 14. *Для всех* $\alpha\geqslant 2$, $m\geqslant 1$ *и* $\varepsilon>0$

$$\Lambda^{[m]}(\varepsilon)\leqslant((C\alpha m)^\alpha L_\alpha/\varepsilon^\alpha)^m. \tag{10}$$

Как и следовало ожидать, оценка (10) при $m>1$ точнее, чем (5).

Приступим к изучению оценок для разности

$$\Delta(A)=|\mathbf{P}(S\in A)-\mathbf{P}(W\in A)|. \tag{11}$$

Мы будем использовать известное

Предложение 3. *Для любого борелевского* A

$$\Delta(A)\leqslant \mathbf{P}(W\in A'^{(\varepsilon)})+\Lambda(\varepsilon)\quad \forall\varepsilon>0, \tag{12}$$

где через $A'^{(\varepsilon)}$ *обозначена* ε*-окрестность границы множества* A.

Предположим теперь, что множество A имеет липшицеву границу [5], т. е.

$$\mathbf{P}(W\in A'^{(\varepsilon)})\leqslant \mathscr{K}_A\varepsilon\quad \forall\varepsilon>0. \tag{13}$$

Из (4), (12) и (13), очевидно, вытекает

Предложение 4. *Если выполнено условие* (13), *то*

$$\Delta(A)\leqslant \mathscr{K}_A\varepsilon+\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant\varepsilon)\quad \forall\varepsilon>0. \tag{14}$$

Неравенство (14) лежит в основе получения большинства оценок для $\Delta(A)$ в принципе инвариантности. В частности, из (5) и (14) при $\varepsilon=\alpha(L_\alpha/\mathscr{K}_A)^{1/(\alpha+1)}$ вытекает

Следствие 15. *Если выполнено условие* (13), *то*

$$\Delta(A)\leqslant C\alpha(\mathscr{K}_A^\alpha L_\alpha)^{1/(\alpha+1)}\quad \forall\alpha\geqslant 2. \tag{15}$$

Поскольку неравенство (5) неулучшаемо, естественно было ожидать неулучшаемости и оценки (15). Но на самом деле справедливо более точное утверждение.

Теорема 10. *Если выполнено условие* (13) *и* $L_\alpha<\infty$ *при некотором* $\alpha\geqslant 2$, *то*

$$\Delta(A)\leqslant C\alpha\mathscr{K}_A L_\alpha^{1/\alpha}(\ln(2+1/\mathscr{K}_A L_\alpha^{1/\alpha}))^{1-1/\alpha}. \tag{16}$$

При $\alpha\leqslant 4$ это утверждение было доказано в [14].

Замечание 7. В [5] приведен принадлежащий С. В. Нагаеву пример, который показывает, что оценка (16) неулучшаема с точностью до логарифмического множителя.

Избавимся теперь от логарифма в (16). Для этого нам потребуется более жесткое ограничение, чем $L_\alpha<\infty$.

Теорема 11. *Пусть выполнено условие* (13) *и*

$$\forall j\quad \mathbf{M}|\xi_j|^\alpha\leqslant l^{\alpha-2}\mathbf{D}\xi_j, \tag{17}$$

причем

$$l\leqslant 1,\quad \alpha\geqslant 2,\quad B^2=\sum\mathbf{D}\xi_j=1. \tag{18}$$

Тогда

$$\Delta(A)\leqslant C(\alpha)\mathscr{K}_A\ln(1+1/\mathscr{K}_A)\,l^{(\alpha-2)/\alpha}. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь простейший случай из § 1.

Следствие 16. *Если* $S=S_n$ *и справедливо* (13), *то*

$$\Delta(A)\leqslant C(\alpha)\mathscr{K}_A\ln(1+1/\mathscr{K}_A)(\mathbf{M}|\zeta|^\alpha)^{1/\alpha}/n^{(\alpha-2)/2\alpha}. \tag{20}$$

Отметим, что в теоремах 10 и 11 удалось усилить неравенство (15) благодаря тому, что вместо предложения 4 использовалось

Предложение 5. *Пусть случайные процессы S и W заданы на одном вероятностном пространстве таким образом, что процесс W не зависит от некоторой случайной величины $\varepsilon_0 \geqslant 0$. Тогда при выполнении* (13)

$$\Delta(A) \leqslant \mathscr{K}_A \mathbf{M}\varepsilon_0 + \mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant \varepsilon_0). \tag{21}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться неравенством (14) при каждом фиксированном $\varepsilon = \varepsilon_0$, что можно сделать благодаря независимости ε_0 и W. Таким образом, оценка (21) оказывается математическим ожиданием от (14) при $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Впервые предложение 5 применялось в [14, 18] в дополнение к методу одного вероятностного пространства Скорохода. В данной работе будет использован следующий частный случай этого утверждения при $\varepsilon_0 = \varepsilon + \|S^{(v)}\|$.

Предложение 6. *Пусть случайный процесс W не зависит от $S^{(v)}$ при некотором $v > 0$. Тогда при выполнении* (13)

$$\Delta(A) \leqslant \mathscr{K}_A(\varepsilon + \mathbf{M}\|S^{(v)}\|) + \mathbf{P}(\|S-W-S^{(v)}\| > \varepsilon) \tag{22}$$

для любого неслучайного $\varepsilon > 0$.

Чтобы вывести (22) из (21), надо положить $\varepsilon_0 = \varepsilon + \|S^{(v)}\|$ и воспользоваться неравенством $\|S-W\| \leqslant \|S-W-S^{(v)}\| + \|S^{(v)}\|$.

Приступим к доказательству теорем 9—11.

Доказательство теоремы 9. Обозначим

$$A(x) = \{u \in \mathscr{R}(T)\colon \max|u(t_j) - u(t_{j-1})| \geqslant x\} \tag{23}$$

и воспользуемся неравенством

$$|u_0(t_k) - u_0(t_{k-1})| \geqslant |u(t_k) - u(t_{k-1})| - 2\|u_0 - u\|, \tag{24}$$

справедливым для всех траекторий $u_0, u \in \mathscr{R}(T)$. Из (23) и (24) вытекает включение

$$A^{(\varepsilon)}(x) \subset A(x-2\varepsilon). \tag{25}$$

Таким образом, используя определение (2) величины $\Lambda(\varepsilon)$ и учитывая (25), находим

$$\begin{aligned}\Lambda(\varepsilon) &\geqslant \mathbf{P}(S \in A(x)) - \mathbf{P}(W \in A^{(\varepsilon)}(x)) \geqslant \\ &\geqslant \mathbf{P}(S \in A(x)) - \mathbf{P}(W \in A(x-2\varepsilon)).\end{aligned} \tag{26}$$

Осталось заметить, что (26) совпадает с (7). □

Доказательство теоремы 10. Прежде всего заметим, что из леммы 15 и неравенства Чебышева вытекает оценка

$$\mathbf{M}\|S^{(v)}\| \leqslant 2\sum \mathbf{M}|\xi_j^{(v)}| \leqslant 2L_\alpha/v^{\alpha-1}. \tag{27}$$

Положим

$$\begin{gathered} E = 2 + 1/\mathscr{K}_A L_\alpha^{1/\alpha}, \quad v = (L_\alpha/\ln E)^{1/\alpha}, \\ x = v\ln E = L_\alpha/v^{\alpha-1}, \quad \varepsilon = \alpha v + x \end{gathered} \tag{28}$$

и воспользуемся следствием 7 при x и v из (28). Получаем

$$\mathbf{P}(\|S-W-S^{(v)}\| \geqslant C(\alpha v + x)) \leqslant 9e^{-x/v} = 9/E \leqslant 9\mathscr{K}_A L_\alpha^{1/\alpha}. \tag{29}$$

Поскольку в следствии 7 винеровский процесс W не зависит от $S^{(v)}$, мы можем применить предложение 6 при $\varepsilon = C(\alpha v + x)$. Подставляя соотношения (27)—(29) в (22), находим (16).

Доказательство теоремы 11. Положим

$$b = (\alpha-2)/2 + \ln(1 + 1/\mathscr{K}_A), \quad v = el^{1-2/\alpha} = xl. \tag{30}$$

Можно проверить, что при указанных l и v выполнены все условия следствия 9, поскольку в этом случае

$$v^{-(\alpha+2)}l^{\alpha}\ln(2+v/l)=e^{-(\alpha+2)}x^{2}\ln(2+x)\leqslant 1,$$
$$v^{-(2\alpha-2)}l^{2\alpha-4}\ln(2+v/l)=e^{-(2\alpha-2)}x^{-(\alpha-1)}\ln(2+x)\leqslant 1,$$

так как $l\leqslant 1$ в силу (18). Применяя следствие 9 при b и v из (30), находим

$$\mathbf{P}(\|S-W-S^{(v)}\|\geqslant C(\alpha)(1+b)v)\leqslant e^{-b}l^{2b\alpha}\leqslant \mathcal{K}_{A}v. \tag{31}$$

Кроме того, в этом случае

$$L_{\alpha}\leqslant l^{\alpha-2}\leqslant v^{\alpha},\quad \mathbf{M}\|S^{(v)}\|\leqslant 2v, \tag{32}$$

ввиду (17), (18) и (30). При выводе второго неравенства в (32) использовано также (27). Поскольку процесс W в следствии 9 не зависит от $S^{(v)}$, мы можем применить предложение 6. Подставляя (31) и (32) в (22) при $\varepsilon=C(\alpha)(b+1)v$, находим требуемую оценку (19).

Неравенство (20) вытекает из (19), если вспомнить, что при $S=S_n$ мы должны положить

$$l=l_{\alpha,n}=(\mathbf{M}|\zeta|^{\alpha})^{1/(\alpha-2)}/n^{1/2}.$$

Этот факт отмечался перед следствием 10.

§ 8. ОЦЕНКИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ С УЧЕТОМ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Рассмотрим теперь вопрос об оценивании относительной погрешности

$$\delta_S(A)=|\mathbf{P}(S\in A)/\mathbf{P}(W\in A)-1|, \tag{1}$$

где, по-прежнему, A — некоторое множество в пространстве траекторий $\mathcal{R}(T)$. Из предложения 3, очевидно, вытекает полезное

Предложение 7. *Для любого борелевского A и всех $\varepsilon>0$*

$$\delta_S(A)\leqslant[\mathbf{P}(W\in A'^{(\varepsilon)})+\Lambda(\varepsilon)]/\mathbf{P}(W\in A). \tag{2}$$

Напомним, что величина $\Lambda(\varepsilon)$ из (2) оценивается в предложении 2. Можно также изучать более грубую, чем $\delta_S(A)$, характеристику

$$\delta_S^{*}(A)=|\ln\mathbf{P}(S\in A)/\ln\mathbf{P}(W\in A)-1|. \tag{3}$$

Для ее оценивания будем пользоваться следующей простой оценкой, вытекающей из (1) и (3).

Предложение 8.

$$\delta_S^{*}(A)\leqslant\ln(1+\delta_S(A))/\ln\mathbf{P}^{-1}(W\in A). \tag{4}$$

По аналогии с [19] рассмотрим теперь частный случай, когда множество $A=A_y$ зависит от некоторого параметра $y>0$, причем

$$\mathbf{P}(W\in A_y)\geqslant c\exp(-(Ky)^2)\quad \forall y\geqslant y_0, \tag{5}$$
$$\mathbf{P}(W\in A_y'^{(\varepsilon)})\leqslant C\varepsilon(1+Ky)e^{K\varepsilon y}\mathbf{P}(W\in A_y)\quad \forall\varepsilon>0, \tag{6}$$

при некоторых $K>0$ и $y\geqslant y_0\geqslant 0$. Простейшие примеры таких множеств будут разобраны в следствии 17.

Предположим, что

$$0<B^2\equiv\sum\mathbf{D}\xi_j<\infty, \tag{7}$$

и введем в рассмотрение нормированную случайную ломаную

$$Z(t)=S(tB^2)/B,\quad t\in T\equiv[0,1]. \tag{8}$$

Теорема 12. *Пусть выполнены условия* (5)—(7) *и*

$$\forall j\quad \mathbf{M}\xi_j^2\exp(|\lambda\xi_j|^{\beta})\leqslant 3\mathbf{D}\xi_j \tag{9}$$

при некоторых $\beta \in (0, 1]$ *и* $\lambda > 0$. *Тогда при* $y \geqslant y_0$ *и*

$$\varepsilon = (\lambda B)^{-1}\{(Ky)^2 + 3\ln(2+\lambda B)\}^{1/\beta} \tag{10}$$

справедливы неравенства

$$\delta_Z(A_y) \leqslant C\varepsilon(1+Ky)e^{\varepsilon Ky}, \tag{11}$$

$$\delta_Z^*(A_y) \leqslant C\varepsilon/(1+Ky). \tag{12}$$

Следствие 17. *Условия* (5) *и* (6) *теоремы* 12 *выполнены при* $K=1$ *и* $y \geqslant 0$ *для следующих двух семейств множеств*:

$$A_y = A_{y,0} \equiv \left\{u \in \mathscr{R}[0, 1]: \max_{t\in[0,1]} |u(t)| > y\right\}, \tag{13}$$

$$A_y = A_{y,+} \equiv \left\{u \in \mathscr{R}[0, 1]: \max_{t\in[0,1]} u(t) > y\right\}. \tag{14}$$

Рассмотрим определенный во введении простейший процесс $Z = S_n$ и предположим, что

$$\mathbf{M}\exp(h|\zeta|^\beta) < \infty \text{ при } \beta \in (0, 1] \text{ и } h > 0. \tag{15}$$

Следствие 18. *Пусть* $Z = S_n$ *и выполнены условия* (5)—(7) *и* (15). *Тогда при* $B^2 = n$ *и некотором* $\lambda > 0$ *справедливы все утверждения теоремы* 12. *В частности, если* $y = y_n$ *и* $n \to \infty$, *то*

$$\delta_{S_n}(A_{y_n}) = O\left((1+y_n)n^{-1/2}(\ln n)^{1/\beta}\right) \quad \text{при} \quad y_n^2 = O(\ln n), \tag{16}$$

$$\delta_{S_n}(A_{y_n}) = O\left(y_n^{1+2/\beta}/n^{1/2}\right) \quad \text{при} \quad \ln n \leqslant y_n^2 = O\left(n^{\beta/(\beta+2)}\right), \tag{17}$$

$$\delta_{S_n}^*(A_{y_n}) = O\left(y_n^{2/\beta-1}/n^{1/2}\right) \quad \text{при} \quad y_n^2 \geqslant \ln n. \tag{18}$$

З а м е ч а н и е 8. Таким образом, если выполнены условия следствия 18 и $y_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$\delta_{S_n}(A_{y_n}) \to 0 \quad \text{при} \quad y_n = o\left(n^{\beta/2(2+\beta)}\right), \tag{19}$$

$$\delta_{S_n}^*(A_{y_n}) \to 0 \quad \text{при} \quad y_n = o\left(n^{\beta/2(2-\beta)}\right). \tag{20}$$

При этом теорема 12 позволяет распространить утверждения (16)—(20) на случай схемы серий с естественной заменой n на B_n^2 (см. [19]).

Из оценок (16) и (17) при $\beta = 1$ вытекает также утверждение теоремы 1 в [20], поскольку в этом случае

$$\delta_{S_n}(A_{y_n}) = O\left((y_n^3 + y_n \ln n)/n^{1/2}\right) = o\left(y_n/n^{1/6}\right)$$

при $1 \leqslant y_n = o(n^{1/6})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 12. Заменяя в предложениях 2 и 7 процесс S на Z, имеем

$$\delta_Z(A) \leqslant [\mathbf{P}(W \in A'^{(\varepsilon)}) + \mathbf{P}(\|Z - W\| \geqslant \varepsilon)]/\mathbf{P}(W \in A). \tag{21}$$

Далее, в силу (8)

$$\mathbf{P}(\|Z - W\| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(\|S - W_0\| \geqslant \varepsilon B), \tag{22}$$

где $W_0(t) = BW(t/B^2)$ — снова винеровский процесс. Таким образом, условия (9) и (10) позволяют воспользоваться утверждением следствия 11 и получить

$$\mathbf{P}(\|S - W_0\| \geqslant \varepsilon B) \leqslant 4\varepsilon^{-2}\exp(-(\lambda\varepsilon B)^2). \tag{23}$$

Подставляя (5)—(6) и (22)—(23) в (21), находим

$$\delta_Z(A) \leqslant C\varepsilon(1+Ky)e^{K\varepsilon y} + \exp\{(Ky)^2 - (\lambda\varepsilon B)^\beta\}/c\varepsilon^2 \tag{24}$$

при всех $\varepsilon > 0$ и $y \geqslant y_0$. Выбирая теперь в (24) число $\varepsilon > 0$ по формуле (10), немедленно приходим к (11), так как в этом случае

$$\exp\{(Ky)^2 - (\lambda\varepsilon B)^\beta\} = (2+\lambda B)^{-3} \leqslant \varepsilon^3.$$

Из (11) и (4) вытекает (12). □

Доказательство следствия 17. Из явного вида распределения $\max\limits_{t\in[01]} W(t)$ (см., например, [12, с. 371] имеем

$$\mathbf{P}(W\in A_{y,+})=2\int\limits_{y}^{\infty}\varphi(x)\,dx\quad \forall y\geqslant 0, \tag{25}$$

$$\mathbf{P}\left(W\in A'^{(\varepsilon)}_{y,+}\right)=2\int\limits_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\varphi(x)\,dx,\quad 0\leqslant y-\varepsilon\leqslant y+\varepsilon<\infty, \tag{26}$$

где $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального распределения. Из (25) и (26) при всех $\varepsilon>0$ и $y\geqslant 0$ находим

$$\mathbf{P}\left(W\in A'^{(\varepsilon)}_{y,0}\right)\leqslant 2\mathbf{P}\left(W\in A'^{(\varepsilon)}_{y,+}\right)\leqslant C\varepsilon e^{\varepsilon y}\varphi(y), \tag{27}$$

$$\mathbf{P}(W\in A_{y,0})\geqslant \mathbf{P}(W\in A_{y,+})\geqslant c\varphi(y)/(1+y). \tag{28}$$

Неравенства (27) и (28) влекут выполнение условий (5) и (6) для множеств из (13) и (14).

Чтобы доказать следствие 18, достаточно убедиться, что из (15) вытекает справедливость (9) при достаточно малом $\lambda>0$. Но этот факт следует из теоремы Лебега, поскольку в данном случае

$$\mathbf{M}\zeta^2\exp(|\lambda\zeta|^\beta)\to\mathbf{M}\zeta^2=\mathbf{D}\zeta \text{ при } \lambda\to 0.$$

Таким образом, соотношения (16)—(18) оказываются частным случаем неравенств (10)—(12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Прохоров Ю. В.** Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения.— 1956.— Т. 1, № 2.— С. 177—238.
2. **Боровков А. А.** Сходимость распределений функционалов от случайных процессов // Успехи мат. наук.— 1972.— Т. 27, № 1.— С. 3—41.
3. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер.— М.: Наука, 1977.— 352 с.
4. **Скороход А. В.** Исследования по теории случайных процессов.— Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961.— 216 с.
5. **Боровков А. А.** О скорости сходимости в принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применения.— 1973.— Т. 18, № 2.— С. 217—234.
6. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV's and sample DF. II.— Z. Wahr. verw. Gebiete.— 1976.— Bd 34, H. 1.— S. 33—58.
7. **Скороход А. В.** Об одном представлении случайных величин // Теория вероятностей и ее применения.— 1976.— Т. 21, № 3.— С. 645—648.
8. **Саханенко А. И.** Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1984.— Т. 3.— С. 4—49.
9. **Саханенко А. И.** Оценки в принципе инвариантности // Там же.— 1985.— Т. 5.— С. 27—44.
10. **Саханенко А. И.** Оценки погрешностей нормальной аппроксимации траекторий случайных блужданий: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.— Новосибирск, 1985.— 305 с.
11. **Зайцев А. Ю.** О гауссовской аппроксимации сверток при выполнении многомерных аналогов условий неравенства Бернштейна // Препринт ЛОМИ Р-9-84.— Л., 1984.— 48 с.
12. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1965.— 656 с.
13. **Дуб Дж. Л.** Вероятностные процессы.— М.: Изд-во Иностр. лит., 1956.— 606 с.
14. **Саханенко А. И.** Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 72—78.
15. **Борисов И. С., Боровков А. А.** Аппроксимация второго порядка случайных ломаных в принципе инвариантности Донскера — Прохорова // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— Т. 31, № 2.— С. 225—245.
16. **Нагаев С. В., Фук Д. Х.** Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин // Там же.— 1971.— Т. 16, № 4.— С. 660—675.
17. **Боровков А. А., Саханенко А. И.** Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности для банаховых пространств // Там же.— 1980.— Т. 25, № 4.— С. 734—744.

18. **Саханенко А. И.** Оценки скорости сходимости в принципе инвариантности // Докл. АН СССР.— 1974.— Т. 219, № 5.— С. 1076—1078.
19. **Боровков А. А.** Граничные задачи, принцип инвариантности, большие уклонения // Успехи мат. наук, 1983.— Т. 83, № 4.— С. 227—254.
20. **Алешкявичене А. К.** Некоторые предельные теоремы для максимума модуля сумм независимых случайных величин. I // Литовск. мат. сб.— 1981.— Т. 21, № 2.— С. 9—36.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ТИПА БЕРГСТРЕМА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. В. НАГАЕВ, В. И. ЧЕБОТАРЕВ

В настоящей работе исследуется асимптотическое разложение для распределения нормы суммы независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве. В этом разложении вместо традиционных полиномов Чебышева — Эджворта участвуют свертки распределения слагаемых с гауссовским. Соответственно остаточный член зависит только от третьего и четвертого моментов. Это существенно повышает точность аппроксимации, если старшие моменты велики. В конечномерном случае разложение такого типа рассматривалось Бергстремом [1]. Отметим, что полученная нами оценка остаточного члена является новой даже в одномерном случае. Практическое значение разложения типа Бергстрема должным образом еще не оценено.

Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в H, $\mathbf{E}X_1 = 0$, T — ковариационный оператор X_1, $F_n(r) = \mathbf{P}\left(\left|n^{-1/2}\sum_1^n X_j\right|^2 < r\right)$, Y_1 — гауссовская случайная величина со значениями в H и тем же самым ковариационным оператором, $\mathbf{E}Y_1 = 0$, $G(r) = \mathbf{P}(|Y_1|^2 < r)$, F и Φ — распределения X_1 и Y_1 соответственно, $\beta_\mu = \mathbf{E}|X_1|^\mu$, $m_n = [n/4] + 1$, $\bar\beta_\mu = \mathbf{E}(|X_1|^\mu;\ |X_1| \leqslant \sigma\sqrt{m_n})$.

В нашем случае предложенное Бергстремом разложение выглядит следующим образом:

$$F^{*n} = \sum_{\nu=0}^{k-1} C_n^\nu \Phi^{*(n-\nu)}*(F-\Phi)^{*\nu} + r_n^{(k)}, \tag{1}$$

где $r_n^{(k)} = (F-\Phi)^{*k}*\sum_{\nu=0}^{n-k} C_{\nu+k-1}^{k-1}\Phi^{*\nu}*F^{*(n-k-\nu)}$. Для $r_n^{(k)}$ в [1] получена оценка $O(n^{-k/2})$ при условии, что распределение F не сингулярно и $\beta_3 < \infty$. Более того, Г. Бергстрем показал, что в одномерном случае из (1) следует разложение Эджворта, причем остаточный член имеет вид $o(n^{-(k-1)/2})$.

В настоящей работе мы получаем аналог разложения Бергстрема в бесконечномерном случае, однако для более узкого класса множеств, а именно, для шаров с центром в нуле.

Введем обозначения: σ^2 — собственные числа оператора T, $\sigma_j^2 \geqslant \sigma_{j+}^2$, $j = 1, 2, \ldots$, $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора T,

$$\Lambda_l=\prod_{j=1}^{l}\sigma_j^2,\quad \sigma^2=\mathbf{E}|X_1|^2,\quad \Gamma_{\mu,l}=\beta_\mu\sigma^\mu\Lambda_l^{-\mu/l},$$

$$\mu\geqslant 2,\quad x(l)=\sum_{j=1}^{l}(x,\,l_j)\,l_j,\quad v_l=\sup\{|\mathbf{E}\exp\{i(x,\,X_1)\}|:\ |x(l)|\geqslant\varepsilon_l\},$$

где $\varepsilon_l=\left(\sigma_1\Gamma_{4,l}^{1/2}\right)^{-1}$, $g(t)=\mathbf{E}\exp\{it|Y_1|^2\}$, $g(t,\,\nu)=g(t(1-\nu/n))$, $\overline{X}_j$, $j=1\div n$,— независимые случайные величины, распределения которых определяются равенствами $\mathbf{P}(\overline{X}_j\in A)=\mathbf{P}(X_j\in A/|X_j|\leqslant\sigma\sqrt{m_n})$ для каждого борелевского множества $A\subset H$, $\overline{g}_n(t)=\mathbf{E}\exp\left\{it\left|n^{-1/2}\sum_1^n\overline{X}_j\right|^2\right\}$, $\overline{F}$ — распределение $\overline{X}_1$,

$$\overline{Q}_{\nu,n}(r)=C_n^\nu\int\limits_{|x|^2<nr}\Phi^{*(n-\nu)}*(\overline{F}-\Phi)^{*\nu}(dx),$$

где $*$ — свертка распределений. Символы $c(\cdot)$ и c с индексами или без них будут означать константы, зависящие только от аргументов, указанных в скобках, и соответственно абсолютные константы. Например, $c(\{\mu_j\})$ означает постоянную, зависящую только от последовательности $\{\mu_j\}$. Если над знаком равенства расположена буква Δ, то это равенство понимается как определение.

Теорема. *Пусть k и l целые числа, $k\geqslant 2$, $l>6k$, $\varepsilon>0$. Тогда*

$$\overline{\Delta}_{k,n}\overset{\Delta}{=}\sup_r\left|F_n(r)-G(r)-\sum_{\nu=1}^{k-1}\overline{Q}_{\nu,n}(r)\right|\leqslant c(k,\,l,\,\varepsilon)[(\Gamma_{3,l}^2/n)^{k/2}+$$
$$+(\Gamma_{4,l}/n)^{l/12-\varepsilon}+n\mathbf{P}(|X_1|>\sigma\sqrt{m_n})+v_l^{n/4}\ln(n\Gamma_{4,l}^{-1}+1)].$$

Заметим, что v_l выполняет ту же функцию, что величина $\sup\{|\mathbf{E}\exp\{itX_1\}|:\ |t|>\sigma^2/12\beta_3\}$ в известной одномерной оценке Л. В. Осипова [2] (см. также [3, с. 197]).

Как и в [1], из сформулированной теоремы можно получить разложение типа Эджворта в гильбертовом пространстве. Это будет сделано в другой нашей работе.

В. Ю. Бенткус [4, теоремы 1.7 и 1.8]) также получил оценку остаточного члена в разложении типа Бергстрема в гильбертовом пространстве. Эта оценка менее точна, чем наша: она формулируется в терминах момента β_{k+2} и не указана явная зависимость от оператора T. Зато в [4] рассматривается более широкий класс множеств, включающий в себя, в частности, все эллипсоиды. Различие, кроме того, состоит в том, что вместо v_l в [4] используется другая характеристика.

Что касается методов доказательств в [4] и данной статье, то они сильно отличаются, хотя и тот и другой основаны на применении аппарата характеристических функций. Метод работы [4] опирается на асимптотическое разложение математических ожиданий гладких функционалов, которое восходит к Ф. Геце [5]. В настоящей работе существенно используется дополнительное усреднение по вспомогательному гауссовскому распределению (см. лемму 1.4). Общим для обоих методов является использование подхода Ф. Геце к оценке характеристических функций (см. [6, лемма 3.37]).

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $g_i(t)=\left(1-2it\sigma_j^2\right)^{-1/2}$, $(x,\,e_j)=x^{(j)}$, A_t — оператор, определяемый равенством $A_te_j=g_j(t)e_j$, $j=1,\,2,\,\ldots$, для любой измеримой функции $f(\cdot,\,\cdot)$ и любых случайных величин X и Y $\mathbf{E}_Xf(X,\,Y)\overset{\Delta}{=}\mathbf{E}\{f(X,\,Y)/Y\}$, $I(A,\,x)\overset{\Delta}{=}I(A)$ — индикатор множества A как функция аргумента x. Комплексный множитель под знак скалярного произведения будем вносить по правилу внесения вещественного множителя: если $x\in H$, $y\in H$, λ — комплексное число, то $\lambda\cdot(x, y)=\sum_1^\infty x^{(j)}y^{(j)}\lambda=(\lambda x, \quad y)=(x, \quad \lambda y)$. Обозначим $\|\lambda x\|^2=(\lambda x, \lambda x)=\lambda^2|x|^2$, $D_s^m f(s)\triangleq\frac{d^m}{ds^m}f(s)$, $H_m(t)=e^{t^2/2}(-1)^m\times$ $\times D_t^m e^{t^2/2}$ — полиномы Чебышева — Эрмита степени m, $H^\nu=\underbrace{H\times\ldots\times H}_{\nu}$, $\int\triangleq\int_H$, $X^s=X-X'$, где X' — независимая копия X. В формулировках лемм 1.7 и 1.9 символы $[(k+1)/2]$ и $[(\nu+1)/2]$ будут обозначать целую часть соответствующего числа. Не ограничивая общности рассуждений, мы будем предполагать, что $\Gamma_{4,l}/n<1$, $\Gamma_{3,l}^2/n<1$. Далее мы это не будем оговаривать специально.

Как известно, если $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ — независимые одномерные стандартные нормальные случайные величины, то для любого $x\in H$ величина $\sum_1^\infty \varkappa_j x^{(j)}$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $|x|^2$ (см., например, [7, с. 52, 53]). Обозначим $(\varkappa, x)=\sum_1^\infty \varkappa_j x^{(j)}$. Величину $\varkappa$ назовем *обобщенной стандартной нормальной случайной величиной в* H.

Далее, мы будем обозначать

$$\mathbf{E}f\left(\sum_{q=1}^{\nu}\overline{W}_q\right)=\int f(x)(\overline{F}-\Phi)^{*\nu}(dx)$$

для любой борелевской функции $f(\cdot)$, *а* $\overline{W}_q$, $q=1\div\nu$, называть *независимыми обобщенными случайными величинами* с одним и тем же распределением $\overline{F}-\Phi$.

В настоящей работе существенно используются результаты статьи [8].

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1.1. *Пусть* $Z=X+Y$, X *и* Y — *независимы*, φ — *измеримое отображение из* H^ν *в* H. *Тогда для любых* $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)\in H^\nu$, *натуральных* $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ *и действительных* $p>1$, $q>1$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, *справедлива оценка*

$$\left|\mathbf{E}\left[\prod_{j=1}^{\nu}(Z, x_j)^{\mu_j}\right]\exp\{it[(Z, \varphi(x_1, \ldots, x_\nu))+|Z|^2]\}\right|\leqslant c(\{\mu_j\})\times$$
$$\times\left(\prod_{j=1}^{\nu}|x_j|^{\mu_j}\right)\mathbf{E}^{1/2p}|f_{X^s}(2t)|^p\sum_{m=0}^{M}\mathbf{E}^{1/2}|Y|^{2(M-m)}\mathbf{E}^{1/q}|X|^{mq},$$

где $M=\sum_{j=1}^{\nu}\mu_j$, $f_x(t)=\mathbf{E}\exp\{it(Y, x)\}$.

Доказательство. Обозначим $\varphi=\varphi(x_1, \ldots, x_\nu)$, $e(\varphi, Z, t)=$ $=\exp\{it[(Z, \varphi)+|Z|^2]\}$. Нетрудно видеть, что

$$\prod_{j=1}^{\nu}(Z, x_j)^{\mu_j}=\sum_{\substack{0\leqslant t_j\leqslant\mu_j,\\ j=1\div\nu}}\prod_{j=1}^{\nu}C_{\mu_j}^{t_j}(X, x_j)^{t_j}(Y, x_j)^{\mu_j-t_j}. \tag{1.1}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского и свойства условных математических ожиданий, получаем, что

$$\left|\mathbf{E}e(\varphi, Z, t)\prod_{j=1}^{\nu}(X, x_j)^{t_j}(Y, x_j)^{\mu_j-t_j}\right| =$$

$$= \left|\mathbf{E}e(\varphi, Y, t)\left(\prod_{j=1}^{\nu}(Y, x_j)^{\mu_j-t_j}\right)\mathbf{E}_X e(\varphi + 2Y, X, t)\prod_{j=1}^{\nu}(X, x_j)^{t_j}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\mathbf{E}^{1/2}\prod_{j=1}^{\nu}|(Y, x_j)|^{2(\mu_j-t_j)}\right)\mathbf{E}^{1/2}\left|\mathbf{E}_X e(\varphi + 2Y, X, t)\prod_{j=1}^{\nu}(X, x_j)^{t_j}\right|^2. \quad (1.2)$$

Далее,

$$\mathbf{E}^{1/2}\mathbf{E}_{x,X'} e(\varphi + 2Y, X, t)\, e(\varphi + 2Y, X', -t)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{\nu}(X, x_j)^{t_j}(X', x_j)^{t_j} = \mathbf{E}^{1/2}e(\varphi, X, t)\times$$

$$\times e(\varphi, X', -t)\, i_{X^s}(2t)\prod_{j=1}^{\nu}(X, x_j)^{t_j}(X', x_j)^{t_j}.$$

Оценивая последнее выражение с помощью неравенства Гельдера, из (1.1) и (1.2) получаем утверждение леммы.

Лемма 1.2. *Для любых $x \in H$, комплексного s справедливо равенство*

$$\mathbf{E}\exp\{\sqrt{2s}(\varkappa, x)\} = \exp\{s|x|^2\}.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из равенства

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\sqrt{2s}\,y\lambda - y^2/2\}\,dy = \exp\{s\lambda^2\}.$$

Лемма 1.3. *Для любых комплексных a и b*

$$D_s^M\exp\{s^2a + sb\}|_{s=0} = \sum_{m=0}^{M} C_M^m H_m(0)(-2a)^{\frac{m}{2}}\, b^{M-m}$$

(*индексы m можно считать четными*).

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из формулы Лейбница и равенства

$$D_s^m\exp\{s^2a\} = (-1)^m H_m(s\sqrt{-2a})\exp\{s^2a\}(-2a)^{\frac{m}{2}}.$$

Лемма 1.4. *Пусть z, y_q — элементы из H, s — комплексное число, $0 \leqslant \lambda_q \leqslant 1$, μ_q — натуральное, $q = 1 \div \nu$. Тогда*

$$A(\{\mu_q\}) \triangleq \mathbf{E}\exp\left\{s\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q(y_q, \varkappa + sz)\right\}\prod_{q=1}^{\nu}(sy_q, \varkappa + sz)^{\mu_q} =$$

$$= \sum{}' a_1 s^{2M-m}\exp\left\{\frac{s^2}{2}\left(\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q y_q, \sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q y_q + z\right)\right\}\prod_{q=1}^{\nu}(y_q, z)^{t_q}\lambda_q^{s_q}\prod_{p=1}^{\nu}(y_p, y_q)^{\mu_{pq}+s_{pq}},$$

где $a_1 = c(\{\mu_{pq}\}, \{t_q\}, \{s_{pq}\}$, $s_q \triangleq \sum_{p=1}^{\nu}s_{pq}$, $\sum'$ означает суммирование по всем параметрам, удовлетворяющим следующим условиям: $0 \leqslant m \leqslant M = \sum_{q=1}^{\nu}\mu_q$, m — четны, $\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}\mu_{pq} = m/2$, $\sum_{q=1}^{\nu}t_q = l_1$, $\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}s_{pq} = M - m - l_1$, $0 \leqslant l_1 \leqslant M - m$, $\sum_{p=1}^{\nu}(\mu_{pq} + \mu_{qp} + s_{qp}) + t_q = \mu_q$, $q = 1 \div \nu$; причем $s_q = 0$, если $\lambda_q = 0$, а $t_q = 0$ $(q = 1 \div \nu)$, если $z = 0$.

Доказательство. Обозначим $\xi_q=(y_q,\ \varkappa+sz)$, $\xi=\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q\xi_q$, $\eta=\sum_{q=1}^{\nu}d_q\xi_q$, $u=\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q y_q$, $u_1=\sum_{q=1}^{\nu}d_q y_q$, где d_q — фиктивные переменные. Имеем

$$A(\{\mu_q\})=\mathbf{E}e^{s\xi}\prod_{q=1}^{\nu}(s\xi_q)^{\mu_q}.$$

Величина $A(\{\mu_q\})$ равна коэффициенту при $\mathbf{P}_M(\{\mu_q\})\prod_{q=1}^{\nu}d_q^{\mu_q}$ в $A_1=s^M\mathbf{E}\eta^M e^{s\xi}$, $\mathbf{P}_M(\{\mu_q\})=M!\Big/\prod_{q=1}^{\nu}\mu_q!$. Обозначим $\varphi(s_1)=\mathbf{E}\exp\{s\xi+s_1\eta\}$. Так как интеграл $\mathbf{E}D_{s_1}^M\exp\{s\xi+s_1\eta\}$ сходится равномерно по $s_1\in[-1,\ 1]$, то в нем можно переставить $\mathbf{E}$ и $D_{s_1}^M$. Следовательно, $A_1=s^M D_{s_1}^M\varphi(0)$. Применяя лемму 1.2, убеждаемся, что

$$\varphi(s_1)=\exp\left\{s(su+s_1u_1,\ z)+\frac{1}{2}\left(s^2|u|^2+2ss_1(u,\ u_1)+s_1^2|u_1|^2\right)\right\}=$$
$$=\exp\left\{\frac{s_1^2}{2}|u_1|^2+s_1s(u_1,\ u+z)+\frac{s^2}{2}(u,\ u+2z)\right\}.$$

Далее, в силу леммы 1.3

$$D_{s_1}^M\varphi(0)=\exp\left\{\frac{s^2}{2}(u,\ u+2z)\right\}\sum_{m=0}^{M}C_M^mH_m(0)\,i^m|u_1|^m s^{M-m}(u_1,\ u+z)^{M-m}.$$

Имеем

$$|u_1|^m=\sum_{\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}\mu_{pq}=m/2}P_{m/2}(\{\mu_{pq}\})\prod_{p=1}^{\nu}\prod_{q=1}^{\nu}[d_pd_q(y_p,\ y_q)]^{\mu_{pq}},$$

$$(u_1,\ u+z)^{M-m}=\sum_{l_1=0}^{M-m}C_{M-m}^{l_1}\left(\sum_{p=1}^{\nu}d_p(y_p,\ z)\right)^{l_1}\left(\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}d_p\lambda_q(y_p,\ y_q)\right)^{M-m-l_1}=$$
$$=\sum_{l_1=0}^{M-m}C_{M-m}^{l_1}\left(\sum_{\sum_{q=1}^{\nu}t_q=l_1}\mathbf{P}_{l_1}(\{t_q\})\prod_{q=1}^{\nu}[d_q(y_q,\ z)]^{t_q}\right)\times$$
$$\times\sum_{\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}s_{pq}=M-m-l_1}\mathbf{P}_{M-m-l_1}(\{s_{pq}\})\prod_{p=1}^{\nu}\prod_{q=1}^{\nu}[d_p\lambda_q(y_p,\ y_q)]^{s_{pq}}.$$

Из предыдущих выкладок вытекает, что

$$A_1=\exp\left\{\frac{s^2}{2}(u,\ u+2z)\right\}\sum_{m=0}^{M}C_M^mH_m(0)\,i^ms^{2M-m}\times$$
$$\times\left(\sum_{\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}\mu_{pq}=m/2}\mathbf{P}_{m/2}(\{\mu_{pq}\})\left(\prod_{p=1}^{\nu}\prod_{q=1}^{\nu}[d_pd_q(y_p,\ y_q)]^{\mu_{pq}}\right)\right)\times$$
$$\times\sum_{l_1=0}^{M-m}C_{M-m}^{l_1}\left(\sum_{\sum_{q=1}^{\nu}t_q=l_1}\mathbf{P}_{l_1}(\{t_q\})\prod_{q=1}^{\nu}[d_q(y_q,\ z)]^{t_q}\right)\times$$
$$\times\sum_{\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}s_{pq}=M-m-l_1}\mathbf{P}_{M-m-l_1}(\{s_{pq}\})\prod_{p=1}^{\nu}\prod_{q=1}^{\nu}[d_p\lambda_q(y_p,\ y_q)]^{s_{pq}}.$$

Лемма доказана.

Обозначим $Z_\nu = n^{-1/2}\left(\sum_1^\nu Y_j + \sum_{\nu+1}^{n-k} \overline{X}_j\right)$, Y_j, $j = \div n$,— независимые копии Y_1, $Y = n^{-1/2} \sum_1^{n-2m_n} Y_j$ при $\nu \geqslant n - 2m_n$, $Y = n^{-1/2} \sum_{2m_n-1}^{n-k} \overline{X}_j$ при $\nu < n - 2m_n$, $X = Z_\nu - Y$.

Лемма 1.5 (см. [8, лемма 1.6]). *Для любых $t > 0$ справедливы оценки* $\mathbf{E}|X|^t \leqslant c(t)\sigma^t$ *и* $\mathbf{E}|Y|^t \leqslant c(t)\sigma^t$.

Лемма 1.6 (см. [8, лемма 1.8]). *Пусть l — натуральное число, $0 < \gamma < l/2$. Тогда при любом $p > 1$*

$$\mathbf{E}^{1/2p} |f_{X^s}(t)|^p \leqslant c(l) [(\Lambda_l^{1/2}|t|^{1/2p} + 1)^{-1} + (\Gamma_{4,l}/n)^{l/4p}] +$$
$$+ c(l, \gamma)(\Lambda_l^{1/l}|t|\Gamma_{4,l}^{1/2}/n^{1/2})^{\gamma/p} + c(3/5)^{n/4}.$$

Обозначим $R_{k,n}(t) = \sum_{\nu=0}^{n-k} C_{\nu+k-1}^{k-1}\mathbf{E}\exp\{it|Z_\nu + \overline{V}n^{-1/2}|^2\}$, где $\overline{V} = \sum_{q=1}^{k} \overline{W}_q$, $N_p(t) = \max_{0<\nu<n-k} \mathbf{E}^{1/2p}|f_{X^s}(2t)|^p$.

Лемма 1.7. *Пусть k и l — целые числа, $0 < \gamma < l/2$, $p > 1$, $k \geqslant 3$. Тогда*

$$|R_{k,n}(t)| \leqslant c(k, l, p, \gamma)(\beta_3/\sigma^3 n^{1/2})^k [(|t|\sigma^2)^{3k} + (|t|\sigma^2)^{[(k+1)/2]}] \times$$
$$\times [\Lambda_l^{1/2p}|t|^{l/2p} + 1)^{-1} + (\Gamma_{4,l}/n)^{l/4p} + (\Lambda_l^{1/l}|t|\Gamma_{4,l}^{1/2}/n^{1/2})^{\gamma/p} + (3/5)^{n/4}].$$

Доказательство. Имеем

$$A \triangleq \mathbf{E}\exp\{it|Z + \overline{V}n^{-1/2}|^2\} = \mathbf{E}\exp\{it|Z|^2\}\times$$
$$\times \mathbf{E}_{\overline{V}}\exp\left\{\overline{it}\left(\left|n^{-1/2}\sum_{q=1}^{k}\overline{W}_q\right|^2 + \left(2Z, n^{-1/2}\sum_{q=1}^{k}\overline{W}_q\right)\right)\right\}, \tag{1.3}$$

где $Z = Z_\nu$. Из леммы 1.2 вытекает, что

$$A = \mathbf{E}\exp\{it|Z|^2\}\mathbf{E}_{\overline{V}}\mathbf{E}_\varkappa \exp\left\{sn^{-1/2}\sum_{q=1}^{k}\xi_q\right\}, \tag{1.4}$$

где $\xi_q = (\overline{W}_q, \varkappa + sZ)$, $s = \sqrt{2it}$.

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\mathbf{E}_{\overline{V}}\mathbf{E}_\varkappa \exp\left\{sn^{-1/2}\sum_1^k \xi_k\right\} = \mathbf{E}_\varkappa\left(\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\exp\{sn^{-1/2}\xi_1\}\right)^k. \tag{1.5}$$

По формуле Тейлора

$$\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\exp\{sn^{-1/2}\xi_1\} = \sum_1^2 \frac{(sn^{-1/2})^j}{j!}\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\xi_1^j +$$
$$+ (sn^{-1/2})^3 \int_0^1 \frac{(1-\lambda)^2}{2}\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\exp\{sn^{-1/2}\xi_1\lambda\}\,\xi_1^3 d\lambda.$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}_{\overline{W}_1}\xi^j = \int (y, \varkappa + sZ)^j Q_1(dy)/b_n,$$

где $Q_1 = (\overline{F} - \Phi)b_n$, $b_n = \mathbf{P}(|X_1| \leqslant \sigma\sqrt{m_n})$.

Вследствие равенства характеристик первого и второго порядка для X_1 и Y_1

$$\int (y, \varkappa + sZ)^j Q_1(dy) = \int (y, \varkappa + sZ)^j Q(j, dy),$$

где

$$Q(i, dy) = \begin{cases} \left((1-b_n)\Phi - I\left(y\colon\ |y| > \sigma\sqrt{m_n}\right)F\right)(dy), & j = 1, 2; \\ Q_1(dy), & j \geqslant 3. \end{cases}$$

В результате мы получаем, что

$$\left(\mathbf{E}_{\overline{W}_1} \exp\{sn^{-1/2}\xi_1\}\right)^k = b_n^{-k} \sum{}'' \left(\prod_{j=1}^{k} c(\mu_j)\right) \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{k} f(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \times$$

$$\times \underbrace{\int \dots \int}_{k} \prod_{j=1}^{k} \left(sn^{-1/2}y_j, \varkappa + sZ\right)^{\mu_j} \exp\{sn^{-1/2}\lambda_j(y_j, \varkappa + sZ)\} \times$$

$$\times Q(\mu_j, dy_j)\, q(\mu_j, d\lambda_j).$$

Здесь Σ'' означает суммирование по всем последовательностям целых чисел $\{\mu_q\}$ таким, что $1 \leqslant \mu_q \leqslant 3$, $f(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \prod\limits_1^k (1-\lambda_j)^2$, $c(\mu) = 1/\mu!$, $\mu = 1, 2$, $c(3) = 1/2$, $q(3, d\lambda) = d\lambda$, $q(\mu, \cdot)$ сосредоточена в 0 при $\mu = 1, 2$.

Снова меняя порядок интегрирования и используя лемму 1.4, мы заключаем, что

$$\mathbf{E}_\varkappa \left(\mathbf{E}_{\overline{W}_1} \exp\{sn^{-1/2}\xi_1\}\right)^k = \sum{}'' \sum{}' A_1(Z), \tag{1.6}$$

где

$$A_1(Z) = b_n^{-k} a_1 \left(\prod_{j=1}^{k} c(\mu_j)\right) s^{2M-m} \left(n^{-1/2}\right)^{2M-m-l_1} \times$$

$$\times \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{k} f(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \left(\prod_{q=1}^{k} \lambda_q^{s_q}\right) \underbrace{\int \dots \int}_{k} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{s^2}{2}\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j n^{-1/2} y_j,\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_i n^{-1/2} y_j + Z\right)\right\} \prod_{q=1}^{k} (y_q, Z)^{t_q} \times$$

$$\times \left[\prod_{p=1}^{k} (y_p, y_q)^{\mu_{pq} + s_{pq}}\right] Q(\mu_q, dy_q)\, q(\mu_q, d\lambda_q). \tag{1.7}$$

В силу леммы 1.1

$$\left|\mathbf{E}_Z \exp\left\{it\left(|Z|^2 + \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j n^{-1/2} y_j, Z\right)\right)\right\} \prod_{q=1}^{k} (y_q, Z)^{t_q}\right| \leqslant c(\{t_q\}) \left(\prod_{q=1}^{k} |y_q|^{t_q}\right) \times$$

$$\times \mathbf{E}^{1/2p} |f_{X^s}(2t)|^p \sum_{\mu=0}^{l_1} \mathbf{E}^{1/2} |Y|^{2(l_1-\mu)} \mathbf{E}^{1/p'} |X|^{\mu p'}, \quad 1/p + 1/p' = 1. \tag{1.8}$$

Используя лемму 1.5, нетрудно показать, что

$$\sum_{\mu=0}^{l_1} \mathbf{E}^{1/2} |Y|^{2(l_1-\mu)} \mathbf{E}^{1/p'} |X|^{\mu p'} \leqslant c(k, p)\, \sigma^{l_1}. \tag{1.9}$$

Далее,

$$I \triangleq \underbrace{\int \dots \int}_{k} \prod_{q=1}^{k} \left[\prod_{p=1}^{k} |(y_p, y_q)|^{\mu_{pq} + s_{pq}}\right] |y_q|^{t_q} |Q(\mu_q, dy_q)| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{q=1}^{k} \int |y_q|^{\sum\limits_{p=1}^{k} (\mu_{pq} + \mu_{qp} + s_{pq} + s_{qp}) + t_q} |Q(\mu_q, dy_q)|.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int |y|^{\lambda} |Q(\mu, dy)| \leqslant c(\lambda, \mu) \beta_3 (\sigma \sqrt{n})^{\lambda-3}$$

при $\lambda = \mu$ или при $\lambda \geqslant \mu \geqslant 3$. С другой стороны,

$$2 \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{k} (\mu_{pq} + s_{pq}) + \sum_{q=1}^{k} t_q = 2M - m - l_1$$

и $\sum\limits_{p=1}^{k} (\mu_{pq} + \mu_{qp} + s_{pq} + s_{qp}) + t_q = \mu_q$, если $\mu_q = 1$ или 2 (см. лемму 1.4). Следовательно,

$$I \leqslant c(k) \beta_3^k (\sigma \sqrt{n})^{2M-m-l_1-3k}. \tag{1.10}$$

Комбинируя (1.7) — (1.10), мы заключаем, что

$$|\mathbf{E} \exp\{it|Z|^2\} A_1(Z)| \leqslant c(k, p) (\beta_3/\sigma^3 n^{3/2})^k (|t|\sigma^2)^{(2M-m)/2} N_p(t).$$

Заметим, что $k \leqslant M \leqslant 3k$, $0 \leqslant m \leqslant M$. Возвращаясь теперь к (1.4) — (1.6), имеем

$$|A| \leqslant c(k, p) N_p(t) [(|t|\sigma^2)^{3k} + (|t|\sigma^2)^{[(k+1)/2]}] (\beta_3 \sigma^{-3} n^{-3/2})^k. \tag{1.11}$$

Из (1.3) и (1.11), оценивая $N_p(t)$ с помощью леммы 1.6 и используя соотношение $\sum\limits_{\nu=0}^{n-k} C_{\nu+k-1}^{k-1} = C_n^k < n^k$, мы получаем утверждение леммы.

Лемма 1.8. *Справедливо тождество*

$$\mathbf{E} \exp\{it|Y_1 + x|^2\} = g(t) \exp\{it\|A_t x\|^2\}.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из формулы (2.10) работы [8].

Обозначим $\bar{P}_{\nu,n}(t) = \int\limits_0^\infty e^{itr} d\bar{Q}_{\nu,n}(r)$.

Лемма 1.9. *Справедлива оценка*

$$|\bar{P}_{\nu,n}(t)| \leqslant c(\nu) |g(t, \nu)| (\beta_3 \sigma^{-3} n^{-1/2})^{\nu} \left[(|t|\sigma^2)^{3\nu} + (|t|\sigma^2)^{\left[\frac{\nu+1}{2}\right]} \right].$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\bar{P}_{\nu,n}(t) = \mathbf{E} \exp\{it|Z + \bar{V} n^{-1/2}|^2\} C_n^{\nu},$$

где $Z = n^{-1/2} \sum\limits_{j=1}^{n-\nu} Y_j$, $\bar{V} = \sum\limits_{1}^{\nu} \bar{W}_q$. В силу лемм 1.8, 1.2

$$\bar{P}_{\nu,n}(t) = C_n^{\nu} g(t, \nu) \mathbf{E} \exp\{it\|n^{-1/2} A_t \bar{V}\|^2\} =$$
$$= C_n^{\nu} g(t, \nu) \mathbf{E}_{\bar{V}} \mathbf{E}_{\varkappa} \exp\{\sqrt{2it}\, n^{-1/2} (\varkappa, A_t \bar{V})\}.$$

Теперь обозначая $\xi_q = (\bar{W}_q, \varkappa)$ и рассуждая, как в лемме 1.7 (см. (1.5) — (1.7) и (1.10) с $l_1 = 0$), получим оценку

$$|\bar{P}_{\nu,n}(t)| \leqslant C_n^{\nu} \sum{}'' \sum{}' |a_1| (|t|\sigma^2)^{(2M-m)/2} |g(t, \nu)| (\beta_3 \sigma^{-3} n^{-3/2})^{\nu},$$

$$M = \sum_{q=1}^{\nu} \mu_q, \quad 1 \leqslant \mu_q \leqslant 3.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 1.10. *При $k \geqslant 1$, $l > 6k - 4$ справедлива оценка*

$$\left| \frac{d}{dr} \left[G(r) + \sum_{\nu=1}^{k-1} \bar{Q}_{\nu,n}(r) \right] \right| \leqslant c(k, l) \Lambda_l^{-1/l}.$$

Доказательство. По формуле обращения

$$\left|\frac{d}{dr}\overline{Q}_{\nu,n}(r)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\overline{P}_{\nu,n}(t)|\,dt.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^m\,|g(t)|\,dt \leqslant c(m,l)\,\Lambda_l^{-(m+1)/l},$$

если $m+1-l/2<0$. В силу леммы 1.9

$$\left|\frac{d}{dr}\overline{Q}_{\nu,n}(r)\right| \leqslant c(l,\nu)(\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^{\nu}\Lambda_l^{-1/l}$$

при $3\nu+1-l/2<0$, $\nu=1\div k-1$. Поскольку $\left|\frac{d}{dr}G(r)\right|\leqslant C(l)\,\Lambda_l^{-1/l}$ при $l\geqslant 3$, то лемма доказана.

Лемма 1.11 (см. [8, лемма 1.9]). *Пусть l — натуральное число, $0<\gamma<l/2$, m — целое, $m\leqslant m_n$, $\alpha^2=m/n$. Тогда*

$$|\overline{g}_n(t)| \leqslant [(\Lambda_l^{1/2}|t|^{l/2}\alpha^{l/2}+1)^{-1}+\alpha^{-l/2}(\Gamma_{4,l}/n)^{l/4}]\,c(l) + \\ + (\alpha|t|\Gamma_{4,l}^{1/2}/n^{1/2})^{\gamma}\Lambda_l^{\gamma/l}c(l,\gamma)+\exp\{-m/2\}.$$

Лемма 1.12 (см. [8, лемма 1.10]). *Пусть l натуральное, $\varepsilon_0>0$. Тогда*

$$|\overline{g}_n(t)| \leqslant c(l)\,[\Lambda_l^{-1/2}(\max(1,\sigma_1\varepsilon_0 n^{1/2})/|t|)^{l/2}+(\Gamma_{4,l}/n)^{l/4}] + \\ + \Big(\sup_{|x(l)|\geqslant\varepsilon_0}|\mathbf{E}\exp\{i(x,X_1)\}|\Big)^{n/4}+e^{-m_n/2}.$$

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Легко видеть, что

$$\overline{\Delta}_{k,n} \leqslant \widetilde{\Delta}_{k,n}+c\cdot n\mathbf{P}(|X_1|>\sigma\sqrt{m_n}), \tag{2.1}$$

где

$$\widetilde{\Delta}_{k,n}=\sup_r\left|\mathbf{P}\left(\left|n^{-1/2}\sum_1^n\overline{X}_j\right|^2<r\right)-G(r)-\sum_{\nu=1}^{k-1}\overline{Q}_{\nu,n}(r)\right|.$$

По неравенству Эссеена и лемме 1.10

$$\widetilde{\Delta}_{k,n}\leqslant c(k,l)\left[\int\limits_{|t|<\tau}|t^{-1}R_{k,n}(t)|\,dt+\tau^{-1}\Lambda_l^{-1/l}\right] \tag{2.2}$$

для любых $\tau>0$, целых $k\geqslant 2$, $l>6k-4$, где

$$R_{k,n}(t)=\overline{g}_n(t)-g(t)-\sum_{\nu=1}^{k-1}\overline{P}_{\nu,n}(t). \tag{2.3}$$

Заметим, что в силу формулы (1) $R_{k,n}(t)$ совпадает с функцией, для которой получена оценка в лемме 1.7.

Для оценки интеграла $J\triangleq\int\limits_{|t|\leqslant\tau}|R_{k,n}(t)/t|\,dt$ у нас заготовлены леммы 1.7, 1.9, 1.11 и 1.12.

Разделим интервал $|t|\leqslant\tau$ на части $\tau_j\leqslant|t|\leqslant\tau_{j+1}$, $j=0\div 3$, $\tau_0=0$, $\tau_4=\tau=\Lambda_l^{-1/l}(n/\Gamma_{4,l})^l$ (остальные τ_j, $j=1\div 3$, будут определены ниже).

Очевидно, что $J \leqslant \sum_{1}^{6} J_\mu$, где

$$J_1 = \int_{|t| \leqslant \tau_1} |t^{-1} R_{k,n}(t)| dt,$$

$$J_\mu = \int_{\tau_{\mu-1} < |t| \leqslant \tau_\mu} |t^{-1} \bar{g}_n(t)| dt, \quad \mu = 2 \div 4,$$

$$J_5 = \int_{|t| \geqslant \tau_1} |t^{-1} \bar{g}(t)| dt, \quad J_6 = \int_{|t| \geqslant \tau_1} \left| t^{-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} \bar{P}_{\nu,n}(t) \right| dt.$$

Положим

$$\Omega(t, p) = \left(\Lambda_l^{1/2p} |t|^{l/2p} + 1\right)^{-1} + (\Gamma_{4,l}/n)^{l/4p} + \left(\Lambda_l^{1/l} |t| \Gamma_{4,l}^{1/2}/n^{1/2}\right)^{\gamma/p} + (3/5)^{n/4},$$

$$\omega_1(\alpha, t) = \Lambda_l^{-1/2} (\alpha |t|)^{-l/2}, \quad \omega_2(\alpha, t) = \left(\alpha |t| \Gamma_{4,l}^{1/2} n^{-1/2}\right)^{l/2} \Lambda_l^{1/2},$$

$$\omega_3(\alpha) = \alpha^{-l/2} (\Gamma_{4,l}/n)^{l/4}, \quad \omega_4(t) = \Lambda_l^{-1/2} \left(\Gamma_{4,l}^{1/2} |t| / n^{1/2}\right)^{-l/2}.$$

Определим τ_1 как решение уравнения $\omega_1(1, t) = \omega_2(1, t)$. Нетрудно видеть, что

$$\tau_1 = \Lambda_l^{-1/l} (n/\Gamma_{4,l})^{1/4}.$$

Заметим, что при $|t| < \tau_1$

$$\omega_1(1, t) > \omega_2(1, t), \tag{2.4}$$

$$\omega_1(1, t) > \omega_3(1). \tag{2.5}$$

Для $|t| \leqslant \tau_1$ мы будем пользоваться леммой 1.7. Очевидно,

$$J_1 \leqslant \int_{|t| \leqslant \Lambda_l^{-1/l}} + \int_{\Lambda_l^{-1/l} < |t| \leqslant \tau_1}.$$

При $|t| \leqslant \Lambda_l^{-1/l}$ $\Omega(t, p) \leqslant c$. Поэтому

$$\int_{|t| \leqslant \Lambda_l^{-1/l}} \leqslant c (\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^k.$$

Вследствие (2.4) при $|t| < \tau_1$

$$\Lambda_l^{\gamma/l} \left(|t| \Gamma_{4,l}^{1/2} n^{-1/2}\right)^\gamma < [\omega_1(1, t)]^{2\gamma/l}. \tag{2.6}$$

Кроме того,

$$(3/5)^{n/4} < c(l) (\Gamma_{4,l}/n)^{l/8} = c(l) \omega_1(1, \tau_1). \tag{2.7}$$

В силу (2.5)—(2.7) при $|t| \leqslant \tau_1$

$$\Omega(t, p) \leqslant c(l) \left([\omega_1(1, t)]^{1/p} + [\omega_1(1, t)]^{2\gamma/lp}\right).$$

Отсюда при $l > 6pk$, $\gamma > 3pk$

$$\int_{\Lambda_l^{-1/l} < |t| \leqslant \tau_1} \leqslant c(k, l, p, \gamma) (\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^k.$$

Таким образом,

$$J_1 \leqslant c(k, l, p, \gamma) (\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^k, \quad l > 6pk, \quad \gamma > 3pk. \tag{2.8}$$

Перейдем к оценке J_2. Заметим, что

$$\omega_1(\alpha, t) = \omega_3(\alpha) |t|^{-l/2} (n/\Gamma_{4,l})^{l/4} \Lambda_l^{-1/2}. \tag{2.9}$$

Поэтому

$$\omega_1(\alpha, t) > \omega_3(\alpha), \tag{2.10}$$

если $|t|^{l/2} < (n/\Gamma_{4,l})^{l/4} \Lambda_l^{-1/2}$, т. е.

$$|t| < \tau_2 \triangleq (n/\Gamma_{4,l})^{1/2} \Lambda_l^{-1/l}.$$

При оценке J_2 мы будем пользоваться леммой 1.11. Пусть $\alpha = \alpha(t)$ удовлетворяет уравнению $\omega_1(\alpha, t) = \omega_2(\alpha, t)$. Это означает, что

$$(\alpha |t|)^{l/2} = \Lambda_l^{-1/2} (n/\Gamma_{4,l})^{l/8}. \tag{2.11}$$

Отсюда

$$\alpha(t) = \Lambda_l^{-1/l} (n/\Gamma_{4,l})^{1/4} |t|^{-1}.$$

Выберем натуральное $m = m(t)$ так, чтобы

$$|m(t)/n - \alpha^2(t)| = \min_m |m/n - \alpha^2(t)| \tag{2.12}$$

и положим в лемме 1.11 $\alpha^2 = m(t)/n$.

Очевидно, $\alpha(\tau_2) = (\Gamma_{4,l}/n)^{1/4}$. Поэтому

$$n\alpha^2(t) > n\alpha^2(\tau_2) = (n\Gamma_{4,l})^{1/2} > n^{1/2}, \quad \tau_1 \leqslant |t| \leqslant \tau_2.$$

Отсюда при $n \geqslant 4$

$$m(t)/n \geqslant \alpha^2(t) - 1/n \geqslant \alpha^2(t)(1 - 1/n\alpha^2(\tau_2)) \geqslant \alpha^2(t)/2, \quad m(t) > n^{1/2}/2. \tag{2.13}$$

Учитывая (2.10), (2.11) и (2.13), получаем

$$J_2 \leqslant \int\limits_{\tau_1 < |t| < \tau_2} \left(c(l)\,\omega_1(\alpha(t), t) + c(\gamma, l)\,[\omega_1(\alpha(t), t)]^{2\gamma/l} + e^{-\sqrt{n}/4}\right)|t|^{-1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c_1(\gamma, l)\left((\Gamma_{4,l}/n)^{\gamma/4} + e^{-\sqrt{n}/4}\right)\ln\left(n\Gamma_{4,l}^{-1}\right) \leqslant c(\gamma, l, \varepsilon)(\Gamma_{4,l}/n)^{l/8-\varepsilon}. \tag{2.14}$$

Мы пользовались здесь равенством $\tau_2/\tau_1 = (n/\Gamma_{4,l})^{1/4}$.

Если $|t| > \tau_2$, то вследствие (2.9)

$$\omega_1(\alpha, t) < \omega_3(\alpha). \tag{2.15}$$

Поэтому разумно определить $\alpha = \alpha(t)$ как решение уравнения $\omega_2(t, \alpha) = \omega_3(\alpha)$. Отсюда

$$\alpha(t) = (|t|\Lambda_l^{1/l})^{-1/2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\omega_2(\alpha(t), t) = \omega_3(\alpha(t)) = (\Gamma_{4,l}|t|/n)^{l/4}\Lambda_l^{1/4}. \tag{2.16}$$

Сравним теперь $\omega_3(\alpha(t))$ и $\omega_4(t)$. Пусть τ_3 — решение уравнения $\omega_3(\alpha(t)) = \omega_4(t)$. Очевидные вычисления дают

$$\tau_3 = (n/\Gamma_{4,l})^{2/3}\Lambda_l^{-1/l}. \tag{2.17}$$

Пусть $m(t)$ удовлетворяет соотношению (2.12). Тогда

$$n\alpha^2(\tau_3) = n^{1/3}\Gamma_{4,l}^{2/3} > n^{1/3}.$$

Отсюда при $\tau_2 < |t| \leqslant \tau_3$, $n \geqslant 8$ имеем

$$m(t)/n \geqslant \alpha^2(t)/2, \quad m(t) \geqslant n^{1/3}/2 \tag{2.18}$$

(ср. (2.13)). Далее,

$$\tau_3/\tau_2 = (\Gamma_{4,l}/n)^{-1/6}. \tag{2.19}$$

Полагая в лемме 1.11 $\alpha^2 = m(t)/n$ и учитывая (2.15)—(2.19), мы находим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$J_3 \leqslant c(\gamma, l)\left((\Gamma_{4,l}\tau_3/n)^{\gamma/2}\Lambda_l^{\gamma/2l} + e^{-m(\tau_3)/2}\right)\ln(\tau_3/\tau_2) \leqslant$$

$$\leqslant c_1(\gamma, l)(\Gamma_{4,l}/n)^{\gamma/6}\ln\left(n\Gamma_{4,l}^{-1}\right) \leqslant c(\varepsilon, \gamma, l)(\Gamma_{4,l}/n)^{l/12-\varepsilon}, \tag{2.20}$$

если γ достаточно близко к $l/2$.

Перейдем к оценке J_4. Если $\tau_3 < |t| \leqslant \tau$, то $\omega_4(t) < \omega_3(\alpha(t))$, где $\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению (2.16). Поэтому в данном случае разумнее использовать лемму 1.12. В результате, полагая $\varepsilon_0 = (\sigma\Gamma_{4,l}^{1/2})^{-1}$, мы получаем оценку

$$J_4 \leqslant c(l)\left[(n/\Gamma_{4,l}\tau_3^2)^{l/4}\Lambda_l^{-1/2} + \left((\Gamma_{4,l}/n)^{l/4} + v_l^{n/4} + \overline{e}^{n/8}\right)\ln(\tau/\tau_3)\right].$$

Нетрудно проверить, что

$$\Lambda_l^{-1/2}(n/\Gamma_{4,l}\tau_3^2)^{l/4} = (\Gamma_{4,l}/n)^{l/12}, \quad \tau/\tau_3 = (n/\Gamma_{4,l})^{l-\frac{2}{3}}.$$

Поэтому

$$J_4 \leqslant c(l)\left((n/\Gamma_{4,l})^{l/12} + v_l^{n/4}\ln(n/\Gamma_{4,l})\right). \qquad (2.21)$$

Нам остается оценить J_5 и J_6. Используя неравенство

$$|g(t)| \leqslant \Lambda_l^{-1/2}|t|^{-l/2},$$

имеем

$$J_5 \leqslant 2\int_{\tau_1}^{\infty}\Lambda_l^{-1/2}t^{-l/2-1}\,dt = c(l)(\Gamma_{4,l/n})^{l/8}. \qquad (2.22)$$

В силу леммы 1.9

$$J_{6,1} \triangleq \int_{|t|>\tau_1}|\overline{P}_{\nu,n}(t)/t|\,dt \leqslant c(\nu)(\beta_3\sigma^{-3}n^{-1/2})^{\nu}\Lambda_l^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{|t|>\tau_1} t^{3\nu-l/2-1}\,dt = c(\nu, l)(\Gamma_{4,l}/n)^{l/8-3\nu/4}(\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^{\nu}.$$

Возможны два случая: $\Gamma_{3,l}/\sqrt{n} \leqslant (\Gamma_{4,l}/n)^{3/4}$, $\Gamma_{3,l}/\sqrt{n} \geqslant (\Gamma_{4,l}/n)^{3/4}$. В первом случае

$$J_{6,1} \leqslant c(\nu, l)(\Gamma_{4,l}/n)^{l/8},$$

во втором —

$$J_{6,1} \leqslant c(\nu, l)(\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^{l/6} < c(\nu, l)(\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^{k}.$$

Таким образом

$$J_6 \leqslant c(\nu, l)\left((\Gamma_{3,l}/\sqrt{n})^{k} + (\Gamma_{4,l}/n)^{l/8}\right). \qquad (2.23)$$

Из (2.1)—(2.3), (2.8), (2.14) и (2.21)—(2.23) следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bergstrem H.** On asymptotic expansions of probability functions // Skandinaw. aktuarietidskrift.— 1951.— H. 1—2.— P. 1—34.
2. **Осипов Л. В.** Об асимптотических разложениях функции распределения суммы случайных величин с неравномерными оценками остаточного члена // Вестн. Ленинградск. ун-та.— 1972.— № 1.— С. 51—59.
3. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.— 414 с.
4. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения для сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта // Литовск. матем. сб.— 1984.— Т. 24, № 4.— С. 29—48.
5. **Götze F.** On Edgewort expansions in Banach spaces // Ann. Probab.— 1981.— V. 9, № 5.— P. 852—859.
6. **Götze F.** Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1979.— Bd 50, H. 3.— S. 333—355.
7. **Го Х.-С.** Гауссовские меры в банаховых пространствах.— М.: Мир, 1979.— 176 с.
8. **Нагаев С. В., Чеботарев В. И.** Уточнение оценки погрешности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн.— 1986.— Т. 27, № 3.— С. 154—173.

СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С φ-ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

С. А. УТЕВ

В работе исследуется асимптотическое поведение распределений частичных сумм случайных величин, удовлетворяющих условию φ-перемешивания.

Статья состоит из четырех параграфов.

Значительная часть исследований посвящена анализу дисперсии (§ 1) и оценкам вероятностей больших уклонений (§ 2) сумм слабо зависимых слагаемых.

Затем полученные оценки используются для обобщения на суммы случайных величин с φ-перемешиванием закона повторного логарифма (§ 3) и почти наверное принципа инвариантности (§ 4).

Некоторые из доказанных утверждений имеют законченный характер, а также развивают работы известных в этой области специалистов: И. А. Ибрагимова, W. Philipp, M. Peligrad, R. Bradley и др., и усиливают более ранние исследования автора.

§ 1. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИИ СУММЫ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть V — пространство случайных величин ξ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, которые имеют нулевые средние и конечные вторые моменты; $\|\xi\|=(\mathbf{E}|\xi|^2)^{1/2}$ — норма в V; $\langle a, b\rangle$, $|a|^2=\langle a, a\rangle$ — соответственно скалярное произведение и порожденная им норма в H. Пусть, далее, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — некоторая последовательность элементов из V. Через V_a^b обозначим подпространство, натянутое на элементы ξ_i, $a\leqslant i\leqslant b$. Зафиксируем некоторое натуральное число h. Положим

$$S_n=\sum_{i=1}^n \xi_i, \quad S(k, n)=\sum_{i=k+1}^n \xi_i,$$

$$\rho(k)=\sup_{i\geqslant 1}\ \sup_{\xi\in V_1^i,\,\eta\in V_{i+k}^\infty} \frac{|\mathbf{E}\langle\xi, \eta\rangle|}{\|\xi\|\|\eta\|},$$

$$k=1, 2, \ldots, \quad \rho(0)=1.$$

Здесь и далее для определенности положим $0/0=0$; сумму (произведение) по пустому множеству индексов считаем равной нулю (соответственно 1).

Основным содержанием этого пункта является

Теорема 1.1. *Справедливы оценки:*

$$\mathbf{E}|S_n|^2\leqslant c_1 c(\rho, n)\sum_{j=1}^n \mathbf{E}|\xi_j|^2, \tag{1.1}$$

$$\left|\sum_{\substack{i,j=1\\ |i-j|\geqslant h}}^n \mathbf{E}\langle\xi_i, \xi_j\rangle\right|\leqslant c_2 c(\rho, n)\sum_{j=0}^{[\log_2 n]}\rho(h+2^{j/3}-1)\sum_{j=1}^n \mathbf{E}|\xi_j|^2, \tag{1.2}$$

где $c(\rho, n)=\exp\left(2\sum_{j=0}^{[\log_2 n]}\rho(2^{j/3})\right)$, c_1, c_2 *— абсолютные постоянные.*

Хорошо известны следующие оценки:

$$\mathbf{E}|S_n|^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\mathbf{E}\langle \xi_i, \xi_j\rangle| \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \rho(|j-i|\,\|\xi_i\|\,\|\xi_j\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{n-1} \rho(k) \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_j|^2,$$

$$\left|\sum_{i,j=1\,|\,i-j|\geqslant h}^{n} \mathbf{E}\langle \xi_i, \xi_j\rangle\right| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n,\\ |i-j|\geqslant h}} \rho(|j-i|)\,\|\xi_i\|\,\|\xi_j\| \leqslant 2\left(\sum_{k=h}^{n-1}\rho(k)\right)\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|\xi_j|^2,$$

т. е. предложенные в теореме оценки связаны с ослаблением зависимости от коэффициентов $\rho(k)$. Впервые в случае строго стационарной последовательности оценка (1.1) получена в [2] (дальнейшее развитие см. [7]). В [3] предложена оценка

$$\mathbf{E}|S_n|^2 \leqslant c_3 c(\rho, n)\, n \max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbf{E}|\xi_j|^2,$$

где c_3 — абсолютная постоянная.

Сначала докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1.2. *Пусть задана неубывающая последовательность неотрицательных чисел $a(n)$ такая, что существует невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\varepsilon(k)$ и натуральная последовательность $T(k)$, удовлетворяющие условиям*

$$T(k) \leqslant 2^{-1}k(1+k^{-1/3}), \tag{1.3}$$
$$a(k) \leqslant \max_{1\leqslant s\leqslant k} a(T(s))(1+\varepsilon(s)) \tag{1.4}$$

для всех $k \geqslant 1$. Тогда

$$a(n) \leqslant a(n_0)\exp\left(2\sum_{i=0}^{[\log_2 n]} \varepsilon(2^i)\right)$$

для всех $n \geqslant 1$, где можно взять $n_0 = 2^7$.

Доказательство. Положим $w(m) = a(2^m)$. Так как $a(n)$ — неубывающая последовательность, то $w(m)$ — тоже не убывает и

$$a(n) \leqslant w([\log_2 n]+1). \tag{1.5}$$

Докажем по индукции, что

$$w(m) \leqslant w(c)\prod_{i=0}^{m-2}(1+\varepsilon(2^i))^2, \tag{1.6}$$

где можно взять $c=7$. При $m \leqslant c$ соотношение (1.6) очевидно. Пусть $m > c$. Обоснуем индукционный шаг. Дважды применяя свойство (1.4) и учитывая, что $T(k) \leqslant k$, находим

$$w(m) = a(2^m) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant 2^m}\ \max_{1\leqslant j\leqslant T(i)} a(T(j))(1+\varepsilon(j))(1+\varepsilon(i)) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant 2^m}\ \max_{1\leqslant j\leqslant T(i)} a(T(j))(1+\varepsilon(j))^2 \equiv a(T(J))(1+\varepsilon(J))^2$$

для некоторого J такого, что найдется натуральное I, удовлетворяющее неравенствам

$$1 \leqslant I \leqslant 2^m, \quad 1 \leqslant J \leqslant T(I).$$

Если $J \leqslant 2^{c-1}$, то $T(J) \leqslant J$, $[\log_2 T(J)]+1 \leqslant c$, а значит, из соотношения (1.5) и невозрастания $\varepsilon(k)$ получим

$$a(T(J)) \leqslant w([\log_2 T(J)]+1) \leqslant w(c),$$
$$w(m) \leqslant a(T(J))(1+\varepsilon(1))^2 \leqslant w(c)\prod_{i=0}^{m-2}(1+\varepsilon(2^i))^2.$$

Пусть теперь $J > 2^{c-1}$. Тогда, так как $J \leqslant T(I) \leqslant I$, то и $I > 2^{c-1}$. Следовательно, по свойству (1.3) имеем

$$r \equiv [\log_2 T(J)] + 1 \leqslant [\log_2 J - 1 + \log_2(1 + J^{-1/3})] + 1 \leqslant$$
$$\leqslant [\log_2 T(I) - 1 + 2^{(1-c)/3}] + 1 \leqslant [\log_2 I - 2 + 2 \cdot 2^{(1-c)/3}] + 1 \leqslant m - 1.$$

Значит, учитывая, что $T(J) \leqslant J$, можно применить индукционный шаг

$$w(m) \leqslant a(T(J))(1 + \varepsilon(J))^2 \leqslant w(r)(1 + \varepsilon(2^{r-1}))^2 \leqslant w(c) \prod_{j=0}^{m-2} (1 + \varepsilon(2^j))^2.$$

Завершим доказательство леммы. Имеем по свойствам (1.5), (1.6)

$$a(n) \leqslant w([\log_2 n] + 1) \leqslant w(c) \prod_{i=0}^{[\log_2 n]-1} (1 + \varepsilon(2^i))^2 \leqslant$$
$$\leqslant a(n_0) \exp\left(2 \sum_{i=0}^{[\log_2 n]} \varepsilon(2^i)\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть заданы неотрицательные числа $a(1) \leqslant \ldots \leqslant a(n)$ такие, что существуют неотрицательные числа $\delta(1) \geqslant \ldots \geqslant \delta(n)$ и натуральная последовательность $T(k)$, удовлетворяющие условиям*

$$T(k) \leqslant 2^{-1}k(1 + k^{-1/3}), \tag{1.7}$$
$$a(k) \leqslant a(T(k)) + \delta(k) \tag{1.8}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$a(n) \leqslant a(n_0) + 2 \sum_{i=0}^{[\log_2 n]} \delta(2^i).$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, приведенными при доказательстве предыдущей леммы. Достаточно показать, что при $m > c$

$$w(m) \leqslant w(c) + 2\left[\sum_{j=0}^{m-1} \delta(2^j)\right] + \delta(2^m),$$

где, как и ранее, $w(m) = a(2^m)$. Применяя свойство (1.8), получим $w(m) \leqslant a(T(2^m)) + \delta(2^m)$.

Если $T(2^m) < 2^{m-1}$, то $a(T(2^m)) \leqslant a(2^{m-1}) \leqslant w(m-1)$; и по индукционному предположению

$$w(m) \leqslant w(m-1) + \delta(2^m) \leqslant a(n_0) + 2\left(\sum_{j=0}^{m-1} \delta(2^j)\right) + \delta(2^m).$$

Пусть теперь $T(2^m) \geqslant 2^{m-1}$. Тогда

$$r \equiv [\log_2 T(T(2^m))] + 1 \leqslant [m - 2 + 2^{(1-m)/3} + 2^{-m/3}] + 1 \leqslant m - 1.$$

Еще раз применяя свойство (1.8) и используя индукционное предположение, находим

$$w(m) \leqslant a(T(T(2^m)) + \delta(2^m) + \delta(T(2^m)) \leqslant$$
$$\leqslant \left(a(n_0) + \left(2 \sum_{j=0}^{m-2} \delta(2^j)\right) + \delta(2^{m-1})\right) + \delta(2^m) + \delta(2^{m-1}) \leqslant$$
$$\leqslant a(n_0) + \left(2 \sum_{j=0}^{m-1} \delta(2^j)\right) + \delta(2^m).$$

Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.1. Положим

$$z_n = \sup_{0\leqslant a<\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left\{ \| S(a, a+i) \| \left(\sum_{j=a+1}^{a+i} \|\xi_j\|^2 \right)^{-1/2} \right\},$$

$$n = 1, 2, \ldots, z_0 = 1, x_0 = 0,$$

$$x_n = \sup_{0\leqslant a<\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left\{ \left| \sum_{j=a+1}^{a+i} \mathbf{E} \langle S(a, j), \xi_{j+h} \rangle \right| \left(\sum_{j=a+1}^{a+i} \|\xi_j\|^2 \sum_{j=a+1}^{a+i} \|\xi_{j+h}\|^2 \right)^{-1/2} \right\}.$$

Непосредственно из построения следует, что

$$\mathbf{E} | S_n |^2 \leqslant z_n^2 \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E} | \xi_j |^2, \tag{1.9}$$

$$\left| \sum_{\substack{i,j=1,\\ |i-j|\geqslant h}}^{n} \mathbf{E} \langle \xi_i, \xi_j \rangle \right| = 2 \left| \sum_{j=1}^{n-h} \mathbf{E} \langle S_j, \xi_{j+h} \rangle \right| \leqslant 2x_n \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E} | \xi_j |^2. \tag{1.10}$$

Нетрудно видеть, что z_n и x_n неубывающие последовательности неотрицательных чисел.

Дальнейший путь заключается в том, чтобы применить к ним соответственно леммы 1.2 и 1.3, т. е. отыскать последовательности $\varepsilon(k)$, $\delta(k)$ и $T(k)$, которые удовлетворяют условиям (1.3), (1.4) и (1.7), (1.8) и вместе с неравенствами (1.9), (1.10) приводят к требуемым в теореме оценкам.

Для большей ясности выделим отмеченные пути исследования последовательностей z_n и x_n в отдельные леммы.

Лемма 1.4 (О свойствах z_n). *Для всех $k \geqslant 1$ имеет место*

$$1 = z_1 \leqslant z_{k-1} \leqslant z_k \leqslant k^{1/2}, \tag{1.11}$$

$$z_k \leqslant \max_{1\leqslant s\leqslant k} z_{T(s)} \left(1 + 2^{-1} \rho([s^{1/3}]) + 4^{10} s^{-1/9}\right), \tag{1.12}$$

где натуральная последовательность $T(k)$ удовлетворяет условию (1.3).

Доказательство. Свойство (1.11) непосредственно следует из построения (при выводе соотношения $z_k \leqslant k^{1/2}$ нужно воспользоваться элементарным неравенством $(a_1 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + \ldots + a_n^2)$).

Докажем утверждение (1.12). Применим индукцию. Положим $k_0 = 4^9$ и $T(k) = 1$ при $k = 1, \ldots, k_0$. Тогда при $k \leqslant k_0$ получим

$$z_k \leqslant k_0 \leqslant z_{T(k)} (1 + 4^{10} k^{-1/9}). \tag{1.13}$$

Пусть теперь $k > k_0$. Нужно построить $T(k)$ так, чтобы для всех $a \geqslant 0$ и всех $i = 1, \ldots, k$ имело место

$$\| S(a, a+i) \|^2 \leqslant \sum_{j=a+1}^{a+i} \|\xi_j\|^2 \max_{1\leqslant s\leqslant k} \left\{ z_{T(s)}^2 \left(1 + 2^{-1} \rho([s^{1/3}]) + 4^{10} s^{-1/9}\right)^2 \right\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать $a = 0$. С другой стороны, учитывая предположение индукции, достаточно построить $T(k)$ так, чтобы выписанное неравенство выполнялось при $i = k$, т. е.

$$\| S_k \|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|\xi_j\|^2 z_{T(k)}^2 \left(1 + 2^{-1} \rho([k^{1/3}]) + 4^{10} k^{-1/9}\right)^2. \tag{1.14}$$

Положим

$$m = [k^{1/3}],$$

$$A = \left\{ u\colon\ 0 \leqslant u \leqslant k,\ \sum_{i=um+1}^{(u+1)m} \|\xi_i\|^2 \leqslant (m/k)^{1/3} \sum_{j=1}^{k} \|\xi_j\|^2 \right\},$$

$$\bar{A} = \left\{ u\colon \sum_{i=um+1}^{(u+1)m} \|\xi_i\|^2 > (m/k)^{1/3} \sum_{j=1}^{k} \|\xi_j\|^2,\ 0 \leqslant u \leqslant k \right\},$$

$$B = \{ u\colon\ 0 \leqslant u \leqslant k,\ 2^{-1}(k - m^2) \leqslant um \leqslant 2^{-1} k \}.$$

По построению, при $k \geqslant k_0$

$$|B| \geqslant |\{1 \leqslant u \leqslant k\colon [k/2m] - [m/2] + 1 \leqslant [k/2m]\}| \geqslant [m/2];$$

$$|\bar{A}|\,(m/k)^{1/3} \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$|A \cap B| = |B - \bar{A} \cap B| \geqslant |B| - |\bar{A}| \geqslant$$

$$\geqslant [m/2] - (k/m)^{1/3} \geqslant 2^{-1}k^{1/3}(1 - 4k^{-1/9}) - 3/2 > 0,$$

т. е. $A \cap B \neq \varnothing$.

Зафиксируем $u \in A \cap B$. Имеем

$$\|S_k\| \leqslant \|S_{um} + S(um + m,\ k)\| + \|S(um,\ um + m)\|. \tag{1.15}$$

Вспоминая про коэффициент корреляции $\rho(k)$, находим

$$\|S_{um} + S(um + m,\ k)\|^2 \leqslant \|S_{um}\|^2 + \|S(um + m,\ k)\|^2 +$$

$$+ 2\rho(m)\|S_{um}\|\,\|S(um + m,\ k)\|.$$

Следовательно, из определения z_n вытекает

$$\|S_k\| \leqslant z_m \left(\sum_{i=um+1}^{um+m} \|\xi_i\|^2\right)^{1/2} + \left(z_{um}^2 x^2 + z_{k-um-m}^2 y^2 + 2\rho(m)\, z_{um} z_{k-um-m} xy\right)^{1/2}, \tag{1.16}$$

где $x, y \geqslant 0$, $x^2 = \sum_{i=1}^{um} \|\xi_i\|^2$, $y^2 = \sum_{i=um+m+1}^{k} \|\xi_i\|^p$.

Положим $T(k) = \max(um + m,\ k - um)$. Заметим, что так построенная величина $T(k)$ удовлетворяет неравенству (1.3). Опять же, по построению

$$\sum_{i=um+1}^{um+m} \|\xi_i\|^2 \leqslant (m/k)^{1/3} \sum_{j=1}^{k} \|\xi_j\|^2. \tag{1.17}$$

Таким образом, подставляя полученное соотношение в (1.16) и учитывая элементарное неравенство $2xy \leqslant x^2 + y^2$, получим

$$\|S_k\| \leqslant z_{T(k)} \left(\sum_{j=1}^{k} \|\xi_j\|^2\right)^{1/2} ((m/k)^{1/6} + (1 + \rho(m))^{1/2}) \leqslant$$

$$\leqslant z_{T(k)} \left(\sum_{j=1}^{k} \|\xi_j\|^2\right)^{1/2} (1 + 2^{-1}\rho([k^{1/3}]) + k^{-1/9}).$$

Следовательно, неравенство (1.14), а вместе с ним и лемма доказаны.

Из неравенства (1.9) и лемм 1.2, 1.4 вытекает первое соотношение доказываемой теоремы.

Лемма 1.5 (О свойствах x_n). *Для $k = 1, \ldots, n$ имеют место соотношения*

$$x_{k-1} \leqslant x_k \leqslant k\rho(h), \tag{1.18}$$

$$x_k \leqslant x_{T(k)} + V_n\rho(h)k^{-1/9} + V_n\rho([k^{1/3}] + h), \tag{1.19}$$

где $V_n = (c_1 + 4^{10}) \exp\left(2 \sum_{j=0}^{[\log_2 n]} \rho(2^{j/3})\right)$.

Доказательство. Покажем справедливость утверждения (1.18). Монотонность $x_{k-1} \leqslant x_k$ непосредственно следует из построения. Далее имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{i} \mathbf{E}\langle S(a,\ a + j),\ \xi_{j+h}\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \rho(h) \sum_{j=1}^{i} (\|S(a,\ a + j)\|\,\|\xi_{j+h}\|) \leqslant \rho(h)\, i \left\{\sum_{j=a+1}^{a+i} \|\xi_j\|^2 \sum_{j=a+1}^{a+i} \|\xi_{j+h}\|^2\right\}^{-1/2}.$$

Откуда, учитывая определение последовательности x_n, находим $x_k \leqslant k\rho(h)$.

Перейдем к доказательству утверждения (1.19). Воспользуемся обозначениями, которые использовали при доказательстве предыдущей леммы. Соотношение (1.13) в данном случае имеет вид

$$x_k \leqslant k_0\rho(h) \leqslant x_{T(k)} + 4^{10}k^{-1/9}, \quad k \leqslant k_0.$$

Пусть теперь $k > k_0$. Опять же, не ограничивая общности, достаточно проверить справедливость неравенства

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\langle S_j, \xi_{j+h}\rangle\right| \leqslant x_{T(k)} + V_n\left(\rho(h)k^{-1/9} + \rho\left(h + [k^{1/3}]\right)\right). \quad (1.20)$$

Аналогом неравенства (1.15) является тождество

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\langle S_j, \xi_{j+h}\rangle = \sum_{j=1}^{um+m} \mathbf{E}\langle S_j, \xi_{j+h}\rangle +$$

$$+ \sum_{j=um+m}^{k} \mathbf{E}\langle S(um, j), \xi_{j+h}\rangle + \mathbf{E}\langle S_{um+m}, S(um+m+h, k+h)\rangle.$$

Имеем

$$|\mathbf{E}\langle S_{um+m}, S(um+m+h, k+h)\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \rho(h)\|S(um, um+m)\|\,\|S(um+m+h, k+h)\| +$$

$$+ \rho(h+m)\|S_{um}\|\,\|S(um+m+h, k+h)\|.$$

Подставляя полученное неравенство в приведенное выше тождество и используя уже доказанное утверждение (1.1), находим

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\langle S_j, \xi_{j+h}\rangle\right| \leqslant x_{um+m}p_1p_2 + x_{k-um-m}p_3p_4 +$$

$$+ V_n(\rho(h)p_4p_5 + \rho(h+m)p_1p_4),$$

где все $p_i \geqslant 0$ и

$$p_1^2 = \sum_{j=1}^{um+m} \|\xi_j\|^2, \quad p_2^2 = \sum_{j=1}^{um+m} \|\xi_{j+h}\|^2,$$

$$p_3^2 = \sum_{j=um+m+1}^{k} \|\xi_j\|^2, \quad p_4^2 = \sum_{j=um+m+1}^{k} \|\xi_{j+h}\|^2,$$

$$p_5^2 = \sum_{j=um+1}^{um+m} \|\xi_j\|^2, \quad V_n = (c_1 + 4^{10})\exp\left(2\sum_{j=0}^{[\log_2 n[} \rho(2^{j/3})\right).$$

Воспользовавшись элементарным неравенством $p_1p_2 + p_3p_4 \leqslant ((p_1^2 + p_3^2) \times (p_2^2 + p_4^2))^{1/2}$ и свойством (1.17), получим

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\langle S_j, \xi_{j+h}\rangle\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{k}\|\xi_j\|^2 \sum_{j=1}^{k}\|\xi_{j+h}\|^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(x_{T(k)} + V_h\left(\rho(h)k^{-1/9} + \rho\left([k^{1/3}] + h\right)\right)\right).$$

Лемма доказана.

Из неравенств (1.10) и лемм 1.3, 1.5 вытекает соотношение (1.2). Теорема доказана.

Дальнейшие результаты этого параграфа играют ключевую роль в представлении суммы слабозависимых случайных величин в виде суммы «блоков», дисперсия которых ведет себя «почти одинаково» и корреляция между которыми «пренебрежимо» мала.

Положим

$$\delta_n^2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{D}\xi_i.$$

Лемма 1.6. *Пусть* $\rho(h) < 1$. *Тогда существует абсолютная постоянная* c, *для которой*

$$\max_{1\leqslant u\leqslant v\leqslant n} \mathbf{D}\left(\sum_{i=u}^{v} \xi_i\right) \leqslant c\,[\delta_n^2 + \mathbf{D}S_n](1+h^2)(1-\rho(h))^{-1}. \qquad (1.21)$$

Доказательство леммы фактически содержится в [3, с. 1309]. Пусть, далее,

$$g_n = \max_{1\leqslant s\leqslant n}\left\|\sum_{i=1}^{s}\xi_i\right\|,\quad 0\leqslant a\leqslant g_n,$$

$$\nu(a) = \min\left\{s\colon \left\|\sum_{i=1}^{s}\xi_i\right\| \geqslant a\right\},$$

$$T(a) = \xi_1 + \ldots + \xi_{\nu(a)}.$$

Лемма 1.7. *Для всяких* $0\leqslant a < b\leqslant g_n$ *и натуральных* $u\leqslant v\leqslant x\leqslant y$ *справедливы неравенства*

$$|\,\|T(a)\| - a| \leqslant \delta_n,\quad |\mathbf{D}T(a) - a^2| \leqslant 2\delta_n g_n, \qquad (1.22)$$

$$\left|\mathbf{E}\left\langle \sum_{u\leqslant r\leqslant v}\xi_r, \sum_{x\leqslant i\leqslant y}\xi_i\right\rangle\right| \leqslant c_3(h\delta_n + \rho(h)\,g_n)\,g_n, \qquad (1.23)$$

$$|\mathbf{D}(T(b) - T(a)) - (b^2 - a^2)| \leqslant c_4(h\delta_n + \rho(h)g_n)g_n, \qquad (1.24)$$

где c_3, c_4 — *абсолютные постоянные.*

Подробное доказательство этой леммы приведено в [4]. Поэтому мы лишь приведем его небольшие наброски.

Первые два неравенства следуют из построения и неравенства треугольника. Соотношение (1.24) тоже вытекает из построения и утверждений (1.22), (1.23). Так что фактически достаточно обосновать (1.24). Имеем

$$\left|\mathbf{E}\left\langle \sum_{u\leqslant r\leqslant v}\xi_r, \sum_{x\leqslant i\leqslant y}\xi_i\right\rangle\right| \leqslant \mathbf{E}\left\langle \sum_{u\leqslant r\leqslant v-h}\xi_r, \sum_{x\leqslant i\leqslant y}\xi_i\right\rangle\Bigg| +$$

$$+\left\|\sum_{v-h<r\leqslant v}\xi_r\right\|\left\|\sum_{x\leqslant i\leqslant y}\xi_i\right\| \leqslant \left(\rho(h)\left\|\sum_{u\leqslant r\leqslant v-h}\xi_r\right\| + \sum_{v-h<r\leqslant v}\|\xi_r\|\right)\left\|\sum_{x\leqslant i\leqslant y}\xi_i\right\| \leqslant$$

$$\leqslant (2\rho(h)\,g_n + h\delta_n)\,2g_n.$$

Лемма доказана.

§ 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И МОМЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. ПРИЛОЖЕНИЕ К СХОДИМОСТИ РЯДОВ И УСИЛЕННОМУ ЗАКОНУ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Пусть ξ_1, ξ_2, ...— последовательность случайных величин со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Через M_a^b обозначим σ-алгебру, порожденную случайными элементами ξ_i, $a\leqslant i\leqslant b$. Зафиксируем натуральное p, а также $x_0 \in \mathbf{R}^+$. Положим

$$\varphi(k) = \sup_{1\leqslant s}\ \sup_{A\in M_1^s,\, B\in M_{s+k}^{\infty},\, \mathbf{P}(A)>0} |\mathbf{P}(B\,|\,A) - \mathbf{P}(B)|,$$

$$S_k = \sum_{i=1}^{k}\xi_i,\quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\eta = \varphi(p) + \max_{0\leqslant i\leqslant n}\mathbf{P}(|S_n - S_i| > x_0).$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\eta < 1$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| > x + 2a + 2x_0\right) \leqslant \eta(1-\eta)^{-1}\,\mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| > x\right) +$$

$$+ 2(1-\eta)^{-1}\,\mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| > a/(p+1)\right).$$

Это неравенство есть модификация неравенств, предложенных в [5].

Доказательство. Положим

$$\xi = \max_{1\le k\le n} |\xi_k|, \quad R(t) = \mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le n} |S_k| > t\right),$$
$$E_k(t) = \left\{\max_{i\le k-1} |S_i| < t \le |S_k|\right\}, \quad x_1 = x + a + x_0. \tag{2.1}$$

Имеем

$$\left\{\max_{1\le k\le n} |S_k| > t\right\} = \bigcup_{k=1}^{n} E_k(t), \quad E_k(t) \cap E_s(t) = \varnothing, \quad k \ne s,$$
$$\{|S_k| \ge x_1 + a + x_0\} \cap \left\{\max_{1\le k\le n} (\xi_k| > a/p\right\} \cap \{|S_n| \le x_1\} <$$
$$< \{|S_n - S_{k+p}| \ge x_0\}.$$

Следовательно, полагая $x_2 = x_1 + a + x_0$, находим

$$I \equiv \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k(x_2) \cap \{\xi > a/p\} \cap \{|S_n| \le x_1\}) \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k(x_2) \cap \{|S_n - S_{k+p}| > x_0\}) \le \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k(x_2))\right) \times$$
$$\times \max_{1\le k\le n} \mathbf{P}(|S_n - S_{k+p}| > x_0 \mid E_k(x_2)) \le$$
$$\le R(x_2)\left(\varphi(p) + \max_{1\le k\le n} \mathbf{P}(|S_n - S_{k+p}| > x_0)\right),$$

откуда

$$R(x_2) \le (\mathbf{P}(|S_n| > x_1) + \mathbf{P}(\xi > a/p)) + I \le$$
$$\le \mathbf{P}(|S_n| > x_1) + \mathbf{P}(\xi > a/p) + \eta R(x_2).$$

Тем самым, при $\eta < 1$ справедлива оценка

$$R(x_1 + a + x_0) \le (1 - \eta)^{-1}(\mathbf{P}(|S_n| > x_1) + \mathbf{P}(\xi > a/p)). \tag{2.2}$$

Опять же

$$\{|S_{k-1}| < x\} \cap \{\xi > a/(p+1)\} \cap \{|S_n| > x + a + x_0\} \subset \{|S_n - S_{k+p}| > x_0\}.$$

Как и ранее, находим

$$\mathbf{P}(|S_n| > x + a + x_0) \le \mathbf{P}(\xi > a/(p+1)) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k(x) \cap \{\xi > a/(p+1)\} \cap \{|S_n| > x + a + x_0\}) \le$$
$$\le \mathbf{P}(\xi > a/(p+1)) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(E_k(x) \cap \{|S_n - S_{k+p}| > x_0\}) \le$$
$$\le \mathbf{P}(\xi > a/(p+1)) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k(x)) \max_{1\le k\le n} \mathbf{P}(|S_n - S_{k+p}| > x_0 \mid E_k(x)).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(|S_n| > x + a + x_0) \le \mathbf{P}(\xi > a/(p+1)) + R(x)\eta.$$

Вспоминая, что $x_1 = x + a + x_0$, и подставляя предыдущее неравенство в соотношение (2.2), получим требуемый результат. Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Пусть $\varphi(p) < 1/2$. Существует постоянная $c\{\varphi(p)\}$, зависящая лишь от $\varphi(p)$, такая, что для всех $t \ge 1$ и всех $1 \le q \le t$ имеет место*

$$\mathbf{E} \max_{1\le k\le n} |S_k|^t \le (c\{\varphi(p)\}t)^t \left(p^t \mathbf{E} \max_{1\le k\le n} |\xi_k|^t + \max_{1\le k\le n} (\mathbf{E}|S_k|^q)^{t/q}\right).$$

Доказательство. Пусть x_0 такое, что $\eta < 1$. Тогда

$$\mathbf{E} \max_{1\le k\le n} |S_k|^t = t\int_0^\infty u^{t-1} R(u)\,du \le (Vx_0)^t + t\int_{Vx_0}^\infty u^{t-1} R(u)\,du \equiv (Vx_0)^t + J.$$

Положим

$$u = x(1+2\alpha) + 2x_0,\ a = \alpha x,\ \Phi = \eta(1-\eta)^{-1},\ A = 2(1-\eta)^{-1},$$
$$\Delta = \exp(2t(\alpha + (V-2)^{-1}))$$

и воспользуемся леммой. Учитывая, что из $u \geqslant Vx_0$ следует $x \geqslant (V-2)/(1+2\alpha)$, получим

$$J \leqslant \{(1+2\alpha)(1+2(V-2)^{-1}\}^{t-1} t \int_0^\infty x^{t-1} R(x(1+2\alpha)+2x_0)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \Delta\left(\Phi t \int_0^\infty x^{t-1} R(x)\,dx + At\int_0^\infty x^{t-1}\mathbf{P}(\xi(p+1) > \alpha x)\,dx\right) \leqslant$$
$$\leqslant \Delta\left(\Phi\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^t + A\mathbf{E}\xi^t((p+1)/\alpha)^t\right).$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^t(1-\Phi\Delta) \leqslant (Vx_0)^t + \Delta A\mathbf{E}\xi^t((p+1)/\alpha)^t. \tag{2.3}$$

Полагая в (2.3)

$$x_0 = \varepsilon^{-1/q}\max_{1\leqslant k\leqslant n}(\mathbf{E}|S_k|^q)^{1/q},\quad \alpha = \varepsilon/t,\quad V = t/\varepsilon,\quad \varepsilon = (1-2\varphi(p))/N,$$

где N — достаточно большое число, мы получим требуемый результат. Теорема доказана.

Замечание. Покажем, что приведенная в теореме оценка точна. В самом деле, из неравенства треугольника следует

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k| \leqslant 2\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|.$$

Воспользовавшись неравенством Йенсена и учитывая, что интеграл сохраняет порядок, мы находим

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^t \leqslant 2^t\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^t,$$
$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}(\mathbf{E}|S_k|^q)^{t/q} \leqslant \left(\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^q\right)^{t/q} \leqslant \mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^t.$$

Следовательно,

$$2^{-1}\left(2^{-t}\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^t + \max_{1\leqslant k\leqslant n}(\mathbf{E}|S_k|^q)^{t/q}\right) \leqslant \mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^t.$$

Воспользовавшись для оценки $\mathbf{D}S_k$ теоремой 1.1, мы получим

Следствие 2.3. *Пусть* $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(2^k) < \infty$, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $i \geqslant 1$. *Тогда при* $t \geqslant 2$ *имеет место*

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^t \leqslant (tk(\varphi))^t\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}|\xi_i|^t + \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}|\xi_i|^2\right)^{t/2}\right),$$

где постоянная $k(\varphi)$ *зависит лишь от* φ.

Воспользовавшись леммой 1.6, мы получим

Следствие 2.4. *Пусть* $\varphi(p) < 1/4$, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда при* $t \geqslant 2$ *имеет место*

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^t \leqslant (c_1\{\varphi(p)\}t)^t\left(p^t\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^t + (\mathbf{D}S_n)^{t/2}\right).$$

Следствия 2.5, 2.6 вытекают из следствия 2.4.

Следствие 2.5. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — *m-зависимы*, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Существует абсолютная постоянная* c, *для которой при* $t \geqslant 2$ *имеет место*

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^t \leqslant (ct)^t\left[m^t\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^t + (\mathbf{D}S_n)^{t/2}\right].$$

Следствие 2.6. *Пусть* $\xi_i = f_i(X_i, \omega)$, $i = 1, \ldots, n$, *где* $X = \{X_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ — *цепь Маркова с коэффициентом эргодичности* α_n; $f = \{f_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ — *случайные процессы, независимые между собой и в совокупности независящие от* X. *Тогда при* $t \geqslant 2$ *имеет место*

$$\mathbf{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k|^t \leqslant (ct)^t \left(\alpha_n^{-t} \mathbf{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k|^t + (\mathbf{D} S_n)^{t/2}\right).$$

Следствие 2.7. *Пусть* $1 \leqslant t \leqslant 2$ *и* $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(2^k) < \infty$; $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Имеет место неравенство*

$$\mathbf{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k|^t \leqslant k(\varphi) \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} |\xi_i|^t,$$

где, как и ранее, $k(\varphi)$ *зависит лишь от* φ.

Доказательство следствия 2.7. Из леммы 4.1 работы [10], и теоремы 1.1 вытекает

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{E} |S_i|^t \leqslant k \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} |\xi_i|^t,$$

где k зависит лишь от φ. Применяя теорему 2.2 при $q = t$ и подставляя приведенную оценку, получим требуемый результат.

Следствие 2.8. *Пусть* $\varphi(p) < 1/2$. *Тогда*

$$\mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|\right)^2 \leqslant c(\varphi, p) \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} |\xi_i|^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} |\xi_i|\right)^2\right),$$

где $c(\varphi, p)$ *зависит лишь от* $\varphi(p)$ *и* p.

Теорема 2.9. *Пусть* $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(2^k) < \infty$. *Тогда*

(1) *если* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}\xi_n < \infty$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \mathbf{E}\xi_n)$ *сходится п. н.*;

(2) *если* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}\xi_n a_n^{-2} < \infty$, *то* $a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \mathbf{E}\xi_i) \to 0$ *при* $h \to \infty$, *где также* $a_n \to \infty$, $a_{n+1}/a_n \to 1$.

Доказательство. Второе утверждение теоремы вытекает из первого и леммы Кронекера так же, как и в одномерном случае (см., например, [6, с. 326—332]).

Проверим справедливость утверждения (1). Имеем по следствию 2.7

$$\sup_{n>0} \left\{\mathbf{P}\left(\max_{m \leqslant k \leqslant m+n} \left|\sum_{i=m}^{k} (\xi_i - \mathbf{E}\xi_i)\right| > \varepsilon\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{h>0} \left\{\varepsilon^{-2} \mathbf{E} \max_{m \leqslant k \leqslant m+n} \left|\sum_{i=m}^{k} (\xi_i - \mathbf{E}\xi_i)\right|^2\right\} \leqslant c\varepsilon^{-2} \sum_{i=m}^{\infty} \mathbf{D}\xi_i \to 0$$

при $m \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание. Впервые моментное неравенство Розенталя [8, 9] для сумм случайных величин с φ-перемешиванием доказано в [10] (здесь же имеется история вопроса). Доказательство, предложенное в цитированной работе в случае t — целого четного порядка момента опиралось на явные комбинаторные вычисления, далее осуществлялся переход к произвольному $t \geqslant 1$ через соответствующую срезку, причем накладывались более жесткие ограничения на коэффициенты $\varphi(k)$, чем в следствии 2.3. В [11] предложен другой подход к доказательству моментпых неравенств, а в частности, там доказан несколько более слабый вариант следствий 2.5, 2.6. Этот подход основан на неравенстве

$$\mathbf{E}x^m \leqslant c_m((\mathbf{E}x)^m + |\Gamma_m(x)|),$$

где $X \geqslant 0$; $\Gamma_m(x)$ — куммулянт порядка m случайной величины X. Путь, приведенный здесь, восходит к [12]. Для независимых слагаемых более детально изложен в [13], [14]. Для последовательностей с φ-перемешиванием частично реализован в [5], [15].

Результаты о сходимости рядов и усиленном законе больших чисел для последовательностей с φ-перемешиванием восходят к работе [16], где в отличие от приведенной теоремы 2.9 требуется сходимость ряда $\sum \varphi^{1/2}(k) < \infty$.

§ 3. ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность вещественнозначных случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями. Через M_a^b обозначим σ-алгебру, порожденную случайными величинами ξ_i, $a \leqslant i \leqslant b$. Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \sigma_n = \mathbf{D}S_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$Lx = \ln|x|, \quad LLx = |\ln|\ln|x||\,|,$$

$$\varphi(n) = \sup_s \sup_{A \in M_1^s, B \in M_{s+n}^{\infty}, \mathbf{P}(A) > 0} |\mathbf{P}(B \mid A) - \mathbf{P}(B)|.$$

Основное содержание параграфа составляет

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(2^k) < \infty, \tag{3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Inf} \sigma_n/n > 0, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{P}(|\xi_i| \geqslant x) \leqslant \mathbf{P}(\xi > x) \tag{3.3}$$

для любых $i \geqslant 1$, $x \geqslant 0$, *где* $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. *Тогда справедлив закон повторного логарифма, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma_n LL\sigma_n}} = 1 \quad \text{п. н.}$$

Следствие 3.2. *Пусть* ξ_1, ξ_2 — *строго стационарная последовательность случайных величин*; $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 < \infty$. *Если* $\sigma_n \to \infty$ *и выполнено условие* (3.1), *то существует* σ, $0 < \sigma < \infty$, *такое, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n/n = \sigma, \tag{3.4}$$

и справедлив закон повторного логарифма

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma \ln\ln n}} = 1 \quad \text{п. н.}$$

Соотношение (3.4) доказано в [7].

Замечание. Сформулированные результаты в определенной степени заканчивают ранние исследования автора в этом направлении [17, 18]. С другой стороны, они усиливают результаты работ [19—23]. Предложенное ниже доказательство является пошаговым уточнением доказательства, данного в [17]. Достигнутое продвижение получено за счет использования оценок дисперсии и моментных неравенств для сумм слабо зависимых слагаемых, требующих меньших ограничений на коэффициенты перемешивания $\varphi(k)$.

Буквой c будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от переменных суммирования. Запись $a_n \sim b_n$ (соответственно $a_n \asymp b_n$) означает, что $a_n/b_n \to 1$ при $n \to \infty$ (соответственно $0 < c \leqslant a_n/b_n \leqslant c^{-1} < \infty$ при всех $n \geqslant n_0$).

Доказательство теоремы 3.1. Положим

$$T_i = \xi_i I(|\xi_i| \leqslant \sqrt{i}),\ Y_i = T_i - \mathbf{E}T_i,\ i = 1, 2, \ldots.$$

Как показано в [17], достаточно доказать, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{2\sigma_n LL\sigma_n}} = 1 \quad п. н., \tag{3.5}$$

так как в силу теоремы 1.1

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - Y_i)\right) \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\xi_i - Y_i)^2 \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\xi_i^2, |\xi_i| > \sqrt{i}) \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\xi, \xi > \sqrt{i}),$$

а значит,

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - Y_i)\right) = o(\sigma_n), \tag{3.6}$$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sigma_n(1 + o(1)).$$

I) Разбиение на блоки. Положим

$$1 > \alpha > 1/2, \quad h_k = \left[k^{-1}2^{k^\alpha}\right], \quad g_k = \left[2^{k^\alpha}\right], \quad z_k = h_k + g_k,$$
$$n_k = z_1 + \ldots + z_{k-1}, \quad b_k = (2\sigma_k LL\sigma_k)^{1/2}, \quad a_k = b_{n_k},$$
$$\Psi_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_k+g_k} Y_i, \quad \eta_k = \sum_{i=n_k+g_k+1}^{n_{k+1}} Y_i,$$
$$x_k = \max_{1\leqslant j\leqslant z_k} \left|\sum_{i=n_k+1}^{j} Y_i\right|.$$

Заметим, что из построения вытекает

$$z_k \sim g_k \sim 2^{k^\alpha}, \quad n_k \sim k^{1-\alpha}2^{k^\alpha}/(\alpha \ln 2), \tag{3.7}$$
$$n_{k+1} \sim n_k, \quad h_1 + \ldots + h_k = o(n_k).$$

Из соотношений (3.3), (3.6) и неравенства Коши — Буняковского вытекает, что

$$\left|\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_1+m_2} Y_i\right)^2 - \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_1} Y_i\right)^2\right| \leqslant c(m_2 + (m_1 m_2)^{1/2}).$$

Последнее неравенство вместе с соотношением (3.7) дает

$$a_k \asymp (n_k \ln\ln n_k)^{1/2} \asymp (k^{1-\alpha}2^{k^\alpha}\ln k)^{1/2},$$
$$a_{k+1} \sim a_k, \max_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} |\sigma_n - \sigma_{n_k}| = o(\sigma_{n_k}), \tag{3.8}$$
$$\max_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} |b_n - b_{n_k}| = o(b_{n_k}).$$

Имеет место представление

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{k-1} \Psi_i + \sum_{i=1}^{k-1} \eta_i + \sum_{j=n_k+1}^{n} Y_j.$$

Так же как и в [17], наша ближайшая цель показать, что второе и третье слагаемые в написанном выше выражении дают в (3.5) нулевой вклад, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{1}^{k-1} \eta_j/a_k = 0 \quad \text{п.н.} \tag{3.9}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k/a_k = 0 \quad \text{п.н.} \tag{3.10}$$

Применяя теорему 1.1 и пользуясь соотношением (3.8), находим

$$\mathbf{D}\eta_i \leqslant c_1 h_i,$$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \eta_i\right) \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{D}\eta_i \leqslant c_2 \sum_{i=1}^{k-1} h_i = o(n_k), \tag{3.11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}\eta_k a_k^{-2} \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{\infty} h_k n_k^{-1} \leqslant c_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-2} < \infty.$$

Из последнего соотношения и усиленного закона больших чисел (Теорема 2.9) вытекает требуемое утверждение (3.9).

Проверим справедливость утверждения (3.10). Воспользуемся следствием 2.3. Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(|x_k| \geqslant \varepsilon a_k) \leqslant \varepsilon^{-v} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}|x_k|^v a_k^{-v} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \varepsilon^{-v} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\{\sum_{i=n_k+1}^{n_k+1} \mathbf{E}(|\xi_i|^v, |\xi_i| \leqslant \sqrt{i})\right\} + z_k^{v/2}\right) a_k^{-v} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \varepsilon^{-v} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=n_k+1}^{n_k+1} \mathbf{E}(|\xi_i|^v, |\xi_i| \leqslant \sqrt{i})\, n_k^{-v/2} +$$

$$+ c_5 \varepsilon^{-v} \sum_{k=1}^{\infty} (z_k/n_k)^{v/2} \equiv c_4 \varepsilon^{-v} I_1 + c_5 \varepsilon^{-v} I_2.$$

По построению, при $v > 2/(1-\alpha)$ имеет место

$$I_2 \leqslant c_6 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1-\alpha)v/2} < \infty.$$

С другой стороны, условие (3.3) влечет

$$\mathbf{E}(|\xi_i|^v, |\xi_i| \leqslant x) \leqslant \mathbf{E}(\xi^v, \xi \leqslant x) + x^v \mathbf{P}(\xi \geqslant x),$$

а значит $(n_{k+1} \sim n_k)$,

$$I_1 \leqslant c_7 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}(|\xi_k|^v, |\xi_k| \leqslant \sqrt{k})\, k^{-v/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_7 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}(\xi^v, \xi \leqslant \sqrt{k})\, k^{-v/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi \geqslant \sqrt{k})\right) < \infty,$$

так как $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. Следовательно, соотношение (3.10) доказано.

Итак, осталось показать, что

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} \Psi_i/a_k = 1 \quad \text{п.н.} \tag{3.12}$$

Сначала покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(h_k) < \infty.$$

В самом деле, условие (3.1) и монотонность коэффициента влекут

$$\varphi(k)\log_2^2 k \to 0 \quad \text{при } k\to\infty. \tag{3.13}$$

Тем самым, при $\alpha > 1/2$ имеет место

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(h_k) \leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}\left(\log_2 2^{k^\alpha}\right)^{-2} \leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2\alpha} < \infty.$$

Следовательно, по теореме Беркеша — Филиппа (формулировка приведена в лемме 4.4 из § 4), соотношение (3.12) эквивалентно следующему:

$$\limsup_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\Psi_i^*/a_k = 1 \quad \text{п.н.}, \tag{3.14}$$

где случайные величины Ψ_i^* независимы и распределены как Ψ_i, $i=1, 2, \ldots$.

II) Анализ дисперсии. Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i^* = \sigma_{n_k}(1+o(1)). \tag{3.15}$$

Во-первых, из уже доказанных соотношений (3.6) и (3.11) вытекает

$$\sigma_{n_k} \sim \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n_k}Y_i\right) \sim \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\Psi_i\right).$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\Psi_i\right) \sim \sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i.$$

Положим $\mathcal{K} = [k^{1/2}]$. Имеем

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{\mathcal{K}-1}\Psi_i\right) \leqslant c_1 n_{\mathcal{K}}, \quad \sum_{i=1}^{\mathcal{K}-1}\mathbf{D}\Psi_i \leqslant c_2 n_{\mathcal{K}}.$$

Следовательно, осталось показать, что

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=\mathcal{K}}^{k-1}\Psi_i\right) \sim \sum_{i=\mathcal{K}}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i.$$

Далее,

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=\mathcal{K}}^{k-1}\Psi_i\right) = \sum_{i=\mathcal{K}}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i + \sum_{i,j=\mathcal{K},\, i\neq j}^{k-1}\mathbf{E}\Psi_i\Psi_j.$$

Тем самым нужно доказать, что

$$I \equiv \sum_{\substack{i,j=\mathcal{K}\\ |i-j|\geqslant 1}}^{k-1}\mathbf{E}\Psi_i\Psi_j = o(n_k).$$

По теореме 1.1 справедлива оценка

$$I \leqslant c\sum_{i=0}^{\infty}\left(\widehat{\varphi}(2^i)\right)^{1/2}\sum_{i=\mathcal{K}}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i,$$

где по построению

$$\sum_{i=\mathcal{K}}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i \asymp n_k,\ \widehat{\varphi}(r) \leqslant \sup_{i\geqslant\mathcal{K}}\varphi\left(\sum_{s=i}^{i+r-1}h_s\right) = \varphi\left(\sum_{s=\mathcal{K}}^{\mathcal{K}+r-1}h_s\right) \leqslant \varphi\left(h_{\mathcal{K}+r-1}\right).$$

Следовательно (см. (3.13)),

$$\sum_{i=0}^{\infty}(\widehat{\varphi}(2^i))^{1/2}\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\varphi^{1/2}(h_{2^i+\mathscr{K}-1})\leqslant c'\sum_{i=0}^{\infty}(\log_2 h_{2^i+\mathscr{K}-1})^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant c''\sum_{i=0}^{\infty}(2^i+\mathscr{K}-1)^{-\alpha}=o(1),$$

что и требовалось доказать.

III) Закон повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин. Нам осталось проверить, что верно (3.14), причем в силу соотношений (3.8), (3.15) имеет место

$$a_k=(2B_kLLB_k)^{1/2}(1+o(1)),$$

$$B_k=\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{D}\Psi_i^*=\sigma_{n_k}(1+o(1))\asymp n_k\asymp 2^{k^\alpha}k^{1-\alpha},$$

$$\lim_{k\to\infty}B_{k+1}/B_k=1,\ \mathbf{D}\Psi_k^*\leqslant cg_k\asymp 2^{k^\alpha}. \tag{3.16}$$

В работе [24] (следствие 4.3) показано, что для справедливости закона повторного логарифма в случае независимых слагаемых достаточно выполнение следующих условий $(v>2)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n^{-v/2}(LLB_n)^{-v/2}\mathbf{E}\,|\Psi_k^*|^v<\infty. \tag{3.17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n^{-1}(LB_n)^{\varepsilon-}\,\mathbf{D}\Psi_k^*=\infty. \tag{3.18}$$

Условие (3.18) следует из леммы 2.7 цитированной работы и соотношения (3.16).

Проверим справедливость утверждения (3.18). Применяя лемму 2.3, находим (подобные выкладки появлялись при исследовании (3.10))

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_k^{-v/2}(LLB_k)^{-v/2}\mathbf{E}\,|\Psi_k|^v\leqslant$$

$$\leqslant c_1\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{-v/2}(\ln k)^{-v/2}\left(\sum_{i=n_k+1}^{n_k+1}\mathbf{E}\left(|\xi_i|^v,|\xi_i|\leqslant\sqrt{i}\right)+z_k^{v/2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c_2\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{-v/2}\sum_{i=n_k+1}^{n_k+1}\left(\mathbf{E}\left(\xi^v,\xi\leqslant\sqrt{i}\right)+i^{v/2}\mathbf{P}(\xi\geqslant\sqrt{i})\right)+$$

$$+c_3\sum_{k=1}^{\infty}(z_k/n_k)^{v/2}<\infty$$

для $v>2/(1-\alpha)$ в силу построения. Тем самым соотношение (3.17), а вместе с ним и теорема доказаны.

§ 4. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ

1. Формулировка результата. Пусть $\xi=\{\xi_{1,n},\ldots,\xi_{k_n,n};\ n\geqslant1\}$ — схема серий случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями. Через $M_a^b(n)$ обозначим σ — алгебру, порожденную случайными величинами $\xi_{i,n}$, $a\leqslant i\leqslant b$. Положим

$$S_{k,n}=\sum_{i=1}^{k}\xi_{i,n},\quad k=1,2,\ldots,k_n,\ S_{0,n}=0,$$

$$\varphi_n(k)=\max_{i\leqslant i\leqslant k_n}\ \sup_{\substack{A\in M_1^i(n),B\in M_{i+k}^\infty(n),\\ \mathbf{P}(A)>0}}|\mathbf{P}(B\mid A)-\mathbf{P}(B)|.$$

Введем основные ограничения.

А) Условие нормировки

$$\mathbf{D}S_{k_n,n} = 1 + o(1). \tag{4.1}$$

Б) Условие Линдеберга и ограничение на коэффициенты φ-перемешивания. Существует натуральная последовательность j_n такая, что

$$\sup_n \varphi_n(mj_n) \equiv \varphi(m) \to 0, \tag{4.2}$$

$$\inf_{\varepsilon>0}\left(\varepsilon^t + j_n^{t-1}\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{E}\left(|\xi_{k,n}|^t, |\xi_{k,n}| \geqslant \varepsilon j_n^{-1}\right)\right) \to 0, \tag{4.3 (t)}$$

при $m, n \to \infty$, где $t \geqslant 2$.

В) Условие построения. Существует схема серий неотрицательных чисел $a = \{a_{0,n}, \ldots, a_{k_n,n};\ n \geqslant 1\}$, для которой

$$0 = a_{0,n} < a_{1,n} < \ldots < a_{k_n,n} = 1, \tag{4.4}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} |\mathbf{D}S_{k,n} - a_{k,n}| \to 0 \tag{4.5}$$

при $n \to \infty$. Через S_n^a обозначим случайную ломаную с узлами в точках $(a_{k,n}, S_{k,n})$, $k = 0, 1, \ldots, k_n$.

Основным содержанием параграфа является

Теорема 4.1. *Пусть схема серий ξ удовлетворяет условиям (4.1)—(4.3(t)), $t \geqslant 2$. Тогда существует схема серий неотрицательных чисел a, для которой выполнены условия (4.4), (4.5), и можно задать на одном вероятностном пространстве случайную ломаную S_n^a и стандартный винеровский процесс w так, чтобы*

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant u\leqslant 1} |S_n^a(u) - w(u)|^t \to 0 \tag{4.6}$$

при $n \to \infty$.

Замечание. Условие (4.3(t)) при $j_n \equiv 1$ и $t = 2$ эквивалентно условию Линдеберга, а при $t > 2$ — условию Ляпунова. Предложенная теорема обобщает и усиливает целый ряд результатов как для m_n-зависимых случайных величин, цепей Маркова, сложных функционалов от цепей Маркова, так и последовательностей с φ-перемешиванием (см. для сравнения [3, 5, 21, 29]; подробные следствия в случае центральной предельной теоремы приведены в [4]). Следует отметить, что хотя существуют различные схемы серий неотрицательных чисел, удовлетворяющие соотношениям (4.4), (4.5), но все они влекут (4.6) (это вытекает из следующей ниже леммы 4.5).

2) Приведем ряд вспомогательных фактов.

Лемма 4.2. *Для любых $\varepsilon > 0$, $t \geqslant 2$ имеет место*

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n z_i\right|^t, \left|\sum_{i=1}^n z_i\right| \geqslant \varepsilon n\right) \leqslant 2n^{t-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(|z_i|^t, |z_i| \geqslant \varepsilon/2\right).$$

Доказательство. Положим $g(x) = \max(2|x|^t - (\varepsilon n)^t, 0)$. Нетрудно видеть, что $g(x) \geqslant |x|^t$ при $|x| \geqslant \varepsilon n$. Далее, по построению функция g выпукла. Следовательно,

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_1^n z_i\right|^t, \left|\sum_1^n z_i\right| \geqslant \varepsilon n\right) \leqslant \mathbf{E}g\left(n^{-1}\sum_1^n z_i n\right) \leqslant$$

$$\leqslant n^{-1}\sum_1^n \mathbf{E}g(z_i n) \leqslant 2n^{t-1}\sum_1^n \mathbf{E}\left(|z_i|^t, |z_i| \geqslant \varepsilon/2\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть на сепарабельных банаховых пространствах S_i с борелевскими σ-алгебрами B_i заданы распределения: F на $(S_1 \times S_2, \mathrm{B}_1 \times \mathrm{B}_2)$ и G на $(S_2 \times S_3, \mathrm{B}_2 \times \mathrm{B}_3)$, причем маргинальные распределения F* и *G совпадают на (S_2, B_2). Тогда на некотором вероятностном пространстве можно задать случайные элементы w_i так, что F (соответственно G) есть совместное распределение элементов w_1 и w_2 (соответственно w_2 и w_3).*

Доказательство см. в [22], с. 53.

Лемма 4.4. *Пусть $\{\{S_k, \sigma_k\}, k \geqslant 1\}$ — последовательность полных метрических пространств; $\{X_k, k \geqslant 1\}$ — последовательность случайных элементов со значениями в S_k; $\{\mathrm{B}_k, k \geqslant 1\}$ — последовательность σ-алгебр, для которых X_k измерима относительно B_k. Пусть*

$$|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leqslant \varphi_k \mathbf{P}(A)$$

для всех $B \in \mathrm{B}_k$, $A \in V_{j<k}\mathrm{B}_k$ (минимальной σ-алгебре, содержащей σ-алгебры $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_k$). Тогда не меняя исходного совместного распределения элементов X_k можно задать на одном вероятностном пространстве последовательность $\{X_k, k \geqslant 1\}$ и последовательность независимых случайных величин $\{Y_k, k \geqslant 1\}$ так, что каждое Y_k совпадает по распределению с X_k и

$$\mathbf{P}(\sigma_k(X_k, Y_k) \geqslant 6\varphi_k) \leqslant 6\varphi_k$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство см. в [22, с. 33—35].

Лемма 4.5. *Для всякого $t > 0$ имеет место*

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{E} \sup_{0\leqslant g,s\leqslant 1, |g-s|\leqslant h} |w(g) - w(s)|^t = 0,$$

где w — стандартный винеровский процесс.

Доказательство следует, например, из [30, лемма 2].

3) Доказательство теоремы 4.1. Сначала сведем задачу к случаю $j_n \equiv 1$. Положим

$$\eta_{m,n} = \sum_{i=j_n(m-1)+1}^{j_n m} \xi_{i,n}, \quad \xi_{i,n},\ \xi_{i,n} = 0,\ i > k_n,$$

$$m = 1, \ldots, m_n, \quad m_n = [k_n/j_n] + 1.$$

Лемма 4.6. *Справедливы соотношения*

$$\sum_{m=1}^{m_n} \mathbf{E}(|\eta_{m,n}|^t, |\eta_{m,n}| \geqslant 2\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant j_n^{t-1} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}(|\xi_{k,n}|^t, |\xi_{k,n}| \geqslant \varepsilon j_n^{-1}), \tag{4.7}$$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{m=1}^{m_n} \eta_{m,n}\right) = 1 + o(1), \tag{4.8}$$

$$\max_{1\leqslant m\leqslant m_n} \mathbf{E}\eta_{m,n}^2 \to 0, \tag{4.9}$$

$$\sup_n \max_{1\leqslant k\leqslant m_n} \mathbf{D}\left(\sum_{m=1}^{k} \eta_{m,n}\right) < \infty, \tag{4.10}$$

$$\Delta_n \equiv \mathbf{E}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant m_n} \max_{j_n(k-1)\leqslant s\leqslant j_n k} \left|\sum_{m=1}^{k} \eta_{m,n} - \sum_{i=1}^{s} \xi_{i,n}\right|^t\right) \to 0, \tag{4.11}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m_n} \max_{j_n(k-1)\leqslant s\leqslant j_n k} \left|\mathbf{D}\left(\sum_{m=1}^{k} \eta_{m,n}\right) - \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{s} \xi_{i,n}\right)\right| \to 0. \tag{4.12}$$

при $n \to \infty$.

Доказательство леммы. Первое неравенство вытекает из леммы 4.2. Второе соотношение непосредственно следует из определения и условия нормировки (4.1). Утверждение (4.9) вытекает из уже доказанного (4.7), условия (4.3(t)) и простого неравенства

$$\max_{1\leqslant m\leqslant m_n} \mathbf{E}\eta_{m,n}^2 \leqslant \varepsilon^2 + \varepsilon^{2-t}\sum_{m=1}^{m_n} \mathbf{E}(|\eta_{m,n}|^t, |\eta_{m,n}|>\varepsilon).$$

Соотношение (4.10) есть следствие утверждения (4.9) и леммы 1.6. Далее, имеем

$$\Delta_n = \mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}\max_{j_n(k-1)\leqslant s<j_nk}\left|\sum_{i=s+1}^{j_nk}\xi_{i,n}\right|^t \leqslant$$

$$\leqslant 2^{t-1}\left(\varepsilon^t + \mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}\max_{j_n(k-1)\leqslant s<j_nk}\left|\sum_{i=s+1}^{j_nk}\xi_{i,n}\Delta(|\xi_{i,n}|>\varepsilon j_n^{-1})\right|^t\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{t-1}\left(\varepsilon^t + j_n^{t-1}\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{E}(|\xi_{k,n}|^t, |\xi_{k,n}|>\varepsilon j_n^{-1})\right).$$

Тем самым утверждение (4.11) доказано. Сходимость в (4.12) непосредственно вытекает из соотношений (4.10), (4.11) и простого неравенства

$$|\,\|x\|^2 - \|y\|^2\,| \leqslant \|x-y\|(\|x-y\| + 2\|x\|),$$

где $\|x\| = (\mathbf{E}x^2)^{1/2}$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Так как схема серий $\eta = \{\eta_{1,n}, \ldots, \eta_{m_n};\ n\geqslant 1\}$ удовлетворяет условию (4.3(t)) с $j_n \equiv 1$, то найдется ε_n такое, что

$$\varepsilon_n \to 0,\quad n\to\infty, \tag{4.13}$$

$$2\varepsilon_n^t \geqslant \sum_{i=1}^{m_n}\mathbf{E}\{|\eta_{i,n}|^t, |\eta_{i,n}|\geqslant\varepsilon_n\} \equiv L_n,\quad n\geqslant 1.$$

Положим

$$x_{i,n} = \eta_{i,n}\mathbf{1}(|\eta_{i,n}|\leqslant\varepsilon_n) - \mathbf{E}(\eta_{i,n}\mathbf{1}(|\eta_{i,n}|\leqslant\varepsilon_n)),$$
$$i = 1, 2, \ldots, m_n.$$

По построению

$$|x_{i,n}| \leqslant 2\varepsilon_n \quad \text{п. н.} \tag{4.14}$$

Из следствия 2.8 и соотношений (4.13) находим

$$I_n \equiv \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_n}|\eta_{i,n} - x_{i,n}|\right)^2 \leqslant c_1\left(\sum_{i=1}^{m_n}\mathbf{E}|\eta_{i,n} - x_{i,n}|^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{m_n}\mathbf{E}|\eta_{i,n} - x_{i,n}|\right)^2\right) \leqslant c_2(L_n + (L_n\varepsilon_n^{-1})^2) \to 0$$

при $n\to\infty$. С другой стороны, из следствия 2.3 вытекает

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_n}|\eta_{i,n} - x_{i,n}|\right)^t \leqslant c_3\left(\sum_{i=1}^{m_n}\mathbf{E}|\eta_{i,n} - x_{i,n}|^t + \right.$$
$$\left. + \left(\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_n}|\eta_{i,n} - x_{i,n}|\right)^2\right)^{t/2}\right) \leqslant c_4\left(\sum_{i=1}^{m_n}\mathbf{E}(|\eta_{i,n}|^t, |\eta_{i,n}|\geqslant\varepsilon_n) + I_n^{t/2}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m_n} |\eta_{i,n} - x_{i,n}|\right)^t \to 0, \tag{4.15}$$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m_n} x_{i,n}\right) = 1 + o(1), \tag{4.16}$$

$$\sup_n \max_{1 \leqslant m \leqslant m_n} \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,n}\right) < \infty, \tag{4.17}$$

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant m_n} \left| \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,n}\right) - \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m} \eta_{i,n}\right) \right| \to 0 \tag{4.18}$$

при $n \to \infty$. Тем самым мы свели исследуемую задачу к схеме серий $X = \{x_{1,n}, \ldots, x_{m_n,n};\ n \geqslant 1\}$, которая удовлетворяет условиям (4.1)—(4.3(t)), $j_n \equiv 1$ и дополнительному соотношению (4.14).

Положим

$$\Psi_n = \min_{k \geqslant 1} \{k\varepsilon_n + \varphi^{1/2}(k)\},\quad g_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant m_n} \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k} x_{i,n}\right),$$

$$h_n = \max\left(\Psi_n^{1/3},\ \varphi^{1/2t}\left([\varepsilon_n^{-1/2}]\right)\right),$$

$$\nu(m) = \min\left\{s\colon\ \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{s} x_{i,n}\right)^2 \geqslant m h_n\right\},\quad \nu(0) = 0,$$

$$m = 1, \ldots, p(n) - 1,\ \nu(p(n)) = m_n,\ p(n) = [g_n/h_n] + 1;$$

$$З_{m,n} = \sum_{j=\nu(m-1)+1}^{\nu(m)} x_{j,n},\quad z_{m,n} = m/p(n),$$

$$q_{m,n} = \max_{\nu(m-1) < a \leqslant \nu(m)} \left| \sum_{i=\nu(m-1)+1}^{a} x_{i,n} \right|,$$

$$m = 1, \ldots, p(n),\ z_{0n} = 0.$$

Заметим, что из (4.2) и (4.14) вытекает $\Psi_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Следующие факты о свойствах схемы серий $З = \{З_{1,n}, \ldots, З_{p(n),n};\ n \geqslant 1\}$ выделим в отдельную лемму.

Лемма 4.7. *Справедливы соотношения*

$$p(n) \leqslant c_1 h_n^{-1}, \tag{4.19}$$

$$\mathbf{D}З_{i,n} = h_n(1 + o(1)),\ i \leqslant p(n) - 1, \tag{4.20}$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant p(n)} \mathbf{D}З_{i,n} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant p(n)} \mathbf{E}q_{i,n}^2 \leqslant c_2 h_n, \tag{4.21}$$

$$\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant p(n)} |\mathbf{E}З_{i,n}З_{j,n}| = o(1), \tag{4.22}$$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k} З_{i,n}\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{D}З_{i,n}(1 + o(1)) = kh_n(1 + o(1)), \tag{4.23}$$

$$p(n) = h_n^{-1}(1 + o(1)), \tag{4.24}$$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant p(n)} \left| \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{k} З_{i,n}\right) - z_{k,n} \right| \to 0, \tag{4.25}$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant p(n)} \mathbf{E}|З_{i,n}|^r \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant p(n)} \mathbf{E}q_{i,n}^r \leqslant c_3 h_n^{r/2},\ r > 2, \tag{4.26}$$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant p(n)} \max_{\nu(k-1) \leqslant i < \nu(k)} \left| \mathbf{D}\left(\sum_{j=1}^{i} x_{j,n}\right) - z_{k,n} \right| \to 0, \tag{4.27}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant p(n)} \max_{\nu(k-1)j_n\leqslant i<\nu(k)j_n} |\mathbf{D}S_{i,n}-z_{k,n}|\to 0, \tag{4.28}$$

$$\min_{1\leqslant m<p(n)} (\nu(m)-\nu(m-1))\geqslant [\varepsilon_n^{-1/2}], \quad n\geqslant n_0, \tag{4.29}$$

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant p(n)} \max_{\nu(k-1)\leqslant i<\nu(k)} \left|\sum_{j=1}^{k} З_{j,n}-\sum_{j=1}^{i} x_{i,n}\right|^t\to 0, \tag{4.30}$$

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant p(n)} \max_{\nu(k-1)j_n\leqslant i<\nu(k)j_n} \left|\sum_{j=1}^{k} З_{j,n}-S_{i,n}\right|^t\to 0, \tag{4.31}$$

где везде рассматривается сходимость при $n\to\infty$.

Доказательство. Первое утверждение следует из (4.17). Из построения и неравенства (1.24) леммы 1.7 вытекает

$$\mathbf{D}З_{i,n}=h_n+o(\Psi_n)=h_n(1+o(1))$$

при $i\leqslant p(n)-1$, что доказывает (4.20). Далее, из неравенства (1.23) той же леммы следует

$$\max_{1\leqslant i\neq j\leqslant p(n)} |\mathbf{E}З_{i,n}З_{j,n}|\leqslant c'\Psi_n,$$

$$\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant p(n)} |\mathbf{E}З_{i,n}З_{j,n}|\leqslant c''\Psi_n p_n^2\leqslant c''' \Psi_n^{1/3},$$

т. е. доказано соотношение (4.22). С другой стороны, имеем

$$g_n\geqslant \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m_n} x_{i,n}\right)=\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{\nu(p(n)-1)} x_{i,n}+З_{p(n),n}\right)\geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{\nu(p(n)-1)} x_{i,n}\right)+\mathbf{D}З_{p(n),n}-c\Psi_n\geqslant g_n-h_n+\mathbf{D}З_{p(n),n}-c\Psi_n,$$

$$c\Psi_n+h_n\geqslant \mathbf{D}З_{p(n),\,n}.$$

Последнее неравенство вместе с уже доказанным соотношением (4.20) влечет утверждение (4.21).

Соотношения (4.23)—(4.25) есть непосредственные следствия уже доказанных утверждений (4.19)—(4.22) и построения. Далее, из построения и следствия 2.4 вытекает

$$\mathbf{E}|З_{i,n}|^r\leqslant \mathbf{E}q_{i,n}^r\leqslant c_1\left[\mathbf{E}\max_{1\leqslant i\leqslant m_n}|x_{i,n}|^r+(\mathbf{D}З_{i,n})^{r/2}\right]\leqslant$$

$$\leqslant c_2(\varepsilon_n^r+h_n^{r/2})\leqslant c_3h_n^{r/2},$$

откуда получим неравенство (4.26).

Опять же, по построению и лемме 1.7, положив $T_{m,n}=x_{1,n}+\ldots$ $\ldots+x_{m,n}$, находим

$$kh_n\geqslant \mathbf{D}T_{i,n}\geqslant \mathbf{D}T_{\nu(k-1)}-c\psi_n\geqslant (k-1)h_n-c\psi_n$$

при $\nu(k-1)\leqslant i<\nu(k)$, $k<p(n)$ и $o(1)+p_nh_n\geqslant g_n\geqslant \mathbf{D}T_{i,n}\geqslant$ $\geqslant \mathbf{D}T_{\nu(p(n)-1),n}-c\Psi_n\geqslant (p(n)-1)h_n-c\Psi_n$. Следовательно, доказано утверждение (4.27). Соотношения (4.18) и (4.12) позволяют соответственно перейти в (4.27) сначала от сумм $x_{1,n}+\ldots+x_{m,n}$ к суммам $\eta_{1,n}+\ldots$ $\ldots+\eta_{m,n}$, а затем и к суммам $S_{m,n}$. Тем самым показана справедливость утверждения (4.28).

Обоснуем (4.29). Имеем

$$\mathbf{D}З_{i,n}=h_n(1+o(1))\leqslant(\nu(i)-\nu(i-1))^2\max_i \mathbf{D}x_{i,n}\leqslant 4(\nu(i)-\nu(i-1))^2\varepsilon_n^2,$$

$$\min_{i<p(n)} (\nu(i)-\nu(i-1))\geqslant ch_n^{1/2}\varepsilon_n^{-1}\geqslant [\varepsilon_n^{-1/2}]$$

для всех n, начиная с некоторого n_0.

Осталось доказать сходимость в (4.30) и (4.31). Обозначим левую часть в (4.30) через δ_n. Имеем

$$\delta_n \leqslant 2^t \mathbf{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant p(n)} q_{k,n}^t \leqslant 2^t \left(\varepsilon^t + \sum_{k=1}^{p(n)} \mathbf{E}\left[q_{k,n}^t,\ q_{k,n} > \varepsilon \right] \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^t \left(\varepsilon^t + c_1 p(n) \varepsilon^{-t} \max_{1 \leqslant k \leqslant p(n)} \mathbf{E} q_{k,n}^{2t} \right) \leqslant 2^t \left(\varepsilon^t + c_2 \varepsilon^{-t} h_n^{t-1} \right).$$

Полагая $\varepsilon = h_n^{1/2t}$, находим $\delta_n \leqslant c_3 h_n^{1/2}$, что доказывает (4.30). Применяя последовательно к уже доказанному соотношению утверждения (4.15) и (4.11), мы получим сходимость в (4.31). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Положим

$$\mathfrak{Z}_{m,n}^* = \sum_{j=\nu(m-1)+1}^{\nu(m)-u(n)} x_{j,n}, \quad \mathfrak{Z}_{p(n),n}^* = \mathfrak{Z}_{p(n),n},$$

$$u(n) = [\varepsilon_n^{-1/2}], \quad m = 1, \ldots, p(n) - 1.$$

Из свойств (4.19)—(4.24) вытекает

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant p(n)} \| \mathfrak{Z}_{m,n} - \mathfrak{Z}_{m,n}^* \| \leqslant c \varepsilon_n^{1/2}, \tag{4.32}$$

$$\mathbf{D} \mathfrak{Z}_{m,n}^* = h_n (1 + o(1)), \quad m < p(n), \tag{4.33}$$

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant p(n)} \mathbf{E} | \mathfrak{Z}_{m,n}^* |^r \leqslant c h_n^{r/2}, \quad r > 2. \tag{4.34}$$

Из следствия 2.4 вытекает

$$\mathbf{E} | \mathfrak{Z}_{m,n} - \mathfrak{Z}_{m,n}^* |^t \leqslant c_1 \left(\mathbf{E} \max_{1 \leqslant i \leqslant m_n} | x_{i,n} |^t + \right.$$

$$\left. + \left(\mathbf{D} (\mathfrak{Z}_{m,n} - \mathfrak{Z}_{m,n}^*) \right)^{t/2} \right) \leqslant c_2 \left(\varepsilon_n^t + \varepsilon_n^{t/2} \right) \leqslant c_3 h_n^{3t/2}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant p(n)} \left| \sum_{m=1}^{k} (\mathfrak{Z}_{m,n} - \mathfrak{Z}_{m,n}^*) \right|^t \leqslant c_3 (p(n))^t \max_k \mathbf{E} | \mathfrak{Z}_{m,n} - \mathfrak{Z}_{m,n}^* |^t \leqslant$$

$$\leqslant c_4 h_n^{-t} h_n^{3t/2} \to 0, \tag{4.35}$$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant p(n)} \left| \mathbf{D} \left(\sum_{m=1}^{k} \mathfrak{Z}_{m,n}^* \right) - z_{k,n} \right| \to 0. \tag{4.36}$$

Тем самым, благодаря доказанной лемме и полученным оценкам, исследуемая задача сведена к схеме серий $\mathfrak{Z}^* = \{ \mathfrak{Z}_{1,n}^*, \ldots, \mathfrak{Z}_{p(n),n}^*;\ n \geqslant 1 \}$ «почти независимых» случайных величин с «почти одинаковыми» дисперсиями, с равномерно малыми «хвостами» распределений и «пренебрежимой» суммарной корреляцией. Далее мы воспользуемся аппроксимационной теоремой Беркеша — Филиппа.

А именно, будем считать, что у нас «богатое» вероятностное пространство и по лемме 4.4 и свойству 4.29 леммы 4.7 найдутся независимые случайные величины $W_{1,n}, \ldots, W_{p(n),n}$ такие, что

(1) $W_{i,n}$ распределены как $\mathfrak{Z}_{i,n}^*$,

(2) $\mathbf{P}(| W_{i,n} - \mathfrak{Z}_{i,n}^* | \geqslant 6 h_n^{2t}) \leqslant 6 h_n^{2t}$

для всех $1 \leqslant i \leqslant p(n)$, $n \geqslant n_0$, так как по построению

$$| \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B) | \leqslant \mathbf{P}(A) \varphi \left([\varepsilon_n^{-1/2}] \right) \leqslant \mathbf{P}(A) h_n^{2t}, \quad n \geqslant n_0,$$

для всех $A \in \sigma(\mathfrak{Z}_{1,n}^*, \ldots, \mathfrak{Z}_{i-1,n}^*)$, $B \in \sigma(\mathfrak{Z}_{i,n}^*)$, где $\sigma(Y)$ — σ-алгебра, порожденная случайным вектором Y. Через W_n обозначим случайную ломаную с узлами в точках $(z_{k,n},\ W_{1,n} + \ldots + W_{k,n})$, $k = 0, \ldots, p(n)$. Из свойств (4.33), (4.34) и одного результата А. И. Саханенко [31, теорема 5, с. 37] вытекает, что можно задать на одном вероятностном пространстве случайную ломаную и стандартный винеровский процесс w так, чтобы

$$\mathbf{E} \sup_{0\leqslant u\leqslant 1} |w(u) - W_n(u)|^t \to 0. \tag{4.37}$$

Покажем, что

$$J_n \equiv \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{p(n)} |W_{i,n} - З^*_{i,n}|\right)^t \to 0, \quad n\to\infty. \tag{4.38}$$

Имеем

$$J_n \leqslant (p(n))^t \max_{1\leqslant i\leqslant p(n)} \mathbf{E}|W_{i,n} - З^*_{i,n}|^t \leqslant$$

$$\leqslant c_1 h_n^{-t}\Big(6h_n^{2t} + \max_i \mathbf{E}\left(|W_{i,n} - З^*_{i,n}|^t,\ 6h_n^{2t} < |W_{i,n} - З^*_{i,n}| \leqslant 1\right) +$$

$$+ \max_i \mathbf{E}|W_{i,n} - З^*_{i,n}|^{2t+1}\Big) \leqslant c_2 h_n^{-t}\left(h_n^{2t^2} + h_n^{2t} + h_n^{(2t+1)/2}\right) \to 0,$$

что и требовалось доказать.

Завершим доказательство теоремы. Положим

$$a_{i,n} = z_{k,n} + k_n^{-2}(i - \nu(k-1)j_n)$$

при $\nu(k-1)j_n < i < \nu(k)j_n$, $0 < i < k_n$, $\quad a_{0,n} = 0$, $a_{k_n,n} = 1$. Через S_n^a обозначим случайную ломаную с узлами в точках $(a_{i,n}, S_{i,n})$, $i = 0, 1, \ldots, k_n$. По построению и свойству (4.28) схема серий неотрицательных чисел $a = \{a_{0,n}, \ldots, a_{k_n,n};\ n \geqslant 1\}$ удовлетворяет требуемым условиям (4.4) и (4.5). С другой стороны, применяя неоднократно леммы 4.3, 4.5 и учитывая соотношения (4.28), (4.31), (4.35), (4.36) и (4.38), мы сможет в утверждении (4.37) перейти от процесса W_n к случайной ломаной S_n^a.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ибрагимов И. А.** Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения.— 1962.— Т. 7, № 4.— С. 361—362.
2. **Ибрагимов И. А.** Замечание о центральной предельной теореме для зависимых случайных величин // Там же.— 1975.— Т. 20, № 1.— С. 134—140.
3. **Peligrad M.** Invariance principle for mixing sequences of random variables // Ann. Probab.— 1982.— V. 10, N 4.— P. 968—981.
4. **Утев С. А.** О центральной предельной теореме для схем серий случайных величин с φ-перемешиванием // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— Т. 31, № 4.— С 133—161.
5. **Peligrad M.** An invariance principle for φ-mixing sequences // Ann. Probab.— 1985.— V. 13, N 4.— P. 1304—1313.
6. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.— 416 с.
7. **Bradley R.** A sufficient condition for linier growth of variances in a stationary random sequence // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— V. 83, N 3.— P. 586—589.
8. **Rosenthal H. P.** On the span in of sequences of independent random variables // Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. Berkeley.— 1972.— V. 2.— P. 149—168.
9. **Burkholder D. L.** Distribution function inequalities for martingales // Ann. Probab.— 1973.— V. 1, N 1.— P. 19—42.
10. **Утев С. А.** Неравенства для сумм слабозависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1984.— Т. 3.— С. 50—76.
11. **Утев С. А.** Семиинварианты и моментные неравенства // Теория вероятностей и ее применения.— 1987.— Т. 32, № 2.— С. 35—53.
12. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Теория случайных процессов.— М.: Наука, 1971.— Т. 1.— С. 664.
13. **Jain N. C., Marcus M. B.** Integrability of infinite sums of independent vector-valued random variables // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— V. 212.— P. 1—35.
14. **Нагаев С. В.** Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 159—167.
15. **Samur J.** Convergence of sums of mixing triangular arrays of random vectors with stationary rows // Ann. Probab.— 1984.— V. 12, N 2.— P. 390—426.

16. **Cohn H.** On a class of dependent random variables // Rev. Roum. Math. Pures et Appl.— 1965.— V. 10, N 10.— P. 1593—1606.
17. **Утев С. А.** О законе повторного логарифма для φ-перемешанных случайных величин // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 1.— С. 174—179.
18. **Утев С. А.** Предельные теоремы для последовательностей случайных величин с φ-перемешиванием // Тез. докл. Междунар. конф. по теории вероятн. и матем. статистике, Вильнюс, июнь, 1985 г.— Вильнюс, 1985.— Т. 3.
19. **Резник М. X.** Закон повторного логарифма для некоторых классов стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения.— 1968.— Т. 13, № 4.— С. 642—656.
20. **Philipp W.** The law of the iterated logarithm for mixing stochastic processes // Ann. Math. Statist.— 1969.— V. 40, N 6.— P. 1985—1991.
21. **Philipp W., Stout W.** Almoust sure invariance principles for partial sums of weakly dependent random variables // Memoirs of Amer. Math. Soc.— 1975.— V. 2, N 161.
22. **Berkes A., Philipp W.** Approximation theorems for idependent and weakly dependent random vectors // Ann. Probab.— 1979.— V. 7, N 1.— P. 29—54.
23. **Heyde C. C., Scott D. I.** Invariance principles for the law of the iterated logarithm for martingales and processes with stationary increments // Ibid.— 1973.— V. 1, N 3.— P. 428—437.
24. **Wittman R.** Sufficient Moment and Truncated Moment conditions for the Law of the Iterated Logarithm // Probab. Theory Rel. fields.— 1987.— V. 75, N 4.— P. 509—530.
25. **Herrndorf N.** The invariance principle for φ-mixing sequences // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1983.— V. 63, N 1.— P. 97—108.
26. **Давыдов Ю. А.** О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятностей и ее применения.— 1968.— Т. 13, № 4.— С. 730—737.
27. **Гудинас П. П.** Принцип инвариантности для неоднородных цепей Маркова // Литовск. мат. сб.— 1977.— Т. 17, № 2.— С. 63—73.
28. **Лифшиц Б. А.** О сходимости моментов в центральной предельной теореме для неоднородных цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения.— 1975.— Т. 20, № 4.— С. 755—772.
29. **Лифшиц Б. А.** Принцип инвариантности для слабо зависимых величин // Там же.— 1984.— Т. 29, № 1.— С. 33—40.
30. **Утев С. А.** Замечание о скорости сходимости в принципе инвариантности // Сиб. мат. журн.— 1981.— Т. 22, № 5.— С. 206—209.
31. **Саханенко А. И.** Оценки в принципе инвариантности // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 5.— С. 27—44.

АСИМПТОТИКА БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В $\mathbf{R}^n$

М. С. СГИБНЕВ

В работе изучаются асимптотические свойства безгранично делимых распределений и соответствующих им мер Леви. Этой тематике посвящено немало работ. После введения необходимых обозначений и прежде чем сформулировать теорему 1, основной результат данной работы, мы дадим краткий обзор результатов, которые наиболее близки к задаче, рассматриваемой в этой работе. Дальнейший план статьи таков. Поскольку в доказательстве основной теоремы существенным образом используется техника банаховых алгебр, в § 2 излагаются новые результаты о банаховых алгебрах мер в $\mathbf{R}^n$ с заданными асимптотическими характеристиками. Самостоятельный интерес представляет доказываемая здесь теорема 2 о строении гомоморфизмов в поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ банаховой алгебры $S(\varphi)$ мер в $\mathbf{R}^n$, конечных с заданными полумультипликативным весом $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть μ — σ-конечная мера, заданная на σ-алгебре $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ борелевских подмножеств n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Определим преобразование Лапласа $\widehat{\mu}(\lambda)$ меры μ в точке $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$ по формуле

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \int \exp(\lambda \cdot x)\, \mu(dx);$$

здесь и в дальнейшем, если не указана область интегрирования, интеграл берется по всему пространству $\mathbf{R}^n$, а для u, $v \in \mathbf{C}^n$ символ $u \cdot v$ означает эрмитово скалярное произведение: $u \cdot v = u_1\bar{v}_1 + \ldots + u_n\bar{v}_n$. Через μ^{m*} обозначим m-кратную свертку меры μ с собой, $\mu^{0*} = E$ — мера Дирака, сосредоточенная в нуле.

Распределение вероятностей F в $\mathbf{R}^n$ называется *безгранично делимым распределением* (б. д. р.), если при любом натуральном m его характеристическая функция (х. ф.) $\widehat{F}(i\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}^n$, представима в виде $\widehat{F}(i\lambda) = \widehat{F}_m(i\lambda)^m$, где F_m — некоторое распределение вероятностей в $\mathbf{R}^n$.

Логарифм характеристической функции х. ф. б. д. р. F в $\mathbf{R}^n$ выражается следующим образом [1, гл. IV, § 3]:

$$\ln \widehat{F}(i\lambda) = ia\cdot\lambda - \frac{\mathbf{S}\lambda.\lambda}{2} + \int' \left[e^{i\lambda\cdot x} - 1 - \frac{i\lambda\cdot x}{1 + x\cdot x} \right] \nu(dx), \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbf{R}^n$, $a \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{S}$ — симметричный неотрицательный оператор в $\mathbf{R}^n$; мера ν, называемая *мерой Леви* б. д. р. F, удовлетворяет условию

$$\int \min(x\cdot x, 1)\, \nu(dx) < \infty; \tag{2}$$

символ интеграла со знаком «штрих» означает, что интегрирование в (1) берется по множеству $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$. Запись $F = F(a, \mathbf{S}, \nu)$ означает, что для б. д. р. F имеет место представление (1).

Через $\mathbf{R}^n_+$ обозначим подмножество всех точек из $\mathbf{R}^n$ с неотрицательными координатами. Для произвольной меры μ в $\mathbf{R}$ положим $\overline{\mu}(t) = \mu((t, \infty))$, $t \geqslant 0$.

Определение 1. *Распределение вероятностей G в $\mathbf{R}_+$ принадлежит классу $\mathscr{S}(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$, если*

1) *при всех t $\overline{G}(t) > 0$;*

2) *существует конечный предел*

$$\lim_{t\to\infty} G^{2*}((t, \infty))/\overline{G}(t) = c;$$

3) *при любом $y \in \mathbf{R}$ существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} \overline{G}(t + y)/\overline{G}(t) = \exp(-\gamma y);$$

4) *преобразование Лапласа $\widehat{G}(\lambda)$ в точке $\lambda = \gamma$ конечно: $\widehat{G}(\gamma) < \infty$.*

Класс $\mathscr{S} = \mathscr{S}(0)$ так называемых *субэкспоненциальных распределений* был введен в работе [2], а классы $\mathscr{S}(\gamma)$, $\gamma > 0$,— в работах [3, 4]. Из условий 2)—4) следует (см. [3, 4]), что постоянная c в условии 2) равна $2\widehat{G}(\gamma)$. Известно также, что если $\overline{G}(t)$ — правильно меняющаяся функция, то G — субэкспоненциальное распределение [2, теорема 3]. Свойства распределений из $\mathscr{S}(\gamma)$ изучались многими авторами; достаточные условия принадлежности распределений к $\mathscr{S}(\gamma)$ можно почерпнуть, например, в работах [2—10].

Пусть F — б. д. р. в $\mathbf{R}$, ν — его мера Леви и G — некоторое распределение из $\mathscr{S}(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$. Рассмотрим следующие утверждения:

(а) $\overline{F}(t) \sim k_1\overline{G}(t)$, $t \to \infty$, $k_1 > 0$;

(б) $\overline{\nu}(t) \sim k_2\overline{G}(t)$, $t \to \infty$, $k_2 > 0$;

(в) F удовлетворяет условию 3) и

$$\overline{F}(t) \sim \widehat{F}(\gamma)\overline{\nu}(t), \quad t \to \infty. \tag{3}$$

Относительно этих утверждений известно следующее. Если $\bar{\nu}(t)$ — правильно меняющаяся функция, то имеет место (3) с $\gamma=0$ [11]. Если F — б. д. р. в $\mathbf{R}_+$ и $\gamma=0$, то утверждения (а) — (в) эквивалентны [6]. Если F — обобщенное пуассоновское распределение в $\mathbf{R}_+$ и $\gamma>0$, то, как показано в [9], (б)$\Rightarrow$(а), (б)$\Rightarrow$(в) и (а)$\Rightarrow$(б) (последняя импликация установлена при одном дополнительном условии). Если F — б. д. р. в $\mathbf{R}$ и $\gamma=0$, то (а)$\Leftrightarrow$(б) и (б)$\Rightarrow$(в) [10, односторонний аналог теоремы 4.4, с. 155]. Если F — б. д. р. в $\mathbf{R}$ и $\gamma\geqslant 0$ произвольно, то утверждения (а) — (в) эквивалентны [12]. В работе [13] асимптотическое равенство (3) доказано в предположении, что функция $\bar{\nu}(t)$ слабо осциллирует ($\bar{\nu}(t)/\bar{\nu}(\tau)\to 1$, если $\tau/t\to 1$ при $t\to\infty$), в этом случае $\gamma=0$. В работах [13 — 15] получены уточнения асимптотического равенства (3) ($\gamma=0$) при наличии более детальной информации о функции $\bar{\nu}(t)$. Пусть положительная убывающая функция $\tau(t)$ такова, что $-\int_0^t \tau(t-s)\,d\tau(s)=O(\tau(t))$, $t\to\infty$. Тогда [16] $\bar{F}(t)=O(\tau(t))\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\bar{\nu}(t)=O(\tau(t))$, $t\to\infty$, и знак «O — большое» можно заменить на «o — малое». В работах [17—20] изучалась родственная задача об асимптотических свойствах безгранично делимых распределений в $\mathbf{R}^n$, в банаховых и гильбертовых пространствах. Например, если F — б. д. р. в гильбертовом пространстве с мерой Леви ν, то [20, теорема 6.3] $\inf\{r: r>0,\ \nu(\|x\|>r)=0\}=\gamma\Leftrightarrow-\lim\limits_{r\to\infty}\ln F(\|x\|>r)/(r\ln(r+1))=1/\gamma$.

Условимся, что знак неравенства между двумя n-мерными векторами означает, что соответствующие неравенства выполняются покоординатно, и пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)>0$ — вектор с положительными координатами. Обозначим $A=A(x)=\{y\in\mathbf{R}^n\colon y\leqslant x\}$, $B=B(x)=\{y\in\mathbf{R}^n\colon \exists j\colon y_j>x_j\}$ — дополнение множества A. Пусть t — вещественный параметр, $h(t)$ — правильно меняющаяся функция с отрицательным показателем.

Для б. д. р. F в октанте $\mathbf{R}^n_+$ следующие утверждения эквивалентны: (i) $\forall x>0$ $F(tB(x))\sim\lambda(B(x))h(t)$, $t\to\infty$; (ii) $\forall x>0$ $\nu(tB(x))\sim$ $\sim\lambda(B(x))h(t)$, $t\to\infty$, где λ — некоторая мера в $\mathbf{R}^n_+$ [21, теорема 2.2].

Пусть F — мера в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через F_j меру в $\mathbf{R}$, определяемую соотношением

$$F_j(A)=F(\mathbf{R}^{j-1}\times A\times\mathbf{R}^{n-j}),\ A\in\mathscr{B}(\mathbf{R}). \tag{4}$$

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть F — безгранично делимое распределение вероятностей в $\mathbf{R}^n$, ν — его мера Леви, G — некоторое распределение из класса $\mathscr{S}(\nu)$, $\gamma\geqslant 0$, $x\in\mathbf{R}^n$ — произвольный фиксированный вектор с положительными координатами. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

А. *Существует вектор $c(F)=(c_1(F),\ldots,c_n(F))\neq 0$ с неотрицательными координатами, такой что при любом $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbf{R}^n$*

$$F(tB(x)+y)\sim\sum_{j=1}^n c_j(F)\exp(-\gamma y_j/x_j)\,\bar{G}(t),\ t\to\infty. \tag{5}$$

Б. *Существует вектор $c(\nu)=(c_1(\nu),\ldots,c_n(\nu))\neq 0$ с неотрицательными координатами, такой что при любом $y\in\mathbf{R}^n$*

$$\nu(tB(x)+y)\sim\sum_{j=1}^n c_j(\nu)\exp(-\gamma y_j/x_j)\,\bar{G}(t),\ t\to\infty. \tag{6}$$

В обоих случаях выполняется соотношение: при $t\to\infty$

$$F(tB(x))\sim\sum_{j=1}^n c_j(\nu)\,\widehat{F}_j(\gamma/x_j)\,\nu(tB(x))\Big/\sum_{j=1}^n c_j(\nu). \tag{7}$$

Замечание. При $\gamma=0$ формулировка теоремы 1 заметно упрощается: условие (5) можно заменить на

$$F(tB(x))\sim c\bar{G}(t),\ t\to\infty, \tag{5'}$$

где $c>0$ — постоянная: для условия (6) замена аналогична; соотношение (7) принимает следующий вид:

$$F(tB(x))\sim \nu(tB(x)),\ t\to\infty.$$

§ 2. БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ МЕР В $\mathbf{R}^n$

Пусть $\varphi(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$ — полумультипликативная функция, т. е. функция $\varphi(x)$ конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет условию

$$\varphi(0)=1,\ \varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)\varphi(y),\ x,\ y\in\mathbf{R}^n. \tag{8}$$

Для любого $x\in\mathbf{R}^n$ существует конечный предел [22, с. 261, 258]

$$r(\varphi, x)=\lim_{t\to\infty}\ln\varphi(tx)/t=\inf_{t>0}\ln\varphi(tx)/t. \tag{9}$$

Обозначим через $S(\varphi)$ совокупность всех комплекснозначных мер ν, удовлетворяющих условию ($|\nu|$ — полная вариация меры ν) $\|\nu\|_\varphi=\int\varphi(x)|\nu|(dx)<\infty$. Определим сложение мер из $S(\varphi)$ и умножение меры на комплексное число обычным образом, а произведением элементов μ, $\nu\in S(\varphi)$ назовем их свертку $\mu*\nu$. Тогда совокупность мер $S(\varphi)$ превращается в банахову алгебру относительно нормы $\|\nu\|_\varphi$; единичным элементом в $S(\varphi)$ служит мера Дирака, сосредоточенная в нуле, которую мы обозначим через E [22, глава IV, § 4].

Перейдем к описанию гомоморфизмов банаховой алгебры $S(\varphi)$ в поле комплексных чисел $\mathbf{C}$. Назовем меру ν *абсолютно непрерывной относительно меры* μ (обозначение: $\nu\ll\mu$), если ν абсолютно непрерывна относительно $|\mu|$.

Определение 2 [23]. *Обобщенной функцией* $f(x,\nu)$ *называется комплекснозначная функция от точки* $x\in\mathbf{R}^n$ *и меры* $\nu\in S(\varphi)$, *которая для каждой меры* ν *является* $|\nu|$-*измеримой функцией от* x, *причем, если* $\nu\ll\mu$, *то* $f(x,\nu)=f(x,\mu)$ $|\nu|$-*почти всюду* ($|\nu|$ = п. в.).

Обозначим

$$\nu\text{-}\operatorname{ess}\sup_{x\in A}|f(x)|=\sup\{\varepsilon:\ |\nu|(x\in A:\ |f(x)|>\varepsilon)>0\};$$

здесь ν — комплексная мера, $f(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$,— $|\nu|$-измеримая функция, A — $|\nu|$-измеримое множество. В дальнейшем, если не указывается множество, по которому берется существенный супремум ess sup, то это означает, что он берется по всему пространству $\mathbf{R}^n$.

Определение 3 [23]. *Обобщенным характером называется обобщенная функция* $\chi(t,\nu)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\chi(t,\nu)\chi(s,\nu)=\chi(t+s,\nu) \tag{10}$$

для всех пар $(t,s)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ (*кроме, быть может, множества меры нуль относительно произведения мер* $|\nu|\times|\nu|$) *и условию*

$$\sup_{\nu\in S(\varphi)}\ \nu\text{-}\operatorname{ess}\sup|\chi(t,\nu)|=1. \tag{11}$$

Лемма 1. *Всякий непрерывный линейный функционал* L *в* $S(\varphi)$ *представим в виде*

$$L(\nu)=\int g(x,\nu)\,\nu(dx),\quad \nu\in S(\varphi), \tag{12}$$

где $g(x,\nu)$ — *некоторая обобщенная функция, удовлетворяющая условию*

$$\sup_{\nu\in S(\varphi)}\ \nu\text{-}\operatorname{ess}\sup|g(x,\nu)|/\varphi(x)=\|L\|<\infty. \tag{13}$$

Обратно, всякая обобщенная функция $g(x, \nu)$, удовлетворяющая (13), определяет по формуле (12) непрерывный линейный функционал в $S(\varphi)$.

Доказательство леммы 1 почти не отличается от доказательства теоремы 1 в [23], где $\varphi(x) \equiv 1$.

Лемма 2. *Пусть $\gamma(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$,— комплекснозначная функция, такая что*

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y), \quad x, y \in \mathbf{R}^n. \tag{14}$$

Тогда если модуль $|\gamma(x)|$ ограничен на каком-нибудь параллелепипеде $[\tau_1, \tau_2] = \{x \in \mathbf{R}^n: \tau_1 \leqslant x \leqslant \tau_2\}$ при $\tau_1 \neq \tau_2$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}^n$, то $|\gamma(x)| = \exp(\alpha \cdot x)$, где α — некоторый вещественный n-мерный вектор.

Лемма 2 доказывается с помощью незначительной модификации рассуждений, которые используются при доказательстве аналогичного утверждения в одномерном случае [22, теорема 4.17.2].

Теорема 2. *Пусть m: $S(\varphi) \to \mathbf{C}$ — произвольный гомоморфизм банаховой алгебры $S(\varphi)$ в поле комплексных чисел $\mathbf{C}$. Тогда справедливо следующее представление*

$$m(\nu) = \int \chi(x, \nu) \exp(\alpha \cdot x) \nu(dx), \tag{15}$$

где $\chi(x, \nu)$ — некоторый обобщенный характер, а α — некоторый вещественный n-мерный вектор, удовлетворяющий неравенствам

$$\alpha \cdot x \leqslant r(\varphi, x) = \lim_{t\to\infty} \ln \varphi(tx)/t \ \text{для} \ \forall x \in \mathbf{R}^n. \tag{16}$$

Обратно, для любого обобщенного характера $\chi(x, \nu)$ и любого $\alpha \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющего (16), формула (15) определяет некоторый гомоморфизм m: $S(\varphi) \to \mathbf{C}$.

Доказательство. Мы воспользуемся схемой доказательства соответствующего утверждения в одномерном случае [24, теорема 1]. Пусть m: $S(\varphi) \to \mathbf{C}$ — гомоморфизм. Так как m — непрерывный функционал с нормой, равной единице, по лемме 1 найдется обобщенная функция $g(x, \nu)$, такая что справедливы соотношения

$$m(\nu) = \int g(x, \nu) \nu(dx), \quad \nu \in S(\varphi), \tag{17}$$

$$\sup_{\nu \in S(\varphi)} \nu\text{-ess}\sup |g(x, \nu)|/\varphi(x) = \|m\| = 1. \tag{18}$$

Из мультипликативности функционала m следует, что

$$g(x+y, \nu) = g(x, \nu) g(y, \nu) \tag{19}$$

для п. в. пар $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ относительно меры $|\nu| \times |\nu|$ [23, доказательство теоремы 2]. Обозначим через E_x меру единичной массы, сосредоточенную в точке $x \in \mathbf{R}^n$. Покажем, что

$$m(E_x) = \chi(x) \exp(\alpha \cdot x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{20}$$

где функция $\chi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$,— характер, т. е. $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$, $|\chi(x)| = 1$ для $\forall\ x, y \in \mathbf{R}^n$, и $\alpha \in \mathbf{R}^n$ удовлетворяет неравенствам (16). Обозначим через $e_j \in \mathbf{R}^n$ вектор, у которого координата с номером j равна единице, а остальные координаты — нули. Положим $\gamma(x) = |m(E_x)|$. Имеем

$$\gamma(x) \leqslant \|E_x\|_\varphi = \varphi(x) \leqslant \prod_{j=1}^{n} \varphi(x_j e_j). \tag{21}$$

Так как «одномерные» полумультипликативные функции $\varphi(x_j e_j)$ ограничены на промежутках $\varepsilon \leqslant x_j \leqslant 1/\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ [22, теорема 7.4.1], в силу (21) функция $\gamma(x)$ ограничена в n-мерном кубе $[\varepsilon, 1/\varepsilon]^n$, и по лемме 2 $\gamma(x) = \exp(\alpha \cdot x)$, где $\alpha \in \mathbf{R}^n$. Из (21) следует, что α удовлетворяет неравенству (16) при любом $x \in \mathbf{R}^n$. Полагая $\chi(x) = m(E_x)/\gamma(x)$, получим требуемое представление (20).

Обозначим $\chi(x, \nu) = g(x, \nu)\exp(-\alpha \cdot x)$, где $g(x, \nu)$ и α взяты из равенств (17) и (20). Докажем, что $\chi(x, \nu)$ — обобщенный характер. Равенство (10) следует из (19). Установим (11), тем самым прямое утверждение теоремы будет доказано. В силу (18) и (21) левая часть (11) больше либо равна единице. Рассуждая от противного, покажем, что на самом деле возможно только равенство. Допустим, что $\exists \nu \in S(\varphi)$:

$$\nu\text{-ess sup } |\chi(x, \nu)| = \Delta > 1. \tag{22}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что ν — положительная конечная мера. Действительно, по теореме 7.13.2 из [22] функция $r(\varphi, x)$ непрерывна; поэтому $K = \min\{r(\varphi, x): |x| = 1\}$ конечно. Далее, из (9) следует, что $\varphi(x) \geqslant \exp(r(\varphi, x))$ для $\forall x \in \mathbf{R}^n$. Если $K \geqslant 0$, то ν — конечная мера для $\forall \nu \in S(\varphi)$. Если $K < 0$, то возьмем $K_1 < K$ и положим $\varphi_1(x) = \exp(-K_1|x| \min\{0, \operatorname{sign} r(\varphi, x)\}) > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$; через $|x|$ обозначена евклидова норма элемента x. Пусть $\nu \in S(\varphi)$, определим меру ν_1 равенством $\nu_1(dx) = \varphi_1(x)\nu(dx)$; тогда ν_1 — конечная мера и $\nu_1 \in S(\varphi)$, так как $\varphi_1(x) \leqslant \min\{1, \varphi(x)\}$ для $\forall x \in \mathbf{R}^n$. Наконец, меры ν и ν_1 абсолютно непрерывны относительно друг друга, поэтому $g(x, \nu) = g(x, \nu_1)$ п. в. относительно обеих мер ν и ν_1. Таким образом, если в (22) мера ν бесконечна, то вместо нее можно рассматривать конечную меру ν_1.

Рассмотрим меру $\Gamma = \exp(\nu) \in S(\varphi)$. Поскольку $\nu \ll \Gamma$, имеем в силу определения 2

$$\Gamma\text{-ess-sup} |\chi(x, \Gamma)| = \Delta > 1. \tag{23}$$

Возьмем $\Delta_1 \in (1, \Delta)$. Положим $G = \{x \in \mathbf{R}^n: |\chi(x, \Gamma)| \geqslant \Delta_1\}$. Обозначим через $B(a, r)$ замкнутый шар радиуса r с центром в точке a. Поскольку $\Gamma(\{0\}) > 0$, имеем $|\chi(0, \Gamma)| = |g(0, \Gamma)/\varphi(0)| \leqslant 1$. Поэтому найдется шар $B(a, r)$, $0 < r < |a|$, такой что множество $G_1 = G \cap B(a, r)$ имеет положительную Γ-меру. Для любого целого $m \geqslant 1$ обозначим через G_m множество

$$G_m = \{x \in \mathbf{R}^n: x = s_1 + \ldots + s_m,\ s_j \in G_1,\ j = 1, \ldots, m\}.$$

Положим $b = |a| - r$, $d = |a| + r$, $a' = a/|a|$. Очевидно, множество G_m лежит в слое $L_m = \{x \in \mathbf{R}^n: xa' \in [mb, md]\}$. Далее, $\Gamma^{m*}(G_m) \geqslant (\Gamma(G_1))^m > 0$. Поскольку $\Gamma^{m*} \ll \Gamma$, из предыдущего неравенства следует, что $\Gamma(G_m) > 0$. Покажем, используя метод индукции, что на множестве G_m функция $\chi(x, \Gamma)$ Γ-п. в. удовлетворяет неравенству

$$|\chi(x, \Gamma)| \geqslant \Delta_1^m. \tag{24}$$

При $m = 1$ это так в силу выбора G_1. Предположим, что (24) справедливо при $m = k$, и пусть $m = k + 1$. Ввиду $\Gamma \ll \Gamma * \Gamma$ достаточно показать, что

$$\Gamma^{2*}\{x \in G_{k+1}: |\chi(x, \Gamma)| < \Delta_1^{k+1}\} = 0. \tag{25}$$

Выражение в левой части (25) равно

$$\Gamma \times \Gamma\{(s_1, s_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n: s_1 \in G_k, s_2 \in G_1, |\chi(s_1 + s_2, \Gamma)| < \Delta_1^{k+1}\}.$$

Фигурирующее здесь множество содержится в объединении множеств

$$D_1 = \{(s_1, s_2): \chi(s_1 + s_2, \Gamma) \neq \chi(s_1, \Gamma)\chi(s_2, \Gamma)\},$$

$$D_2 = \{(s_1, s_2): s_1 \in G_k, |\chi(s_1, \Gamma)| < \Delta_1^k\}.$$

Осталось заметить, что $\Gamma \times \Gamma(D_1) = 0$ в силу (19), а $\Gamma \times \Gamma(D_2) = 0$ в силу теоремы Фубини и предположения индукции. Соотношение (25) установлено, а вместе с ним и неравенство (24).

Функция $f(x) = \ln \varphi(x)$ ограничена на $B = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| \leqslant 1\}$, скажем, числом $M < \infty$ [22, теорема 7.13.1]. Тогда $f(tx) \leqslant 2tM$ для $\forall t \geqslant 1$,

$\forall x\in B$; это следует из полуаддитивности $f(x)$: $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$. Выберем целое $m>1$ так, чтобы

$$\ln \Delta_1 > (|a|+r)(|\alpha|+2M)/m; \tag{26}$$

здесь a и r такие же, как и в определении множества G_1. Найдется такое $y\in L_m$, что множество $H=G_m\cap B(y, r)$ имеет положительную Г-меру. Рассмотрим меру $\Gamma_1=\Gamma * E_u$, где $u=(|y|-|a|)y/|y|$. Обозначим $H_1=H-u$. Имеем $\Gamma_1(H_1)=\Gamma(H)>0$, а норма любой точки $x\in H_1$ удовлетворяет неравенству $|x|\leqslant|a|+r$. Оценим Γ_1-ess sup $\{|\chi(x, \Gamma_1)|$: $x\in H_1\}$. Для п.в. пар (s, t) относительно $\Gamma\times E_u$ имеем $g(s+t, \Gamma_1)=g(s, \Gamma)g(t, E_u)$ [23, формула (35)] или для Г-п.в. $s-\chi(s+u, \Gamma_1)=\chi(s, \Gamma)\chi(u)$. Разделив обе части этого равенства на $\exp(\alpha\cdot(s+u))$, получим для Г-п.в. s $\chi(s+u, \Gamma_1)=\chi(s, \Gamma)\chi(u)$. Отсюда, а также из определения меры Γ_1 следует, что для Γ_1-п.в. $x\in H_1$

$$|\chi(x,\Gamma_1)|\geqslant \Delta_1^m=\Delta_2. \tag{27}$$

Пусть $H_k=H_1+\ldots+H_1$ (k раз). Тогда, заменяя Γ на Γ_1 и G_k на H_k в рассуждениях, использовавшихся при выводе неравенства (24), получим $\Gamma_1(H_k)>0$ и $|\chi(x,\Gamma_1)|\geqslant\Delta_2^k$ для Γ_1-п.в. $x\in H_k$; в дальнейшем, переходя в случае необходимости к подмножествам, будет считать, что последнее неравенство выполняется для всех $x\in H_k$; здесь $k\geqslant 1$ — произвольное целое.

Имеем в силу (18)

$$1\geqslant \Gamma_1\text{-ess sup}\,|g(x,\Gamma_1)|/\varphi(x)\geqslant \Gamma_1\text{-ess sup}\,\{|g(x,Z_1)|/\varphi(x)\colon\ x\in H_k\}\geqslant$$
$$\geqslant \Delta_2^k\inf\{\exp(\alpha\cdot x)/\varphi(x)\colon\ x\in H_k\}.$$

Переходя к логарифмам и разделив на $|x|$, получим

$$\inf_{x\in H_k}(k\ln\Delta_2+\alpha\cdot x-\ln\varphi(x))/|x|\leqslant 0.$$

Заметим, что $|x|\leqslant k(|a|+r)$ для $\forall x\in H_k$, отсюда следует, что

$$\ln\Delta_2/(|a|+r)\leqslant|\alpha|+2M,$$

но это противоречит выбору Δ_2 (см. (26)). Таким образом, предположение (22), приведшее к противоречию, неверно. Вместе с равенством $\chi(0, \Gamma)=1$ это доказывает, что определенная в процессе доказательства обобщенная функция $\chi(x, \nu)$ наряду с (10) удовлетворяет также и условию (11), т. е. она является обобщенным характером. Прямое утверждение теоремы 2 доказано. Обратное утверждение теоремы 2 легко следует из определения обобщенного характера и равенства $\chi(x+y, \mu*\nu)=\chi(x, \mu)\chi(y, \nu)$ для п.в. пар (x, y) относительно произведения мер $|\mu|\times|\nu|$ [23, формула (35)].

Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)>0$ и G — некоторое фиксированное распределение из класса $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma\geqslant 0$. Положим $\tau(t)=\bar{G}(t)=G((t, \infty))$, $t\geqslant 0$; $v^+=\max(0, v)$ для $v\in\mathbf{R}$;

$$\varphi(y)=\sum_{j=1}^n\exp(\gamma y_j^+/x_j)/n,\quad y\in\mathbf{R}^n. \tag{28}$$

Очевидно, что φ — полумультипликативная функция. Банахову алгебру $S(\varphi)$ при таком выборе функции φ обозначим для краткости просто через S.

Перейдем к рассмотрению совокупностей мер из S, обладающих одинаковыми асимптотическими свойствами относительно функции $\tau(t)$.

Положим для $\nu\in S$

$$Q(\nu)=\sup|\nu|(B(tx))/\tau(t),$$
$$\|\nu\|=\|\nu\|_\varphi+Q(\nu). \tag{29}$$

Функционал $\|\nu\|$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. Рассмотрим следующие совокупности мер:

$$Sf = \{\mu \in S\colon\ Q(\mu) < \infty\},$$
$$So = \{\mu \in Sf\colon\ \lim_{t\to\infty} |\mu|(tB(x))/\tau(t) = 0\},$$

и будем говорить, что мера μ принадлежит совокупности Sl, если $\mu \in Sf$ и существует такой вектор $c(\mu) = (c_1(\mu), \ldots, c_n(\mu)) \in \mathbf{C}^n$, что для любого $z \in \mathbf{R}^n$

$$\mu(tB(x) - z) \sim \sum_{=1}^{n} c_j(\mu) \exp(\gamma z_j/x_j)\, \tau(t), \quad t \to \infty. \tag{30}$$

Очевидно, что мера E, единичный элемент банаховой алгебры S, принадлежит этим совокупностям.

Теорема 3. *Совокупность мер* Sf *является комплексной коммутативной банаховой алгеброй относительно некоторой нормы* $\|\nu\|'$, *эквивалентной норме* (29). *В качестве произведения элементов из* Sf *берется их свертка, а единичным элементом служит мера* E.

Совокупности мер So *и* Sl *являются банаховыми подалгебрами алгебры* Sf, *и для произвольных элементов* $\mu, \nu \in Sl$ *имеют место равенства*

$$c_j(\mu * \nu) = c_j(\mu)\widehat{\nu}_j(\gamma/x_j) + c_j(\nu)\widehat{\mu}_j(\gamma/x_j), \tag{31}$$
$$j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Полнота нормированных пространств Sf, So и Sl относительно нормы (29) устанавливается с помощью стандартных рассуждений (см. доказательства аналогичных утверждений в [4, 25, 26]). Покажем, что свертка $\mu * \nu \in Sf$, если $\mu, \nu \in Sf$, и что существует постоянная $C \geqslant 1$, такая что

$$\|\mu * \nu\| \leqslant C\|\mu\|\,\|\nu\|. \tag{32}$$

Тогда в Sf можно перейти к эквивалентной норме $\|\nu\|'$, удовлетворяющей всем требованиям из определения банаховой алгебры [22, теорема 2.14.3]. Тем самым первая часть теоремы будет доказана.

Рассмотрим неотрицательные меры $\mu, \nu \in Sf$. Пусть $t \geqslant 0$ и

$$D = \{(y, z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n\colon\ y + z \in tB(x)\},$$
$$d = A(tx/2) = \{y \in \mathbf{R}^n\colon\ y \leqslant tx/2\}.$$

Представим D в виде объединения непересекающихся множеств $D_1 = D \cap (d \times \mathbf{R}^n)$, $D_2 = D \cap (\mathbf{R}^n \times d)$, $D_3 = D \cap (d^c \times d^c)$. Имеем

$$(\mu * \nu)(tB(x)) = \sum_{k=1}^{3} \mu \times \nu(D_k) = \sum_{k=1}^{3} I_k(t). \tag{33}$$

Обозначим $f(y) = \max(y_j^+/x_j\colon\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, $y \in \mathbf{R}^n$. Тогда $d = A(0) \cup \{0 < f(y),\ y \leqslant tx/2\} \in A(0) \cap d_1$. Определим меру μ_f равенством

$$\mu_f(A) = \mu\{y \in \mathbf{R}^n\colon\ f(y) \in A\},\quad A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

Имеем

$$I_1(t)/\tau(t) = \left(\int_{A(0)} + \int_{d_1}\right) \nu(tB(x) - y)\,\mu(dy)/\tau(t) = J_1(t) + J_2(t). \tag{34}$$

Справедливы оценки

$$J_1(t) < Q(\nu)\,\mu(A(0)), \tag{35}$$

$$J_2(t) \leqslant Q(\nu) \int_0^{t/2} \tau(t - s)\,\mu_f(ds)/\tau(t). \tag{36}$$

Представим последний интеграл в виде повторного интеграла ($\tau(t) = G((t, \infty))$) и переменим порядок интегрирования; получим

$$\int_{t/2}^{t} \mu_f((t-u, t/2))\, G(u)/\tau(t) + \mu_f((0, t/2)) \leqslant Q(\mu)\, G^{2*}((t, \infty))/\tau(t) + $$
$$+ \mu(B(0)) \leqslant Q(\mu) C_1 + \mu(B(0)), \tag{37}$$

где $C_1 = \sup\{G^{2*}((t, \infty))/\tau(t)\colon t \geqslant 0\} < \infty$ в силу условия 2) (см. пункт 1). Из (34)—(32) вытекает оценка для $I_1(t)$:

$$\sup_{t\geqslant 0} I_1(t)/\tau(t) \leqslant Q(\nu)\, \|\mu\|_\varphi + C_1 Q(\mu)\, Q(\nu). \tag{38}$$

Аналогичная оценка справедлива для $I_2(t)$. Наконец,

$$\sup_{t\geqslant 0} I_3(t)/\tau(t) \leqslant C_1 Q(\mu)\, Q(\nu). \tag{39}$$

Из оценок (38), (39) следует (32).

Перейдем к доказательству второй части теоремы 3. Пусть $\mu, \nu \in \mathrm{Sl}$; покажем, что $\mu * \nu \in \mathrm{Sl}$ и что выполняются равенства (31). Пусть $0 < T < t/2$. Имеем

$$\frac{I_1(t)}{\tau(t)} = \left(\int_{A(Tx)} + \int_{A(tx/2)\cap B(Tx)}\right) \frac{\nu(tB(x) - y)}{\tau(t)}\, \mu(dy) = J_3(t) + J_4(t). \tag{40}$$

По теореме о мажорируемой сходимости из условия (31) вытекает

$$\lim_{t\to\infty} J_3(t) = \int_{A(Tx)} \sum_{j=1}^{n} c_j(\nu) \exp(\gamma y_j/x_j)\, \mu(dy). \tag{41}$$

Обозначим для краткости подынтегральную функцию в (41) через $h(y;\ c(\nu))$. При оценке интеграла $J_4(t)$ используем уже применявшийся прием (см. выкладку (37)):

$$|J_4(t)| \leqslant Q(\nu) \int_{T}^{t/2} \tau(t-s)\, |\mu|_f(ds)/\tau(t) \leqslant$$
$$\leqslant Q(\mu)(Q)(\nu) \left\{ \int_{t/2}^{t-T} \frac{\tau(t-u)}{\tau(t)}\, G(du) + \frac{\tau(T)\, \tau(t-T)}{\tau(t)} \right\}. \tag{42}$$

Далее, повторяя рассуждения, использовавшиеся при доказательстве предложения 2 в [27], приходим к равенству

$$\lim_{t\to\infty} I_1(t)/\tau(t) = \int h(y;\ c(\nu))\, \mu(dy).$$

Аналогичное равенство справедливо для $I_2(t)$ и $I_3(t)/\tau(t) \to 0$, $t \to \infty$ [27, доказательство предложения 2]. В результате равенство (33) влечет

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(\mu*\nu)\,(tB(x))}{\tau(t)} = \sum_{j=1}^{n} \left[c_j(\nu)\, \widehat{\mu}_j(\gamma/x_j) + c_j(\mu)\, \widehat{\nu}_j(\gamma/x_j)\right]. \tag{43}$$

Пусть теперь $z \in \mathbf{R}^n$ произвольно. Определим сдвиг μ_z меры $\mu \in \mathrm{Sl}$ формулой $\mu_z(A) = \mu(A - z)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$. Очевидно $\mu_z \in \mathrm{Sl}$ и

$$c_j(\mu_z) = \exp(\gamma z_j/x_j)\, c_j(\mu), \tag{44}$$

$$\widehat{\mu}_{z,j}(\gamma/x_j) = \exp(\gamma z_j/x_j)\, \widehat{\mu}_j(\gamma/x_j),\quad j = 1, \ldots, n. \tag{45}$$

Имеем $\mu * \nu(tB(x) - z) = \mu_z * \nu(tB(x))$. Применение уже доказанного равенства (43) к свертке мер $\mu_z * \nu$ с использованием равенств (44) и (45) показывает, что свертка $\mu * \nu$ удовлетворяет условию (30) и что для соответствующих ей коэффициентов $c_j(\mu * \nu)$ справедливы равенства

(31). Доказательство утверждения теоремы для совокупности So аналогично.

Следующая теорема показывает, что гомоморфизмы введенных банаховых алгебр в поле комплексных чисел суть сужения гомоморфизмов банаховой алгебры S.

Теорема 4. *Пусть* m: $\mathrm{So}\to\mathbf{C}$ — *произвольный гомоморфизм банаховой алгебры* So *в поле комплексных чисел. Тогда существует обобщенный характер* $\chi(y,\nu)$, $y\in\mathbf{R}^n$, $\nu\in\mathrm{So}$, *на* So *и вектор* $\alpha\in\mathbf{R}^n$, *удовлетворяющий неравенствам*

$$\alpha\cdot y\leqslant r(\varphi,y)=\max_{1\leqslant j\leqslant n} y_j^+\gamma/x_j,\ y\in\mathbf{R}^n,\tag{46}$$

такие, что справедливо представление (15). *Обратно, для любого обобщенного характера на* So *и любого вектора* $\alpha\in\mathbf{R}^n$, *удовлетворяющего* (46), *формула* (15) *определяет некоторый гомоморфизм* m: $\mathrm{So}\to\mathbf{C}$.

Идентичные утверждения справедливы также и для банаховых алгебр Sf *и* Sl.

Доказательство. Несложные вычисления показывают, что неравенства (16) в теореме 2 при данном выборе (28) полумультипликативной функции φ переходят в (46). Положим для любого $y\in\mathbf{R}^n$

$$\varphi_1(y)=\|E_y\|=\varphi(y)+\mathbf{1}_{B(0)}(y)/\tau\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} y_j/x_j\right);\tag{47}$$

здесь $\mathbf{1}_{B(0)}$ — индикатор множества $B(0)$. Так как $E_{y+z}=E_y*E_z$, в силу неравенства (32) имеем $\varphi_1(y+z)\leqslant C\varphi_1(y)\varphi_1(z)$. Найдутся полумультипликативная функция φ_2 и положительные постоянные C_2 и C_3, такие, что для $\forall y\in\mathbf{R}^n$

$$C_2\varphi_1(y)\leqslant\varphi_2(y)\leqslant C_3\varphi(y);\tag{48}$$

для этого достаточно положить $\varphi_2(y)$ равным норме $\|A_y\|$ ограниченного линейного оператора A_y: $\mathrm{Sf}\to\mathrm{Sf}$, определяемого равенством $A_y(\mu)=\mu*E_y$, $\mu\in\mathrm{Sf}$ [22, доказательство теоремы 2.14.3]. Для любого $y\in\mathbf{R}^n$ имеем

$$r(\varphi_2,y)=r(\varphi,y)=\max_{1\leqslant j\leqslant n} y_j^+\gamma/x_j=\gamma\Delta(y).\tag{49}$$

Если $y\in A(0)$, т. е. $y_j\leqslant 0$ для $\forall j$, то (49) — немедленное следствие соотношений (47) и (48). Пусть $y\in B(0)$, т. е. $\Delta=\Delta(y)>0$. Тогда

$$\varphi(ty)\leqslant\exp(t\gamma\Delta)=o(1/\tau(t\Delta)),\ t\to\infty.\tag{50}$$

Учитывая соотношения (47), (48) и (50), при любом $y\in B(0)$ имеем $r_2(\varphi_2,\ y)=\gamma\Delta$ [27]. Справедливы включения $S(\varphi_2)\subset\mathrm{So}\subset S$. Это вытекает из (48) и оценки

$$\frac{|\mu|(tB(x))}{\tau(t)}\leqslant\int\limits_{tB(x)}\frac{|\mu|(dy)}{\tau(\Delta)}\leqslant\int\limits_{tB(x)}\varphi_1(y)|\mu|(dy),$$

потому что если $\mu\in S(\varphi_2)$, то интеграл справа стремится к нулю при $t\to\infty$ ($tB(x)\downarrow\varnothing$ при $t\uparrow\infty$). Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы в случае банаховой алгебры So, достаточно повторить соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 2 в [24]. Сужение m_1 гомоморфизма m на $S(\varphi_2)$ является гомоморфизмом банаховой алгебры $S(\varphi_2)$ в $\mathbf{C}$. По теореме 2 он представим в виде (15), где в силу (49) вектор α удовлетворяет неравенствам (46). Это позволяет продолжить m_1 до гомоморфизма m_2: $S\to\mathbf{C}$, также имеющего вид (15) с тем же вектором α. Совокупность $S(\varphi_2)$ всюду плотна в So; поэтому m_2 совпадает с m на So.

Приведем схему доказательства теоремы для Sl и Sf. Оба случая рассматриваются аналогично. Пусть m: $\mathrm{Sl}\to\mathbf{C}$ — гомоморфизм. Его сужение m_0 на So также гомоморфизм. Как показано выше, m_0 — сужение на So некоторого гомоморфизма m_1: $S \to \mathbf{C}$; и чтобы доказать теорему для Sl, достаточно установить, что m — сужение m_1 на Sl.

Если допустить, что m не является сужением m_1 на Sl, то мы придем к противоречию с непрерывностью функционала $m_2 = m - m_1$: $:\mathrm{Sl} \to \mathbf{C}$, рассуждая, как при доказательстве теоремы 3 из [24]. При этом вместо условия (29) в [24] следует воспользоваться соотношением

$$\lim_{m\to\infty} Q(\mu_m * \mu_m) = 0 \text{ для } \forall \mu \in \mathrm{Sf}, \tag{51}$$

где $\mu_m(B) = \mu(B \setminus A(mx))$, $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$, $m = 1, 2, \ldots$. Проверка этого соотношения осуществляется аналогично проверке подобного соотношения (35) в [27]. Обратные утверждения теоремы 4 очевидны.

Перейдем к изучению строения максимальных идеалов. Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная комплексная коммутативная банахова алгебра, e — единичный элемент в $\mathscr{A}$ и $\mathscr{M}$ — пространство максимальных идеалов банаховой алгебры $\mathscr{A}$. *Спектром* $\sigma(x)$ *элемента* $x \in \mathscr{A}$ называется совокупность комплексных чисел λ таких, что элементы $x - \lambda e$ не имеют обратного. Всякий максимальный идеал $M \in \mathscr{M}$ порождает гомоморфизм m: $\mathscr{A} \to \mathbf{C}$, причем $M = m^{-1}(\{0\})$. Значение $m(x)$ гомоморфизма m на элементе $x \in \mathscr{A}$ обозначим через $x(M)$. Если фиксировать $x \in \mathscr{A}$, то получим функцию $M \to x(M)$ на пространстве максимальных идеалов $\mathscr{M}$. Топология пространства $\mathscr{M}$ — это наименьшая топология, относительно которой все функции $x(M)$, определенные на $\mathscr{M}$, непрерывны. Спектр $\sigma(x)$ элемента $x \in \mathscr{A}$ совпадает с областью значений функции $x(M)$: $\sigma(x) = \{x(M) \colon M \in \mathscr{M}\}$ [28].

Обозначим через $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\mathrm{f}$, $\mathfrak{M}\mathrm{o}$, $\mathfrak{M}\mathrm{l}$ пространства максимальных идеалов банаховых алгебр S, Sf, So, Sl соответственно.

Теорема 5. *Любой максимальный идеал M банаховой алгебры* So *представим в виде*

$$M = M_1 \cap \mathrm{So}, \tag{52}$$

где M_1 — *некоторый максимальный идеал банаховой алгебры S. И наоборот, если $M_1 \in \mathfrak{M}$, то $M \cap \mathrm{So} \in \mathfrak{M}\mathrm{o}$. Соответствие* (52) *между пространствами* $\mathfrak{M}\mathrm{o}$ *и* $\mathfrak{M}$ *максимальных идеалов есть гомеоморфизм.*

Идентичные утверждения справедливы также и для банаховых алгебр Sl *и* Sf.

Доказательство. Теорема 5 — непосредственное следствие теорем 2 и 4. Взаимную однозначность соответствия (52) нетрудно доказать, используя тот факт, что совокупность So всюду плотна в S. Взаимная непрерывность соответствия (52) следует из определения топологии в пространстве максимальных идеалов банаховой алгебры.

Известно следующее утверждение [28, 29].

Теорема А. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области $\mathscr{D} \subset \mathbf{C}$, содержащей спектр $\sigma(x)$ элемента $z \in \mathscr{A}$. Тогда существует такой элемент $f(x) \in \mathscr{A}$, что для всех $M \in \mathscr{M}$*

$$f(x)(M) = f(x(M)).$$

Элемент $f(x) \in \mathscr{A}$, *фигурирующий в теореме* **А**, *называется значением аналитической функции $f(z)$ на элементе $x \in \mathscr{A}$.*

Теорема 6. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области $\mathscr{D} \subset \mathbf{C}$, содержащей спектр $\sigma(\nu)$ меры $\nu \in S$, и пусть $f(\nu) \in S$ — значение $f(z)$ на элементе $\nu \in S$, определяемое теоремой* **А**. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

I. *Если $\nu \in Sf$* (So), *то и $f(\nu) \in$* Sf (So).

II. *Если $\nu \in$* Sl, *то и $f(\nu) \in$* Sl; *при этом имеют место равенства*

$$c_j(f(\nu)) = f'(\widehat{\nu}_j(\gamma/x_j))\, c_j(\nu), \; j = 1, \ldots, n. \tag{53}$$

Доказательство. Докажем только вторую часть. Спектр меры ν в Sl совпадает с множеством $\{x(M),\ M \in \mathfrak{M}\mathrm{l}\}$, которое в силу теорем 2 и 4 совпадает с $\{x(M_1),\ M_1 \in \mathfrak{M}\} = \sigma(\nu)$. Поэтому согласно теореме А ($\mathscr{A} = \mathrm{Sl}$) существует элемент $\mu \in \mathrm{Sl}$, такой что $\mu(M) = f(\nu(M))$, $M \in \mathfrak{M}$. Равенство $\mu = f(\nu)$ следует из взаимной однозначности соответствия между конечными мерами в $\mathbf{R}^n$ и преобразованиями Лапласа. Действительно, при фиксированном $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (i\mathbf{R})^n$ отображение m: $S \to \mathbf{C}$, задаваемое равенством $m(\varkappa) = \widehat{\varkappa}(\lambda)$, $\varkappa \in S$, есть гомоморфизм. Имеем

$$\widehat{\mu}(\lambda) = f(\widehat{\nu}(\lambda)) = (f(\nu))^{\wedge}(\lambda) \text{ для } \forall \lambda \in (i\mathbf{R})^n.$$

Значит, меры μ и $f(\nu)$ совпадают.

Равенства (53) доказываются так же, как и равенство (2) в теореме 1 из [4]. В качестве соответствующего линейного непрерывного функционала L следует взять отдельно для каждого $j = 1, \ldots, n$ функционал $L_j(\nu) = c_j(\nu)$, $\nu \in \mathrm{Sl}$. Линейность L_j очевидна, чего нельзя сказать о непрерывности L_j. Однако мы преодолеем и это препятствие. Обозначим $l(\mu) = \sum_{j=1}^{n} c_j(\mu)$. Из линейности l и оценки $|l(\mu)| \leqslant Q(\mu) \leqslant \|\mu\|$ следует непрерывность l в Sl. Покажем, что сдвиг мер на фиксированный вектор $z \in \mathbf{R}^n$ является непрерывным отображением Sl в себя. Во-первых, $\|\mu_z - \nu_z\|_\varphi \leqslant \varphi(z)\|\mu - \nu\|_\varphi$. Во-вторых, условие 3) определения 1 и неравенство

$$|\mu|(tB(x) - y) \leqslant |\mu|((t - f(y)B(x))$$
$$\left(\text{напоминаем: } f(z) = \max\{z_j^+/x_j\colon\ j = 1, \ldots, n\}\right)$$

гарантируют, что при фиксированном $z \in \mathbf{R}^n$

$$Q(\mu_z - \nu_z) \leqslant C_4 Q(\mu - \nu).$$

Эти оценки показывают, что при фиксированном $z \in \mathbf{R}^n$

$$\|\mu_z - \nu_z\| \leqslant C_5\|\mu - \nu\|.$$

Возьмем $z = (z_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$, $z_1 \neq 0$. Функционал $l(\mu) - l(\mu_z)$ непрерывно зависит от $\mu \in \mathrm{Sl}$. С другой стороны, в силу (44) эта разность равна $(1 - \exp(z_1\gamma/x_1))c_1(\mu)$. Значит, функционал $L_1 = c_1(\mu)$ непрерывен.

Замечание. Банаховы алгебры мер в $\mathbf{R}_+$ и в $\mathbf{R}$, аналогичные рассмотренным в этом параграфе, изучались в работах [27, 30].

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

/Б $\Rightarrow$ А/. Пусть B — замкнутый единичный шар с центром в нуле. Обозначим $\nu^{(1)}(A) = \nu(A \backslash B)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$; $\nu^{(1)}$ — конечная мера. Представим б. д. р. F в виде $F = F^1 * F^{(2)}$, где $F^{(1)}$ — обобщенное распределение Пуассона с мерой Леви $\nu^{(1)}$:

$$\widehat{F}^{(1)}(\lambda) = \exp\{\widehat{\nu}^{(1)}(\lambda) - \nu^{(1)}(\mathbf{R}^n)\},\ \lambda \in (i\mathbf{R})^n, \tag{54}$$

а $F^{(2)} = F^{(2)}(a^{(2)}, \mathbf{S}, \nu - \nu^{(1)})$. Из условия Б следует, что $\nu^{(1)} \in \mathrm{Sl}$ и что $c_j(\nu^{(1)}) = c_j(\nu)$, $j = 1, \ldots, n$. Мера $F^{(1)}$ равна значению целой функции $f(z) = \exp(z - \nu^{(1)}(\mathbf{R}^n))$ и по теореме 6 принадлежит Sl; в силу (53), (54) имеют место равенства

$$c_j(F^{(1)}) = \widehat{F}_j^{(1)}(\gamma/x_j)\, c_j(\nu), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{55}$$

По лемме 1 из [31] для любого $\delta > 0$

$$\int \exp\{(\gamma + \delta)|y|\} F^{(2)}(dy) < \infty, \tag{56}$$

а из условия 3) определения 1 следует [9, лемма 2.4], что

$$\lim_{t\to\infty} \tau(t) \exp\{(\gamma + \delta)t\} = \infty \text{ для } \forall\delta > 0. \tag{57}$$

Из соотношений (56), (57) вытекает, что $F^{(2)} \in \mathrm{So} \subset \mathrm{Sl}$. Поэтому

$$c_j(F^{(2)}) = 0, \ j = 1, \ldots, n. \tag{58}$$

Таким образом, $F \in \mathrm{Sl}$. Из соотношений (31), (55) и (58) следует, что

$$c_j(F) = c_j(F^{(1)}) \widehat{F}_j^{(2)}(\gamma/x_j) = \widehat{F}_j(\gamma/x_j)\, c_j(\nu), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{59}$$

Импликация Б $\Rightarrow$ А доказана. Из формул (6) и (59) вытекает требуемое соотношение (7).

/А $\Rightarrow$ Б/. Сначала покажем, что если F — обобщенное распределение Пуассона с мерой Леви ν, то из принадлежности $F \in \mathrm{Sl}$ следует $\nu \in \mathrm{Sl}$. Тогда по доказанному будут выполняться равенства (55) (без верхнего индекса). Очевидно, что $\nu \in S$. Как элемент банаховой алгебры S, мера F — значение $f(\nu)$ целой функции $f(z)$ на элементе $\nu \in S$. Поэтому

$$F(M) = \exp\{\nu(M) - \nu(\mathbf{R}^n)\}, \quad M \in \mathfrak{M}. \tag{60}$$

В силу теорем 2 и 4 функции $F(M_1)$, $M_1 \in \mathfrak{Ml}$ и $F(M)$, $M \in \mathfrak{M}$, совпадают с точностью до гомеоморфизма (52). Поэтому из (60) следует, что $\ln F(M_1)$, $M_1 \in \mathfrak{Ml}$,— однозначная непрерывная функция на $\mathfrak{Ml}$. Значит, найдется элемент $\varkappa \in \mathrm{Sl}$, такой что $\varkappa(M_1) = \ln F(M_1)$, $M_1 \in \mathfrak{Ml}$ [32]. В силу взаимной однозначности соответствия между мерами и преобразованиями Лапласа $\varkappa = \nu - \nu(\mathbf{R}^n)E$. Таким образом, $\nu \in \mathrm{Sl}$.

Пусть в представлении (1) $\mathbf{S} = 0$ и $\nu(\mathbf{R}^n) < \infty$. Тогда F — сдвиг обобщенного распределения Пуассона с мерой Леви ν. Поскольку алгебра Sl содержит все сдвиги своих элементов, то по доказанному на предыдущем этапе $\nu \in \mathrm{Sl}$. Импликация А $\Rightarrow$ Б установлена и в этом случае.

Самый сложный и трудоемкий случай: $\mathbf{S} \neq 0$ или $\nu(\mathbf{R}^n) = \infty$. Воспользуемся опять равенством $F = F^{(1)} * F^{(2)}$. Пусть $F \in \mathrm{Sl}$. Для доказательства импликации А $\Rightarrow$ Б достаточно показать, что $F^{(1)} \in \mathrm{Sl}$, откуда, как уже установлено для обобщенного распределения Пуассона, будет следовать, что $\nu^{(1)} \in \mathrm{Sl}$; а это эквивалентно утверждению Б. Обозначим через $h_1(y)$ и $h_2(y)$, $y \in \mathbf{R}^n$, соответственно нижний и верхний пределы отношения $F^{(1)}(tB(x) - y)/\tau(t)$ при $t \to \infty$. Достаточно установить, что

$$h_1(y) = h_2(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j \exp(y_j\gamma/x_j) \ \text{для} \ \forall y \in \mathbf{R}^u, \tag{61}$$

где $c_j = c_j(F)/\widehat{F}_j^{(2)}(\gamma/x_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Фиксируем $u \in \mathbf{R}^n$. Обозначим

$$D_4 = \{(y, s) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \colon y + s \in tB(x) - u\}.$$

Перейдем к пределу при $t \to \infty$ в следующем равенстве:

$$\frac{F(tB(x) - u)}{\tau(t)} = \int\limits_{A((tx-u)/2)} \frac{F^{(1)}(tB(x) - u - y)\, F^{(2)}(dy)}{\tau(t)} +$$

$$+ \int\limits_{A((tx-u)/2)} \frac{F^{(2)}(tB(x) - u - s)\, F^{(1)}(ds)}{\tau(t)} +$$

$$+ \frac{(F^{(1)} \times F^{(2)})(D_4 \cap B((tx-u)/2) \times B((tx-u)/2))}{\tau(t)} = \sum_{j=6}^{8} J_j(t). \tag{62}$$

Получим

$$\int h_1(u+y)\, F^{(2)}(dy) = \sum_{j=1}^{n} c_j(F) \exp(u_j\gamma/x_j) = \int h_2(u+y)\, F^{(2)}(dy). \tag{63}$$

Это устанавливается следующим образом. Нетрудно видеть, что $F^{(1)} \in \mathrm{Sf}$; ранее было показано, что $F^{(2)} \in \mathrm{So}$. Поэтому, рассуждая как при доказательстве второй части теоремы 3, заключаем, что

$$\lim_{t\to\infty} J_7(t) = \lim_{t\to\infty} J_8(t) = 0. \tag{64}$$

Из $F^{(1)} \in \mathrm{Sf}$ следует, что

$$0 \leqslant F^{(1)}(tB(x)-y)/\tau(t) \leqslant F^{(1)}((t-f(y))B(x))/\tau(t) \leqslant$$
$$\leqslant Q(F^{(1)}) \sup_{t \geqslant 0} \tau(t-f(y))/\tau(t) \leqslant C_6 \exp\{C_7 f(y)\} = Z(y). \qquad (65)$$

Функция $Z(y)$ $F^{(2)}$-интегрируема [31], поэтому неравенства (65) гарантируют законность применения леммы Фату — Лебега (см. [33]) к $J_6(t)$. В результате из (5), (62), (64) и леммы Фату — Лебега, примененной к интегралу $J_6(t)$, получим соотношения (63), где вместо равенств пока стоят знаки «меньше» или «равно». В действительности же в этих соотношениях стоят знаки равенства. Это следует из неравенств $h_1(y) \leqslant \leqslant h_2(y) \leqslant h_1(y+v)$ для $\forall v > 0$. Перейдем непосредственно к доказательству соотношения (61) для функции $h(y) = h_2(y)$. Для функции $h_1(y)$ равенство (61) доказывается аналогично. Фиксируем точку $z = (z_1, 0, \ldots, 0)$, $z_1 > 0$, обозначим $h_z(y) = h(y+z) - h(y)$. Рассмотрим функцию

$$k_z(y) = h_z(y)/\{\exp(y_1\gamma/x_1)(\exp(z_1\gamma/x_1)-1)\}.$$

Из (63) вытекает, что

$$c_1(F) = \int k_z(y+u) \exp(y_1\gamma/x_1) F^{(2)}(dy) \quad \text{для} \quad \forall u \in \mathbf{R}^n. \qquad (66)$$

Лемма 3. *Пусть* μ *— конечная неотрицательная мера, определенная на* σ*-алгебре* $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$*; пусть ее преобразование Лапласа* $\widehat{\mu}(it)$ *не обращается в нуль ни при каком* $t \in \mathbf{R}^n$ *и представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию в* $\mathbf{R}^n$: $\widehat{\mu}(it) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. *Пусть* $K(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, *— измеримая по Борелю ограниченная п. в. относительно меры Лебега комплексная функция, такая что*

$$K * \mu(x) = \int K(x-y)\mu(dy) \equiv C(K). \qquad (67)$$

Тогда п. в. относительно меры Лебега в $\mathbf{R}^n$

$$K(x) = C(K)/\mu(\mathbf{R}^n).$$

Лемма 3 будет доказана после завершения доказательства теоремы 1.

Положим $\mu(dy) = \exp(y_1\gamma/x_1)F^{(2)}(dy)$. Определенная таким образом мера μ удовлетворяет условиям леммы 3, так как $\mu(dy)/\widehat{F}_1^{(2)}(\gamma/x_1)$ — б. д. р. в $\mathbf{R}^n$, имеющее конечные моменты всех порядков, что следует из соотношения (56). Функция $K(y) = k_z(-y)$ также удовлетворяет условию леммы 3. Тождество (67) немедленно вытекает из (66). Ограниченность $k_z(y)$ по $y = (y_1, 0, \ldots, 0)$, $y_1 \geqslant 0$, следует из $F^{(1)} \in \mathrm{Sf}$, условия 3) определения 1 и включения

$$tB(x) - y_1e_1 \subset (t - y_1/x_1)B(x).$$

Действительно,

$$h(y) = \limsup_{t\to\infty} \frac{F^{(1)}(tB(x)-y_1e_1)}{\tau(t)} \leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{F^{(1)}((t-y_1/x_1)B(x))}{\tau(t)} = h(0)\exp(y_1\gamma/x_1).$$

Отсюда следует, что

$$k_z(y) \leqslant h(0)\{\exp(z_1\gamma/x_1)+1\}/\{\exp(z_1\gamma/x_1)-1\} = C_8(z) < \infty.$$

Распространим эти неравенства на случай произвольных отрицательных значений y_1. Положим $h_z^{\pm}(y_1) = \lim\limits_{y_2,\ldots,y_n\to\pm\infty} h_z(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. По теореме монотонной сходимости из (63) следует, что для всех $u \in \mathbf{R}^n$

$$\int h_z^-(y_1)F^{(2)}(dy) = \int h_z^-(y_1)F^{(2)}(dy) = \int h_z(y+u)F^{(2)}(dy).$$

Отсюда следует, что для $F_1^{(2)}$-п. в. $y_1 \in \mathbf{R}$

$$h_z(y_1, y_2, \ldots, y_n) = h_z^+(y_1) = h_z^-(y_1). \tag{68}$$

Можно считать, что равенства (68) выполняются для всех $y_2, \ldots, y_n$ и для п. в. y_1 относительно меры Лебега в $\mathbf{R}$. Этого всегда можно добиться, рассматривая в случае необходимости вместо F, например, свертку F с n-мерным стандартным нормальным распределением $N(0, \mathbf{I})$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Тогда б. д. р. $F * N(0, \mathbf{I})$ эквивалентно мере Лебега в $\mathbf{R}^n$ и имеет ту же самую меру Леви ν, что и F. Здесь эквивалентность мер понимается как абсолютная непрерывность относительно друг друга. Кроме того, $F * N(0, \mathbf{I}) \in \mathrm{Sl}$, так как $N(0, \mathbf{I}) \subset \mathrm{So} \subset \mathrm{Sl}$.

Пусть $y_1 < 0$. Имеем в силу (68)

$$h_z(y_1, 0, \ldots, 0) \overset{\text{п.в.}}{=\!=} h_z(y_1, y_1x_2/x_1, \ldots, y_1x_n/x_1) \leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{t\to\infty} \{F^{(1)}((t - y_1/x_1)B(x) - z_1e_1) -$$
$$- F^{(1)}((t - y_1/x_1)B(x))\}/\tau(t) \leqslant \exp(\gamma y_1/x_1)h(0)\{\exp(\gamma z_1/x_1) + 1\}.$$

Отсюда, а также из (68), следует, что для п. в. y_1 относительно меры Лебега и для всех $y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$, т. е. для п. в. $y \in \mathbf{R}^n$ относительно меры Лебега,

$$k_z(y) = k_z(y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqslant C_8(z).$$

Аналогичное неравенство справедливо и при $z = (z_1, 0, \ldots, 0)$, $z_1 < 0$, потому что $k_z(y) = k_{-z}(y')$, где $y' = (y_1 + z_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Применяя лемму 3, получаем для п. в. $y \in \mathbf{R}^n$ относительно меры Лебега

$$k_z(y) = c_1 = c_1(F)/\widehat{F}_1^{(2)}(\gamma/x_1). \tag{69}$$

В действительности равенство (69) справедливо для всех $y \in \mathbf{R}^n$. Чтобы убедиться в этом, достаточно установить непрерывность $k_z(y)$. Как уже было показано, для п. в. $y_1 \in \mathbf{R}$ функция $h_z(y_1, y_2, \ldots, y_n) = h_z^+(y_1)$, т. е. не зависит от переменных $y_2, \ldots, y_n$. Если мы установим непрерывность по y_1 функции $h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ при любых $y_2, \ldots, y_n$, то тем самым будет установлена непрерывность $h_z(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $k_z(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ по y_1, откуда будет следовать тождественное выполнение равенства (69). Обозначим через D_5 множество всех точек $y \in \mathbf{R}^n$, для которых выполнено равенство (69). Допустим, что при некоторых фиксированных $y_2, \ldots, y_n$ функция $h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ терпит разрыв в некоторой точке $y_1 \in \mathbf{R}$:

$$\delta = h(y_1 + 0, y_2, \ldots, y_n) - h(y_1 - 0, y_2, \ldots, y_n) > 0.$$

Выбирая $u_1 < y_1 < v_1$ так, чтобы $(u_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(v_1, y_2, \ldots, y_n)$ принадлежали D_5 и устремляя $u_1 \to y_1 - 0$, $v_1 \to y_1 + 0$, получим из (69)

$$h(y_1 + z_1 + 0, y_2, \ldots, y_n) - h(y_1 + z_1 - 0, y_2, \ldots, y_n) = \delta > 0.$$

Варьируя z_1, получим, что неубывающая функция от y_1 $h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в каждой точке терпит разрыв, что невозможно. Полученное противоречие доказывает непрерывность по y_1 функции $h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ при любых $y_2, \ldots, y_n$, что, в свою очередь, влечет тождественное выполнение равенства (69). Соотношения, аналогичные (69), получаем также для точек $z \in \mathbf{R}^n$, у которых отличны от нуля только вторые координаты, и т. д. Пусть теперь $z \in \mathbf{R}^n$ произвольно. Произведем преобразования с использованием (69) и аналогичных ему равенств для $j = 2, \ldots, n$:

$$h(z) - h(0) = h\left(\sum_{j=1}^{n} z_je_j\right) - h(0) = \sum_{l=1}^{n}\left\{h\left(\sum_{j=l}^{n} z_je_j\right) - h\left(\sum_{j=l+1}^{n} z_je_j\right)\right\} =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} c_l(\exp(z_l\gamma/x_l) - 1).$$

Обозначим $h_3(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j \exp(z_j\gamma/x_j)$. Как видно из предыдущей выкладки, разность $h(z)-h_3(z)\equiv \text{const}$ и, кроме того, интегралы от функций h и h_3 по мере $F^{(2)}$ равны (это следует из (63) при $u=0$ и (69)). Значит, $h(z)\equiv h_3(z)$.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим свертку $\mu * N$ меры μ с нормальным распределением $N(0, \mathbf{I})$ в $\mathbf{R}^n$. Мера $\mu * N$ абсолютно непрерывна и имеет плотность

$$p(x)=(2\pi)^{-n/2}\int \exp(-|x-u|^2/2)\,d\mu(u), \quad x\in\mathbf{R}^n,$$

которая принадлежит пространству быстро убывающих функций $\mathcal{S}_n$. Из (67) следует, что

$$\int \widetilde{K}(x-y)\,p(y)\,dy=0, \quad \widetilde{K}(x)=K(x)-C(K)/\mu(\mathbf{R}^n).$$

По теореме о преобразовании Фурье [34, с. 105—106] имеем $\mathcal{F}(\widetilde{K}*p)=\mathcal{F}(\widetilde{K})\cdot\mathcal{F}(p)=0$. Заметим, что $\mathcal{F}(p)=\widehat{\mu}\widehat{N}\neq 0$, так как по предположению $\widehat{\mu}\neq 0$, а $\widehat{N}=\exp(-|x|^2/2)$. Поэтому $\mathcal{F}(\widetilde{K})=0$ и, следовательно, $\widetilde{K}(x)=0$ п. в., так как отображение $f\to\mathcal{F}(f)$ на $\mathcal{S}_n'$ взаимно однозначно [34, с. 102].

В завершение приведем еще один результат о безгранично делимых распределениях в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 7. *Пусть F — б. д. р. в $\mathbf{R}^n$ и ν — его мера Леви. Пусть G — распределение класса $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma\geqslant 0$, и $x=(x_1, \ldots, x_n)>0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(а) $F(tB(x))=O(\overline{G}(t))$ *при* $t\to\infty$;

(б) $\nu(tB(x))=O(\overline{G}(t))$ *при* $t\to\infty$.

Заключение теоремы останется в силе, если в ее формулировке символ O всюду заменить на символ o.

Автор выражает глубокую благодарность В. М. Круглову, сделавшему ценные замечания по содержанию статьи и предложившему приводимое здесь более короткое доказательство леммы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Теория случайных процессов.— М.: Наука, 1971.— Т. 1.— 664 с.
2. **Чистяков В. П.** Теорема о суммах положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам // Теория вероятностей и ее применения.— 1964.— Т. 9, вып. 4.— С. 710—718.
3. **Chover J., Ney P., Wainger S.** Degeneracy properties of subcritical branching processes // Ann. Probab.— 1973.— V. 1, N 4.— P. 663—673.
4. **Chover J., Ney P., Wainger S.** Functions of probability measures // J. Anal. Math.— 1973.— V. 26.— P. 255—302.
5. **Teugels J.** The class of subexponential distributions // Ann. Probab.— 1975.— V. 3.— P. 1000—1011.
6. **Embrechts P., Goldie C. M., Veraverbeke N.** Subexponentiality and infinite divisibility // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1979.— Bd 49.— S. 335—347.
7. **Embrechts P., Goldie C. M.** On closure and factorization properties of subexponential and related distributions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A.— 1980.— V. 29.— P. 243—256.
8. **Pitman E. J. G.** Subexponential distribution functions // Ibid.— 1980.— V. 29.— P. 337—347.
9. **Embrechts P., Goldie C. M.** On convolution tails // Stochast. Process and Appl.— 1982.— V. 13.— P. 263—278.
10. **Пинелис И. Ф.** Об асимптотической эквивалентности вероятностей больших уклонений суммы и максимума независимых случайных величин // Тр. Ин-та/ Ин-т математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 5.— С. 144—173.
11. **Золотарев В. М.** Об асимптотическом поведении одного класса безгранично делимых законов распределения // Теория вероятностей и ее применения.— 1961.— Т. 6, вып. 3.— С. 330—334.
12. **Сгибнев М. С.** О безгранично делимых распределениях класса $\mathcal{S}_\gamma$ // Тез. I Всемир. конгр. о-ва им. Бернулли, Ташкент, сент. 1986 г.— М., 1986.— Т. 2.— С. 923.
13. **Якымив А. Л.** Асимптотическое поведение одного класса безгранично делимых

распределений // Теория вероятностей и ее применения.— 1987.— Т. 32, вып. 4.— С. 691—702.
14. **Grübel R.** Functions of discrete probability measures: rates of convergence in the renewal theory // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1983.— Bd 64.— S. 341—357.
15. **Grübel R.** On subordinated distributions and generalized renewal measures // Ann. Probab.— 1987.— V. 15, N 1.— P. 394—415.
16. **Grübel R.** Über unbegrenzt teilbare Verteilungen // Arch. Math.— 1983.— V. 41, Fasc. 1.— P. 80—88.
17. **Улановский А. М.** Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений на бесконечности // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.— Харьков, 1981.— Вып. 35.— С. 100—107.
18. **Круглов В. М., Антонов С. Н.** Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Теория вероятностей и ее применения.— 1982.— Т. 27, вып. 4.— С. 625—642.
19. **Круглов В. М, Антонов С. Н.** Еще раз об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Там же.— 1984.— Т. 29, вып. 4.— С. 735—742.
20. **Круглов В. М.** Дополнительные главы теории вероятностей: Учеб. пособие.— М.: Высш. шк., 1984.— 264 с.
21. **Omey E.** Infinite divisibility and random sums of random vectors // Yokohama Math. J.— 1985.— Vol. 33.— P. 39—48.
22. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 829 с.
23. **Шрейдер Ю. А.** Строение максимальных идеалов в кольцах со сверткой // Мат. сб.— 1950.— Т. 27, № 2.— С. 297—318.
24. **Рогозин Б. А., Сгибнев М. С.** Банаховы алгебры мер на прямой // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 2.— С. 160—169.
25. **Рогозин Б. А.** Асимптотика коэффициентов в теоремах Леви — Винера об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах // Там же.— 1973.— Т. 14, № 6.— С. 1304—1312.
26. **Essén M.** Banach algebra methods in renewal theory // J. Anal. Math.— 1973.— Vol. 26.— P. 303—336.
27. **Сгибнев М. С.** Банаховы алгебры мер класса $\mathscr{S}(\gamma)$ // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 4.— С. 162—171.
28. **Наймарк М. А.** Нормированные кольца.— М.: Наука, 1968.— 664 с.
29. **Wermer J.** Banach Algebras and Several Complex Variables.— New York a. o.: Springer, 1976.— 161 p.
30. **Van Dulst D., Frenk J. B. G.** On Banach algebras, subexponential distributions and renewal theory.— Amsterdam, 1984.— 57 p.— (Preprint; University of Amsterdam, Department of Mathematics; Report 84—20).
31. **Круглов В. М.** Замечание к теории безгранично делимых законов // Теория вероятностей и ее применения.— 1970.— Т. 15, вып. 2.— С. 330—336.
32. **Шилов Г. Е.** О локально аналитических функциях // Успехи мат. наук.— 1966.— Т. 21, вып. 6.— С. 177—182.
33. **Невё Ж.** Математические основы теории вероятностей.— М.: Мир, 1969.— 309 с.
34. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.— 280 с.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ДВУГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЦЕПИ МАРКОВА

В. И. ЛОТОВ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается конечная однородная неразложимая непериодическая цепь Маркова $\{\varkappa_n\}_{n\geqslant 0}$ с множеством состояний $D=\{1, \ldots, m\}$ и матрицей переходных вероятностей $\mathscr{P}=\|p_{jk}\|_{j,k\in D}$. Пусть $\{\xi_{jk}^{(n)}\}$, $n\geqslant 1$, $j, k\in D$ — не зависящее от $\{\varkappa_n\}$ семейство независимых случайных величин, одинаково распределенных при фиксированных j, k. Положим

$$S_0=0,\quad S_n=S_{n-1}+\xi_{\varkappa_{n-1}\varkappa_n}^{(n)},\quad n>0. \tag{1}$$

Очевидно $\{\varkappa_n, S_n\}$ есть двумерный марковский процесс, эволюция которого определяется матрицей

$$F(\mu) = \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d\mathbf{P}(S_1 < y, \varkappa_1 = k/\varkappa_0 = j) \right\| = \| p_{jk} f_{jk}(\mu) \|, \qquad (2)$$

где $f_{jk}(\mu) = \mathbf{E} e^{i\mu\xi_{jk}^{(1)}}$. Для произвольных положительных чисел a и b введем случайную величину

$$N = N(a, b) = \min\{n\colon S_n \notin (-a, b)\},$$

равную моменту первого выхода последовательности $\{S_n\}$ из интервала $(-a, b)$. Полагаем $N = \infty$, если $S_n \in (-a, b)$ при всех n.

Цель работы состоит в получении полных асимптотических разложений по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{a}{n}, \frac{b}{n}$ для распределений вида

$$\mathbf{P}(S_N \in A, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j), \ \mathbf{P}(S_n \in B, N \leqslant n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) \quad (3)$$

при условии, что $a = a(n) \to \infty$, $b = b(n) \to \infty$, $a + b = o(n)$.

Для обычных случайных блужданий ($m = 1$) асимптотические свойства распределений граничных функционалов, связанных с достижением траекторией $S_1, S_2, \ldots$ фиксированного уровня (однограничная задача) или с первым выходом из интервала (двуграничная задача), исследованы достаточно полно. Среди множества подходов здесь выделим факторизационный метод, он обеспечивает наибольшие возможности для получения асимптотических разложений. Известно (см., например, [1]), что преобразование Фурье — Стилтьеса распределений практически всех интересующих нас функционалов в одноограничной задаче могут быть выражены через компоненты факторизации. А. А. Боровковым в [2] развит аналитический метод, который исчерпывающим образом решает проблему полных асимптотических разложений в однограничной задаче. Этот метод включает в себя несколько этапов. На первом из них строятся разного сорта факторизационные тождества для преобразований (двойных и даже тройных) Фурье — Стилтьеса искомых распределений. Последующий анализ полученных выражений требует детального изучения аналитической структуры компонент факторизации — их нулей, особенностей, возможностей аналитического продолжения и т. д. Весьма полное исследование этих вопросов в условиях крамеровского типа также проведено в [2], что позволило затем асимптотически обратить полученные тождества по одной из переменных (слово «асимптотически» означает, что обращение произведено не в точном виде, а с точностью до пренебрежимо малого остатка). Итогом являются так называемые асимптотические представления производящих функций по переменной, связанной со «временем». Дальнейший асимптотический анализ главных частей этих представлений осуществляется с помощью модификаций метода перевала, также разработанных А. А. Боровковым, и позволяет получить полные асимптотические разложения искомых распределений в широком спектре уклонений.

Эта схема исследований была впоследствии перенесена на аналогичные задачи с одной границей для случайных процессов с независимыми приращениями и непрерывным временем [3] и для полумарковских процессов (1) [4]. По этой же схеме построена настоящая работа.

Интерес к случайным блужданиям типа (1) объясняется, с одной стороны, их приложениями, например, к задачам последовательного анализа в статистике, к задачам теории массового обслуживания и другим, с другой — они могут рассматриваться как естественное обобщение классической схемы случайного блуждания, допуская специфическую зависимость скачков, но в то же время позволяя получить аналоги многих результатов в граничных задачах, установленных ранее при $m = 1$.

Изучение распределений, связанных с выходом случайного блуждания (1) из интервала, может быть сведено к системам интегральных уравнений на конечном (возможно, растущем) интервале с ядрами, зависящими от разности аргументов. Этим уравнениям удовлетворяют в разных задачах либо сами искомые вероятности, либо их преобразования Фурье — Стилтьеса. Таким образом, полученные результаты одновременно дают асимптотические представления решений соответствующих систем интегральных уравнений.

Процессы типа (1) рассматривались в работах многих авторов, причем большая часть их посвящена одиограничным задачам и связанным с ними изучением свойств факторизации (см., например, [4—8] и литературу там). Настоящая работа обобщает результаты автора [9, 10], которые были получены в двуграничных задачах для классической схемы блуждания $m=1$. В своих общих чертах метод остался тем же, хотя при этом появились новые трудности и усложнилась техника. § 2 содержит предварительные сведения, необходимые для понимания дальнейшего. Основным является § 3, где найдены асимптотические представления производящих функций распределений (3). Выяснилось, что их природа та же, что и в случае $m=1$, поэтому дальнейший асимптотический анализ проводится в § 4 по известной из [9] схеме с некоторыми изменениями и дополнениями. Излагаемый метод позволяет получать полные асимптотические разложения распределений (3) при любых ограничениях на a и b, совместимых с требованиями $a=a(n)\to\infty$, $b=b(n)\to\infty$, $a=o(n)$, $b=o(n)$, $a+b\geqslant C\sqrt{n}$, а также при произвольных $A\subset(-\infty,\ -a]\cup[b,\ \infty)$ и $B\subset(-a,\ b)$ таких, что $b-\sup\limits_{x\in B}x\to\infty$, $a+\inf\limits_{x\in B}x\to\infty$. Основные результаты приведены в теоремах 3—5, другие разложения из указанного диапазона уклонений читатель может выписать по известному алгоритму.

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Здесь будут изложены необходимые в дальнейшем сведения из [4] о факторизации матричной функции $E-zF(\mu)$ (E — единичная матрица размерности m) и об аналитических свойствах компонент факторизации. Для обычных случайных блужданий ($m=1$) аналитическая структура компонент факторизации впервые подробно исследована в [2]. Кроме того, здесь будут введены и изучены функции, в терминах которых в § 3 формулируются основные результаты об асимптотических представлениях производящих функций.

Всюду в дальнейшем предполагаются выполненными условие Крамера (K): $v_-^*-v_+^*>0$, где v_+^* (соответственно v_-^*) — точная нижняя (верхняя) грань тех v, при которых все интегралы в (2) абсолютно сходятся при $\mu=iv$, и условие (C): найдется элемент матрицы $F(\mu)$ такой, что прообраз Фурье n-й степени этого элемента при некотором целом $n\geqslant 1$ содержит абсолютно непрерывную компоненту.

Если все интегралы в (2) конечны при $\mu=iv_-^*$, то положим $v_-=v_-^*$, в противном случае $v_-^*>0$ и под v_- будем понимать произвольное действительное число такое, что $0<v_-<v_-^*$. Аналогично $v_+=v_+^*$, если все интегралы в (2) сходятся при $\mu=iv_+^*$, в противном случае $v_+^*<v_+<0$. Точки $v_\pm$ могут выбираться как угодно близкими к $v_\pm^*$ в случае несовпадения.

Пусть $\lambda(\mu)$ — максимальное по модулю собственное значение матрицы $F(\mu)$, а $I(\mu)$ и $l(\mu)$ — соответствующие ему вектор-столбец и вектор-строка такие, что $l(\mu)I(\mu)=1$. Обозначим $z_0=1\Big|\inf\limits_{v_+^*<v<v_-^*}\lambda(iv)$. В широких предположениях (например, при $v_-^*<\infty$, $v_+^*>-\infty$) существует единственная точка $v_0 \in (v_+, v_-)$, в которой $\lambda(iv_0) = z_0^{-1}$. Другие случаи здесь не рассматриваются (см. по поводу них замечание в [4]). При $0 < z < z_0$ уравнение $1 - z\lambda(iv) = 0$ имеет не более двух вещественных решений $v = \mu_\pm(z)$, $\mu_+(z) < v_0 < \mu_-(z)$. Обозначим $z_\pm = 1 \Big/ \lim\limits_{v \to v_\pm^*} \lambda(iv)$.

Функция $\mu_+(z)$ $(\mu_-(z))$ является аналитической в окрестности интервала (z_+, z_0) $((z_-, z_0))$, разрезанной по лучу $\operatorname{Re} z \geqslant z_0$, причем в окрестности точки z_0 справедливы разложения

$$\mu_\pm(z) = v_0 \pm i\psi_1\sqrt{z - z_0} - \psi_2(z - z_0) \pm \ldots \tag{4}$$

Здесь корень квадратный понимается в смысле главного значения, $\psi_1 > 0$.

Обозначим через $V(\alpha, \beta)$ банахову алгебру матриц порядка m, элементы которых являются преобразованиями Фурье — Стилтьеса непрерывных слева функций $\varphi(x)$, имеющих на любом конечном отрезке ограниченную вариацию и таких, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} |d\varphi(x)|$ абсолютно сходится при $\alpha \leqslant \operatorname{Im} \mu \leqslant \beta$. Пусть $V_+(\alpha)$ — подмножество $V(\alpha, \beta)$, образованное матрицами вида $\left\| \int\limits_0^{\infty} e^{i\mu y} d\varphi_{jk}(y) \right\|$, $V_-(\beta)$ — подмножество $V(\alpha, \beta)$, образованное матрицами вида $\left\| \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{i\mu y} d\varphi_{jk}(y) \right\|$.

При $|z| \leqslant z_0$, $v_+ \leqslant \operatorname{Im} \mu \leqslant v_-$ матричная функция $E - zF(\mu)$ допускает факторизацию двух типов:

$$E - zF(\mu) = R_{z-}(\mu) R_{z+}(\mu) = L_{z+}(\mu) L_{z-}(\mu),$$

соответственно называемую правой и левой факторизацией. Ее компоненты обладают следующими свойствами. Положительные компоненты $L_{z+}(\mu)$, $R_{z+}(\mu)$ как функции переменной μ принадлежат $V_+(v_+)$, отрицательные компоненты $L_{z-}(\mu)$, $R_{z-}(\mu)$ принадлежат $V_-(v_-)$. Как функции переменной z, принимающие значения в нормированных кольцах $V_\pm(x_\pm)$, компоненты факторизации аналитичны в круге $|z| < z_0$ и, более того, аналитически продолжаются в окрестность любой точки на границе этого круга, кроме точки $z = z_0$. В окрестности точки $z = z_0$ компоненты факторизации являются аналитическими функциями переменной $t = i\sqrt{z - z_0}$. Пусть, далее, $|z - z_0| \geqslant \delta > 0$, $|z| = z_0$. Тогда при некотором $\gamma > 0$

$$(E - zF(\mu))^{-1} \in V(v_0 - \gamma, v_0 + \gamma),$$

$$R_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(v_0 \mp \gamma), \quad L_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(v_0 \mp \gamma).$$

Здесь и далее δ, δ_1, γ — достаточно малые (д. м.) положительные числа. Указанные свойства, однако, перестают быть верными в окрестности точки z_0. Обозначим $a_\pm = v_\pm \mp 1$, $A_{z\pm} = I(i\mu_\pm(z)) l(i\mu_\pm(z))$, $F_{z\pm}(\mu) = E - (\mu_\pm(z) - a_\pm)(i\mu + \mu_\pm(z))^{-1} A_{z\pm}$, тогда

$$F_{z\pm}^{-1}(\mu) = E + (\mu_\pm(z) - a_\pm)(i\mu + a_\pm)^{-1} A_{z\pm}$$

и при д. м. $\delta > 0$, $\gamma > 0$, $|z - z_0| < \delta$

$$\mathcal{R}_z(\mu) \equiv F_{z-}(\mu)(E - zF(\mu)) F_{z+}(\mu) \in V(v_+, v_-),$$

$$\mathcal{L}_z(\mu) \equiv F_{z+}(\mu)(E - zF(\mu)) F_{z-}(\mu) \in V(v_+, v_-),$$

$$\mathcal{R}_z^{-1}(\mu) \in V(v_0 - \gamma, v_0 + \gamma), \quad \mathcal{L}_z^{-1}(\mu) \in V(v_0 - \gamma, v_0 + \gamma),$$

$$\mathcal{R}_{z+}(\mu) \equiv R_{z+}(\mu) F_{z+}(\mu) \in V_+(v_+),$$

$$\mathcal{L}_{z+}(\mu) \equiv F_{z+}(\mu) L_{z+}(\mu) \in V_+(v_+),$$

$$\mathcal{R}_{z-}(\mu) \equiv F_{z-}(\mu) R_{z-}(\mu) \in V_-(v_-),$$

$$\mathcal{L}_{z-}(\mu) \equiv L_{z-}(\mu) F_{z-}(\mu) \in V_-(v_-),$$

$$\mathcal{R}_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(v_0 \mp \gamma), \quad \mathcal{L}_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(v_0 \mp \gamma).$$

Более подробная информация о свойствах компонент факторизации содержится в [4—8].

Пусть $z \in \mathscr{D}_\delta = \{z\colon |z| < z_0,\ |z - z_0| < \delta\}$. Обозначим

$$\mathscr{V}(z, \mu) = -(i\mu + \mu_+(z))^{-1}(\mu_+(z) - a_+)A_{z+}\mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))R_{z+}(\mu)$$

и покажем, что $\mathscr{V}(z, \mu) \in V_+(v_+)$. Действительно, матрица

$$(\mu_+(z) - a_+)A_{z+}\mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))R_{z+}(\mu) \tag{5}$$

равна нулевой при $\mu = i\mu_+(z)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно представить $R_{z+}(\mu)$ в виде

$$R_{z+}(\mu) = \mathscr{R}_{z+}(\mu)(E + (\mu_+(z) - a_+)(i\mu + a_+)^{-1}A_{z+}),$$

подставить это выражение в (5) и положить $\mu = i\mu_+(z)$. Тогда в силу утверждения 5.2 работы [4] заключаем, что $\mathscr{V}(z, \mu) \in V_+(v_+)$. Более того, справедливо представление вида

$$\mathscr{V}(z, \mu) = \left\| \int_0^\infty e^{i\mu y} v_{jk}(z, y)\, dy \right\|, \quad \int_0^\infty e^{-v+y} |v_{jk}(z, y)|\, dy < \infty.$$

Аналогично введем матричную функцию

$$\mathscr{U}(z, \mu) = -(i\mu + \mu_-(z))^{-1}(\mu_-(z) - a_-)A_{z-}\mathscr{L}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z))L_{z-}(\mu),$$

для которой также справедливо представление

$$\mathscr{U}(z, \mu) = \left\| \int_{-\infty}^0 e^{i\mu y} u_{jk}(z, y)\, dy \right\|, \quad \int_{-\infty}^0 e^{-v-y} |u_{jk}(z, y)|\, dy < \infty.$$

Положим $H_1(z) = \mathscr{U}(z, i\mu_+(z))$, $H_2(z) = \mathscr{V}(z, i\mu_-(z))$, $H(z) = H_2(z)H_1(z)$, $\tilde{H}(z) = H_1(z)H_2(z)$.

Лемма 1. *При* $z \in \mathscr{D}_\delta$

$$H_1(z)I(i\mu_+(z)) = h_1(z)I(i\mu_-(z)),$$
$$H_2(z)I(i\mu_-(z)) = h_2(z)I(i\mu_+(z)),$$

где $h_1(z)$, $h_2(z)$ — *аналитические функции переменной* $i\sqrt{z - z_0}$, $h_1(z_0) = h_2(z_0) = 1$.

Доказательство. Обозначим $\nu(z) = \mu_+(z) - \mu_-(z)$ и для краткости будем на время опускать аргумент z. Имеем

$$\begin{aligned} H_1 I(i\mu_+) &= I(i\mu_-)\ (\mu_- - a_-)\nu^{-1} l(i\mu_-)\mathscr{L}_-^{-1}(i\mu_-)\mathscr{L}_-(i\mu_+) \times \\ &\times [E - (\mu_- - a_+)(\mu_+ - a_-)^{-1}A_-]I(i\mu_+) = \\ &= I(i\mu_-)(\mu_- - a_-)\nu^{-1} l(i\mu_-)\mathscr{L}_-^{-1}(i\mu_-)[\mathscr{L}_-(i\mu_-) - i\nu\mathscr{L}'_+(i\mu_-) + \ldots] \cdot \\ &\cdot [E - (\mu_- - a_-)(\mu_+ - a_-)^{-1} I(i\mu_-)l(i\mu_-)] \cdot [I(i\mu_-) + i\nu I'(i\mu_-) + \ldots] = \\ &= I(i\mu_-)(\mu_- - a_-)\nu^{-1} l(i\mu_-)[E + O(\nu)]\{I(i\mu_-)\nu(\mu_+ - a_-)^{-1} + \\ &+ i\nu[I'(i\mu_-) - (\mu_- - a_-)(\mu_+ - a_-)^{-1}A_- I'(i\mu_-)] + O(\nu^2)\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее символы $O(\nu)$, $O(\nu^2)$ и т. д. по отношению к матрице употребляются в том случае, когда подобный вид имеет каждый элемент матрицы. Замечая, наконец, что

$$l(i\mu_-)\left[I'(i\mu_-) - \frac{\mu_- - a_-}{\mu_+ - a_-}A_- I'(i\mu_-)\right] = \frac{\nu}{\mu_+ - a_-} l(i\mu_-)I'(i\mu_-),$$

получим требуемый результат. Второе соотношение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Следствие 1. *Вектор* $I(i\mu_+(z))$ *является собственным вектором матрицы* $H(z)$, *соответствующим собственному значению* $h(z) = h_1(z)h_2(z)$; $I(i\mu_-(z))$ *является собственным вектором для* $\tilde{H}(z)$, *соответствующим* *тому же собственному значению* $h(z)$. *Функция* $h(z)$ *является аналитической в окрестности нуля функцией переменной* $t = i\sqrt{z - z_0}$, $h(z_0) = 1$.

Обозначим также

$$K(z) = -(\mu_+(z) - a_+)(\mu_-(z) - a_-)A_{z+}\mathcal{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))\mathcal{R}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z))A_{z-},$$

$$\widetilde{K}(z) = -(\mu_+(z) - a_+)(\mu_-(z) - a_-)A_{z-}\mathcal{L}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z))\cdot\mathcal{L}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))A_{z+},$$

и пусть $K(z) = \|K_{jk}(z)\|$, $\widetilde{K}(z) = \|\widetilde{K}_{jk}(z)\|$, $j, k = 1, \ldots, m$.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Положим

$$S_{jk}(z, A) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_n \in A, N > n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j), \quad A \subset (-a, b),$$

$$T_{jk}(z, A) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_N \in A, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j), \quad A \subset (-\infty, -a] \cup [b, \infty).$$

Здесь A обозначает всюду борелевские множества, $|z| < 1$.

Вопрос о нахождении матричных функций $S = \|S_{jk}\|$ и $T = \|T_{jk}\|$ в точном виде тесно связан с получением и использованием явных выражений для компонент факторизации, что удается сделать лишь при дополнительных ограничениях на исходный процесс (см. [8]). В то же время для целей асимптотического анализа распределений достаточно ограничиться нахождением асимптотических представлений функций S и T в окрестности точки z_0 (ниже будет установлена возможность аналитического продолжения этих функций в круг $|z| < z_0$) и оценкой их на множестве $|z| = z_0$, $|z - z_0| > \delta$. Обозначим $\mu(z) = \exp\{\mu_+(z) - \mu_-(z)\}$.

Теорема 1. *Существуют числа* $\delta > 0$, $\gamma > 0$ *такие, что при* $z \in \mathcal{D}_\delta$ *и достаточно больших* (д. б.) $a + b$

$$T_{jk}(z, [x, \infty)) = \frac{\exp\{\mu_+(z)b\}\left(1 - \mu^a(z)h_1(z)\right)}{1 - \mu^{a+b}(z)h(z)} \int_{x-b}^{\infty} v_{jk}(z, y)\,dy +$$
$$+ e^{v_0 x}\left[O\left(e^{-\gamma x}\right) + O\left(e^{-\gamma(x-b+a)}\right)\right], \quad x \geqslant b, \tag{6}$$

$$T_{jk}(z, (-\infty, x]) = \frac{\exp\{-\mu_-(z)a\}\left(1 - \mu^b(z)h_2(z)\right)}{1 - \mu^{a+b}(z)h(z)} \int_{-\infty}^{x+a} u_{jk}(z, y)\,dy +$$
$$+ e^{v_0 x}\left[O\left(e^{\gamma x}\right) + O\left(e^{\gamma(x+a-b)}\right)\right], \quad x \leqslant -a, \tag{7}$$

равномерно по z.

Теорема 2. *Пусть* $-a < x_1 < 0 < x_2 < b$, $x_1 + a \to \infty$, $b - x_2 \to \infty$. *Тогда найдутся числа* $\delta > 0$, $\gamma > 0$ *такие, что при* $z \in \mathcal{D}_\delta$ *и д. б.* $a + b$

$$S_{jk}(z, [x_1, x_2]) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) -$$
$$- \frac{\mu^a(z)\left(1 - \mu^b(z)h_2(z)\right)}{1 - \mu^{a+b}(z)h(z)} \cdot \frac{\exp\{\mu_+(z)x_2\} - \exp\{\mu_+(z)x_1\}}{\mu_+(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))} \widetilde{K}_{jk}(z) -$$
$$- \frac{\mu^b(z)\left(1 - \mu^a(z)h_1(z)\right)}{1 - \mu^{a+b}(z)h(z)} \cdot \frac{\exp\{\mu_-(z)x_2\} - \exp\{\mu_-(z)x_1\}}{\mu_-(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))} K_{jk}(z) +$$
$$+ (z - z_0)^{-1/2}\left[O\left(e^{v_0 x_2 - \gamma\min(a, b-x_2)}\right) + O\left(e^{v_0 x_1 - \gamma\min(b, a+x_1)}\right)\right] \tag{8}$$

равномерно по z.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$Q_0(z, \mu) = \left\| \int\limits_{-a+0}^{b} e^{i\mu y} S_{jk}(z, dy) \right\|,$$

$$Q_1(z, \mu) = \left\| \int\limits_{-\infty}^{-a+0} e^{i\mu y} T_{jk}(z, dy) \right\|,$$

$$Q_2(z, \mu) = \left\| \int\limits_{b}^{\infty} e^{i\mu y} T_{jk}(z, dy) \right\|.$$

Эти функции определены во всяком случае при $\operatorname{Im}\mu = 0$, $|z| < 1$. Они связаны соотношением

$$Q_0(z, \mu)(E - zF(\mu)) = E - Q_1(z, \mu) - Q_2(z, \mu), \tag{9}$$

которое следует из формулы полной вероятности. При $m = 1$ оно установлено Кемперманом [11], в нашем случае это соотношение получено в [12]. Там же установлено, что (9) выполняется при всех z и μ таких, что $|z| < 1/\lambda(i \operatorname{Im}\mu)$.

Пусть z и μ таковы, что существуют $R_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(\operatorname{Im}\mu)$, $L_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(\operatorname{Im}\mu)$ и имеет место (9). Тогда

$$Q_0(z, \mu) R_{z-}(\mu) = (E - Q_1(z, \mu) - Q_2(z, \mu)) R_{z+}^{-1}(\mu).$$

Будем обозначать далее

$$\left[\left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y}\, d\varphi_{jk}(y) \right\| \right]^A = \left\| \int\limits_A e^{i\mu y}\, d\varphi_{jk}(y) \right\|$$

для всякого измеримого множества $A \subset R$. Так как

$$[Q_0(z, \mu) R_{z-}(\mu)]^{(-\infty, b)} = Q_0(z, \mu) R_{z-}(\mu),$$

то

$$Q_0(z, \mu) R_{z-}(\mu) = [(E - Q_1(z, \mu) - Q_2(z, \mu)) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{(-\infty, b)},$$

и одновременно

$$[(E - Q_1(z, \mu) - Q_2(z, \mu)) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b, \infty)} \equiv 0.$$

Замечая, что $Q_2(z, \mu) R_{z+}^{-1}(\mu) = [Q_2(z, \mu) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b, \infty)}$, получим

$$Q_0(z, \mu) = [(E - Q_1(z, \mu)) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{(-\infty, b)} R_{z-}^{-1}(\mu),$$
$$Q_2(z, \mu) = [(E - Q_1(z, \mu)) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b, \infty)} R_{z+}(\mu). \tag{10}$$

Эти соотношения впервые получены в [11] для случая $m = 1$. Используя левую факторизацию, аналогичным путем находим

$$Q_0(z, \mu) = [(E - Q_2(z, \mu)) L_{z-}^{-1}(\mu)]^{(-a, \infty)} L_{z+}^{-1}(\mu),$$
$$Q_1(z, \mu) = [(E - Q_2(z, \mu)) L_{z-}^{-1}(\mu)]^{(-\infty, -a]} L_{z-}(\mu). \tag{11}$$

Для произвольной матричной функции $f(\mu) \in V(v_0)$ положим

$$(Af)(z, \mu) = [f(\mu) L_{z-}^{-1}(\mu)]^{(-\infty, -a]} L_{z-}(\mu),$$
$$(Bf)(z, \mu) = [f(\mu) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b, \infty)} R_{z+}(\mu),$$

тогда подстановка (11) в (10) приводит к тождеству

$$Q_2(z, \mu) = (BE)(z, \mu) - (BAE)(z, \mu) + (BAQ_2)(z, \mu), \tag{12}$$

и точно так же подстановка (10) в (11) влечет

$$Q_1(z, \mu) = (AE)(z, \mu) - (ABE)(z, \mu) + (ABQ_1)(z, \mu). \tag{13}$$

Исследуем далее аналитические свойства операторов A и B. Пусть $z \in \mathscr{D}_\delta$ при некотором $\delta > 0$, $\mu_+(|z|) < \operatorname{Im}\mu < \mu_-(|z|)$. Тогда, очевидно, $|\lambda(\mu)| < \lambda(i \operatorname{Im}\mu) < |z|^{-1}$ (см. [4, утв. 4.1]) и соотношение (9) имеет место. Более того, при таких z и μ существуют матрицы $R_{z\pm}^{-1}(\mu)$ и $L_{z\pm}^{-1}(\mu)$. Например, для $R_{z+}^{-1}(\mu)$ это вытекает из соотношения $\mathscr{R}_{z+}(\mu) = R_{z+}(\mu) F_{z+}(\mu)$ и существования $\mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu)$, в остальных случаях — аналогично. Поэтому для всякой функции $f \in V(v_0 - \gamma, v_0)$ имеем

$$[f(\mu) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b,\infty)} = [f(\mu) F_{z+}(\mu) \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b,\infty)} = [f(\mu) \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b,\infty)} -$$
$$- (\mu_+(z) - a_+) [f(\mu) A_{z+} \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) (i\mu + \mu_+(z))^{-1}]^{[b,\infty)}.$$

Матрица $\mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu)$ принадлежит $V_+(v_0 - \gamma)$ при некотором $\gamma > 0$, поэтому

$$f(\mu) \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) \in V(v_0 - \gamma, v_0),$$
$$[f(\mu) \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b,\infty)} \in V_+(v_0 - \gamma) \quad \text{при } b \geqslant 0.$$

Пусть

$$f(\mu) A_{z+} \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y W_{jk}(z, y) \right\|.$$

Для μ таких, что $\operatorname{Im}\mu > \mu_+(|z|)$ в силу соотношения

$$\lambda(i \operatorname{Re}\mu_+(z)) \geqslant |\lambda(i\mu_+(z))| = |z^{-1}| = \lambda(i\mu_+(|z|))$$

имеем $\operatorname{Re}\mu_+(z) \leqslant \mu_+(|z|)$, т. е. $\operatorname{Im}\mu > \operatorname{Re}\mu_+(z)$ и, следовательно, справедливо

$$\left[(i\mu + \mu_+(z))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y W_{jk}(z, y) \right]^{[b,\infty)} =$$
$$= - \left[\int_0^{\infty} e^{(i\mu + \mu_+(z))y} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y W_{jk}(z, y) \right]^{[b,\infty)} =$$
$$= - \int_b^{\infty} e^{i\mu y} \int_{-\infty}^{y} e^{\mu_+(z)(y-t)} d_t W_{jk}(z, t)\, dy =$$
$$= - \int_b^{\infty} e^{(i\mu + \mu_+(z))y} \left[\left(f(i\mu_+(z)) A_{z+} \mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) \right)_{jk} - \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t} d_t W_{jk}(z,t) \right] dy =$$
$$= e^{(i\mu + \mu_+(z))b} (i\mu + \mu_+(z))^{-1} \left(f(i\mu_+(z)) A_{z+} \mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) \right)_{jk} +$$
$$+ \int_b^{\infty} e^{(i\mu + \mu_+(z))y} \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t} d_t W_{jk}(z, t)\, dy. \tag{14}$$

Здесь и далее G_{jk} означает элемент матрицы G с номером (j, k). Последнее слагаемое в (14) также принадлежит $V_+(v_0 - \gamma)$, если $z \in \mathscr{D}_\delta$ и δ достаточно мало. Действительно, в силу (4) при малых δ $|\operatorname{Re}\mu_\pm(z) - v_0| \leqslant \gamma/2$ и потому

$$\int_b^{\infty} \left| e^{-(v_0 - \gamma)y + \mu_+(z)y} \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t} d_t W_{jk}(z, t) \right| dy =$$
$$= \int_b^{\infty} \left| e^{(v_0 - \gamma - \mu_+(z))y} \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t + (v_0 - \gamma)t} d_t \widetilde{W}_{jk}(z, t) \right| dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_b^{\infty} \int_y^{\infty} \left| e^{(v_0 - \gamma - \mu_+(z))(t-y)} \right| |d_t \widetilde{W}_{jk}(z, t)|\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_b^{\infty} \int_y^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-y)} |d_t \widetilde{W}_{jk}(z, t)|\, dy < \infty.$$

Здесь $W_{jk}(z, t)$ — функция ограниченной вариации по t. Таким образом, при $z \in \mathscr{D}_\delta$

$$(Bf)(z, \mu) = e^{(i\mu+\mu_+(z))b} f(i\mu_+(z)) \mathscr{V}(z, \mu) + \Delta(z, \mu) R_{z+}(\mu), \tag{15}$$

где

$$\Delta(z, \mu) = [\Delta(z, \mu)]^{[b, \infty)} \in V_+(v_0 - \gamma)$$

при некотором $\gamma > 0$. Аналогичным путем устанавливается, что если $f_1 \in V(v_0, v_0 + \gamma)$, то при $z \in \mathscr{D}_\delta$

$$(Af_1)(z, \mu) = e^{-(i\mu+\mu_-(z))a} f_1(i\mu_-(z)) \mathscr{U}(z, \mu) + \Delta_1(z, \mu) L_{z-}(\mu), \tag{16}$$

$$\Delta_1(z, \mu) = [\Delta_1(z, \mu)]^{(-\infty, -a]} \in V_-(v_0 + \gamma)$$

при некотором $\gamma > 0$.

Будем использовать представления (15), (16) в (12), беря в качестве f матрицы E, $(AE)(z, \mu)$, $(AQ_2)(z, \mu)$, а в качестве f_1 матрицы E и $Q_2(z, \mu)$. При $z \in \mathscr{D}_\delta$ $Q_2(z, \mu) \in V_+(v_0)$, $(AE)(z, \mu) \in V_-(v_0)$, $(AQ_2)(z, \mu) \in V_-(v_0)$. Имеем таким образом

$$(BE)(z, \mu) = e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \mathscr{V}(z, \mu) + \Delta^{(1)}(z, \mu) R_{z+}(\mu), \tag{17}$$

$$(AE)(z, \mu) = e^{-(i\mu+\mu_-(z))a} \mathscr{U}(z, \mu) + \Delta_1^{(1)}(z, \mu) L_{z-}(\mu), \tag{18}$$

$$(AQ_2)(z, \mu) = e^{-(i\mu+\mu_-(z))a} Q_2(z, i\mu_-(z)) \mathscr{U}(z, \mu) + \Delta_1^{(2)}(z, \mu) L_{z-}(\mu), \tag{19}$$

$$(BAE)(z, \mu) = e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \mu^a(z) H_1(z) \mathscr{V}(z, \mu) + \Delta^{(2)}(z, \mu) R_{z+}(\mu) +$$
$$+ e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \Delta_1^{(1)}(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \mathscr{V}(z, \mu), \tag{20}$$

$$(BAQ_2)(z, \mu) = e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \mu^a(z) Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z) \mathscr{V}(z, \mu) +$$
$$+ \Delta^{(3)}(z, \mu) R_{z+}(\mu) + e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \Delta_1^{(2)}(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \mathscr{V}(z, \mu), \tag{21}$$

и после подстановки в (12) получаем

$$Q_2(z, \mu) = e^{(i\mu+\mu_+(z))b} [E - \mu^a(z) H_1(z) + \mu^a(z) Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z)] \mathscr{V}(z, \mu) +$$
$$+ D(z, \mu) R_{z+}(\mu) + e^{(i\mu+\mu_+(z))b} D_1(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \mathscr{V}(z, \mu). \tag{22}$$

Здесь $D(z, \mu) = \Delta^{(1)}(z, \mu) - \Delta^{(2)}(z, \mu) + \Delta^{(3)}(z, \mu) \in V_+(v_0 - \gamma)$, $D_1(z, \mu) = \Delta_1^{(2)}(z, \mu) - \Delta_1^{(1)}(z, \mu) \in V_-(v_0 + \gamma)$, $\gamma > 0$. Полагая в (22) $\mu = i\mu_-(z)$, получим тождество

$$Q_2(z, i\mu_-(z)) = \mu^b(z)[E - \mu^a(z)(H_1(z) - Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z))] H_2(z) +$$
$$+ D(z, i\mu_-(z)) R_{z+}(i\mu_-(z)) + \mu^b(z) D_1(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) H_2(z). \tag{23}$$

Это выражение для $Q_2(z, i\mu_-(z))$ подставляем в правую часть (22), в получившееся выражение опять подставляем (23) и т. д. В результате s-кратного применения этой процедуры получим ($s \geqslant 1$)

$$Q_2(z, \mu) = e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \Big[(E - \mu^a(z) H_1(z)) \sum_{j=0}^{s} \mu^{(a+b)j}(z) H^j(z) +$$
$$+ \mu^{a+s(a+b)}(z) Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z) H^s(z) \Big] \mathscr{V}(z, \mu) + D(z, \mu) R_{z+}(\mu) +$$
$$+ e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \Big[D_1(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \sum_{j=0}^{s} \mu^{(a+b)j}(z) H^j(z) +$$
$$+ \mu^a(z) D(z, i\mu_-(z)) R_{z+}(i\mu_-(z)) H_1(z) \sum_{j=0}^{s-1} \mu^{(a+b)j}(z) H^j(z) \Big] \mathscr{V}(z, \mu). \tag{24}$$

Далее воспользуемся следствием 1, в силу которого $H^j(z)\mathscr{V}(z, \mu) = h^j(z)\mathscr{V}(z, \mu)$ (см. определение функции $\mathscr{V}(z, \mu)$), $H_1(z)\mathscr{V}(z, \mu) =$

$= h_1(z)\mathscr{V}(z, \mu)$. Поэтому (24) перепишется так:

$$Q_2(z, \mu) = e^{(i\mu+\mu_+(z))b}\left[\left(1 - \mu^a(z)h_1(z)\right)\sum_{j=0}^{s}\mu^{(a+b)j}(z)\,h^j(z)\right]\mathscr{V}(z, \mu) +$$
$$+ \mu^{a+s(a+b)}(z)\,h_1(z)\,Q_2(z, i\mu_-(z))\,\mathscr{V}(z, \mu) + D(z, \mu)\,R_{z+}(\mu) +$$
$$+ e^{(i\mu+\mu_+(z))b}\left[D_1(z, i\mu_+(z))\,L_{z-}(i\mu_+(z))\sum_{j=0}^{s}\mu^{(a+b)j}(z)\,h^j(z) +\right.$$
$$\left. + \mu^a(z)\,D(z, i\mu_-(z))\,R_{z+}(i\mu_-(z))\,h_1(z)\sum_{j=0}^{s-1}\mu^{(a+b)j}(z)\,h^j(z)\right]\mathscr{V}(z, \mu). \qquad (25)$$

Покажем, что элементы матрицы $Q_2(z, i\mu_-(z))$ ограничены в $\mathscr{D}_\delta$ равномерно по a и b. Из неравенства $\lambda(i\,\mathrm{Re}\,\mu_-(z)) \geqslant |\lambda(i\mu_-(z))| = |z^{-1}| = \lambda(i\mu_-(|z|))$ вытекает $\mathrm{Re}\,\mu_-(z) \geqslant \mu_-(|z|)$, стало быть,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_b^{\infty} e^{-\mu_-(z)y}\,\mathbf{P}\,(S_N \in dy, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \int_b^{\infty} e^{-\mu_-(|z|)y}\,\mathbf{P}\,(S_N \in dy, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j),$$

т. е. поэлементно $|Q_2(z, i\mu_-(z))| \leqslant Q_2(|z|, i\mu_-(|z|))$. Пусть $\tilde{Q}_2(z, \mu)$ совпадает с функцией $Q_2(z, \mu)$, вычисленной при $a = \infty$. Очевидно, $Q_2(|z|, i\mu_-(|z|)) \leqslant \tilde{Q}_2(|z|, i\mu_-(|z|))$ (все матричные неравенства понимаются поэлементно). Но $\tilde{Q}_2(z, \mu) = (BE)(z, \mu)$ и в силу асимптотического представления (17) при $z \in \mathscr{D}_\delta$

$$\tilde{Q}_2(|z|, i\mu_-(|z|)) \leqslant C e^{(\mu_+(|z|) - \mu_-(|z|))b} \leqslant C_1.$$

Здесь и далее C, C_1 — матрицы с постоянными положительными элементами.

При д. б. $a + b$ и $z \in \mathscr{D}_\delta$ имеет место $|\mu^{a+b}(z)h(z)| < 1$, поэтому слагаемое $\mu^{a+s(a+b)}(z)h_1(z)h^s(z)Q_2(z, i\mu_-(z))\mathscr{V}(z, \mu)$ в (25) стремится к нулевой матрице при всех $z \in \mathscr{D}_\delta$ и $s \to \infty$, кроме того сходится ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \mu^{(a+b)j}(z)\,h^j(z) = \left(1 - \mu^{a+b}(z)\,h(z)\right)^{-1}$.

Лемма 2.

$$L_{z-}(i\mu_+(z))I(i\mu_+(z)) = (\mu_-(z) - \mu_+(z))C_1(z)I(i\mu_+(z)),$$
$$R_{z+}(i\mu_-(z))I(i\mu_+(z)) = (\mu_-(z) - \mu_+(z))C_2(z)I(i\mu_+(z)),$$

где $C_1(z)$, $C_2(z)$ — матрицы с ограниченными в $\mathscr{D}_\delta$ элементами.

Доказательство.

$$L_{z-}(i\mu_+(z))I(\mu_+(z)) = \mathscr{L}_{z-}(i\mu_+(z))\,\cdot$$
$$\cdot\,[E - (\mu_-(z) - a_-)(\mu_+(z) - a_-)^{-1}A_{z-}]I(i\mu_+(z)) =$$
$$= \mathscr{L}_{z-}(i\mu_+(z))\{E - (\mu_-(z) - a_-)(\mu_+(z) - a_-)^{-1}[A_{z+} +$$
$$+ i(\mu_-(z) - \mu_+(z))(Il)'(i\mu_+(z)) + \ldots]\}I(i\mu_+(z)) =$$
$$= \mathscr{L}_{z-}(i\mu_+(z))[(\mu_+(z) - \mu_-(z))(\mu_+(z) - a_-)^{-1}I(i\mu_+(z)) +$$
$$+ i(\mu_-(z) - \mu_+(z))(Il)'(i\mu_+(z))I(i\mu_+(z)) + \ldots] =$$
$$= (\mu_-(z) - \mu_+(z))C_1(z)I(i\mu_+(z));$$
$$R_{z+}(i\mu_-(z))I(i\mu_+(z)) = \mathscr{R}_{z+}(i\mu_-(z))[E -$$
$$- (\mu_+(z) - a_+)(\mu_-(z) - a_+)^{-1}A_{z+}]I(i\mu_+(z)) =$$
$$= \mathscr{R}_{z+}(i\mu_-(z))(\mu_-(z) - \mu_+(z))(\mu_-(z) - a_+)^{-1}I(i\mu_+(z)),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *При д. б. $a+b$ функция*

$$\psi(z, s, a+b) \equiv (\mu_-(z) - \mu_+(z)) \sum_{j=0}^{s} \mu^{(a+b)j}(z) h^j(z)$$

ограничена в $\mathcal{D}_\delta$ равномерно по $s \geqslant 1$ и $a+b$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для целых a и b.

$$|\psi(z, s, a+b)| \leqslant c \frac{|1-\mu(z)|}{|1-\mu^{a+b}(z) h(z)|} \leqslant c\,|1-\mu(z)| \times$$

$$\times \left[(1-|\mu(z)|)\left(1+|\mu(z)|+\ldots+|\mu(z)|^{a+b-1}+|\mu(z)|^{a+b}\frac{1-|h(z)|}{1-|\mu(z)|}\right)\right]^{-1}.$$

При $z \in \mathcal{D}_\delta$ отношение $\dfrac{|1-\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ ограничено, а выражение

$$1+|\mu(z)|+\ldots+|\mu(z)|^{a+b-1}+|\mu(z)|^{a+b}\frac{1-|h(z)|}{1-|\mu(z)|}$$

больше единицы при $z=z_0$ и д. б. $a+b$. В силу непрерывности это верно при $z \in \mathcal{D}_\delta$ при некотором $\delta=\delta(a+b)$, к тому же как функция $a+b$ эта величина не убывает. Лемма доказана.

Точно так же можно установить равномерную по a и b ограниченность в $\mathcal{D}_\delta$ функций

$$\frac{1-\mu^a(z) h_1(z)}{1-\mu^{a+b}(z) h(z)}, \quad \frac{1-\mu^b(z) h_2(z)}{1-\mu^{a+b}(z) h(z)}.$$

Устремляя в (25) $s \to \infty$, получим теперь

$$Q_{\tilde{z}}(z, \mu) = \frac{e^{(i\mu+\mu_+(z))b}\left(1-\mu^a(z) h_1(z)\right)}{1-\mu^{a+b}(z) h(z)} \mathscr{V}(z, \mu) + D(z, \mu) R_{z+}(\mu) +$$

$$+ e^{(i\mu+\mu_+(z))b}\left[D_1(z, i\mu_+(z)) C_3(z) + D(z, i\mu_-(z)) C_4(z)\right] \mathscr{V}(z, \mu),$$

где $C_3(z)$, $C_4(z)$ — матрицы с ограниченными равномерно по a, b и $z \in \mathcal{D}_\delta$ элементами.

Далее, в представлениях

$$D(z, \mu) = \left\| \int_b^\infty e^{i\mu y}\, d_y G_{jk}(z, y) \right\|, \quad \operatorname{Im}\mu = v_0 - \gamma,$$

$$D_1(z, \mu) = \left\| \int_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y \widetilde{G}_{jk}(z, y) \right\|, \quad \operatorname{Im}\mu = v_0 + \gamma$$

имеет место равномерно по $z \in \mathcal{D}_\delta$, a и b

$$|G_{jk}(z, x) - G_{jk}(z, \infty)| = O\left(e^{(v_0-\gamma)x}\right), \quad x \to \infty,$$

$$|\widetilde{G}_{jk}(z, x) - \widetilde{G}_{jk}(z, -\infty)| = Q\left(e^{(v_0+\gamma)x}\right), \quad x \to -\infty.$$

Это следует из [2, лемма 2], при этом необходимо убедиться, что вариации функций

$$\int_x^\infty e^{-(v_0-\gamma)y}\, d_y G_{jk}(z, y),\ x \geqslant b, \qquad \int_{-\infty}^{x} e^{-(v_0+\gamma)y}\, d_y \widetilde{G}_{jk}(z, y), \quad x \leqslant -a$$

ограничены равномерно по z, a и b. Как следует из вывода формул (15) и (16), для этого достаточно, чтобы аналогичными свойствами обладали функции f и f_1, что имеет место в каждом конкретном случае (17) —

(21). Например, при $f_1 = Q_2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \int_b^{\infty} e^{-(v_0+\gamma)y} \mathbf{P}(S_N \in dy, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \int_b^{\infty} e^{-\mu_-(|z|)y} \mathbf{P}(S_N \in dy, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) = Q_{2jk}(|z|, i\mu_-(|z|)) \leqslant c$$

(последнее неравенство установлено ранее).

Оценим величины $D(z, i\mu_-(z))$ и $D_1(z, i\mu_+(z))$. Здесь

$$|D_{jk}(z, i\mu_-(z))| = \left| \int_b^{\infty} e^{-\mu_-(z)y} d_y G_{jk}(z, y) \right| =$$

$$= \left| \int_b^{\infty} e^{(v_0-\gamma-\mu_-(z))y} e^{-(v_0-\gamma)y} d_y G_{jk}(z, y) \right| \leqslant \left| \int_b^{\infty} e^{-\gamma y} e^{-(v_0-\gamma)y} d_y G_{jk}(z, y) \right| \leqslant c e^{-\gamma b},$$

$$|D_{1jk}(z, i\mu_+(z))| = \left| \int_{-\infty}^{-a} e^{-\mu_+(z)y} d_y \widetilde{G}_{jk}(z, y) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{-a} e^{(v_0+\gamma-\mu_+(z))y} e^{-(v_0+\gamma)y} d_y \widetilde{G}_{jk}(z, y) \right| \leqslant c e^{-\gamma a}.$$

Кроме того, в представлении

$$e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \mathscr{V}(z, \mu) = e^{\mu_+(z)b} \left\| \int_b^{\infty} e^{i\mu y} v_{jk}(z, y-b)\, dy \right\|$$

справедливо при $x \geqslant b$

$$\left| e^{\mu_+(z)b} \int_x^{\infty} v_{jk}(z, y-b)\, dy \right| = e^{v_0 b} \cdot O\left(e^{(v_0-\gamma)(x-b)}\right) = O\left(e^{v_0 x - \gamma(x-b)}\right).$$

Таким образом,

$$D(z, \mu) R_{z+}(\mu) + e^{(i\mu+\mu_+(z))b} [D_1(z, i\mu_+(z)) C_3(z) + D(z, i\mu_-(z)) C_4(z)] \mathscr{V}(z, \mu) =$$

$$= \left\| \int_b^{\infty} e^{i\mu y} d_y r_{jk}(z, y) \right\|, \tag{26}$$

где

$$\left| \int_x^{\infty} d_y r_{jk}(z, y) \right| = O\left(e^{(v_0-\gamma)x}\right) + O\left(e^{v_0 x - \gamma(x-b+a)}\right), \tag{27}$$

что и доказывает (6). Соотношение (7) доказывается по той же схеме симметричными рассуждениями, в которых отправным пунктом является тождество (13). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть при $z \in \mathscr{D}_\delta$ $\mu_+(|z|) < \operatorname{Im}\mu < \mu_-(|z|)$. В этом случае существует матрица $(E - zF(\mu))^{-1}$ и в силу (9)

$$Q_0(z, \mu) = (E - Q_1(z, \mu) - Q_2(z, \mu))(E - zF(\mu))^{-1}.$$

Воспользуемся далее асимптотическими представлениями для $Q_1(z, \mu)$ и $Q_2(z, \mu)$, вытекающими из (6) и (7), в силу которых

$$Q_0(z, \mu) = (E - zF(\mu))^{-1} + \frac{\exp\{-(i\mu + \mu_-(z))a\}(1 - \mu^b(z) h_2(z))}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)} \times$$

$$\times \frac{\mu_-(z) - a_-}{i\mu + \mu_-(z)} A_{z-} \mathscr{L}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z)) L_{z+}^{-1}(\mu) + \frac{\exp\{(i\mu + \mu_+(z))b\}(1 - \mu^a(z) h_1(z))}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)} \times$$

$$\times \frac{\mu_+(z) - a_+}{i\mu + \mu_+(z)} A_{z+} \mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) R_{z-}^{-1}(\mu) +$$

$$+ \left(\left\| \int_b^{\infty} e^{i\mu y} d_y r_{jk}(z, y) \right\| + \left\| \int_{-\infty}^{-a+0} e^{i\mu y} d_y \widetilde{r}_{jk}(z, y) \right\| \right) (E - zF(\mu))^{-1}. \tag{28}$$

Здесь $\left\|\int\limits_b^\infty \mathrm{e}^{i\mu y} d_y r_{jk}(z, y)\right\|$ и $\left\|\int\limits_{-\infty}^{-a+0} \mathrm{e}^{i\mu y} d_y \tilde{r}_{jk}(z, y)\right\|$ — остаточные члены в асимптотических представлениях для $Q_2(z, \mu)$ и $Q_1(z, \mu)$ соответственно; первый из них введен в (26), (27), второй обладает свойством

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{x} d_y \tilde{r}_{jk}(z, y)\right| = O\left(e^{(v_0+\gamma)x}\right) + O\left(e^{v_0 x+\gamma(x+a-b)}\right), \quad x \leqslant -a.$$

Так как при рассматриваемых z и μ все собственные числа матрицы $zF(\mu)$ по модулю меньше единицы, то

$$(E - zF(\mu))^{-1} = E + zF(\mu) + z^2F^2(\mu) + \ldots =$$
$$= \left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\mu y} d_y \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_n \in dy, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)\right\|. \tag{29}$$

Пусть, далее,

$$(i\mu + \mu_-(z))^{-1} L_{z+}^{-1}(\mu) = \left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\mu y} d_y f_{jk}^{(1)}(z, y)\right\|,$$

$$(i\mu + \mu_+(z))^{-1} R_{z-}^{-1}(\mu) = \left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\mu y} d_y f_{jk}^{(2)}(z, y)\right\|,$$

тогда

$$\left[\frac{\mathrm{e}^{-i\mu a} L_{z+}^{-1}(\mu)}{i\mu + \mu_-(z)}\right]^{[x_1, x_2]} = \left\|\int\limits_{x_1}^{x_2+0} \mathrm{e}^{i\mu y} d_y f_{jk}^{(1)}(z, y + a)\right\|,$$

$$\left[\frac{\mathrm{e}^{i\mu b} R_{z-}^{-1}(\mu)}{i\mu + \mu_+(z)}\right]^{[x_1, x_2]} = \left\|\int\limits_{x_1}^{x_2+0} \mathrm{e}^{i\mu y} d_y f_{jk}^{(2)}(z, y - b)\right\|,$$

значит, при $b - x_2 \to \infty$, $a + x_1 \to \infty$ для получения асимптотических представлений функции $S(z, [x_1, x_2])$ необходимо изучить асимптотику функций $f_{jk}^{(1)}(z, y)$ при $y \to \infty$ и $f_{jk}^{(2)}(z, y)$ при $y \to -\infty$. Для первой из них

$$L_{z+}^{-1}(\mu)(i\mu + \mu_-(z))^{-1} = \mathscr{L}_{z+}^{-1}(\mu) F_{z+}(\mu)(i\mu + \mu_-(z))^{-1} =$$
$$= \mathscr{L}_{z+}^{-1}(\mu)(i\mu + \mu_-(z))^{-1} - \frac{\mu_+(z) - a_+}{(i\mu + \mu_+(z))(i\mu + \mu_-(z))} \mathscr{L}_{z+}^{-1}(\mu) A_{z+} =$$
$$= -\frac{\mu_+(z) - a_+}{(i\mu + \mu_-(z))(i\mu + \mu_+(z))} \mathscr{L}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) A_{z+} + q_1(z, \mu),$$

где $q_1(z, \mu) \in V(v_0 - \gamma, v_0)$, кроме того,

$$(i\mu + \mu_-(z))^{-1}(i\mu + \mu_+(z))^{-1} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(i\mu + \mu_-(z))y} \int\limits_{\max(0, y)}^{\infty} \mathrm{e}^{(\mu_+(z) - \mu_-(z))t}\, dt\, dy,$$

стало быть

$$\left\|\int\limits_{a+x_1}^{a+x_2+0} d_y f_{jk}^{(1)}(z, y)\right\| = \frac{\mathrm{e}^{\mu_+(z)(x_2+a)} - \mathrm{e}^{\mu_+(z)(x_1+a)}}{\mu_+(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))}(\mu_+(z) - a_+) \times$$
$$\times \mathscr{L}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) A_{z+} + O\left(\mathrm{e}^{(v_0-\gamma)(a+x_1)}\right) + O\left(\mathrm{e}^{(v_0-\gamma)(a+x_2)}\right). \tag{30}$$

Аналогично находим

$$\frac{R_{z-}^{-1}(\mu)}{i\mu + \mu_+(z)} = -\frac{(\mu_-(z) - a_-)\mathscr{R}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z)) A_{z-}}{(i\mu + \mu_-(z))(i\mu + \mu_+(z))} + q_2(z, \mu),$$

где $q_2(z, \mu) \in V(v_0, v_0+\gamma)$, следовательно,

$$\left\| \int_{x_1-b}^{x_2-b+0} d_y f_{jk}^{(2)}(z, y) \right\| = \frac{e^{\mu_-(z)(x_2-b)} - e^{\mu_-(z)(x_1-b)}}{\mu_-(z)(\mu_-(z)-\mu_+(z))} (\mu_-(z) - a_-) \times$$

$$\times \mathscr{R}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z)) A_{z-} + O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_2-b)}\right) + O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_1-b)}\right). \qquad (31)$$

Соотношения (29)—(31) вместе с (28) дают главные члены в разложении (8). Осталось исследовать остаточный член в (28). Пусть

$$(E - zF(\mu))^{-1} = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y g_{jk}(z, y) \right\|.$$

Изучим поведение $g_{jk}(z, y)$ при $y \to \pm\infty$. Имеем

$$(E - zF(\mu))^{-1} = F_{z+}(\mu) \mathscr{R}_z^{-1}(\mu) F_{z-}(\mu) = \mathscr{R}_z^{-1}(\mu) -$$

$$- (\mu_+(z) - a_+)(i\mu + \mu_+(z))^{-1} A_{z+} \mathscr{R}_z^{-1}(\mu) -$$

$$- (\mu_-(z) - a_-)(i\mu + \mu_-(z))^{-1} \mathscr{R}_z^{-1}(\mu) A_{z-} +$$

$$+ \frac{(\mu_+(z) - a_+)(\mu_-(z) - a_-)}{(i\mu + \mu_-(z))(i\mu + \mu_+(z))} A_{z+} \mathscr{R}_z^{-1}(\mu) A_{z-}.$$

Выделяя, как и ранее, особенности функции $(E - zF(\mu))^{-1}$, получаем

$$\int_x^{\infty} d_y g_{jk}(z, y) = c_{jk}(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1} \int_x^{\infty} e^{\mu_+(z)t} dt + O\left(e^{(v_0-\gamma)x}\right), \quad x \to \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{x} d_y g_{jk}(z, y) = \tilde{c}_{jk}(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{\mu_-(z)t} dt + O\left(e^{(v_0+\gamma)x}\right), \quad x \to -\infty,$$

где функции c_{jk}, $\tilde{c}_{jk}$ ограничены в $\mathscr{D}_\delta$. Следовательно, в представлении

$$\left(\left\| \int_b^{\infty} e^{i\mu y} d_y r_{jk}(z, y) \right\| + \left\| \int_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y} d_y \tilde{r}_{jk}(z, y) \right\| \right) (E - zF(\mu))^{-1} = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y \rho_{jk}(z, y) \right\|$$

имеем после несложных вычислений

$$\int_{x_1}^{x_2} d_y \rho_{jk}(z, y) = \left[O\left(e^{v_0 x_2}\right) + O\left(e^{v_0 x_1}\right) \right] \left[O(e^{-\gamma a}) + O(e^{-\gamma b}) \right] (\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1}.$$

Таким образом, с учетом (30) и (31) суммарный остаточный член в (8) будет иметь вид

$$\left[O\left(e^{(v_0-\gamma)(a+x_1)}\right) + O\left(e^{(v_0-\gamma)(a+x_2)}\right) \right] e^{-\mu_-(z)a} +$$

$$+ \left[O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_2-b)}\right) + O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_1-b)}\right) \right] e^{\mu_+(z)b} +$$

$$+ \left[O\left(e^{v_0 x_2}\right) + O\left(e^{v_0 x_1}\right) \right] \left[O(e^{-\gamma a}) + O(e^{-\gamma b}) \right] (\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1} =$$

$$= \left[O\left(e^{v_0 x_2 - \gamma \min(a,\, b-x_2)}\right) + O\left(e^{v_0 x_1 - \gamma \min(b,\, a+x_1)}\right) \right] (z - z_0)^{-1/2}.$$

Теорема 2 доказана.

Для последующего контурного интегрирования производящих функций T_{jk} и S_{jk} нам потребуется их оценка на множестве $L_\delta = \{|z| = z_0,\ |z - z_0| \geqslant \delta\}$. Рассмотрим сначала $T_{jk}(z, (-\infty, x])$ при $x \leqslant -a$. Нетрудно видеть, что при $z \in L_\delta$ $Q_1(z, \mu) \in V_-(v_0+\gamma)$ при некотором $\gamma > 0$. Это следует из (11), так как $L_{z-}^{\pm 1}(\mu) \in V_-(v_0+\gamma)$, $Q_2(z, \mu) \in V_+(v_0+\gamma)$, и потому $[(E - Q_2(z, \mu)) L_{z-}^{-1}(\mu)]^{(-\infty, -a]} \in V_-(v_0+\gamma)$. Применяя опять лемму 2 из [2], будем иметь при $z \in L_\delta$

$$T_{jk}(z, (-\infty, x]) = O\left(e^{(v_0+\gamma)x}\right), \quad x \leqslant -a \tag{32}$$

равномерно по z, a и b. Аналогично

$$T_{jk}(z, [x, \infty)) = O\left(e^{(v_0-\gamma)x}\right), \quad x \geqslant b \tag{33}$$

равномерно по $z \in L_\delta$, a и b. Далее, в силу основного тождества (9)

$$S_{jk}(z, [x_1, x_2]) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) -$$

$$- \sum_{q=1}^{m} \left(\int_{x_1}^{x_2} d_y \int_{b}^{\infty} g_{qk}(z, y-t)\, T_{jq}(z, dt) - \int_{x_1}^{x_2} d_y \int_{-\infty}^{-a} g_{qk}(z, y-t)\, T_{jk}(z, dt) \right)$$

и остается воспользоваться в этом соотношении формулами (32), (33) и асимптотическими представлениями

$$\int_{x}^{\infty} d_y g_{jk}(z, y) = O\left(e^{(v_0-\gamma)x}\right), \int_{-\infty}^{-x} d_y g_{jk}(z, y) = O\left(e^{-(v_0+\gamma)x}\right), \quad x \to \infty,$$

которые справедливы при $z \in L_\delta$, так как $(E - zF(\mu))^{-1} \in V(v_0 - \gamma, v_0 + \gamma)$ для таких z. Получаем в итоге равномерно по $z \in L_\delta$, x_1 и x_2

$$S_{jk}(z, [x_1, x_2]) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) =$$

$$= O\left(e^{v_0 x_2 - \gamma \min(a,b)}\right) + O\left(e^{v_0 x_1 - \gamma \min(a,b)}\right). \tag{34}$$

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Обозначим через Γ контур, полученный из дуги $|z| = z_0$, $|z - z_0| < \delta$ искривлением внутрь $\mathscr{D}_\delta$ вблизи точки $z = z_0$. Имеем тогда

$$\mathbf{P}(S_N \in A, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=z_0} T_{jk}(z, A)\, z^{-n-1}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T_{jk}(z, A)\, z^{-n-1}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\delta} T_{jk}(z, A)\, z^{-n-1}\, dz.$$

В силу (32) и (33) последний интеграл есть $O\left(z_0^{-n} e^{(v_0+\gamma)x}\right)$ при $A = (-\infty, x]$, $x \leqslant -a$ и $O\left(z_0^{-n} e^{(v_0-\gamma)x}\right)$ при $A = [x, \infty)$, $x \geqslant b$. Точно так же в силу (34) для нахождения $\mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], N \leqslant n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)$ достаточно вести интегрирование соответствующей производящей функции лишь по контуру Γ, образующаяся при этом погрешность имеет порядок, указанный в (34), умноженный на z_0^{-n}. Во всех случаях вдоль контура Γ мы можем заменить производящие функции их асимптотическими представлениями (6)—(8). Дело сводится, таким образом, к необходимости строить асимптотические разложения для интегралов вида

$$J(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G(z)\, z^{-n-1}\, dz,$$

где функция G имеет вид

$$G_1(z) = f(z) \exp\{(k_1\mu_+(z) - k_2\mu_-(z))\, a + (k_3\mu_+(z) - k_4\mu_-(z))\, b\} \times$$

$$\times \frac{1 - \mu^b(z)\, h_2(z)}{1 - \mu^{a+b}(z)\, h(z)} + \frac{\delta(z)}{(z - z_0)^{1/2}}$$

или

$$G_2(z) = f(z) \exp\{(k_1\mu_+(z) - k_2\mu_-(z))\, b + (k_3\mu_+(z) - k_4\mu_-(z))\, a\} \times$$

$$\times \frac{1 - \mu^a(z)\, h_1(z)}{1 - \mu^{a+b}(z)\, h(z)} + \frac{\delta(z)}{(z - z_0)^{1/2}}.$$

Здесь $k_1, \ldots, k_4$ — неотрицательные постоянные величины, $f(z) = \doteq \sum_{k=-1}^{\infty} f_k i^k (z-z_0)^{k/2}$, $\delta(z)$ — аналитическая в $\mathscr{D}_\delta$ и непрерывная на границе функция, оценки которой содержатся в (6)—(8).

Подробное изложение способа построения полных асимптотических разложений для интегралов подобного вида содержится в [9] с той лишь разницей, что там предполагается $z_0 = 1$, что несущественно с точки зрения применения метода. В связи с этим мы ограничимся здесь кратким изложением схемы действий с формулировкой результатов и указанием алгоритмов вычисления коэффициентов разложений. Рассмотрим сначала случай $G(z) = G_1(z)$ и пусть $a = a(n) = o(n)$, $b = b(n) = o(n)$, $n \to \infty$. Интеграл

$$\frac{z_0^n}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\delta(z)\,dz}{(z-z_0)^{1/2} z^{n+1}}$$

имеет ту же оценку, что и $\delta(z)$ в $\mathscr{D}_\delta$, а функцию $\Pi(z) = (1 - \mu^b(z) \times \times h_2(z))(1 - \mu^{a+b}(z) h(z))^{-1}$ при любом $M \geqslant 1$ можно представить в виде $\Pi(z) = \sum_{s=0}^{M-1} (1 - \mu^b(z) h_2(z)) \mu^{(a+b)s}(z) h^s(z) + \Pi(z) \mu^{(a+b)M}(z) h^M(z)$. В соответствии с этим с точностью до экспоненциального остатка известного вида $J(n)$ можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{s=0}^{M-1} (J_{1s}(n) - J_{2s}(n)) + J_M(n) \right],$$

где

$$J_{rs}(n) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1-k_2)+b(k_3-k_4)]} \int_\Gamma \tilde{a}_r(z)\, e^{n\tilde{h}_{rs}(z)}\, dz, \quad s = 0, \ldots, M-1,$$

$$J_M(n) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1-k_2)+b(k_3-k_4)]} \int_\Gamma \tilde{a}_1(z)\, \Pi(z)\, e^{n\tilde{h}_{1M}(z)}\, dz,$$

$$\tilde{h}_{1s}(z) = (\tau_1 s + \tau_2 s)(\mu_+(z) - \mu_-(z)) + \tau_1(k_1\mu_+(z) - k_2\mu_-(z)) + \tau_2(k_3\mu_+(z) - - k_4\mu_-(z)) + s\tau_3 \ln h(z) - \ln\frac{z}{z_0} - \tau_1 v_0(k_1 - k_2) - \tau_2 v_0(k_3 - k_4),$$

$$\tilde{h}_{2s}(z) = \tilde{h}_{1s}(z) + \tau_2(\mu_+(z) - \mu_-(z)), \quad \tilde{a}_1(z) = f(z) z^{-1},$$

$$\tilde{a}_2(z) = h_2(z)\,\tilde{a}_1(z), \quad \tau_1 = \frac{a}{n}, \quad \tau_2 = \frac{b}{n}, \quad \tau_3 = \frac{1}{n},$$

и пусть после замены $t = i(z - z_0)^{1/2}$

$$a_r(t) = -2t\tilde{a}_r(z), \; \eta(t) = h(z), \; \psi_\pm(t) = \mu_\pm(z), \; h_{rs}(t) = \tilde{h}_{rs}(z)$$

(везде в дальнейшем переменная r принимает значения только 1 или 2). Пусть Γ_1 — образ Γ в плоскости переменной t, тогда

$$J_{rs}(n) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1-k_2)+b(k_3-k_4)]} \int_{\Gamma_1} a_r(t)\, e^{nh_{rs}(t)}\, dt.$$

Исследование этих интегралов проводится с помощью модификации метода перевала, изложенной в [2]. Точки перевала t_{rs} функций $h_{rs}(t)$ определяются из уравнений $h'_{rs}(t) = 0$. Рассмотрим уравнения

$$F_1(t, z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv z_1(\psi'_+(t) - \psi'_-(t)) + z_2 \frac{\eta'(t)}{\eta(t)} + + z_3(k_1\psi'_+(t) - k_2\psi'_-(t)) + z_4(k_3\psi'_+(t) - k_4\psi'_-(t)) + \frac{2t}{z_0 - t^2} = 0, \quad (35)$$

$$F_2(t, z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv F_1(t, z_1, z_2, z_3, z_4) + z_4(\psi'_+(t) - \psi'_-(t)) = 0. \quad (36)$$

Существуют решения $t_1(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и $t_2(z_1, z_2, z_3, z_4)$ уравнений (35) и (36) соответственно, представимые в некоторой τ-окрестности нуля в виде сходящихся рядов по степеням z_1, z_2, z_3, z_4. Коэффициенты этих разложений без труда вычисляются известным образом. Заметим, что

$$h'_{rs}(t) = F_r(t, (\tau_1 + \tau_2)s, \tau_3 s, \tau_1, \tau_2). \tag{37}$$

Полагая $M - 1 = [\tau n/(a+b)]$, мы обеспечим принадлежность τ-окрестности нуля всех аргументов в (37). Таким образом, для точек перевала t_{rs} получим разложения по степеням $(\tau_1 + \tau_2)s$, $\tau_3 s$, τ_1, τ_2, а после перегруппировки — по степеням τ_1, τ_2, τ_3:

$$t_{rs} \equiv t_r((\tau_1 + \tau_2)s, \tau_3 s, \tau_1, \tau_2) = -\psi_1 z_0 \left(s + \frac{k_1 + k_2}{2}\right)\tau_1 -$$
$$-\psi_1 z_0 \left(s + \frac{k_3 + k_4}{2} + r - 1\right)\tau_2 - \frac{s\eta_1 z_0}{2}\tau_3 + O((\tau_1 + \tau_2)^2 s^2).$$

Число ψ_1 определено в (4), $\eta_1 = \eta'(0)$. Поскольку в окрестности нуля

$$h_{rs}(t) = \psi_1 t\,[(2s + k_1 + k_2)\tau_1 + (2(s + r - 1) + k_3 + k_4)\tau_2] +$$
$$+ s\eta_1\tau_3 t + \frac{t^2}{z_0}[1 + O(s(\tau_1 + \tau_2))] + O(t^3),$$

справедливы разложения

$$h_{rs}(t_{rs}) = -z_0\left[\psi_1\left(s + \frac{k_1 + k_2}{2}\right)\tau_1 + \psi_1\left(s + r - 1 + \frac{k_3 + k_4}{2}\right)\tau_2 +\right.$$
$$\left. + \frac{s\eta_1}{2}\tau_3\right]^2 + O((\tau_1 + \tau_2)^3 s^3),$$
$$h''_{rs}(t_{rs}) = \frac{2}{z_0} + O(s(\tau_1 + \tau_2)).$$

Применение метода Лапласа оценки интегралов дает нам при каждом целом $q \geqslant 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{M-1}(J_{1s}(n) - J_{2s}(n)) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1 - k_2) + b(k_3 - k_4)]} \times$$
$$\times\left[\sum_{j=0}^{q-1} n^{-j-\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^{M-1}\left(D_{1sj} e^{nh_{1s}(t_{1s})} - D_{2sj} e^{nh_{2s}(t_{2s})}\right) + \right.$$
$$\left. + n^{-q-\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^{M-1}\left(R_{1sq} e^{nh_{1s}(t_{1s})} - R_{2sq} e^{nh_{2s}(t_{2s})}\right)\right], \tag{38}$$

где величины R_{rsj} ограничены равномерно по $s = 0, \ldots, M-1$ и n,

$$D_{rsj} = \frac{(-1)^{1/2}}{2\pi}\sum_{i=0}^{2j} q_{2j,i}^{r,s}\left(-h_{rs}^{(0)}\right)^{-i-j-\frac{1}{2}}\Gamma\left(i + j + \frac{1}{2}\right),$$

а $q_{j,i}^{r,s}$ — коэффициент при z^j в произведении

$$\frac{1}{i!}\left(a_{rs}^{(0)} + a_{rs}^{(1)}z + \ldots\right)\left(h_{rs}^{(1)}z + h_{rs}^{(2)}z^2 + \ldots\right)^i,$$
$$a_{rs}^{(k)} = \frac{a_r^{(k)}(t_{rs})}{k!}, \quad h_{rs}^{(k)} = \frac{1}{(k+2)!}h_{rs}^{(k+2)}(t_{rs}), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

В силу выбора числа M интегралом $J_M(n)$ можно пренебречь (см. [9]).

Если $\frac{a+b}{\sqrt{n}} \to \infty$, то при суммировании по s в (38) достаточно ограничиться слагаемым при $s=0$, все последующие будут отличаться от него множителем порядка $O\left(e^{-\gamma(a+b)^2/n}\right)$. Это и даст нам окончательный результат для таких a и b.

Пусть

$$a = a_1\sqrt{n},\ b = b_1\sqrt{n},\ 0 < c_1 \leqslant a_1,\ b_1 \leqslant c_2 < \infty. \tag{39}$$

В этом случае суммирование по s в (38) можно распространить до ∞, что не изменит вида остаточного члена. Имеем здесь $\tau_1 = \frac{a_1}{\sqrt{n}}$, $\tau_2 = \frac{b_1}{\sqrt{n}}$, $\tau_3 = \frac{1}{n}$ и справедливо разложение

$$D_{rsj}\exp\left\{nh_{rs}(t_{rs}) + \psi_1^2 z_0\left[a_1\left(s+\frac{k_1+k_2}{2}\right) + b_1\left(s+r-1+\frac{k_3+k_4}{2}\right)\right]^2\right\} = \\ = \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} q_i^{r,j}(s),$$

где $q_i^{r,j}(s)$ — многочлены от s, a_1 и b_1 степени не выше $3i$ по каждой переменной. Обозначим

$$P_{ij} = \sum_{s=0}^{\infty}\left(q_i^{1,j}(s)\exp\left\{-\psi_1^2 z_0\left[a_1\left(s+\frac{k_1+k_2}{2}\right) + b_1\left(s+\frac{k_3+k_4}{2}\right)\right]^2\right\} - \right. \\ \left. - q_i^{2,j}(s)\exp\left\{-\psi_1^2 z_0\left[a_1\left(s+\frac{k_1+k_2}{2}\right) + b_1\left(s+1+\frac{k_3+k_4}{2}\right)\right]^2\right\}\right), \tag{40}$$

тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{M-1}(J_{1s}(n) - J_{2s}(n)) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1-k_2)+b(k_3-k_4)]} \times \\ \times\left(\sum_{j=0}^{q-1} n^{-j-\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} P_{ij} + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

при каждом $q \geqslant 1$. Заметим, что коэффициенты P_{ij} зависят среди всего прочего от пяти параметров: $P_{ij} = P_{ij}(k_1, k_2, k_3, k_4, f)$. Этими обозначениями мы в дальнейшем будем пользоваться.

Наконец, мы можем рассмотреть ситуацию $b = b_1\sqrt{n}$, $a = o(b)$ или, наоборот, $a = a_1\sqrt{n}$, $b = o(a)$. Здесь получатся полные асимптотические разложения для $J(n)$ по степеням величин $\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ и $\theta_2 = \frac{a}{\sqrt{n}}$ в первом случае и по степеням θ_1 и $\theta_3 = \frac{b}{\sqrt{n}}$ во втором. Подробно это сделано в [9], поэтому мы ограничимся ссылкой на эту работу.

Для исследования $J(n)$ при $G(z) = G_2(z)$ достаточно в предыдущих рассмотрениях заменить $h_2(z)$ на $h_1(z)$ и поменять местами a и b. Полученные в этой ситуации коэффициенты P_{ij} мы будем снабжать штрихами.

Перейдем к окончательным формулировкам теорем. Ясно, что описанный выше метод вместе с найденными в § 3 асимптотическими представлениями производящих функций позволяет получать полные асимптотические разложения для распределений $\mathbf{P}(S_N \in A,\ N = n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)$ при любых $A \subset (-\infty, -a] \cup [b, \infty)$ и для $\mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2],\ N \leqslant n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)$ при $a + x_1 \to \infty$, $b - x_2 \to \infty$ во всем спектре уклонений, совместимых с требованиями $a \to \infty$, $b \to \infty$, $a + b = o(n)$, $a + b \geqslant c\sqrt{n}$. Мы приведем здесь некоторые из них.

Теорема 3. *Пусть* $(a+b)/\sqrt{n} \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для любого* $x \leqslant -a$ *и любого целого* $q \geqslant 1$

$$\mathbf{P}(S_N \leqslant x, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) =$$

$$= z_0^{-n} e^{-v_0 a} \left[\sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \left(D_{10l} e^{nh_{10}(t_{10})} - D_{20l} e^{nh_{20}(t_{20})} \right) + \right.$$

$$\left. + n^{-q-\frac{1}{2}} O\left(\exp\{-z_0 \psi_1^2 a^2/n\}\right) \right] (1 + O(\exp\{-\gamma(a+b)^2/n\})) +$$

$$+ O\left(z_0^{-n} e^{(v_0+\gamma)x}\right) + O\left(z_0^{-n} e^{(v_0+\gamma)(x+a-b)}\right),$$

при этом в определении $D_{2 0 l}$ *следует положить* $f(z) = \int\limits_{-\infty}^{x+a} u_{jk}(z, y)\, dy, k_1 = = k_3 = k_4 = 0,\ k_2 = 1.$

Ясно, что в случае достаточно быстрого роста b, например, при $b = n^{1/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, слагаемое $D_{20l} e^{nh_{20}(t_{20})}$ отличается от $D_{10l} e^{nh_{10}(t_{10})}$ множителем порядка $e^{-\gamma n^{2\varepsilon}}$ и по этой причине может быть отнесено в остаточный член, т. е. в этом случае двуграничная задача сводится к однограничной.

Аналогичным образом может быть выписано разложение для $\mathbf{P}(S_N \geqslant x,\ N = n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)$, $x \geqslant b$.

Далее рассмотрим наиболее важную, на наш взгляд, ситуацию нормальных уклонений границ.

Теорема 4. *Пусть выполнено* (39). *Тогда для каждого целого* $q \geqslant 1$ *справедливо*

1) $\mathbf{P}(S_N \leqslant x,\ N = n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) =$

$$= z_0^{-n} e^{-v_0 a} \left[\sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} P_{il}\left(0, 1, 0, 0, f_x^{j,k}\right) + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right) \right],$$

где $x \leqslant -a$, $f_x^{j,k}(z) = \int\limits_{-\infty}^{x+a} u_{jk}(z, y)\, dy$, $P_{00}\left(0, 1, 0, 0, f_x^{j,k}\right) = 0$, $P_{10}(0, 1, 0, 0,$

$$f_x^{j,k}) = f_x^{j,k}(z_0)\, z_0^{1/2} \psi_1 \pi^{-1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[\left(s + \frac{1}{2}\right) a_1 + s b_1 \right] e^{-\psi_1^2 z_0 \left[a_1 \left(s + \frac{1}{2}\right) + s b_1 \right]^2} - \right.$$

$$\left. - \left[\left(s + \frac{1}{2}\right) a_1 + (s+1) b_1 \right] e^{-\psi_1^2 z_0 \left[a_1 \left(s + \frac{1}{2}\right) + b_1 (s+1) \right]^2} \right\};$$

2) $P(S_N \geqslant x,\ N = n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) =$

$$= z_0^{-n} e^{v_0 b} \left[\sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} P'_{il}\left(1, 0, 0, 0, \tilde{f}_x^{j,k}\right) + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right) \right],$$

где $x \geqslant b$, $\tilde{f}_x^{j,k}(z) = \int\limits_{x-b}^{\infty} v_{jk}(z, y)\, dy$, $P'_{00}\left(1, 0, 0, 0, \tilde{f}_x^{j,k}\right) = 0$, $P'_{10}(1, 0, 0, 0,$

$$\tilde{f}_x^{j,k}) = \tilde{f}_x^{j,k}(z_0)\, z_0^{1/2} \psi_1 \pi^{-1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[s a_1 + \left(s + \frac{1}{2}\right) b_1 \right] e^{-\psi_1^2 z_0 \left[s a_1 + \left(s + \frac{1}{2}\right) b_1 \right]^2} - \right.$$

$$\left. - \left[(s+1) a_1 + \left(s + \frac{1}{2}\right) b_1 \right] e^{-\psi_1^2 z_0 \left[(s+1) a_1 + \left(s + \frac{1}{2}\right) b_1 \right]^2} \right\}.$$

Теорема 5. *Пусть* $-a < x_1 < 0 < x_2 < b$ *и выполнено* (39). *Тогда при любом целом* $q \geqslant 1$

1) *если x_1 и x_2 не зависят от n, то*

$$\mathbf{P}(S_n\in[x_1,x_2],\ N\leqslant n,\ \varkappa_n=k/\varkappa_0=j)=$$

$$=z_0^{-n}\sum_{l=0}^{q-1}n^{-l-\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}n^{-i/2}\left(P_{il}(1,1,0,0,f_{j,k}^{(1)})+P'_{il}(1,1,0,0,f_{j,k}^{(2)})\right)+$$

$$+O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}z_0^{-n}\right),$$

$$f_{j,k}^{(1)}(z)=\frac{e^{\mu_+(z)x_2}-e^{\mu_+(z)x_1}}{\mu_+(z)(\mu_-(z)-\mu_+(z))}\widetilde{K}_{jk}(z),\quad f_{j,k}^{(2)}(z)=\frac{e^{\mu_-(z)x_2}-e^{\mu_-(z)x_1}}{\mu_-(z)(\mu_-(z)-\mu_+(z))}K_{jk}(z),$$

$$P_{00}(1,1,0,0,f_{j,k}^{(1)})+P'_{00}(1,1,0,0,f_{j,k}^{(2)})=$$

$$=\frac{\left(e^{v_0x_2}-e^{v_0x_1}\right)\widetilde{K}_{jk}(z_0)}{2\sqrt{\pi}\,v_0\psi_1z_0^{1/2}}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\exp\{-\psi_1^2z_0[a_1(s+1)+b_1s]^2\}+\right.$$

$$\left.+\exp\{-\psi_1^2z_0[a_1s+b_1(s+1)]^2\}-2\exp\{-\psi_1^2z_0[a_1(s+1)+b_1(s+1)]^2\}\right);$$

2) *если* $|x_1|=\alpha a$, $x_2=\beta b$, *где* α *и* β — *постоянные величины, и* $v_0\neq 0$, *то при любом целом* $q\geqslant 1$

$$\mathbf{P}(S_n\in[x_1,x_2],\ N\leqslant n,\ \varkappa_n=k/\varkappa_0=j)=$$

$$=z_0^{-n}e^{v_0x_2}\left[\sum_{l=0}^{q-1}n^{-l-\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}n^{-i/2}\left(P_{il}(1,1,\beta,0,F_{jk}^{(1)})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+P'_{il}(1,1-\beta,0,0,F_{jk}^{(2)})\right)+O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right]-z_0^{-n}e^{v_0x_1}\left[\sum_{l=0}^{q-1}n^{-l-\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}n^{-i/2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(P_{il}(1-\alpha,1,0,0,F_{jk}^{(1)})+P'_{il}(1,1,0,\alpha,F_{jk}^{(2)})\right)+O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

$$F_{jk}^{(1)}(z)=\frac{\widetilde{K}_{jk}(z)}{\mu_+(z)(\mu_-(z)-\mu_+(z))},\quad F_{jk}^{(2)}(z)=\frac{K_{jk}(z)}{\mu_-(z)(\mu_-(z)-\mu_+(z))},$$

коэффициенты P_{il} *определены в* (40), *при этом* $q_0^{1,0}(s)=q_0^{2,0}(s)=$ $=\dfrac{K_{jk}(z_0)}{2\sqrt{\pi}\,v_0\psi_1z_0^{1/2}}$, P'_{00} *отличается от* P_{00} *тем, что* a_1 *и* b_1 *меняются местами.*

Если $v_0=0$ и $-x_1=\alpha a$, $x_2=\beta b$, $0<\alpha$, $\beta<1$, то подход, примененный в п. 2) теоремы 5 неприменим, так как в этом случае функции $a_r(t)$ имеют простой полюс в нуле. В этой ситуации, однако, применима другая модификация метода перевала, разработанная А. А. Боровковым в [2] как раз для того случая, когда функция $a_r(t)$ имеет простой полюс вблизи точки перевала. Эта модификация приспособлена для использования в двуграничной задаче в [13], где при $m=1$ с ее помощью найдены полные асимптотические разложения вероятностей вида $\mathbf{P}(S_N\in A,\ N\leqslant n)$.

Другая возможность здесь — перейти к локальным характеристикам распределения $\mathbf{P}(S_n\in A,\ N\leqslant n,\ \varkappa_n=k/\varkappa_0=j)$. Как следует из (8), для него справедливо представление

$$\mathbf{P}(S_n\in A,\ N\leqslant n,\ \varkappa_n=k/\varkappa_0=j)=P_{1,n}(A)+P_{2,n}(A),$$

где мера $P_{1,n}(A)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а мера $P_{2,n}(A)$ имеет известную экспоненциальную оценку и соответствует остаточному члену в (8). (Для краткости в обозначениях $P_{z,n}(A)$ мы опускаем зависимость от j, k, a и b.) Пусть $p_{1,n}(y)$ — плотность, соответствующая $P_{1,n}(A)$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^np_{1,n}(y)=\left(\frac{\mu^a(z)\left(1-\mu^b(z)h_2(z)\right)}{1-\mu^{a+b}(z)h(z)}\widetilde{K}_{jk}(z)e^{\mu_+(z)y}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu^b(z)\left(1-\mu^a(z)h_1(z)\right)}{1-\mu^{a+b}(z)h(z)}K_{jk}(z)e^{\mu_-(z)y}\right)(\mu_-(z)-\mu_+(z))^{-1}\qquad(41)$$

и, обозначив $y=-\theta_1 a$ или $y=\theta_2 b$, $0<\theta_1\leqslant\alpha$, $0<\theta_2\leqslant\beta$, мы вновь можем применить к правой части (41) изложенную выше схему асимптотического анализа. При этом коэффициенты полученных разложений будут функциями от θ_1 или θ_2.

В заключение заметим, что асимптотические представления производящих функций (6), (7) представляют самостоятельный интерес и могут использоваться в других задачах. Так, при $z=z_0=1$ мы получаем из них распределение величины первого перескока через границу интервала $(-a, b)$ с точностью до экспоненциально малого остатка, что, в свою очередь, может быть использовано, например, для нахождения с помощью тождества Вальда асимптотических разложений величины $\mathbf{E}N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боровков А. А.** О факторизационных тождествах и свойствах распределения супремума последовательных сумм // Теория вероятностей и ее применения.— 1970.— Т. 15, № 3.— С. 377—418.
2. **Боровков А. А.** Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн.— 1962.— Т. 3, № 5.— С. 645—694.
3. **Рогозин Б. А.** Распределение максимума процесса с независимыми приращениями // Там же.— 1969.— Т. 10, № 6.— С. 1334—1363.
4. **Пресман Э. Л.** Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1969.— Т. 33, № 4.— С. 861—900.
5. **Miller H. D.** A convexity property in the theory of random variables, defined on a finite Markov chain // Ann. Math. Statist.— 1961.— V. 32, N 4.— P. 1261—1270.
6. **Miller H. D.** A matrix factorization problem in the theory of random variables, defined on a finite Markov chain // Proc. Cambridge philos. Soc.— 1962.— V. 58, N 2.— P. 268—285.
7. **Арндт К.** Асимптотические свойства распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Теория вероятностей и ее применения.— 1980.— Т. 25, № 2.— С. 313—328.
8. **Арндт К.** Об отыскании в явном виде распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 139—146.
9. **Лотов В. И.** Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I—II // Теория вероятностей и ее применения.— 1979.— Т. 29, № 3.— С. 475—485; № 4.— С. 873—879.
10. **Лотов В. И.** Об асимптотике распределений, связанных с выходом недискретного случайного блуждания из интервала // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 18—25.
11. **Kemperman J. H. B.** A Wiener-Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary // Ann. Math. Statist.— 1963.— V. 34, N 4.— P. 1168—1193.
12. **Küchler I., Semjonov A.** Die Waldsche Fundamentalidentität und ein Sequentieller Quotiententest für eine zufällige Irrfahrt über einer homogenen irreduziblen Markovschen Kette mit endlichem Zustandsraum // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statistics.— 1979.— V. 10, N 2.— S. 319—331.
13. **Лотов В. И.** Асимптотические разложения в двуграничных задачах для случайных блужданий: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М., 1977.— 105 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О МАКСИМУМЕ ДЛИН СЕРИЙ «УСПЕХОВ» В МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

С. Ю. НОВАК

Рассмотрим однородную марковскую цепь $\{\xi_i,\ i\geqslant 0\}$ с состояниями $\{1;\ 0\}$, переходными вероятностными $p_{11}=\alpha$, $p_{00}=\beta$, $0<\alpha<1$, $\beta<1$, и начальным распределением $\mathbf{P}(\xi_0=1)=p$. Положим

$$\eta_n=\max\left\{k\leqslant n:\ \max_{0\leqslant i\leqslant n-k}\mathbf{1}\{\xi_{i+1}=\ldots=\xi_{i+k}=1\}=1\right\}. \quad (0)$$

По своему смыслу η_n есть максимум длин серий «успехов» (единиц) в испытаниях $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Задача о распределении случайной величины η_n имеет приложения в теории надежности. Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим систему S, которая эксплуатируется в одном из двух режимов, помеченных цифрами 1 и 0. Причем система полностью восстанавливает способность работать в режиме 1, если хотя бы в течение одного такта побудет в режиме 0, но выходит из строя, если находится в режиме 1 k тактов подряд. Если предположить теперь, что эволюция системы S описывается введенной выше цепью Маркова, то вероятность бесперебойной работы в течение n тактов есть $\mathbf{P}(\eta_n < k)$.

Асимптотику распределения случайной величины η_n в случае схемы Бернулли с параметром α изучал В. Л. Гончаров [1]. Им было установлено, что для всякого целого j при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\eta_n - [\log n] < j) = \exp(-(1-\alpha)\alpha^{j-\{\log n\}}) + o(1) \qquad (*)$$

(здесь и ниже логарифмы log берутся по основанию $1/\alpha$; $[x]$ и $\{x\}$ суть целая и дробная части x).

Предельные законы для максимума длин серий «успехов» в более общих постановках задачи изучались в [2—7]; были получены также утверждения типа закона повторного логарифма [4, 5, 8—13]. Впервые изучать распределение случайной величины η_n предложил, по-видимому, еще А. Муавр [14, Problem LXXIV].

В настоящей работе будут получены асимптотические разложения для функции распределения максимума длин серий «успехов». В частности, будут уточнены результат В. Л. Гончарова $(*)$, а также один из результатов работы [15].

§ 1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Положим $\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)/\alpha(2-\alpha-\beta)$, и пусть

$$Y_i(k, \varphi) = \varphi^i \sum_{j=0}^{i} \sum_{d=0}^{j} T_{j-d} \sum_{\mu=0}^{d} Q_{\mu,d} \sum_{\nu=0}^{i-j} h(\nu, i-j)(\nu!)^{-1} \sum_{\lambda=0}^{\nu} C_\nu^\lambda (-1)^{d+\mu+\lambda} \varphi^{\mu+\lambda} \times$$
$$\times\left((j+\mu)^{(\nu-\lambda)} - (d+\mu)(j+\mu-1)^{(\nu-\lambda)}\varphi^{-1}\right) \quad (i \geqslant 0), \tag{1.1}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} &i^{(d)} = i(i-1)\ldots(i-d+1) \quad &\text{при } d \geqslant 1, \\ &i^{(0)} = 1,\ i^{(-d)} = 0 \quad &\text{при } d \geqslant 1; \end{aligned} \tag{1.2}$$

функции T, Q, h определены ниже формулами (2.7), (2.16), (2.12).

Отметим что $Y_i(k, \varphi)$ — полином степени i, по первому аргументу и степени $2i$ по второму.

Теорема 1. *Для всякого $m \geqslant 1$ найдется постоянная $C \equiv C(m, \alpha, \beta, p)$ такая, что при $n > C$ справедлива оценка*

$$\sup_{-\infty<j<+\infty} \left| \mathbf{P}(\eta_n - [\log n] < j) - e^{-\varphi_{nj}} \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} Y_i(k_{nj}, \varphi_{nj}) \right| \leqslant C(n^{-1}\ln n)^m, \tag{1.3}$$

где $k_{nj} = j + [\log n]$, $\varphi_{nj} = \gamma\alpha^{j-\{\log n\}}$.

Следствие. *При $n \to \infty$*

$$\sup_{-\infty<j<+\infty} \left| \mathbf{P}(\eta_n - [\log n] < j) - e^{-\varphi_{nj}}(1 + \varphi_{nj}(1-\varphi_{nj})\, n^{-1} \log n) \right| = O(n^{-1}). \tag{1.4}$$

Отметим: из (1.4) следует, что не только первый, но и второй члены асимптотического разложения для функции распределения случайной величины η_n не зависят от начального распределения цепи.

Дальнейшая структура работы такова: во втором параграфе будут получены некоторые вспомогательные результаты; доказательству основного результата посвящен § 3.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Буквами C, c (с индексами и без) ниже будут обозначаться (различные) постоянные, зависящие только от m и параметров цепи. Символ ■ помечает конец доказательства.

Теорема 2. *Существуют постоянные $q<1$, $C<\infty$ такие, что*

$$\sup_{k>C}\left|\mathbf{P}(\eta_n<k)-A(t_0)\,t_0^{-n-1}\right|\leqslant Cq^n, \tag{2.1}$$

где

$$A(t)=-V(t)/U'(t),$$
$$V(t)\equiv V(t,\,k)=1-(\alpha+\beta-1)t-$$
$$-(p\alpha+(1-p)(1-\beta))\alpha^{k-1}t^k+p(\alpha+\beta-1)\alpha^k t^{k+1},$$
$$U(t)\equiv U(t,\,k)=W(t)+(1-\alpha)(1-\beta)\alpha^{k-1}t^{k+1},$$
$$W(t)=(1-t)(1-(\alpha+\beta-1)t),$$

$t_0\equiv t_0(k)$ — *минимальный по модулю корень функции $U(t,\,k)$.*

Замечание. В случае схемы Бернулли с параметром α оценка (2.1) справедлива при $q=\alpha$, $C=(2+\alpha(1-\alpha))/(1-\alpha)(1-\alpha^2)$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2, покажем, что имеет место следующая

Лемма 1. *При $k\geqslant 1$ справедливо равенство*

$$F(k,\,t)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(\eta_n<k)\,t^n=V(t)/U(t), \tag{2.2}$$

где $\eta_0\equiv 0$.

Доказательство. Обозначим через $F_1\equiv F_1(k,\,t)$ функцию $F(k,\,t)$, соответствующую $p=1$, через $F_0\equiv F_0(k,\,t)$ функцию $F(k,\,t)$, соответствующую $p=0$. Кроме того, положим $u_n=\mathbf{P}(\eta_n<k\,|\,\xi_0=1)$, $v_n=\mathbf{P}(\eta_n<k\,|\,\xi_0=0)$, $\bar u_n=(u_n,\,v_n)$, $\bar F=(F_1,\,F_0)$. Буквой Π ниже обозначена матрица переходных вероятностей цепи, а буквой $\Pi^*=\|\pi_{ij}\|$ — матрица с элементами $\pi_{11}=\pi_{21}=0$, $\pi_{12}=\alpha$, $\pi_{22}=1-\beta$.

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\bar u_n&=\Pi\bar u_{n-1}-(1-\alpha)\alpha^{k-1}\Pi^*\bar v_{n-k-1}\ \text{при}\ n>k,\\ \bar u_k&=\Pi\bar u_{k-1}-\alpha^{k-1}\Pi^*\bar 1,\\ \bar u_n&=\Pi\bar u_{n-1}\ \text{при}\ 0<n<k,\ \bar u_0=\bar 1,\end{aligned}\tag{2.3}$$

где $\bar 1=(1,1)$. Из (2.3) немедленно вытекает равенство

$$\bar F=\bar 1+t\Pi\bar F-\alpha^{k-1}t^k\Pi^*\bar 1-(1-\alpha)\alpha^{k-1}t^{k+1}\Pi^*\bar F_0. \tag{2.4}$$

Решая (2.4) относительно F_1, F_0 и учитывая, что $F(k,\,t)=pF_1+(1-p)F_0$, получим (2.2). ■

Доказательство теоремы 2. Сначала приведем схему дальнейших рассуждений. Мы покажем, что при достаточно больших k корни $\{t_i\equiv t_i(k),\ 1\leqslant i\leqslant k\}$ функции $U(t,\,k)$: (а) отделены по модулю от минимального корня t_0, (б) равномерно ограничены, (в) просты; после чего воспользуемся разложением функции $F(k,\,t)$ на простые дроби.

Выберем числа r и q так, чтобы выполнялись условия
(0) $0<r<\alpha<q<1$;
(1) если $\alpha=|1-\alpha-\beta|$, то $q<2\alpha/(\alpha+\beta)$;
(2) если $\alpha>|1-\alpha-\beta|$, то $r>|1-\alpha-\beta|$;
(3) если $\alpha<|1-\alpha-\beta|$, то $\alpha/q<|1-\alpha-\beta|<q$.

Поскольку $q > \max(\alpha, |1-\alpha-\beta|)$, функция $W(t)$ имеет единственный корень в области $B=\{t: |t|<1/q\}$, и при всех k, больших некоторого $k(q)$, выполняется $\inf\limits_{t\in\partial B} |W(t)| > \sup\limits_{t\in\partial B} |U(t,k)-W(t)|$. Поэтому по теореме Руше [16, с. 142] функция $U(t)$ имеет в области B единственный корень t_0 (взяв вместо B окрестности точки $t=1$, получим $t_0(k)\to 1$ при $k\to\infty$). Следовательно, $|t_i|>1/q$, $1\leqslant i\leqslant k$, если $k\geqslant k(q)$.

Из равенства $U(t_i, k)=0$ вытекает: $(1-\alpha)(1-\beta)|\alpha t_i|^{k+1}\leqslant 4|\alpha t_i|^2$ при $k\geqslant k(q)$, $i\geqslant 1$. Поэтому $|t_i|\leqslant 1/r$ при всех k, больших некоторого k_1.

Если $U(\tau)=U'(\tau)=0$ для некоторого $\tau\equiv\tau(k)$, то в точке τ обратится в нуль и остаток при делении $U(t)$ на $tU'(t)$. Этот последний есть полином степени два, корни которого не зануляют $U'(t)$ при всех k, больших некоторого k^*. Следовательно, корни функции $U(t)$ при больших k просты.

Разложение функции $F(k, t)$ на простые дроби дает

$$\mathbf{P}(\eta_n < k) = \sum_{i=0}^{k} A(t_i)\, t_i^{-n-1}.$$

Для завершения доказательства теоремы 2 необходимо проверить существование константы C такой, что $\inf\limits_{1\leqslant i\leqslant k, k>C} |U'(t_i)|>0$.

Случай 1: $\alpha=|1-\alpha-\beta|$. Заметим, что $t_i(k)\in B_1\equiv\{t: 1/q<|t|<1/r\}$, $1\leqslant i\leqslant k$, $k\geqslant k(q)$. Если $\inf\limits_{k\geqslant k(q)} \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} |U'(t_i, k)|=0$, то для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$ и некоторого $\tau\in B_1\cup\partial B_1$ выполняется $U(\tau_j, j)=0$; $\tau_j\to\tau$, $U'(\tau_j, j)\to 0$ при $j\to\infty$. Последнее означает, что $j(1-\alpha)(1-\beta)\alpha^{-1}(\alpha\tau_j)^j\to -W'(\tau)\neq 0$ ($W'(t)$ не имеет корней в B_1), откуда $\tau=1/\alpha$. Но, с другой стороны,

$$-tU'(t, k)=kW(t)+(1-\alpha-\beta)t^2+1 \tag{2.5}$$

как только $U(t, k)=0$. Из (2.5) следует $|U'(\tau_j, j)|\to\infty$ при $j\to\infty$, а это противоречит предположению.

Случай 2: $\alpha>|1-\alpha-\beta|$. Снова $t_i(k)\in B_1$, $1\leqslant i\leqslant k$. Заметим, что функция $W(t)$ не имеет корней в области B_1. Поэтому $\inf\limits_{t\in B_1}|W(t)|>0$, и ввиду (2.5) $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}|U'(t_i(k), k)|\to\infty$.

Случай 3: $\alpha<|1-\alpha-\beta|$. Положим $B_2=\{t: 1/q<|t|<q/\alpha\}$. С помощью теоремы Руше убеждаемся, что функция $U(t, k)$ имеет при больших k в области B_2 единственный корень $t_1(k)$. Применяя теорему Руше к окрестностям точки $t=1/(\alpha+\beta-1)$, получим $t_1(k)=1/(\alpha+\beta-1)+o(1)$ при $k\to\infty$. Но $W'(1/(\alpha+\beta-1))\neq 0$. Поэтому и $\varliminf\limits_{k\to\infty}|U'(t_1(k), k)|>0$. В области $B_3=\{t: q/\alpha\leqslant|t|<1/r\}$ функция $W(t)$ не имеет корней. Поэтому из (2.5) следует $\inf\limits_{2\leqslant i\leqslant k}|U'(t_i(k),(k)|\to\infty$ при $k\to\infty$. ■

Введем обозначения: $\varkappa=(\alpha+\beta-1)/(2-\alpha-\beta)$, $\delta=1-p/\gamma-(1-p)/(1-\alpha)$, $\rho=(\alpha+\beta-1)/(1-\alpha)(1-\beta)$. Функции H_i определим по правилу: $H_i=0$ при $i<0$,

$$H_i\equiv H_i(k)=2^{-i}\sum_{j=0}^{[i/2]} C_{i+1}^{i-2j}(k+2\varkappa)^{i-2j}((k+2\varkappa)^2-4(k-1)\varkappa)^j \text{ при } i\geqslant 0. \tag{2.6}$$

Кроме того, положим

$$T_i\equiv T_i(k)=\sum_{j=0}^{3} q_j H_{i-j}, \tag{2.7}$$

где $q_0=1$, $q_1=\delta-\varkappa$, $q_2=\rho\alpha p-\varkappa\delta$, $q_3=-\varkappa\rho\alpha p$.

Лемма 2. *При всех достаточно больших k имеет место равенство*

$$A(1+u)=\sum_{i=0}^{\infty} T_i u^i, \tag{2.8}$$

где $u\equiv u(k)=t_0(k)-1$.

Доказательство. Как уже отмечалось, $u(k)\to 0$ при $k\to\infty$. Соотношение $U(1+u)=0$ позволяет записать

$$(2-\alpha-\beta)^{-1}(1+u)V(1+u)=\sum_{i=0}^{3} q_i u^i,$$

$$-(2-\alpha-\rho)^{-1}(1+u)U'(1+u)=(1-(x+y)u)(1-(x-y)u),$$

где $x\equiv x(k)=(k+2\varkappa)/2$, $y\equiv y(k)=((k+2\varkappa)^2-4(k-1)\varkappa)^{1/2}/2$. Раскладывая дробь $V(1+u)/U'(1+u)$ в ряд по степеням u, получим (2.3). ■

Отметим, что

$$|H_i(k)|\leqslant(k+2|\varkappa|)^i,\qquad |T_i(k)|\leqslant Ck^i. \tag{2.9}$$

Прежде чем перейти к следующему утверждению, введем последовательность полиномов $\{P_i\equiv P_i(\cdot),\ i\geqslant 0\}$, определяемых рекуррентными соотношениями

$$P_0=1,$$

$$P_m\equiv P_m(k)=\sum_{j=1}^{m} G_j(k)\,b_{m-j,j}(k) \text{ при } k\geqslant m\geqslant 1,$$

где $G_j(k)=\sum_{i=0}^{j} C_{k+1}^{i}\varkappa^{j-i}$, $b_{l,j}\equiv b_{l,j}(k)=\sum_{i_1+\ldots+i_j=l} P_{i_1}\ldots P_{i_j}$ при $l\geqslant 0$, $j\geqslant 1$, (**)

Положим $v\equiv v(k)=\gamma\alpha^k$.

Лемма 3. *Для всякого $m\geqslant 1$ найдутся постоянные C_m, k_m такие, что при $k\geqslant k_m$*

$$\left|u/v-\sum_{i=0}^{m-1} P_i v^i\right|\leqslant C_m(kv)^m. \tag{2.10}$$

Доказательство. Равенство $U(1+u)=0$ запишем в виде

$$u/v=(1+u)^{k+1}(1-\varkappa u)^{-1}=\sum_{j=0}^{k+1} G_j u^j+\varkappa u((1+\varkappa)u)^{k+1}(1-\varkappa u)^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что при $m=1$ (2.10) выполнено.

Пусть (2.10) справедливо для некоторого $m\geqslant 1$. Осуществим индукционный переход.

Обозначим $\widetilde{P}_i=P_i$ $(0\leqslant i\leqslant m)$, $\widetilde{P}_m v^m=u/v-\sum_{i=0}^{m-1} Pv^i$, $b_{l,j,m}=$ $=\sum\widetilde{P}_{i_1}\widetilde{P}_{i_2}\ldots\widetilde{P}_{i_j}$, где суммирование ведется по наборам $(i_1,\ldots,i_j)$ неотрицательных целых чисел, для которых $i_1+\ldots+i_j=l$, $\max i_r\leqslant m$. Имеем

$$u/v+O((kv)^{m+1})=\sum_{j=0}^{m} G_j u^j=\sum_{j=0}^{m} G_j v^j\left(\sum_{i=0}^{m}\widetilde{P}_i v^i\right)^j=$$

$$=1+\sum_{j=1}^{m} G_j v^j\sum_{l=0}^{mj} v^l b_{l,j}.$$

Делая замену переменных $i=j+l$ и замечая, что $b_{l,j,m}=b_{l,j}$ при $l<m$, получим

$$u/v = 1+\sum_{i=1}^{m} v^i \sum_{j=1}^{i} b_{i-j,j}G_j + O\left((kv)^{m+1}\right),$$

что и требовалось доказать. ■

Отметим, что величины $b_{l,j}$ допускают представление

$$b_{l,j} = \sum_{\nu=1}^{l} j^{(\nu)} h(\nu,\ l)/\nu! \text{ при } l\geqslant 1,\ j\geqslant 1, \tag{2.11}$$

где $h(\nu,\ l)\equiv h(\nu,\ l,\ k)$ — полиномы степени l (по k), определяемые соотношениями $h(0,\ 0)=1$, $h(0,\ l)=0$ $(l\geqslant 1)$,

$$h(\nu,\ l)\equiv h(\nu,\ l,\ k) = \sum_{1\leqslant M\leqslant \nu'}\ \sum_{(y,z)\in A(\nu,l,M)} (\nu!/z!)\left(P_{y_1}(k)\right)^{z_1}\ldots$$

$$\ldots\left(P_{y_M}(k)\right)^{z_M} \text{ при } l\geqslant\nu\geqslant 1. \tag{2.12}$$

Здесь использованы обозначения $\nu'=\min(\nu;\ \sqrt{2l})$; $y=(y_1,\ \ldots,\ y_M)$; $z=(z_1,\ \ldots,\ z_M)$; $z!=z_1!\ldots z_M!$; $A(\nu,\ l,\ M)=\Big\{(y,\ z)\colon\ 1\leqslant y_1<\ldots<y_M;$ $\min\limits_i z_i\geqslant 1;\ \sum z^i=\nu;\ \sum y_iz_i=l\Big\}$, а также (1.2).

Чтобы убедиться в справедливости (2.11), достаточно наборы $(i_1,\ \ldots$ $\ldots,\ i_j)$ неотрицательных целых чисел, участвующих в определении величин $b_{l,j}$, разбить на группы, для которых число ненулевых элементов равно ν, число различных ненулевых элементов равно M, имеется ровно z_1 элементов, равных по величине $y_1,\ \ldots$, ровно z_M элементов равны по величине y_M. Аналогично

$$b_{l,j,m} = \sum_{l/m\leqslant\nu\leqslant l} j^{(\nu)} h_m(\nu,\ l)/\nu!, \tag{2.13}$$

где $h_m(0,\ 0)=1$, определение величин $h_m(\nu,\ l)$ отличается от определения величин $h(\nu,\ l)$ заменой полиномов $P_i(\cdot)$ на полиномы $\tilde{P}_i(\cdot)$ и множества $A(\nu,\ l,\ M)$ на $A(\nu,\ l,\ M,\ m)=\Big\{(y,\ z)\in A(\nu,\ l,\ M)\colon\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant M} y_i\leqslant m\Big\}$.

Отметим, что $h_m(\nu,\ l)=h(\nu,\ l)$ при $l<m$ и, как несложно убедиться,

$$|h_m(\nu,\ l,\ k)|\leqslant 2^m m^\nu (c_m k)^l, \tag{2.14}$$

$$|b_{l,j,m}(k)|\leqslant 2^m(m+1)^j(c_mk)^l. \tag{2.15}$$

В заключение этого раздела приведем несколько утверждений комбинаторного характера. В справедливости этих утверждений нетрудно убедиться с помощью метода математической индукции.

Лемма 4. *Пусть* $S_d(i)=\sum\limits_{l=0}^{i} l^{(d)}$. *Тогда при* $d\geqslant 0$

$$S_d(i)=(i+1)^{(d+1)}/(d+1)=i^{(d)}+i^{(d+1)}/(d+1).$$

Следствие. *Справедливы соотношения*

$$S_d(i)=d\sum_{j=1}^{j} S_{d-1}(j-1) \text{ при } d\geqslant 1,$$

$$(i+1)S_d(i-1)=(d+2)(d+1)^{-1}S_{d+1}(i) \text{ при } i\geqslant 1,$$

$$S_d(i+1)=S_d(i)+dS_{d-1}(i) \text{ при } d\geqslant 1.$$

Лемма 5. *Пусть* $r_j(i)$ — *коэффициент при* n^{i-j} *в полиноме*

$$(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+i)\equiv\sum_{j=0}^{i} r_j(i)\,n^{i-j};$$

$$\tilde{Q}_{0,d}=1,\quad \tilde{Q}_{j,d}=\sum_{1<l_1<l_1+1<l_2<\ldots<l_j<d+j}(l_1l_2\ldots l_j)^{-1} \text{ при } 1\leqslant j<d.$$

Тогда при $d \geqslant 1$ имеет место соотношение

$$r_d(i) = \sum_{j=0}^{d-1} \widetilde{Q}_{j,d} S_{j+d}(i).$$

Объединяя утверждения лемм 4, 5 получим

$$r_d(i) = \sum_{j=0}^{d} Q_{j,d}(i+1)^{(j+d)} \quad (d \geqslant 0), \tag{2.16}$$

где $Q_{0,0}=1$, $Q_{0,d}=0$ при $d \geqslant 1$, $Q_{j,d}=(j+d)^{-1}\widetilde{Q}_{j-1,d}$ при $1 \leqslant j \leqslant d$.

Лемма 6. *Пусть a, $\nu \in \mathbf{Z}$; $\nu \geqslant 0$. Тогда*

$$i^{(\nu)} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} C_\nu^\lambda a^{(\nu-\lambda)}(i-a)^{(\lambda)}. \tag{2.17}$$

Докажем, к примеру, лемму 5. Заметим, что

$$r_j(i) = \sum_{l=j}^{i} l r_{j-1}(l-1) \quad \text{при } i \geqslant j \geqslant 1. \tag{2.18}$$

Действительно, при $j=1$ (2.18) очевидно ($r_0(i) \equiv 1$), а при $j \geqslant 2$

$$r_j(i) = \sum_{1 \leqslant l_1 < \ldots < l_j \leqslant i} l_1 \ldots l_j = \sum_{l_j=j}^{i} l_j \sum_{1 \leqslant l_1 < \ldots < l_{j-1} \leqslant l_j - 1} l_1 \ldots l_{j-1} =$$

$$= \sum_{l=j}^{i} l r_{j-1}(l-1).$$

Доказательство леммы 5 проведем по индукции. При $d=1$ имеем $r_1(i) = i(i+1)/2 = S_1(i)$. Предположим, что утверждение леммы справедливо при некотором d, $1 \leqslant d < i$. Тогда в силу (2.18)

$$r_{d+1}(i) = \sum_{j=0}^{d-1} \widetilde{Q}_{j,d} \sum_{l=d+1}^{i} (l+1-1) S_{d+j}(l-1). \tag{2.19}$$

Воспользуемся теперь следствием леммы 4. Имеем

$$(l+1)S_{d+j}(l-1) = (d+j+2)(d+j+1)^{-1} S_{d+j+l}(l),$$

$$\sum_{l=d+1}^{i} S_{d+j}(l-1) = \sum_{l=1}^{i} S_{d+j}(l-1) = (d+j+1)^{-1} S_{d+j+1}(i),$$

$$(d+j+2) \sum_{l=d+1} S_{d+j+1}(l) = S_{d+j+2}(i) + (d+j+2) S_{d+j+1}(i).$$

Из (2.19) выводим

$$r_{d+1}(i) = \sum_{j=0}^{d-1} \widetilde{Q}_{j,d}\left((d+j+1)^{-1} S_{d+j+2}(i) + S_{d+j+1}(i)\right) =$$

$$= S_{d+1}(i) + \sum_{j=1}^{d-1} \left(\widetilde{Q}_{j,d} + (d+j)^{-1} \widetilde{Q}_{j-1,d}\right) S_{d+j+1}(i) +$$

$$+ (2d)^{-1} \widetilde{Q}_{d-1,d} S_{2d+1}(i) = \sum_{j=0}^{d} \widetilde{Q}_{j,d+1} S_{d+j+1}(i),$$

так как $(2d)^{-1}\widetilde{Q}_{d-1,d} = \widetilde{Q}_{d,d+1}$ и при $1 \leqslant j < d$

$$\widetilde{Q}_{j,d} + (d+j)^{-1} Q_{j-1,d} = Q_{j,d+1}. \ \blacksquare$$

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Определим полиномы $Y_{i,m} \equiv Y_{i,m}(k, \varphi)$, используя в формуле (1.1) величины $h_m(\nu, l)$ вместо $h(\nu, l)$. Всюду ниже $\varphi \equiv n\nu$; символ log по-прежнему используется для обозначения логарифмов по основанию $1/\alpha$.

Лемма 7. *При всех достаточно больших* k

$$A(t_0)\,t_0^{-n-1}=\sum_{i=0}^{\infty}n^{-i}Y_{i,m}e^{-\varphi}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Положим $w=nu$,

$$R_{j,d}=(u/v)^{j-d}\sum_{i=d}^{\infty}r_d(i)\,(-w)^i/i!$$

(коэффициенты $r_d(i)$ введены в лемме 5). Тогда

$$t_0^{-n-1}\equiv(1+u)^{-n-1}=\sum_{i=0}^{\infty}C_{n+i}^{i}(-u)^i=\sum_{j=0}^{\infty}n^{-j}\sum_{i=j}^{\infty}r_j(i)\,(-w)^i/i!$$

и из леммы 2 вытекает, что

$$A(t_0)\,t_0^{-n-1}=\sum_{j=0}^{\infty}n^{-j}\sum_{d=0}^{j}T_{j-d}\varphi^{j-d}R_{j,d}. \tag{3.2}$$

В обозначениях леммы 3 $(u/v)^i=\sum\limits_{a=0}^{im}v^a b_{a,i,m}$. Поэтому

$$R_{j,d}=\sum_{a=0}^{\infty}n^{-a}\varphi^a\sum_{i\geqslant\max(d,d-j+a/m)}(-\varphi)^i\,r_d(i)\,b_{a,i+j-d,m}/i!. \tag{3.3}$$

Из (3.2), (3.3), делая замену переменных $t=j+a$, получим

$$A(t_0)\,t_0^{-n-1}=\sum_{t=0}^{\infty}n^{-t}X_{t,m},$$

где

$$X_{t,m}\equiv X_{t,m}(k,\varphi)=\sum_{j=0}^{t}\sum_{d=0}^{j}T_{j-d}\varphi^{t-d}\sum_{i\geqslant\max(d,d-j+(t-j)/m)}r_d(i)b_{t-j,i+j-d,m}(-\varphi)^i/i!. \tag{3.4}$$

Замена переменных и смена порядка суммирования законны, поскольку при больших k ряд (3.4) сходится абсолютно. В этом нетрудно убедиться, воспользовавшись оценками (2.9), (2.15), а также следующей:

$$r_d(i)=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant i}i_1i_2\ldots i_d\leqslant i^{(d)}C_i^d\leqslant i^{(d)}\,2^i\quad\text{при } d\geqslant 1.$$

Преобразуя (3.4) с помощью формул (2.11) и (2.16), получим

$$X_{t,m}=\sum_{j=0}^{t}\sum_{d=0}^{j}T_{j-d}\varphi^{t-d}\sum_{\mu=0}^{d}Q_{\mu,d}\sum_{(t-j)/m\leqslant\nu\leqslant t-j}h_m(\nu,t-j)\,(\nu!)^{-1}\times$$
$$\times\sum_{i\geqslant d}(i+1)^{(\mu+d)}(i+j-d)^{(\nu)}(-\varphi)^i/i!. \tag{3.5}$$

Область суммирования по i в (3.5) мы должны были бы, вообще говоря, указать в виде $i\geqslant\max(d;\,x)$, $x=d-j+(t-j)/m$. Заметим, однако, что если $\max(d;\,x)=x$ и $i<x$, то $i+j-d<\nu$. Но $(i+j-d)^{(\nu)}=0$ при $i+j-d<\nu$. Тем самым запись (3.5) корректна.

Сумму по i в (3.5) можно свернуть с помощью леммы 6. Используя равенство $(i+1)^{(r)}=i^{(r)}+ri^{(r-1)}$, из (2.17) выводим

$$e^{\varphi}\sum_{i\geqslant d}(i+1)^{(\mu+d)}(i+j-d)^{(\nu)}(-\varphi)^i/i!=$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\nu}(-\varphi)^{d+\mu+\lambda}C_\nu^\lambda\left((j+\mu)^{(\nu-\lambda)}-\varphi^{-1}(\mu+d)\,(j+\mu-1)^{(\nu-\lambda)}\right).$$

Таким образом, $X_{t,m}e^{\varphi}\equiv Y_{t,m}$. ■

Лемма 8. *Пусть* $\psi=\max(1;\,\varphi)$. *Тогда*

$$|Y_{i,m}|\leqslant(C\psi^2\ln n)^i. \tag{3.6}$$

Доказательство. Из определения величин $Q_{j,d}$ вытекает, что

$$Q_{j,d} \leqslant C_{j+d}^{d}/(2j)!! \leqslant 2^d/j!. \tag{3.7}$$

Употребляя оценки (2.14), (2.9), (3.7), заключаем

$$|Y_{i,m}| \leqslant (c_1\varphi\psi k)^i \sum_{j=0}^{i} \sum_{d=0}^{j} \sum_{\mu=0}^{d} \sum_{\nu=0}^{i-j} 2^d m^\nu (j+\mu+1)^\nu/\nu!\mu! \leqslant (c_2 k\varphi\psi)^i.$$

Заметим, что $k \leqslant \log n - \log \varphi + 1$. Поэтому

$$k\varphi \leqslant \begin{cases} \varphi \log n/\alpha & \text{при} \quad \varphi \geqslant 1, \\ \log n + 1 + e^{-1}\log e & \text{при} \quad \varphi < 1. \end{cases}$$

Оценка (3.6) очевидна. ■

Положим $k(n) = \log n - \log \ln n^m$.

Лемма 9. *Пусть* $m \geqslant 1$. *При всех достаточно больших* n *выполняется* ($q < 1$):

$$\sup_{k\in\mathbf{Z}} \left| \mathbf{P}(\eta_n < k) - \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} Y_i e^{-\varphi} \right| \leqslant Cq^n +$$

$$+ 2 \sup_{k\leqslant k(n)} \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} |Y_i| e^{-\varphi} + \sup_{k\geqslant k(n)} \sum_{i=m}^{\infty} n^{-i} |Y_{i,m}| e^{-\varphi}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Обозначим $\Delta(n, k) = \left| \mathbf{P}(\eta_n < k) - \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} Y_i e^{-\varphi} \right|$. Заметим, что $Y_{i,m} = Y_i$ при $i < m$. Из (2.1), (3.1) следует, что

$$\sup_{k\geqslant k(n)} \Delta(n, k) \leqslant Cq^n + \sup_{k\geqslant k(n)} \sum_{i=m}^{\infty} n^{-i} |Y_{i,m}| e^{-\varphi}. \tag{3.9}$$

Далее,

$$\sup_{k\leqslant k(n)} \Delta(n, k) \leqslant \mathbf{P}(\eta_n < k(n)) + \sup_{k\leqslant k(n)} \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} |Y_i| e^{-\varphi} \leqslant Cq^n +$$

$$+ 2 \sup_{k\leqslant k(n)} \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} |Y_i| e^{-\varphi} + \sup_{k\geqslant k(n)} \sum_{i=m}^{\infty} n^{-i} |Y_{i,m}| e^{-\varphi}. \tag{3.10}$$

Из (3.9), (3.10) следует (3.8). ■

Мы можем теперь завершить доказательство теоремы 1. При $k \leqslant k(n)$ имеет место неравенство $\varphi \equiv nv(k) \geqslant m(\ln n)/\alpha$. Поэтому

$$\sup_{k\leqslant k(n)} \varphi^{2i} e^{-\varphi} \leqslant \varphi^{2i} e^{-\varphi} |_{\varphi = m(\ln n)/\alpha} = (m(\ln n)/\alpha)^{2i} n^{-m/\alpha},$$

и из (3.6) следует:

$$\sup_{k\leqslant k(n)} \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} |Y_i| e^{-\varphi} \leqslant c_1 (\ln n)^{3m-3} n^{-m/\alpha}. \tag{3.11}$$

Далее, поскольку $\sup_{\varphi\geqslant 0} \varphi^r e^{-\varphi} \leqslant r!$, имеем

$$\sup_{k\geqslant 0} |Y_{m,m}| e^{-\varphi} \leqslant c_2 (\ln n)^m. \tag{3.12}$$

Наконец, так как $\varphi \leqslant m(\ln n)/\alpha$ при $k \geqslant k(n)$,

$$\sup_{k\geqslant k(n)} \sum_{i=m+1} n^{-i} |Y_{i,m}| e^{-\varphi} \leqslant c_3 (n^{-1}(\ln n)^3)^{m+1}. \tag{3.13}$$

Объединяя оценки (3.8), (3.11)—(3.13) и учитывая, что левая часть (3.8) есть $\sup_{j\in\mathbf{Z}} \Delta(n, j + [\log n])$, получим (1.3). ■

Максимум длин серий «успехов» мы могли бы ввести и несколько иначе. Например, так: $\tilde{\eta}_n = \max\left\{k \leqslant n: \max_{0 \leqslant i \leqslant n-k} \mathbf{1}\{\xi_i = \ldots = \xi_{i+k-1} = 1\} = 1\right\}$.

Просматривая выкладки, нетрудно убедиться, что соотношение (1.3) останется верным и для $\tilde{\eta}_n$, если в определении величин Y_i вместо функций T_i употребить $\tilde{T}_i = \sum_{0 \leqslant j \leqslant 2} \tilde{q}_j H_{i-j}$, где $\tilde{q}_0 = 1$, $q_1 = 1 - \varkappa + \rho - \rho/(1-\alpha)(1-\beta)$, $\tilde{q}_2 = (1-\varkappa)_\rho - \varkappa + \varkappa\rho/(1-\alpha)(1-\beta)$, $\tilde{q}_3 = -\varkappa p$, $\rho = \alpha(p + \beta - 1)/(1-\alpha)(1-\beta)$.

§ 4. ЗАМЕЧАНИЕ О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

В этом разделе предлагается простой подход, позволяющий получать оценки скорости сходимости в несколько более общей постановке задачи.

Пусть $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — марковская цепь с множеством состояний $S = \{0, 1, \ldots, m\}$, матрицей переходных вероятностей $\|p_{ij}\|$ и вектором начальных вероятностей $\bar{p}$. Положим $A = \{1, \ldots, m\}$ (тот факт, что $\operatorname{card}(S \setminus A) = 1$, существен для дальнейших рассуждений), и пусть η_n — случайная величина, заданная соотношением (0), где считается $\xi_i = \mathbf{1}\{X_i \in A\}$. По своему смыслу η_n есть максимум длин серий «успехов» в испытаниях $X_1, \ldots, X_n$, где под «успехом» понимается попадание цепи в подмножество A.

Обозначим также $\mathbf{U} = \|p_{ij}\|_{ij \in A}$, λ — максимальные собственное число матрицы $\mathbf{U}$, ζ — с. в. с распределением $\mathbf{P}(\zeta = 1) = p_{00}$, $\mathbf{P}(\zeta = i) = \bar{p}_{0A}\mathbf{U}^{i-2}\bar{p}_{A0}$ $(i \geqslant 2)$, где $\bar{p}_{0A} = \|p_{0j}\|_{j \in A}$, $\bar{p}_{A0} = \|p_{i0}\|_{i \in A}$. В дальнейшем будем считать, что цепь имеет лишь один класс существенных состояний, не содержащий циклических подклассов; пересечение A с множеством существенных состояний цепи не пусто (в частности, $p_{00} < 1$); $0 < \lambda < 1$; правый собственный вектор $\bar{z}$ матрицы $\mathbf{U}$, отвечающий собственному числу λ, положителен: $z_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha(k) = \mathbf{P}(\zeta > k)$,

$$\Delta(n, k) = |\mathbf{P}(\eta_n < k) - \exp(-n\alpha(k)/\mathbf{M}\zeta)|. \tag{4.1}$$

Тогда $\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta(k, n) = O(n^{-1}(\ln n)^3)$ *при* $n \to \infty$.

Ниже будет предложен «скетч» доказательства теоремы 3. Буквами c (с индексами и без) будем обозначать различные постоянные.

Положим $k(n) = [\log_{1/\lambda} n - \log_{1/\lambda} \ln n^c]$. Пользуясь двусторонними оценками для вероятностей $\mathbf{P}(\eta_n < k)$, установленными в теореме 2.1 работы [5], нетрудно получить, что если c достаточно велико, то $\sup_{1 \leqslant k \leqslant k(n)} \mathbf{P}(\eta_n < k) = \mathbf{P}(\eta_n < k(n)) = o(n^{-1})$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что теорема 3 будет доказана, если мы покажем, что $\sup_{k \geqslant k(n)} \Delta(n, k) = O(n^{-1}(\ln n)^3)$.

Обозначим через τ_i номер i-го по счету нуля в последовательности $\{X_i, i \geqslant 1\}$. Тогда, как нетрудно видеть, случайные величины $\zeta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i \geqslant 2$, независимы и одинаково распределены с ζ. Отметим, что $\zeta_i - 1$ есть длина i-й по счету серии «успехов» в последовательности $\{X_i, i \geqslant 1\}$. Поэтому

$$\eta_n = \max\{\eta_n^*; \zeta_1 - 1; n - \tau_{\nu(n)}\}, \tag{4.2}$$

где $\eta_n^* = \max_{2 \leqslant i \leqslant \nu(n)} \zeta_i - 1$, $\nu(n) = \max\{i: \tau_i \leqslant n\}$.

Лемма 10. *Пусть* $\tilde{\eta}_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant \nu(n)+1} \zeta_i - 1$. *Тогда*

$$\sup_{k \geqslant k(n)} |\mathbf{P}(\eta_n < k) - \mathbf{P}(\tilde{\eta}_n < k)| = O(n^{-1}(\ln n)^2). \tag{4.3}$$

При доказательстве леммы 10 воспользуемся тем фактом, что $\mathbf{P}(\zeta_1 = i) \leqslant c\lambda^i$. Аналогичные неравенства справедливы и для величин «недоскока» $n - \tau_{\nu(n)}$ и «перескока» $\tau_{\nu(n)+1} - n$ (нужно воспользоваться локальной теоремой восстановления и представлением для совместного распределения величин «недоскока» и «перескока» [18, с. 224]).

Распишем теперь более подробно вероятность $\mathbf{P}(\tilde{\eta}_n < k)$. Имеем

$$\mathbf{P}(\tilde{\eta}_n < k) = \mathbf{P}\left(\max_{2 \leqslant i \leqslant \nu(n)+1} \zeta_i \leqslant k\right) = \sum_{r=0}^{n} \mathbf{P}\left(\max_{2 \leqslant i \leqslant r+1} \zeta_i \leqslant k,\ \sum_{j=1}^{r} \zeta_j \leqslant n < \sum_{j=1}^{r+1} \zeta_j\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \mathbf{P}\left(\max_{2 \leqslant i \leqslant r+1} \zeta_i \leqslant k\right) \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{r} \zeta_j^{(k)} \leqslant n < \sum_{j=1}^{r+1} \zeta_j^{(k)}\right) = \mathbf{M}(1 - \alpha(k))^{\nu(k,n)}, \qquad (4.4)$$

где $\nu(k, n) = \max\left\{r\colon \sum_{j=1}^{r} \zeta_j^{(k)} \leqslant n\right\}$, случайные величины $\zeta_j^{(k)}$ независимы и имеют распределение $\mathbf{P}(\zeta_j^{(k)} = i) = \mathbf{P}(\zeta_j = i \mid \zeta_j \leqslant k)$.

Лемма 11. *Пусть $t \equiv t(k) = 1 - \alpha(k)$. Тогда*

$$\sup_{k \geqslant k(n)} \left| \mathbf{M} t^{\nu(k,n)} - t^{\mathbf{M}\nu(k,n) + \mathbf{D}\nu(k,n)(\ln t)/2} \right| = o(n^{-1}). \qquad (4.5)$$

По поводу второго слагаемого под знаком модуля в (4.5) отметим, что если Y — стандартная нормальная случайная величина, то $\mathbf{M} t^{Y\sqrt{\mathbf{D}\nu(k,n)}} = \exp\left(\frac{1}{2} \mathbf{D}\nu(k, n)(\ln t)^2\right)$. При доказательстве леммы 11 используется разложение функций $f_n(u) = (1-u)^{Y_n\sqrt{\mathbf{D}\nu(k,n)}}$ и $f(u) = (1-u)^{Y\sqrt{\mathbf{D}\nu(k,n)}}$ в ряд Тейлора до третьих производных (здесь $Y_n \equiv Y_n(k) = (\nu(k, n) - \mathbf{M}\nu(k, n))/\sqrt{\mathbf{D}\nu(k, n)}$, $u = \alpha(k)$). Предварительно непосредственно проверяется, что $\mathbf{M}(Y_n)^4 \leqslant c < \infty$ при $k \geqslant k(n)$, $n \geqslant 1$. Отсюда и из равномерной по $k \geqslant k(n)$ слабой сходимости при $n \to \infty$ величин Y_n к стандартному нормальному закону следует (см. [19, с. 34]) равномерная по $k \geqslant k(n)$ сходимость $\mathbf{M}|Y_n|^i \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{M}|Y|^i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Таким образом, величины $\mathbf{M}|Y_n|^i$ равномерно по $k \geqslant k(n)$, $n \geqslant 1$, ограничены. Окончательно получим, что левая часть (4.5) не превосходит $c_1 n^{3/2} \alpha^3(k(n)) \leqslant c_2 n^{-3/2} (\ln n)^3$.

Непосредственно проверяется, что $\sup_{k \geqslant k(n)} |\exp(\mathbf{D}\nu(k, n)(\ln t)^2/2) - 1| = O(n^{-1}(\ln n)^2)$. Для завершения доказательства теоремы 3 необходимо оценить

$$\sup_{k \geqslant k(n)} |(1 - \alpha(k))^{\mathbf{M}\nu(k,n)} - \exp(-n\alpha(k)/\mathbf{M}\zeta)|. \qquad (4.6)$$

Но поскольку $\mathbf{M}\zeta^{(k)} = \mathbf{M}\zeta(1 + O(k\lambda^k))$, имеем $\mathbf{M}\nu(k, n) = n/\mathbf{M}\zeta^{(k)} + O(1) = n/\mathbf{M}\zeta(1 + O(n^{-1} + k\lambda^k))$. Оценка скорости сходимости, сформулированная в теореме 3, становится теперь очевидной. ■

Отметим, что теорема 1 в случае $S = \{0;\ 1\}$ дает оценку скорости сходимости вида $O(n^{-1} \ln n)$. Вопрос о том, останется ли эта оценка справедливой и в ситуации, рассмотренной в настоящем параграфе, остается пока открытым.

Свойства процессов восстановления использовали В. В. Анисимов и А. И. Черняк [7], установившие в случае марковской цепи с конечным числом состояний предельный закон для максимума длин серий «успехов». В основе их метода лежит использование при выводе слабой сходимости закона больших чисел для соответствующих процессов восстановления. Независимо от них эту же идею автору в частной беседе высказал А. А. Боровков. Однако долгое время автор считал более эффективным другой подход, реализованный при доказательстве теоремы 1. Интерес автора к идее использования свойств процессов восстановления был вновь привлечен беседами с С. А. Утевым.

Автор признателен А. А. Боровкову за внимание к работе, а также А. М. Зубкову за полезные замечания. Автор хотел бы выразить свою искреннюю благодарность С. А. Утеву за моральную поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гончаров В. Л.** Из области комбинаторики // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1944.— Т. 8, № 1.— С. 3—48.
2. **Földes A.** The limit distribution of the length of the longest head-run // Trans. 8-th Prague Conf. on Inform. Theory, Statist. Desis. Func., Rand. Processes.— Prague, 1979.— P. 95—104.
3. **Kusolitsch N.** Runs in Markov chains // Probab. & Statist. Inference.— 1982.— P. 223—230.
4. **Новак С. Ю.** О длине наибольшей серии успехов в марковских цепях // 4-я Междунар. Вильнюс. конф. по теор. вероятн. и мат. статист.— Вильнюс, 1985.— Т. 11.— С. 267—268.
5. **Новак С. Ю.** Об отрезках времени постоянного пребывания однородной марковской цепи в фиксированном подмножестве состояний // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 1.— С. 129—140.
6. **Mory G., Szekely G.** Asymptotic independence of "pure head" stopping times // Statist. & Probab. letters.— 1984.— V. 2, N 1.— P. 5—8.
7. **Анисимов В. В., Черняк А. И.** Предельные теоремы для некоторых редких функционалов на марковских цепях и полумарковских процессах // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1982.— Т. 26.— С. 1—6.
8. **Erdös P., Révész P.** On the length of the longest head-run // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. Topics in Inform. Theory.— 1975.— V. 16.— P. 219—228.
9. **Самарова С. С.** О количестве отрезков времени постоянного пребывания эргодической марковской цепи в фиксированном состоянии // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 260, № 1.— С. 35—40.
10. **Варякойис Л.** О максимуме длин серий «успехов» в счетной марковской цепи // Литовск. мат. сб.— 1986.— Т. 26, № 4.— С. 616—625.
11. **Guibas L. J., Odlyzko A. M.** Long Repetitive Patterns in Random Sequences // Z. Wahr. Gebiet.— 1980.— V. 53.— P. 241—262.
12. **Novak S. Yu.** On the length of the longest increasing run // 1st Congr. Bernoully Soc. on Math. Statist. & Probab.— 1986.— V. 11.— P. 766.
13. **Grill K.** Erdös-Révész Type Bounds for the Length of the longest run from a Stationary Mixing Sequence // Probab. Th. Rel. Fields.— 1987.— V. 75, N 3.— P. 77—85.
14. **Moivre A.** Doctrine of Chances.— L., 1738.
15. **Новак С. Ю.** О времени пребывания однородной марковской цепи в конечном подмножестве состояний // Теория вероятностей и применения.— 1986.— Т. 31, № 2.— С. 412—413.
16. **Бицадзе А. В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1984.— 320 с.
17. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, 1984.— Т. 1.
18. **Боровков А. А.** Теория вероятностей.— М.: Наука, 1986.
19. **Боровков А. А.** Математическая статистика.— М.: Наука, 1984.

О ВЕРОЯТНОСТЯХ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. А. БОРОВКОВ, А. А. МОГУЛЬСКИЙ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс с траекториями из пространства $D(0, 1)$ функций без разрыва второго рода на отрезке $[0, 1]$. Обозначим через Q распределение процесса ξ в $D(0, 1)$ (с σ-алгеброй $\mathscr{B}$, порожденной цилиндрическими множествами, или, что то же самое, борелевскими множествами относительно метрики Скорохода). Явный вид $Q(A)$ даже для «простых» множеств A и «простых» процессов ξ найти, за редким исключением, невозможно. Однако асимптотическое поведение $Q(xA)$ ($f + xA$ означает множество функций $\{f + xg,\ g \in A\}$, $x \in \mathbf{R}^1$) при $x \to \infty$ или $x \to 0$ в целом ряде случаев поддается изучению.

Если $x \to \infty$ и A не содержит окрестности точки $f=0$, то $Q(xA)\to 0$, и задачу отыскания асимптотики $Q(xA)$ называют задачей о *больших уклонениях* для процесса ξ.

Аналогичную задачу для $x\to 0$ и A таких, что $Q(xA)\to 0$, естественно называть задачей о *малых уклонениях* процесса ξ. Это название особенно оправдано, когда величина $|A|=\sup\limits_{f\in A}\|f\|$ ограничена в какой-нибудь естественной норме или полунорме $\|f\|$. В общем случае свойство $Q(xA)\to 0$ при $x\to 0$ может не следовать из неравенства $Q(A)<1$. Например, если $A=A_a=\{\xi(1)<a\}$, то для непрерывного симметричного распределения $\xi(1)$ будет справедливо $Q(xA)\to Q(A_0)=\mathbf{P}(\xi(1)<0)=1/2$. Если $A=\left\{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\xi(t)<1\right\}$, то для широкого класса процессов $Q(xA)\to 0$ при $x\to 0$, но скорость убывания будет определяться событием $\left\{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}\xi(t)<x\right\}$ при сколь угодно малом $\varepsilon>0$. Если $A=\{|\xi(t_0)|<1\}$, то скорость убывания $Q(xA)$ будет определяться свойствами распределения $\xi(t_0)$ в точке 0. Если же $A=\left\{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\xi(t)|<1\right\}$, то для асимптотики $Q(xA)$ существенно поведение $\xi(t)$ во всех точках $t\in[0, 1]$. Эти примеры показывают, что природа поведения $Q(xA)$ при $x\to 0$ может быть очень разной в зависимости от A.

Положение, как мы увидим, становится более однородным, если множество A связано с «существенными двусторонними» ограничениями на траекторию $\xi(t)$ на некотором невырожденном интервале: например, если A имеет вид $\{\|f\|<1\}$ для некоторой нормы $\|f\|$. В связи с этим *малыми уклонениями процесса* $\xi(t)$ *около точки* f естественно называть также события $\{\|f-\xi\|<x\}$ или более общё — событие $\{\xi\in f+xA\}$ при $x\to 0$. Если $h(f, \xi)$ — плотность распределения процесса $\xi-f$ относительно распределения процесса ξ, то мы можем записать

$$\mathbf{P}(\xi\in f+xA)=\mathbf{E}(h(f, \xi);\ \xi\in A). \tag{1}$$

Если окажется, что на событии $\{\xi\in xA\}$ выполняется $h(f, \xi)=c(f)+o(1)$, то формула (1) перейдет в соотношение

$$\mathbf{P}(\xi\in f+xA)\sim c(f)\mathbf{P}(\xi\in xA). \tag{2}$$

При этом задача о малых уклонениях может сочетаться с задачей о больших уклонениях, если в (1) в качестве f выбрать yf_0, где $y\to\infty$. Задачу отыскания асимптотики вероятности (1) можно сравнить с проблематикой локальных теорем для вещественно- или векторно-значных случайных величин.

В задаче о больших уклонениях прогресс в изучении асимптотики $Q(xA)$, $x\to\infty$, во многом связан с характером предположений относительно природы процесса $\xi(t)$ и множества A. Наибольшего продвижения здесь можно достичь для процессов $\xi(t)$ с независимыми приращениями, марковских и гауссовских процессов и процессов, порожденных последовательными суммами независимых случайных величин и величин, связанных в цепь Маркова. Предположения относительно множеств A являются весьма широкими, если речь идет о «грубой» асимптотике (т. е. об асимптотическом поведении $\ln Q(xA)$ при $x\to\infty$), и весьма частными, если речь идет о самой асимптотике. В этом последнем случае приходится ограничиваться в основном криволинейными полосами

$$A=A(g_-, g_+)=\{f\colon g_-(t)\leqslant f(t)\leqslant g_+(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}, \tag{3}$$

где $g_-(t)$, $g_+(t)$ — заданные функции. Обзор результатов в этих направлениях можно найти, например, в [1—3].

Пусть $\xi(t)$ — произвольный непрерывный процесс. Функция уклонений процесса ξ определяется как значение

$$\Lambda(f)=\sup_{\theta\in C^*(0,1)}\{\theta(f)-\ln\mathbf{E}e^{\theta(\xi)}\},\quad f\in C(0, 1),$$

где $C^*(0, 1)$ — сопряженное пространство всех непрерывных линейных функционалов $\theta = \theta(f)$ на пространстве $C(0, 1)$ непрерывных функций. Тогда для гауссовских процессов $\xi(t)$ и для широкого класса множеств $A \subseteq C(0, 1)$ при $x \to \infty$ ([4, 5])

$$\ln Q(xA) \sim -x^2 \inf_{f \in A} \Lambda(f). \tag{4}$$

Класс множеств A в (4) определяется условием

$$\inf_{f \in A_0} \Lambda(f) = \inf_{f \in \bar{A}} \Lambda(f), \tag{5}$$

где A_0 и $\bar{A}$ — соответственно внутренность и замыкание множества A. В частности (см. [1]), если $\xi(t) = w(t)$ есть стандартный винеровский процесс, то для широкого класса множеств A

$$\ln W(xA) \sim -x^2 \inf_{f \in A \cap C^1} \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 \, dt, \tag{6}$$

где W — распределение $w(t)$, C^1 — класс абсолютно непрерывных функций $f = f(t)$, $f(0) = 0$.

Как показывают примеры, имеет место и более общий факт. Если $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, распределения которого удовлетворяют условиям Крамера, то

$$\ln \mathbf{P}(\xi \in xA) \sim -\inf_{A \cap C^1} \int_0^1 \Lambda(xf'(t)) \, dt, \tag{7}$$

где $\Lambda(\alpha)$ — функция уклонений случайной величины $\xi(1)$. Условия на A в (7) аналогичны (5).

Несколько труднее формулируются результаты для марковских процессов (см. [2]) и для последовательностей $s_n(t)$ процессов, порожденных суммами $S_0 = 0$, $S_1, \ldots, S_n$ случайных величин (здесь результат зависит также от отношения x/n; при определенных условиях $\mathbf{P}(s_n \in \in xA)$ ведет себя так же, как $W(xA)$, см. [1]).

Вычисление точной асимптотики $Q(xA)$ при $x \to \infty$, даже для так называемых граничных задач (см. [3]) требует привлечения более трудоемких технических средств, вид самих результатов существенно усложняется (см. [3, 6, 7]).

При описании малых уклонений картина получается несколько иная, хотя в некоторых отношениях аналогия сохраняется:

1. Как и для больших уклонений, оценивать асимптотику $Q(f + xA)$ при $x \to 0$ оказывается проще для процессов (или последовательностей) с независимыми приращениями.

2. Основной класс множеств, для которых это удается сделать, состоит из множеств A типа «полос» (3). В ряде случаев удается оценить $Q(f + xA)$ и для сфер $\{g\colon \|g - f\|_p < x\}$, где $\|f\|_p$ — норма в L_p.

3. Грубую асимптотику $Q(f + xA)$, как правило, удается получать при более широких предположениях.

Отличия малых уклонений от больших связаны с иной природой явлений, обусловливающих «главный вклад» траекторий процесса в xA при $x \to 0$ (условие Крамера, например, здесь перестает играть определяющую роль).

Для винеровского процесса и для множества $A = A(g_-, g_+)$ асимптотика $\ln W(xA)$ при $x \to 0$ имеет вид $-cx^{-2}$, т. е. носит характер инверсии к (6) (см. [8]). В работах [8—12] изучены малые уклонения произвольного гауссовского процесса (как случайного элемента гильбертова пространства). Тут асимптотика $\ln Q(xA)$ при $x \to 0$ может быть самой разной. Например, если собственные значения μ_n ковариационного оператора S, отвечающего процессу ξ, имеют кратность 1 и ведут себя как $\lambda n^{-\alpha}$, $\alpha>1$, то для множества $A=\{f\colon \|f\|<1\}$ при $x\to 0$ выполняется (см. [8])

$$Q(xA)\sim -cx^{2/(1-\alpha)}.$$

Как и в теории больших уклонений поведение $Q(f+xA)$ при $x\to 0$ удается оценить и для целого ряда других процессов $\xi(t)$ (отличных от названных выше), например, для броуновского моста $\overset{\circ}{w}(t)=w(t)-tw(1)$, для эмпирических процессов $F_n(t)-F(t)$, где $F_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, отвечающая функции распределения $F(t)$ и др.

Дальнейшее изложение разделено на следующие параграфы. В § 2 излагаются результаты о малых уклонениях винеровского и устойчивых процессов. В § 3 приводятся аналогичные результаты для процессов, порожденных суммами независимых случайных величин. Там же изучаются малые уклонения в принципе инвариантности, которые позволяют в ряде случаев сводить результаты § 2, 3 одни к другим. Эти результаты представляют и самостоятельный интерес. Названные параграфы содержат также некоторые приложения полученных результатов, например, для получения закона повторного логарифма в форме Чжуна для винеровского процесса, а также для последовательных сумм и для эмпирического процесса. Доказательства некоторых утверждений (теорем 3, 11) как технически наиболее трудных вынесены в § 4, 5. Вопрос об асимптотике вероятностей малых уклонений для других типов (не названных выше) процессов остается открытым.

Результаты работы докладывались на конференции в Бакуриане в марте 1986 г.

§ 2. МАЛЫЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА И УСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ

Можно считать типичными две скорости убывания $W(xA)$ при $x\to 0$. Первая связана, грубо говоря, с ситуацией, когда принадлежность множеству A накладывает на траекторию $w(t)$ лишь локальные ограничения. Так будет, например, для множеств

$$A_1=\left\{f\colon \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} f(t)<1\right\},\quad A_2=\{f\colon |f(1)|<1\}.$$

Тогда

$$W(xA_1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\sim x\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$W(xA_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\sim x\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

так что сходимость к 0 этих вероятностей обусловливается соответственно ограничениями на траекторию $w(t)$ в окрестностях точек $t=0$ и $t=1$. Рассматривая множества

$$A=\{f\colon |f(t_1)|\leqslant c_1,\ \ldots,\ |f(t_k)|\leqslant c_k\},$$

где $0\leqslant t_1<t_2\ldots<t_k\leqslant 1$, $c_1>0,\ \ldots,\ c_k>0$, мы можем получать другие степенные скорости убывания $W(xA)$, например, cx^k. Качественно картина сохранится и для асимптотического поведения $W(f+xA)$ для широкого класса функций f.

Асимптотика $W(xA)$ будет совершенно иной, если в A входят лишь функции, ограниченные в некоторой естественной норме на каком-нибудь интервале (u, v); $0\leqslant u<v\leqslant 1$.

Для криволинейной полосы $A(g_-, g_+)$ (см. (3)) справедлива

Теорема 1. *Пусть* $g_-(0)<0<g_+(0)$, $g_-(t)<g_+(t)$ *при* $t\in[0, 1]$; $\operatorname{var}_{[0,1]} g_\pm(t)<\infty$; *для некоторой непрерывной возрастающей функции* $\alpha(t)$,

$\alpha(0)=0$, *выполняется* $\delta_\pm(t)\leqslant\alpha(t)\sqrt{t}$ *при* $0\leqslant t\leqslant 1$, *где* $\delta_\pm(t)$ — *модули непрерывности функций* $g_\pm$. *Тогда при* $x\to 0$

$$\mathbf{P}(w\in xA(g_-, g_+)) = W(xA(g_-, g_+)) \sim$$

$$\sim \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{g_+(1)-g_-(1)}{g_+(0)-g_-(0)}}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{g_+(0)+g_-(0)}{g_+(0)-g_-(0)}\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\pi^2}{8x^2}\int\limits_0^1 (g_+(t)-g_-(t))^{-2}\,dt\right\}.$$

Теорема 1 доказана в [13].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и функция* $f\in C(0, 1)$ *удовлетворяет условиям* $f'\in L_2(0, 1)$, $f''\in L_1(0, 1)$, $f(0)=0$, $|f'(1)|<\infty$. *Тогда при* $x\to 0$

$$W(f+xA(g_-, g_+)) \sim e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (f'(t))^2dt} W(xA(g_-, g_+)). \tag{8}$$

В [14] приводится асимптотика для левой части формулы (8) в предположениях $f=0$, $g_-=-g_+$, производная g'_+ имеет ограниченную вариацию. В [15] эта формула анонсирована при более широких условиях на f и более узких на $g_\pm$, чем в теореме 2 (там предполагается, что функции f, $g_\pm$ имеют производные, интегрируемые с квадратом). Так как доказательство результатов [15] еще не опубликовано, а доказательство теоремы 2 весьма просто, то мы это доказательство ниже приводим (не претендуя при этом на максимально широкие условия на f).

Из теоремы 1 получаем, что для множества

$$A=\{f\colon \|f\|_C<1\}, \tag{9}$$

где $\|f\|_C=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)|$ — равномерная норма, имеет место соотношение

$$W(xA)\sim\frac{4}{\pi}\exp\left\{-\frac{\pi^2}{2x^2}\right\}. \tag{10}$$

Нетрудно понять, почему характер убывания $W(xA)$ имеет вид (10). Для множества (9) справедливо

$$\mathbf{P}(w\in xA)=\mathbf{P}\left(\left|\frac{w(t)}{x}\right|<1,\ 0\leqslant t\leqslant 1\right)=\mathbf{P}(|w(t)|<1,\ 0\leqslant t\leqslant x^{-2})$$

(в последнем равенстве мы воспользовались известным свойством винеровского процесса: для любого $T>0$ распределения в $C(0, 1)$ процессов $w(t)$ и $w(Tt)/\sqrt{T}$ совпадают). Но ясно, что $\mathbf{P}_T\equiv\mathbf{P}(|w(t)|<1,\ 0<t\leqslant T)$ имеет экспоненциальный по T характер убывания (двусторонние экспоненциальные оценки для $\mathbf{P}_T$ очевидны). Полагая $T=x^{-2}$, мы получаем убывание вида $\exp(-cx^{-2})$.

Эти простые соображения можно сделать и более точными. Рассмотрим однородную полугруппу операторов

$$R_T\varphi(x)\equiv\mathbf{E}(\varphi(w(T)+x);\ |w(t)+x|<1,\ 0\leqslant t\leqslant T),$$

определенную в $L_2(-1, 1)$. Тогда $\mathbf{P}_T$ представляется в виде $R_T\varphi_0(0)$, где $\varphi_0(x)=1$ при $-1\leqslant x\leqslant 1$. Поскольку операторы R_T являются самосопряженными и вполне непрерывными, то по теореме Гильберта — Шмидта (см., например, [16])

$$R_T\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k T}\varphi_k(x)(\varphi_k, \varphi), \tag{11}$$

где φ_k — собственные функции, $e^{-\lambda_k}$ —собственные числа оператора R_1. Максимальное собственное число $e^{-\lambda_1}$ имеет кратность 1 и равно $e^{-\pi^2/2}$. $\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$, поэтому из (11) следует при $T \to \infty$

$$R_T\varphi(x) \sim e^{-\lambda_1 T}\varphi_1(x)(\varphi_1, \varphi). \tag{12}$$

Для $\varphi = \varphi_0$ получаем

$$\mathbf{P}_T \sim \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{2}T} = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{2}x^{-2}}.$$

Это соотношение можно получить и из хорошо известных явных формул распределения $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|w(t)|$ (см., например, [7]).

Пусть теперь $A = \{f\colon \|f\|_p < 1\}$, где норму в L_p для $p \geqslant 1$ определим как

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}. \tag{13}$$

Заметим, что при $0 < p < 1$ функционал (13) не является нормой.

Теорема 3. *Для $p > 0$ при $x \to 0$*

$$\mathbf{P}(w \in xA) \sim C\exp\{-cx^{-2}\}, \tag{14}$$

где константы $C = C(p) > 0$ и $c = c(p) > 0$ зависят только от p.

Теорема 4. *Пусть $p > 1$, функция $f \in C(0, 1)$ такова, что $f(0) = 0$, $|f'(1)| < \infty$, $f' \in L_2(0, 1)$, $f'' \in L_q(0, 1)$, где $1/p + 1/q = 1$. Тогда при $x \to 0$*

$$W(f + xA) \sim e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 |f'(t)|^2 dt}\, W(xA).$$

Единообразие асимптотического поведения $W(xA)$ при $x \to 0$ в условиях теорем 1, 3 при существенном различии норм $\|f\|_C$, $\|f\|_p$ вполне объяснимо. С одной стороны, $\|f\|_p \leqslant \|f\|_C$, с другой — неравенство $\|f\|_p \leqslant C$ означает, что $\sup\limits_{t\in B}|f(t)| \leqslant 2C$ на множестве $B \subseteq [0, 1]$ меры большей, чем $1 - 2^{-p}$.

Доказательство теорем 2, 4 приведем ниже в настоящем параграфе. Доказательство теоремы 3 отнесено в § 4, где, в частности, приводятся уравнения для констант C, c и рассмотрены два примера ($p = 1$ и $p = 2$), в которых указанные константы явно вычислены. Здесь мы приведем лишь схему доказательства теоремы 3, позволяющую, однако, понять существо дела. Для этого рассмотрим однородную полугруппу операторов

$$R_T\varphi(x) = \mathbf{E}\left(e^{-\int\limits_0^T |w(t)+x|^p dt}\,\varphi(w(T) + x)\right), \tag{15}$$

действующую в $L_2(-\infty, \infty)$. Очевидно, что операторы R_T самосопряженные; можно доказать, что они вполне непрерывные, поэтому по теореме Гильберта — Шмидта справедливы соотношения (11), (12). Получим далее с помощью полугруппы R_T представление для преобразования Лапласа $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\eta}$ распределения случайной величины $\eta \equiv \|w\|_p^p = \int_0^1 |w(t)|^p\,dt$. С помощью замены $t = u\lambda^{-\alpha}$, $\alpha = 2/(2 + p)$ получаем, что

$$\lambda\eta \underset{\mathbf{P}}{=} \int_0^{\lambda^\alpha} |w(t)|^p\,dt,$$

т. е.

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E} e^{-\int\limits_0^{\lambda^\alpha} |w(t)|\,dt} = R_{\lambda^\alpha}\varphi_0(0),$$

где $\varphi_0(x) = 1$. Дополнительные трудности превносит то обстоятельство, что φ_0 не принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$. Однако можно показать, что для φ_0 тоже справедлива формула (12), что позволяет утверждать, что

$$\varphi(\lambda) \sim e^{-\lambda^{\alpha}\cdot\lambda_1}\varphi_1(0)(\varphi_1, \varphi_0). \tag{16}$$

Применяя далее (формально) к $\varphi(\lambda)$ формулу обращения и метод Лапласа, получаем, что плотность $f(x)$ случайной величины η ведет себя при $x \to 0$ как

$$f(x) \sim Ax^{-\frac{2+p}{p}} \exp\left\{-ax^{-\frac{2}{p}}\right\},$$

а плотность $\tilde{f}(x)$ случайной величины $\eta^{1/p} = \|w\|_p$ ведет себя при $x \to 0$ как

$$\tilde{f}(x) = px^{p-1}f(x^p) \sim Bx^{-3}\exp\{-bx^{-2}\}.$$

Из последнего, очевидно, получаем требуемое соотношение

$$\mathbf{P}(\|w\|_p < x) = \int\limits_0^x \tilde{f}(u)\,du \sim C\exp\{-cx^{-2}\}.$$

Доказательство теоремы 2. Известно (см. [17]), что для функции $f \in C(0, 1)$, удовлетворяющей условию $f(0) = 0$, $f' \in L_2(0, 1)$ распределение процесса $w - f$ абсолютно непрерывно относительно распределения w с плотностью

$$h(f, w) = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (f'(t))^2 dt + \int\limits_0^1 f'(t)\,dw(t)}.$$

Поэтому в силу (1)

$$\mathbf{P}(w - f \in A) = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (f'(t))^2 dt}\, \mathbf{E}\left(e^{\int\limits_0^1 f'(t)\,dw(t)};\ w \in A\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (f'(t))^2 dt}\, \mathbf{E}\left(e^{w(1)f'(1) - \int\limits_0^1 w(t)f''(t)\,dt};\ w \in A\right). \tag{17}$$

В условиях теоремы 2, когда $A = xA(g_-, g_+)$, $x \to 0$, очевидно, что функция, стоящая под знаком математического ожидания, ограничена и стремится к 1. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. При $w \in xA$ в силу неравенства Гельдера выполняется

$$\left|\int\limits_0^1 w(t)\,f''(t)\,dt\right| \leqslant \|w\|_p \cdot \|f''\|_q \leqslant Cx\|f''\|_q \to 0, \tag{18}$$

поэтому (см. (17)) для доказательства теоремы 4 достаточно доказать, что для любого $N < \infty$

$$\mathbf{E}(e^{\pm N|w(1)|};\ w \in xA) \sim \mathbf{P}(w \in xA). \tag{19}$$

Поскольку для любого $\nu > 0$

$$\mathbf{E}(e^{N|w(1)|};\ w \in xA) \leqslant e^{\nu}\mathbf{P}(w \in xA) +$$
$$+ \mathbf{E}(e^{N|w(1)|};\ w \in xA,\ N|w(1)| \geqslant \nu),$$

для оценки сверху в (19) достаточно доказать, что

$$\mathbf{E}(e^{N|w(1)|};\ w \in xA,\ N|w(1)| \geqslant \nu) = o(\mathbf{P}(w \in xA)). \tag{20}$$

Соотношение (20) является достаточным и для получения оценки снизу в (19), поскольку

$$\mathbf{E}(e^{-N|w(1)|};\ w\in xA)\geqslant e^{-\nu}\mathbf{P}(w\in xA,\ N|w(1)|\leqslant\nu)\geqslant$$
$$\geqslant e^{-\nu}[\mathbf{P}(w\in xA)-\mathbf{P}(w\in xA,\ N|w(1)|\geqslant\nu)].$$

Докажем соотношение (20), в котором для простоты будем считать $N=1$, $\nu=1$. Легко видеть, что

$$\mathbf{E}(e^{|w(1)|};\ \|w\|_p<x,\ |w(1)|\geqslant 1)=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}e^{j+1}\mathbf{P}(\|w\|_p<x,\ j+1>|w(1)|\geqslant j)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}e^{j+1}\mathbf{P}(\|w\|_p<x,\ |w(1)|\geqslant j).$$

Для оценки каждого слагаемого в последней сумме докажем, что для $t=x^p2^pj^{-p}$

$$\{\|w\|_p<x,\ |w(1)|\geqslant j\}\subseteq\left\{\|w\|_p<x,\ \sup_{1-t\leqslant u\leqslant 1}|w(u)-w(t)|>j/2\right\}. \quad (21)$$

В последнем можно убедиться так: если $\sup\limits_{1-t\leqslant u\leqslant 1}|w(u)-w(t)|\leqslant j/2$, то на отрезке $[1-t,\ 1]$ траектория $|w(u)|$ будет строго больше, чем $j/2$, и, стало быть,

$$\int_{1-t}^{1}|w(u)|^p\,du>(j/2)^p\,t>x^p,$$

что невозможно. Из (21) следует, что

$$\mathbf{P}(\|w\|_p<x,\ |w(1)|\geqslant j)\leqslant\mathbf{P}\left(\int_0^t|w(u)|^p\,du<x^p,\ \sup_{1-t\leqslant u\leqslant 1}|w(u)-w(t)|\geqslant j/2\right)=$$
$$=\mathbf{P}\left(\int_0^t|w(u)|^p\,du<x^p\right)\cdot\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|w(u)|\geqslant j/2\right)\equiv A\cdot B.$$

Сделав замену $u=(1-t)y$, получаем

$$A=\mathbf{P}\left(\left(\int_0^{1-t}|w(u)|^p\,du\right)^{1/p}\leqslant\frac{x}{(1-t)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}}\right),$$

поэтому, в силу теоремы 3,

$$A\leqslant C\exp\left\{-cx^{-2}(1-t)^{\left(1+\frac{2}{p}\right)}\right\}.$$

Для оценки B заметим, что

$$B=\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\frac{|w(u)|}{\sqrt{t}}\geqslant\frac{j}{2\sqrt{t}}\right)\leqslant 2e^{-\frac{j^2}{2t}}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}(e^{|w(1)|};\ \|w\|_p<x,\ |w(1)|\geqslant 1)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}e^{j+1}Ce^{-cx^{-2}(1-t)^{(1+2/p)}-j^2/2t}, \quad (22)$$

где $t=(2x)^pj^{-p}$. Очевидно, что сумма в (22) есть $o\left(e^{-cx^{-2}}\right)$, так что соотношение (20), а вместе с ним и теорема 4 доказаны.

При переходе к грубой асимптотике в теореме 2, т. е. асимптотике $\ln W(j+xA(g_-,\ g_+))$, ограничения на функции f, g_-, g_+ можно существенно ослабить.

Теорема 5. *Пусть функции* $f, g_-, g_+ \in C(0, 1)$ *удовлетворяют условиям:* $f(0)=0$, $g_-(0)<0<g_+(0)$, $g_-(t)<g_+(t)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Тогда при* $x \to 0$

$$\ln \mathbf{P}(w \in f + xA(g_-, g_+)) \sim -\frac{\pi^2}{8x^2}\int_0^1 (g_+(t)-g_-(t))^{-2}\,dt.$$

Теорема 5 при $f \equiv 0$ доказана в [18]. Доказательство при $f \neq 0$ практически не отличается от доказательства при $f=0$, и по этой причине мы его здесь не приводим.

Теорема 3 (и даже более слабый ее вариант) позволяют доказать закон повторного логарифма в форме Чжуна для винеровского процесса в L_p, $p \geqslant 1$.

Теорема 6. *Для произвольного* $p \geqslant 1$ *с вероятностью* 1

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\left(\int_0^t |w(u)|^p\,du\right)^{1/p}}{\sqrt{t}}\sqrt{\ln\ln t} = \sqrt{c}, \tag{23}$$

где константа $c=c(p)>0$ *определена в теореме* 3.

Доказательство теоремы 6 непосредственно следует из общей теоремы в [19] и теоремы 3.

Закон Чжуна был известен ранее для равномерной нормы (см. [20]): *с вероятностью* 1 *выполняется соотношение*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t}|w(u)|}{\sqrt{t}}\sqrt{\ln\ln t} = \frac{\pi}{\sqrt{8}}. \tag{24}$$

Утверждения (23) и (24) справедливы и для броуновского моста $\mathring{w}_t(u)=w(u)-uw(t)$, $0 \leqslant u \leqslant t$. В этом нетрудно убедиться, если заметить, что грубая теорема о малых уклонениях для броуновского моста имеет в точности такой же вид, что и для винеровского процесса (для норм $\|f\|_C$ и $\|f\|_p$).

Можно указать еще один класс процессов, для которых справедливы утверждения, аналогичные теореме 5. Это класс устойчивых процессов $\xi=\xi(t)$ с параметром α, $0<\alpha\leqslant 2$, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{P}(\xi(t)<x)=\mathbf{P}(\xi(1)<xt^{-1/\alpha})$$

(так называемые *строго устойчивые процессы*).

Теорема 7. *Пусть* $0<\mathbf{P}(\xi(1)<0)<1$. *Если* $g_\pm \in C(0, 1)$, $g_-(0)<0<g_+(0)$, $g_-(t)<g_+(t)$ *при* $0\leqslant t\leqslant 1$, *то при* $x\to 0$

$$\ln \mathbf{P}(\xi \in xA(g_-, g_+)) \sim -cx^{-\alpha}\int_0^1 (g_+(t)-g_-(t))^{-\alpha}\,dt,$$

где константа $c>0$ *зависит только от распределения* $\xi(1)$.

Теорема 7 доказана в [18].

Аналогично предыдущему, из теоремы 7 вытекает закон повторного логарифма в форме Чжуна для строго устойчивых процессов (см. [20]): *с вероятностью* 1 *выполняется соотношение*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t}|\xi(u)|}{t^{1/\alpha}}(\ln\ln t)^{1/\alpha} = c^{1/\alpha},$$

где постоянная c *та же, что и в теореме* 7.

§ 3. МАЛЫЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ СУММАМИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\xi_{1,n}, \ldots, \xi_{n,n}$; $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность серий случайных величин,

$$S_{k,n} = \sum_{j=1}^{k} \xi_{j,n}, \quad \mathbf{E}\xi_{j,n} = 0, \quad b_{j,n}^2 = \mathrm{D}\xi_{j,n} < \infty,$$

$$B_n^2 = \mathrm{D}S_{n,n} = \sum_{j=1}^{n} b_{j,n}^2, \quad b_{0,n}^2 = S_{0,n} = 0.$$

Образуем на отрезке [0, 1] случайную ломаную $s_n(t)$ с узлами в точках $\left(t_k, S_{k,n}B_n^{-1}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, где

$$t_0 = 0, \quad t_k = B_n^{-2} \sum_{j=1}^{k} b_{j,n}^2,$$

так что в точках $t = t_0, t_1, \ldots, t_n$ процесс $s_n(t)$ принимает значения $s_n(t_k) = S_{k,n}B_n^{-1}$, и между точками t_k, t_{k+1} меняется линейно.

Если при некотором $r > 2$

$$L_r \equiv B_n^{-2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,|\,\xi_{j,n}|^r \to 0$$

при $n \to \infty$, то в соответствии с принципом инвариантности для любого фиксированного множества A из борелевской σ-алгебры в $C(0, 1)$ такого, что $W(\partial A) = 0$ (∂A — граница A) имеет место сходимость

$$\mathbf{P}(s_n \in A) \to \mathbf{P}(w \in A).$$

Используя известные оценки скорости сходимости в этом соотношении, можно сводить задачу изучения асимптотики $\mathbf{P}(s_n \in xA)$ к задаче о поведении $\mathbf{P}(w \in xA)$ (и наоборот) при достаточно медленно убывающих или растущих последовательностях $x = x(n)$. Однако получающийся при этом интервал допустимых последовательностей удовлетворительным назвать нельзя. Более продвинутые (но тоже не окончательные) результаты получаются, если использовать наилучшую возможную потраекторную близость $s_n(t)$ и $w(t)$.

Пусть $z = z(n)$ есть некоторая сходящаяся к 0 последовательность. По аналогии с терминологией для больших уклонений (см. [1]) мы будем говорить, что имеет место (f, A, z)-*принцип инвариантности в области малых уклонений*, если

$$\mathbf{P}(s_n \in f + xA) \sim W(f + xA) \tag{25}$$

для любого $x \to 0$, $x \gg z$ (будем писать $x \gg z$, если $z = o(x)$).

При изучении условий, при которых справедлив (f, A, z)-принцип инвариантности, мы будем исходить из того, что множество A при подходящем f относится к одному из двух типов (см. § 2):

I. $W(f + xA) \geqslant Cx^{\beta}$ при $C > 0$, $\beta > 0$, $x \to 0$;

II. $W(f + xA) \geqslant Ce^{-\alpha x^{-2}}$ при $C > 0$, $\alpha > 0$, $x \to 0$.

Второе условие, очевидно, всегда выполнено, если множество A содержит какую-нибудь окрестность точки $g = 0$ в норме $\|f\|_C$ или $\|f\|_p$, а f — достаточно гладкая функция.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия*:

1) $W([\partial(f + xA)]^{\delta}) = o(W(f + xA))$ при $\delta = o(x^{\gamma})$, *если* $x \to 0$, *где* $\gamma = 1$ *в случае* I; $\gamma = 3$ *в случае* II ($[A]^{\delta}$ — δ-*окрестность множества* A, ∂A — *граница множества* A *в равномерной норме*);

2) (L): $L_r \to 0$ *при некотором* $r > 2$ *или*
(C): $B_n \to \infty$ *при некотором* $h > 0$

$$h\mathbf{E}\,|\xi_{j,n}|^3\, e^{h|\xi_{j,n}|} \leqslant \mathbf{E}\,|\xi_{j,n}|^2, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда справедлив (f, A, z)-*принцип инвариантности в области малых уклонений, где последовательность* $z = z(n)$ *для разных комбинаций условий* I, II (L), (C) *определяется так*:

	(L)	(C)
I	$z = L_r^{1/r+\beta}$	$z = B_n^{-1} \ln B_n$
II	$z = \sqrt{\ln L_r}$	$z = B_n^{-1/5}$

Доказательство теоремы по сути есть следствие оценок А. И. Саханенко [21] возможной близости траекторий $s_n(t)$ и $w(t)$, заданных на одном вероятностном пространстве. Оно близко к доказательству аналогичных утверждений для вероятностей больших уклонений [1]. Согласно этим оценкам процессы $s_n(t)$ и $w(t)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что

$$\mathbf{P}(\| s_n - w \| \geqslant x) \leqslant C_r \frac{L_2}{x^2} \quad \text{для всех} \quad r > 2. \tag{26}$$

Если же выполнено условие (C), то

$$\mathbf{P}(\| s_n - w \| \geqslant x) \leqslant (1 + hB_n)\, e^{-chxB_n}. \tag{27}$$

Так как доказательства в случаях (L), (C) довольно близки, то мы остановимся лишь на случае (C). Примем для простоты $h = 1$, $f \equiv 0$ (для произвольных h и f все рассуждения сохраняются). Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(s_n \in xA) &\leqslant (1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n} + \mathbf{P}(s_n \in xA, \| s_n - w \| < \delta) \leqslant \\ &\leqslant (1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n} + \mathbf{P}\big(w \in xA \cup [\partial (xA)]^\delta\big) \leqslant \\ &\leqslant (1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n} + \mathbf{P}(w \in xA) + \mathbf{P}\big(w \in [\partial (xA)]^\delta\big).\end{aligned} \tag{28}$$

Рассмотрим сначала случай I. Первое слагаемое в правой части (28) не превосходит $2B_n e^{-c\delta B_n}$, второе — не меньше, чем cx^β. Поэтому при $x \gg \delta = C_1 B_n^{-1} \ln B_n$ первое слагаемое при подходящем C_1 будет пренебрежимо мало по сравнению со вторым. Последнее слагаемое в (28) в силу условия 1) является при $x \gg \delta$ пренебрежимо мало по сравнению со вторым. Итак, мы получили, что

$$\mathbf{P}(s_n \in xA) \leqslant \mathbf{P}(w \in xA)\,(1 + o(1))$$

при $x \gg B_n^{-1} \ln B_n$. С другой стороны, при тех же условиях

$$\begin{aligned}W(xA) &\leqslant W\big(xA \setminus [\partial (xA)]^\delta\big) + W\big([\partial (xA)]^\delta\big) \leqslant (1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n} + \\ &+ \mathbf{P}\big(w \in xA \setminus [\partial (xA)]^\delta\big) + W\big([\partial (xA)]^\delta\big) \leqslant (1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n} + \\ &+ \mathbf{P}(s_n \in xA) + W\big([\partial (xA)]^\delta\big).\end{aligned}$$

Итак, мы показали, что в случае I, (C) справедлив (j, A, z)-принцип инвариантности при $z = B_n^{-1} \ln B_n$.

Пусть теперь выполнено условие II. В силу условия 1) последнее слагаемое в правой части (28) пренебрежимо мало по сравнению со вторым слагаемым при $x \gg \delta^{1/3}$. Так как первое слагаемое в правой части (28) равно $(1 + B_n)\, e^{-c\delta B_n}$, а второе не меньше, чем $Ce^{-\alpha x^{-2}}$, то решая уравнение

$$B_n e^{-c\delta B_n} = e^{-\alpha \delta^{-2/3}},$$

получаем, что первое слагаемое также будет пренебрежимо мало при $\delta = B_n^{-1/5}$. Повторяя эти рассуждения для оценки в другую сторону, получим, что в условиях II, (C) справедлив (f, A, z)-принцип инвариантности при $z = B_n^{-1/5}$.

Случаи I, (L) и II, (L) рассматриваются аналогично. Теорема 8 доказана.

Для одинаково распределенных слагаемых ξ_k, не зависящих от n, имеем $B_n = \sigma\sqrt{n}$, и параметр z в условиях I, (C) превращается в $n^{-1/10}$, в условиях II, (C) — в $\ln n/\sqrt{n}$.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 8 видно, что утверждение этой теоремы сохранится для последовательности любых процессов $\xi_n(t)$, удовлетворяющих неравенствам (26) или (27). В частности, это может быть последовательность $\xi_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, процессов с независимыми приращениями, удовлетворяющая (26) или (27).

Следует сразу отметить, что в связи с тем, что при доказательстве теоремы 8 мы использовали методы, не адекватные природе явлений (вероятности малых уклонений мало связаны с условиями (L) и (C)), то результаты теоремы 8, если иметь в виду параметр z, не являются окончательными. Это можно проиллюстрировать следующим утверждением, в котором приведены условия, более тесно связанные с существом дела.

Теорема 9. *Пусть ξ_k одинаково распределены, имеют ограниченную плотность распределения $p(t)$, $g_\pm(t) \equiv g_\pm$ не зависят от t. Тогда для $x \to 0$, $x\sqrt{n} \to \infty$*

$$\mathbf{P}(s_n \in xA(g_-, g_+)) \sim \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{g_+ + g_-}{g_+ - g_-}\right)\lambda^n(x\sqrt{n}),$$

где $\lambda(a)$ — максимальное собственное число оператора R_a в $L_2(-1, 1)$:

$$R_a\psi(x) = a\int_{-1}^{1} p(a(y-x))\psi(y)\,dy.$$

При $a \to \infty$ справедлива оценка

$$\ln\lambda(a) = -\frac{\pi^2}{8\alpha^2}\sigma^2 + o\left(\frac{1}{a^2}\right),$$

где $\sigma^2 = D\xi_1$.

Теорема 9 доказана в [22]. Из нее следует, что в тех случаях, когда справедливо разложение

$$\ln\lambda(a) = -\frac{\pi^2}{8a^2}\sigma^2 + \frac{c}{a^3} + o(a^{-3}), \tag{29}$$

можно утверждать, что

$$\mathbf{P}(\|s_n\| < x) \sim \lambda^n(x\sqrt{n}) \sim$$
$$\sim \exp\left\{-\frac{\pi^2}{2x^2}\sigma^2 + \frac{C}{x^3\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{x^3\sqrt{n}}\right)\right\} \sim \mathbf{P}(\|w\| < x)$$

при $x^3\sqrt{n} \to 0$, т. е. при $x \gg n^{-1/6}$. Другими словами, для рассмотренных множеств A при выполнении (29) имеет место $(0, A, n^{-1/6})$-принцип инвариантности. Вопрос об условиях, при которых имеет место (29) (это трудная задача), остается открытым. Отметим еще, что для центрированного показательного распределения в формальном разложении для $\lambda(a)$ в (29) число c не равно 0; это говорит о том, что (f, A, z)-принцип инвариантности при $z \ll B_n^{-1/3}$ для множеств вида $A = A(g_-, g_+)$, вообще говоря, не имеет место.

Для других множеств A теорема 8 также не дает результатов, близких к оптимальным. Например, если $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = 1$ и существует ограниченная плотность распределения ξ_1, то для множеств вида

$$A = \{f\colon\ |f(1)| < 1\} \tag{30}$$

для всех $x = x(n) \to 0$ справедливо

$$\mathbf{P}(s_n \in xA) = \mathbf{P}(|s_n(1)| < x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \sim W(xA). \tag{31}$$

Если же $x \gg n^{-1/2}$ и не предполагается ограниченная плотность, то (31) можно обеспечить условием $\mathbf{E}|\xi_1|^3 < \infty$ (т. е. условием на «хвост» распределения), используя известную оценку $c/\sqrt{n}$ в центральной предельной теореме. Таким образом, при выполнении одного из названных выше условий для множеств A вида (30) имеет место $(0,\ A,\ 1/\sqrt{n})$-принцип инвариантности. Нетрудно понять, что $(f,\ A,\ z)$-принцип инвариантности при $z \ll 1/\sqrt{n}$, вообще говоря, невозможен. В этом примере проблематика малых уклонений непосредственно смыкается с локальной предельной теоремой, а разнородность условий (на плотность и на моменты), обеспечивающих выполнение (31), носит тот же характер, что и в теоремах 8, 9.

Аналогичным образом, для множеств A вида

$$A = \left\{f\colon\ \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} f(t) < 1\right\} \tag{32}$$

справедливы неравенства (см. [23])

$$\left|\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} s_n(t) < 1\right) - \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} W(t) < 1\right)\right| \leqslant \frac{c}{1 + |x|^3} \frac{R_n}{B_n},$$

где $R_n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbf{E}|\xi_{k,n}|^3$. Таким образом, для множеств A вида (32) справедлив $(0,\ A,\ R_n B_n^{-1})$-принцип инвариантности. В случае, когда распределение $\xi_{k,n}$ не зависит от k и n, $\mathbf{D}\xi_1 > 0$, мы получаем $R_n B_n^{-1} = c/\sqrt{n}$.

Аналогично теореме 8, можно рассмотреть задачу об $(f,\ A,\ z)$-грубом принципе инвариантности в области малых уклонений, когда

$$\ln \mathbf{P}(s_n \in f + xA) \sim \ln W(f + xA)$$

при $x \to 0$, $x \gg z$.

Результаты при этом будут теми же, что в теореме 8, с той лишь разницей, что условие 1) теоремы 8 можно заменить более слабым условием: при $\delta = o(x^\gamma)$

$$\ln W([\partial(f + xA)]^\delta) \leqslant \ln W(f + xA)(1 + o(1)).$$

При этом очевидно, что замечание 1 к теореме 8 сохраняет силу. Для сравнения, как и в теореме 8, можно привести следующие утверждения для конкретных множеств.

Теорема 10. *Пусть $\xi_{k,n} = \xi_k$ одинаково распределены и не зависят от n, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$, $x \to 0$, $x\sqrt{n} \to \infty$. Тогда для множеств $A(g_-,\ g_+)$ с $g_\pm \in C(0,\ 1)$, $g_-(0) < g_+(0)$, $g_-(t) < g_+(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f(t) \in C(0,\ 1)$ справедливо соотношение*

$$\ln \mathbf{P}(s_n \in f + xA(g_-,\ g_+)) \sim \ln W(f + xA(g_-,\ g_+)).$$

При $f = 0$ теорема 10 доказана в [18]. Доказательство при $f \neq 0$ практически не изменяется, поэтому мы его не приводим.

Замечание 2. Утверждение теоремы 10 сохранится, если вместо процесса $s_n = s_n(t)$ рассмотреть процесс $\xi_n = \xi_n(t) = \xi(nt)/\sqrt{n}$, где $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, $\mathbf{E}\xi(1) = 0$, $\mathbf{E}\xi(1)^2 = 1$.

Замечание 3. Утверждение, аналогичное теореме 10, справедливо и для случая, когда слагаемые $\xi_{k,n} = \xi_k$ принадлежат области притяжения строго устойчивого распределения F_α, $0 < \alpha \leqslant 2$ (см. [18]).

Теорема 11. *Пусть* $\xi_{k,n} = \xi_k$ *одинаково распределены и не зависят от* n, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$, $x \to 0$, $x\sqrt{n} \to \infty$. *Тогда для произвольного* $p > 0$

$$\ln \mathbf{P}(\|s_n\|_p < x) \sim -cx^{-2},$$

где константа $c = c(p)$ *та же, что и в теореме* 3.

Доказательство теоремы 11 мы приведем в § 5. Таким образом, в условиях теорем 10, 11 имеет место $(f, A, 1/\sqrt{n})$-грубый принцип инвариантности.

Из грубой теоремы о малых уклонениях для ломаных следует вариант закона повторного логарифма в форме Чжуна.

Теорема 12. *Пусть* $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$. *Тогда с вероятностью* 1 *для* $p \geqslant 1$

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |s_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \sqrt{\ln\ln n} = \sqrt{c},$$

где константа c *определена в теореме* 3.

Доказательство теоремы 12 следует из теоремы 11 и общей теоремы в [19].

Замечание 4. Теоремы 11 и 12 справедливы и для ломаных, построенных по суммам независимых, одинаково распределенных случайных векторов. Доказательства при этом сохраняются полностью.

Закон повторного логарифма Чжуна ранее (см. [24]) был известен для равномерной нормы: *с вероятностью* 1 *имеет место соотношение*

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |s_n(t)| \sqrt{\ln\ln n} = \frac{\pi}{\sqrt{8}}\sigma,$$

где $\sigma^2 = \mathbf{E}\xi_1^2$. Разумеется, это утверждение следует и из теоремы 10 и общей теоремы в [19]. Аналогичное утверждение имеет место и для случая сходимости к строго устойчивому распределению F_α с параметром α, $0 < \alpha \leqslant 2$ (см. [20]).

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ УТВЕРЖДЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С МАЛЫМИ УКЛОНЕНИЯМИ ВИНЕРОВСКОЙ МЕРЫ СФЕР В L_p

В настоящем параграфе доказан ряд утверждений, из которых, в частности, выведена теорема 3 (§ 2).

Для $p > 0$, $\lambda \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ обозначим

$$M(p, \lambda) = \mathbf{E}\exp\{-\lambda\|w\|_p^p\},$$

$$f(p, x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}(\|w\|_p^p < x),$$

где $\|f\|_p$ — норма в $L_p(0, 1)$ (см. (13)). Ниже найдены представления функций $M(p, \lambda)$ и $f(p, x)$ в виде рядов специальных функций. Получена асимптотика при $x \to 0$ плотности $f(p, x)$. Основная идея (см. [13, 25]) состоит в представлении функции $M(p, \lambda)$ в виде

$$M(p, \lambda) = R_{t(p,\lambda)}\varphi_0(0), \quad \text{где} \quad t(p, \lambda) = \lambda^{\frac{2}{2+p}},$$

(см. (15)) и использовании теоремы Гильберта — Шмидта.

Обозначим $\psi(\alpha, x)$ плотность спектрально-положительного устойчивого распределения с параметром α, $0 < \alpha < 1$, и преобразованием Лапласа * (см. [26, с. 518])

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\psi(\alpha, x)\,dx = e^{-\lambda^\alpha}.$$

Известно (см. [27, с. 72]), что при $x \to 0$

$$\psi(\alpha, x) \sim a x^{-\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}} \exp\left\{-bx^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\}, \tag{33}$$

где $a = \dfrac{\alpha^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)}}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}}$, $\quad b = (1-\alpha)\,\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha\right)\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

Ниже будет установлено, что все собственные числа $\{-\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ оператора

$$A\varphi(x) = 1/2\varphi''(x) - |x|^p\varphi(x) \tag{34}$$

удовлетворяют соотношениям

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \quad \sum_{k=1}^\infty e^{-\varepsilon\lambda_k} < \infty \tag{35}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема 13. *При любых $p > 0$, $x \geqslant 0$ справедливо*

$$f(p, x) = \sum_{k=1}^\infty A_k \psi\left(\frac{2}{2+p}, x\lambda_k^{-\frac{2+p}{2}}\right), \tag{36}$$

где числа $A_k = A_k(p)$ зависят только от p и допускают оценку

$$|A_k(p)| \leqslant C(p)\lambda_k^{\frac{5p+4}{4p}}, \tag{37}$$

так что в силу (33) и (34) ряд (36) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, a]$ для любого $a < \infty$.

Следствие 1. *При $x \to 0$*

$$f(p, x) \sim A_1 a \lambda_1^{\frac{(2+p)^2}{2}} x^{-\frac{2+p}{p}} \exp\left(-b\lambda_1 x^{-\frac{2}{p}}\right),$$

где A_1 и λ_1 из (36), a и b из (32) при $\alpha = \dfrac{2}{2+p}$.

Обозначим

$$\tilde{f}(p, x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}(\|w\|_p < x);$$

легко видеть, что

$$\tilde{f}(p, x) = px^{p-1}f(p, x^p).$$

Следствие 2. *При $x \to 0$*

$$\tilde{f}(p, x) \sim Cx^{-3}\exp(-cx^{-2}),$$

где $C = C(p) = A_1 a \lambda_1^{\frac{(2+p)^2}{2}} p$, $\quad c = c(p) = b\lambda_1$.

Доказательство теоремы 3 (§ 2) вытекает непосредственно из следствия 2.

Замечание 5. Теорема 13 и следствия 1, 2 справедливы и для k-мерного винеровского процесса $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_k(t))$. Тут нужно рассматривать норму

$$\|w\|_p = \left(\int_0^1 \left(w_1^2(t) + \ldots + w_k^2(t)\right)^{p/2} dt\right)^{1/p};$$

при этом доказательства полностью сохранятся.

---

* На возможность использования в рассматриваемой задаче плотностей $\psi(\alpha, x)$ обратил внимание одного из авторов А. В. Нагаев.

Доказательство теоремы 13. В гильбертовом пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ вещественных функций $\varphi(x)$ со скалярным произведением $(\psi, \varphi) = \int \varphi(x)\psi(x)\,dx$ рассмотрим полугруппу операторов $R_t = R_t(p)$, $p > 0$, определенных равенством

$$R_t\varphi(x) = \mathbf{E}e^{-\int_0^t |w(u)+x|^p du}\varphi(w(t)+x).$$

Пусть $r_t(x, y)$ — ядро оператора R_t, так что

$$R_t\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r_t(x, y)\varphi(y)\,dy.$$

Лемма 1. *Для всех* $t > 0$, $p > 0$

$$r_t(x, y) \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{t}}\left(e^{-c_2\frac{x^2+y^2}{t}} + e^{-c_3 t\frac{(x^2+y^2)^{p/2}}{8^p}}\right), \tag{38}$$

где $0 < c_i < \infty$ — *абсолютные константы*, $i = 1, 2, 3$.

Лемма 1 будет доказана несколько позже.

Из леммы 1 следует, что для любого $t > 0$

$$\int\int r_t^2(x, y)\,dx\,dy < \infty,$$

поэтому (см. [16, с. 461]) операторы R_t вполне непрерывны в $L_2(-\infty, \infty)$. Поскольку они самосопряженные, то по теореме Гильберта — Шмидта (см. [16, с. 246])

$$r_t(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k(y), \tag{39}$$

где $e^{-\lambda_k}$, $\psi_k(x)$ — соответственно k-е собственное число и k-й собственный нормированный вектор оператора R_1 (занумерованные так, что $\lambda_1 \leqslant \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$); при этом для любого $\varepsilon > 0$ конечен ряд $\sum \exp\{-\lambda_k\varepsilon\}$. Очевидно (см. (38)), что для любого $\varphi \in L_2(-\infty, \infty)$ справедливо $\|R_t\varphi\| \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому $\lambda_1 > 0$. Далее, для любого $\varphi \in L_2(-\infty, \infty)$ при $t \to 0$ справедливо $\|R_t\varphi - \varphi\| \to 0$; поэтому ортобазис $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является полным в $L_2(-\infty, \infty)$. Вычисляя далее инфинитезимальный оператор полугруппы R_t, приходим к оператору A (см. (34)). Таким образом, числа λ_k и функции ψ_k удовлетворяют соотношениям

$$A\psi_k = -\lambda_k\psi, \quad (\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}. \tag{40}$$

Оценим $|\psi_k(x)|$. Поскольку

$$e^{-\lambda_k t}\psi_k(x) = \int r_t(x, y)\psi_k(y)\,dy,$$

то

$$|\psi_k(x)| \leqslant e^{\lambda_k t}\left(\int r_t^2(x, y)\,dy\right)^{1/2}.$$

Ядро оператора R_t допускает оценку (см. доказательство леммы 1)

$$r_t(x, y) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}},$$

поэтому для любого $t > 0$ справедливо

$$\sup_x |\psi_k(x)| \leqslant ct^{-1/4}e^{\lambda_k t},$$

где $c < \infty$ — абсолютная константа. Выбирая далее $t = \lambda_k^{-1}$, получим

$$\sup_x |\psi_k(x)| \leqslant c\lambda_k^{1/4}. \tag{41}$$

Оценим теперь $a_k = \int \psi_k(x)\,dx$. Поскольку

$$|a_k|\,e^{-\lambda_k t} \leqslant \int\int r_t(x, y)\,|\psi_k(y)|\,dy\,dx,$$

то в силу леммы 1 и неравенства (41) получаем

$$|a_k| \leqslant c e^{\lambda_k t}\lambda_k^{1/4}\int\int \frac{c_1}{\sqrt{t}}\left(e^{-c_2\frac{(x^2+y^2)}{t}} + e^{\frac{-c_3 t(x^2+y^2)}{8^p}}\right)dx\,dy.$$

Из последнего неравенства получаем, что для любого $t > 0$

$$|a_k| \leqslant e^{\lambda_k t} c\left(\sqrt{t} + t^{-(1/2+2/p)}\right)\lambda_k^{1/4}.$$

Полагая $t = \lambda_k^{-1}$, окончательно устанавливаем, что

$$|a_k| \leqslant c\left(\lambda_k^{-1/4} + \lambda_k^{\frac{2p+4}{2p}}\right) \leqslant c_1\lambda_k^{\frac{p+2}{p}}, \tag{42}$$

где $c_1 = c_1(p) < \infty$.

Обратимся теперь к функции $M(p, \lambda)$. Поскольку

$$M(p, \lambda) = R_{t(p,\lambda)}\varphi_0(0), \quad t(p, \lambda) = \lambda^{2/(2+p)},$$

где $\varphi_0(x) = 1$, то получаем в силу (39)

$$M(p, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\lambda_k \lambda^{2/(2+p)}}. \tag{43}$$

При этом $B_k = a_k\psi_k(0)$, $|B_k| \leqslant c\lambda_k^{1/4+(p+2)/p}$, так что в силу (35) ряд (43) сходится абсолютно и равномерно по $\lambda \in [\varepsilon, \infty)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим характеристические функции

$$g(t) = \frac{M(p, 1-it)}{M(p, 1)} = \int_0^{\infty} e^{itx} r(x)\,dx,$$

$$g_k(t) = e^{-\lambda_k(1-it)^{2/(2+p)}+\lambda_k} = \int_0^{\infty} e^{itx} r_k(x)\,dx,$$

где

$$r(x) = e^{-x} f(p, x)/M(p, 1);$$

$$r_k(x) = e^{-x+\lambda_k-(2+p)/p}\lambda_k\psi\left(2/(2+p), x\lambda_k^{-(2+p)/2}\right),$$

$$k = 1, 2, \ldots.$$

В силу (43) справедливо

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k(t), \tag{44}$$

где $b_k = a_k\psi_k(0)\,e^{-\lambda_k}/M(p, 1)$. Поскольку ряд $\sum |b_k|$ конечен, то из (44) следует, что

$$e^{-x} f(p, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-x}\psi\left(\frac{p}{2+p}, x\lambda_k^{-\frac{2+p}{2}}\right), \tag{45}$$

где $A_k = \psi_k(0)\,a_k\lambda_k^{-(2+p)/2}$, и ряд (45) сходится в $L_2(0, \infty)$. Остается заметить, что в силу оценок (41) и (42) числа A_k в (45) и (36) допускают оценку (37). Теорема 13 доказана.

Рассмотрим два примера, где собственные числа и собственные функции оператора R_t найдены явно.

Пример 1. $p=1$. Пусть $v(x)$ — функция Эйри (см. [28]), т. е. единственное решение уравнения

$$\frac{1}{2}v''(x)-xv(x)=0,$$

удовлетворяющее условиям $v(\infty)=0$, $v(0)=1$. Обозначим через α_k и β_k нули функций $v'(x)$ и $v(x)$ соответственно. Известно [28], что они отрицательные, строго чередуются и их счетное число, так что

$$0>\alpha_1>\beta_1>\alpha_2>\beta_2\ldots$$

Положим $\lambda_{2k-1}=-\alpha_k$, $\lambda_{2k}=-\beta_k$, $k=1, 2, \ldots,$

$$\psi_k(x)=\frac{1}{c_k}\frac{x^k}{|x|^k}v(|x|-\lambda_k), \tag{46}$$

где числа c_k таковы, что $(\psi_k, \psi_k)=1$. Легко видеть, что функции (46) удовлетворяют уравнению

$$A\psi_k(x)\equiv\frac{1}{2}\psi_k''(x)-|x|\psi_k(x)=-\lambda_k\psi_k(x),$$

т. е. составляют ортбазис оператора $R_t(1)$ (см. (40)).

Пример 2. $p=2$. В этом случае оператор A имеет вид

$$A\varphi(x)=\frac{1}{2}\varphi''(x)-x^2\varphi(x). \tag{47}$$

Обозначим

$$\psi_k(x)=2^{1/4}e^{-x^2}H_k(x\sqrt{2}),$$

где $H_k(x)$ — полиномы Эрмита (см. [29, с. 114]), $\lambda_k=k+1/2$, $k=1, 2, \ldots$. Поскольку для оператора (47) $A\psi_k(x)=-\lambda_k\psi_k(x)$, то ортбазис, соответствующий оператору $R_t(2)$, построен.

Нам осталось провести

Доказательство леммы 1. Введем функцию $f_{0,t}^{x,y}(u)=x+\frac{u}{t}(y-x)$ и процесс $\overset{\circ}{w}_t(u)=w(u)-uw(t)$, $0\leqslant u\leqslant t$. Очевидно, что ядро $r_t(x, y)$ оператора R_t представляется в виде

$$r_t(x,y)=\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right)\overset{\circ}{r}_t(x,y), \tag{48}$$

где

$$\varphi(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},$$

$$\overset{\circ}{r}_t(x,y)=\mathbf{E}\exp\left\{-\int_0^t\left|\overset{\circ}{w}_t(u)+f_{0,t}^{x,y}(u)\right|^p du\right\}.$$

Оценим $\overset{\circ}{r}_t(x, y)$. Пусть $A(x, y)=\min(|x|, |y|)$, если x, y — одного знака; $A(x, y)=0$, если x, y — разных знаков. Тогда

$$\overset{\circ}{r}_t(x,y)\leqslant e^{-t\left(\frac{A(x,y)}{2}\right)^p}+\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\overset{\circ}{w}_t(u)|\geqslant\frac{A(x,y)}{2}\right). \tag{49}$$

Оценим

$$I\equiv\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|\overset{\circ}{w}_t(u)|\geqslant\frac{A(x,y)}{2}\right)=\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}|\overset{\circ}{w}_1(u)|\geqslant\frac{A(x,y)}{(2\sqrt{t})}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}\overset{\circ}{w}_1(u)\geqslant\frac{A(x,y)}{(2\sqrt{t})}\right).$$

Далее, поскольку при $x>0$ справедлива оценка [17, с. 169],

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}\overset{\circ}{w}_1(u)>x\right)\leqslant e^{-2x^2},$$

получаем

$$\mathrm{I}\leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{A^2(x,y)}{t}}. \tag{50}$$

Таким образом, в силу (48), (49) и (50) получим

$$r_t(x,y)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,2\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2t}-\frac{A^2(x,y)}{2t}}+\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2t}-t\frac{A^p(x,y)}{2^p}}\right).$$

Если $T^2=x^2+y^2$, то либо $|x-y|\geqslant T/2$, либо $A(x,y)\geqslant T/4$. Поэтому

$$r_t(x,y)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{T^2}{8t}}+\mathrm{e}^{-\frac{T^2}{32t}}+\mathrm{e}^{-\frac{T^2}{8t}}+\mathrm{e}^{-t\frac{T^{p/2}}{8^p}}\right)\leqslant\frac{6}{\sqrt{2\pi t}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{T^2}{32t}}+\mathrm{e}^{-t\frac{T^{p/2}}{8^p}}\right).$$

Лемма 1 доказана.

Замечание 6. Теорема 13 и следствия 1, 2 справедливы и для броуновского моста

$$\overset{\circ}{w}_t(u)=w(u)-uw(t),\qquad 0\leqslant u\leqslant \bar{t}.$$

Доказательство для $\overset{\circ}{w}_t$ полностью сохраняется.

Пусть $F_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $(x_1,\ldots,x_n)$ из равномерного на отрезке $[0,1]$ распределения. Из следствия 2 и замечания 6 выводится (см. [19]).

Теорема 14. *Для $p\geqslant 1$ с вероятностью* 1

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt{n\ln\ln n}\left(\int_0^1 (F_n(t)-t)^p\,dt\right)^{1/p}=C^{1/2},$$

где $C=C(p)$ из следствия 2.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11

Для $x>0$, $p>0$ определим функцию

$$\lambda(x)=\lambda_p(x)\equiv(\alpha\lambda_1)^{1/(1-\alpha)}x^{-1/(1-\alpha)},$$

где число $\lambda_1=\lambda_1(p)$ определено в теореме 13, $\alpha=2/(2+p)$. Введем далее случайную величину

$$\eta_n\equiv\int_0^1|s_n(t)|^p\,dt=\|s_n\|_p^p,$$

где $s_n=s_n(t)$ — случайная ломаная из теоремы 11.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 11. *Тогда* $(x=x(n))$

$$\begin{aligned}&1)\ \ln\mathbf{E}\mathrm{e}^{-\lambda(x)\eta_n}\sim-\lambda_1\lambda^{\alpha}(x),\\ &2)\ \mathrm{e}^{-\mu}\mathbf{E}\mathrm{e}^{(-\lambda(x)+\mu x^{-1})\eta_n}/\mathbf{E}\mathrm{e}^{-\lambda(x)\eta_n}\to 1\ \text{при}\ n\to\infty,\end{aligned}\tag{51}$$

где $\mu\in\mathbf{R}^1$, $\alpha=2/(2+p)c=c(p)$ из теоремы 13.

Лемма будет доказана ниже.

Получим оценку сверху в теореме 11. В силу экспоненциального неравенства Чебышева $(x=x(n))$

$$\mathbf{P}(\eta_n<x)\leqslant\mathrm{e}^{x\lambda(x)+\ln\mathbf{E}\exp\{-\lambda(x)\eta_n\}},$$

поэтому в силу леммы 2

$$\begin{aligned}\ln\mathbf{P}(\eta_n<x)&\leqslant x\lambda(x)-\lambda_1\circ\lambda^{\alpha}(x)\cdot(1+o(1))=\\&=-cx^{\alpha/(\alpha-1)}(1+o(1))\sim-cx^{-2/p}.\end{aligned}$$

Это дает нам оценку сверху

$$\ln \mathbf{P}\left(\eta_n^{1/p} < x\right) \leqslant -cx^{-2}(1+o(1)).$$

Для получения оценки снизу введем с помощью абсолютно-непрерывного преобразования новую вероятностную меру

$$\widetilde{\mathbf{P}}_y(A) \equiv \mathbf{E}\left(e^{-\lambda(y)\eta_n};\ \eta_n \in A\right) \big| \mathbf{E}e^{-\lambda(y)\eta_n}.$$

Используя эту меру при $y = x\left(1-\frac{\nu}{2}\right)$, получим

$$\mathbf{P}(\eta_n < x) \geqslant \mathbf{P}\left(|\eta_n - y| \leqslant x\frac{\nu}{2}\right) =$$

$$= \widetilde{\mathbf{E}}_y\left(e^{\lambda(y)(\eta_n-y)};\ |\eta_n - y| \leqslant x\frac{\nu}{2}\right)\cdot e^{\lambda(y)y}\cdot \mathbf{E}e^{-\lambda(y)\eta_n}.$$

Поскольку

$$\widetilde{\mathbf{E}}_y\left(e^{\lambda(y)(\eta_n-y)};\ |\eta_n - y| \leqslant x\frac{\nu}{2}\right) \geqslant e^{-\lambda(y)x\frac{\nu}{2}}\widetilde{\mathbf{P}}_y\left(|\eta_n - y| \leqslant x\frac{\nu}{2}\right),$$

получаем, что

$$\ln \mathbf{P}(\eta_n < x) \geqslant \lambda(y)\left(y - x\frac{\nu}{2}\right) + \ln \mathbf{E}e^{-\lambda(y)\eta_n} + L_n, \tag{52}$$

где

$$L_n \equiv \ln \widetilde{\mathbf{P}}_y\left(|\eta_n - y| \leqslant x\frac{\nu}{2}\right).$$

Обозначим далее $\widetilde{\eta}_n = \frac{\eta_n}{y} - 1$. Тогда

$$L_n = \ln \widetilde{\mathbf{P}}_y\left(|\widetilde{\eta}_n| \leqslant \frac{\nu}{2}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)^{-1}\right).$$

Из утверждения 2) леммы 2 следует, что

$$\widetilde{\mathbf{E}}_y e^{\mu\widetilde{\eta}_n} \equiv \mathbf{E}e^{(-\lambda(y)+\mu y^{-1})\eta_n - \mu}/\mathbf{E}e^{-\lambda(y)\eta_n} \to 1$$

при $n \to \infty$ и любом $\mu \in \mathbf{R}^1$. Поэтому $\widetilde{\eta}_n \to 0$ при $n \to \infty$ по мере $\widetilde{\mathbf{P}}_y$ и, стало быть, $L_n \to 0$ при $n \to \infty$. Используя далее утверждение 1) леммы 2 и устремляя к нулю число ν в правой части (52), получаем оценку снизу в теореме 11:

$$\ln \mathbf{P}(\eta_n < x) \geqslant -cx^{-2/p}(1+o(1)).$$

Теорема 11 доказана.

Доказательство леммы 2. В силу принципа инвариантности и формулы (43) найдется последовательность $\Lambda_n \to \infty$ такая, что для любой последовательности $\lambda_n \leqslant \Lambda_n$ выполняется

$$\ln \sup_x \mathbf{E}e^{-\lambda_n\int_0^1 |s_n(t)+x|^p dt} \sim \ln \sup_x \mathbf{E}e^{-\lambda_n\int_0^1 |w(t)+x|^p dt} \sim -\lambda_1\lambda_n^{2/(2+p)}, \tag{53}$$

$$\ln \inf_{|x|\leqslant 1} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda_n\int_0^1 |s_n(t)+x|^p dt};\ |s_n(1)+x| < 1\right) \sim$$

$$\sim \ln \inf_{|x|\leqslant 1} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda_n\int_0^1 |w(t)+x|^p dt};\ |w(1)+x| < 1\right) \sim -\lambda_1\lambda_n^{2/(2+p)}, \tag{54}$$

где λ_1 определено в теореме 3. Далее, для любых целых $n \geqslant 1$ и $k = k(n)$, $1 \leqslant k \leqslant n/2$, определим целое $m = m(n)$ и $k' = k'(n)$ таким образом, что $n = km + k'$, $k \leqslant k' < 2k$. Очевидно, что

$$a^m_{k,n}(\lambda)\cdot a_{k',n}(\lambda) \leqslant \mathbf{E}e^{-\lambda\eta_n} \leqslant b^m_{k,n}(\lambda)\, b_{k',n}(\lambda), \tag{55}$$

где

$$a_{k,n}(\lambda) = a_{k,n}(\lambda, \delta) \equiv \inf_{|x|\leqslant\delta} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda\int_0^{k/n}|s_n(t)+x|^p dt};\ \left|s_n\left(\frac{k}{n}\right)+x\right| < \delta\right),$$

$$b_{k,n}(\lambda) \equiv \sup_x \mathbf{E}e^{-\lambda\int_0^{k/n}|s_n(t)+x|^p dt}.$$

Очевидно, далее, что

$$b_{k,n}(\lambda) = b_{k,k}(\lambda\beta),$$

$$a_{k,n}\left(\lambda, \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}\right) = a_{k,k}(\lambda\beta, 1),$$

где $\beta = (k/n)^{\frac{p}{2}+1}$.

Выберем далее по заданному $x = x(n)$ числа $k = k(n)$, $m = m(n)$, $k' = k'(n)$, так, чтобы

$$\lambda(x)\cdot r(k) \leqslant \frac{1}{2}\Lambda_k,$$

где $r(k) = \beta \equiv (k/n)^{\frac{p}{2}+1}$. Очевидно, что это всегда можно сделать. Тогда в силу (55)

$$a^m_{k,k}(\lambda(x)\, r(k), 1)\, a_{k',k'}(\lambda(x)\, r(k'), 1) \leqslant \mathbf{E}e^{-\lambda(x)\eta_n} \leqslant$$
$$\leqslant b^m_{k,k}(\lambda(x)\, r(k))\, b_{k',k'}(\lambda(x)\, r(k')),$$

и в силу (53) и (54) получаем

$$-\lambda_1(m(\lambda(x)\, r(k))^\alpha + (\lambda(x)\, r(k'))^\alpha \sim \ln \mathbf{E}e^{-\lambda(x)\eta_n}.$$

Осталось заметить, что

$$m\lambda^\alpha(x)\, r^\alpha(k) + \lambda^\alpha(x)\, r^\alpha(k') \sim \lambda^\alpha(x).$$

Первое утверждение леммы 2 доказано.

Второе утверждение следует непосредственно из первого: для любого $\mu \in \mathbf{R}^1$

$$\ln\left[e^{-\mu}\mathbf{E}e^{(-\lambda(x)+\mu x^{-1})\eta_n}/\mathbf{E}e^{-\lambda(x)\eta_n}\right] \sim -\lambda_1\left(\lambda(x)+\frac{\mu}{x}\right)^\alpha + \lambda_1\lambda^\alpha(x) - \mu \to 0,$$

так что (51) имеет место.

Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боровков А. А.** Граничные задачи, принцип инвариантности, большие уклонения // Успехи мат. наук.— 1983.— Т. 38, № 4.— С. 232—287.
2. **Вентцель А. Д.** Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов.— М.: Наука.— 1986.— 175 с.
3. **Случайные** процессы. Выборочные функции и пересечения/Под ред. Ю. К. Беляева.— М.: Мир, 1978.— 280 с.
4. **Боровков А. А., Могульский А. А.** О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах. I // Сиб. мат. журн.— 1978.— Т. 19, № 5.— С. 988—1004.
5. **Bahadur R. R., Zabell S. L.** Large deviations of the sample mean in general vector spaces // Ann. Probab.— 1979.— V. 7, N 4.— P. 587—621.

6. **Боровков А. А.** Анализ больших уклонений в граничных задачах с произвольными границами. I, II // Сиб. мат. журн.— 1964— Т. 5, № 2.— С. 253—289; № 4.— С. 750—767.
7. **Могульский А. А.** Вероятности больших уклонений для случайных блужданий // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1983.— Т. 3.— С. 93—124.
8. **Сытая Г. Н.** О некоторых асимптотических представлениях для гауссовской меры в гильбертовом пространстве // Теория случайных процессов— Киев: Наук. думка, 1974.— Вып. 2.— С. 93—104.
9. **Ибрагимов И. А.** О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса // Зап. науч. семинаров ЛОМИ/Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние.— 1979.— Т. 83.— С. 75—93.
10. **Zolotarev V. M.** Gaussian measure asimptotic in l_p on a set of centred sphere with radii tending to zero // 12-th Europ. meet. of statisticients.— Varna, 1979.— P. 254.
11. **Нагаев А. В., Старцев А. Н.** Асимптотические свойства распределения бесконечной квадратичной формы от гауссовских случайных величин // Предельные теоремы для случайных процессов и статистические выводы.— Ташкент: Фан, 1981.— С. 144—160.
12. **Сытая Г. Н.** О некоторых локальных представлениях для гауссовской меры в гильбертовом пространстве // Тез. докл. Междунар. конф. по теории вероятностей и матем. статистике, Вильнюс, сент. 1973 г.— Вильнюс, 1973.—Т . 2.— С. 267—268.
13. **Могульский А. А.** Метод Фурье для нахождения асимптотики малых уклонений винеровского процесса // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 22, № 3.— С. 161—174.
14. **Новиков А. А.** Об асимптотике вероятностей недостижения подвижных границ процессами с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения.— 1981.— Т. 26, № 2.— С. 430—431.
15. **Нагаев С. В.** Об асимптотике винеровской меры узкой полосы // Там же, № 3.— С. 630.
16. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1968.— 496 с.
17. **Скороход А. В.** Случайные процессы с независимыми приращениями.— М.: Наука, 1986.— 320 с.
18. **Могульский А. А.** Малые уклонения в пространстве траекторий // Теория вероятностей и ее применения.— 1974— Т. 19, № 4.— С. 755—765.
19. **Могульский А. А.** О законе повторного логарифма в форме Чжуна для функциональных пространств // Там же.— 1979.— Т. 24, № 2.— С. 399—407.
20. **Jain N., Pruitt W.** Maximum of partial sums of independent variables // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1973.— V. 27, N 3.— P. 141—151.
21. **Саханенко А. И.** Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1983.— Т. 3.— С. 4—49.
22. **Могульский А. А.** Малые уклонения и закон повторного логарифма в форме Чжуна для многомерных случайных блужданий // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1984.— Т. 5: Предельные теоремы теории вероятностей.— С. 45—55.
23. **Арак Т. В.** О распределении максимума последовательных сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения.— 1974.— Т. 19, № 2.— С. 257—277.
24. **Jain N., Pruitt W.** The other low of the interated logarith // Ann. Probab.— 1975.— V. 3, N 6.— P. 1046—1049.
25. **Mogulskii A. A.** Common approach to stadying the probability of large deviations for random walks // Lecture Notes in Mathematics, 1021.— 1983.— P. 452—461.
26. **Феллер В. В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, 1967.— Т. 2.— 752 с.
27. **Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.** Независимые и стационарно связанные случайные величины.— М.: Наука, 1965.— 524 с.
28. **Яковлева Г. Д.** Таблицы функций Эйри и их производных.— М.: Наука, 1969.— 377 с.
29. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены.— М.: Физматгиз, 1962.— 500 с.

ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИЙ ДЛЯ СРЕДНИХ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

В. В. ЮРИНСКИЙ

Интерес к оценкам ковариаций специальных случайных полей, которым посвящена эта работа, возникает в теории усреднения дифференциальных операторов со случайными коэффициентами.

Многие задачи математической физики, относящиеся к описанию процессов, протекающих в микронеоднородных средах, подчиняются принципу усреднения — при их решении характеристики среды, зависящие от пространственных переменных и, вообще говоря, случайные, могут быть приближенно заменены постоянными характеристиками некоторой эффективной «усредненной» среды без микроструктуры. При изучении случайных сред оценка погрешности усреднения в ряде случаев может быть сведена [1—3] к выводу оценок для ковариаций случайных полей, воспроизводящих в качестве поправок к усредненному решению локальное строение полей напряжений. Возникающие при этом трудности связаны с тем, что поправки получаются из случайных коэффициентов исходной задачи существенно нелинейным образом — обращением дифференциальных операторов в частных производных со случайными коэффициентами при старших производных.

Оценкам ковариаций случайных полей, удовлетворяющих системам эллиптических уравнений со случайными коэффициентами, и посвящена эта работа. Представляющие самостоятельный интерес вопросы об эффективных методах расчета усредненных коэффициентов и существовании усредненного оператора при этом не затрагиваются.

В статье рассматриваются случайные поля $u=(u^{(\alpha)})\colon \mathbf{R}^d\times\Omega\to\mathbf{R}^m$, удовлетворяющие системам уравнений

$$-Lu^{(\alpha)}+\sum_{\beta=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{d}B_k^{(\alpha\beta)}D_ku^{(\beta)}+C^{(\alpha\beta)}u^{(\beta)}\right)+u^{(\alpha)}/T=F_T^{(\alpha)},\qquad \alpha=1,\ldots,m, \tag{0.1}$$

где $T>0$ — большой параметр, $D_k=\partial/\partial x_k$, а

$$Lv\equiv 1/2\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}D_iD_jv+\sum_{i=1}^{d}b_iD_iv \tag{0.2}$$

— производящий оператор диффузионного процесса. Коэффициенты (0.1) и правая часть образуют однородное случайное поле. Тем же свойством однородности обладает и решение u.

В предположении, что поле коэффициентов и правых частей (0.1) удовлетворяет достаточно сильному условию перемешивания, получены оценки для дисперсий и ковариаций случайных величин

$$[u^{(\alpha)};R]=(2R)^{-d}\int_{\|x\|\leqslant R}u^{(\alpha)}(x)\,dx. \tag{0.3}$$

В них явно выделена зависимость от больших параметров R, T и коэффициента перемешивания. Если размерность диффузии d достаточно велика, а коэффициент перемешивания убывает с ростом расстояния не медленнее, чем степенным образом, следствием оценок статьи оказываются соотношения

$$\mathbf{D}\,[u^{(\alpha)};T^{1/2-\gamma_1}]=O\left(T^{-\gamma_2}\right),\quad \gamma_i>0. \tag{0.4}$$

Интерес к результатам описанного типа обусловлен тем, что они в ряде случаев позволяют оценить погрешность от замены решения корректной краевой задачи для оператора вида (0.1) со случайными быстро осциллирующими коэффициентами решением аналогичной краевой задачи для «усредненного» оператора того же типа с неслучайными постоянными коэффициентами (см. [1—3]).

Для естественного класса эллиптических систем, включающего, в частности, уравнения линейной теории упругости и дивергентное уравнение теплопроводности, средствами теории возмущений удается получить оценки порядка $O(T^{-\zeta/\ln\ln T})$, $\zeta>0$ без ограничений на размерность пространственной переменной (см. [3]). Метод, которым ниже получены более сильные оценки (0.4), существенно использует возможность представления решения системы (0.1) средним по распределению марковского процесса, одной из компонент которого является диффузионный процесс с производящим оператором (0.2). Это представление позволяет локализовать зависимость решения от коэффициентов задачи. Ограничения на размерность связаны с тем, что в вычислениях существенно используется малость объема «задетой» типичной траекторией диффузии части пространства по сравнению со всем объемом, определяющим значение решения. Метод статьи представляет собой модификацию метода работ [1, 2], где рассматривалось одно уравнение второго порядка.

Формулировки и доказательства основных результатов работы, теорем 3.1 и 4.1, приведены в § 3—4. Необходимый для вычислений аппарат подготовлен в § 2. В § 1 дана сводка обозначений.

§ 1. СВОДКА ОБОЗНАЧЕНИЙ

Векторы евклидовых пространств разных размерностей задаются ниже координатами в фиксированных ортонормированных базисах. Индексы, обозначенные латинскими буквами, изменяются от 1 до d, греческими — от 1 до m; используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Обозначение $|\cdot|$ закрепляется за евклидовой нормой в пространстве любой размерности: так, $|x|=(x_ix_i)^{1/2}$ при $x=(x_i)\in\mathbf{R}^d$, $|Y|=(Y^{(\alpha)}Y^{(\alpha)})^{1/2}$ при $Y=(Y^{(\alpha)})\in\mathbf{R}^m$ и т. д. Используется еще норма $\|x\|=\max\{|x_i|:\ i=1,\ldots,d\}$.

Алгебраические операции над множествами имеют естественный смысл: так, $\alpha A+\beta B=\{x:\ x=\alpha y+\beta z,\ y\in A,\ z\in B\}$. Если K — конечное множество, $|K|$ обозначает число его элементов; $\mathbf{Z}$ — целочисленная решетка.

Операторы дифференцирования по пространственным переменным обозначаются $D_iu=\partial u/\partial x_i$; при $k=(k_i)\in\mathbf{Z}_+^d$ $D^ku=D_1^{k_1}\ldots D_d^{k_d}u$, $D_i^0u\equiv u$. Для функции u: $\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ при натуральном n

$$\nabla^n u(x)=\Big(\sum_{k_1+\ldots+k_d=n}(D^ku(x))^2\Big)^{1/2};$$

используется также соглашение $\nabla^0u=|u|$. Аналогичные обозначения приняты и для векторнозначных функций: так, при $u=(u_i^{(\alpha)}):\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d\otimes R^m$ $\nabla^nu(x)\in\mathbf{R}^d\otimes\mathbf{R}^m$ есть вектор с координатами $\nabla^nu_i^{(\alpha)}(x)$, а $|\nabla^nu(x)|$ — его евклидова норма.

В тех случаях, когда это не влечет путаницы, применяется и матричная запись. Например, система (0.1) может записываться в форме

$$-Lu+B_kD_ku+Cu+u/T=F_T, \tag{1.1}$$

где $u=(u^{(\alpha)})$ — столбец высоты m, $B_k=(B_k^{(\alpha\beta)})$, $C=(C^{(\alpha\beta)})$ — матрицы размера $m\times m$, A^{T} — транспонированная к A матрица, $\operatorname{tr}A=A^{(\alpha\alpha)}$ — след матрицы A. Неравенство $A'\geqslant A''$ означает неотрицательную определенность матрицы $A'-A''$. Элементы единичных матриц обозначаются символами Кронекера соответствующих размерностей.

Все константы, значения которых определяют размерности d, m и постоянные в ограничениях на коэффициенты (0.1), но не большой параметр T, обозначаются символами c, c', c_i и т. п. При этом одно и то же обозначение может использоваться для разных констант этого типа, если это не влечет путаницы. Вследствие этого возможны равенства типа $c+c=c$, $cc=c$. . . .

§ 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ

Вероятностные представления решений системы вида (0.1), которые используются в этой работе, предложены в [4] (см. также [5] и монографию [6, гл. VII]).

Чтобы избежать технических осложнений, удобно считать коэффициенты (0.1) гладкими функциями пространственных переменных, равномерно во всем пространстве ограниченными вместе с производными любого порядка.

Коэффициенты «скалярного» оператора (0.2) в дальнейшем удовлетворяют условиям симметрии, ограниченности и равномерной эллиптичности: для любых $x=(x_i)$, $\xi=(\xi_i)$

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\quad A_1|\xi|^2\leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant A_2|\xi|^2, \tag{2.1}$$

$$|b(x)|\leqslant A_3. \tag{2.2}$$

При этих ограничениях (0.2) — производящий оператор диффузионного процесса $\xi=(\xi_i(t))$ со значениями в пространстве $\mathbf{R}^d$. Удобно выбрать в качестве пространства элементарных исходов для этого процесса «пространство траекторий» $\mathcal{U}=C([0,\infty),\mathbf{R}^d)$ с цилиндрической σ-алгеброй $\mathfrak{U}$ и обычным потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t=\sigma(\xi(s),\ s\leqslant t)$. Распределение на $\mathfrak{U}$, отвечающее диффузии (0.2) с начальным условием $\xi(0)=x$, обозначается ниже $\mathbf{P}_x$. Как обычно,

$$\mathbf{M}_x\{\varphi;\ A\}=\int\limits_A\varphi(u)\,\mathbf{P}_x(du),\quad \mathbf{M}_x\varphi=\mathbf{M}_x\{\varphi,\ U\}.$$

Диффузионный процесс ξ является решением стохастического дифференциального уравнения (СДУ)

$$d\xi_i(t)=\sigma_{ik}(\xi(t))\,dw_k(t)+b_i(\xi(t))\,dt, \tag{2.3}$$

где (w_k) стандартный винеровский процесс в $\mathbf{R}^d$, а положительно определенная симметричная матрица (σ_{ik}) удовлетворяет условию $\sigma_{ik}\sigma_{jk}=a_{ij}$.

Чтобы получить вероятностное представление решения (0.1), процесс ξ дополняется матричнозначными решениями линейных СДУ (обозначения те же, что в (1.1))

$$\begin{gathered}dX(s,\ t)=-X(s,\ t)\,(B_k(\xi(t))\bar{\sigma}_{kl}(\xi(t))\,dw_l(t)+\\ +C(\xi(t))\,dt;\ X(s,\ t)=(X^{(\alpha\beta)}(s,\ t)),\\ 0\leqslant s\leqslant t,\ X(s,\ s)=(\delta^{(\alpha\beta)}),\end{gathered} \tag{2.4}$$

где матрица размера $d\times d$ $(\bar{\sigma}_{ij})$-обратная к (σ_{ij}) уравнения (2.3). Решения (2.4) обладают полугрупповым свойством: при $u,\ t>0$ с вероятностью 1 выполняется

$$X(s,\ s+t+u)=X(s,\ s+t)X(s+t,\ s+t+u). \tag{2.5}$$

Пара $(\xi,\ X_0X)$ при любом начальном значении X_0 составляет марковский процесс, так как в вычислениях всегда используется начальное условие, приведенное в (2.4), обозначения $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{M}_x$ приняты и для распределений пары $(\xi,\ X)$, чтобы не загромождать формул.

Показательный рост решений (2.4) исключает условие

$$C+C^T\geqslant(1+\gamma_1)\,\bar{a}_{kl}B_kB_l^T,\quad \gamma_1\geqslant 0, \tag{2.6}$$

где $(\bar{a}_{kl})$ — обратная к (a_{kl}) матрица.

Действительно, по формуле Ито

$$d\,\mathrm{tr} X^T X = \mathcal{A}_l dw_l + \mathcal{B} dt,$$

причем коэффициент переноса неположителен:

$$\mathcal{B} = -\mathrm{tr}(X^T X (C^T + C - B_k B_l^T \bar{a}_{kl})) \leqslant 0.$$

Следовательно, при $t > 0$

$$\mathbf{M}_x |X(0, t)|^2 = \mathbf{M}_x \mathrm{tr}\, X^T X \leqslant |I|^2. \tag{2.7}$$

Показательного роста решений (2.4) нет и в случае, когда

$$\begin{aligned} &B_k \equiv 0, \ \forall \alpha \ C^{(\alpha 1)} + \ldots + C^{(\alpha m)} = 0, \\ &C^{(\alpha\beta)} \leqslant 0, \ \alpha \neq \beta. \end{aligned} \tag{2.8}$$

При этих предположениях (2.4) — обыкновенные дифференциальные уравнения, коэффициенты которых определяет выбор траектории ξ. Решение при ограничениях (2.8) — стохастическая матрица.

Пусть $v(x, t) = \mathbf{M}_x X(0, t) g(\xi(t))$, где g — ограниченная гладкая матричнозначная функция подходящей размерности. С помощью (2.5) из обратного уравнения Колмогорова для процесса (ξ, X) выводится уравнение

$$\partial v / \partial t = \Lambda_1 v \equiv Lv - B_k D_k v - Cv. \tag{2.9}$$

Эти формулы приводят к вероятностной интерпретации известного интегрального представления для резольвенты Λ_1 (ср. [7, с. 331]).

Лемма 2.1. *Если выполнено условие* (2.6) *или* (2.8), *а гладкая функция* g: $\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^m$ *равномерно ограничена, то решение системы* (0.1) *с правой частью* $F_T = g/T$ *при* $T > 0$ *допускает представление*

$$u(x) = \int_0^\infty \mathbf{M}_x X(0, t) g(\xi(t))\, de(t/T),$$

где $de(t/T) = \exp\{-t/T\} dt/T$.

Справедливы оценки

$$\mathbf{M}_x \int_0^\infty |X(0, t)| \, |g(\xi(t))| \, de(t/T) \leqslant c \, |g|_\infty,$$

и при $\widehat{T} = T(\ln T)^2$

$$\left| u(x) - \mathbf{M}_x \int_0^{\widehat{T}} X(0, t) g(\xi(t))\, de(t/T) \right| \leqslant c\, |g|_\infty \exp\{-c'(\ln T)^2\},$$

$$|g|_\infty = \sup_x |g(x)|.$$

Положительные постоянные c, c' *не зависят от* T.

Доказательство представления леммы сводится к интегрированию по частям равенства

$$\Lambda_1 u = \int_0^\infty \Lambda_1 \mathbf{M}_x (Xg)_t\, de(t/T) = \int_0^\infty (\partial/\partial t) \mathbf{M}_x (Xg)_t\, de(t/T),$$

$$(Xg)_t = X(0, t) g(\xi(t)).$$

Оценки леммы следуют из (2.5) и (2.7) (или стохастичности X при условии (2.8)):

$$\left| \mathbf{M}_x \int_{\widehat{T}}^\infty (Xg)_t\, de(t/T) \right| \leqslant |g|_\infty \int_{\widehat{T}}^\infty (\mathbf{M}_x |X|^2)^{1/2} de(t/T) \leqslant c\, |g|_\infty \exp\{-c' \widehat{T}/T\}.$$

Пусть $\xi[s, t] = \{y\colon y = \xi(u),\ u \in [s, t]\}$ — отрезок траектории диффузии, а $\Xi(\widehat{T})$ — случайное множество «номеров» кубов $n + [0, 1]^d$, $n \in \mathbf{Z}^d$, задетых начальным отрезком траектории:

$$\Xi(\widehat{T}) = \{n \in \mathbf{Z}^d:\ \xi[0,\ \widehat{T}] \cap (n + [0,\ 1]^d) \neq \varnothing\}. \qquad (2.10)$$

Аналогично соответствующим предложениям [1, 2] проверяется

Лемма 2.2. *При условиях* (2.1), (2.2) *число точек* (2.10) *при* $\widehat{T} = T(\ln T)^2$, $T > 10$, *допускает оценку*

$$\mathbf{M}_x|\Xi(\widehat{T})|^p \leqslant c(T(\ln T)^3)^p,\ p \geqslant 0.$$

Если оператор (0.2) *самосопряжен, т. е.*

$$b_i = D_j a_{ij}/2, \qquad (2.11)$$

то константа c в оценке леммы не зависит от постоянной A_3.

В дальнейшем коэффициенты и правые части систем вида (0.1) — реализации случайных полей, заданных на некотором вероятностном пространстве (Ω, $\mathfrak{A}$, $\mathbf{Pr}$) с математическим ожиданием $\mathbf{E} = \int d\,\mathbf{Pr}$. Элементарные исходы $\omega \in \Omega$ называются состояниями среды. Условия (2.1), (2.2) и другие ограничения на коэффициенты (0.1) предполагаются выполненными для почти всех состояний среды с неслучайными постоянными. Поэтому состоянию среды сопоставляется марковский процесс (ξ, X), который описывают СДУ (2.3), (2.4), и представление леммы 2.1 для реализации решения (0.1). Чтобы не загромождать запись, зависимость коэффициентов и распределений $\mathbf{P}_x$ от состояний среды не указывается: $\mathbf{P}_x = \mathbf{P}_x^\omega$, $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_x^\omega$.

Оговорки «с вероятностью 1», «для почти всех состояний» и т. п., как и очевидные предположения об измеримости, ниже, как правило, опускаются.

Пусть $N \subset \mathbf{Z}^d$ — конечное множество, $k = (a_{ij}, \ldots)$ — случайное поле, образованное коэффициентами и правыми частями (0.1).

$$\mathfrak{K}(N) = \sigma(k(x),\ x \in V(N)) \qquad (2.12)$$

есть σ-алгебра, порожденная значениями поля коэффициентов на примыкающем к N множестве $V(N) = N + [0,\ 1]^d$. Обозначение $\mathfrak{K}^+(N,\ r) = \sigma(k(x),\ x \notin N + [-r,\ r]^d)$ закрепляется за «дополнительной» σ-алгеброй, порожденной значениями поля коэффициентов вне r-окрестности N.

Представление леммы 2.1 позволяет следующим образом локализовать зависимость решения (0.1) от коэффициентов и правой части (ср. [1, 2]).

Лемма 2.3. *Справедливо разложение*

$$\mathbf{M}_x \int_0^{\widehat{T}} X(0, t)\, g(\xi(t))\, de(t/T) = \sum{}^* G_{\widehat{T},N}(x),$$

в котором случайные векторы

$$G_{\widehat{T},N}(x) = \mathbf{M}_x \left\{ \int_0^{\widehat{T}} X(0, t)\, g(\xi(t))\, de(t/T);\ \Xi(\widehat{T}) = N \right\}$$

измеримы относительно σ-алгебр (2.12), *символ* $\sum^*$ *указывает на то, что суммирование ведется по всевозможным конечным множествам* $N \subset \mathbf{Z}^d$, Ξ *задано* (2.10).

Разложение леммы — вариант формулы полной вероятности. Оговоренная в формулировке измеримость слагаемых — следствие того, что при вычислении $G_{\widehat{T},N}$ используются только значения коэффициентов на множестве $V(N)$.

Условие слабой зависимости значений коэффициентов в далеких точках используется здесь в форме условия равномерно сильного перемешивания ([8], с. 392): для конечного $N \subset \mathbf{Z}^d$, $p \geqslant 1$ и случайных величин ζ, ζ^+: $\Omega \to \mathbf{R}$, измеримых соответственно относительно σ-алгебр (2.12) $\mathfrak{K}(N)$ и $\mathfrak{K}^+(N, r)$, выполняется неравенство

$$|\mathrm{cov}(\zeta, \zeta^+)| \leqslant \varkappa(r) |\zeta|_p |\zeta^+|_q, \quad 1/p + 1/q = 1. \tag{2.13}$$

В (2.13) нормы задаются равенствами $|\zeta|_\infty = \mathrm{vrai\,sup}\,|\zeta|$, $|\zeta|_p = (\mathbf{E}|\zeta|^p)^{1/p}$, $p < \infty$, а ковариация есть $\mathbf{E}\zeta\zeta^+ - \mathbf{E}\zeta\mathbf{E}\zeta^+$.

Как правило, убывание коэффициента перемешивания (2.13) в дальнейшем не медленнее степенного:

$$\varkappa(r) \leqslant K(1+r)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{2.14}$$

В большинстве вычислений работы поле коэффициентов (0.1) и, следовательно, решение предполагаются однородными в следующем смысле: распределение поля

$$k_z(x, \omega) = k(x+z, \omega) \tag{2.15}$$

не зависит от сдвига на вектор целочисленной решетки $z \in \mathbf{Z}^d$. Этой однородностью обладают, например, обычные в моделях неупорядоченных микронеоднородных сред «шахматные структуры». При рассмотрении однородных в смысле (2.15) случайных полей удобны средние

$$\langle \varphi \rangle = \mathbf{E} \int\limits_{[0,1]^d} \varphi(x)\, dx.$$

§ 3. ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИЙ: МНОГОМЕРНЫЙ «НЕДИВЕРГЕНТНЫЙ» СЛУЧАЙ

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты оператора* (0.1) *удовлетворяют* (2.1), (2.2) *и одному из условий* (2.6) *или* (2.8), *а правая часть имеет вид*

$$F_T^{(\alpha)}(x) = g^{(\alpha)}(x)/T, \quad |g(x)| \leqslant 1. \tag{3.1}$$

Если коэффициенты и правые части образуют случайное поле $k = (a, b, B, C, g)$, *однородное в смысле* (2.15) *и удовлетворяющее условию перемешивания* (2.13), *то при* $T > 10$ *для средних вида* (0.3) *выполняется неравенство*

$$|\mathrm{cov}([u^{(\alpha)}; R], [u^{(\beta)}; \mathbf{R}])| \leqslant c(\exp\{-c'(\ln T)^2\} + \varkappa(r) + (r^d T^2 (\ln T)^3 R^{-d})^{1/2}).$$

Оценка теоремы сохраняется при замене условия (2.2) *предположением* (2.11) *о самосопряженности оператора* (0.2); *в этом случае константы* c, c' *не зависят от постоянной* A_3 *из* (2.2).

Замечание 3.1. Если коэффициент перемешивания допускает степенную оценку (2.14), то при достаточно малом $\gamma > 0$, $d \geqslant 5$

$$\mathbf{D}[u^{(\alpha)}; T^{1/2-\gamma}] \leqslant cT^{-\gamma'},$$

где значение $\gamma' > 0$ определяют m, d, константы в (2.1), (2.2) и показатель в (2.14).

Вывод неравенства теоремы 3.1 аналогичен вычислениям, проведенным в [1] для одного уравнения. Его этапы оформлены ниже в виде нескольких лемм. В вычислениях всюду принято сокращение $[\varphi] = [\varphi; R]$.

Лемма 3.1. *При* $T \geqslant 10$

$$|\mathrm{cov}([u^{(\alpha)}], [u^{(\beta)}])| \leqslant c\exp\{-c'(\ln T)^2\} + \\ + \left|\sum{}^* [\mathrm{cov}(G_{T,N}^{(\alpha)}(\cdot), [u^{(\beta)}])]\right|,$$

где векторы $G_{...}$ *описаны в лемме* 2.3.

Доказательство леммы сводится к применению леммы 2.1 и линейности ковариации.

Лемма 3.2. *В условиях теоремы* 3.1. *при* $1 \leqslant r \leqslant R$

$$\left|\operatorname{cov}\left(G_{\widehat{T},N}^{(\alpha)}(x),\ [u^{(\beta)}]\right)\right| \leqslant c\left(\varkappa(r) + (\mathbf{E}\,[\mathbf{M}.\exp\{-2\tau/T\}])^{1/2}\right) \times$$
$$\times\, \mathbf{EM}_x\left\{\int_0^\infty |X(0,t)|\,|g(\xi(t))|\,de(t/T);\ \Xi - (\widehat{T}) = N\right\},$$

где Ξ *задано* (2.10), *а* $\tau = \inf\{t\colon\ \xi(t) \in N + [-r-1,\ r+1]^d\}$ — *момент первого достижения окрестности* N.

Доказательство. По лемме 2.3 случайная величина $G_{\widehat{T},N}^{(\alpha)}$ измерима относительно $\mathfrak{K}(N)$. Чтобы воспользоваться условием перемешивания (2.13), величину $[u^{(\beta)}]$ можно заменить измеримой относительно «дополнительной» σ-алгебры $\mathfrak{K}^+(N,\ r)$ случайной величиной

$$\zeta^+ = \left[\mathbf{M}.\int_0^\tau X\,(0,t)\,g\,(\xi\,(t))\,de\,(t/T)\right].$$

Погрешность такой замены не превосходит ограниченной случайной величины

$$Z^+ = c[\mathbf{M}.\exp\{-2\tau/T\}]^{1/2} \leqslant c,$$

также измеримой относительно $\mathfrak{K}^+(N,\ r)$.

Действительно, из представления леммы 2.1 и супермартингального свойства X (2.7) (или стохастичности X в случае, когда выполнено (2.8)) следуют соотношения

$$|[u^{(\beta)}] - \zeta^+| = |[\mathbf{M}.X(0,\ \tau)\exp\{-\tau/T\}u^{(\beta)}(\xi(\tau))]| \leqslant$$
$$\leqslant c\,\mathbf{M}.|X(0,\ \tau)|^2]^{1/2}\,[\mathbf{M}.\exp\{-2\tau/T\}]^{1/2} \leqslant Z^+.$$

Остается воспользоваться очевидными неравенствами

$$|\operatorname{cov}(\zeta,\ [u^{(\beta)}])| \leqslant |\operatorname{cov}(\zeta,\ \zeta^+)| + \mathbf{E}|\zeta|Z^+ + \mathbf{E}|\zeta|\mathbf{E}Z^+ \leqslant$$
$$\leqslant |\operatorname{cov}(\zeta,\ \zeta^+)| + |\operatorname{cov}(|\zeta|,\ Z^+)| + 2\mathbf{E}|\zeta|\mathbf{E}Z^+.$$

При рассматриваемых в теореме 3.1. больших размерностях удовлетворительную по точности оценку входящего в формулировку леммы 3.2 момента первого достижения можно получить из следующих соображений.

Для диффузионного процесса с невырожденным производящим оператором (0.2) распределение $\mathbf{P}_x\{\xi(t) \in B\}$, $B \subset \mathbf{R}^d$, имеет при $t > 0$ плотность $p(x,\ t,\ y)$. Если коэффициенты оператора образуют однородное случайное поле, то статистические свойства поля $p_z(x,\ t,\ y) = p(x+z,\ t,\ y+z)$ не зависят от сдвигов на $z \in \mathbf{Z}^d$. Однородно и поле

$$\mu = \mu_T(x) = \int_0^\infty de\,(t/T) \int_{\mathbf{R}^d} p\,(y,t,x)\,dy.$$

Это поле удовлетворяет условию нормировки $\langle\mu\rangle = 1$.

Действительно,

$$\langle\mu\rangle = \sum_{z \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{E}\int_0^\infty de\,(t/T) \int_{[0,1]^d} dy \int_{[0,1]^d} p\,(y+z,t,x)\,dx,$$

а по однородности

$$\mathbf{E}\sum_{z \in \mathbf{Z}^d} \int_{[0,1]^d} dy \int_{[0,1]^d} p\,(y+z,t,x)\,dx = \mathbf{E}\int_{[0,1]^d} dy \int_{\mathbf{R}^d} p\,(y,t,x)\,dx = 1.$$

Из показательных оценок для диффузии с ограниченными коэффициентами или оценок [9] для переходных плотностей диффузий с самосопряженным производящим оператором следует, что процесс ξ субгауссовский. Это приводит (см. [2]) к оценке

$$\mathbf{M}_x \exp\{-\sigma/T\} \leqslant 1 - c/T$$

для момента остановки $\sigma = \inf\{t\colon \|\xi(t) - \xi(0)\| \geqslant 1\}$.

После попадания в r-окрестность множества N траектория диффузии находится в $(r+1)$-окрестности $V_r(N)$ по крайней мере до того момента, пока не отойдет от «точки входа» на единичное расстояние. Поэтому

$$\mathbf{M}_x \exp\{-\tau/T\}\,\mathbf{M}_{\xi(\tau)}(1 - \exp\{-\sigma/T\}) \leqslant \mathbf{M}_x \int_0^\infty I_{V_r(N)}(\xi(s))\,de(s/T),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{M}_x \exp\{-2\tau/T\} \leqslant cT\mathbf{M}_x \int_0^\infty I_{V_r(N)}(\xi(s))\,de(s/T),$$

откуда

$$[\mathbf{M}.\exp\{-2\tau/T\}] \leqslant cTR^{-d} \int_{V_r(N)} \mu(x)\,dx.$$

Таким образом, справедливы неравенство

$$\mathbf{E}Z^+ \leqslant c\left(TR^{-d} \int_{V_r(N)} dx\right)^{1/2} \leqslant c\left(Tr^dR^{-d}\,|N|\right)^{1/2}$$

и вытекающая из него и леммы 3.2

Лемма 3.3. *В условиях теоремы* 3.1

$$\left|\operatorname{cov}\left(G^{(\alpha)}_{\widehat{T},N}(x), [u^{(\beta)}]\right)\right| \leqslant c\left(\varkappa(r) + \left(Tr^dR^{-d}\,|N|\right)^{1/2}\right) \times$$
$$\times\, \mathbf{EM}_x\left\{\int_0^\infty |X(0,t)|\,de(t/T);\ \Xi(\widehat{T}) = N\right\}.$$

Доказательство теоремы 3.1. По неравенству Коши — Буняковского

$$\mathbf{M}_x\{|X|;\ \Xi = N\} \leqslant (\mathbf{M}_x\{|X|^2;\ \Xi = N\}\mathbf{P}_x\{\Xi = N\})^{1/2}.$$

Поэтому из леммы 2.1 следует неравенство

$$\sum{}^* \mathbf{EM}_x\left\{\int_0^\infty |X(0,t)|\,de(t/T);\ \Xi = N\right\}(1 + |N|)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\mathbf{EM}_x \int_0^\infty |X(0,t)|^2\,de(t/T)\right)^{1/2}\left(1 + \mathbf{EM}_x\left|\Xi(\widehat{T})\right|\right)^{1/2}.$$

Вместе с оценками лемм 3.1—3.3 это неравенство доказывает теорему.

§ 4. ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИЙ РЕШЕНИЯ ПРИ ДИВЕРГЕНТНОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Если «скалярная» часть (0.2) оператора (0.1) дивергентна, т. е. выполнено условие (2.11), теорему 3.1 можно дополнить аналогичным результатом для случая, когда правая часть имеет вид

$$F^{(\alpha)}_T(x) = T^{-1/2} D_i h^{(\alpha)}_i(x). \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Пусть коэффициенты оператора* (0.1) *удовлетворяют условиям* (2.1), (2.11), (2.6) *и*

$$\forall V = (V^{(\alpha\beta)})\ \operatorname{tr}\{(VV^T + V^TV)\cdot(C - (1+\gamma_2)\bar{a}_{kl}B_kB_l^T/2) -$$
$$- V^TB_kVB_l^T\bar{a}_{kl}\} \geqslant 0,\ \gamma_2 \geqslant 2, \tag{4.2}$$

а правая часть вида (4.1) *допускает оценку* $|h| \leqslant 1$.

Если случайное поле $k=(a, B, C, h)$ однородно в смысле (2.15) *и удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания* (2.13), *то при $1\leqslant r\leqslant R$ для средних* (0.3) *выполняется неравенство*

$$|\operatorname{cov}([u^{(\alpha)}; R], [u^{(\beta)}; R])| \leqslant c(\varkappa(r)+(r^dR^{-d}T^2(\ln T)^3)^{1/2}).$$

В предположении, что B_k, C не случайны, эту оценку можно заменить более сильной, с правой частью

$$c(\varkappa(r)+(r^dR^{-d}T(\ln T)^3)^{1/2}).$$

Замечание 4.1. Из оценки теоремы 4.1 следует соотношение

$$\mathbf{D}[u^{(\alpha)}; T^{1/2-\gamma}]\leqslant cT^{-\gamma'}, \ \gamma'>0,$$

если $\gamma>0$ достаточно мало, выполнено степенное условие перемешивания (2.14), а размерность диффузии $d\geqslant 5$. При неслучайных B_k, C достаточно условия $d\geqslant 3$.

Оценка теоремы 4.1 выводится ниже по той же схеме, что и аналогичный результат [2]. Промежуточные результаты оформлены в виде лемм.

Основой вычислений является представление решения леммы 2.1, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{gathered} u(x)=\mathbf{M}_x\Gamma(0, \infty), \\ \Gamma(s,t)=\int_s^t T^{1/2}D_kh_k(\xi(u'))\,de(u'/T). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Необходимы также некоторые априорные оценки для уравнения (0.1).

Лемма 4.1. *Если коэффициенты системы* (0.1) *с правой частью*

$$F_T^{(\alpha)}=T^{-1}g^{(\alpha)}+T^{-1/2}D_ih_i^{(\alpha)}$$

удовлетворяют условиям (2.1), (2.11), (2.6), *а g, h суммируемы в квадрате, то в предположении однородности коэффициентов решение также однородно и*

$$\langle|\nabla u|^2+|u|^2/T\rangle\leqslant cT^{-1}\langle|g|^2+|h|^2\rangle.$$

Без предположения однородности

$$\int_{\mathbf{R}^d}(|\nabla u|^2+|u|^2/T)\,dx\leqslant cT^{-1}\int_{\mathbf{R}^d}(|g|^2+|h|^2)\,dx.$$

Доказательство (ср. [10, гл. VII, § 1]). По условию (2.6)

$$\begin{gathered} u^T(B_kD_ku+Cu)\geqslant u^T(C+C^T)u/2-\tilde{\gamma}/2\cdot|u^TB_k\bar{\sigma}_{k\cdot}|^2- \\ -(2\tilde{\gamma})^{-1}|\sigma_{\cdot k}D_ku|^2=-(2\tilde{\gamma})^{-1}a_{kl}D_ku^TD_lu+u^T(C+C^T- \\ -\tilde{\gamma}B_kB_l^T\bar{a}_{kl}/2)u\geqslant -a_{kl}D_ku^TD_lu/(2\tilde{\gamma}),\ \tilde{\gamma}=1+\gamma. \end{gathered}$$

Отсюда для гладких однородных случайных полей с помощью равенства $\langle -u^TD_ia_{ij}D_ju\rangle=\langle a_{ij}D_iu^TD_ju\rangle$ выводится оценка

$$\langle u^T(-\Lambda_1u+u/T)\rangle\geqslant c\langle|\nabla u|^2+|u|^2/T\rangle.$$

Так как $\langle u^TT^{-1/2}D_kh_k\rangle=-\langle D_ku^TT^{-1/2}h_k\rangle$, из полученного выше неравенства эллиптичности обычным образом выводится существование однородного решения и априорная оценка леммы. «Неоднородный» случай также стандартен.

Лемма 4.2. *Пусть коэффициенты и правая часть* (0.1) — *однородные случайные поля, удовлетворяющие условиям теоремы* 4.1.

Тогда случайное поле (4.3) *допускает оценку*

$$\langle(\mathbf{M}_\cdot|\Gamma(0, \infty)|^2)^2\rangle\leqslant c.$$

Доказательство. С помощью (2.5) проверяется равенство

$$|\Gamma(0,\infty)|^2 = \operatorname{tr}\int_0^\infty de(2s/T)\,X(0,s)\times$$
$$\times\left(T\int_0^\infty X(s,s+t)\,D_kh_k(\xi(s+t))\,de(t/T)\right)D_lh_l^T(\xi(s))\,X^T(0,s).$$

Поэтому по марковскому свойству (ξ, X) и (4.3)

$$v = \mathbf{M}_x|\Gamma(0,\infty)|^2 = \operatorname{tr}\int_0^\infty X(0,s)\,u(\xi(s))\,T^{1/2}D_kh_k^T(\xi(s))\,X^T(0,s)\,de(2s/T). \tag{4.4}$$

Аналогично (2.9) проверяется, что матричнозначное поле

$$w = \mathbf{M}_xX(0,t)\,\Phi(\xi(t))\,X(0,t)^T$$

удовлетворяет уравнению

$$\partial w/\partial t = \Lambda_2 w \equiv Lw - B_lD_lw - (D_kw)\,B_k^T - Cw - wC^T + B_kwB_l^T\bar{a}_{kl}. \tag{4.5}$$

Следовательно, случайное поле (4.4) имеет представление $v = \operatorname{tr} U$, где U — матричнозначное решение системы

$$-\Lambda_2U + 2U/T = G,$$
$$G = T^{-1/2}D_k(uh_k^T) - T^{-1/2}(D_ku)\,h_k^T. \tag{4.6}$$

По условию (4.2)

$$\operatorname{tr}\left(1/2a_{kl}D_kw^TD_lw + w^TB_lD_lw + w^TD_kwB_k^T + w^TCw + w^TwC^T +\right.$$
$$\left.+\, w^TB_kwB_l^T\bar{a}_{kl}\right) \geqslant (1/2 - 1/(1+\gamma_2))\operatorname{tr} a_{kl}D_kw^TD_lw.$$

Благодаря этому, оператор Λ_2 удовлетворяет условию эллиптичности

$$\langle \operatorname{tr} w^T(-\Lambda_2 w)\rangle \geqslant c\langle|\nabla w|^2\rangle. \tag{4.7}$$

Из (4.7) стандартным образом получается априорная оценка

$$\langle|\nabla U|^2 + |U|^2/T\rangle \leqslant \langle|\nabla u|^2 + |u|^2/T\rangle$$

для (4.6), очевидным следствием которой является утверждение леммы.

Лемма 4.3. *При* $\widehat{T} \geqslant c_1T$

$$\langle(\mathbf{M}.|\Gamma(0,\widehat{T})|^2)^2\rangle \leqslant c_2.$$

Доказательство. Из определения (4.3) следует, что

$$\Gamma(0,\infty) - \Gamma(0,\widehat{T}) = \exp\{-\widehat{T}/T\}\,X(0,\widehat{T})\cdot$$
$$\cdot\int_0^\infty X(\widehat{T},\widehat{T}+t)\,T^{1/2}D_kh_k(\xi(\widehat{T}+t))\,de(t/T).$$

Поэтому по марковскому свойству (ξ, X)

$$\mathbf{M}_x|\Gamma(0,\widehat{T}) - \Gamma|^2 \leqslant \exp\{-2\widehat{T}/T\}\operatorname{tr}\mathbf{M}_xX(0,\widehat{T})\cdot$$
$$\cdot\mathbf{M}_{\xi(\widehat{T})}\Gamma\Gamma^TX^T(0,\widehat{T}),\quad \Gamma = \Gamma(0,\infty).$$

Матричнозначная функция $w = \mathbf{M}_xX(0,t)\Phi(\xi(t))X(0,t)$, $\Phi = \mathbf{M}_x\Gamma\Gamma^T$, удовлетворяет уравнению (4.5). Это позволяет стандартным рассуждением получить из (4.7) оценку

$$\langle|w|^2\rangle\big|_{t=\widehat{T}} \leqslant \langle|\Phi|^2\rangle + 2\int_0^{\widehat{T}}\langle\operatorname{tr} w^T\Lambda_2 w\rangle\,dt \leqslant \langle|\Phi|^2\rangle.$$

При достаточно больших $\widehat{T}$ оценка

$$\langle (\mathbf{M}.|\Gamma(0, \widehat{T})-\Gamma|^2)^2\rangle \leqslant c\exp\{-4T/\widehat{T}\}\langle(\mathbf{M}.|\Gamma|^2)^2\rangle, \tag{4.8}$$

которая доказывает лемму, следует теперь из леммы 4.2.

Оценка устойчивости решения (0.1) с дивергентными старшими членами по отношению к возмущению коэффициентов используется при доказательстве теоремы в следующей форме.

Лемма 4.4. *Пусть u — решение (0.1), $\widehat{u}$ — решение системы того же вида с коэффициентами*

$$\widehat{a}_{ij}=(1-\zeta)a_{ij}+\zeta A_{ij},$$
$$\widehat{B}_k=(1-\zeta)B_k,\quad \widehat{C}=(1-\zeta)C \tag{4.9}$$

и правой частью $(1-\zeta)g/T+T^{-1/2}D_k(1-\zeta)h_k$, где ζ: $\mathbf{R}^d\to[0,1]$ *— гладкая функция, такая что $\zeta(x)=0$ вне ограниченного множества V и всюду в $\mathbf{R}^d$ $|\nabla\zeta(x)|\leqslant c$, а A_{ij} — постоянные, удовлетворяющие условию* (2.1).

Тогда

$$\delta=\int_{R^d}(|\nabla(\widehat{u}-u)|^2+|\widehat{u}-u|^2/T)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant cT\int_V(|\nabla u|^2+|u|^2/T+|h|^2/T)\,dx.$$

Замечание 4.2. В случае, когда коэффициенты B_k, C не возмущены, оценку леммы можно заменить более сильной:

$$\delta\leqslant c\int_V(|\nabla u|^2+|h|^2/T)\,dx.$$

Доказательство. Невязка $w=\widehat{u}-u$ удовлетворяет системе

$$-\widehat{\Lambda}_1 w+w/T=\delta F,\quad \widehat{\Lambda}_1=1/2D_i\widehat{a}_{ij}D_j+\dots.$$

Правая часть этой системы имеет вид

$$\delta F=1/2D_i((\widehat{a}_{ij}-a_{ij})D_ju)+\zeta(B_kD_ku+Cu-g/T-D_ih_iT^{-1/2}).$$

С помощью невозмущенных уравнений (0.1) это выражение приводится к виду

$$\delta F=1/2D_i(\zeta A_{ij}D_ju)-\zeta u/T-T^{-1/2}h_iD_i\zeta-1/2(D_i\zeta)a_{ij}D_ju.$$

Утверждение леммы следует из априорной оценки леммы 4.1.

Лемма 4.5. *В условиях теоремы 4.1 при больших T и $\widehat{T}=T(\ln T)^2$*

$$\langle\mathbf{M}.|\Gamma(0,\infty)-\Gamma(0,\widehat{T})|^2\rangle\leqslant c\exp\{-c'(\ln T)^2\}.$$

Случайная величина $\mathbf{M}.\Gamma(0,\widehat{T})$ допускает разложение на $\mathfrak{K}(N)$-измеримые слагаемые:

$$\mathbf{M}_x\Gamma(0,\widehat{T})=\sum{}^*\mathbf{M}_x\{\Gamma(0,\widehat{T});\ \Xi(\widehat{T})=N\},$$

суммирование ведется по всевозможным конечным подмножествам целочисленной решетки.

Доказательство. Неравенство леммы — немедленное следствие (4.8) и леммы 4.2. Разложение — вариант формулы полной вероятности.

Лемма 4.6. *В условиях теоремы 4.1*

$$|\mathrm{cov}(\mathbf{M}_x\{\Gamma^{(\alpha)}(0,\widehat{T});\ \Xi(\widehat{T})=N\},[u^{(\beta)};R])|\leqslant$$
$$\leqslant c(\varkappa(r)+\varepsilon)\mathbf{E}(\mathbf{M}_x\{|\widehat{\Gamma}|^2;\ \Xi(\widehat{T})=N\})^{1/2}(\mathbf{P}_x\{\Xi(\widehat{T})=N\})^{1/2},$$
$$\widehat{\Gamma}=\Gamma(0,\widehat{T}),\ \varepsilon^2=T|N|r^dR^{-d}.$$

Доказательство. Случайную величину $[u^{(\beta)}]$ можно приблизить $\mathfrak{K}^+(N, r)$-измеримой случайной величиной $[\widehat{u}^{(\beta)}]$, где $\widehat{u}$ — описанное в лемме 4.4 решение системы (0.1) с коэффициентами и правой частью, «подправленными» по формулам (4.9) с функцией ζ, равной единице на окрестности $N\ V = N + [-r-2, r+2]^d$. Погрешность этой замены не превосходит

$$Z^+ = c\left(T^2R^{-d}\int\limits_V (|\nabla u|^2 + |u|^2/T + |h|^2/T)\,dx\right)^{1/2}; \tag{4.10}$$

по лемме 4.1 при $1 \leqslant r \leqslant R$ $\mathbf{E}(Z^+)^2 \leqslant cTr^dR^{-d}|N|$.

Обозначая $Z = \mathbf{M}_x\{\widehat{\Gamma}^{(\alpha)};\ \Xi(\widehat{T}) = N\}$, $\tilde{Z} = [u^{(\beta)}; R]$, $\zeta^+ = [\widehat{u}^{(\beta)}; R]$, нетрудно проверить, что

$$|\mathrm{cov}(Z, \tilde{Z})| \leqslant |\mathrm{cov}(Z, \zeta^+)| + \mathbf{E}|Z|Z^+ + \mathbf{E}|Z|\mathbf{E}Z^+ \leqslant$$
$$\leqslant c(\varkappa(r)\,(\mathbf{E}Z^2)^{1/2}(\mathbf{E}\tilde{Z}^2 + \mathbf{E}(Z^+)^2)^{1/2} + (\mathbf{E}Z^2)^{1/2}(\mathbf{E}(Z^+)^2)^{1/2}).$$

При этом $\mathbf{E}\tilde{Z}^2 \leqslant \langle|u|^2\rangle \leqslant c$, и по неравенству Коши — Буняковского

$$Z^2 \leqslant \mathbf{M}_x\{|\widehat{\Gamma}|^2;\ \Xi(\widehat{T}) = N\}\mathbf{P}_x\{\Xi(\widehat{T}) = N\}.$$

Доказательство теоремы 4.1. По леммам 4.5—4.6 при $\widehat{T} = T(\ln T)^2$

$$|\mathrm{cov}([u^{(\alpha)}],\ [u^{(\beta)}])| \leqslant c\exp\{-c'(\ln T)^2\} +$$
$$+ \mathbf{E}\left[\sum\nolimits^*(\mathbf{M}.\{|\widehat{\Gamma}|^2;\ \Xi(\widehat{T}) = N\}\,\mathbf{P}.\{\Xi(\widehat{T}) = N\})^{1/2}\right](\varepsilon + \varkappa(r)).$$

Остается воспользоваться оценками лемм 4.3 и 2.2:

$$\sum\nolimits^*\varepsilon(N)^2\,\mathbf{P}_x\{\Xi = N\} \leqslant Tr^dR^{-d}T(\ln T)^3,\quad \mathbf{E}\left[\sum\nolimits^*\mathbf{M}.\{|\widehat{\Gamma}|^2; \Xi = N\}\right] = \langle\mathbf{M}.|\widehat{\Gamma}|^2\rangle \leqslant c.$$

Более сильная оценка замечания 4.1 получается с помощью замечания 4.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Юринский В. В.** Об усреднении диффузии в случайной среде // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 5.— С. 76—85.
2. **Юринский В. В.** Об усреднении симметричной диффузии в случайной среде // Сиб. мат. журн.— 1986.— Т. 27, № 4.— С. 167—180.
3. **Юринский В. В.** О погрешности усреднения симметричных линейных эллиптических систем.— Новосибирск, 1987.— 50 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 3).
4. **Stroock D. W.** On certain systems of parabolic equations // Communs.— Pure and Appl. Math.— 1970.— V. 23, N 3.— P. 447—457.
5. **Bensoussan A.** Systems of partial differential equations and stochastic control // Le Matematiche.— 1981.— V. 36, N 1.— P. 13—32.
6. **Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.** Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М.: Наука, 1983.— 384 с.
7. **Иосида К.** Функциональный анализ.— М.: Мир, 1967.— 624 с.
8. **Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.** Независимые и стационарно связанные случайные величины.— М.: Наука, 1965.— 524 с.
9. **Aronson D. G.** Non-negative solutions of linear parabolic equations // Ann. scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.— 1968.— V. 22, N 4.— P. 607—694.
10. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1973.— 576 с.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А. В. ПОЖИДАЕВ

Усреднению параболических операторов при различных предположениях о строении коэффициентов посвящено большое число работ. Отметим среди них фундаментальный обзор [1], где приведена значительная часть результатов такого рода, а также статьи [2—4], посвященные родственным вопросам.

В этих работах получены результаты типа закона больших чисел, т. е. показана сходимость в определенном смысле операторов со случайными коэффициентами к оператору того же вида с постоянными коэффициентами. Отметим, что в [3] установлена и оценка скорости сходимости.

Основная цель настоящей работы состоит в установлении асимптотической нормальности решений параболических краевых задач вида

$$\partial u/\partial t - a_{ij}^{\varepsilon}\partial^2 u/\partial x_i\,\partial x_j - b_i^{\varepsilon}\,\partial u/\partial x_i - b_0^{\varepsilon}u = f(x, t),$$
$$x\in V,\ t\in[0, T],\ T<\infty,$$
$$u(x, 0)=g(x),\ u(x, t)|_{\partial V}=p(x, t),$$

где коэффициенты — m-зависимые случайные поля.

Отметим, что для эллиптических краевых задач со случайными младшими коэффициентами при произвольной размерности пространства вопрос об асимптотической нормальности решения исследован в [5, 6]. Если размерность пространства не превышает трех и случаен только коэффициент при решении, то аналогичные результаты получены также в [7, 8]. В работе [9] установлена асимптотическая нормальность решения волнового уравнения со случайными коэффициентами. В [10] этот результат был распространен на одномерные уравнения параболического типа.

В § 1 данной работы приведены некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений и введены необходимые обозначения. Ограничения на коэффициенты и формулировки основных результатов даны в § 2. Выделение асимптотически нормальных составляющих решений приведено в § 3. Основные результаты доказаны в § 4. Там же разобран пример, показывающий неулучшаемость по порядку ε оценки скорости сходимости в теореме 2.3.

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нам удобно воспользоваться обозначениями работы [6]. Применительно к целочисленному вектору $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ $0\leqslant\lambda\leqslant n$ означает, что все $\lambda_i\in\{0, 1, \ldots, n\}$. Символом $\pi(k)$ обозначаем набор всевозможных целочисленных векторов $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ таких, что $0\leqslant\lambda\leqslant n$. Для записи производной $\partial u(x, t)/\partial x_i$ применяются символы

$$D_i u,\ u_{\cdot i},\ u_{\cdot 0}\equiv u;\ \partial^k u/\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}\equiv u_{\cdot i_1 i_2\ldots i_k},\ D^{\alpha}u=\partial^{|\alpha|}u/\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$.

Для любой функции $K(x, t, y, \tau)$ обозначения аналогичны: $K_{\cdot i}(x, t, y, \tau)=\partial K(x, t, y, \tau)/\partial x_i$, $K_0(x, t, y, \tau)=K(x, t, y, \tau)$.

Пусть $V \subset R^n$ — ограниченная область. Тогда $W_2^k(V)$ (k — нецелое положительное число) есть пополнение множества $C_0^\infty(V)$ в норме (ср. с [11])

$$|u|^2_{W_2^k(V)} = \int_V \sum_{|\alpha|<k} |D^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha|=[k]} \int_{V^2} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2 \times$$
$$\times |x-y|^{-n-2(k-[k])} \cdot dx\, dy,$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Пусть $W_2^{-k}(V)$ — пространство, сопряженное к $W_2^k(V)$, $|u|_m \equiv \equiv |u|_{W_2^m(V)}$, $W_2^0(V) \equiv L_2(V)$. Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ обозначаем двойственность между $W_2^k(V)$ и $W_2^{-k}(V)$, одной буквой C различные неслучайные, не зависящие от ε постоянные.

Ниже приняты следующие обозначения: $V \subset R^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей ∂V, Δ — оператор Лапласа, $\mathbf{M}$ — символ математического ожидания, $\mu(y, \omega)$ — однородное в узком смысле, m-зависимое случайное поле, $\bar{b}(x, t, \omega) = \{b_0(x, t, \omega), b_1(x, t, \omega), \ldots \ldots, b_n(x, t, \omega)\}$ — векторнозначное m-зависимое по пространственным переменным случайное поле, т. е. для любых $k \in N$, $t_1, \ldots, t_k$ и набора $x_1, \ldots, x_k$ таких, что $|x_i - x_j| > m$ случайные векторы $\bar{b}(x_1, t_1, \omega), \ldots \ldots, \bar{b}(x_k, t_k, \omega)$ независимы в совокупности. Кроме того, через $l(x, t, \omega) \doteq = \|l^{ij}(x, t, \omega)\|$ обозначаем матричнозначное m-зависимое по времени случайное поле, т. е. матрицы $l(x, t, \omega)$, $l(y, \tau, \omega)$ со случайными коэффициентами независимы при $|t-\tau| > m$ как бы ни были выбраны пространственные переменные x, y. В дальнейшем, не ограничивая общности, полагаем $m = 1$.

В данной работе $k(x, t)$, $p(x, t)$, $g(x)$, $a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t)$ — неслучайные достаточно гладкие функции. Функции Грина краевых задач

$$\begin{gathered} \partial u/\partial t - a_{ij} u_{\cdot ij} = k(x, t), \\ x \in V, \quad t \in [0, T], \quad T < \infty, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, t)|_{\partial V} = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

и

$$\begin{gathered} \partial u/\partial t - (\mathbf{M}\mu^{-1})^{-1} \Delta u = k(x, t), \\ x \in V, \quad t \in [0, T], \quad T < \infty, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, t)|_{\partial V} = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

обозначаем $G(x, t, y, \tau)$ и $\Gamma(x, t, y, \tau)$ соответственно.

В (1) и ниже повторяющиеся индексы означают суммирование. Во всей работе $\delta > 0$ — произвольное сколь угодно малое фиксированное число, $r = 2 - n/2 - \delta$. Числа β_1, β удовлетворяют условию $0 < \beta < \beta_1 < \delta$, $s = 2 - n/2 - \beta_1$, $T(\tau) = (t-\tau)^{\beta/2-1}$, а $F_1(x, y)$ — функция Грина краевой задачи $\Delta u = h(x)$, $x \in V$, $u|_{\partial V} = 0$. Функция $F_k(x, y)$ при $k \geqslant 2$ определяется равенством

$$F_k(x, y) = \int_V F_{k-1}(x, z) F_1(z, y)\, dz.$$

Из результатов работы [12, теорема 8.3] следует, что если $h(x) \in \in W_2^{-k}(V)$, то существуют не зависящие от $h(x)$ положительные постоянные C_1, C_2 такие, что

$$C_1 |h|_{-k} \leqslant \left| \int_V F_m(x, y) h(y)\, dy \right|_{2m-k} \leqslant C_2 |h|_{-k}. \tag{3}$$

Пусть

$$\begin{aligned} &F(x, t, y, \tau) = G(x, t, y, \tau) && \text{при } n = 2, 3; \\ &F(x, t, y, \tau) = \int_V F_m(x, z) G(z, t, y, \tau)\, dz && \text{при } n > 3, \end{aligned} \tag{4}$$

где натуральное число m выбрано из условия

$$0 < s + 2m < 2. \tag{5}$$

Тогда для $F(x, t, y, \tau)$, а также функций Грина $G(x, t, y, \tau)$, $\Gamma(x, t, y, \tau)$ в силу [13, с. 170] справедливы оценки

$$|G(x, t, y, \tau)| + |\Gamma(x, t, y, \tau)| \leqslant CT(\tau)|x - y|^{2-\beta-n}, \tag{6}$$

$$\max_{s\leqslant n, k\leqslant n} (|G_{\cdot k}(x, t, y, \tau)| + |\Gamma_{\cdot s}(x, t, y, \tau)|) \leqslant CT(\tau)|x - y|^{1-\beta-n}, \tag{7}$$

$$|F_{\cdot i}(x, t, y, \tau)| \leqslant CT(\tau)|x - y|^{2m+2-\beta-n-j}, \tag{8}$$

где $j = 0$ при $i = 0$, $j = 1$ при $i \neq 0$.

Для произвольной функции $S(x, t, y, \tau)$ и индекса $\alpha = (i_1, \ldots, i_k) \in \in \pi(k)$

$$S^\alpha f(x; \{x_1, \ldots, x_k\}) \equiv \int_V \int_0^t S(x, t, x_1, t_1)\, b_{i_1}(x_1/\varepsilon, t_1, \omega) \times$$

$$\times \int_V \int_0^{t_1} G_{\cdot i_1}(x_1, t_1, x_2, t_2)\, b_{i_2}(x_2/\varepsilon, t_2, \omega) \cdot \ldots \cdot \int_V \int_0^{t_k} G_{\cdot i_{k-1}}(x_{k-1}, t_{k-1}, x_k, t_k) \times$$

$$\times b_{i_k}(x_k/\varepsilon, t_k, \omega)\, f_{\cdot i_k}(x_k, t_k)\, dt_k\, dx_k \ldots dt_1\, dx_1. \tag{9}$$

Здесь в фигурных скобках выделены пространственные переменные интегрирования.

По функции Грина $\Gamma(x, t, y, \tau)$ и случайному полю

$$\beta(x/\varepsilon, \omega) \equiv (\mathbf{M}\mu^{-1}(x/\varepsilon, \omega))^{-1}(\mathbf{M}\mu^{-1}(x/\varepsilon, \omega) - \mu^{-1}(x/\varepsilon, \omega)) \tag{10}$$

определим операторы $(\Gamma\beta)^k$ равенствами

$$\Gamma\beta f(x, t) = \int_V \int_0^t \Gamma(x, t, y, \tau)\, \beta(y/\varepsilon, \omega)\, f(y, \tau)\, d\tau\, dy, \tag{11}$$

$$(\Gamma\beta)^k f = (\Gamma\beta)^{k-1}\Gamma\beta f, \quad k \geqslant 2.$$

Иногда важное значение будут иметь временные переменные интегрирования. В этом случае для функции $S(x, t, y, \tau)$

$$S(t_1, t_2) * f \equiv \int_V \int_{t_1}^{t_2} S(x, t, y, \tau)\, f(y, \tau)\, d\tau\, dy. \tag{12}$$

Для интеграла I запись $I\{A\}$ означает, что область изменения временных переменных сужена до A.

В данной работе мы будем рассматривать три краевые задачи параболического типа со случайными коэффициентами:

$$\partial w/\partial t - a_{ij}(x, t)\, w_{\cdot ij} - b_i(x/\varepsilon, t, \omega)\, w_{\cdot i} - b_0(x/\varepsilon, t, \omega)\, w = k(x, t),$$
$$w(x, 0) = g(x), \quad w(x, t)|_{\partial V} = p(x, t); \tag{13}$$

$$\partial w_1/\partial t - \mu(x/\varepsilon, \omega)\Delta w_1 = k(x, t),$$
$$w_1(x, 0) = g(x), \quad w_1(x, t)|_{\partial V} = p(x, t); \tag{14}$$

$$\partial w_2/\partial t - (a_{ij}(x, t) + l^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega))\, w_{2\cdot ij} = f(x, t/\varepsilon, \omega),$$
$$w_2(x, 0) = g(x), \quad w_2(x, t)|_{\partial V} = p(x, t). \tag{15}$$

В задачах (13)—(15), если не оговорено противное, $t \in [0, T]$, $T < \infty$, $x \in V$. Решения задач (13), (15) рассматриваются при любом фиксированном $t \neq 0$.

§ 2. ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Предельное поведение решений задач (13) — (15) рассматривается в работе при следующих предположениях.

Для данных задач выполнены условия равномерной параболичности, т. е. существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что для любого вещественного вектора $\gamma=\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ с вероятностью 1 выполняются неравенства

$$C_1|\gamma|^2 \leqslant a_{ij}(x, t)\gamma_i\gamma_j \leqslant C_2|\gamma|^2,$$
$$C_1|\gamma|^2 \leqslant (a_{ij}(x, t)+l^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega))\gamma_i\gamma_j \leqslant C_2|\gamma|^2,$$
$$C_1 \leqslant \mu(x/\varepsilon, \omega) \leqslant C_2.$$

Почти все реализации случайных полей $l^{ij}(x, t, \omega)$, $f(x, t, \omega)$, $b_i(x, t, \omega)$, $\mu(x, \omega)$ — гладкие функции (случайные поля $l^{ij}(x, t, \omega)$ принадлежат по пространственным переменным классу $C_0^2(V_1)$, $V_1 \subset V$), причем для $a_{ij}(x, t)$, $l^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega)$, $f(x, t/\varepsilon, \omega)$, $g(x)$, $p(x, t)$ существует достаточное число производных по пространственным переменным, ограниченных одной неслучайной постоянной.

Случайные коэффициенты $b_i(x/\varepsilon, t, \omega)$, $i=0, 1, \ldots, n$, предполагаются ограниченными не зависящей от случая постоянной с вероятностью 1 при всех $x \in V$, $t \in [0, T]$.

При этих условиях краевые задачи (13) — (15) с вероятностью 1 имеют классические решения.

Под случайным решением задачи (13) ((14), (15)) понимается случайное поле, почти все реализации которого удовлетворяют (13) ((14), (15)).

Ниже предполагается, что случайные поля $l^{ij}(x, t, \omega)$, $f(x, t, \omega)$, $b_i(x, t, \omega)$ центрированы

$$\mathbf{M}l^{ij}=\mathbf{M}f=\mathbf{M}\bar{b}=0.$$

Кроме того, для любой непрерывной векторнозначной неслучайной функции $\bar{f}(x, t, \tau)=\{f_0(x, t, \tau), f_1(x, t, \tau), \ldots, f_n(x, t, \tau)\}$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n}\mathbf{M}\left(\int_V\int_0^t f_i(y, t, \tau)\, b_i(y/\varepsilon, \tau, \omega)\, d\tau\, dy\right)^2 = \sigma^2(\bar{f}) > 0. \tag{16}$$

Условие (16) выполнено, если, например, $\bar{b}(x, t, \omega)$ однородное, m-зависимое поле, причем

$$\sigma^2(\bar{f}) = \int_0^t\int_0^t \int_{|u|\leqslant m} R_{ij}(u, s, \tau)\, du \int_V f_i(y, t, \tau) f_j(y, t, s)\, dy\, d\tau\, ds,$$

где $R_{ij}(u, s, \tau)=\mathbf{M}b_i(y, \tau, \omega)b_j(y+u, s, \omega)$.

Отметим, что для случайного поля $\beta(x/\varepsilon, \omega)$ имеет место соотношение типа (16). Именно для любой непрерывной неслучайной функции $f(x)$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n}\mathbf{M}\left(\int_V f(y)\,\beta(y/\varepsilon, \omega)\, dy\right)^2 = \sigma_1^2(f), \tag{17}$$

где $\sigma_1^2(f)=\int_{|u|\leqslant m} R(u)\, du \int_V f^2(y)\, dy$, а $R(u)=\mathbf{M}\beta(y, \omega)\beta(y+u, \omega)$.

Пусть U, U_1, U_2 — решения следующих краевых задач:

$$\begin{gathered} \partial U/\partial t - a_{ij}U_{\cdot ij} = k(x, t), \\ U(x, 0)=g(x), \quad U(x, t)|_{\partial V} = p(x, t); \end{gathered} \tag{18}$$

$$\partial U_1/\partial t-(\mathbf{M}\mu^{-1})^{-1}\Delta U_1=k(x,t),$$
$$U_1(x,0)=g(x),\quad U_1(x,t)|_{\partial V}=\tilde{p}(x,t);\tag{19}$$
$$\partial U_2/\partial t-a_{ij}U_{2\cdot ij}=0,$$
$$U_2(x,0)=g(x),\quad U_2(x,t)|_{\partial V}=p(x,t).\tag{20}$$

При наложенных ограничениях справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.1. *При* $\varepsilon\to 0$ *решение* w *задачи* (13) *асимптотически нормально в том смысле, что распределение, порожденное в пространстве* $W_2^r(V)$ *обобщенных функций случайным полем*

$$v=\varepsilon^{-n/2}\left(w-U-\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{\alpha\in\pi(k)}\mathbf{M}G^\alpha U(x;\{x_1,\ldots,x_k\})\right),$$

слабо сходится к центрированному гауссовскому распределению в $W_2^r(V)$ *с характеристическим функционалом* $\tilde{\varphi}(\Phi)=\exp\{-\sigma^2(\bar{f})/2\}$, *где* $(y,t,\tau)=\int\limits_V\Phi(x)G_{\cdot i}(x,t,y,\tau)\,dx\cdot U_{\cdot i}(y,\tau)$, *а* $\sigma^2(\bar{f})$ *определена в* (16).

Теорема 2.1 является распространением теоремы 1.1 работы [6], доказанной для эллиптических уравнений со случайными коэффициентами, на параболические уравнения. Отметим, что в [14] получен результат, аналогичный теореме 2.1 при $n=1$.

Теорема 2.2. *Для любой функции* $\varphi(t)\in C_0^\infty(0,T)$ *распределение, порожденное в пространстве* $W_2^r(V)$ *случайным полем*

$$v_1=\varepsilon^{-n/2}\left(\int\limits_0^T\varphi(t)\,(w_1(x,t)-U_1(x,t)-\sum_{s=2}^{n+1}\mathbf{M}\partial^{s-1}(\Gamma\beta)^sF(x,t)/\partial t^{s-1})\,dt\right),$$

слабо сходится при $\varepsilon\to 0$ *к центрированному гауссовскому распределению в* $W_2^r(V)$ *с характеристическим функционалом* $\varphi_1(\Phi)=$ $=\exp\{-\sigma_1^2(f)/2\}$, *где* $f(y)=\int\limits_V\int\limits_0^T\int\limits_0^t\Phi(x)\varphi(t)\Gamma(x,t,y,\tau)F(y,\tau)\,d\tau\,dt\,dx$, $\sigma_1^2(f)$ *определена в* (17), *а*

$$F(x,t)=\partial U_1(x,t)/\partial t-k(x,t).\tag{21}$$

Теорема 2.3 усиливает результат работы [15], где для задачи Коши *скорости сходимости*

$$\mathbf{M}\,|\,w_2-U_2\,|_0^2\leqslant C\varepsilon.$$

Теорема 2.3 усиливает результат работы [15], где для задачи Коши со случайными коэффициентами была получена оценка скорости сходимости порядка $\varepsilon^{1/2-\delta}$.

Условие 2.1. Дополнительно предположим, что для любой функции $l(x)\in L_2(V)$ случайная величина

$$\varepsilon^{-1/2}\int\limits_V\int\limits_V\int\limits_0^t l(x)\,G(x,t,y,\tau)\left(l^{ij}(y,\tau/\varepsilon)\,U_{2\cdot ij}+f(y,\tau/\varepsilon)\right)d\tau\,dy\,dx$$

асимптотически нормальна с параметрами $(0,\sigma_2^2(l,G,U_2))$.

Тогда справедлив следующий результат.

Теорема 2.4. *Распределение, порожденное в пространстве* $W_2^{-\delta}(V)$ *случайным полем*

$$v_2=\varepsilon^{-1/2}(w_2-U_2),$$

слабо сходится при $\varepsilon\to 0$ *к центрированному гауссовскому распределению в* $W_2^-(V)$ *с характеристическим функционалом* $\varphi_2(l)=\exp\{-\sigma_2^2(l,G,U_2)/2\}$.

Теорема 2.4 усиливает теорему 1.1 из [15], где слабая сходимость была установлена в $W_2^{-3}(V)$.

Отметим также, что, как показано в [15], условие 2.1 выполнено, если, например, $l^{ij}(x, t, \omega)$, $f(x, t, \omega)$ — однородные, m-зависимые по временным переменным поля.

§ 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном пункте доказаны леммы, позволяющие выделить асимптотически нормальные составляющие решений задач (13)—(15).

Лемма 3.1. *Пусть* $0<\eta<1$, $k=2+2m-\beta$, *где* m *удовлетворяет* (5). *Тогда для функции* $F(x, t, y, \tau)$, *определенной равенством* (4), *имеет место оценка*

$$A\equiv|F_{\cdot i}(x, t, z, \tau)-F_{\cdot i}(y, t, z, \tau)|\leqslant CT(\tau)\times$$
$$\times|x-y|^{\eta}(|x-z|^{k-n-\eta-j}+|y-z|^{k-n-\eta-j}),$$

где $j=0$ *при* $i=0$, $j=1$ *при* $i\neq 0$.

Доказательство. При $|x-z|\leqslant 2|x-y|$ достаточно воспользоваться неравенством (8). В этом случае

$$A\leqslant CT(\tau)(|x-z|^{k-n-j}+|y-z|^{k-n-j})\leqslant$$
$$\leqslant CT(\tau)|x-y|^{\eta}(|x-z|^{k-n-\eta-j}+|y-z|^{k-n-\eta-j}).$$

При $|x-z|>2|x-y|$ для любой точки $\theta=\theta(x, y)\in[x, y]$ из неравенства треугольника получаем

$$2|\theta-z|\geqslant|z-y|+|z-x|-|\theta-y|-|\theta-x|=$$
$$=|z-y|+|z-x|-|x-y|\geqslant|x-z|.$$

Отсюда, по теореме о среднем

$$A\leqslant CT(\tau)|x-y||\theta-z|^{k-n-j-1}\leqslant CT(\tau)|x-y|^{\eta}\cdot|x-z|^{k-n-\eta-j}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Если* $|\nu|<s+2m$, *то*

$$B\equiv\left|\int\limits_V D^{\nu}F(x, t, y, \tau)D^{\nu}F(x, t, y_1, s)\,dx\right|\leqslant CT(\tau)T(s).$$

Доказательство. Пусть $|\nu|=j$, где $j=0, 1$. Тогда $k-j\equiv 2+2m-\beta-j>2+2m-\beta_1-j>n/2$. Отсюда в силу (8) получаем

$$B\leqslant CT(\tau)T(s)\int\limits_V(|x-y||x-y_1|)^{k-n-j}\,dx\leqslant CT(\tau)T(s).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть* $|\nu|=[\tilde\beta]$, $\tilde\beta=s+2m$. *Тогда*

$$D\equiv\left|\int\limits_{V^2}D^{\nu}(F(x, t, z, \tau)-F(y, t, z, \tau))D^{\nu}(F(x, t, u, s)-\right.$$
$$\left.-F(y, t, u, s))|x-y|^{2([\tilde\beta]-\tilde\beta)-n}\,dx\,dy\right|\leqslant CT(\tau)T(s).$$

Доказательство. Пусть $|\nu|=j$, $j=0, 1$, а γ удовлетворяет условиям: $\beta_1-\beta>3\gamma$, $0<\tilde\beta-[\tilde\beta]+\gamma\equiv\alpha<1$. Тогда $l\equiv k-\alpha-j\equiv 2+2m-\beta-\tilde\beta+[\tilde\beta]-\gamma-j>2+2m-\tilde\beta+2\gamma-\beta_1>n/2$.

Отсюда в силу леммы 3.1

$$D\leqslant CT(\tau)T(s)\int\limits_{V^2}|x-y|^{2\gamma-n}(|x-z|^{l-n}+$$
$$+|y-z|^{l-n})(|x-u|^{l-n}+|y-u|^{l-n})\,dx\,dy\leqslant CT(\tau)T(s).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Если* $\Phi(x)\in W_2^{-s}(V)$, *то случайные величины* $\varepsilon^{-n/2}\left\langle\Phi, \sum\limits_{\alpha\in\pi(1)} G^\alpha U\right\rangle_{-s}$, $\varepsilon^{-n/2}\left\langle\Phi, \int\limits_0^T \varphi(t)\,\Gamma\beta F(x, t)\,dt\right\rangle_{-s}$ *асимптотически нормальны с параметрами* $(0, \sigma^2(\bar f))$, $(0, \sigma_1^2(f))$, *где* $\varphi(t)$, $\bar f(x, t, \tau)$, $f(x)$ *определены в формулировках теорем* 2.1, 2.2.

Лемма 3.4 есть частный случай доказанной в [16] теоремы.

Лемма 3.5. *Имеют место оценки*

$$\varepsilon^{-n}\mathbf{M}\left|\sum_{\alpha\in\pi(1)} G^\alpha U(x; \{x_1\})\right|_s^2 < C,$$

$$\left|\sum_{\alpha\in\pi(k)} \mathbf{M}G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\})\right|_s^2 \leqslant C\varepsilon^{2(1-\beta)[k+1/2]},$$

где $G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\})$ *определено равенством* (9).

Лемма 3.6. *Справедливо неравенство*

$$L\equiv\mathbf{M}\left|\sum_{\alpha\in\pi(k)} G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\}) - \mathbf{M}G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\})\right|_s^2 \leqslant C\varepsilon^{n+1-\beta}.$$

Лемма 3.7. *Имеет место оценка*

$$\mathbf{M}\left|\sum_{\alpha\in\pi(n+1)} G^\alpha w(x; \{x_1, \ldots, x_{n+1}\})\right|_s^2 \leqslant C\varepsilon^{n+1-\beta}.$$

Леммы 3.1—3.3 и неравенства (3) позволяют провести доказательства лемм 3.5—3.7 так же, как и лемм 4.2—4.4 в [5]. Докажем, например, лемму 3.6.

Из неравенств (3) имеем

$$\mathbf{M}\,|G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\}) - \mathbf{M}G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\})|_s^2 \leqslant$$
$$\leqslant C\mathbf{M}\,|F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\})|_{s+2m}^2,$$

где функция $F(x, t, y, \tau)$ определена равенством (4).

Используя определение нормы в пространстве $W_2^{s+2}(V)$, получаем

$$L\leqslant C\mathbf{M}\left(\int\limits_V \sum_{|\nu|<s+2m} D^\nu(F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\}))\right)\times$$
$$\times D^\nu(F^\alpha U(x; \{z_1, \ldots, z_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(x; \{z_1, \ldots, z_k\}))\,dx +$$
$$+\sum_{|\nu|=[s+2m]} \int\limits_{V^2} (D^\nu(F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\})) -$$
$$- D^\nu(F^\alpha U(y; \{y_1, \ldots, y_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(y; \{y_1, \ldots, y_k\})))\times$$
$$\times(D^\nu(F^\alpha U(x; \{z_1, \ldots, z_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(x; \{z_1, \ldots, z_k\})) -$$
$$- D^\nu(F^\alpha U(y; \{z_1, \ldots, z_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(y; \{z_1, \ldots, z_k\})))\times$$
$$\times|x-y|^{-n-2(s+2m-[s+2m])}\,dx\,dy. \tag{22}$$

Пусть $m(\bar y, \bar z) = \mathbf{M}b_{i_1}(y_1/\varepsilon, t_1, \omega)\cdot\ldots\cdot b_{i_k}(y_k/\varepsilon, t_k, \omega)\,b_{i_1}(z_1/\varepsilon, \tau_1, \omega)\cdot\ldots$ $\ldots\cdot b_{i_k}(z_k/\varepsilon, \tau_k, \omega)$,

$$m(\bar y) = \mathbf{M}b_{i_1}(y_1/\varepsilon, t_1, \omega)\cdot\ldots\cdot b_{i_k}(y_k/\varepsilon, t_k, \omega),$$
$$m(\bar z) = \mathbf{M}b_{i_1}(z_1/\varepsilon, \tau_1, \omega)\cdot\ldots\cdot b_{i_k}(z_k/\varepsilon, \tau_k, \omega).$$

В условиях теоремы 2.1 $m(\bar y, \bar z) = 0$, если найдется такое i, что для всех j $|x_i - x_j| > \varepsilon$, где $x_i = y_i$ при $i\leqslant k$, $x_i = z_s$ при $i = s + k$.

Введем области

$$K_1 = \{(\bar y, \bar z)\in V^{2k} : m(\bar y, \bar z)\neq 0,\quad \exists(i, j) : |y_i - z_j| < \varepsilon\},$$
$$K_2 = \{(\bar y, \bar z)\in V^{2k} : m(\bar y, \bar z)\neq 0,\quad \bar\exists(i, j) : |y_i - z_j| < \varepsilon\}.$$

Заметим, что в области K_2 $m(\bar{y}, \bar{z}) = m(\bar{y}) m(\bar{z})$, а область K_1 можно покрыть конечным числом областей вида

$$G(i, j, k, t) = \{\bar{y} \in V^k, \bar{z} \in V^k : |y_i - z_j| < \varepsilon, |y_k - y_t| < \varepsilon\}$$

и

$$\tilde{G}(i, j, k, t) = \{\bar{y} \in V^k, \bar{z} \in V^k : |y_i - z_j| < \varepsilon, |y_k - z_t| < \varepsilon\}.$$

Отсюда, из (22), в силу лемм 3.1—3.3 и оценок (6), (7), после интегрирования по всем переменным, кроме y_i, y_k, y_t, z_j, z_t, получаем

$$L \leqslant C \iint\limits_{|y_i - z_j| < \varepsilon} \iint\limits_{|y_k - y_t| < \varepsilon} (|y_i - y_k| \, |y_k - y_t|)^{1-\beta-n} dy_i \, dy_k \, dy_t \, dz_j +$$

$$+ C \iint\limits_{|y_i - z_j| < \varepsilon} \iint\limits_{|y_k - z_t| < \varepsilon} (|y_i - y_k| \, |z_j - z_t|)^{1-\beta-n} dy_i \, dy_k \, dz_j \, dz_t \leqslant C\varepsilon^{n+1-\beta}.$$

Лемма доказана.

Замечание 3.1. Очевидно, что леммы 3.5—3.7 остаются справедливыми, если в формулировках этих лемм $G^\alpha U$ заменить на $(\Gamma\beta)^k F$.

Лемма 3.8. *Пусть $q(x, t)$ — гладкая функция и $q(x, 0) = 0$. Тогда, если $h(x, t)$ — решение краевой задачи*

$$\partial h/\partial t - C\Delta h = \partial q/\partial t, \; h(x, 0) = 0, \; h(x, t)|_{\partial V} = 0,$$

то $s(x, t) = \int\limits_0^t h(x, \tau) \, d\tau$ является решением следующей краевой задачи:

$$\partial s/\partial t - C\Delta s = q, \; s(x, 0) = 0, \; s(x, t)|_{\partial V} = 0. \tag{23}$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta s(x, t) = \int\limits_0^t \Delta h(x, \tau) \, d\tau = \int\limits_0^t (C^{-1}(\partial h(x, \tau)/\partial \tau - \partial q(x, \tau)/\partial \tau)) \, d\tau =$$

$$= C^{-1}(h(x, t) - h(x, 0) - q(x, t) + q(x, 0)) =$$

$$= C^{-1}(h(x, t) - q(x, t)) = C^{-1}(\partial s(x, t)/\partial t - q(x, t)).$$

Отсюда $\partial s(x, t)/\partial t - C\Delta s(x, t) = q(x, t)$. Последние два равенства в (23) очевидны. Лемма доказана.

Лемма 3.8 показывает, что при сформулированных ограничениях в интеграле $\int\limits_0^t \int\limits_V \Gamma(x, t, y, \tau) \, \partial q(y, \tau)/\partial \tau \, dy \, d\tau$ производную по времени можно выносить за знак интеграла. Этот результат следует также из того, что функция Грина $\Gamma(x, t, y, \tau)$ по временным переменным зависит только от разности $t - \tau$.

При сформулированных в п. 2 ограничениях на коэффициенты задачи (15) из работы [17, с. 22—31] следует, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.9. *Существует не зависящая от случая постоянная C такая, что с вероятностью 1 при всех $x \in V$, $t \in [0, T]$*

$$\max_{|\alpha| \leqslant 4} |D^\alpha w_2(x, t)| < C.$$

Лемма 3.10. *Справедливо неравенство*

$$\mathbf{M} \, |G(0, t) * l^{ij} (G(0, t_1) * l^{hs} w_{2 \cdot hs})_{,ij}|_0^2 \leqslant C\varepsilon^{1,5-\beta},$$

где w_2 — решение задачи (15), а оператор $G(0, t)$ определен равенством (12).

Доказательство. Запишем выражение, стоящее под знаком нормы в виде

$$G(0,\ t)*l^{ij}(G(0,\ t_1)*l^{ks}w_{2\cdot ks})_{\cdot ij}=G(0,\ t)*l^{ij}(G(0,\ t_1-5\varepsilon)*\\ *l^{ks}w_{2\cdot ks})_{\cdot ij}+G(0,\ t)*l^{ij}(G(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{ks}w_{2\cdot ks})_{\cdot ij}. \tag{24}$$

В силу представления вторых производных фундаментального решения (см. [15, п. 5]) и финитности поля l^{ij} существует функция $L(x,\ t,\ y,\ \tau)$ такая, что

$$|L(x,\ t,\ y,\ \tau)|\leqslant C(t-\tau)^{-n/2}\exp\{-C|x-y|^2/(t-\tau)\} \tag{25}$$

и имеет место равенство

$$G(0,\ t)*l^{ij}(G(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{ks}w_{2\cdot ks})_{\cdot ij}=G(0,\ t)*l^{ij}L(t_1-5\varepsilon,t_1)*l^{ks}_{\cdot ij}w_{2\cdot ks}+\\ +G(0,\ t)*l^{ij}L(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{ks}_{\cdot j}w_{2\cdot ksi}+G(0,\ t)*l^{ij}L(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{ks}_{\cdot i}w_{2\cdot ksj}+\\ +G(0,\ t)*l^{ij}L(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{ks}w_{2\cdot ksij}. \tag{26}$$

Из (25), леммы 3.9 и ограниченности $l^{ks}_{\cdot i}$, $l^{ks}_{\cdot ij}$ следует, что все слагаемые в правой части (26) имеют одинаковую особенность. Кроме того, в силу леммы 3.9, (25) и [11, с. 406] справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_V L(x,\ t,\ y,\ \tau)\,l^{ks}w_{2\cdot ksij}(y,\ \tau)\,dy\right|<C.$$

Отсюда

$$|G(0,\ t)*l^{ij}(G(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{ks}w_{2\cdot ks})_{\cdot ij}|_0^2\leqslant\\ \leqslant C\,|G(0,\ t)*l^{ij}L(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{ks}w_{2\cdot ksij}|_0^2\leqslant C\varepsilon^2.$$

Теперь оценим первое слагаемое в правой части (24). Аналогично предыдущему, в силу [15, п. 5] и финитности поля $l^{ij}(x,\ t,\ \omega)$ существуют функции $R(x,\ t,\ y,\ \tau)$, $K(x,\ t,\ y,\ \tau)$ такие, что $|G(0,t)*l^{ij}(G(0,t_1-$ $-5\varepsilon)*l^{ks}w_{2\cdot ks})_{\cdot ij}|_0^2$ оценивается конечной суммой интегралов вида

$$J\equiv|G(0,t)*lR(0,t_1-5\varepsilon)*lK(0,t_2)*lw_{2\cdot ksij}|_0^2, \tag{27}$$

причем для функций $R(x,\ t,\ y,\ \tau)$, $K(x,\ t,\ y,\ \tau)$ имеет место оценка

$$|R(x,\ t,\ y,\ \tau)|+|K(x,\ t,\ y,\ \tau)|\leqslant C(t-\tau)^{1/2-\beta}\cdot|x-y|^{\beta-n}. \tag{28}$$

Отметим, что в (27) в качестве $l(x,\ t/\varepsilon,\ \omega)$ может быть любая из функций $l^{ij}(x,\ t/\varepsilon,\ \omega)$ либо их производные по пространственным переменным до второго порядка включительно.

Итак,

$$\mathbf{M}\,|G(0,t)*l^{ij}(G(0,t_1-5\varepsilon)*l^{ks}w_{2\cdot ks})_{\cdot ij}|_0^2\leqslant C\mathbf{M}J.$$

Введем функцию

$$r(x,t_1,t_2,t_3)=\int\limits_V\int\limits_V\int\limits_V G(x,t,x_1,t_1)\,l(x_1,t_1/\varepsilon,\omega)\,R(x_1,t_1,x_2,t_2)\times\\ \times l(x_2,t_2/\varepsilon,\omega)\,K(x_2,t_2,x_3,t_3)\,l(x_3,t_3/\varepsilon,\omega)\,w_{2\cdot ksij}(x_3,t_3)\,dx_3\,dx_2\,dx_1.$$

Тогда

$$J=\int\limits_V\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1-5\varepsilon}\int\limits_0^{t_2}r(x,t_1,t_2,t_3)\,dt_3\,dt_2\,dt_1\times\\ \times\int\limits_0^t\int\limits_0^{\tau_1-5\varepsilon}\int\limits_0^{\tau_2}r(x,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\,d\tau_2\,d\tau_2\,d\tau_1\,dx.$$

Заметим, что в силу m-зависимости поля $l(x,\ t,\ \omega)$ и условия центрирования $\mathbf{M}J\{t_1>\tau_1-\varepsilon\}=\mathbf{M}J\{\tau_1>t_1-\varepsilon\}=0$. А из неравенства (28) получаем

$$\mathbf{M}J\{|t_1-\tau_1|\leqslant\varepsilon\cap|t_2-\tau_2|\leqslant\varepsilon\}\leqslant C\iint\limits_{|t_1-\tau_1|<\varepsilon}\iint\limits_{|t_2-\tau_2|<\varepsilon}((t_1-t_2)(\tau_1-\tau_2))^{-1/2-\beta}d\tau_2\,d\tau_1\,dt_2\,dt_1\leqslant C\varepsilon^{3/2-\beta}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{M}J\{|t_1-\tau_1|\leqslant\varepsilon\cap t_2-\tau_2>\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant C\iint\limits_{|t_1-\tau_1|<\varepsilon}\int\limits_0^{t_1-5\varepsilon}(t_1-t_2)^{-1/2-\beta}\int\limits_{t_2-\varepsilon}^{t_2}(t_2-t_3)^{-1/2-\beta}dt_3\,dt_2\,dt_1\,d\tau_1\leqslant C\varepsilon^{3/2-\beta}.$$

Аналогично

$$\mathbf{M}J\{|t_1-\tau_1|\leqslant\varepsilon\cap\tau_2-t_2>\varepsilon\}\leqslant C\varepsilon^{3/2-\beta}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.11. *Справедливо неравенство*

$$H\equiv\mathbf{M}\,|G(0,t)*l^{ij}(G(0,t_1)*l^{ks}U_{2\cdot ks})_{\cdot ij}|_0^2\leqslant C\varepsilon^2.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3.10, используя финитность поля $l^{ij}(x,t,\omega)$ и представление вторых производных фундаментального решения [15, п. 5], легко убедиться, что H оценивается конечным числом интегралов вида $\mathbf{M}|G(0,t)*lL(0,t_1)*lU_{2\cdot ijks}|_0^2$, где функции $l(x,t,\omega)$, $L(x,t,y,\tau)$ те же, что и в лемме 3.10.

Так как $L(x,t,y,\tau)$ и фундаментальное решение задачи (20) имеют одинаковый порядок особенности, то требуемая оценка следует из ограниченности функции $U_{2\cdot ijks}$ и леммы 3.2 (см. [15, с. 175]).

Лемма доказана.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $u=w-U$, где w и U решения задач (13) и (18). Тогда

$$\partial u/\partial t-a_{ij}u_{\cdot ij}=b_iu_{\cdot i}+b_iU_{\cdot i},$$
$$u(x,0)=0,\quad u(x,t)|_{\partial V}=0.$$

Используя функцию Грина $G(x,t,y,\tau)$, имеем

$$u=Gb_iu_{\cdot i}+Gb_iU_{\cdot i},\tag{29}$$

где оператор G определен по функции $G(x,t,y,\tau)$ равенством

$$Gf=\int\limits_V\int\limits_0^t G(x,t,y,\tau)f(y,\tau)\,d\tau\,dy.$$

Из (29) получаем

$$u=\sum_{\alpha\in\pi(n+1)}G^\alpha u+\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{\alpha\in\pi(k)}G^\alpha U.$$

Из неравенства Чебышева и лемм 3.4—3.7 имеем

$$\varlimsup_{t\to\infty}\mathbf{P}(|v|_s>t)\leqslant\varlimsup_{t\to\infty}\mathbf{M}|v|_s^2\cdot t^{-2}\leqslant\varlimsup_{t\to\infty}Ct^{-2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(|v|_s>t)=0.\tag{30}$$

Пространство $W_2^s(V)$ компактно вкладывается в $W_2^r(V)$, так как $s>r$. Поэтому из (30) и [18, с. 516] следует, что семейство распределений, порожденных в пространстве $W_2^r(V)$ случайным полем v, слабо компактно.

Для всякой непрерывной функции $\Phi(x)$ в силу лемм 3.4—3.7 случайная величина $\langle\Phi, v\rangle_{-r}$ асимптотически нормальна при $\varepsilon \to 0$ с параметрами $(0, \sigma^2(\bar{f}))$, где

$$f_i(y, t, \tau) = \int\limits_V \Phi(x) G_{\cdot i}(x, t, y, \tau)\, dx\, U_{\cdot i}(y, \tau),$$

а $\sigma^2(\bar{f})$ определена (16). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $u_1 = w_1 - U_1$, где w_1 и U_1 решения задач (14) и (19).

Тогда

$$\begin{gathered}\partial u_1/\partial t - (\mathrm{M}\mu^{-1})^{-1}\Delta u_1 = \beta\partial u_1/\partial t + \beta F,\\ u_1(x, 0) = 0, \quad u_1(x, t)|_{\partial V} = 0,\end{gathered} \tag{31}$$

где $\beta(x/\varepsilon, \omega)$ и $F(x, t)$ определены равенствами (10) и (21).

Сведем задачу (31) к интегральному уравнению, используя функцию Грина $\Gamma(x, t, y, \tau)$ задачи (2). Имеем

$$u_1 = \Gamma\beta\partial u_1/\partial\tau + \Gamma\beta F, \tag{32}$$

где оператор $\Gamma\beta$ определен (11).

Из (32) и леммы 3.8 следует, что u_1 можно представить в виде

$$u_1 = \partial^{n+1}(\Gamma\beta)^{n+1}u_1/\partial t^{n+1} + \sum_{s=2}^{n+1} \partial^{s-1}(\Gamma\beta)^s F/\partial t^{s-1} + \Gamma\beta F.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 2.1, используя неравенство Чебышева и замечание 3.1, легко получить, что семейство распределений, порожденных в пространстве $W_2^r(V)$ случайным полем v_1, слабо компактно, и для любой непрерывной функции $\Phi(x)$ случайная величина $\langle\Phi, v_1\rangle_{-r}$ асимптотически нормальна при $\varepsilon \to 0$ с параметрами $(0, \sigma_1^2(f))$, где

$$f(y) = \int\limits_V \int\limits_0^T \int\limits_0^t \Phi(x)\, \varphi(t)\, \Gamma(x, t, y, \tau)\, F(y, \tau)\, d\tau\, dt\, dx,$$

а $\sigma_1^2(f)$ определена (17). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Для разности $u_2 = w_2 - U_2$, где w_2 и U_2 — решения задач (15) и (20), имеем

$$\begin{gathered}\partial u_2/\partial t - a_{ij}u_{2\cdot ij} = l^{ij}u_{2\cdot ij} + l^{ij}U_{2\cdot ij} + f,\\ u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(x, t)|_{\partial V} = 0.\end{gathered} \tag{33}$$

Сведем (33) к интегральному уравнению, используя функцию Грина $G(x, t, y, \tau)$. Получаем

$$u_2 = G(0, t) * l^{ij}u_{2\cdot ij} + G(0, t) * l^{ij}U_{2\cdot ij} + G(0, t) * f.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}u_2 = G(0, t) * l^{ij}(G(0, t_1) * l^{ks}u_{2\cdot ks})_{\cdot ij} + G(0, t) *\\ * l^{ij}(G(0, t_1) * l^{ks}U_{2\cdot ks})_{\cdot ij} + G(0, t) * l^{ij}(G(0, t_1) * f)_{\cdot ij} +\\ + G(0, t) * l^{ij}U_{2\cdot ij} + G(0, t) * f.\end{gathered} \tag{34}$$

Отсюда и из лемм 3.10, 3.11, [15, с. 173] имеем

$$\mathrm{M}\,|u_2|_0^2 \leqslant C\varepsilon^{3/2-\beta} + C\varepsilon^2 + C\varepsilon^2 + C\varepsilon + C\varepsilon \leqslant C\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Как и при доказательстве теоремы 2.1, из теоремы 2.3, неравенства Чебышева, компактности вложения $L_2(V)$ в $W_2^{-\delta}(V)$ и условия 2.1 получаем, что семейство распределений, порожденных в пространстве $W_2^{-\delta}(V)$ случайным полем v_2, слабо компактно. А из представления (34), лемм 3.10, 3.11 и условия 2.1 следует, что для всякой функции $l(x) \in L_2(V)$ случайная величина $\langle l, v_2 \rangle_\delta$ асимптотически нормальна при $\varepsilon \to 0$ с параметрами $(0, \sigma_2^2(l, G, U_2))$. Теорема доказана.

Замечание 4.1. Отметим, что теоремы 2.1—2.4 остаются справедливыми для второй и третьей краевых задач, а также задачи Коши. Это следует из одинаковых особенностей функций Грина для этих задач, фундаментального решения задачи Коши и функций $G(x, t, y, \tau)$, $\Gamma(x, t, y, \tau)$.

Рассмотрим пример, показывающий, что оценку скорости сходимости в теореме 2.3 нельзя улучшить по ε.

Пусть u решение задачи Коши

$$\begin{gathered} \partial u/\partial t - \Delta u = f(t/\varepsilon, \omega), \ t \in [0, T], \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \end{gathered} \tag{35}$$

где $f(t, \omega)$ — стационарный в широком смысле процесс с единичным радиусом зависимости; $\mathbf{M}f = 0$, $|f(t, \omega)| < C$. Тогда решение усредненной задачи $U \equiv 0$. Из (35) легко получить, что

$$u = \int_0^t f(\tau/\varepsilon, \omega)\, d\tau.$$

Отсюда при любом фиксированном $t \neq 0$

$$\mathbf{M}u^2 = \int_0^t \int_0^t \mathbf{M} f\left(\frac{\tau_1}{\varepsilon}, \omega\right) f\left(\frac{\tau_2}{\varepsilon}, \omega\right) d\tau_1\, d\tau_2 = \iint\limits_{|\tau_1 - \tau_2| \leq \varepsilon} B\left(\frac{(\tau_1 - \tau_2)}{\varepsilon}\right) d\tau_1\, d\tau_2 =$$

$$= \varepsilon \int_0^t \int\limits_{|s| \leq 1} B(s)\, ds\, d\tau_1 \geq C\varepsilon,$$

где $B(s) = \mathbf{M}f(\tau, \omega) f(\tau + s, \omega)$ — ковариационная функция $f(\tau, \omega)$.

В заключение автор выражает глубокую признательность В. В. Юринскому за постоянные консультации по данной тематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.** О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук.— 1981.— Т. 36, № 1.— С. 11—58.
2. **Жиков В. В., Сиражудинов М. М.** Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решения задачи Коши // Мат. сб.— 1981.— Т. 116, № 2.— С. 166—186.
3. **Юринский В. В.** Об усреднении диффузии в случайной среде // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 5.— С. 75—85.
4. **Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.** Усреднение параболических операторов // Тр. ММО.— 1982.— Т. 45.— С. 182—236.
5. **Пожидаев А. В.** Об асимптотической нормальности решений краевых задач со случайными коэффициентами // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 23, № 4.— С. 142—153.
6. **Пожидаев А. В.** Предельное поведение решений краевых задач со случайными коэффициентами // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 5.— С. 86—96.
7. **Жауров Ю. В.** Флуктуации в схеме усреднения и суммирование независимых случайных величин // Теория случайных процессов.— Киев, 1984.— Вып. 12.— С. 21—27.
8. **Figari R., Orlandi E., Papanicolaou G.** Mean field and gaussian approximation for partial differential equations with random coefficients // SIAM J. Appl. math.— 1982.— V. 42, № 5.— P. 1069—1077.
9. **Юринский В. В.** О распространении волн в одномерной случайной среде.— Новосибирск, 1982.— 26 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 9).

10. **Аканбаев Н.** Об оценке остаточного члена в теореме осреднения для случайных параболических уравнений // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.— 1985.— № 5.— С. 11—15.
11. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.
12. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.— 371 с.
13. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.— 427 с.
14. **Жауров Ю. В.** Флуктуации в схеме усреднения для параболических краевых задач // Теория случайных процессов.— Киев, 1986.— Вып. 14.— С. 15—21.
15. **Пожидаев А. В.** Асимптотическая нормальность решений параболических уравнений со случайными коэффициентами // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1984.— Т. 5.— С. 170—181.
16. **Леоненко Н. Н.** О центральной предельной теореме для m-зависимых случайных полей в схеме, родственной схеме серий // Укр. мат. журн.— 1975.— Т. 27, № 5.— С. 674—677.
17. **Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.** Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук.— 1962.— Т. 17, № 3.— С. 3—146.
18. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1977.— 567 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ СО АН СССР. Т. 13

Редакторы издательства
В. Г. Перепелкин, Т. Д. Семченко

Художественный редактор
Л. Л. Мордохович

Технический редактор
А. В. Сурганова

Корректоры
В. К. Жихарева, И. А. Абрамова

ИБ № 34430

Сдано в набор 22.12.88. Подписано к печати 06.09.89. МН-01089. Формат 70×108[1]/16. Бумага типографская № 2. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 17,5. Усл. кр.-отт. 18,9. Уч.-изд. л. 17,5. Тираж 1150 экз. Заказ № 518. Цена 3 р. 70 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099 Новосибирск, ул. Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077 Новосибирск, ул. Станиславского, 25.

УДК 519.214.4 + 519.214.6

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. *Борисов И. С.* // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).

В работе получены оценки типа Берри — Эссена близости распределений гладких по Фреше функционалов от сумм независимых разнораспределенных случайных элементов и соответствующих гауссовских в произвольном банаховом пространстве. При этом не предполагается выполнение центральной предельной теоремы для исходной последовательности случайных элементов (требуется лишь предгауссовость их распределений). В качестве приложений рассматривается принцип инвариантности для эмпирических полей, а также классический принцип инвариантности Донскера — Прохорова. Библиогр. 20 назв.

УДК 519.214.4

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ. *Саханенко А. И.* // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).

Получены оценки в принципе инвариантности для разнораспределенных случайных величин при существовании моментов произвольного порядка. Эти оценки усиливают известные результаты Комлоша — Майора — Тушнади, Борисова — Боровкова и автора. Библиогр. 20 назв.

УДК 519.214.4

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ТИПА БЕРГСТРЕМА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. *Нагаев С. В., Чеботарев В. И.* // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).

Получена оценка остаточного члена в разложении типа Бергстрема в гильбертовом пространстве для вероятностей попадания в шары с центром в нуле. В 1984 г. В. Ю. Бенткус также получил оценку остаточного члена в разложении упомянутого выше типа. Эта оценка менее точна, чем доказанная в данной статье: она формулируется в терминах $(k+2)$-го момента нормы срезки исходной случайной величины. В предлагаемой же работе оценка зависит только от третьего и четвертого моментов. Кроме того, в отличие от статьи В. Ю. Бенткуса здесь указана зависимость от ковариационного оператора. Необходимо отметить, что в работе В. Ю. Бенткуса рассматривается более широкий класс множеств, включающий в себя, в частности, все эллипсоиды. Методы доказательств в этих работах сильно отличаются, хотя и тот и другой основаны на применении аппарата характеристических функций. Библиогр. 8 назв.

УДК 519.214.5

СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С φ-ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ. *Утев С. А.* // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).

В работе исследуется асимптотическое поведение распределений частичных сумм слабозависимых случайных величин.

Значительная часть исследований посвящена анализу дисперсии и оценкам вероятностей больших уклонений сумм зависимых слагаемых.

Затем полученные оценки используются для обобщения на суммы случайных величин с φ-перемешиванием закона повторного логарифма и почти наверное принципа инвариантности.

Некоторые из доказанных утверждений развивают работы известных в этой области специалистов: И. А. Ибрагимова, W. Philipp, M. Peligrad, R. Bradley и др. Библиогр. 31 назв.

УДК 519.213.5 + 517.986.225

АСИМПТОТИКА БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В $\mathbf{R}^n$. *Сгибнев М. С.* // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).

Пусть F — безгранично делимое распределение в $\mathbf{R}^n$, ν — соответствующая ему мера Леви, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор с положительными координатами, $y \in \mathbf{R}^n$ и $B(x) = \{u \in \mathbf{R}^n: \exists i: u_i > x_i\}$. В работе доказано, что при определенных условиях величины $F(tB(x)+y)$ и $\nu(tB(x)+y)$ обладают одинаковым асимптотическим поведением при $t \to \infty$. В статье также получены теоремы о банаховых алгебрах мер в $\mathbf{R}^n$ с заданными асимптотическими характеристиками. Библиогр. 34 назв.

УДК 519.21

ОБ АСИМТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ДВУГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЦЕПИ МАРКОВА. *Лотов В. И.* // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).

Найдены полные асимптотические разложения по степеням $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ распределений вида $\mathbf{P}(S_N \in A,\ N = n,\ \varkappa_n = k \mid \varkappa_0 = j)$ и $\mathbf{P}S_n \in B,\ N > n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)$ при $a = a(n) \to \infty$, $b = b(n) \to \infty$, $a + b = o(n)$, $a + b \geqslant C\sqrt{n}$ и при выполнении условий крамеровского типа на распределение скачки. Здесь $S_1, S_2, \ldots$ — случайное блуждание, заданное на переходах конечной цепи Маркова $\{\varkappa_n\}$, $N = \min\{n : S_n \notin (-a, b)\}$. Библиогр. 13 назв.

УДК 519.214 + 519.217.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О МАКСИМУМЕ ДЛИН СЕРИЙ «УСПЕХОВ» В МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ. *Новак С. Ю.* // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).

Для марковской цепи $\{\xi_i, i\geqslant 0\}$ с состояниями 1, 0 рассматривается случайная величина

$$\eta_n = \max\left\{k \leqslant n : \max_{0\leqslant i\leqslant n-k} 1\{\xi_{i+1} = \dots = \xi_{i+k} = 1\} = 1\right\}.$$

По своему смыслу ξ_n есть максимум длин серий «успехов» (единиц) в испытаниях $\xi_1, \dots, \xi_n$. В работе найдены асимптотические разложения в задаче о максимуме длин серий «успехов» в марковской цепи с двумя состояниями. В частности, установлено, что скорость сходимости к предельному закону есть $O(n^{-1}\ln n)$. Библиогр. 19 назв.

УДК 519.214

О ВЕРОЯТНОСТЯХ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. *Боровков А. А., Могульский А. А.* // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).

Пусть $Q = Q(A)$ распределение в D (0,1), соответствующее процессу $\xi = \xi(t)$. Если $Q(xA) \to 0$ при $x \to 0$, то задачу отыскания асимптотики $Q(xA)$ называют задачей о малых уклонениях процесса ξ. В работе приводятся результаты о малых уклонениях винеровского и устойчивого процессов, результаты о малых уклонениях в принципе инвариантности. В качестве следствия получены варианты закона повторного логарифма в форме Чжуна.
Библиогр. 29 назв.

УДК 519.217.4 : 519.219.2

ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИЙ ДЛЯ СРЕДНИХ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДИФФУЗИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ. *Юринский В. В.* // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).

В работе рассматриваются случайные блуждания в случайной среде. В предположении, что случайное поле коэффициентов, описывающих среду, удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания, получены оценки ковариаций континуальных интегралов по распределениям блуждания, отвечающих разным начальным точкам. Оценки этого типа находят применение при исследовании погрешности усреднения эллиптических систем со случайными быстро осциллирующими коэффициентами. Библиогр. 10 назв.

УДК 519.214 : 517.946

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. *Пожидаев А. В.* // Асимптотический анализ распределения случайных процессов.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).

Установлена асимптотическая нормальность решений параболических краевых задач со случайными быстро осциллирующими коэффициентами. При этом предполагалось, что коэффициенты являются m-зависимыми случайными полями, удовлетворяют условию равномерной параболичности и ограничены. Библиогр. 18 назв.

ВНИМАНИЮ ЗАКАЗЧИКОВ!

Для получения книг почтой заказы просим направлять по адресам: 117192 Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин «Книга — почтой» Центральной конторы «Академкнига»; 197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академкнига» или ближайший магазин «Академкнига», имеющий отдел «Книга — почтой».

480091 **Алма-Ата,** ул. Фурманова, 91/97 («Книга — почтой»);
370005 **Баку,** ул. Коммунистическая, 51 («Книга — почтой»);
232600 **Вильнюс,** ул. Университето, 4;
690088 **Владивосток,** Океанский проспект, 140 («Книга — почтой»);
320093 **Днепропетровск,** проспект Гагарина, 24 («Книга — почтой»);
734001 **Душанбе,** проспект Ленина, 95 («Книга — почтой»);
375002 **Ереван,** ул. Туманяна, 31;
664033 **Иркутск,** ул. Лермонтова, 289 («Книга — почтой»);
420043 **Казань,** ул. Достоевского, 53 («Книга — почтой»);
252030 **Киев,** ул. Ленина 42;
252142 **Киев,** проспект Вернадского, 79;
252030 **Киев,** ул. Пирогова, 2;
252030 **Киев,** ул. Пирогова, 4 («Книга — почтой»);
277012 **Кишинев,** проспект Ленина, 148 («Книга — почтой»);
343900 **Краматорск** Донецкой обл., ул. Марата, 1 («Книга — почтой»);
660049 **Красноярск,** проспект Ленина, 2 («Книга — почтой»);
191104 **Ленинград,** Литейный проспект, 57;
199164 **Ленинград,** Таможенный пер., 2;
196034 **Ленинград,** В/О, 9 линия, 16;
220012 **Минск,** Ленинский проспект, 72 («Книга — почтой»);
103009 **Москва,** ул. Горького, 19а;
117312 **Москва,** ул. Вавилова, 55/7;
630076 **Новосибирск,** Красный проспект, 51;
630090 **Новосибирск,** Морской проспект, 22 («Книга — почтой»);
142284 **Протвино** Московской обл., ул. Победы, 8;
142292 **Пущино** Московской обл., МР, «В», 1;
620161 **Свердловск,** ул. Мамина-Сибиряка, 137 («Книга — почтой»);
700000 **Ташкент,** ул. Ю. Фучика, 1;
700029 **Ташкент,** ул. Ленина, 73;
700070 **Ташкент,** ул. Шота Руставели, 43;
700185 **Ташкент,** ул. Дружбы народов, 6 («Книга — почтой»);
634050 **Томск,** наб. реки Ушайки, 18;
634055 **Томск,** Академический проспект, 5;
450059 **Уфа,** ул. Р. Зорге, 10 («Книга — почтой»);
450025 **Уфа,** ул. Коммунистическая, 49;
720000 **Фрунзе,** бульвар Дзержинского, 42;
310078 **Харьков,** ул. Чернышевского, 87 («Книга — почтой»).

0-70к.